



HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS II: ANÁLISIS MATEMÁTICO
APUNTE TEÓRICO Y PRACTICO
PROF. DR. CARLOS DI PRINZIO
MÓNICA BOCCO



HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS II: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Objetivos generales de la materia:

Profundizar los conocimientos matemáticos básicos y adquirir los conceptos matemáticos necesarios para resolver cuantitativamente problemas inherentes a las áreas de cada carrera. Desarrollar las capacidades para organizar, procesar e interpretar información, comprendiendo y utilizando los aportes del pensamiento matemático. Generar criterios apropiados para analizar situaciones propias de las distintas áreas específicas del conocimiento. Perfeccionar habilidades que le permitan plantear modelos matemáticos para la solución de un problema.

Unidades

Unidad 1:

Relaciones y Funciones. Relaciones entre conjuntos. Conjuntos de partida y de llegada de una relación. Funciones. Dominio e Imagen. Diferentes formas de determinar y representar una función: tabla, gráficas y fórmulas. Funciones: su clasificación. Operaciones con funciones. Aplicaciones concretas de los conceptos en situaciones problemáticas.

Unidad 2:

Funciones lineales y cuadráticas. Funciones lineales. Gráficos. Distintos tipos. Ecuación de una recta. Pendiente y ordenada al origen. Modelos lineales, explicativos y predictivos. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Distintos casos. Vértice de una parábola. Raíces o ceros. Ecuación de segundo grado. Aplicaciones concretas en situaciones problemáticas del entorno del futuro quehacer profesional.

Unidad 3:

Funciones exponenciales, logarítmica y trigonometría. Funciones exponenciales. Definición. Dominio e imagen. Representación gráfica. Monotonía del crecimiento. Aplicaciones a crecimientos de interés. Función logarítmica. Inversa de la función exponencial. Definición. Gráficas. Monotonía del crecimiento. Propiedades de los logaritmos. Aplicaciones modelización de situaciones concretas. Ángulos. Sistema de medición. Funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente. Propiedades: ceros, extremos, periodicidad, crecimiento y decrecimiento. Gráficas. Funciones reciprocas e inversas.



Unidad 4:

Límite y continuidad de funciones: Límite. Concepto gráfico, definición y ejemplos. Unicidad del límite, límite lateral, límites de funciones especiales, operaciones con límites: suma, resta, multiplicación y división. Cálculo de límite usando propiedades fundamentales. Límites notables. Número e . Límites infinito y en el infinito. Límites indeterminados. Continuidad de una función en un punto. Continuidad en un infinito. Funciones discontinuas.

Unidad 5:

Derivación de funciones reales. Cociente incremental. Definición de derivada. Interpretación geométrica y económica. Función derivada. Derivada de funciones elementales. Constantes, lineales, potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Notación para la derivada. Álgebra de la derivada. Derivada de la suma, de la resta, del producto y de la división de funciones. Rectas secantes y tangentes a la curva. Regla de la cadena. Derivada de orden superior. Costo, ingreso y beneficio marginal en economía.

Unidad 6:

Aplicación de la derivada: Gráfico de funciones. Máximo y mínimo de funciones, Puntos críticos y Puntos extremos. Condición suficiente y necesaria para la existencia de puntos críticos. Funciones crecientes, decrecientes y constante en un intervalo. Relación con la derivada primera. Puntos de inflexión. Condición suficiente y necesaria para la existencia de puntos críticos. Intervalos de concavidad y convexidad, relación con la derivada segunda. Aplicaciones en gráficos de distintas funciones. La campana de gauss en estadística y funciones de comportamiento marginal en optimización. Planteo y resolución de problemas de óptimos: máxima ganancia, menor costo, máxima superficie mayor producción.

Unidad 7:

Integración de funciones reales: Integración indefinida. Definición de primitiva de una función. Cálculos de primitivas. Integral indefinida de las funciones elementales. Constantes, lineales, potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Propiedades de la integral indefinida. Cálculo de integrales indefinidas. Técnicas de integración.

Unidad 8:

Aplicación de las integrales. Integral definida de una función continua en un intervalo, definición, Suma superior e inferior de Riemann, Propiedades de la definida. Regla de Barrow: método de cálculo. Cálculo de áreas en el plano limitadas por una función continua y el eje de las abscisas en un intervalo. Áreas encerradas por curvas arbitrarias. Propiedades de áreas en el plano limitadas por funciones continuas y el eje de las abscisas en un intervalo. Áreas encerradas por curvas arbitrarias. Propiedades de las áreas de las figuras planas. Aplicaciones a problemas concretos. Costos e ingresos a partir de los datos respectivos.



Cronograma en el segundo semestre del 2008.

Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
13 Relaciones Funciones	3 Funciones exponenciales y logarítmicas	1 Derivadas Derivada de funciones elementales. Regla de la cadena	5 Repaso Parcial 2
20 Funciones lineales Funciones cuadráticas	10 Funciones trigonométricas	8 Derivadas. Puntos críticos	12 Devolución y 3 nota.
	17 Límite y continuidad	15 Integración	19 Parcial recuperatorio
	24 Repaso Parcial	22 Aplicación de la integral	
		29 Aplicación de la integral	

Unidad 1:

RELACIONES Y FUNCIONES

Conjunto, relación y función:

Un conjunto es la reunión de una serie de elementos que pueden o no tener algo en común.

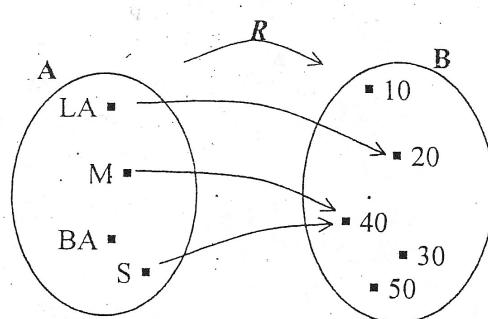
Sea A el conjunto formado por todos los números naturales N menores a 5. Ese conjunto A puede ser representado por extensión:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

o por comprensión:

$$A = \{x / x \in N \quad \vee \quad x \leq 5\}$$

Los conjuntos pueden estar relacionados entre sí mediante lo que llamamos una relación. Comenzaremos por dar unos ejemplos de relaciones entre conjuntos.



Ejemplo 1:

En este simple ejemplo el conjunto A tiene el nombre de una empresa y el conjunto B tiene el número de empleados. La relación entre ellos es:

$R : A \rightarrow B$ $xRy \quad$ si y sólo si “la empresa x tiene y empleados”.

Una **relación** es una correspondencia que asocia elementos de un conjunto *A*, llamado **conjunto de partida** de la relación, con elementos del conjunto *B*, llamado **conjunto de llegada**.

DomR = Dominio de la relación R, conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.

Im gR = **Imagen de la relación R**, conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

Siempre se verifica que:

$$DomR \subseteq A \qquad \qquad \qquad \text{Im } gR \subseteq B$$

Ejemplo 2:

$R : A \rightarrow B$ si y sólo si “el alumno x tiene en álgebra la nota y ”

Las relaciones que verifican:

1. $\text{Dom}R = A$
2. Cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del conjunto de llegada, llamado su *imagen*

se llaman:

FUNCIONES

Una **FUNCIÓN** de A en B es una relación que asocia a todo elemento del conjunto A con uno y sólo uno del conjunto B , llamado su *imagen*.

En símbolos:

$$f : A \rightarrow B$$

$$f : x \rightarrow y$$

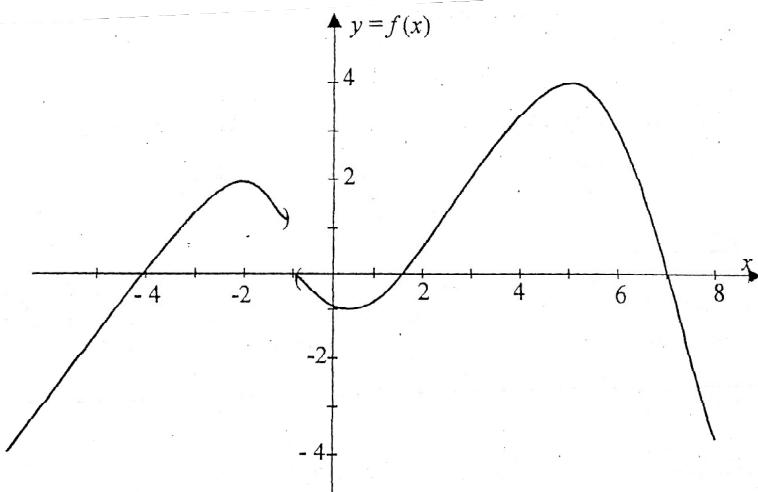
$$f(x) = y$$

Representación de Funciones:

- Tablas
- Gráficos
- Fórmulas

A continuación damos ejemplos de funciones mediante representaciones gráficas y mediante su expresión matemática.

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x^5$$

$$h(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$F(x) = \sqrt{x}$$

Funciones numéricas

Son las funciones que relacionan variables independientes con variables dependientes que pertenecen, ambas, a conjuntos de números. En el siguiente ejemplo se muestra una función numérica:

Ejemplo 1:

$$y = x^2 + x + 1$$

x : variable independiente

$y = f(x)$: variable dependiente

(R)

x, y : números reales

Ejemplo 2:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(x-5)}}$$

x : variable independiente

$y = f(x)$: variable dependiente

x : número (R) mayor que 5

Nota: El *dominio* de definición de una función numérica es el *mayor subconjunto* de números reales (R) para los cuales se puede calcular la imagen por la función.

Funciones constantes, crecientes y decrecientes

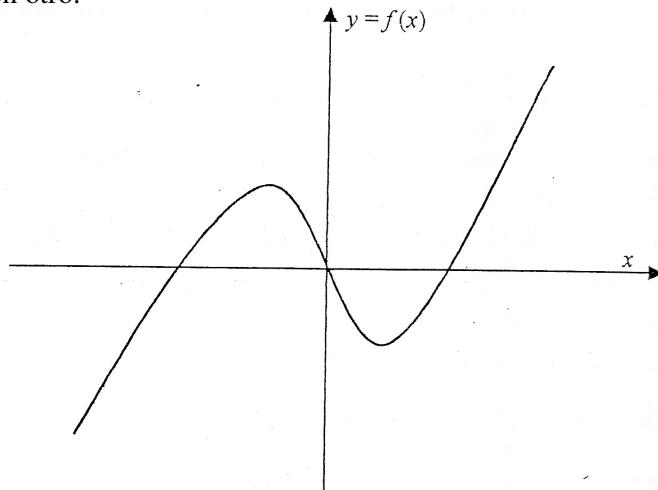
- Una función f se dice **constante** en un intervalo $I \subseteq Domf$, si para todo x en el intervalo I se verifica:
 - $f(x) = c$ c es un número real
- Una función f se dice **creciente** en un intervalo $I \subseteq Domf$, si para x_1, x_2 en el intervalo I se verifica:
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Una función f se dice **decreciente** en un intervalo $I \subseteq Domf$, si para x_1, x_2 en el intervalo I se verifica:
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Operaciones con funciones:

Si f y g son dos funciones, definimos:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$

A continuación damos un ejemplo de una función que es creciente en ciertos intervalos y decreciente en otro.

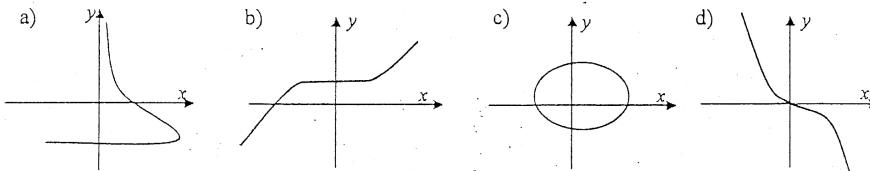


Conceptos básicos

1. Un elemento es un objeto que puede ser un número, un objeto físico o un pensamiento.
2. Un conjunto es una reunión de elementos que pueden tener o no una relación entre ellos.
3. Una relación es una correspondencia que asocia elementos del conjunto A , llamado conjunto de partida de la relación, con elementos del conjunto B , llamado conjunto de llegada.
4. Una función de A en B es una relación que asocia a cada elemento del conjunto A uno y sólo uno del conjunto B , llamado su imagen.
5. El conjunto dominio de una función es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados por la función con, al menos, un elemento del conjunto de llegada. El conjunto imagen de una función es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que son imagen de algún elemento del dominio.
6. Para una función numérica su dominio de definición es el mayor subconjunto de números reales para los cuales la función se define; es decir, todos los valores x para los cuales la fórmula permite calcular valores reales y .

Ejercicios:

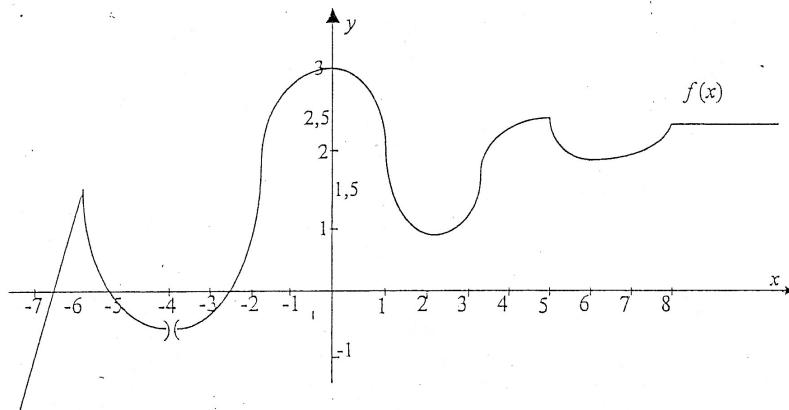
Ejercicio 1: ¿cuál de los siguientes gráficos representan funciones? Justificar la respuesta.



Ejercicio 2: dada la función $f(x) = 3x + 2$ encontrar:

- a. $f(x)$ b. $f(0)$ c. $f(-1)$ d. $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ e. $f(a)$ f. $f(x + \Delta x)$

Ejercicio 3: para la función f cuyo gráfico se encuentra a continuación indicar, si es posible:



1. dominio de la función
2. imagen de la función
3. corte con el eje y
4. $f(2)$
5. $f(5)$
6. $f(0)$
7. la imagen de -2.5
8. la imagen de 10
9. el valor de x cuya imagen es -1
10. el intervalo donde f es constante
11. los intervalos donde f es creciente
12. los intervalos donde f es decreciente

Ejercicio 4: indicar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x - 5$ b. $g(x) = x^2 + 2x + 5$ c. $H(t) = \frac{1}{t}$

d. $M(x) = \sqrt{x - 2}$ e. $G(x) = \frac{5}{x + 5}$

Ejercicio 5: para las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = \frac{2}{1+x}$ encontrar, si es posible:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a. $(f + g)(1)$ | b. $(f - g)(2)$ | c. $(f \cdot g)(0)$ |
| d. $\left(\frac{f}{g}\right)(5)$ | e. $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ | f. $\left(\frac{g}{f}\right)(1)$ |



Situaciones problemas: Modelización

Ejercicio 6: una Pyme con un capital original de \$20.000 tiene ingresos y gastos semanales de \$3.000 y \$2.600 respectivamente; si los beneficios quedan completamente en la empresa, exprese la función que permite definir el valor V de la empresa al final de t semanas, considerando la variable independiente el tiempo.

Ejercicio 7: si el costo de producir 10 unidades de un producto es de \$40 y el de 20 unidades es de \$70, sabiendo que el costo de producción C de la empresa está relacionado linealmente con la cantidad x de unidades producidas:

1. ¿cuál es la función que permite describir los costos de producción?
2. estimar el costo de producir 35 unidades del mismo producto.

Ejercicio 8: dada la función $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ encontrar, si es posible:

- a. $g(-3)$ b. $g(0)$ c. $g(-1)$ d. $g(-4)$ e. $g(1)$ f. $g(a)$

Ejercicio 9: indicar el dominio de definición para cada función:

- a. $F(t) = (t+1) - t^3$ b. $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ c. $f(x) = \sqrt{3-x}$
d. $H(x) = 1 - \frac{1}{x-4}$

Respuestas:

Ejercicio 1:

- a) No es una función, existen elementos con más de una imagen.
b) Si es función.
c) No es una función, existen elementos con más de una imagen.
d) Si es función.

Ejercicio 2:

- a) 9
b) -1
c) -3
d) -4
e) $2a-1$
f) $2(x + \Delta x) - 1$

Ejercicio 3:

- a) $\text{Dom } f = R - \{-4\}$
b) $\text{Im } f = R_{\leq 3} = (-\infty, 3]$
c) 3
d) 1
e) 2.5
f) 3
g) 0



- h) 2.5
- i) -7
- j) $(8, +\infty)$
- k) $(-\infty, 6), (-4, 0), (2, 5), (6, 8)$
- l) $(-6, 4), (0, 2), (5, 6)$

Ejercicio 4:

- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- b) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$
- c) $\text{Dom } H = \mathbb{R} - \{0\}$
- d) $\text{Dom } M = \mathbb{R}_{\geq 2} = [2, +\infty]$
- e) $\text{Dom } G = \mathbb{R} - \{-5\}$

Ejercicio 5:

- a) 3
- b) $\frac{16}{3}$
- c) 0
- d) 90
- e) No existe
- f) $\frac{1}{2}$

Ejercicio 6:

$$V(t) = 400t + 20000$$

Ejercicio 7:

- a) Costo de producción de la empresa $C(x) = 3x + 10$ con x número de unidades producidas
- b) Costo de producir 35 unidades del mismo producto \$115,00.

Ejercicio 8:

- | | |
|------------------|------------------------|
| a) $\frac{1}{4}$ | d) $\frac{1}{9}$ |
| b) 1 | e) $\frac{1}{4}$ |
| c) no existe | f) $\frac{1}{(a+1)^2}$ |

Ejercicio 9:

- a) $\text{Dom } F = \mathbb{R}$
- b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$
- c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}_{\leq 3} = (-\infty, 3]$
- d) $\text{Dom } H = \mathbb{R} - \{4\}$

Unidad 2:

FUNCIONES LINEALES

Llamamos función lineal a una función $f : R \rightarrow R$ que verifica:

$$f(x) = ax + b \quad \text{o} \quad y = ax + b$$

con a y b números reales, llamados parámetros de la función. El parámetro a se llama pendiente y el parámetro b es la ordenada al origen.

La función lineal puede presentarse en tres tipos diferentes:

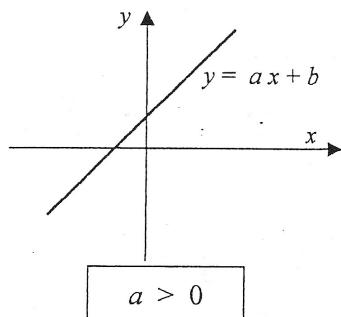
- | | | |
|--------------------|---|--------------|
| 1. $f(x) = b$ | o | $y = b$ |
| 2. $f(x) = ax$ | o | $y = ax$ |
| 3. $f(x) = ax + b$ | o | $y = ax + b$ |

Debemos tener en cuenta las siguientes características:

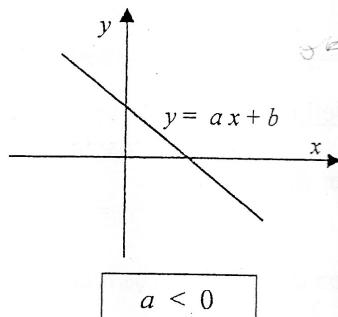
- El gráfico de una función lineal es una línea recta.
- La recta que representa a una función lineal queda determinada únicamente con 2 puntos.
- NO toda recta es el gráfico de una función lineal.

Nombre y significado de los Parámetros

El parámetro a de la función lineal $f(x) = ax + b$ se llama pendiente de la recta e indica la inclinación de la misma.

