Número de absorción y número transversal

Lautaro Ochotorena

18 de mayo de 2023

Índice

1. Preliminares

Definición 1.1. Un grafo G es un par (X,U) en donde

- X es un conjunto de la forma $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ donde sus elementos se llaman vértices
- U es una familia $(u_1, u_2, ..., u_m)$ donde los elementos están en el producto cartesiano $X \times X$ y son llamados arcos

Un elemento $(x, y) \in X \times X$ puede aparecer varias veces en la familia U.
Un elemento $(x, x) \in U$ se llama un loop.

Para un arco $u = (x, y)$, x se llama el extremo inicial e y el extremo final.
Si los arcos no denotan una dirección pasarán a llamarse aristas.

Definición 1.2. Dado un grafo $G = (X, U)$ y $x \in X$ se define el conjunto de los sucesores de x como

$$\Gamma_G^+(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

Del mismo modo se define el conjunto de los antecesores de x como

$$\Gamma_G^-(x) = \{y \in X : (y, x) \in U\}$$

Observación. Por abuso de notación a veces escribiremos $\Gamma(x)$ haciendo referencia a $\Gamma_G^+(x)$

Definición 1.3. Dado un grafo G se define

$$d_G^-(x) := |\Gamma_G^-(x)|$$
$$d_G^+(x) := |\Gamma_G^+(x)|$$

A estos los llamaremos grado negativo y grado positivo, respectivamente.

Definición 1.4. Un grafo G=(X,U) en el cual ningun elemento de $X \times X$ aparece más de p-veces en U es llamado un p-grafo

Definición 1.5. Un grafo $G = (X, U)$ se llama simple si los elementos de U son aristas y

- U no tiene elementos que son loops
- No más de una arista que una dos vértices

2. Número de absorción

Definición 2.1. Para un 1-grafo $G = (X, \Gamma)$, un conjunto $A \subset X$ se define como absorbente si $\forall x \notin A$

$$\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset$$

Denotemos a $\mathcal{A}$ como la familia de todos los conjutos absorbentes del grafo G

Observación. Notemos que $X \in \mathcal{A}$ y

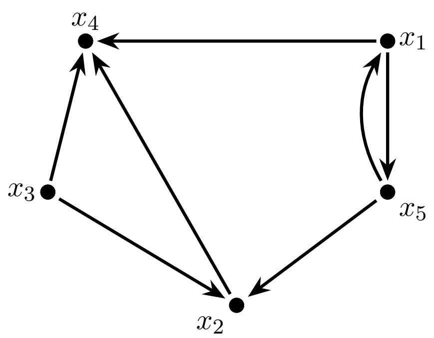
$$\text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ y } A \subset A' \text{ entonces } A' \in \mathcal{A}$$

Definición 2.2. El número de absorción del grafo G se define como

$$\beta(G) = \min_{A \in \mathcal{A}} |A|$$

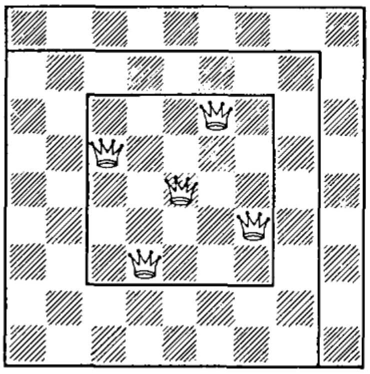
Observación. Si G es un grafo simple su número de dominación $\beta^*(G)$ se define como el número de absorción $\beta(G^*)$ donde G^* se obtiene reemplazando cada arista de G por dos arcos en dirección opuesta

