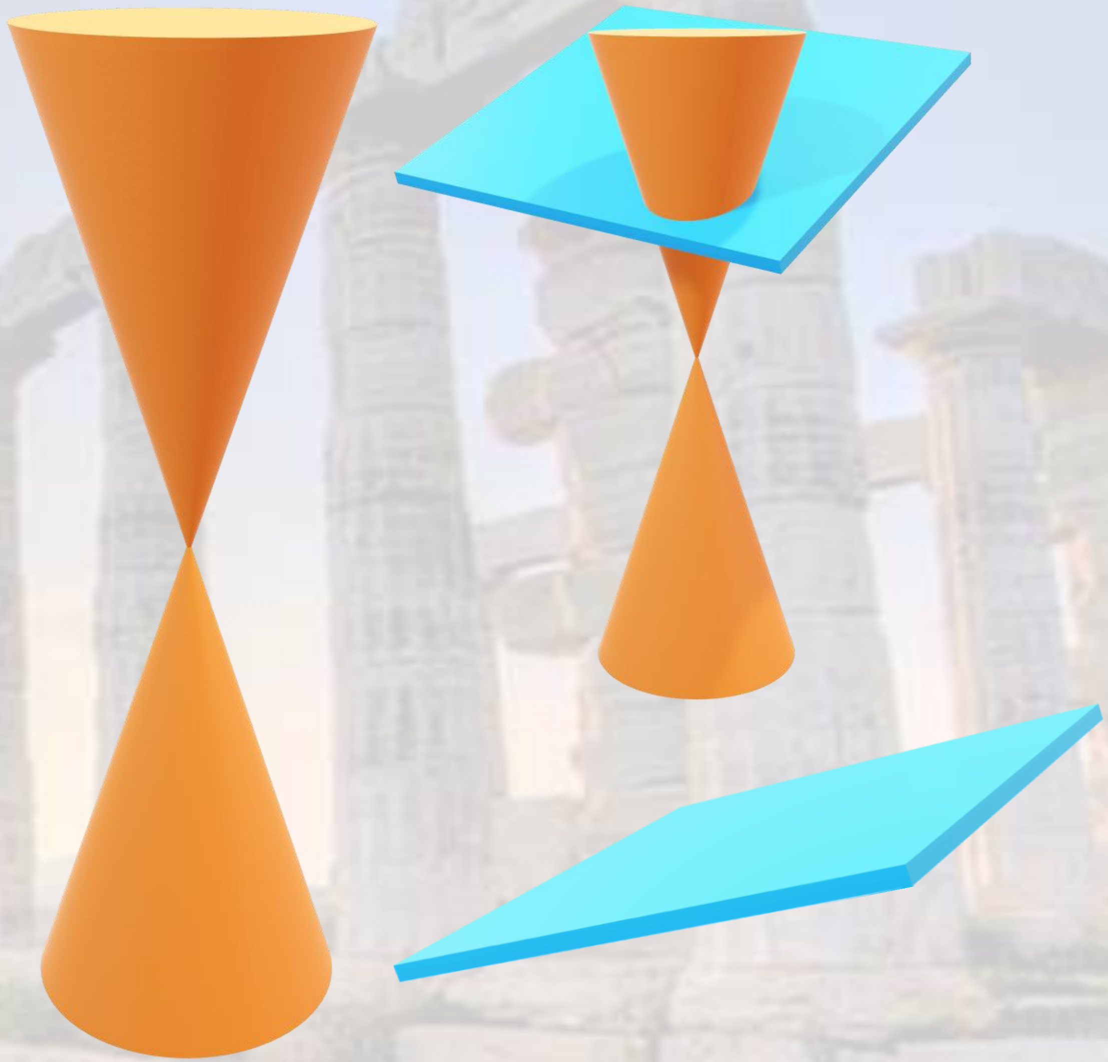
SECCIONES CÓNICAS

Necesitamos . . .

