Colegio Universitario IESSiglo 21	
SEGUNDA INSTANCIA EVALUATIVA	
Materia: Algebra Lineal	**Docente:** Augusto Chaves
Modalidad: Presencial	**Fecha:** 28/06/2021
Alumno: Lautaro Santos Da Silveira	**Carrera:** Inteligencia Artificial
Dni: 43 879 787	**Cuatrimestre:** Segundo / **Turno:** Noche

Nota

Objetivos:

1. Reconocer los conceptos clave relativos a la diagonalización de matrices.
2. Resolver con técnicas de ´algebra lineal las situaciones problemáticas propuestas.

Criterio de Evaluación: Se evaluará la interpretación y claridad con la que se expresan los conceptos y metodología aplicada en la resolución de la situación planteada, como así también los conceptos teóricos.

Modalidad de Evaluación: Desarrollo teórico-práctico de las consignas planteadas. Sean *a, b, c, d* los cuatro primeros dígitos no nulos (leyendo de izquierda a derecha) de tu DNI. Por ejemplo, si el DNI es 95087511, entonces $a = 9$, $b = 5$, $c = 8$, $d = 7$. Y forma los dos números *ab* y *cd*. En nuestro caso $ab = 95$ $cd = 87$.

1. Dos ciudades de nombres Villa la Bestia y Villa el final del mundo, poseen un flujo vehicular que sigue el siguiente patrón

   - El *ab*% de los autos de la ciudad Villa la Bestia se trasladan a la ciudad Villa el final,
   - El *cd*% de los autos de la ciudad Villa el final se trasladan a la ciudad Villa la Bestia.

   Suponiendo que inicialmente hay 15000 autos en la ciudad Villa la Bestia y 25000 autos en la ciudad Villa el final, hallar:

   a) 10 puntos. La matriz A de transición de estados.

   b) 10 puntos. El polinomio característico $P(\lambda)$ y los valores característicos y los vectores característicos de la matriz A.

   c) 10 puntos. La matriz P formada por los vectores característicos de A y la matriz P^{-1}.

   d) 10 puntos. Encontrar la matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$ y verificar esta igualdad.

   e) 10 puntos. Mostrar una expresión explicita y simple de las potencias de la matriz A usando el resultado anterior.

   f)) 10 puntos. Calcular explícitamente cuantos autos habrá en cada ciudad a él cualquier periodo.

2. 20 puntos. Explicar con sus propias palabras y en términos de los que vimos en los capítulos de transformaciones lineales y matrices el significado de las matrices P y D del ejercicio 1 en relación a la matriz A del mismo ejercicio.

3. 20 puntos. Considere la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + 5x_1y_2 - x_2y_2.$$

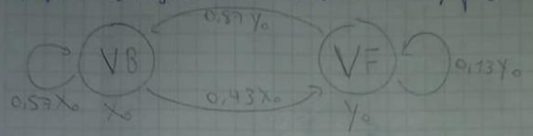
Decidir si *f* es simétrica o antisimétrica. En caso contrario que no sea ninguna de las anteriores expresarla como una suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

RESPUESTAS:

1)

HOJA 1:

1a) En este ejercicio, el ab% será 43%, y el cd% será 87%.



$X_1 = 0,57 X_0 + 0,87 Y_0 \qquad Y_1 = 0,43 X_0 + 0,13 Y_0$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,57 & 0,87 \\ 0,43 & 0,13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

- La matriz A de transición de estados será: $A = \begin{bmatrix} 0,57 & 0,87 \\ 0,43 & 0,13 \end{bmatrix}$

b) $P(\lambda) = \det(A - \lambda . Id)$

$$= \begin{bmatrix} 0,57-\lambda & 0,87 \\ 0,43 & 0,13-\lambda \end{bmatrix} = (0,57-\lambda).(0,13-\lambda) - 0,87 . 0,43$$

$$= 0,07 - 0,57\lambda - 0,13\lambda + \lambda^2 - 0,37 = \lambda^2 - 0,7\lambda - 0,3 = 0$$

- Polinomio Caracteristico = $\lambda^2 - 0,7\lambda - 0,3 = 0$

$\lambda_1 = \frac{0,7+1,3}{2} = 1$

$\lambda_2 = \frac{0,7-1,3}{2} = -0,3$

- Valores caracteristicos = $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -0,3$

$$E_{\lambda_1} = (A - \lambda_1 . Id) = \begin{bmatrix} 0,57-1 & 0,87 \\ 0,43 & 0,13-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,43 & 0,87 \\ 0,43 & -0,87 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0,43 & 0,87 & 0 \\ 0,43 & -0,87 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{de Matrices obtuve}]{\text{con la calculadora}} \left[\begin{array}{cc|c} -0,43 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = -0,43X + 0,87 = 0$$

$X = \frac{0,87}{0,43} Y$

$Y = 1$; $X = 2,02$

$$Ker(A - \lambda_1 . Id) = gen\left\{\begin{bmatrix} 2,02 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = E_{\lambda_1}$$