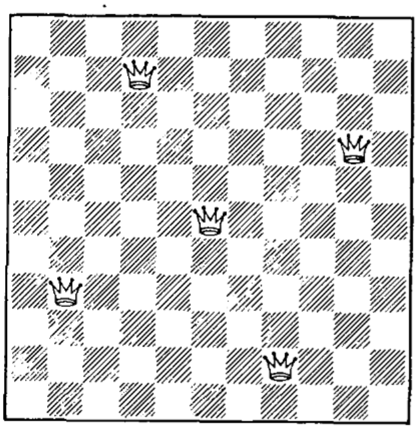
Ejemplo 2.0.1. Estaciones de radares.
Diremos que un vértice x está en vigilancia por el vértice y si hay un arco (x, y) (o sea una arista dirigida de x a y).
Supongamos que tenemos el siguiente grafo



Notar que el vértice x_4 está en vigilancia de los vértices x_3, x_2, x_1.
Queremos hallar el conjunto con el menor número de vértices tales que vigilen a todo el resto. En otras palabras, hallar el menor conjunto absorbente del grafo.
En este caso notemos que con un sólo vértice no podremos tener un conjunto absorbente (ningún vértice tiene grado negativo 4).
Finalmente notemos que el conjunto $A = \{x_4, x_2\}$ constituye un conjunto absorbente y por lo dicho anteriormente es además de cardinalidad mínima.

Ejemplo 2.0.2. Tablero de ajedrez controlado por reinas.
¿Cuál es el número mínimo de reinas que se pueden colocar en un tablero de ajedrez normal?
Podemos considerar al grafo G definido por los movimientos posibles de la reina en un tablero. O sea, una arista que conecte x con y denotaría que una reina puede moverse del casillero x al y en un movimiento (y viceversa).
De esta forma la respuesta a la pregunta está dada por el número de absorción. El cual resulta 5. Más aún, el mismo posicionamiento de las 5 reinas también controla a un tablero 9×9.





El posicionamiento del trablero de la derecha muestra que con 5 reinas se puede controlar un tablero 11×11.
No hay un resultado (aún) para el máximo tamaño $n(k)$ de un tablero que puede ser controlado por k reinas.

Ejemplo 2.0.3. Siendo K_n el grafo completo con n vértices y $K_{r,m}$ el grafo bipartito completo con $r, m \neq 1$

$$\beta(K_n) = 1$$
$$\beta(K_{r,m}) = 2$$

2.1. Cotas del número de absorción

Proposición 2.1.1. Si G es un 1-grafo con n vértices y m arcos, entonces

$$\beta(G) \geq n - m$$

Demostración. Sea A un conjunto absorbente mínimo. Cada vértice de $X - A$ es extremo inicial de un arco que va a A. Por lo tanto

$$n - |A| = |X - A| \leq m$$

Por lo cual

$$\beta(G) = |A| \geq n - m$$

□

Proposición 2.1.2. Si G es un 1-grafo sin loops y con n vértices, entonces

$$\beta(G) \leq n - \max_{x \in X} d_G^-(x)$$

Demostración. Sea x_0 el vértice tal que $d_G^-(x_0) = \max_{x \in X} d_G^-(x)$. Sea el conjunto

$$A = X - \Gamma_G^-(x_0)$$

Veamos que es un conjunto absorbente: Sea $x \notin A$ entonces $x \in \Gamma_G^-(x_0)$ y por lo tanto, como $x_0 \in \Gamma_G(x)$ y $x_0 \notin \Gamma_G^-(x_0)$ (porque no hay loops) tenemos que

$$\Gamma_G(x) \cap (X - \Gamma_G^-(x_0)) \neq \emptyset$$

Por lo cual

$$\beta(G) \leq |A| = n - \max_{x \in X} d_G^-(x)$$

□

Teorema 2.1.3. Si G es un grafo simple con n vértices, m aristas y $\beta^*(G) = k \geq 2$, entonces

$$m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+2)$$

Demostración. Para n=2 esta desigualdad se cumple ya que el grafo tendría 2 vértices y como $\beta^*(G) = k \geq 2$ entonces no queda otra que los vértices sean aislados y por ende el grafo no tiene aristas y además $k = 2$. Claramente verifica la desigualdad

Veamos un caso no contemplado en el teorema pero que nos servirá luego:
Caso $k = 1$
Notemos que