Un cono

Un plano

Observar su intersección

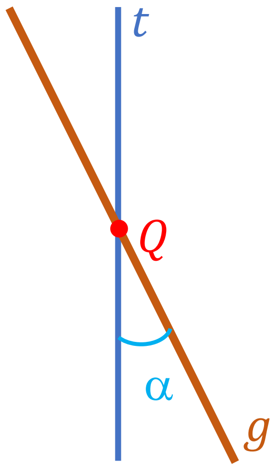


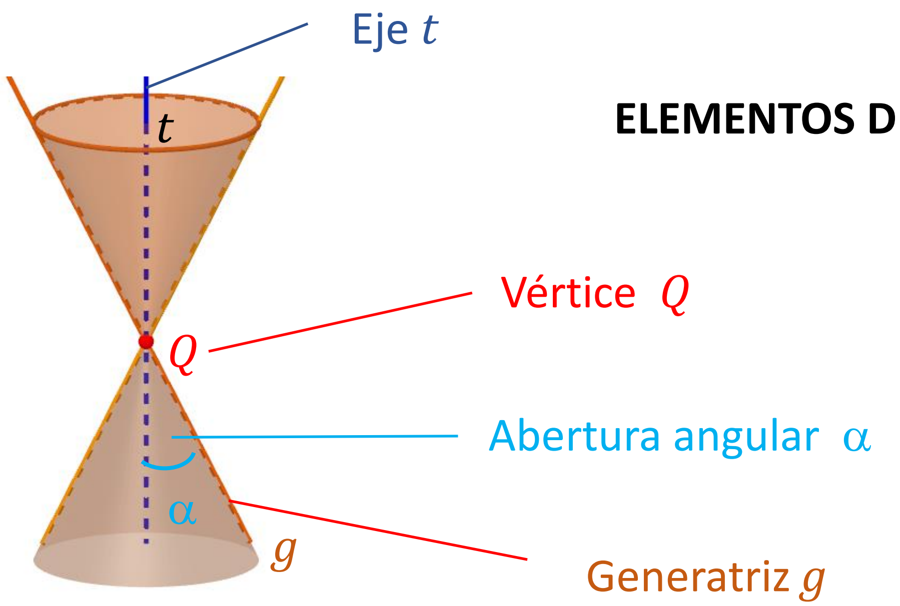
Superficie cónica circular recta

Supongamos una línea recta vertical, t, intersecada por otra recta, g, que la corta en un punto Q. Ambas rectas forman un ángulo α.

Consideremos que Q está fijo, y que g rota alrededor de Q.

Queda definida una superficie de revolución conocida como **cono circular** recto de dos hojas de vértice Q, eje t y generatriz g.