HOJA 2:

$$E_{\lambda_2} = (A - \lambda_2 . Id) = \begin{bmatrix} 0,57-(-0,3) & 0,87 \\ 0,43 & 0,13-(-0,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,87 & 0,87 \\ 0,43 & 0,43 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,87 & 0,87 & 0 \\ 0,43 & 0,43 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{de Matrices obtenga}]{\text{con calculadora}} \left[\begin{array}{cc|c} 0,87 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 0,87X + 0,87Y = 0$$

$X = -\frac{0,87}{0,87} Y$

$Y = 1$; $X = -1$

$$Ker(A - \lambda_2 . Id) = gen\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = E_{\lambda_2}$$

- Vectores caracteristicos: $E_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 2,02 \\ 1 \end{bmatrix}$; $E_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) - Matriz $P = \begin{bmatrix} 2,02 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Matriz P^{-1}: Para calcular la inversa de P use la calculadora de matrices, el me dió lo sig.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,67 \end{bmatrix}$$

d) Matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix}$, tal que $A = P.D.P^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2,02 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,33 & 0,33 \\ -0,33 & 0,67 \end{bmatrix};$$ con calculadora de matrices, obtuve

$$A = \begin{bmatrix} 0,57 & 0,87 \\ 0,43 & 0,13 \end{bmatrix}$$

Hoja 3:

e) Formule explísite $= \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}02 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & -0{,}3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}33 \\ -0{,}33 & 0{,}67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}02 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n \cdot 0{,}33 + \cancel{0 \cdot (-0{,}33)} & 1^n \cdot 0{,}33 + \cancel{0 \cdot 0{,}67} \\ \cancel{0 \cdot 0{,}33} + (-0{,}3^n) \cdot (-0{,}33) & 0 \cdot 0{,}33 + (-0{,}3^n) \cdot 0{,}67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}02 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n \cdot 0{,}33 & 1^n \cdot 0{,}33 \\ 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & -0{,}3^n \cdot 0{,}67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}02 \cdot 1^n \cdot 0{,}33 + (-1 (0{,}3^n \cdot 0{,}33)) & 2{,}02 \cdot 1^n \cdot 0{,}33 + (-1 \cdot (-0{,}3^n \cdot 0{,}67)) \\ 1 \cdot 1^n \cdot 0{,}33 + 1 \cdot 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & 1 \cdot 1^n \cdot 0{,}33 + 1 \cdot (-0{,}3^n) \cdot 0{,}67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}66 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & 0{,}66 - 0{,}67 \cdot 0{,}3^n \\ 0{,}33 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & 0{,}33 - 0{,}67 \cdot (0{,}3)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

F) $\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}66 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & 0{,}66 - 0{,}67 \cdot 0{,}3^n \\ 0{,}33 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33 & 0{,}33 - 0{,}67 \cdot 0{,}3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15.000 \\ 25.000 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (0{,}66 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33) \cdot 15.000 + (0{,}66 - 0{,}67 \cdot 0{,}3^n) \cdot 25.000 \\ (0{,}33 + 0{,}3^n \cdot 0{,}33) \cdot 15.000 + (0{,}33 - 0{,}67 \cdot 0{,}3^n) \cdot 25.000 \end{bmatrix}$$

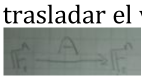
$$= \begin{bmatrix} 9900 + 4950 \cdot 0{,}3^n + 16500 - 16750 \cdot 0{,}3^n \\ 4950 + 4950 \cdot 0{,}3^n + 4950 - 16750 \cdot 0{,}3^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26400 - 11.800 \cdot 0{,}3^n \\ 9900 - 11.800 \cdot 0{,}3^n \end{bmatrix}$$

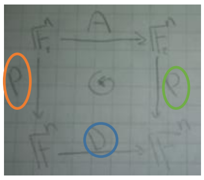
2)

La Matriz D está compuesta por los valores característicos (λ) que se consiguen con el polinomio característico y se ubican en forma diagonal, por lo que D es una matriz Diagonal.

La Matriz P está compuesta por los vectores característicos generadores (E_λ) de λ_1 y λ_2 respectivamente.

La función de P es trasladar un vector a otro lenguaje de vectores, y la función de D es la de trasladar el vector hallado con P a otra base, por ejemplo: si queremos pasar de 

como la matriz A es cuadrada y el sistema conmuta, entonces se puede decir que $A = P*D*P^{-1}$, al decir esto estoy haciendo el siguiente camino:



y al decir P^{-1} digo que hará el camino inverso que P

3)

3) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 + 5 \cdot x_1 \cdot y_2 - x_2 y_2$ $\quad B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$F(e_1, e_1) = 1.1 + 5.1.0 - 0.0 = 1$ | $F(e_2, e_1) = 0.1 + 5.0.0 - 1.0 = 0$

$F(e_1, e_2) = 1.0 + 5.1.1 - 0.1 = 5$ | $F(e_2, e_2) = 0.0 + 5.0.1 - 1.1 = -1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Como $A \neq A^t$, no es simétrica, y como $-A \neq A^t$, no es asimétrica, por ende:

$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = [x_1 \; x_2] \cdot \frac{A + A^t}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [x_1 \; x_2] \cdot \frac{A - A^t}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = [x_1 \; x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [x_1 \; x_2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2{,}5 \\ -2{,}5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$