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2}(n-1)(n+1) = \frac{n^2-1}{2}$$

La primera desigualdad se cumple porque G es un grafo simple. Esto se cumple para $n \geq 1$, por lo que se tiene

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2}(n-1)(n+1)$$

Este caso también cumple la desigualdad

Vamos a usar inducción para demostrar el resto de casos:
Para ello supondremos que todo grafo con menos de n vértices y con $\beta^*(G) = k \geq 2$ cumple la desigualdad.
Sea G un grafo con n vértices y $\beta^*(G) = k \geq 2$, consideremos el grafo G^* como el grafo G reemplazando cada arista por dos arcos en dirección opuesta.
Sea x_0 el vértice de máximo grado, por la proposición anterior tenemos que

$$|\Gamma_G(x_o)| = d_{G^*}^-(x_0) = \max_x d_{G^*}^-(x) \leq n - k$$

Escribamos

$$|\Gamma_G(x_o)| = n - k - r \text{ con } 0 \leq r \leq n - k$$

Sea $S = X - \{x_o\} - \Gamma_G(x_o)$ entonces

$$|S| = n - 1 - (n - k - r) = k + r - 1$$

Veamos qué pasa si $\Gamma_G(x_o) = \emptyset$:
El grafo G no tiene aristas ($m = 0$) y notar que $k \leq n$ con lo que

$$\frac{1}{2}(n-k)(n-k+2) \geq 0$$

por lo que se cumple la desigualdad.
Sea $\Gamma_G(x_o) \neq \emptyset$ e $y \in \Gamma_G(x_o)$, el conjunto $C = (S - \Gamma_G(y)) \cup \{x_o, y\}$ es absorbente, veamos por qué.
Si $C = X$ entonces es trivial.
Si $C \neq X$ tomamos $x \notin C$ entonces $x \in C^c = (\Gamma_G(y) \cup (\Gamma_G(x_o)) - \{x_o\} - \{y\} \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} &\text{por lo que o } y \in (\Gamma_G(x) \cap C) \\ &\text{o bien } x_0 \in (\Gamma_G(x) \cap C) \end{aligned}$$

lo que dice que $(\Gamma_G(x) \cap C) \neq \emptyset$ y por lo cual C es un conjunto absorbente.
Además se tiene que

$$|C| = |S - \Gamma_G(y)| + 2 \geq k = \beta^*(G)$$

Se llega a que

$$\begin{aligned} k \leq |S - \Gamma_G(y)| + 2 &= |S| - |S \cap \Gamma_G(y)| + 2 \\ &= k + r - 1 - |S \cap \Gamma_G(y)| + 2 \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo

$$|S \cap \Gamma_G(y)| \leq r + 1$$

Más aún, si G_s es el subgrafo inducido por S y A es el conjunto absorbente mínimo del grafo G_s, entonces $A \cup \{x_o\}$ es un conjunto absorbente del grafo G. Esto se da porque:

Sea $x \notin A \cup \{x_o\}$ entonces $x \in (X - A) - \{x_o\}$ ahora dividamos en dos casos:

- Si $x \in S$ entonces, como $\Gamma_{G_s}(x) \subset \Gamma_G(x)$ y A es absorbente en G_s

$$\Gamma_{G_s}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_G(x) \cap (A \cup \{x_o\}) \neq \emptyset$$

- Si $x \notin S$ entonces $x \in \Gamma_G(x_0)$ (notar que $x \neq x_0$) entonces

$$x_0 \in \Gamma_G(x) \cap (A \cup \{x_0\})$$

Por lo que de ambas maneras se llega a

$$\Gamma_G(x) \cap (A \cup \{x_0\}) \neq \emptyset$$

y por lo cual el $(A \cup \{x_0\})$ es absorbente en el grafo G y entonces

$$|A \cup \{x_o\}| \geq k = \beta^*(G)$$

Y por ende,

$$\beta^*(G_s) \geq k - 1 \geq 2 - 1 = 1$$

Si $\beta^*(G_s) = 1$ ya vimos que podemos usar la desigualdad, sino como G_s tiene menos de n vértices y $\beta^*(G_s) \geq 2$ se puede aplicar la hipótesis inductiva y se tiene que

$$\begin{aligned} m(G_s) &\leq \frac{1}{2}(|S| - (k-1))(|S| - (k-1) + 2) = \\ &= \frac{1}{2}(k + r - 1 - (k-1))(k + r - 1 - (k-1) + 2) = \\ &= \frac{1}{2} r(r+2) \end{aligned}$$