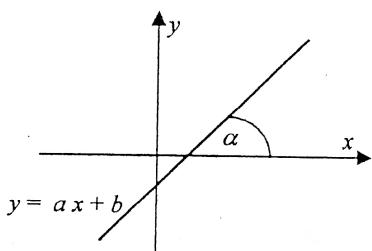


Recta Creciente



Recta Decreciente

Significado Geométrico de la pendiente:

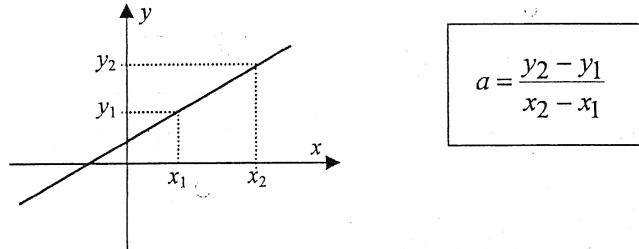


$a = \tan \alpha$ donde α es el ángulo que forman la recta con el sentido positivo del eje x (medido en sentido antihorario)

El parámetro b de la función lineal $f(x) = ax + b$ se llama ordenada al origen de la recta e indica el punto donde la recta corta al eje y .

Pendiente de la Recta que pasa por dos puntos conocidos

Si conocemos que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta de ecuación $f(x) = ax + b$, entonces la pendiente a verifica que:



Paralelismo y Perpendicularidad de Rectas

Rectas paralelas:

Las rectas r_1 de ecuación $y = ax_1 + b_1$
 r_2 de ecuación $y = ax_2 + b_2$

son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir:

$$r_1 \parallel r_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2$$

Rectas perpendiculares:

Las rectas r_1 de ecuación $y = ax_1 + b_1$
 r_2 de ecuación $y = ax_2 + b_2$

son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son inversas y de signo contrario, es decir:

$$r_1 \perp r_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

La función lineal tiene múltiples aplicaciones en la vida diaria y su utilidad puede verse en el problema siguiente:

Los clientes demandan 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad y 25 unidades del mismo producto cuando cuesta \$18 cada unidad.

¿Cuál es la ecuación de demanda de dicho producto que relaciona el precio x con la cantidad demandada y ?

Vemos que los clientes demandan

$$40u \rightarrow \$12$$

$$25u \rightarrow \$18 \Rightarrow \left(\frac{40 - 25}{12 - 18} \right) u = \frac{15}{6} u = 2,5 u$$

Vemos que la pendiente de la función lineal es $a = 2,5 \frac{u}{\$}$

Puede deducirse que $b = 10u$

Por lo tanto la ecuación de demanda de dicho producto es lineal y tiene la forma:

$$y = 2,5 \frac{u}{\$} (x\$) + 10u$$

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Llamamos función cuadrática a una función $f : R \rightarrow R$ que verifica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

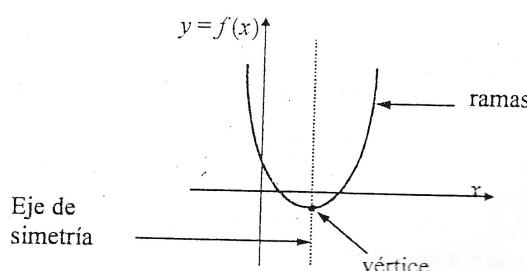
donde a, b y c son números reales, llamados parámetros de la función y $a \neq 0$

a : Término cuadrático ($a \neq 0$)

b : Término lineal

c : término independiente

Gráfico de la Función Cuadrática: Parábola



I) El término cuadrático: a

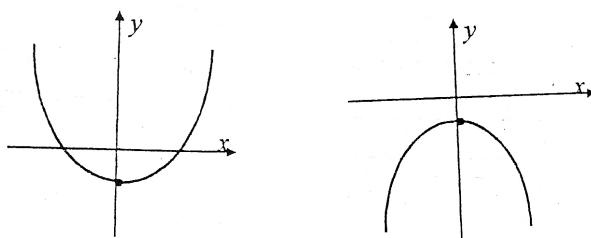
- Si $a > 0$ la parábola tiene “ramas hacia arriba” y la función tiene un mínimo en el vértice
- Si $a < 0$ la parábola tiene “ramas hacia abajo” y la función tiene un máximo en el vértice

II) El término independiente: c

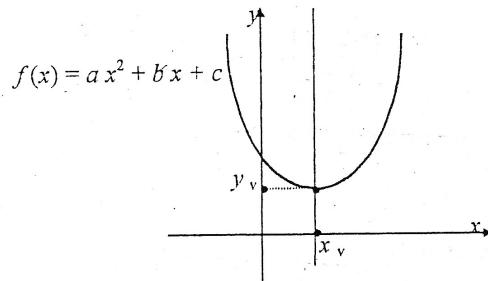
$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f(0) = c$$

- El valor de c indica el punto donde la parábola corta al eje y

Ejemplo: ¿Cuál es el signo de a ? ¿y cual es el signo de c ?



III) El término lineal: b



$b \rightarrow$ desplazamiento horizontal \rightarrow Vértice (x_v, y_v)

Vértice de la Función Cuadrática:

$$(x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, y_v \right) \text{ con } y_v = f(x_v)$$

Intersección de la Parábola con los Ejes Coordenados

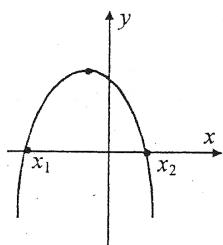
- Eje y : Par ordenado $(0, c)$
- Eje x : $ax^2 + bx + c = 0$ Ecuación Cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 Raíces de la Ecuación Cuadrática

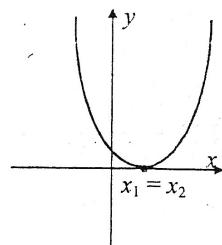
Discriminante: $D = b^2 - 4ac$

Distintos casos de resultados del Discriminante:

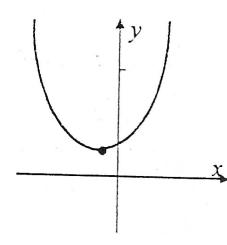
$D > 0$
(2 raíces)



$D = 0$
(1 raíz)



$D < 0$
(Sin raíces reales)



No existen x_1, x_2

La ecuación cuadrática tiene múltiples aplicaciones y este ejemplo es una de ellas:

Para un exportador de productos no tradicionales se conoce que la función de demanda es:

$$p = (12000 - 3x)$$

donde p es el precio por unidad en U\$S cuando x unidades son demandadas.

¿Qué nivel de producción maximizará el ingreso total del exportador? ¿Cuál será dicho ingreso máximo?

$$\text{Ingreso Total} = \text{Precio} \cdot \text{Cantidad}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= px \\ I(x) &= (12000 - 3x)x \\ I(x) &= (12000x - 3x^2) \end{aligned}$$

Conceptos básicos:

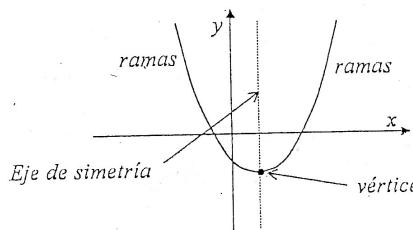
Función lineal:

1. Una función lineal es una función de la forma $f(x) = ax + b$ o $y = ax + b$ donde a y b son números reales.
2. La constante a se llama pendiente de la recta, e indica la inclinación de la misma. Si $a > 0$ la recta es creciente, si $a < 0$ la recta es decreciente y si $a = 0$ la recta es constante.
3. La constante b se llama ordenada al origen de la recta, e indica el punto donde la misma corta al eje y .
4. La pendiente de una recta que contiene los puntos conocidos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

5. La ordenada al origen b de una recta que pasa por los puntos conocidos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por $b = y_2 - ax_2$
6. Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales y son perpendiculares si sus pendientes son una inversa de la otra y de signo contrario.

Función cuadrática:

7. una función cuadrática es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$
8. el gráfico de una función cuadrática se llama parábola y su forma general es:



9. la constante a , que se llama coeficiente del término cuadrático, indica hacia donde "van" las ramas de la misma. Si $a > 0$ las ramas van hacia arriba y si $a < 0$ las ramas van hacia abajo.
10. la constante b indica el desplazamiento del eje de simetría de la parábola.
11. la constante c indica el punto donde la parábola corta al eje y .

12. el vértice de la parábola está dado por el par ordenado (x_v, y_v) , donde $x_v = \frac{-b}{2a}$
e $y_v = f(x_v)$

13. las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ indican los puntos donde la

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

parábola corta el eje x , si existen, y están dados por

(donde x_1 se obtiene sumando el resultado de la raíz cuadrada y x_2 se obtiene restando el resultado de la raíz cuadrada)

14. el signo del número $D = b^2 - ac$, llamado discriminante, indica cuantas raíces (cortes con el eje x) tiene la ecuación cuadrática.

Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: graficar en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones lineales:

a. $f(x) = 2x$ b. $y = 2x - 1$ c. $y = 2x + 3$ d. $f(x) = 2$

Indicar para cada una:

1. ¿cuál es la pendiente de la recta?
2. ¿cuál es la ordenada al origen?

Ejercicio 2: encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada recta y realizar su gráfico:

a. $2x + y - 2 = 0$ b. $3x - 3y = -9$

Ejercicio 3: encontrar la ecuación de la recta y realizar el gráfico en cada caso:

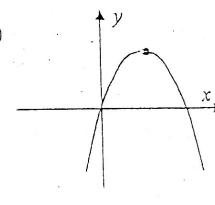
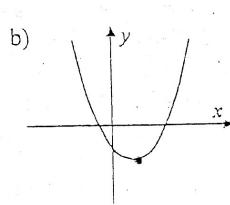
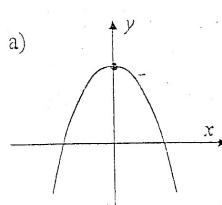
1. con pendiente $a = -2$ y ordenada al origen 3
2. con pendiente $a = -2$ y pasa por el punto $(1,3)$
3. con ordenada al origen -3 y que pasa por el punto $(3,0)$
4. que pasa por los puntos $(-2,1)$ y $(4,5)$
5. paralela a la recta $y = -2x + 8$ y que pasa por el origen
6. perpendicular a la recta $y = 3x - 1$ y tiene ordenada al origen 2

Ejercicio 4:

Los siguientes gráficos representan funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Indicar en cada caso el signo de los coeficientes a, b y c y del discriminante D .

Justificar cada respuesta.





Ejercicio 5: graficar sin dar valores numéricos a los coeficientes a, b y c una parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ que cumpla en cada caso:

1. $a > 0 \quad b = 0 \quad c < 0$
2. $a > 0 \quad b > 0 \quad c < 0$
3. $a < 0 \quad b > 0 \quad c = 0$

Ejercicio 6: graficar las siguientes funciones. Indicar para cada función:

- Punto de corte de la parábola con el eje y
- Las coordenadas del vértice de la parábola
- Puntos de corte de la parábola con el eje x (si existen)

a. $y = 3x^2$ b. $y = 3x^2 - 3$ c. $y = 3x^2 + 3x$
d. $y = x^2 - 2x + 1$ e. $y = -x^2 + 2x - 4$

Situaciones problemas. Modelización

Ejercicio 7: graficar en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones lineales:

a. $f(x) = -4x$ b. $y = -4x + 3$ c. $y = -4$ d. $f(x) = -4x - 2$

Indicar para cada una:

1. ¿cuál es la pendiente de la recta?
2. ¿cuál es la ordenada al origen?

Ejercicio 8: encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada recta, y realizar su gráfico:

a. $2x - y + 3 = 0$ b. $2x + 2y + 5 = 0$ c. $6 - 2x + \frac{1}{2}y = 0$ d. $3y + 9x = 6$

Ejercicio 9: encontrar la ecuación de la recta:

1. que interseca al eje y en 1 y tiene pendiente 4
2. con pendiente 0 y que pasa por el punto (2,5)
3. que pasa por los puntos (-2,1) y (6,3)
4. que corta al eje x en 3 y al eje y en 3
5. paralela a la recta $4x + 2y - 1 = 0$ y que pasa por el punto (2,2)
6. perpendicular a la recta $3x + y - 1 = 0$ y que pasa por el punto (-1,1)

Ejercicio 10: en la siguiente tabla figura un programa de ofertas. En la misma se muestra la relación entre el precio p y la cantidad q que se demandará a dicho precio:

Precio por unidad	Cantidad demandada
500	11
600	14
700	17
800	20

- a) Indicar el dominio e imagen de la función.

- b) Graficar los puntos conocidos para la función y trazar un bosquejo de la curva de la oferta.
- c) ¿Es la función de oferta creciente o decreciente con respecto al precio?
- d) Si suponemos que la función que modeliza el programa de ofertas es lineal ¿podría establecer una expresión que la represente?

Ejercicio 11: en pruebas para dietas para cerdos se determinó que el peso (promedio) P en kilogramos de un cerdo es, estadísticamente, una función lineal del número de días d después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 Kg. y después ganó 6.6 Kg. cada 10 días.

- a) Determinar la expresión de la función que permite modelizar el peso del cerdo en cada día d de la dieta.
- b) Indicar dominio e imagen de la función.
- c) Realizar un gráfico de la misma.
- d) Calcular el peso del cerdo 50 días después que inicia la dieta.

Ejercicio 12: el porcentaje de población de una provincia argentina que se encuentra realizando estudios en la EGB3 se puede modelizar por la función lineal:

$$P(t) = 1,25t + 15$$

donde $P(t)$ es el porcentaje de población realizando EGB3 el t año después de 1990.

- a) Encontrar $P(0)$, $P(1)$, $P(10)$
- b) ¿Qué porcentaje de población se espera que esté cursando la EGB3 en el año 2005?
- c) Graficar $P(t)$

Ejercicio 13: la siguiente tabla muestra una lista de precios de viajes para envío de producción de una empresa de transporte terrestre y la correspondiente ganancia mensual (en miles de pesos) de la empresa:

Precio del viaje	200	250	300	350	400	450
Ganancia	30,8	35,2	37,6	38,2	37,0	33,8

Un modelo que explica la relación está dado por: $y(p) = -0,32p^2 + 223,3p + 714,3$ donde p representa el precio del viaje e y la ganancia de la empresa por realizar los p viajes.

- a) Cuando el precio del viaje se incrementa, la empresa debería tener mayores ganancias. Explique porqué cuando el precio llega a una cierta cantidad, la ganancia decrece.
- b) Dar el precio a partir del cual la ganancia de la empresa transportista deja de crecer (a partir del modelo y contrastar con la tabla).
- c) ¿A qué precio la empresa obtendrá una ganancia negativa, lo cual significa una pérdida neta?

Ejercicio 14: el número A promedio de accidentes de tránsito registrados en un día para el país, en función de la edad x del conductor puede representarse por la función:

$$A(x) = 0,45x^2 - 41x + 1059 \text{ para } 18 \leq x \leq 80$$



- ¿cuántos accidentes pueden calcularse que serán producto de jóvenes de 18 años de edad conduciendo?
- ¿qué edad de los conductores asegura el menor número de accidentes diarios?
¿cuántos accidentes pueden esperarse derivados de conductores con dicha edad?

Ejercicio 15: graficar las siguientes funciones. Indicar para cada función:

- Punto de corte de la parábola con el eje y
- Las coordenadas del vértice de la parábola
- Puntos de corte de la parábola con el eje x (si existen)

a. $y = -x^2$ b. $y = -x^2 + 2x$ c. $y = -x^2 + 2$
d. $y = 2x^2 + 12x + 18$ e. $y = -2x^2 + 10x - 7$

Ejercicio 16: en una empresa se determina que el monto de producción P (en \$) en función del número de obreros N se comporta según la siguiente relación funcional:

$$P(N) = -10N^2 + 1500N$$

Mientras que los costos responden a un comportamiento funcional:

$$C(N) = 2,5N^2 + 2500$$

- Sabiendo que el beneficio B de la empresa está dado por la diferencia entre P y C , obtener el número de obreros que deben ocuparse de forma de alcanzar el máximo beneficio e indicar a cuánto asciende el mismo.
- Graficar las funciones P, C y B .
- A partir de los gráficos indicar el número de obreros que deben ocupar para que los costos sean inferiores a los montos de producción.

Respuestas:

Ejercicio 1:

- | | |
|-----------------|------------------------|
| a) Pendiente =2 | Ordenada al origen: 0 |
| b) Pendiente =2 | Ordenada al origen: -1 |
| c) Pendiente =2 | Ordenada al origen: 3 |
| d) Pendiente =0 | Ordenada al origen: 2 |

Ejercicio 2:

- | | |
|------------------|----------------------|
| a) Pendiente =-2 | Ordenada al origen=2 |
| b) Pendiente =1 | Ordenada al origen=3 |

Ejercicio 3:

- | | |
|------------------|-------------------------------------|
| a) $y = -2x + 3$ | d) $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ |
| b) $y = -2x + 5$ | e) $y = -2x$ |
| c) $y = x - 3$ | f) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ |

Ejercicio 4:

- a) $a < 0 \quad b = 0 \quad c > 0 \quad D > 0$
- b) $a > 0 \quad b < 0 \quad c < 0 \quad D > 0$
- c) $a < 0 \quad b > 0 \quad c = 0 \quad D > 0$

Ejercicio 6:

- a) i) Punto de corte de la parábola con el eje y $(0,0)$
 ii) Las coordenadas del vértice de la parábola $(0,0)$
 iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = x_2 = 0$.
- b) i) Punto de corte de la parábola con el eje y $(0,-3)$
 ii) Las coordenadas del vértice de la parábola $(0,-3)$
 iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.
- c) i) Punto de corte de la parábola con el eje y $(0,0)$
 ii) Las coordenadas del vértice de la parábola $(-1/2, -3/4)$
 iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$.
- d) i) Punto de corte de la parábola con el eje $(0,1)$
 ii) Las coordenadas del vértice de la parábola $(1,0)$
 iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = x_2 = 1$.
- e) i) Punto de corte de la parábola con el eje y $(0,-4)$
 ii) Las coordenadas del vértice de la parábola $(1,-3)$
 iii) Raíces de la parábola o corte eje x : No Hay Raíces Reales.

Ejercicio 7:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| a) Pendiente $= -4$ | Ordenada al origen $= 0$ |
| b) Pendiente $= -4$ | Ordenada al origen $= 3$ |
| c) Pendiente $= 0$ | Ordenada al origen $= 4$ |
| d) Pendiente $= -4$ | Ordenada al origen $= -2$ |

Ejercicio 8:

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| a) Pendiente $= 2$ | Ordenada al origen $= 3$ |
| b) Pendiente $= -1$ | Ordenada al origen $= -5/2$ |
| c) Pendiente $= 4$ | Ordenada al origen $= -12$ |
| d) Pendiente $= -3$ | Ordenada al origen $= 2$ |

Ejercicio 9:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = 4x + 1$ | d) $y = -x + 3$ |
| b) $y = 5$ | e) $y = -2x + 6$ |
| c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ | f) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ |

Ejercicio 10:

- a) $\text{Dom } f = \{500, 600, 700, 800\}$ e $\text{Im } f = \{11, 14, 17, 20\}$
- b) Función creciente
- c) $q = f(p) = \frac{3}{100}p - 4$

Ejercicio 11:

- a) $P(d) = 0,66d + 20$
- b) $DomP = [0,100] \text{ e } Im f = \{20,86,6\}$
- c) $P(50) = 53,3kg$

Ejercicio 12:

- a) $P(0) = 15 ; P(1) = 16,25 ; P(10) = 27,5$
- b) 33,75%

Ejercicio 13:

- b) Precio a partir del cual la ganancia deja de crecer es \$348,90 (en tabla de observaciones el precio se ubica en \$350,00).
- c) Precio a partir del cual la empresa obtendrá una ganancia negativa es \$700,99 (el otro valor de las raíces de la función $y(p)$ no tiene sentido en las aplicaciones reales es $x_1 = -3,18$.