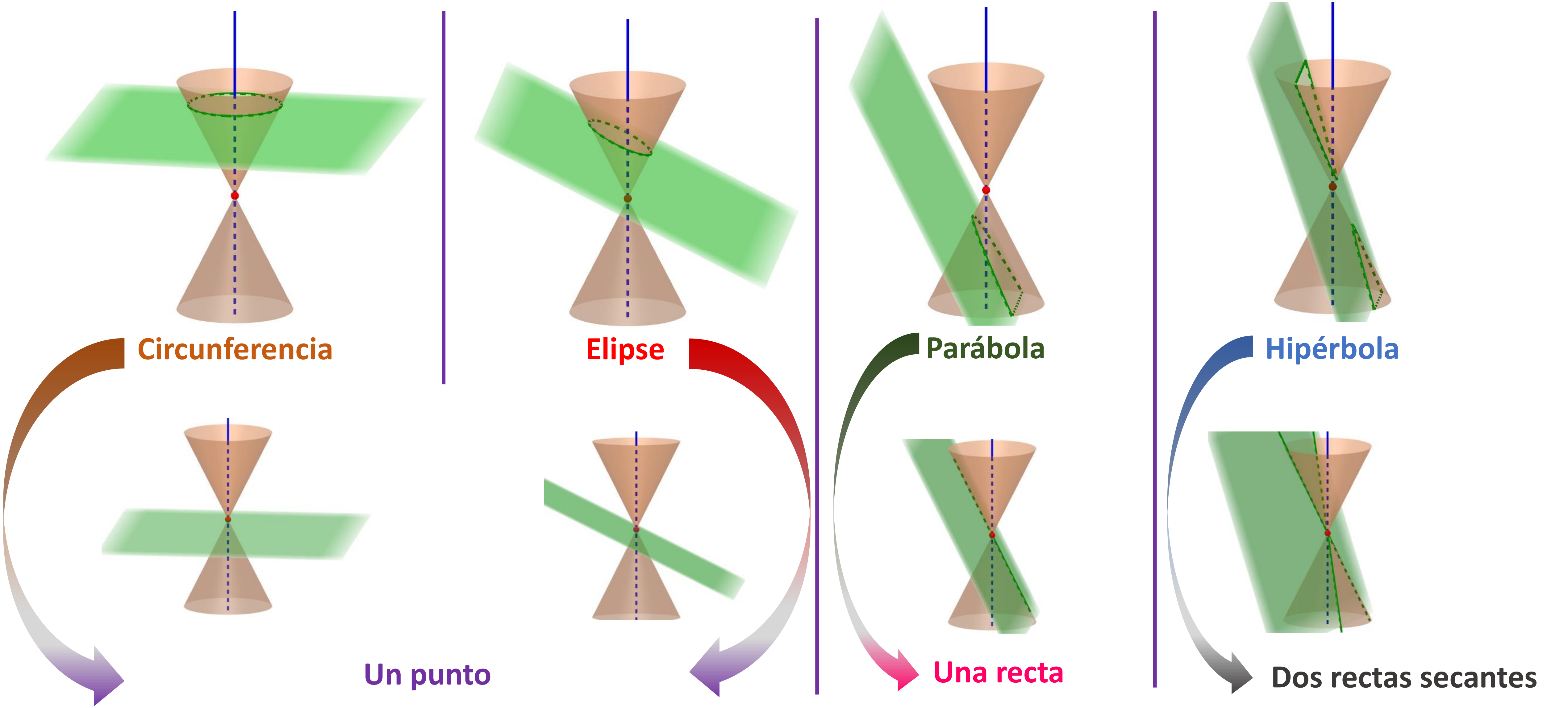




ELEMENTOS DEL CONO DE DOS HOJAS

Generación de la superficie cónica circular recta

Toda Sección Cónica, o simplemente Cónica, puede describirse como la **intersección de un plano y el cono de dos hojas**. Cuando el plano no pasa por el vértice Q, se observan las **cuatro formas básicas de las cónicas**. Si el plano pasa por el vértice, **la cónica resulta degenerada**



$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

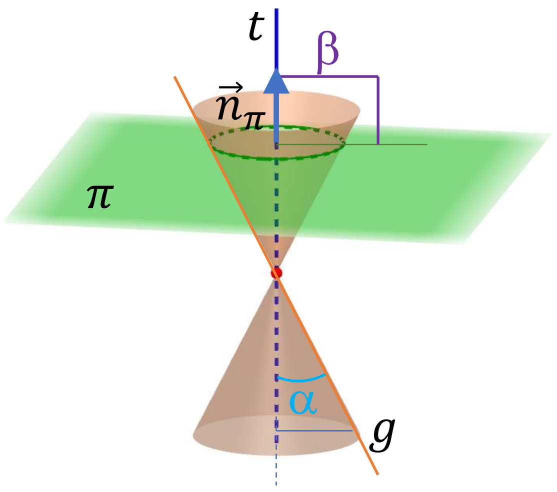
Ecuación General de las Cónicas Regulares

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$B = 0\,;\ A \neq 0 \vee C \neq 0$$

Dime tu excentricidad e identificaré tu forma

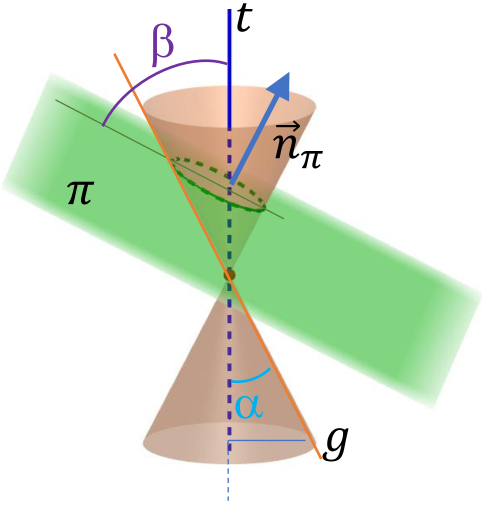
El ángulo β que forma el plano π con la dirección del eje del cono y su comparación con la abertura de la superficie cónica α permite definir un parámetro no negativo llamado excentricidad *e* que identifica el tipo de cónica.