Y por lo tanto, el número m(G) de aristas de G cumple que

$$\begin{aligned}2m(G) &= 2m(G_s) + |\Gamma_G(x_0)| + \sum_{y\in\Gamma_G(x_0)} (|\Gamma_G(y)\cap S| + |\Gamma_G(y)|) \leq \\ &\leq r(r+2) + (n-k-r) + (n-k-r)(r+1) + (n-k-r)^2 = \\ &= (n-k)(n-k+2) - r(n-k-r) \leq \\ &\leq (n-k)(n-k+2)\end{aligned}$$

Por lo que llegamos a lo que queríamos □

Corolario 2.1.4. Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas, entonces

$$\beta^*(G) \leq n+1-\sqrt{1+2m}$$

Demostración. Caso $\beta^*(G)=1$:
Notemos que G es un grafo simple por lo cual $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ y como $n \geq 1$ entonces

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \leq \frac{n^2-1}{2}$$

lo que implica que

$$\sqrt{2m+1} \leq n$$

y por lo tanto

$$1 \leq n+1-\sqrt{2m+1}$$

como queríamos.
Caso $\beta^*(G)=k\geq 2$:
Por el teorema anterior tenemos que multiplicando por 2 esa desigualdad

$$0 \leq (n-k)(n-k+2) - 2m = (n-k)^2 + 2(n-k) - 2m$$

Como $n-k \geq 0$, entonces

$$n-k \geq \frac{-2+\sqrt{4+8m}}{2} = -1+\sqrt{1+2m}$$

o lo que es lo mismo

$$k \leq n+1-\sqrt{1+2m}$$

□

3. Número transversal

Definición 3.1. Sea $X=\{x_1,,x_2,...,x_n\}$ y sea $E=\{E_i\subseteq X : i\in I\}$. La familia E se dice que es un hipergrafo en X si

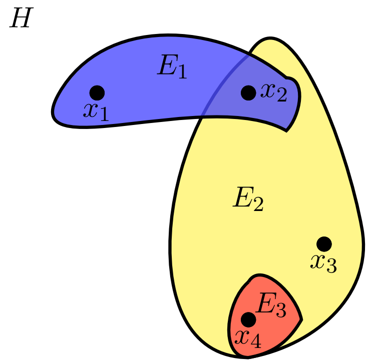
1. $E_i \neq \emptyset \ \forall i\in I$
2. $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = X$

La pareja $H = (X, E)$ se llama un hipergrafo. Los elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ se llaman vértices y los conjuntos $E_1, E_2, ..., E_m$ se llaman aristas.

Por cada arista E_i:

- Se dibuja como una curva encerrando a todos los vértices de E_i

Ejemplo 3.0.1. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ con $E_1 = \{x_1, x_2\}$, $E_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$ y $E_3 = \{x_4\}$.



Definición 3.2. Un conjunto transversal T de un hipergrafo $H = (X, E_1, E_2, ..., E_m)$ se define como $T \subset X$ tal que

$$T \cap E_i \neq \emptyset \text{ (i=1,2,...,m)}$$

Definición 3.3. El número transversal se define como el mínimo número de vértices de un conjunto transversal. Por lo que, si H es un hipergrafo

$$\tau(H) = \text{mín}|T|$$

con T transversal de H.