Ejercicio 14:

- a) Accidentes que serán producto de jóvenes de 18 años de edad: 467 aproximadamente.
- b) Edad promedio de los conductores que asegura el menor número de accidentes diarios: 45,5 años y para dicha edad pueden esperarse 125 accidentes aproximadamente.

Ejercicio 15:

- a) i) Punto de corte de la parábola con el eje y (0,0)
ii) Las coordenadas del vértice de la parábola (0,0)
iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = x_2 = 0$
- b) i) Punto de corte de la parábola con el eje y (0,0)
ii) Las coordenadas del vértice de la parábola (1,1)
iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = 2$ y $x_2 = 0$
i) Punto de corte de la parábola con el eje y (0,2)
ii) Las coordenadas del vértice de la parábola (0,2)
iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$
- c) i) Punto de corte de la parábola con el eje y (0,18)
ii) Las coordenadas del vértice de la parábola (-3,0)
iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = x_2 = -3$
- d) i) Punto de corte de la parábola con el eje y (0,-7)
ii) Las coordenadas del vértice de la parábola (-2,5,5,5)
iii) Raíces de la parábola o corte eje x : $x_1 = 4,2$ y $x_2 = 0,8$

Ejercicio 16:

- a) Beneficio B (en \$) $B(N) = -12,5N^2 + 1500N - 2500$
- b) Número de obreros que deben ocuparse de forma de alcanzar el máximo beneficio: 60 obreros, en cuyo caso el máximo beneficio será de \$42.500,00.
- c) Números de obreros que se deben ocupar para que los costos sean inferiores a los montos de producción: entre 2 y 118 obreros.

Unidad 3

FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMETRICAS

Llamamos función exponencial a una función que verifica:

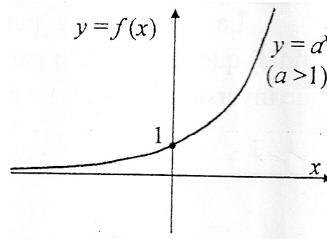
$$f(x) = a^x$$

donde la base a es un número real, que cumple $a > 0$ y $a \neq 1$

Propiedades de la Función Exponencial:

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$

- $\text{Dom } f = R$
- $\text{Im } f = R_{>0} = (0, +\infty)$
- Interseca al eje y en $(0, 1)$
- No interseca al eje x
- Es una función creciente
- Si $x \rightarrow +\infty$ es $f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow -\infty$ es $f(x) \rightarrow 0$



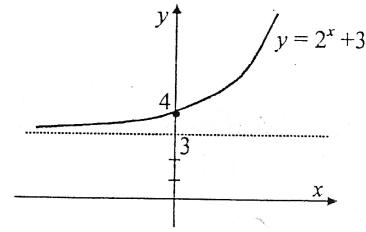
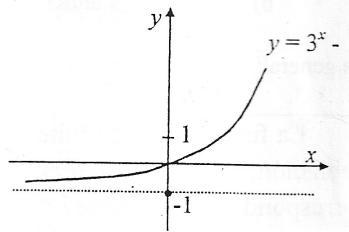
Transformación de la Función Exponencial:

La función exponencial puede tener un término independiente b tal que la misma se transforma en:

$$f(x) = a^x + b$$

- $\text{Dom } f = R$
- $\text{Im } f = R_{>0} = (b, +\infty)$
- Interseca al eje y en $(0, 1+b)$
- Interseca al eje x en $x/a^x = -b$
- Es una función creciente
- Si $x \rightarrow +\infty$ es $f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow -\infty$ es $f(x) \rightarrow b$

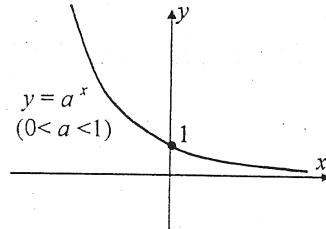
Ejemplos:



Propiedades de la Función Exponencial:

$$f(x) = a^x \text{ con } 0 < a < 1$$

- $\text{Dom } f = R$
- $\text{Im } f = R_{>0} = (0, +\infty)$
- Interseca al eje y en $(0, 1)$
- No interseca al eje x
- Es una función decreciente
- Si $x \rightarrow +\infty$ es $f(x) \rightarrow 0$
- Si $x \rightarrow -\infty$ es $f(x) \rightarrow +\infty$



La función exponencial de este tipo puede tener un término independiente b tal que la misma se transforma en:

$$f(x) = a^x + b$$

- $\text{Dom } f = R$
- $\text{Im } f = R_{>0} = (b, +\infty)$
- Interseca al eje y en $(0, 1+b)$
- interseca al eje x en $x/a^x = -b$
- Es una función decreciente
- Si $x \rightarrow +\infty$ es $f(x) \rightarrow 0$
- Si $x \rightarrow -\infty$ es $f(x) \rightarrow +\infty$

Dos funciones exponenciales particulares:

$$y = e^x = (2,7172....)^x \quad \text{Crecimientos Naturales}$$

$$y = 10^x \quad \text{Base Decimal}$$

La exponencial se aplica a varios problemas como por ejemplo:

Ejemplo 1:

Si un capital de \$1000 es invertido a una tasa del 5% de interés compuesto anual ¿cuánto se obtiene como monto al finalizar el ...

- ... primer año de inversión?
- ... segundo año de inversión?
- ... año x de inversión?

La función que permite modelar el Capital Final CF (Cantidad Final) que se obtiene a partir de un Capital Inicial CI al final de x años de inversión a una tasa r de interés compuesto es:

$$\underline{CF(x) = CI(1+r)^x}$$

Ejemplo 2:

Si una población universitaria de 5000 alumnos crece a razón del 12% anual
¿cuántos alumnos habrá...

- a) ... el próximo año?
- b) ... en dos años?
- c) ... después de x años?

La función que permite modelar la cantidad de individuos P de una población a partir de una población inicial P_o , si el crecimiento anual corresponde a una tasa de $r\%$ es:

$$\underline{P(x) = P_o(1+r)^x}$$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Llamamos función logarítmica, de base a con $a > 0$ y $a \neq 1$ a la función que verifica:

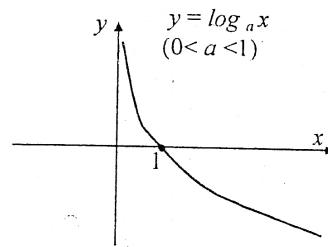
$$f(x) = \log_a x$$

y se define como: $\log_a x = b \rightarrow a^b = x$

Propiedades de la Función Logarítmica:

$$y = \log_a x \quad \text{con } a > x$$

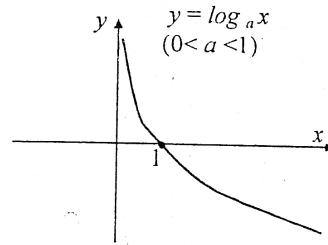
- ❖ $\text{Dom } f = R_{>0} = (0, +\infty)$
- ❖ $\text{Im } g = R$
- ❖ Interseca al eje x en $(0,1)$
- ❖ No interseca al eje y
- ❖ Es una función creciente
- ❖ Si $x > 1$ es $f(x) = \log_a x$ positivo
- ❖ Si $0 < x < 1$ es $f(x) = \log_a x$ negativo



Propiedades de la Función Logarítmica:

$$y = \log_a x \quad \text{con } 0 < x < 1$$

- ❖ $\text{Dom } f = R_{>0} = (0, +\infty)$
- ❖ $\text{Im } g = R$
- ❖ Interseca al eje x en $(0,1)$
- ❖ No interseca al eje y
- ❖ Es una función decreciente
- ❖ Si $x > 1$ es $f(x) = \log_a x$ negativo
- ❖ Si $0 < x < 1$ es $f(x) = \log_a x$ positivo



Dos funciones logarítmicas particulares:

$$y = \log_{10} x = \log x \quad \text{Logaritmo Decimal}$$

$$y = \log_e x = \ln x \quad \text{Logaritmo Natural}$$

Propiedades del Logaritmo:

1. $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
2. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
3. $\log_a(m^r) = r \cdot \log_a m$

Cambio de Base:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

La función logaritmo se aplica en varias situaciones de la economía así por ejemplo:

¿Cuánto tiempo deberemos tener invertido un capital de \$1000 a una tasa de interés del 6% para alcanzar un monto de \$1338?

$$1338 = 1000 (1 + 0,06)^t$$

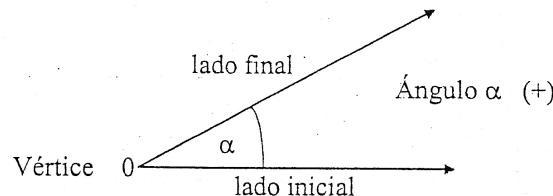
$$1,338 = (1,06)^t$$

$$t = \frac{\ln(1,338)}{\ln(1,06)}$$

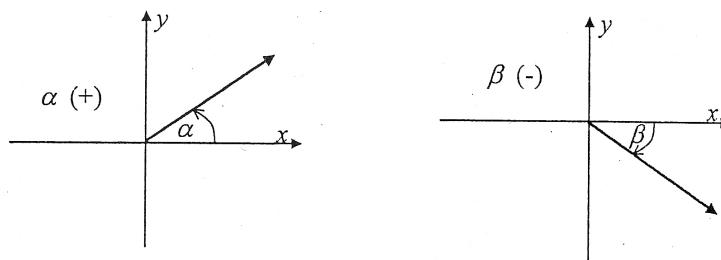
ÁNGULOS, SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ángulos:

Ángulo es el área del plano comprendida entre dos semirrectas que se intersecan en un punto.



En el plano cartesiano coordenado:



Existen varios sistemas de medición de ángulos y entre ellos podemos citar el sistema radial y sexagesimal.

El sistema sexagesimal es que actualmente se utiliza a diario. La circunferencia de radio unidad esta dividida en 360 partes y cada parte se denomina grado. Un ángulo recto tiene 90 grados y un ángulo llano tiene 180 grados.

En el caso del sistema radial la circunferencia de radio unidad tiene una longitud

2π . Un ángulo recto tiene $\frac{\pi}{2}$ y un ángulo llano tiene π . En general se denomina radian a la unidad de medida en este sistema.

Trigonometría es la parte de la matemática que estudia las medidas del triángulo.

Funciones trigonométricas

Función seno:

Llamamos función seno del ángulo t a la función:

$$f(t) = \operatorname{sen} t$$

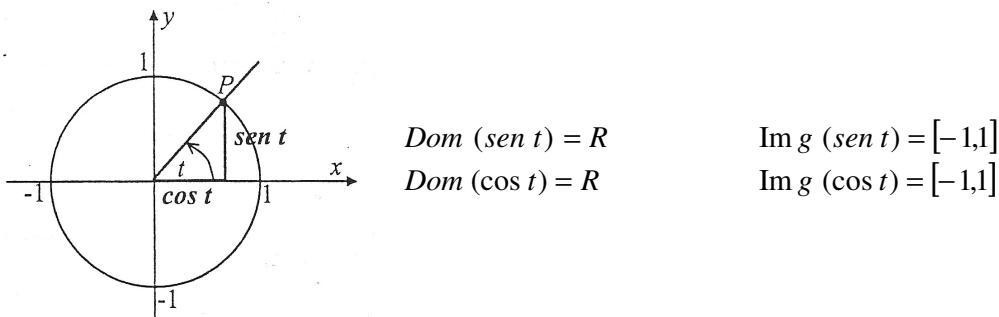
Que asigna a cada ángulo t el valor de la ordenada del punto P donde el lado final del ángulo que mide t radianes, interseca a la circunferencia de radio 1.

Función coseno:

Llamamos función coseno del ángulo t a la función

$$f(t) = \cos t$$

Que asigna a cada ángulo t el valor de la abscisa del punto P donde el lado final del ángulo que mide t radianes, interseca a la circunferencia de radio 1.



Signos del Seno y Coseno en los 4 Cuadrantes

Cuadrante	Valores del ángulo t	$\operatorname{Sen} t$	$\operatorname{Cos} t$
I	$0^\circ - 90^\circ / 0 \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	+	+
II	$90^\circ - 180^\circ / \frac{\pi}{2} \text{ rad} - \pi \text{ rad}$	+	-
III	$180^\circ - 270^\circ / \pi \text{ rad} - \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	-	-
IV	$270^\circ - 360^\circ / \frac{3\pi}{2} \text{ rad} - 2\pi \text{ rad}$	-	+

Periodicidad del Seno y Coseno:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \operatorname{sen}(t + 2\pi) \\ \cos t &= \cos(t + 2\pi) \end{aligned}$$

Las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son periódicas, de período 2π

Relación Fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Función Tangente:

Llamamos función tangente del ángulo t a la función

$$f(t) = \operatorname{tg} t$$

que se define por:

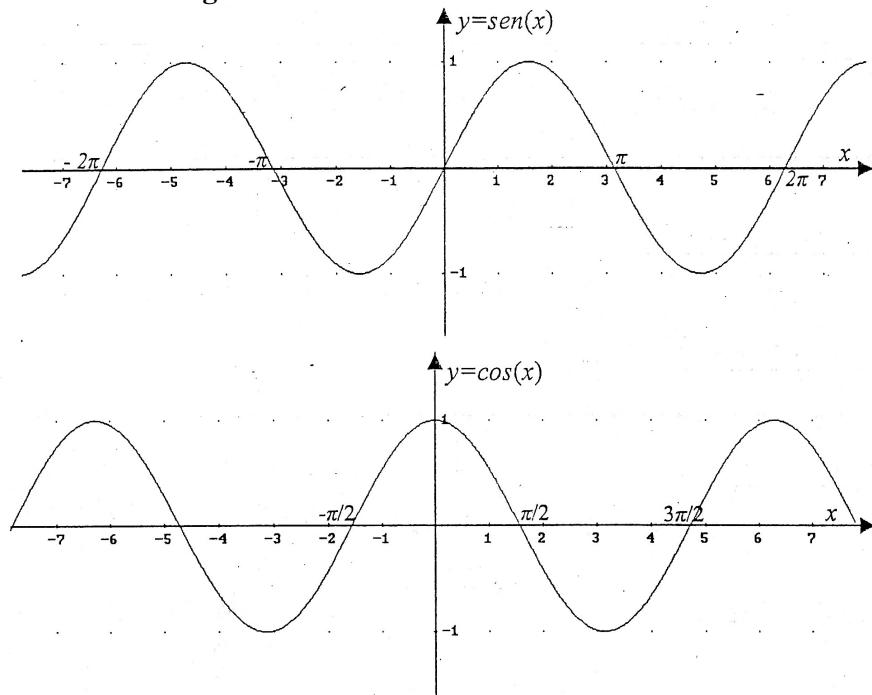
$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

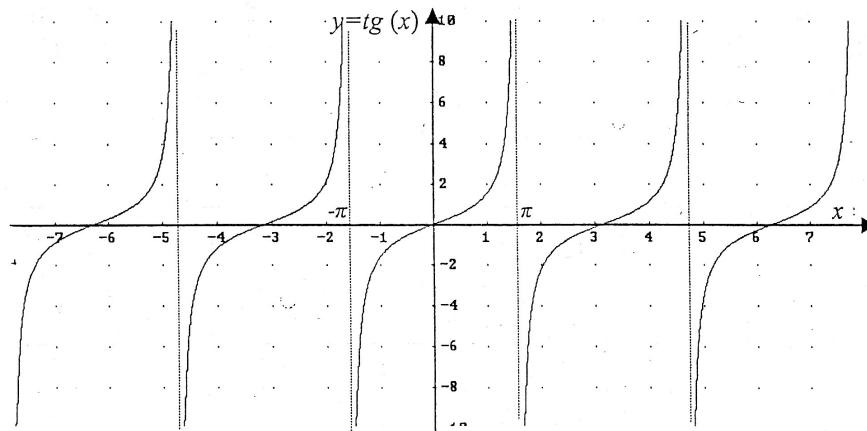
y asigna a cada ángulo t el valor de la ordenada del punto Q que tiene abscisa 1 y se encuentra sobre el lado final del ángulo que mide t radianes.

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{tg} t) = R - \left\{ (2\pi + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$
- $\operatorname{Im} g(\operatorname{tg} t) = R$

Por definición, la función tangente se representa siempre en el I y cuadrante.

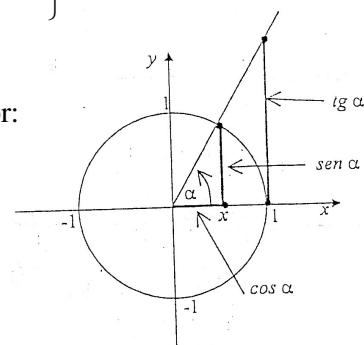
Gráficos de las funciones trigonométricas:





Conceptos básicos

1. una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es un número real que cumple $a > 0$ y $a \neq 1$.
2. la función exponencial $f(x) = a^x$ tiene como dominio el conjunto de números reales R y como imagen los números reales positivos: $(0, +\infty)$ (su gráfico se encuentra en el primer y segundo cuadrante).
3. la constante a se llama base de la función exponencial, si $a > 1$ la función es creciente, para todo valor de x , y si $0 < a < 1$ la función es decreciente para todo valor de x .
4. una función logarítmica es una función de la forma $f(x) = \log_a x$ donde a es un número real que cumple $a > 0$ y $a \neq 1$
5. la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es la función inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$, entonces se define por $\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$
6. la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ tiene como dominio el conjunto de números reales positivos: $(0, +\infty)$ y como imagen los números reales R (su gráfico se encuentra en el primer y cuarto cuadrante).
7. la constante a se llama base de la función logarítmica, si $a > 1$ la función es creciente, para todo valor de x , y si $0 < a < 1$ la función es decreciente para todo valor de x .
8. las funciones seno ($y = \sin x$) y coseno ($y = \cos x$) tienen como dominio el conjunto de números reales R , es decir se definen para todo número real x que representa la medida en radianes de un ángulo.
9. la función tangente ($y = \tan x$) se define como el cociente $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y tiene como dominio el conjunto $R - \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} / k \text{ es impar} \right\}$ y como imagen el conjunto R .
10. en el plano coordenado, dentro de la circunferencia unidad las funciones se representan por:



11. la tangente geométrica del ángulo α indica la pendiente de la recta que forma con el semieje positivo x dicho ángulo α .
12. las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ se repiten cada vez que al ángulo se le suma el número 2π , es decir, son funciones periódicas de período 2π . La función $y = \operatorname{tg}(x)$ se repite cada vez que al ángulo se le suma el número π , es decir, es una función periódica de período π .
13. los ángulos se pueden medir usando distintos sistemas de medición:

Sistema Sexagesimal (Unidad: 1 grado)	Sistema Radial (Unidad: 1 radián)
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π

Función exponencial y logarítmica.

Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } y = 2^x & \text{b. } y = 2^x + 1 & \text{c. } y = 2^x - 3 & \text{d. } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ \text{e. } y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{f. } y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x & & \text{g. } y = e^x \end{array}$$

Indicar para cada uno de los gráficos:

- punto de corte con el eje x (si existe)
- punto de corte con el eje y (si existe)
- comportamiento de la función para valores “muy grandes” ($x \rightarrow +\infty$)
- comportamiento de la función para valores “muy pequeños” ($x \rightarrow -\infty$)

Ejercicio 2: graficar las funciones:

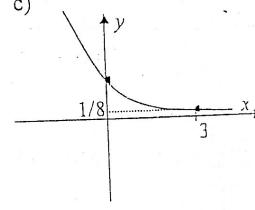
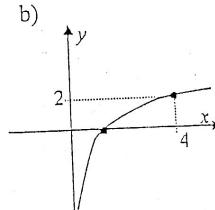
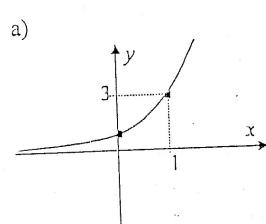
$$\begin{array}{lll} \text{a. } y = \log_3 x & \text{b. } y = \log_{1/3} x & \text{c. } y = \ln x \end{array}$$

Indicar para cada uno de los gráficos:

- punto de corte con el eje x (si existe)
- punto de corte con el eje y (si existe)
- comportamiento de la función para valores “muy grandes” ($x \rightarrow +\infty$)
- comportamiento de la función para valores “positivos próximos a cero” ($x \rightarrow 0^+$)

Ejercicio 3: los siguientes gráficos corresponden a funciones exponenciales, de la forma $f(x) = a^x$, o logarítmicas, de la forma $f(x) = \log_a x$.