$$e = \frac{cos(\beta)}{cos(\alpha)}$$



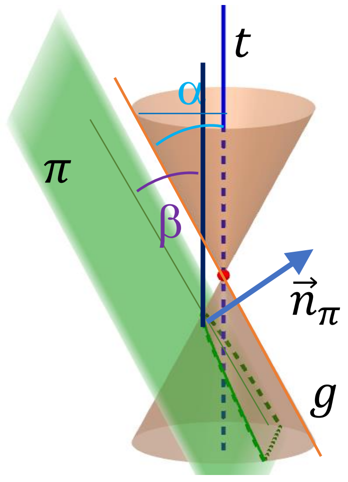
Si $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e = 0$

Circunferencia



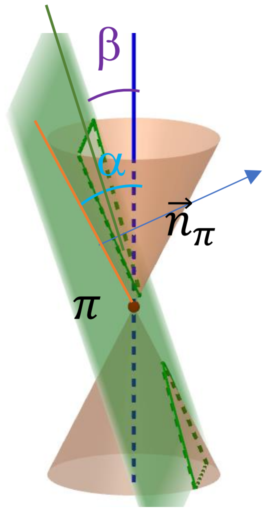
Si $\beta > \alpha \Rightarrow 0 < e < 1$

Elipse



Si $\beta = \alpha \Rightarrow e = 1$

Parábola



Si $\beta < \alpha \Rightarrow e > 1$

Hipérbola

Por el camino del lugar geométrico

También se pueden definir las cónicas como el **lugar geométrico** de todos los puntos del plano que **satisfacen ciertas condiciones**.

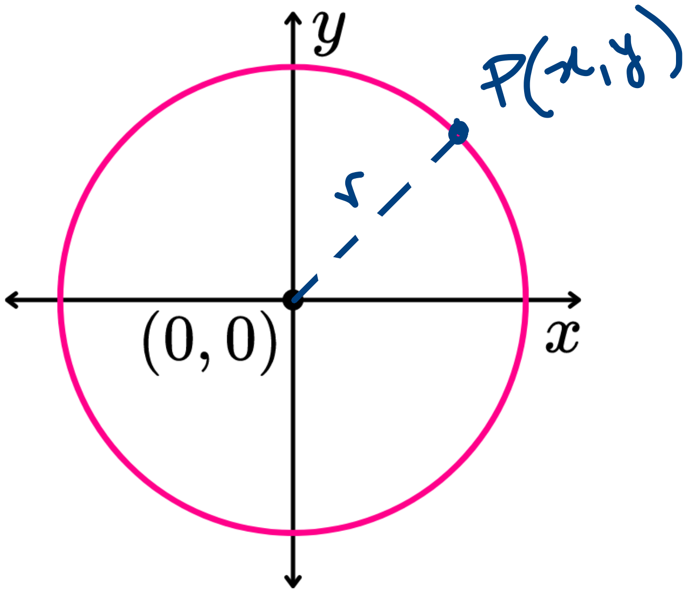
Circunferencia

Se denomina Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Centro: $C(0, 0)$. Radio: $r > 0$

$$\mathscr{C} = \{P(x, y) \in \mathbf{R}^2 / d(P; C) = r\}$$

Ecuación $\quad x^2 + y^2 = r^2$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

distancia entre $P(x,y) \wedge O(0,0)$

$$d(P,O) = r \Rightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Circunferencia