Ejemplo 3.0.2. Consideremos un grafo $G = (X, \Gamma)$. Sea H el hipergrafo en X con aristas de la forma

$$E_x = \{x\} \cup \Gamma(x)$$

Veamos que cada conjunto absorbente de G es un conjunto transversal de H y viceversa.
Sea A un conjunto absorbente de G, entonces $\forall x \notin A$ se tiene

$$\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset$$

por lo que

$$A \cap E_x \neq \emptyset$$

Si $x \in A$ entonces es claro que

$$A \cap E_x \neq \emptyset$$

Por lo que A es un conjunto transversal de H.
La recíproca:
Si T es un conjunto transversal de H y sea $x \notin T$, como se tiene que

$$T \cap E_x \neq \emptyset$$

entonces

$$T \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$$

por lo que T es un conjunto absorbente de G.
Por lo cual determinar el mínimo conjunto absorbente se reduce a determinar el mínimo conjunto transversal.

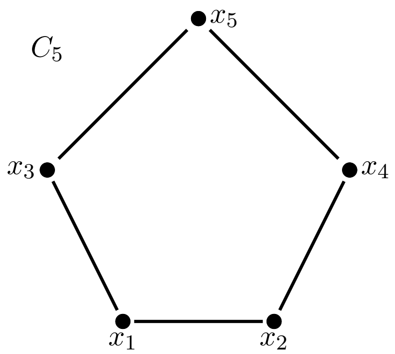
Observación. Uno podría pensar que dado un grafo $G = (X, \Gamma)$ simple se podría armar un hipergrafo H considerando sus aristas como los cliques maximales de G y con ello obtener que todo conjunto absorbente de G sii es un conjunto transversal de H.
Si bien todo conjunto transversal de H es absorbente en G (veremos por qué) la recíproca no se cumple.
Veamos que un conjunto transversal de H es también absorbente en G:
Dado T un conjunto transversal de H, entonces

$$T \cap D \neq \emptyset \text{ para todo } D \text{ clique maximal}$$

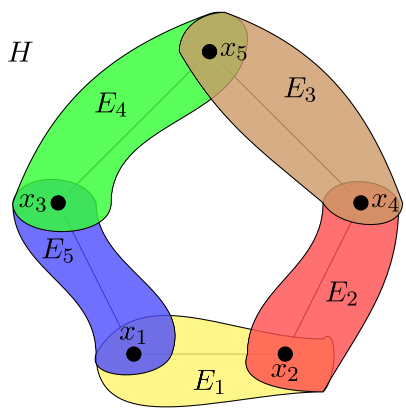
Sea $x \notin T$, notemos que existe D clique maximal tal que $D \subseteq \Gamma(x)$, por lo que

$$\Gamma(x) \cap T \neq \emptyset$$

y por lo cual T es un conjunto absorbente en G.
Para mostrar un contraejemplo de la recíproca consideraremos el grafo C_5:



y si armamos el hipergrafo H con sus aristas como los cliques maximales de G queda



Notar que el conjunto $T = \{x_3, x_2\}$ es un conjunto absorbente de G pero no es un conjunto transversal de H ya que $T \cap E_3 = \emptyset$.
Además, intentemos crear un conjunto transversal de H con 2 vértices:
Como el grafo es simétrico puedo empezar por agarrar cualquier vértice, supongamos que agarro el x_1.
Entonces ya tengo cubierta las aristas E_1 y E_5. Y notemos que no hay forma de agregar otro vértice tal que queden cubiertas las aristas E_2, E_3 y E_4.
Por lo tanto, no existe grafo transversal de H con 2 vértices, por lo que