Indicar para cada uno de ellos a qué tipo corresponde y el valor de la base a para la misma.



Situación problemas. Modelización

Ejercicio 4: una empresa decide invertir \$10.000 en bonos de ahorro que aseguran un interés compuesto continuo del 6% anual. Un modelo para representar esta inversión se representa por $R(t) = 10.000e^{0.06t}$ para $t \geq 0$ donde $R(t)$ representa la renta obtenida en el año t .

1. ¿cuál es la renta de la empresa al finalizar el primer año de su inversión?
2. ¿y después de dos años?
3. ¿cuánto tiempo deberá poseer en su poder los bonos para duplicar la inversión inicial?

Ejercicio 5: la ganancia anual P de una empresa debida a las ventas de cierto artículo después de x años de ser lanzado al mercado puede modelarse con la función

$$P(x) = 100.000 - 60.000\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{para } x \geq 0$$

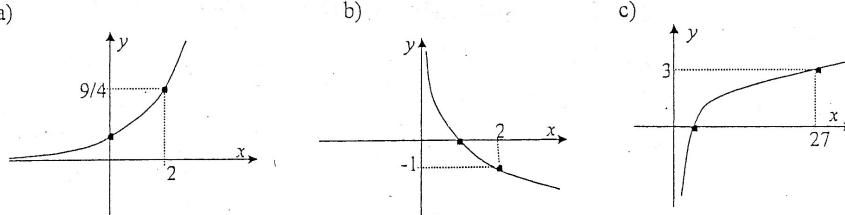
1. ¿cuál es la ganancia después de cinco años?
2. ¿cuántos años deben transcurrir para obtener una ganancia de \$99.500?
3. ¿las ganancias serán crecientes o decrecientes con el tiempo? Justifique la respuesta.

Ejercicio 6: graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

a. $y = 3^x$	b. $y = 3^x - 1$	c. $y = 2.(3^x)$
d. $y = \log_4 x$		e. $y = \log_{1/4} x$

Ejercicio 7: los siguientes gráficos corresponden a funciones exponenciales, de la forma $f(x) = a^x$, o logarítmicas, de la forma $f(x) = \log_a x$.

Indicar para cada uno de ellos a qué tipo corresponde y el valor de la base a para la misma.



Ejercicio 8: la población de una colonia crece exponencialmente, de acuerdo a una función tipo: $P(x) = p_0 e^{kx}$. Si a comienzos de la década la población inicial p_0 tenía un número estimado de 10.000 individuos y dos años después se estimó en 40.000 ¿cuántos individuos se estima habrá al final de la década?

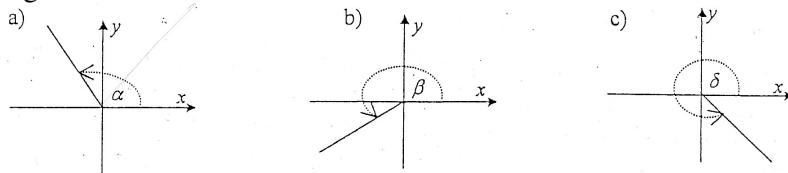
Ejercicio 9: un cultivo de bacterias aumenta su número a razón del 4% por hora. Al inicio estaban presentes 500 bacterias.

1. determinar el número de bacterias después de 1 hora, 2 horas y 5 horas.
2. modelizar mediante una función el número N de bacterias presentes en el cultivo después de t horas.
3. ¿cuántas horas deben pasar para que el número de bacterias sea de 5000?

Trigonometría:

Ejercicios de conceptualización

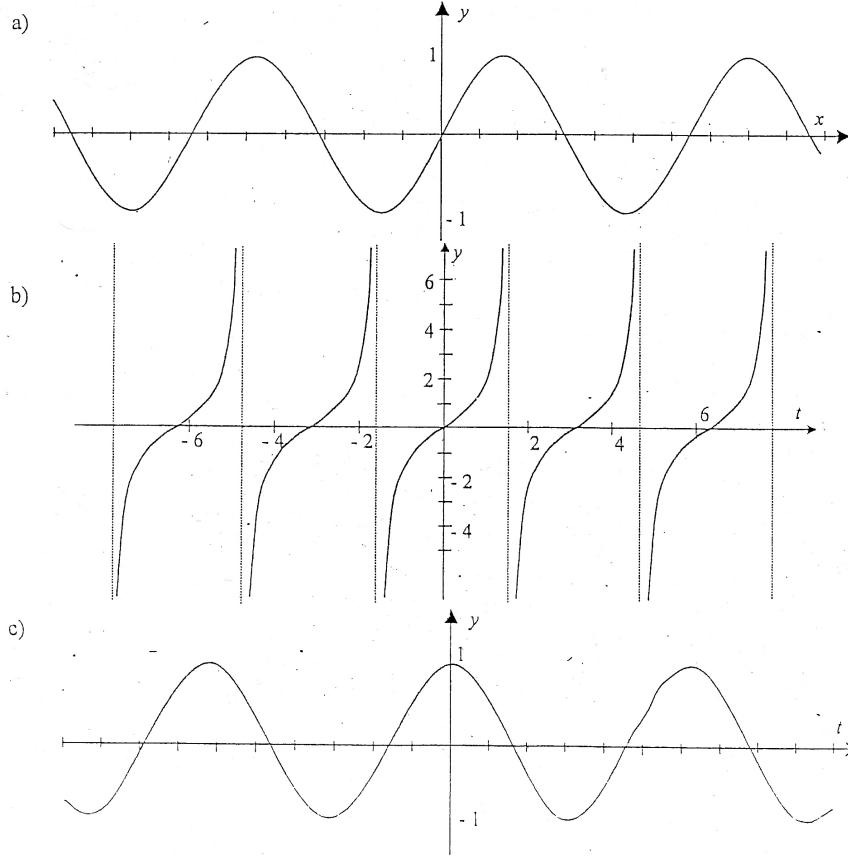
Ejercicio 1: indicar el signo de las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ y $y = \operatorname{tg}(x)$ para los siguientes ángulos:



Ejercicio 2: indicar en qué cuadrantes se encuentran los ángulos que cumplen:

- | | | | | | |
|-----------------------------------|---|--------------------------------|---|---|---|
| a. $\operatorname{sen}\gamma < 0$ | y | $\cos\gamma < 0$ | c. $\operatorname{sen}(\gamma + \frac{\pi}{2}) > 0$ | y | $\operatorname{tg}(\gamma + \frac{\pi}{2}) < 0$ |
| b. $\cos\gamma > 0$ | y | $\operatorname{sen}\gamma < 0$ | d. $\cos(\gamma + \pi) < 0$ | y | $\operatorname{tg}(\gamma + \pi) > 0$ |

Ejercicio 3: indicar a qué funciones corresponden los siguientes gráficos:



Ejercicio 4: a partir de los gráficos del ejercicio anterior y utilizando las operaciones entre funciones, construir los gráficos de:

1. $y = 2 \operatorname{sen} x$
2. $y = 2 + \operatorname{sen} x$
3. $y = (\cos x) - 1$
4. $y = \frac{1}{3} \cos x$



Situaciones problemas. Modelización

Ejercicio 5: una compañía determina que los pedidos en el mes t quedan modelizados por la función $P(t) = 4000(5 + \sin t + \cos t)$

1. indicar los pedidos recibidos por la empresa para cada uno de los últimos doce meses (notar para el uso de computadora que el ángulo vienen dado en radianes)
2. ¿los pedidos son estacionales? ¿en qué mes/es alcanzan el máximo?

Ejercicio 6: las ventas de un producto fluctúan en ciclos. En una empresa dedicada a la distribución de ropas las ventas totales se modelan con la función $V(t) = 7\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}t\right)$ donde $V(t)$ representa las ventas en miles de pesos durante el mes t , partiendo del valor $t = 0$ para el mes de julio.

1. indicar el total de ventas para el mes de julio (notar para el uso de computadora que el ángulo vienen dado en radianes)
2. ¿cuál es el total de ventas estimado para enero del año siguiente?
3. ¿cuál será el total de ventas estimado después de un año de inserción de la empresa en el mercado textil?

Respuestas:

Funciones exponenciales y logarítmicas

Ejercicio 1:

- a) Punto de corte con el eje x : No existe.
Punto de corte con el eje y : $(0,1)$.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $2^x \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$, $2^x \rightarrow 0$

- b) Punto de corte con el eje x : No existe.
Punto de corte con el eje y : $(0,2)$.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $2^x + 1 \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$, $2^x + 1 \rightarrow 1$

- c) Punto de corte con el eje x : Si corta aproximadamente en $x=1,6$. Punto de corte con el eje y : $(0,-2)$.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $2^x - 3 \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$, $2^x - 3 \rightarrow -3$

- d) Punto de corte con el eje x : No existe.
Punto de corte con el eje y : $(0,1)$.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow 0$ y para $x \rightarrow -\infty$,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow +\infty$$

- e) Punto de corte con el eje x : No existe.
Punto de corte con el eje y : $(0,-1)$.



Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $-\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow 0$ y para $x \rightarrow -\infty$,

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow -\infty$$

- f) Punto de corte con el eje x : No existe.

Punto de corte con el eje y : (0,2).

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $2\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow 0$ y para $x \rightarrow -\infty$,

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow +\infty$$

- g) Punto de corte con el eje x : No existe.

Punto de corte con el eje y : (0,1).

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$,
 $e^x \rightarrow 0$.

Ejercicio 2:

- a) Punto de corte con el eje x : (0,1).

Punto de corte con el eje y : No existe.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $\log_3 x \rightarrow +\infty$, y para $x \rightarrow 0^+$,
 $\log_3 x \rightarrow -\infty$.

- b) Punto de corte con el eje x : (1,0).

Punto de corte con el eje y : No existe.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $\log_{1/3} x \rightarrow -\infty$, y para $x \rightarrow 0^+$,
 $\log_{1/3} x \rightarrow +\infty$.

- c) Punto de corte con el eje x : (1,0).

Punto de corte con el eje y : No existe.

Comportamiento de la función para $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$, y para $x \rightarrow 0^+$,
 $\ln x \rightarrow -\infty$.

Ejercicio 3:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \log_2 x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ejercicio 4:

- a) Renta al finalizar el primer año de la inversión $R(1) \cong \$10.618,00$

- b) Renta al finalizar el primer año de la inversión $R(2) \cong \$11.275,00$

- c) Tiempo que deberá poseer en su poder los bonos para duplicar la inversión inicial: 11 años y medio.

Ejercicio 5:

La ganancia anual P de una empresa debida a las ventas de cierto artículo después de x años de ser lanzado al mercado puede modelarse con la función:

$$P(x) = 100.000 - 60.000 \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ para } x \geq 0$$

- a) Ganancia después de 5 años \$98.125,00
- b) Para obtener una ganancia de \$99.500,00 deben transcurrir 6 años y 11 meses.
- c) Las ganancias son crecientes como función del tiempo.

Ejercicio 7:

a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

b) $f(x) = \log_{1/2} x$

c) $f(x) = \log_3 x$

Ejercicio 8:

Como dos años después se estimó en 40.000, entonces $P(2) = 10000e^{k_2} = 40000$, entonces $k \approx 0,7$. Así la función que modeliza la población es: $P(x) = 10000e^{0,7x}$. la cantidad de individuos que se estima habrá al final de la década es de 10.966.300.

Ejercicio 9:

- a) Hora 1: 520 bacterias. Hora 2: 540 bacterias. Hora 5: 608 bacterias.
- b) Modelo para el numero N de bacterias presentes en el cultivo después de t horas: $N(t) = 500(1,04)^t$
- c) Tiempo para que el número de bacterias sea de 5000 es 58,7 horas (2 días y medio aproximadamente).

Funciones Trigonométricas:
Ejercicio 1:

- a) Signo de $\sin(\alpha) = +$, $\cos(\alpha) = -$, $\tan(\alpha) = -$
- b) Signo de $\sin(\beta) = -$, $\cos(\beta) = -$, $\tan(\beta) = +$
- c) Signo de $\sin(\delta) = -$, $\cos(\delta) = +$, $\tan(\delta) = -$

Ejercicio 2:

γ pertenece al tercer cuadrante

γ pertenece al cuarto cuadrante

γ pertenece al primer cuadrante

γ pertenece al primer cuadrante

Ejercicio 3:

Gráficos: a) $y = \sin(x)$ b) $y = \tan(x)$ c) $y = \cos(x)$



Ejercicio 5:

a) Pedidos recibidos por las empresas para cada uno de los últimos doce meses:

Mes 1: 25.527 unidades
Mes 2: 21.973 unidades
Mes 3: 16.604 unidades
Mes 4: 14.358 unidades
Mes 5: 17.299 unidades
Mes 6: 22.723 unidades
Mes 7: 25.643 unidades
Mes 8: 23.375 unidades
Mes 9: 18.004 unidades
Mes 10: 14.467 unidades
Mes 11: 16.018 unidades
Mes 12: 21.229 unidades

b) Los pedidos son estacionales, mas aún alcanzan sus máximos en enero y julio.

Ejercicio 6:

1. Total de ventas en el mes de julio: \$0,00. Es decir, no hay entradas por ventas.
2. Total de ventas estimadas para enero: \$14.000,00
3. Total de ventas estimadas después de un año de inserción de la empresa en el mercado textil: $V(1) + V(2) + v(3) + \dots = \$84.000,00$

Unidad 4:

LÍMITE DE FUNCIONES y CONTINUIDAD

El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima (tiende) al número a es un número L , y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si cada vez que con x nos aproximamos suficientemente al número a (por valores mayores y menores que a , pero $x \neq a$) los valores de las imágenes $f(x)$ se aproximan al número L .

A continuación daremos ciertos ejemplos de situaciones donde se aplica límite:

Ejemplo 1:

$c(x)$ = Costo promedio para una producción de x unidades

“si la producción de unidades aumenta indefinidamente, el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad de \$6,00”

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = 6$$

Ejemplo 2:

$S(x)$ = Superficie de un polígono de x lados

“la superficie de un círculo, de radio 1, es el valor al cual se aproximan las sucesivas áreas de los polígonos contenidos en el círculo”

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \pi \approx 3,14$$

A continuación daremos ejemplos de límites y su resolución gráfica:

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+3) =$$

- Tabla

x	1,5	1,9	1,99	2	2,01	2,1	2,5
$f(x)$	4,5	4,9	4,99	5	5,01	5,1	5,5

- Razonamiento algebraico

$$x \rightarrow 2 \quad x+3 \rightarrow 2+3 \quad x+3 \rightarrow 5$$

$\lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) =$$

- Tabla

x	0,8	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

- Como $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no se define para $x = 1$, es decir $f(1)$ no existe, entonces no podemos usar razonamiento del álgebra.

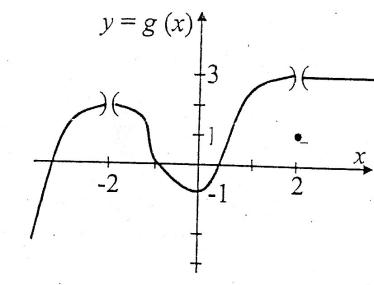
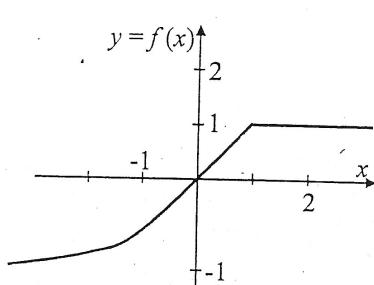
$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 3$

Estimación gráfica del límite:

Los límites pedidos en los gráficos de las figuras anteriores pueden ser determinados directamente a partir de ellos.

En el caso de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

En el caso de $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$, $g(-2)$ no existe y $g(2) = 1$



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) =$$

Ejemplo 5:

El límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es analizado para $x = 0$,

Por tabla podemos ver que dicho límite no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) =$$

x	-0,1	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,1
$f(x)$	-10	-1000	-10000	?	10000	1000	10

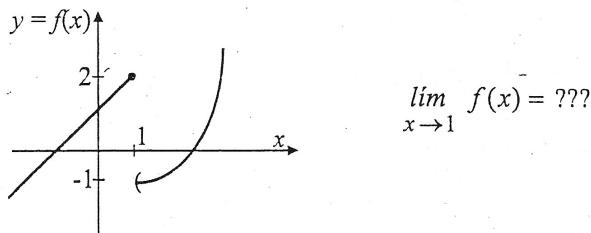
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = \text{D.N.E.}$$

Unicidad del límite:

¿Puede ser que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$? NO

El límite, si existe, es único

Límites laterales:



- Límite lateral derecho: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$

Si cada vez que x se aproxima al número a por valores mayores que a (por la derecha de a , en la recta numérica), las imágenes $f(x)$ se aproximan a L_1

- Límite lateral izquierdo: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$

Si cada vez que x se aproxima al número a por valores menores que a (por la izquierda de a , en la recta numérica), las imágenes $f(x)$ se aproximan a L_2

Condición necesaria y suficiente de un límite de una función:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe si y sólo si} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \end{cases} \text{ existen y son iguales}$$

Dos límites particulares:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

Propiedades del límite

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad c = \text{función constante}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{siempre que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad P(x) = \text{polinomio en } x$$

Ejemplos:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -1} (5x^3) =$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + x - 9}{x^2 + 4} =$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + x - 8) =$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 7} =$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) \cdot (5 - x) =$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$$

Límite de cociente de polinomios: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = ?$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x}{3x^2 + 2} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x}{6x^3 + 7x} = \frac{1}{2}$$

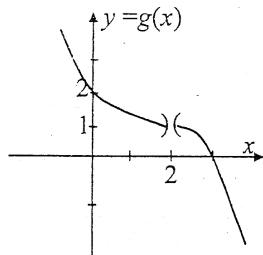
$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^5 - 2x} = 0$$

En general:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} = 0 & \text{si grado de } P(x) < \text{grado de } Q(x) \\ = +\infty (-\infty) & \text{si grado de } P(x) > \text{grado de } Q(x) \\ = \underline{\text{coeficiente del término de mayor grado de } P(x)} & \text{coeficiente del término de mayor grado de } Q(x) \\ & \text{si grado de } P(x) = \text{grado de } Q(x) \end{cases}$$

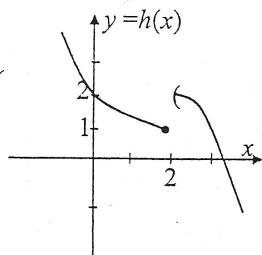
CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Analiza los límites de las siguientes funciones:



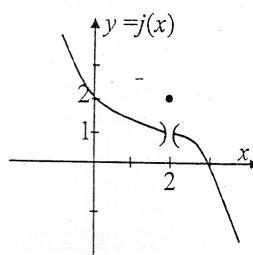
$$g(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) =$$



$$h(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) =$$



$$j(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} j(x) =$$

Puede verse que $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$ y $g(2)$ no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 1 \text{ y } h(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} j(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} j(x) = 1 \text{ y } j(2) = 2$$

Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si se verifican simultáneamente:

1. $f(a)$ existe (f se define en el punto a)
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si alguna condición no se verifica, se dice que:

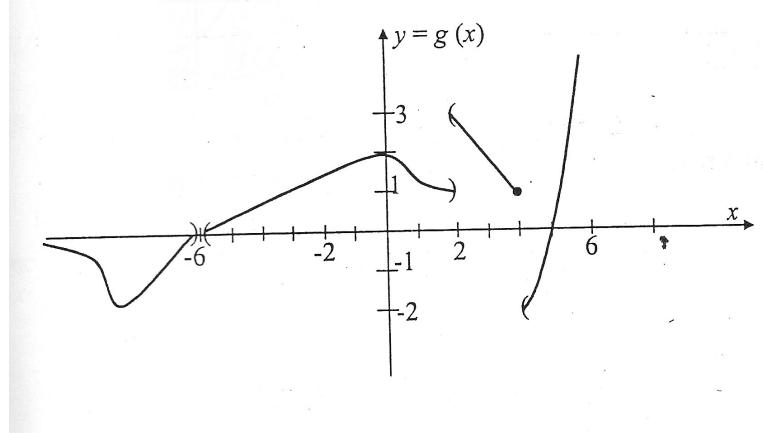
f es discontinua en $x = a$

Además una función $y = f(x)$ es continua en todo su dominio si es continua en todo número a perteneciente al $Dom\ f$

Funciones continuas

- Funciones lineales en R
- Funciones cuadráticas en R
- Funciones exponenciales en R
- Funciones logarítmicas en $R_{>0} = (0, +\infty)$
- Funciones seno y coseno en R
 Tangente en $R - \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} / k \text{ es impar} \right\}$
- Funciones polinómicas en R

Ejemplo:



a) ¿ g es continua en el punto $x = 0$?