Se denomina Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

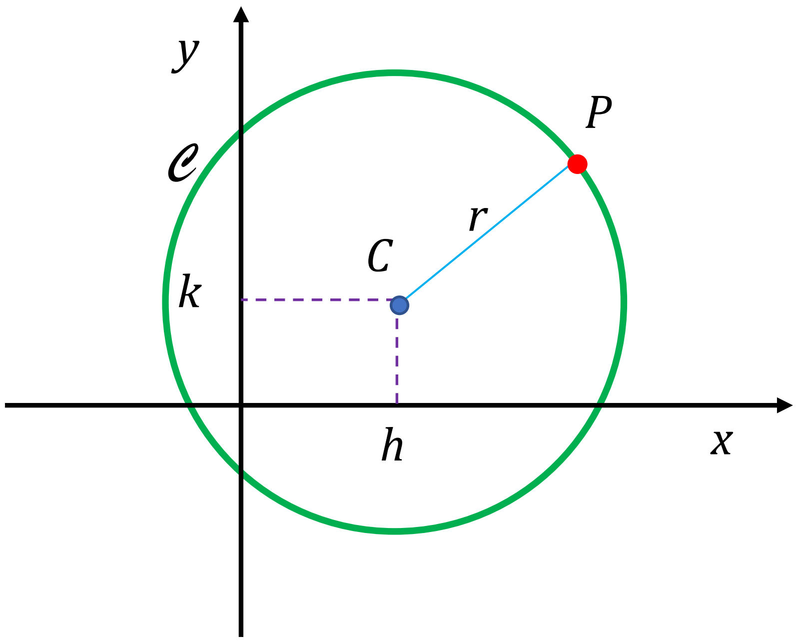
Centro: $C(h, k)$. Radio: $r > 0$

Ecuación canónica: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$x^2 \underbrace{-2hx}_{D} + h^2 + y^2 \underbrace{-2ky}_{E} + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + \underbrace{h^2 + k^2 - r^2} = 0$$

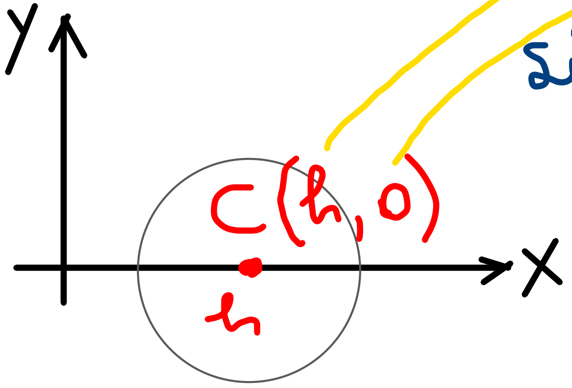
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ec. General de la Circunsf.



1.- Escribe la ecuación canónica y general de la circunferencia dando sus elementos.

a) La ecuación de la circunferencia con C (0,0) y radio r tiene ecuación… $x^2+y^2=r^2$

b) La ecuación de la circunferencia con centro sobre el eje X tiene ecuación… $(x-h)^2+y^2=r^2$

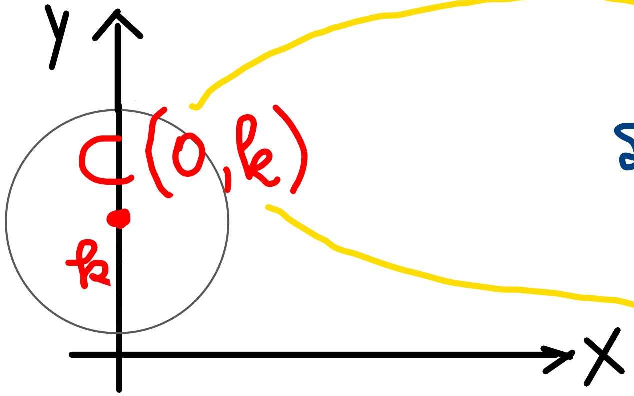


si $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

reemplazo

$(x-h)^2+y^2=r^2$

c) La ecuación de la circunferencia con centro sobre el eje Y tiene ecuación… $x^2+(y-k)^2=r^2$