$$\beta(G) = 2 < \tau(H)$$

3.1. Algoritmo para el número transversal

Para construir un algoritmo para hallar el número transversal primero tenemos que ver unas definiciones y proposiciones.
Sean $\mathcal{A} = \{A_i \subset X : i \in I\}$ y $\mathcal{B} = \{B_j \subset X : j \in J\}$. Definiremos los siguiente conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vee \mathcal{B} &:= \{A_i \cup B_j : (i,j) \in I \times J\} \\
\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} &:= \{A_i \cap B_j : (i,j) \in I \times J\} \\
\ddot{\mathcal{A}} &:= \{T \text{ es transversal de } \mathcal{A}\} \\
\text{Cl } \mathcal{A} &:= \{T \subset X : \text{ para algún } A \in \mathcal{A}, A \subseteq T\} \\
\text{Min } \mathcal{A} &:= \{A \in \mathcal{A} : \nexists A' \in \mathcal{A} - \{A\} \text{ tal que } A' \subseteq A\} \\
\text{Tr } \mathcal{A} &:= \text{Min } \ddot{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{A} \subseteq \text{Cl } \mathcal{A}$

Proposición 3.1.1. $\ddot{\mathcal{A}} = \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}} = (\ddot{\text{Cl } \mathcal{A}})$

Demostración. $\ddot{\mathcal{A}} \subseteq \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}}$ por lo que notamos anteriormente.
Veamos que $\ddot{\mathcal{A}} \supseteq \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}}$.
Sea $T \in \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}}$, entonces $A \subseteq T$ con $A \in \ddot{\mathcal{A}}$ y

$$A \cap A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$$

por lo que

$$T \cap A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$$

por lo que $T \in \ddot{\mathcal{A}}$. De esta forma $\ddot{\mathcal{A}} = \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}}$.

Ahora veamos que $\ddot{\mathcal{A}} \subseteq (\ddot{\text{Cl } \mathcal{A}})$.
Sea $T \in \ddot{\mathcal{A}}$ entonces

$$T \cap A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$$

Queremos ver que

$$T \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \text{Cl } \mathcal{A}$$

Como $B \in \text{Cl } \mathcal{A}$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq B$, por lo que se cumple lo que queriamos.
Ahora probemos $\ddot{\mathcal{A}} \supseteq (\ddot{\text{Cl } \mathcal{A}})$.
Sea $T \in (\ddot{\text{Cl } \mathcal{A}})$ entonces

$$T \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \text{Cl } \mathcal{A}$$

como $\mathcal{A} \subseteq \text{Cl } \mathcal{A}$

$$T \cap A_i \neq \emptyset, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

y se concluye que $\ddot{\mathcal{A}} = \text{Cl } \ddot{\mathcal{A}} = \ddot{(\text{Cl } \mathcal{A})}$. $\square$

Proposición 3.1.2. $\text{Cl } \mathcal{A} = \text{Cl Min } \mathcal{A}$

Demostración. Notemos que $\text{Min } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ y por lo cual, por la definición de Cl se tiene que

$$\text{Cl Min } \mathcal{A} \subseteq \text{Cl } \mathcal{A}$$

Veamos la otra contención:
Sea $T \in \text{Cl } \mathcal{A}$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq T$.
Si $A \in \text{Min } \mathcal{A}$ entonces $T \in \text{Cl Min } \mathcal{A}$.
Si $A \notin \text{Min } \mathcal{A}$ entonces existe $A' \in \text{Min } \mathcal{A}$ tal que $A' \subset A \subset T$ entonces $T \in \text{Cl Min } \mathcal{A}$.
Se concluye que $\text{Cl } \mathcal{A} = \text{Cl Min } \mathcal{A}$. $\square$

Proposición 3.1.3. $\ddot{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})} = \ddot{\mathcal{A}} \cap \ddot{\mathcal{B}}$

Demostración. Sea $T \in \ddot{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})}$ entonces

$$T \cap C \neq \emptyset, \forall C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

en particular, se tiene

$$T \cap A \neq \emptyset, \forall A \in \mathcal{A}$$
$$T \cap B \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}$$

por lo que $T \in \ddot{\mathcal{A}} \cap \ddot{\mathcal{B}}$.
Ahora tomemos $T \in \ddot{\mathcal{A}} \cap \ddot{\mathcal{B}}$ y sea $C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, entonces $C \in \mathcal{A}$ o $C \in \mathcal{B}$, en ambos casos se obtiene que

$$T \cap C \neq \emptyset$$

Se verifica que $\ddot{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})} = \ddot{\mathcal{A}} \cap \ddot{\mathcal{B}}$. $\square$