Si, la función es continua en $x = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ y $g(0) = 2$

b) ¿ g es continua en el intervalo $(-2, 2)$?

Si, la función es continua porque en todo punto se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \text{ para } a \in (-2, 2)$$

- c) Indicar todos los puntos de discontinuidad. Justificar qué condiciones no se verifican en los mismos.
Este punto se lo deja al lector.

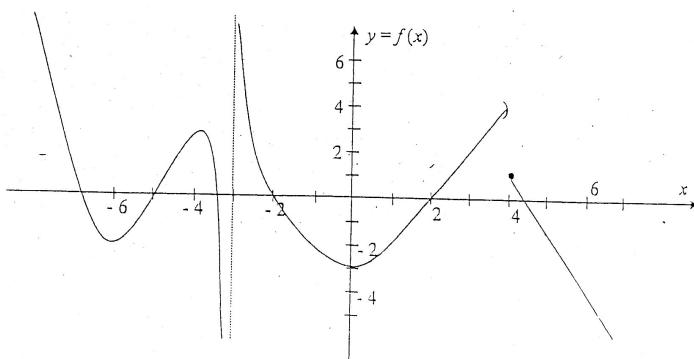
Límite y continuidad de funciones

Conceptos básicos

1. el límite de una función $y = f(x)$ cuando la variable $x \rightarrow a$ es un número L si cada vez que con x nos aproximamos suficientemente al número a (por valores mayores y menores, pero $x \neq a$) los valores de la función $f(x)$ se aproximan al número L (en el eje y), en este caso se denota $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
2. límite lateral derecho, que se denota $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$ se define cuando la variable x se aproxima al número a sólo por valores mayores que a (por la derecha de a , en el eje x) y límite lateral izquierdo, que se denota $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$ se define cuando la variable x se aproxima al número a sólo por valores menores que a (por la izquierda de a , en el eje x).
3. Importante: el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si y sólo si los límites laterales son iguales, es decir: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
4. una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si verifica:
 - a. $f(a)$ existe
 - b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
 - c. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
5. son funciones continuas: las funciones lineales, cuadráticas, las funciones polinómicas (combinaciones algebraicas de potencias enteras de la variable), exponenciales, logarítmicas (para valores de $x > 0$), las trigonométricas seno y coseno.

Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: i) encontrar el resultado de los límites solicitados para la función f cuyo gráfico es el siguiente:



a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	b. $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$	c. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
d. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$	e. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$	f. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
g. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	h. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
j. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$	k. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$	l. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii) indicar para la función anterior los puntos de discontinuidad y señalar, para cada uno de éstos, la condición/es de la definición que no se verifican.

Ejercicio 2: dar el resultado, si existe, de los siguientes límites. Tener en cuenta que para muchos casos sólo se requiere el uno de las propiedades, para otros será necesario recordar el gráfico de la función:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3$	$\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 5$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x} \right)$
b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} [4^x + 3]$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,2)^x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$
e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_3(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)(3x+1)]$
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg}(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x + 3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3+1}}{3x^3 + 2x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3x^5 + 2x^3 + 1}$
h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}$

Situaciones problemas. Modelización

Ejercicio 3: si el costo total en pesos, para producir x unidades de un producto es $C(x)$ entonces el costo promedio por unidad para una producción de x unidades del

mismo producto está dado por $c(x) = \frac{C(x)}{x}$

1. para la función de costo total $C(x) = 5.000 + 6x$ indicar cual es la función que define el costo promedio.
2. obtener el costo promedio de cada unidad cuando se aumenta continuamente la producción, expresar este enunciado utilizando el concepto de límite.

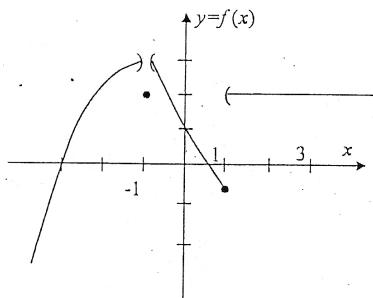
Ejercicio 4: para el uso de un servidor de Internet se tiene la siguiente lista de precios:

Tiempo de navegación (hs.)	Tarifa (\$)
Hasta 1 hs.	\$2,00
De 1 hs. hasta 2 hs.	\$1,70
De 2 hs. hasta 4 hs.	\$1,50
4 hs. o más	\$1,00

1. graficar la función que determina la tarifa a pagar por un usuario de acuerdo al tiempo de navegación. ¿Cuál es el dominio de esta función?
2. ¿es la función discontinua? Si la respuesta es positiva señalar los puntos en los cuales se presentan las discontinuidades de la misma.

Ejercicio 5: el gráfico corresponde a una función f , a partir del mismo:

1. encontrar $f(-1)$
2. encontrar $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
3. ¿es f continua en $x = -1$?
4. encontrar $f(0)$
5. encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
6. ¿es f continua en $x = 0$?
7. encontrar $f(1)$
8. encontrar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
9. ¿es f continua en $x = 1$?
10. encontrar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-1)$
11. encontrar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



Ejercicio 6: el costo en pesos (\$) de reducir un x por ciento la polución del vertido de una central térmica que quema combustible natural es: $C(x) = \frac{80.000x}{100-x}$ donde x varía entre 0 y 100 (notar que representa un porcentaje)

1. ¿cuál es el costo de realizar una reducción del 15%?
2. ¿cuál será el costo de C para x que tiende a 100%? ¿qué nos indica este resultado? Explicar por qué en este caso se debe calcular el límite y no se puede evaluar en el valor 100 exactamente.

Ejercicio 7: para una relación particular huésped- parásito, fue determinado que cuando el número de huéspedes por unidad de área es x , entonces el número de parásitos en un período es y . Dicha relación puede modelarse por la función $y = \frac{900x}{10 + 45x}$.



Si el número de huéspedes creciera indefinidamente ¿a qué valor se aproximaría el número de parásitos?

Respuestas:

Ejercicio 1:

- i) a) $+\infty$ b) -2 c) 0 d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) no existe g) -3 h) 0
i) $-\infty$ j) 4 k) 1 l) no existe

ii) Puntos de discontinuidad:

$x = -3$ pues la función no está definida y no tiene límite (no se verifica ninguna de las tres condiciones de continuidad).

$x = 4$ pues la función no tiene límite (no se verifican las condiciones 2 y 3 de la definición de la continuidad)

Ejercicio 2:

- | | | |
|-------------------|---------------|---------------|
| a) -2 | 11 | 3 |
| b) $\frac{-3}{2}$ | 3 | $+\infty$ |
| c) No existe | $+\infty$ | 0 |
| d) 4 | 0 | $+\infty$ |
| e) $-\infty$ | 0 | 1 |
| f) 0 | No existe | $\frac{1}{4}$ |
| g) $+\infty$ | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| h) 2 | 1 | 1 |

Ejercicio 3:

a) Costo promedio $c(x) = \frac{5000}{x} + 6$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = 6$

Ejercicio 4:

- a) $Dom f = (0, +\infty)$
b) La función es discontinua en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. En todos estos puntos la condición que no se verifica es la existencia de límite (condiciones 2 y 3 de la definición de continuidad).

Ejercicio 5:

- a) 2
b) 3
c) f no es continua.
d) 1
e) 1
f) f es continua
g) -1
h) No existe
i) f no es continua
j) 2
k) $-\infty$



Ejercicio 6:

- a) Costo de realizar una reducción del 15% es \$14.117,60

b) $\lim_{x \rightarrow 100^-} c(x) = +\infty$.

Este resultado indica que es imposible reducir la población totalmente (no habría presupuesto que alcance).

Ejercicio 7:

Si el número de huéspedes creciera indefinidamente el número de parásitos se

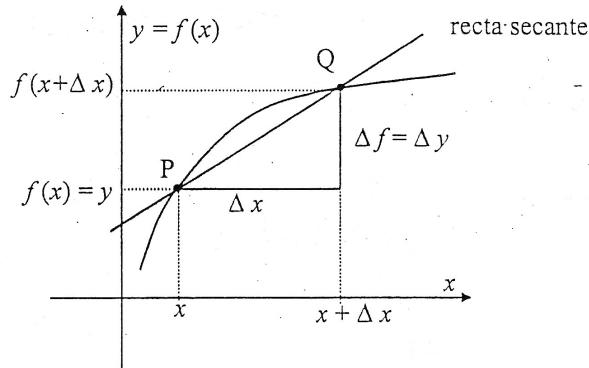
aproximaría a 20, pues: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{900x}{10 + 45x} \right) = 20$

Unidad 5:

DERIVADA DE FUNCIONES

Consideremos:

$y = f(x)$ y el punto $P = (x, y) = (x, f(x))$ y el punto $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$

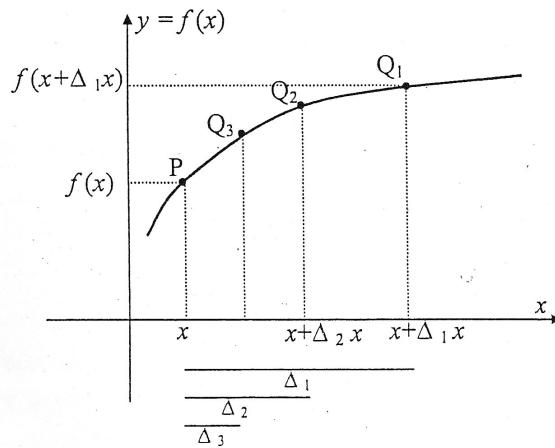


La recta secante que une P y Q tiene por pendiente:

$$a = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Esta pendiente también se llama cociente incremental $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

¿Cómo se define la *recta tangente* al gráfico de una función $y = f(x)$ en el punto $P = (x, y) = (x, f(x))$?



Recta secante que une

$$P = (x, y) \text{ con } Q_i = (x + \Delta_i x, f(x + \Delta_i x))$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \Delta x \rightarrow 0 \end{array}$$

Pendiente

$$a_i = \frac{f(x + \Delta_i x) - f(x)}{\Delta_i x}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \Delta x \rightarrow 0 \end{array}$$

Recta tangente al gráfico de

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$y = f(x)$ en el punto $P = (x, f(x))$
tangente

= Pendiente de la recta

Por lo tanto la pendiente de la recta secante al gráfico de una función $y = f(x)$ por los puntos $P = (x, y)$ y $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ se define como el cociente incremental:

$$\text{Pendiente de la recta secante} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La pendiente de la recta tangente al gráfico de una función $y = f(x)$ por los puntos $P = (x, y) = (x, f(x))$ se define como el límite del cociente incremental:

$$\text{Pendiente de la recta tangente} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo tanto la DERIVADA de una función $y = f(x)$, es otra función que se

denota por $f'(x)$ o $\frac{d f}{d x}$

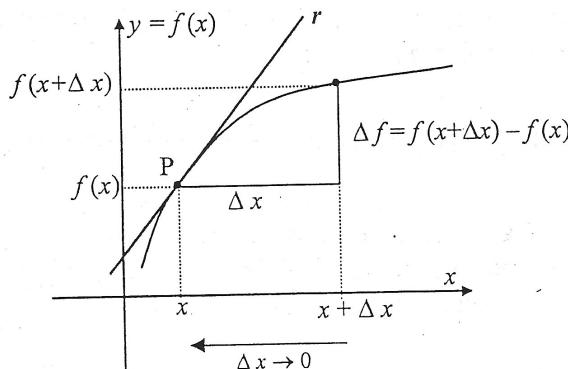
Y se define para cada x , como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si dicho límite existe, de lo contrario decimos que la función f no es derivable en x .

Geométricamente:

r es la recta tangente al gráfico de f en el punto $P = (x, f(x))$



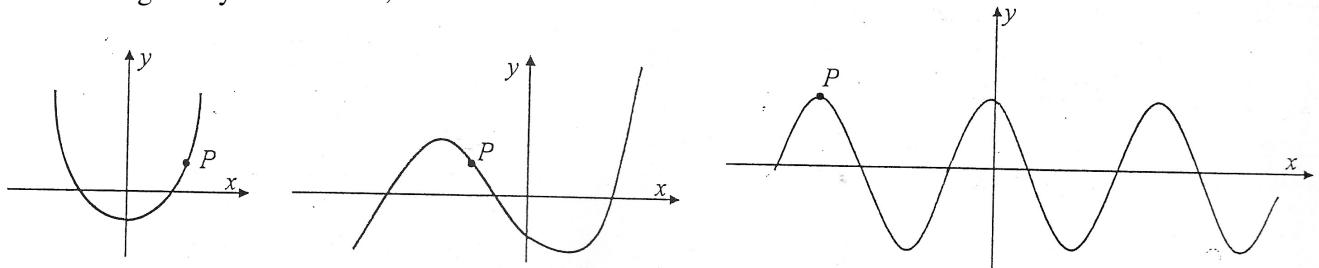
La derivada de $y = f(x)$ en cada punto x es $f'(x)$ e indica la velocidad, tasa, índice o rapidez con que cambia la función en el punto x .

Derivada es sinónimo de razón, tasa o índice de cambio:

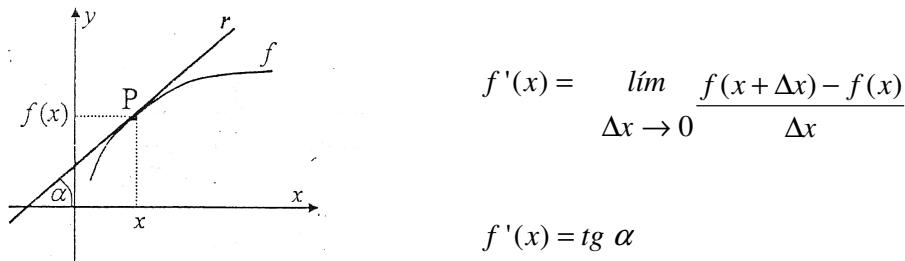
- De población (consumidores vegetal, animal, etc.)
- De una variable económica (costo, ingreso y beneficio marginal)

La derivada puede ser aplicada a diferentes problemas. Un ejemplo es el siguiente:

Se puede analizar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P , es decir la derivada, y notar que en el primer ejemplo es positiva, en el segundo negativa y en el último, nula.



Significado geométrico de la derivada:

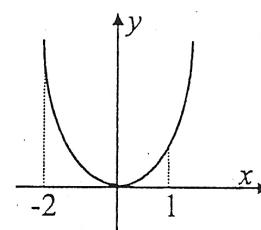


La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x es $\underline{f'(x)}$ y geométricamente es igual a:

- La pendiente de la recta tangente r al gráfico de $y = f(x)$, en el punto $P = (x, f(x))$.
- La tangente trigonométrica del ángulo α que forma la recta tangente r con el semieje positivo x .

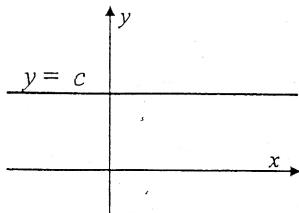
Ejemplo: $f(x) = x^2$

1. ¿ $f'(0)$? $f'(0) = 0$
2. ¿Signo de $f'(1)$? $f'(1) = 2$ por lo tanto es positiva.
3. ¿Signo de $f'(-2)$? $f'(-2) = -4$ por lo tanto es negativa.



Cálculo de derivada de funciones

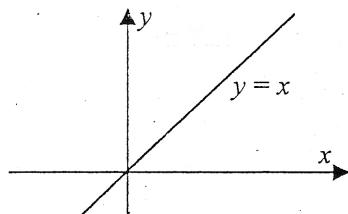
1. $f(x) = c$ (c = número real constante)



$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

La derivada de una función constante es 0.

2. $f(x) = x$



$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

La derivada de x es 1.

TABLA DE DERIVADA DE FUNCIONES

Función: $f(x)$	Derivada: $f'(x)$
c	0
x	1
x^n	$n x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x} (x > 0)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} (x > 0)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Calculo de rectas tangentes en puntos de una función:

Para ejemplificar podemos calcular la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en el punto $(1,1)$.



La recta en cuestión es $y = ax + b$.

Para calcular la recta podemos ver que la pendiente de la misma es $a = f'(1) = 2$ y la ordenada al origen b se calcula como: $b = -2x + 1|_1 = -2(1) + 1 = -1$ por lo tanto $y = 2x - 1$

Propiedades de las derivadas y sus operaciones:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(c f)'(x) = c f'(x)$ $(c = \text{nº real})$
4. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(\text{siempre que } g(x) \neq 0)$

Aplicaciones de la derivada:

$C(x)$ = Función de costo

= costo total en que incurre una empresa al producir x unidades de cierto artículo.

Razón de cambio instantánea del costo con respecto al nº de artículos producidos:

$$\text{Costo marginal: } C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

El costo marginal $C'(x)$ es el costo aproximado de producir una unidad adicional.

$I(x)$ = Función de ingreso

= ingreso total de una empresa al vender x unidades de cierto artículo.

$$\text{Ingreso marginal: } I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}$$

El ingreso marginal $I'(x)$ es el ingreso aproximado obtenido al vender una unidad adicional.