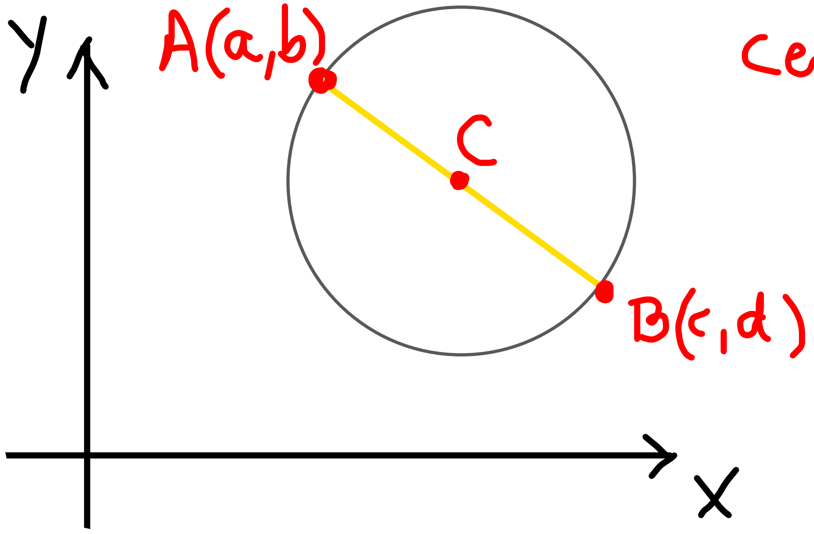


si $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

reemplazo

1.- Escribe la ecuación canónica y general de la circunferencia dando sus elementos.

d) Si (a, b) y (c, d) son los extremos del diámetro de una circunferencia, cuáles serán las coordenadas de su centro?¿Cuál será la medida de su radio?



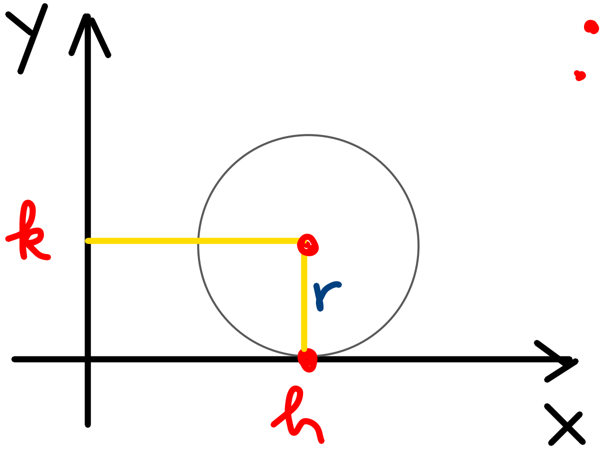
centro = PuntoMedio (A,B)

$$PM\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

$$\therefore C\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

radio = dist. (A,C) = dist. (B,C)

2) Si la circunferencia es tangente al eje x se cumple que.... $r = k$ ....

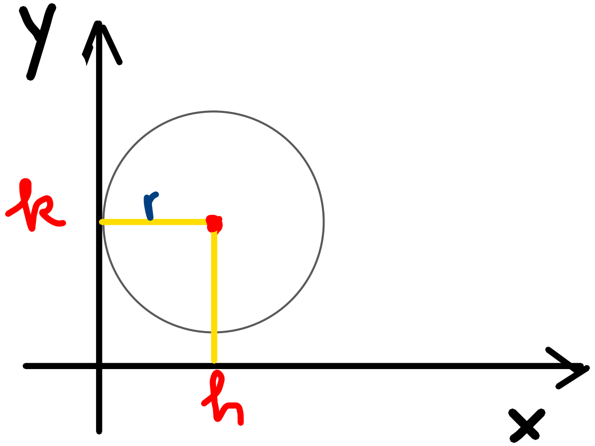


$\therefore$ Es válido escribir

$$(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$$

3) Si la circunferencia es tangente al eje y se cumple que.... $r = h$ ....

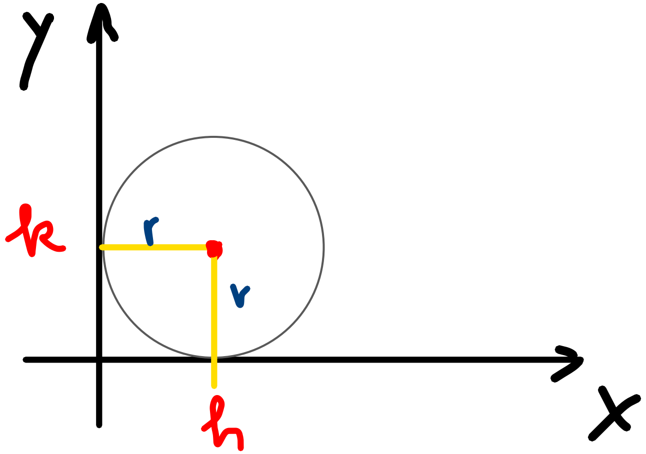


$\therefore$ Es válido escribir

$$(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$$

4) Si la circunferencia es tangente a ambos ejes se cumple que $h = k = r$ ....