Proposición 3.1.4. Se tiene que $\text{Min } (\text{Cl } \mathcal{A} \cap \text{Cl } \mathcal{B}) = \text{Min } (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

Demostración. Sea $C \in \text{Min } (\text{Cl } \mathcal{A} \cap \text{Cl } \mathcal{B}) \implies \begin{cases} A \subseteq C \text{ para algún } A \in \mathcal{A} \\ B \subseteq C \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \end{cases}$
$\implies A \cup B \subseteq C$ y notar que existe D tal que $C \supseteq D \in \text{Min } (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ y además

$$D = A' \cup B', \text{ con } A' \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{B}$$

Como $A' \subseteq D$ entonces $D \in \text{Cl } \mathcal{A}$.
De forma análoga, $D \in \text{Cl } \mathcal{B}$.
Por lo cual $D \in \text{Cl } \mathcal{A} \cap \text{Cl } \mathcal{B}$, por lo que existe $C' \in \text{Min } (\text{Cl } \mathcal{A} \cap \text{Cl } \mathcal{B})$

$$C' \subseteq D \subseteq C$$

como C era un conjunto minimal entonces

$$C = C' = D \in \text{Min } (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

Se verifica que Min $(\mathrm{Cl}\ \mathcal{A} \cap \mathrm{Cl}\ \mathcal{B}) \subseteq$ Min $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.
La otra contención se da porque si $D \in (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ entonces $D = A_i \cup B_j$.
Como

$$\begin{aligned} A_i &\subseteq D \\ B_j &\subseteq D \end{aligned}$$

entonces $D \in \mathrm{Cl}\ \mathcal{A} \cap \mathrm{Cl}\ \mathcal{B}$ (Se acaba de probar que $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Cl}\ \mathcal{A} \cap \mathrm{Cl}\ \mathcal{B}$)
De esto se desprende que

$$\mathrm{Min}\ (\mathrm{Cl}\ \mathcal{A} \cap \mathrm{Cl}\ \mathcal{B}) \supseteq \mathrm{Min}\ (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

□

Proposición 3.1.5. Tr $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) =$ Min (Tr $\mathcal{A} \vee$ Tr $\mathcal{B}$)

Demostración. Usando las últimas 4 proposiciones se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) &= \mathrm{Min}\ (\mathcal{A}\, \ddot{\cup}\, \mathcal{B}) = \mathrm{Min}\ (\ddot{\mathcal{A}} \cap \ddot{\mathcal{B}}) \\ &= \mathrm{Min}\ (\mathrm{Cl}\ \ddot{\mathcal{A}} \cap \mathrm{Cl}\ \ddot{\mathcal{B}}) \\ &= \mathrm{Min}\ (\mathrm{Cl}\ \mathrm{Min}\ \ddot{\mathcal{A}} \cap \mathrm{Cl}\ \mathrm{Min}\ \ddot{\mathcal{B}}) \\ &= \mathrm{Min}\ (\mathrm{Cl}\ \mathrm{Tr}\ \mathcal{A} \cap \mathrm{Cl}\ \mathrm{Tr}\ \mathcal{B}) \\ &= \mathrm{Min}\ (\mathrm{Tr}\ \mathcal{A} \vee \mathrm{Tr}\ \mathcal{B}) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.6. Tr $\mathcal{A} =$ Tr Min $\mathcal{A}$

Demostración. Usando las proposiciomes ya vistas

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ \mathcal{A} &= \mathrm{Min}\ \ddot{\mathcal{A}} = \mathrm{Min}\ (\ddot{\mathrm{Cl}}\ \mathcal{A}) = \\ &= \mathrm{Min}\ (\mathrm{Cl}\ \ddot{\mathrm{Min}}\ \mathcal{A}) = \mathrm{Min}\ (\ddot{\mathrm{Min}}\ \mathcal{A}) = \\ &= \mathrm{Tr}\ (\mathrm{Min}\ \mathcal{A}) \end{aligned}$$