Regla de la cadena: Derivada de una función compuesta

Supongamos que tenemos la función $g(x)$:

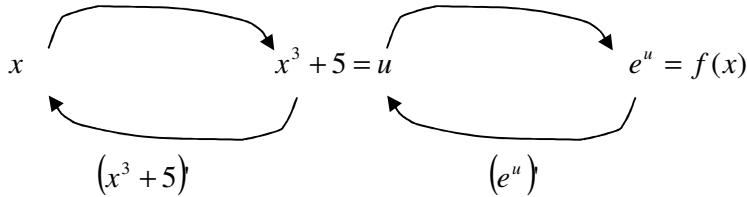
$$g(x) = e^x \quad g'(x) = e^x$$

Para esta función podemos calcular fácilmente la derivada, pero sin embargo para la siguiente función $f(x)$ la derivada puede resultar más complicada.

$$f(x) = e^{x^3+5} \quad f'(x) = ?$$

↓

$$f(x) = e^u \quad \text{con } u = x^3 + 5$$



Para poder encontrar la derivada aplicamos la regla de la cadena:

Si f es una función derivable en $g(x)$ y g es una función derivable en x entonces la función compuesta $f(g(x))$ es derivable en x y se verifica:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$$

O bien

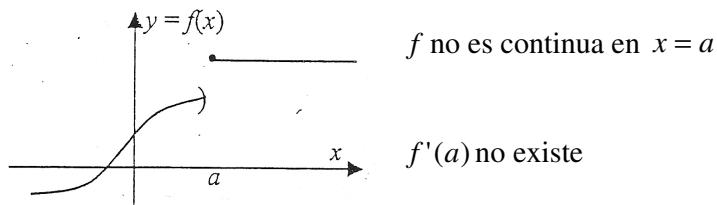
$$\frac{d f(g(x))}{d x} = \frac{d f}{d g} \cdot \frac{d g}{d x}$$

Si entendió la regla de la cadena puede realizar las siguientes derivadas:

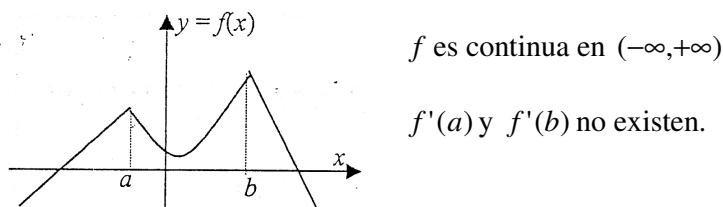
- a) $f'(x) = \sqrt{4 - x^5}$
- b) $f'(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 5x^2 - 3x - 1)$
- c) $f'(x) = (x^3 - x^2 + 6)^{100} \cdot \ln(3x)$

Funciones no derivables:

1. Si f es una función discontinua en $x = a$, entonces $f'(a)$ no existe.



2. Existen funciones continuas que no son derivables.



$x = a$ y $x = b$ se denominan puntos de *corner* (o puntos de esquina)

Tener en cuenta que si una función es derivable, entonces es una función continua.

Conceptos básicos:

1. la derivada de una función $y = f(x)$ es otra función que se define, para cada variable x , como $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, e indica el incremento de la función $y = f(x)$ por cada unidad de variación de la variable x .
2. significado geométrico: la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$, que es igual a $f'(a)$, es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto.
3. si la derivada de la función $y = f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$, entonces $f'(a)$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente al gráfico de la función en $x = a$ y el semieje x positivo.
4. la derivada de una función compuesta $y = g(f(x))$ es otra función que se obtiene, por la Regla de la Cadena, así: $[g(f(x))]' = g'(f(x)).f'(x)$
5. la derivada y el comportamiento de las funciones: si para todo x en un intervalo (a, b) se verifica que:
 - a. $f'(x) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente.
 - b. $f'(x) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente.
 - c. $f'(x) = 0$ entonces $f(x)$ es constante.

Ejercicios de conceptualización

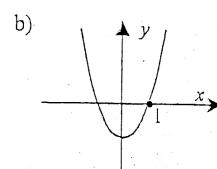
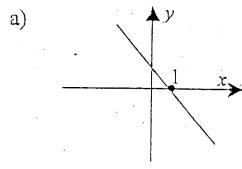
Ejercicio 1: Si f y g son dos funciones que verifican $f(0) = 1$, $g(0) = -3$, $f'(0) = 3$ y $g'(0) = 5$, utilizando las reglas de derivación de las operaciones indicar el resultado de:

- | | | |
|------------------|-----------------------------------|----------------|
| a. $(f + g)'(0)$ | b. $(f - g)'(0)$ | c. $(3.f)'(0)$ |
| d. $(f.g)'(0)$ | e. $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ | |

Ejercicio 2: encontrar la fórmula de la función derivada de:

1. $f(x) = 3x + 4$
2. $f(x) = x^4 - 2e^x$
3. $f(x) = 2 + 5^x$
4. $f(x) = x^2 \cdot e^x$
5. $f(x) = \frac{e^x}{x+5}$
6. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 + 5x + 3}$

Ejercicio 3: para cada uno de los siguientes gráficos trazar la recta tangente en $x = 1$ e indicar a partir de la misma el signo de la derivada de la función representada en dicho punto.



Ejercicio 4:

- conociendo que la función f cumple $f(2) = 4$ y $f'(2) = 1$, indicar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $x = 2$
- sabiendo que la recta tangente al gráfico de la función g en el punto $x = 0$ tiene por ecuación $y = -2x + 5$ ¿cuánto vale $g'(0)$? ¿y $g(0)$?
- Sabiendo que la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(2, 7)$ forma con el semieje x positivo un ángulo de 60° , indicar la ecuación de dicha recta.

Ejercicio 5: dar la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados.

a. $f(x) = 4x^2$ en $(1, 4)$ b. $h(x) = x^3 + x^2$ en $x = 1$

Ejercicio 6: encontrar la fórmula de la función derivada de

a. $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x))$	d. $f(x) = (5x + 29)^5 (\cos^2 x)$
b. $f(x) = (\ln(3x) + 20)^6$	e. $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{2x + 15}$
c. $f(x) = (\operatorname{sen} x)(3x^3 + 49)$	f. $f(x) = \frac{1 + \cos^3(x+1)}{(x+1)}$

Situaciones problemas. Modelización

Definición:

- La función de costo total de un fabricante $y = C(x)$ da el costo total y de producir y comercializar x unidades de un producto.
- El costo marginal de producción, es decir el cambio de los costos por cada unidad adicional producida está dado por $C'(x)$
- El costo medio de producción por cada unidad producida está dado por $c(x) = \frac{C(x)}{x}$
- La función de ingreso total de un fabricante $y = I(x)$ da el valor total y recibido por un fabricante al vender x unidades de un producto.
- El ingreso marginal, es decir el cambio en el ingreso al vender una unidad adicional de las producidas está dado por $I'(x)$
- De igual manera se define el beneficio marginal.



Ejercicio 7: un modelo que permite establecer los costos e ingresos de una empresa

$$\text{representa a los mismo por: } C(x) = 5000 + 6x \quad I(x) = 15x - \frac{1}{30}x$$

- a. Indicar el tipo de modelo que representa a los costos y a los ingresos.
- b. ¿cuál es el costo de producir 36 unidades?
- c. ¿cuál es el costo marginal de la empresa?
- d. ¿cuál es el ingreso percibido si vende 15 unidades? ¿cubre los costos?
- e. ¿cuál es el ingreso marginal al aumentar sus ventas en una unidad?

Ejercicio 8: el costo de producir x radiadores diarios en una Pyme autopartista está modelizado por la función $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ donde $C(x)$ está medido en pesos y es válida para cuando se producen entre 8 y 30 radiadores. En este momento la Pyme produce 10 radiadores por día.

- a. Indicar la función que expresa el costo marginal de la Pyme
- b. ¿En cuánto se incrementarán sus costos si desea producir un radiador más por día?

Ejercicio 9: encontrar la fórmula de la función derivada de

- a. $f(x) = x + \sqrt{2}$
- b. $f(x) = x^5 \cdot \cos x$
- c. $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{\operatorname{sen} x}$
- d. $f(x) = 4 \ln x$
- e. $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$

Ejercicio 10: dar la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados.

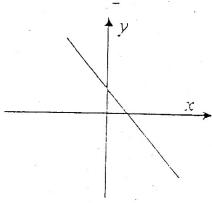
- a. $g(x) = \frac{3}{x}$ en $(1,3)$
- b. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ en $x = 0$
- c. $f(x) = xe^x$ en $x = 2$

Ejercicio 11: encontrar la función derivada de

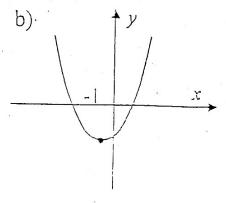
1. $f(x) = (x-5)^3 e^x$
2. $f(x) = (\ln(5x^2)) (e^{5x^4})$
3. $f(x) = \frac{12(4^x)}{x^2 + 6}$
4. $f(x) = 2,5(3^x)(\ln(x))$
5. $f(x) = \sqrt{8x+13} \frac{39}{1+15e^{-0,25x}}$

Ejercicio 12: para cada uno de los siguientes gráficos indicar los intervalos donde la función tiene derivada positiva, negativa y nula.

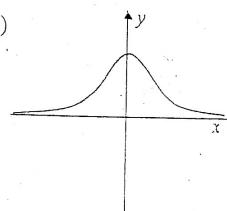
a)



b)



c)



Ejercicio 13: los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en un municipio. Se encontró que una persona con x de educación, antes de buscar un empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio de y pesos, donde:

$$y(x) = 5x^{5/2} + 5900 \quad 4 \leq x \leq 16$$

- a) Encontrar la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación.
- b) Evaluar cómo cambiará el ingreso de una persona que tiene 9 años de escolaridad.

Ejercicio 14: la población P de una ciudad dentro de t años está dada por:

$$P(t) = 20.000e^{0.03t}$$

- a) Encontrar la razón con que la población va cambiando en el tiempo. Observar que la misma es proporcional al tamaño de la población.
- b) Evaluar cuantos individuos se incorporarán, aproximadamente, a la población dentro de 4 años.

Respuestas:

Ejercicio 1:

- a) 8 b) -2 c) 9 d) -4 e) $-\frac{14}{9}$

Ejercicio 2:

a) $f'(x) = 3$

b) $f'(x) = 4x^3 - 2e^x$

c) $f'(x) = 5^x \ln(5)$

d) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

e) $f'(x) = \frac{e^x(x+5)-e^x}{(x+5)^2}$

f)

$$f'(x) = \frac{\cos x(x^3 + 5x + 3) - \operatorname{sen} x(3x^2 + 5)}{(x^3 + 5x + 3)^2}$$

Ejercicio 3:

- a) $f'(1) < 0$ b) $f'(1) > 0$

Ejercicio 4:

- a) Recta tangente al gráfico de la función es: $y = x + 2$
 b) $g'(0) = -2$ y $g(0) = 5$
 c) Recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(2,7)$ es: $y = 1.73x + 3,54$

Ejercicio 5:

- a) $y = 8x - 4$ b) $y = 5x - 3$

Ejercicio 6:

- a) $f'(x) = -\operatorname{sen}(senx).\cos x$
 b) $f'(x) = \frac{6(\ln(3x) + 20)^5}{x}$
 c) $f'(x) = (\cos x)(3x^3 + 49) + 9(\operatorname{sen}x).x^2$
 d) $f'(x) = 25(5x + 29)^4(\cos^2 x) - 2(5x + 29)^5(\cos x)(\operatorname{sen}x)$
 e) $f'(x) = \frac{6x^2(2x + 15) - 2(2x^3 + 3)}{(2x + 15)^2}$
 f) $f'(x) = \frac{3\cos^2(x+1)(-\operatorname{sen}(x+1))(x+1) - (1 + \cos^3(x+1))}{(x+1)^2}$

Ejercicio 7:

- a) Modelo que representa a los costos: Función lineal.
 Modelo que representa a los ingresos: Función lineal.
 b) Costo de producir 36 unidades: \$5.216,00
 c) Costo marginal de la empresa: $C'(x) = 6$, es decir, por cada unidad adicional producida los costos aumentarán en \$6,00.
 d) El ingreso percibido por la venta de 15 unidades es de \$224,50, valor que no cubre los costos, ya que estos ascienden a \$5.090,00.
 e) Ingreso marginal de la empresa: $I'(x) = \$14,96$, es decir, al aumentar sus ventas en una unidad sus ingresos se incrementarán en aproximadamente \$15,00.

Ejercicio 8:

- a) Costo marginal de la Pyme: $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15$
 b) En este momento la Pyme produce 10 radiadores por día, el incremento de sus costos para producir un radiador más por día será de \$195,00.

Ejercicio 9:

- a) $f'(x) = 1$
 b) $f'(x) = 5x^4.\cos x - x^5\operatorname{sen}x$
 c) $f'(x) = \frac{(4x^3 + 3x^2)2x + 1)\operatorname{sen}x - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$
 d) $f'(x) = \frac{4}{x}$
 e) $f'(x) = 10x - 2$



Ejercicio 10:

a) $y = -3x + 6$ b) $y = 1$ c) $y = 22,16x - 29,55$

Ejercicio 11:

a) $f'(x) = 3(x-5)^2 e^x + (x-5)^3 e^x$

b) $f'(x) = \frac{2}{x} \left(e^{5x^4} \right) + 20x^3 \left(\ln(5x^2) \right) \left(e^{5x^4} \right)$

c) $f'(x) = \frac{12(4^x \ln 4)(x^2 + 6) - 24x \cdot 4^x}{(x^2 + 6)^2}$

d) $f'(x) = 2,5 \left[(3^x \ln 3)(\ln(x)) + \frac{3^x}{x} \right]$

e) $f'(x) = \left(\frac{156}{\sqrt{8x+13}(1+15e^{-0,25x})} \right) + \left(\frac{146,25\sqrt{8x+13}e^{-0,25x}}{(1+15e^{-0,25x})^2} \right)$

Unidad 6

APLICACIÓN DE LA DERIVADA A FUNCIONES:

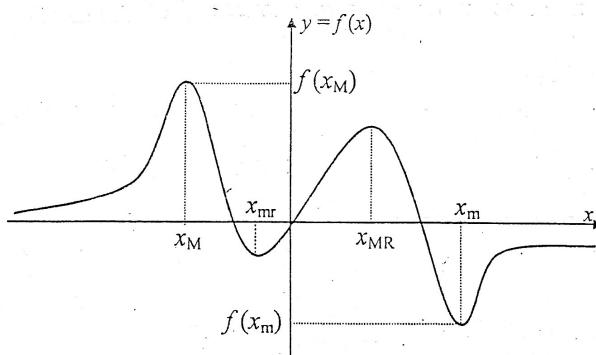
Derivadas sucesivas de una función:

Dada una función podemos aplicar varias veces la operación derivada y encontramos las derivadas de diferentes órdenes de una función

$$f'(x) = \frac{6(\ln(3x) + 20)^5}{x}.$$

$$f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \rightarrow f^{(iv)}$$

Máximos y mínimos absolutos de una función:



- el punto x_M es un punto de máximo absoluto de la función $y = f(x)$ si verifica que:

$$f(x_M) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ perteneciente al } \text{Dom } f$$

El valor $f(x_M)$ es el valor máximo absoluto de la función.

- el punto x_m es un punto de mínimo absoluto de la función $y = f(x)$ si verifica que:

$$f(x_m) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ perteneciente al } \text{Dom } f$$

El valor $f(x_m)$ es el valor mínimo absoluto de la función.

Máximo absoluto: $(x_M, f(x_M))$

Punto de máximo Valor máximo

Mínimo absoluto: $(x_m, f(x_m))$

Punto de mínimo Valor mínimo

Aplicaciones de la derivada para la optimización y trazado de curvas:

Máximos y mínimos relativos de una función:

- el punto x_{MR} es un punto de máximo relativo de la función $y = f(x)$ si verifica que:

$f(x_{MR}) \geq f(x)$ para todo x en un intervalo I , contenido en el $\text{Dom } f$

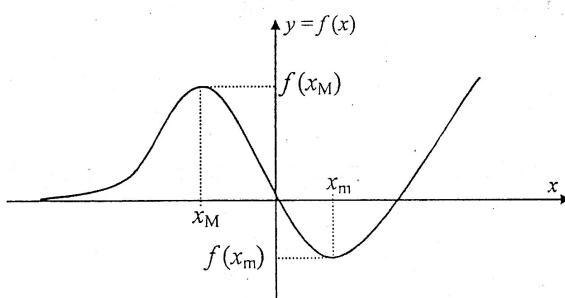
Máximo relativo: $(x_{MR}, f(x_{MR}))$

- el punto x_{mr} es un punto de mínimo relativo de la función $y = f(x)$ si verifica que:

$f(x_{mr}) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo I , contenido en el $\text{Dom } f$

Mínimo relativo: $(x_{mr}, f(x_{mr}))$

Determinación de máximos y mínimos aplicando la derivada



Propiedad de la derivada de una función:

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f crece en el intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f decrece en el intervalo.
- Si $f'(x) = 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f es constante en el intervalo.

Un punto p que verifica $f'(p) = 0$ o bien $f'(p)$ no existe, se denomina un **punto crítico** de la función $y = f(x)$

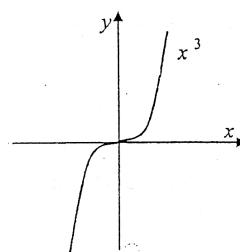
Si x es un punto de máximo (absoluto o relativo) o bien un punto de mínimo (absoluto o relativo), entonces $f'(x) = 0$, es decir x es un punto crítico.

¿Todo punto crítico será un punto de máximo y/o de mínimo? NO

Ejemplo: $f(x) = x^3$

Punto crítico: $x = 0$

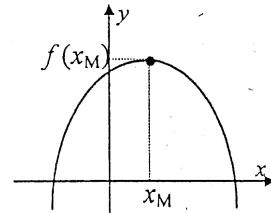
Punto de máximo y/o de mínimo: No tiene



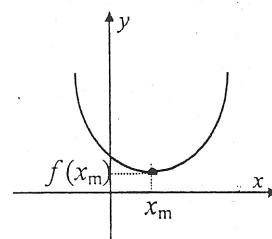
Condición necesaria: un punto x en el $\text{Dom } f$ es un punto de máximo y/o de mínimo si verifica $f'(x) = 0$

Criterio para determinar máximos y mínimos de $y = f(x)$, a partir de la Derivada Segunda (f''):

1. $\underbrace{\text{Si } x \text{ es un punto crítico } (f'(x) = 0) \text{ y } f''(x) < 0}_{(x, f(x)) \text{ es un MÁXIMO}}$



2. $\underbrace{\text{Si } x \text{ es un punto crítico } (f'(x) = 0) \text{ y } f''(x) > 0}_{(x, f(x)) \text{ es un MÍNIMO}}$



Ejemplo 1: máximos y mínimos de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20.$$

Podemos encontrar la derivada primera de $f(x)$ y la derivada segunda como:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

Encontrando donde $f'(x)$ se anula y luego evaluando $f''(x)$ podemos encontrar los máximos y mínimos de $f(x)$.

Ejemplo 2: obtener el máximo y/o mínimo de $y = x^6$.

Esta función solo tiene un mínimo en $x = 0$.

Condición necesaria para que un punto x sea de máximo y/o de mínimo es que la derivada primera sea nula: $f'(x) = 0$

Condición suficiente para que un punto x sea de:

- Máximo: es que la primer derivada no nula sea de orden par y negativa: $f^{(2n)}(x) < 0$
- Mínimo: es que la primer derivada no nula sea de orden par y positiva: $f^{(2n)}(x) > 0$

Situación- problema 1: Una empresa de MKT estimó que x meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(x)$ familias lo usarán, donde:

$$f(x) = -\frac{10}{9}x^2 + \frac{40}{3}x \quad 0 \leq x \leq 12$$

$f(x)$ en miles

¿Después de cuántos meses el número de familias que usarán el producto será máximo?

¿Cuántas familias, como máximo, se puede estimar que usarán el producto?

Rta: $x_v = 6$ meses $Y_v = 40.000$ familias Máximo de $f = (6, 40.000)$

Situación- problema 2: el ingreso obtenido por la venta de este nuevo producto la empresa lo estima que puede obtenerse a partir de la función:

$$I(x) = \frac{800x}{x+3} - 3x \quad x \geq 0$$

I(x) en miles

¿A qué precio x debe vender el producto para lograr el máximo ingreso?

¿A cuánto ascenderá dicho ingreso si vende al precio calculado?

Rta: Dejamos este problema al lector.

Concavidad de una curva: Curvatura

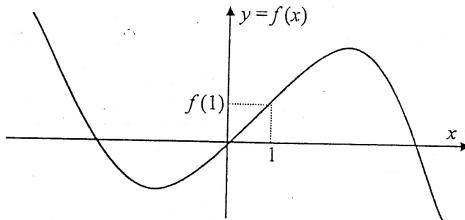
Si una función f es derivable, decimos que su gráfico es cóncavo hacia arriba en el intervalo (a,b) si $f''(x) > 0$ para todo x en el intervalo.

O bien el gráfico de f es cóncavo hacia arriba si $f'(x)$ es creciente para todo x en el intervalo (a,b) , esto es: las pendientes de las sucesivas rectas tangentes toman valores cada vez mayores cuando x crece de a hasta b .

Si una función f es derivable, decimos que su gráfico es cóncavo hacia abajo en el intervalo (a,b) si $f''(x) < 0$ para todo x en el intervalo.

O bien el gráfico de f es cóncavo hacia abajo si $f'(x)$ es decreciente para todo x en el intervalo (a,b) , esto es: las pendientes de las sucesivas rectas tangentes toman valores cada vez menores cuando x crece de a hasta b .

Ejemplo:



f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1)$

f es cóncava hacia abajo en $(1, +\infty)$

Punto de inflexión:

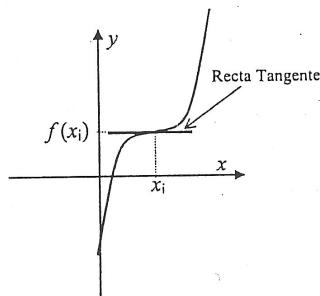
Un punto p donde la función f cambia su concavidad, se llama punto de inflexión.

En la función $y = f(x)$ del gráfico anterior: Punto de Inflexión $(1, f(1))$

Condición necesaria para que un punto x sea punto de inflexión es que la derivada segunda sea nula: $f''(x) = 0$

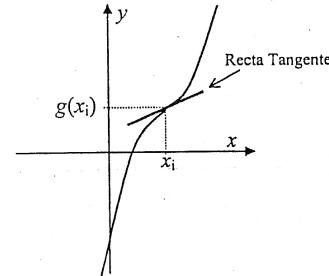
Condición suficiente para que un punto x sea punto de inflexión es que la primera derivada no nula sea de orden impar: $f^{(2n+1)}(x) \neq 0$

Dos tipos de Puntos de inflexión



$(x_i, f(x_i))$ es un punto de inflexión a tangente horizontal pues: $f''=0$ y $f'(x)=0$

$(x_i, g(x_i))$ es un punto de inflexión a tangente horizontal pues: $g''=0$ y $g'(x)\neq 0$



Conceptos básicos

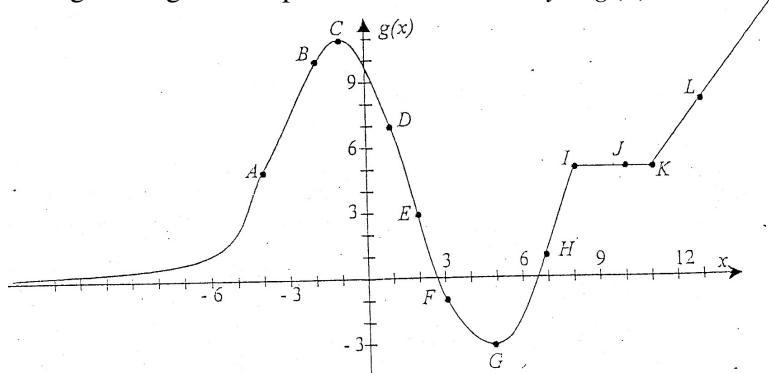
1. un punto p es un punto crítico de la función $y = f(x)$ si verifica que $f'(p) = 0$ o bien $f'(p)$ no existe.
2.
 - a. un punto x_M es un punto de máximo absoluto de la función $y = f(x)$ si verifica que $f(x_M) \geq f(x)$ para todo punto x perteneciente al Dominio de la función. El valor $f(x_M)$ se llama valor máximo absoluto de la función.
 - b. un punto x_m es un punto de mínimo absoluto de la función $y = f(x)$ si verifica que $f(x_m) \leq f(x)$ para todo punto x perteneciente al Dominio de la función. El valor $f(x_m)$ se llama valor mínimo absoluto de la función.
3.
 - a. un punto x_R es un punto de máximo relativo de la función $y = f(x)$ si verifica que $f(x_R) \geq f(x)$ para todo punto x perteneciente a un intervalo, entorno del punto en el Dominio de la función. El valor $f(x_R)$ se llama valor máximo relativo de la función.
 - b. un punto x_r es un punto de mínimo relativo de la función $y = f(x)$ si verifica que $f(x_r) \leq f(x)$ para todo punto x perteneciente a un intervalo, entorno del punto en el Dominio de la función. El valor $f(x_r)$ se llama valor mínimo relativo de la función.
4. criterio de determinación de máximos y/o mínimos a partir de la Derivada Primera:
 - a. si x_0 es un punto crítico de la función $y = f(x)$ y $f'(x) > 0$ para valores de x menores a x_0 y $f'(x) < 0$ para valores de x mayores a x_0 , entonces x_0 es un punto de máximo de la función.
 - b. si x_0 es un punto crítico de la función $y = f(x)$ y $f'(x) < 0$ para valores de x menores a x_0 y $f'(x) > 0$ para valores de x mayores a x_0 , entonces x_0 es un punto de mínimo de la función.

5. criterio de determinación de máximos y/o mínimos a partir de la Derivada Segunda:
 - a. si x_0 es un punto crítico de la función $y = f(x)$ y $f''(x) < 0$ entonces x_0 es un punto de máximo de la función.
 - b. si x_0 es un punto crítico de la función $y = f(x)$ y $f''(x) > 0$ entonces x_0 es un punto de mínimo de la función.
6. criterio de determinación del crecimiento o decrecimiento de una función a partir de la derivada primera:
 - a. si $f'(x) > 0$ en un intervalo (a,b) , entonces $f(x)$ es creciente en dicho intervalo.
 - b. si $f'(x) < 0$ en un intervalo (a,b) , entonces $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.
 - c. si $f'(x) = 0$ en un intervalo (a,b) , entonces $f(x)$ es constante en dicho intervalo.
7. un punto p es un punto de inflexión de la función $y = f(x)$ si verifica que $f''(p) = 0$ y en dicho punto cambia la curvatura de la gráfica.
8. un punto de inflexión p es un punto de inflexión a tangente horizontal si verifica además $f'(p) = 0$, en cambio decimos que el punto de inflexión p es a tangente oblicua si verifica además $f'(p) \neq 0$.
9.
 - a. si $f''(x) > 0$ en un intervalo (a,b) , entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en dicho intervalo.
 - b. si $f''(x) < 0$ en un intervalo (a,b) , entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.
10. criterio general para determinar extremos (máximos, mínimos e inflexiones) de una función $y = f(x)$:

Par Ordenado	Condición Necesaria	Condición Suficiente	Tipo de Extremo
$(x_M, f(x_M))$	$f'(x_M) = 0$	Primer derivada no nula de orden par y negativa	x_M Punto de Máximo $f(x_M)$ Valor Máximo
$(x_m, f(x_m))$	$f'(x_m) = 0$	Primer derivada no nula de orden par y positiva	x_m Punto de Mínimo $f(x_m)$ Valor Mínimo
$(x_i, f(x_i))$	$f''(x_i) = 0$	Primer derivada no nula de orden impar	$(x_i, f(x_i))$ Punto de inflexión

Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: El siguiente gráfico representa una función $y = g(x)$:



Indicar, señalando las dos coordenadas de cada punto (cuando corresponda):

- a. un punto donde g' es cero.
- b. un punto donde g' es positiva.
- c. un punto donde g' es negativa.
- d. un punto donde g'' es cero.
- e. un punto donde g'' es positiva.
- f. un punto donde g'' es negativa.
- g. Un máximo absoluto, si existe.
- h. Un mínimo absoluto, si existe.
- i. Un máximo relativo, si existe.
- j. Un mínimo relativo, si existe.
- k. Un punto de inflexión, si existe.
- l. Todos los intervalos donde g es creciente.
- m. Todos los intervalos donde g es decreciente.
- n. Todos los intervalos donde g es constante.
- o. Todos los intervalos donde g es cóncava hacia arriba.
- p. Todos los intervalos donde g es cóncava hacia abajo.

Ejercicio 2: para cada una de las siguientes funciones completar los siguientes incisos y luego realizar un bosquejo de su gráfico:

- a. Puntos críticos.
- b. Máximos y/o mínimos de la función (puntos y valores máximos y/o mínimos)
- c. Puntos de inflexión de la función (las dos coordenadas)
- d. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- e. Intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.

Funciones:

- a. $f(x) = 2x^3 - 24x$
- b. $F(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
- c. $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16$
- d. $G(x) = xe^x$

Situaciones problemas. Modelización

Definición: un problema de optimización es una situación que puede formularse de manera tal que involucre maximizar o minimizar una función que describe la misma.
 Ejemplo: encontrar máximo beneficio, menor costo, mínimo tiempo, tamaño óptimo, área mínima, distancia máxima, etc....

1. procedimiento para resolver problemas de optimización, si se conoce la función $y = f(x)$ que modeliza el problema:
 - a. determinar los puntos críticos y a partir de éstos, los puntos y valores máximos y/o mínimos para la función $y = f(x)$.
 - b. Comprobar que los valores encontrados son solución del problema planteado.

2. procedimiento para resolver problemas de optimización, si no se conoce la función $y = f(x)$ que explica el problema:
 - a. leer la situación problema y, en lo posible, realizar un dibujo esquemático de la misma. Determinar datos e incógnitas del problema.
 - b. Escribir las relaciones que representen la situación a maximizar o minimizar.
 - c. Utilizando los datos conocidos para reescribir la ecuación del paso b. de forma tal de obtener una función $y = f(x)$ de una variable.
 - d. Determinar los puntos críticos y a partir de éstos, los puntos y valores máximos y mínimos para la función $y = f(x)$.
 - e. Comprobar que los valores encontrados son solución del problema planteado.

Ejercicio 3: una hamburguesería, si vende x hamburguesas, logra una ganancia P dada por la función:

$$P(x) = 2,44x - \frac{x^2}{20.000} - 5.000 \quad \text{con } x > 0$$

Este modelo es válido para la venta de hasta 35.000 hamburguesas.

- a) Indicar qué número de hamburguesas determinan la máxima ganancia.
- b) ¿A cuánto asciende la ganancia máxima de la hamburguesería?

Ejercicio 4: un comerciante ha calculado el costo C de almacenamiento de x unidades de cierto producto. Si almacena a lo sumo 400 unidades dicho costo se puede representar por:

$$C(x) = 2x + \frac{300.000}{x}$$

- a) ¿Cuál es el costo marginal de almacenamiento?
- b) Hallar el tamaño del pedido que minimizará el costo.

Ejercicio 5: para cada una de las siguientes funciones completar los siguientes incisos y luego realizar un bosquejo de su gráfico:

- i. Puntos críticos.
- ii. Máximos y/o mínimos de la función (puntos y valores máximos y/o mínimos)
- iii. Puntos de inflexión de la función (las dos coordenadas)
- iv. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- v. Intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.

Funciones:

- a. $g(x) = x^3 - 3x^2$
- b. $h(x) = 2x^2 - 2x - 4$
- c. $f(x) = x \cdot (x - 2)^2$
- d. $G(x) = e^x(2x - 4)$

Ejercicio 6: una empresa estima que el costo de producción (en \$) de x unidades de su producto de mayor venta se modeliza por la función:

$$C(x) = 80.000 - 4x + 0,02x^2 \quad \text{con } x > 0$$

Hallar el nivel de producción que hace mínimo el costo promedio por unidad.

Ejercicio 7: al depositarse desperdicios orgánicos en un lago disminuye el contenido de oxígeno en el agua. Si x denota el tiempo, en días, después que se deposita el desperdicio, experimentalmente se encontró que el modelo que da el contenido de oxígeno CO es:

$$CO(x) = x^3 - 30x^2 + 6000 \quad \text{donde } x \geq 0$$

- a) Encuentre el día x en que se produce el valor mínimo de CO
- b) Para el día determinado en el inciso a) ¿a cuánto asciende el contenido de oxígeno?

Ejercicio 8: el costo C de importar los componentes utilizados en la fabricación de un producto tecnológico puede modelizarse por:

$$C(x) = 800 + 0,4x - 0,02x^2 + 0,0001x^3 \quad \text{donde } x \geq 0$$

Donde C se mide en miles de pesos y x es el tamaño del pedido en miles. Calcular el tamaño que minimiza el costo.

Respuestas:

Ejercicio 1:

- a) $C = (-1,11)$; $G = (5,-3)$ y $J = (10,5)$
- b) $A = (-4,5)$; $B = (-2,10)$; $H = (7,1)$ y $L = (13,8)$
- c) $D = (1,7)$; $E = (2,3)$ y $F = (3,-1)$
- d) $A = (-4,5)$; $E = (2,3)$; $J = (10,5)$ y $L = (13,8)$
- e) $F = (3,-1)$; $G = (5,-3)$ y $H = (7,1)$
- f) $B = (-2,10)$; $C = (-1,11)$ y $D = (1,7)$
- g) Máximo absoluto: No existe.
- h) $G = (5,-3)$
- i) $C = (-1,11)$ y $I = (8,5)$
- j) $K = (11,5)$
- k) $A = (-4,5)$; $E = (2,3)$; $I = (8,5)$ y $K = (11,5)$
- l) $(-\infty, -1)$; $(5,8)$ y $(11, +\infty)$
- m) $(-1,5)$
- n) $(8,11)$
- o) $(-\infty, -4)$ y $(2,8)$
- p) $(-4,2)$

Ejercicio 2:

- a) $f(x) = 2x^3 - 24x$
 - i) Puntos Críticos: $x = -2$ y $x = 2$
 - ii) Máximo Relativo: $(-2, 32)$. Mínimo Relativo: $(2, -32)$.
 - iii) Puntos de inflexión de la función: $(0,0)$

- iv) Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$.
 Intervalos de decrecimiento: $(-2, 2)$
 - v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0, +\infty)$.
 Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, 0)$
- b) $F(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
- i) Puntos Críticos: $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$
 - ii) Máximo Relativo: $(0, 16)$. Mínimo Absoluto: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$
 - iii) Puntos de inflexión de la función: $(1, 15, 7, 17)$ y $(-1, 15, 7, 17)$
 - iv) Intervalos de crecimiento: $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$.
 Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$
 - v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, 1, 15)$ y $(1, 15, +\infty)$.
 Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-1, 15, 1, 15)$
- c) $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16$
- i) Puntos Críticos: $x = 0$ y $x = 2$
 - ii) La función no posee Máximos Absolutos ni Relativos.
 Mínimo Absoluto: $(0, -16)$
 - iii) Puntos de inflexión de la función: $(2, 0)$ y $(0, 66, -9, 5)$
 - iv) Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.
 Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$
 - v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, 0, 66)$ y $(2, +\infty)$.
 Intervalos de concavidad hacia abajo: $(0, 66, 2)$
- d) $G(x) = xe^x$
- i) Puntos Críticos: $x = -1$
 - ii) La función no posee Máximos Absolutos ni Relativos.
 Mínimo Absoluto: $(-1, -0, 37)$
 - iii) Puntos de inflexión de la función: $(-2, -0, 27)$
 - iv) Intervalos de crecimiento: $(-1, +\infty)$.
 Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -1)$
 - v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-2, +\infty)$.
 Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty, -2)$

Ejercicio 3:

- a) El número de hamburguesas que determinan la máxima ganancia es 24.400 hamburguesas.
- b) La ganancia máxima por la venta de dicha cantidad de hamburguesas asciende a \$24.778,00

Ejercicio 4:

Costo marginal de almacenamiento: $C'(x) = 2 - \frac{300.000}{x^2}$

- a) El tamaño del pedido que minimizará el costo es de 387 unidades aproximadamente.

Ejercicio 5:

a) $g(x) = x^3 - 3x^2$

- i) Puntos Críticos: $x = 0$ y $x = 2$
- ii) Máximo Relativo: $(0,0)$. Mínimo Relativo: $(2,-4)$.
- iii) Puntos de inflexión de la función: $(1,-2)$
- iv) Intervalos de crecimiento: $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$.
Intervalos de decrecimiento: $(0,2)$
- v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(1,+\infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty,1)$

b) $h(x) = 2x^2 - 2x - 4$

- i) Puntos Críticos: $x = 0,5$
- ii) La función no posee Máximos Absolutos ni Relativos.
Mínimo Absoluto: $(0,5,-4,5)$
- iii) Puntos de inflexión de la función: No tiene
- iv) Intervalos de crecimiento: $(0,5,+\infty)$.
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,0,5)$
- v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty,+\infty)$.
Intervalos de concavidad hacia abajo: No tiene

c) $f(x) = x(x-2)^2$

Nota: esta función, resolviendo el cuadrado, puede reescribirse como

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

- i) Puntos Críticos: $x = 2$ y $x = 0,66$
- ii) Máximo Relativo: $(0,66,1,18)$
Mínimo Relativo: $(2,0)$
- iii) Puntos de inflexión de la función: $(1,33,0,6)$
- iv) Intervalos de crecimiento: $(-\infty,0,66)$ y $(2,+\infty)$
Intervalos de decrecimiento: $(0,66,2)$
- v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(1,33,+\infty)$
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty,1,33)$

d) $G(x) = e^x(2x-4)$

- i) Puntos Críticos: $x = 1$
- ii) La función no posee Máximos Absolutos ni Relativos.
Mínimo Absoluto: $(1,-5,44)$
- iii) Puntos de inflexión de la función: $(0,-4)$
- iv) Intervalos de crecimiento: $(1,+\infty)$
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,1)$
- v) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(0,+\infty)$
Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$



Ejercicio 6:

El nivel de producción que hace mínimo el costo promedio por unidad es de 2.000 unidades. Para esta producción el costo promedio será de \$76,00 por unidad.

Ejercicio 7:

- a) El valor mínimo del *CO* se produce en el día 20 después del depósito del desperdicio.
- b) Para dicho día 20 el contenido de oxígeno se estima que asciende a 2.000 unidades.

Ejercicio 8:

El costo será mínimo si se importan 122.443 unidades.

Unidad 7:

INTEGRAL DE FUNCIONES

- Integral indefinida: Operación inversa de la derivada
- Integral definida: Área de una región del plano

En general:

$$F(x) \xrightleftharpoons[??]{\text{Derivada}} F'(x) = f(x)$$

Una primitiva de una función $y = f(x)$ es una función $F(x)$ que verifica:

$$F'(x) = f(x)$$

O en notación diferencial $dF(x) = f(x)dx$

Ejemplo:

Función	Primitivas
1	x ó $x + 2$ ó $x - 5$
$2x$	x^2 ó $x^2 - 7$ ó $x^2 + 300$

Así:

- Primitiva de $f(x) = 1$ es $F(x) = x + c$
- Primitiva de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2 + c$

A estas primitivas las denominamos y las notamos por la INTEGRAL INDEFINIDA de una función.

La integral indefinida de una función $y = f(x)$, respecto de la variable x es una función primitiva $F(x)$ que verifica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{con } c \text{ una constante.}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int 1dx = x + c \\ \text{b)} \quad & \int 2x dx = x^2 + c \end{aligned}$$

Dos primitivas de una función son iguales, salvo una constante c aditiva, es decir:

Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de $y = f(x)$, entonces:

$$F_1(x) = F_2(x) + c$$



Demostración:

Si $F_1(x)$ es una primitiva de $y = f(x)$ $\rightarrow F_1'(x) = f(x)$

Si $F_2(x)$ es una primitiva de $y = f(x)$ $\rightarrow F_2'(x) = f(x)$



$$F_1'(x) = F_2'(x)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

$$F_1(x) = F_2(x) + c$$

TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES:

Función: $f(x)$ y su Integral Indefinida: $\int f(x)dx$

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int k dx = kx + c \quad (k = \text{nº real})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Propiedades de las integrales y sus operaciones:

1. $\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int (f - g)(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
3. $\int (k \cdot f)(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k = \text{nº real})$

Ejemplos:

$$a) \int (3x^2 - 5x^4 + 2) dx = (x^3 - x^5 + 2x + c)$$

$$b) \int (\sqrt{x} + 3e^x) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 3e^x + c$$



Técnicas o métodos de Integración

Integración por sustitución

- Por regla de la cadena:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x) \Rightarrow \int [f(g(x))]' dx = \int f'(g(x)).g'(x) dx$$

$$\int f'(g(x)).g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

Si sustituimos: $\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x) dx \end{cases}$

Entonces $\int [f'(u)] dx = f(u) + c$

Enunciamos la integración por sustitución de la siguiente forma:

Si $F(x)$ es una función primitiva de $y = f(x)$, entonces:

$$\int f(g(x)).g'(x) dx = \int f(u) du = F(g(x)) + c$$

Con la sustitución $\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x) dx \end{cases}$

Ejemplos:

a) $\int (x^2 + 1)^4 \cdot 2x dx = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^5 + c$

b) $\int 6\sqrt{3x-1} dx = 4(3x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

El método de sustitución se aplica a la integral de un producto o un cociente cuando una de las funciones integrando es una función compuesta.