□

Algoritmo para construir conjuntos transversales minimales

Se quiere calcular Tr $\mathcal{A}$ ya que estos representar los conjuntos transversales minimales, el procedimiento es el siguiente:
Primero se determina Min $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$.
Y luego se construyen las siguiente familias:

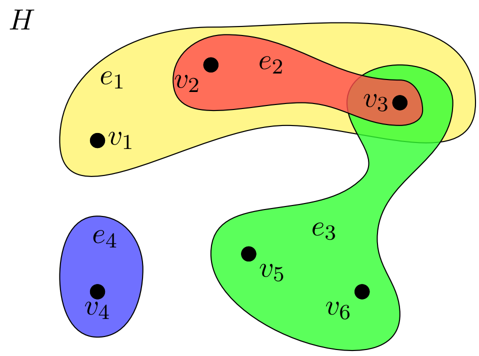
$$\begin{array}{lcr} \mathcal{A}_1 = \{A_1\} & \Longrightarrow & \mathrm{Tr}\ \{A_1\} = \{\{a\} : a \in A_1\} \\ \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{A_2\} & \Longrightarrow & \mathrm{Tr}\ \mathcal{A}_2 = \mathrm{Min}\ (\mathrm{Tr}\ \mathcal{A}_1 \vee \mathrm{Tr}\ \{A_2\}) \\ \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{A_3\} & \Longrightarrow & \mathrm{Tr}\ \mathcal{A}_3 = \mathrm{Min}\ (\mathrm{Tr}\ \mathcal{A}_2 \vee \mathrm{Tr}\ \{A_3\}) \end{array}$$

La proposición 3,1,5 muestra que Tr $\mathcal{A}_{t+1}$ se obtiene de Tr $\mathcal{A}_t$. Como Min $\mathcal{A}$ tiene k elementos, entonces el algoritmo construye Tr $\mathcal{A} =$ Tr Min $\mathcal{A} =$ Tr $\mathcal{A}_k$ en k pasos.

3.2. Aplicación del algoritmo

Veamos cómo resulta aplicar el algoritmo a los siguiente grafos

Ejemplo 3.2.1. Sea $H = (X, E)$ un hipergrafo con $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$



Queremos hallar Tr E.
Notemos que Min $E = \{e_2, e_3, e_4\}$.
Siguiendo el algoritmo obtenemos que

$$E_1 = \{e_2\} \longrightarrow \text{Tr } (E_1) = \{\{v_2\}, \{v_3\}\}$$

Ahora tomamos $E_2 = \{e_2, e_3\}$

$$\begin{aligned} \text{Tr } (E_1) \vee \text{Tr } \{e_3\} &= \{\{v_2\}, \{v_3\}\} \vee \{\{v_3\}, \{v_5\}, \{v_6\}\} \\ &= \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}\} \end{aligned}$$

Por lo que Tr $E_2 = \text{Min } (\text{Tr } (E_1) \vee \text{Tr } \{e_3\}) = \{\{v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$
Ahora tomamos $E_3 = \{e_2, e_3, e_4\}$

$$\begin{aligned} \text{Tr } (E_2) \vee \text{Tr } \{e_4\} &= \{\{v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\} \vee \{\{v_4\}\} \\ &= \{\{v_3, v_4\}, \{v_2, v_5, v_4\}, \{v_2, v_6, v_4\}\} \end{aligned}$$

Finalmente Tr $E = \text{Tr } E_3 = \text{Min } (\text{Tr } (E_2) \vee \text{Tr } \{e_4\}) = \{\{v_3, v_4\}, \{v_2, v_5, v_4\}, \{v_2, v_6, v_4\}\}$
Tan sólo falta tomar un conjunto de Tr E tal que tenga la menor cardinalidad.
Ese es $A = \{v_3, v_4\}$ y por lo cual

$$\beta(H) = 2 \tag{1}$$