Conceptos básicos

1. la primitiva de una función $y = f(x)$ es otra función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$.
2. la primitiva de una función no es única, y se verifica que si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas, entonces $F(x) = G(x) + c$ donde c es un número constante arbitrario.
3. la integral indefinida de la función $y = f(x)$ se define por $\int f(x) dx = F(x) + c$, donde $f(x)$ es la función integrando y dx indica el diferencial de x y $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$.

4. integral de las principales funciones:

- $\int 1 dx = x + c$
- $\int k dx = kx + c$ con k un número real constante
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ con $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

5. integral y operaciones:

- $\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int (f - g)(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
- $\int (k \cdot f)(x) dx = k \int f(x) dx$ con k un número constante

6. método de sustitución: esta técnica permite la integración de productos y/o cocientes de funciones cuando una de las mismas es una función compuesta:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad \text{donde } F'(x) = f(x)$$

En la práctica se realiza la “sustitución” $u = g(x)$ en cuyo caso $du = g'(x) dx$ y así:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) \cdot du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

(siempre con F primitiva de f)

Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: si f y g son dos funciones cuyas primitivas son F y G respectivamente, indicar el resultado de las integrales:

$$a) \int (2f(x) + g(x)) dx \quad b) \int (f(x) - 5g(x)) dx \quad c) \int (2 + f(x)) dx$$

Ejercicio 2: resolver las siguientes integrales indefinidas, encontrando la primitiva de cada función:

- | | |
|--|---|
| a) $\int (x+1) dx$ | d) $\int \left(\frac{1}{x^3} - x^2 - 4 \right) dx$ |
| b) $\int \left(3x^2 + \frac{x}{2} \right) dx$ | e) $\int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx$ |
| c) $\int \sqrt{x} dx$ | f) $\int \left(\frac{4 \cos x}{5} \right) dx$ |

Ejercicio 3: evaluar las siguientes integrales. Observar que los integrandos presentan funciones compuestas.

- a) $\int (x \operatorname{sen}(x^2)) dx$
- b) $\int (x^3 (x^4 - 1)^2) dx$
- c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$
- d) $\int (3x e^{2x^2}) dx$
- e) $\int (3x \sqrt{3x^2 - 7}) dx$
- f) $\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) dx$

Situaciones problemas. Modelización

Ejercicio 4: una empresa determinó que el costo marginal CM de producir x unidades de su producto más solicitado puede representarse por $CM(x) = x^3 - 2x$. Encontrar la función $C(x)$ de costo total, sabiendo que los gastos fijos de producción son de \$10.000.

Ejercicio 5: una Pyme determinó que la función que modeliza los ingresos marginales obtenidos por la venta de x unidades de un producto lácteo de primera necesidad es $IM(x) = x^2 - 3$, con $x > 0$, donde IM está medido en pesos y x en miles de unidades vendidas.

- a) Encontrar la función que modeliza los ingresos totales I , suponiendo que $I(0) = 0$.
- b) ¿por qué $I(0) = 0$ es una suposición razonable?

Ejercicio 6: si f y g son dos funciones cuyas primitivas son F y G respectivamente, indicar el resultado de las integrales:

- a) $\int (g(x) - 1) dx$
- b) $\int (f(x) + x) dx$
- c) $\int \left(\frac{f(x)}{4} \right) dx$

Ejercicio 7: encontrar las funciones primitivas de las siguientes funciones:

- a) $f_1(x) = 3x + 4$
- b) $f_2(x) = 3$
- c) $f_3(x) = x^4 - 2e^x$
- d) $f_4(x) = 5x^2 - 2x - 1$

Ejercicio 8: resolver las siguientes integrales indefinidas, encontrando la primitiva de cada función:

a) $\int \left(x + \frac{3}{x^2} \right) dx$

b) $\int \left(\frac{x+2}{x} \right) dx$

c) $\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{5} \right) dx$

d) $\int \left(3x^{\sqrt{2}} \right) dx$

e) $\int \left(\frac{\cos(4x)}{4} \right) dx$

f) $\int \left(\frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3+3} \right) dx$

g) $\int \frac{3x^2}{(1-x^3)^6} dx$

h) $\int \left(\frac{1}{\cos^2(x+3)} \right) dx$

Ejercicio 9: el incremento de la población de una ciudad t años después del censo está dada por

$$P'(t) = 600e^{0.03t}$$

Encontrar la función que indica la cantidad de individuos de la población, en dicho año t , sabiendo que en el momento del censo la ciudad contaba con 20.000 habitantes.

Respuestas:

Ejercicio 1:

a) $2F(x) + G(x) + c$ b) $F(x) - 5G(x) + c$ c) $2x + F(x) + c$

Ejercicio 2:

a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$

b) $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{4} + c$

c) $F(x) = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$

d) $F(x) = -\frac{x^{-2}}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x + c$

e) $F(x) = \ln x - \cos x + c$

f) $F(x) = \frac{4\operatorname{sen} x}{5} + c$

Ejercicio 3:

- a) $F(x) = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$
- b) $F(x) = \frac{(x^4 - 1)^3}{12} + c$
- c) $F(x) = -\frac{2(1 - x^3)^{1/2}}{5} + c$
- d) $F(x) = \frac{3}{4} e^{2x^2} + c$
- e) $F(x) = \frac{(3x^2 - 7)^{3/2}}{3} + c$
- f) $F(x) = -\ln(\cos x) + c$

Ejercicio 4:

La función de costo total es $C(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 10.000$

Ejercicio 5:

La función que modeliza los ingresos totales es $I(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$

Ejercicio 6:

- a) $G(x) = x + c$
- b) $F(x) + \frac{x^2}{2} + c$
- c) $\frac{F(x)}{4} + c$

Ejercicio 7:

- a) $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 4x + c$
- b) $F(x) = 3x + c$
- c) $F(x) = \frac{x^5}{5} - 2e^x + c$
- d) $F(x) = \frac{5x^3}{3} - x^2 - x + c$

Ejercicio 8:

- a) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x} + c$
- b) $F(x) = x + 2 \ln x + c$
- c) $F(x) = -\frac{\cos x}{5} + c$
- d) $F(x) = 3 \frac{x^{2,41}}{2,41} + c$
- e) $F(x) = \frac{\sin(4x)}{16} + c$
- f) $F(x) = \frac{e^{x^3+3}}{9} + c$
- g) $F(x) = \frac{1}{5(1-x^3)^5} + c$
- h) $F(x) = \operatorname{tg}(x+3) + c$

Ejercicio 9:

El modelo para la cantidad de individuos de la población en el año t es:

$$P(t) = 20.000 e^{0,03t}$$

Unidad 8:

INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de f en dicho intervalo, entonces la integral definida se define como

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

Nota: esta definición se conoce como Regla de Barrow

Ejemplo:

$$\int_1^4 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 = 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Propiedades de la Integral Definida:

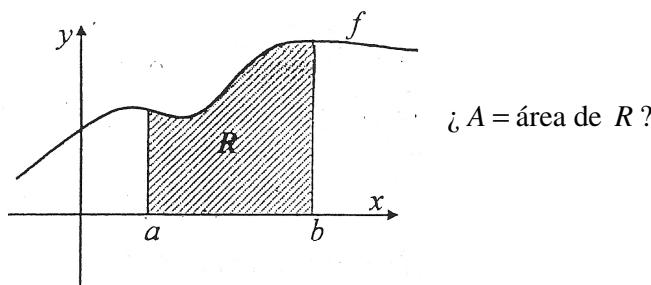
1. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. $\int_a^b (k \cdot f)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{nº real})$
3. $\int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{con } a < c < b$

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ da por resultado un **número real**.

Aplicación de la Integral definida: CÁLCULO DE ÁREAS

Consideramos:

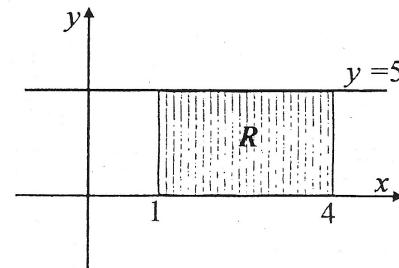
Región R del plano $\left\{ \begin{array}{l} f \geq 0, f \text{ continua.} \\ \text{El eje } x \\ \text{Las rectas verticales } x = a, x = b \end{array} \right.$



Casos particulares:

I. Si $f(x) = 5$

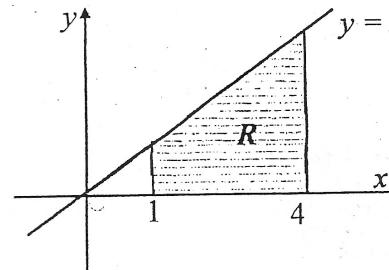
Región R del plano $\begin{cases} f(x) = 5 \text{ (continua y positiva)} \\ \text{El eje } x \\ \text{Las rectas verticales } x = 1, x = 4 \end{cases}$



$$\text{Área } (R) = \text{base} \cdot \text{altura} = (4-1) \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

II. Si $f(x) = x$

Región R del plano $\begin{cases} f(x) = x \text{ (continua y positiva)} \\ \text{El eje } x \\ \text{Las rectas verticales } x = 1, x = 4 \end{cases}$

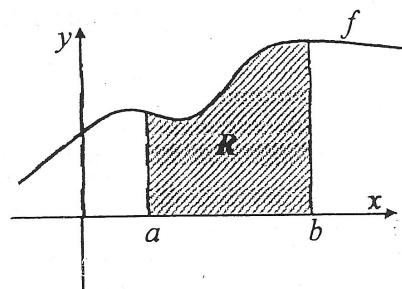


$$\text{Área } (R) = \text{área triángulo} + \text{área rectángulo} =$$

$$= \frac{(4-1) \cdot 3}{2} + (4-1) \cdot 1 = \frac{15}{2}$$

En general:

Región R $\begin{cases} f \geq 0 \\ f \text{ continua.} \\ \text{El eje } x \\ \text{Rectas } x = a, x = b \end{cases}$



¿Área de R ?

Si $y = f(x)$ es una función continua y positiva, para todo x en el intervalo $[a, b]$.

El área A de la región R limitada por:

la función f , el eje x y las rectas verticales $x = a, x = b$ es igual a:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

si dichos límites existen.

Los símbolos s_n y S_n representan las sumas inferiores y superiores de Riemann, respectivamente, y se definen por:

$$s_n = f(x_{m1})(x_1 - a) + f(x_{m2})(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{m(n-1)})(b - x_{n-1})$$

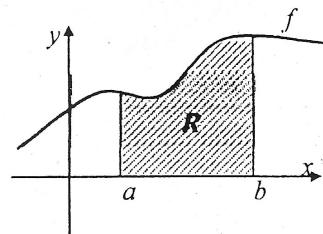
$$S_n = f(x_{M1})(x_1 - a) + f(x_{M2})(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{M(n-1)})(b - x_{n-1})$$

Con x_{mi} = mínimo de f en $[x_i, x_{i+1}]$ y x_{Mi} = máximo de f en $[x_i, x_{i+1}]$
(Llamando $x_0 = a, x_n = b$)

Cálculo de Áreas:

- I.** Si $y = f(x)$ es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces

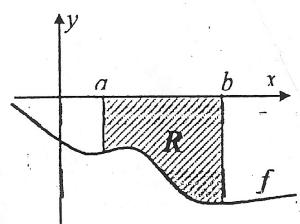
$$\text{Área } (R) = A = \int_a^b f(x) dx$$



- II.** Si $y = f(x)$ es una función continua y negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces

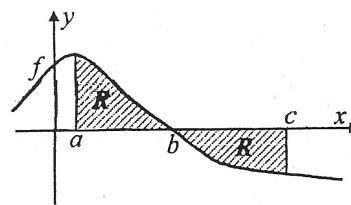
$$\text{Área } (R) = A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Donde $| |$ = valor absoluto.



- III.** Si $y = f(x)$ es una función continua y cambia su signo en el intervalo $[a, b]$, entonces

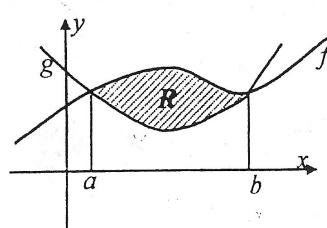
$$\text{Área } (R) = A = \int_a^b f(x) dx + \left| \int_b^c f(x) dx \right|$$



IV. Área entre curvas:

Si $f(x) \geq g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces el área comprendida entre los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$, está dada por:

$$\text{Área } (R) = A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

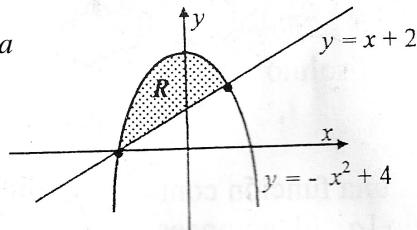


Ejemplos:

1. $\int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^\pi = 2$
2. $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \cos(x)|_0^\pi + |\cos(x)|_\pi^{2\pi} = 2 + 2 = 4$
3. Área (R) =

Podemos determinar que las curvas se cortan en $x=-2$ y $x=1$ por lo tanto se debe calcular la siguiente integral:

$$\int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2)dx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-2}^1 = \text{Area}$$



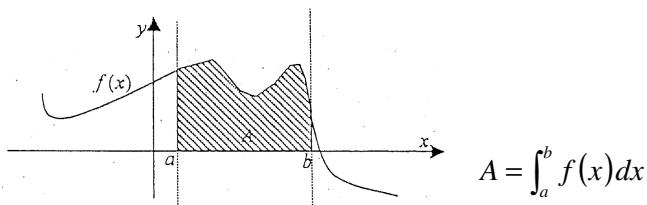
Conceptos básicos

1. la integral definida de la función $f(x)$, entre los límites inferior $x=a$ y superior $x=b$ se define por $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ (es decir $F'(x) = f(x)$).
2. la integral definida y las operaciones:
 - a. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
 - b. $\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
 - c. $\int_a^b (k \cdot f)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ con k un número constante.
3. propiedades de la integral definida:
 - a. $\int_a^a f(x)dx = 0$
 - b. $\int_a^b (f(x))dx = - \int_b^a (f(x))dx$

Aplicaciones de la integral definida: cálculo de áreas

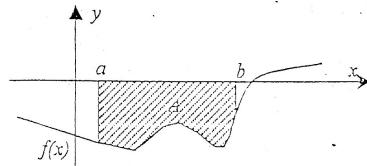
4.

- a) Dada la función $f(x)$ continua y positiva en el intervalo $[a,b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ da el número A que representa el área encerrada por la curva gráfica de la función y y el eje x entre las rectas verticales $x=a$ y $x=b$, gráficamente:

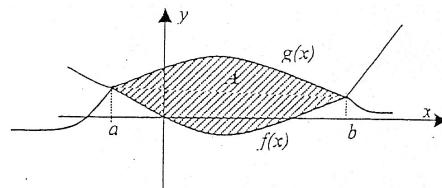


- b) Si la función f toma valores negativos en el intervalo $[a, b]$, entonces el área encerrada por la curva que representa la función y y el eje x entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\left| \int_a^b (f(x)) dx \right|$.

(Nota: el símbolo $\left| \right|$ representa el valor absoluto)



- c) El área encerrada por las funciones f y g , si $f < g$, son ambas funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, está dado por $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$, donde a y b son los puntos de intersección de ambas curvas, gráficamente:



Ejercicios de conceptualización

Ejercicio 1: evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^2 x^3 dx$

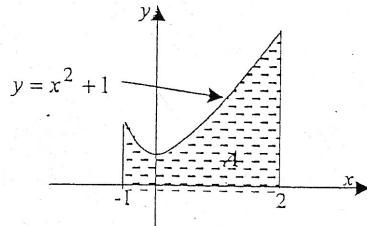
b) $\int_{-1}^2 x^4 dx$

c) $\int_{-2}^1 (3x^2 - 2x + 3) dx$

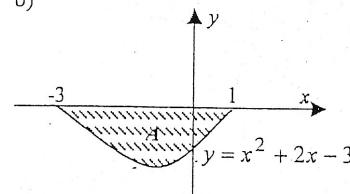
d) $\int_0^1 (e^x - 3^2) dx$

Ejercicio 2: indicar y calcular la integral que permite encontrar el área A sombreada en cada caso:

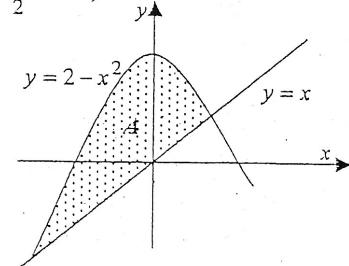
a)



b)



c)



Situaciones problemas. Modelización

Ejercicio 3: la función que explica el costo marginal de un comerciante puede representarse por $CM(x) = 0,2x + 3$. Encontrar el costo C de incrementar de 60 a 70 unidades.

Ejercicio 4: la función de ingreso marginal de un fabricante está representada por:

$$IM(x) = 250 + 90x - 3x^2$$

Si los ingresos I se cuantifican en pesos, estimar el ingreso I del fabricante si sus ventas crecen de 10 a 20 unidades.

Ejercicio 5: evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} (2 \operatorname{sen} x) dx$

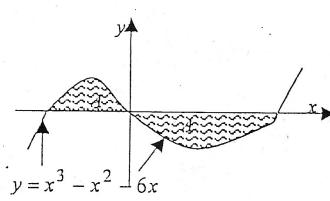
b) $\int_1^e \left(2 + \frac{1}{x} \right) dx$

c) $\int_0^{\pi/2} (\cos x) dx$

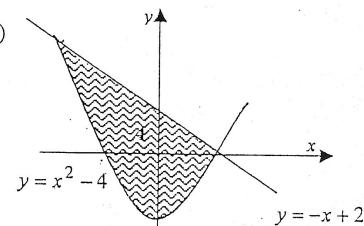
d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\operatorname{sen} x) dx$

Ejercicio 6: indicar y calcular la integral que permite encontrar el área A sombreada en cada caso:

a)

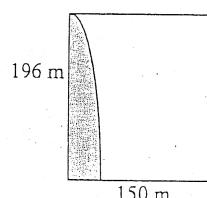


b)



Ejercicio 7: determinar el área que es apta para la siembra en la siguiente parcela. La parte sombreada, en la actualidad, no es apta por procesos erosivos.

Nota: la curva que limita la zona afectada por el proceso de erosión se approxima a $C(x) = 196 - x^2$.



Respuestas:

Ejercicio 1:

- a) 4
- b) 6,6
- c) 21
- d) -7,28



Ejercicio 2:

- a) 6
- b) 10,66
- c) 4,5

Ejercicio 3:

El costo total de incrementar la producción de 60 a 70 unidades es de \$160,00.

Ejercicio 4:

El ingreso total del fabricante –si sus ventas crecen de 10 a 20 unidades- será de \$9.000,00.

Ejercicio 5:

- a) 1,73
- b) 4,43
- c) 1
- d) 0

Ejercicio 6:

- a) 21,08
- b) 20,83

Ejercicio 7:

El área que es apta para la siembra es de 27.570 m².