$\therefore$ Es válido escribir

$$(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$$

ó

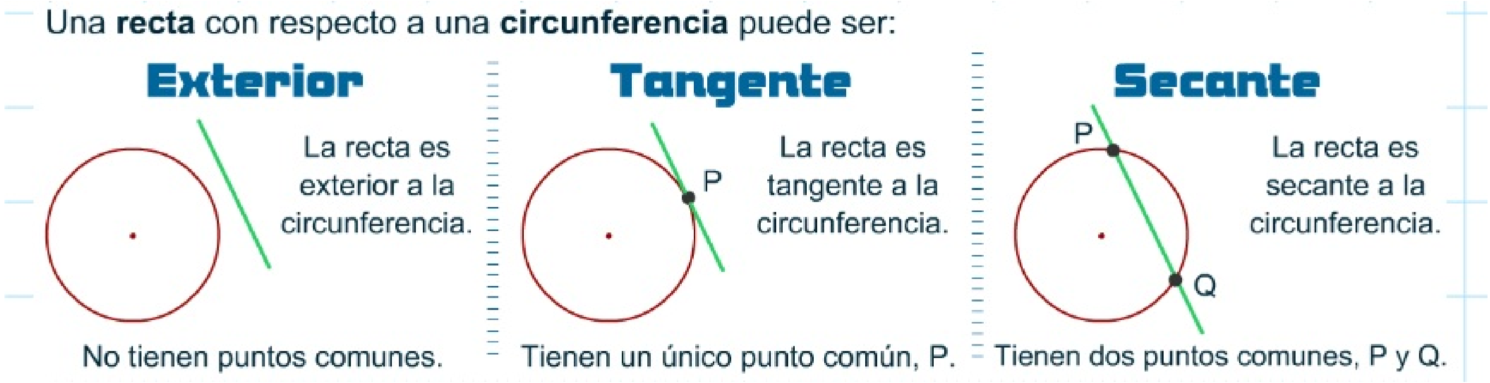
$$(x-k)^2+(y-k)^2=k^2$$

ó

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

5) Si una recta corta a la circunferencia en dos puntos se dice que son…secantes…

Posiciones relativas entre una recta y una circunsferencia



Posiciones relativas entre dos circunsferencias

8) Escribe las ecuaciones de las circunferencias: pasa por la intersección de $3x+5y-14=0$ y $x-y-2=0$ y es concéntrica con: $x^2+y^2+6x+14y+18=0$.

Necesito $\begin{cases} P_0(x_0, y_0) \in \ell e \\ C(h,k) = \text{al centro de } x^2+y^2+6x+14y+18=0 \end{cases}$

Paso 1: Centro de la circunferencia dada

$x^2+y^2+6x+14y+18=0$

$(x^2+6x+3^2)+(y^2+14y+7^2) = -18+3^2+7^2$

$(x+3)^2+(y+7)^2=40$

como comparten centro $\boxed{C(-3,-7)}$

El método para completar cuadrados consiste en dividir el coeficiente lineal en 2, luego elevo al cuadrado ese valor, por último lo sumo en ambos miembros de la igualdad.

8) Escribe las ecuaciones de las circunferencias: pasa por la intersección de $3x+5y-14=0$ y $x-y-2=0$ y es concéntrica con: $x^2 + y^2 +6x +14y +18=0$.

Paso 2: Resolvemos el sistemas de ecuaciones para encontrar el punto de paso de la circunsferencia

$$\begin{cases} 3x+5y=14 \\ x-y=2 \Rightarrow x=2+y \end{cases}$$

Por sustitución

$$3(2+y)+5y=14$$
$$6+3y+5y=14$$
$$8y=14-6$$
$$8y=8$$
$$\boxed{y=1}$$

$$x=2+1$$
$$\boxed{x=3}$$

$\therefore$ $\boxed{P_0(3,1) \in \text{circunf.}}$

8) Escribe las ecuaciones de las circunferencias: pasa por la intersección de $3x+5y-14=0$ y $x-y-2=0$ y es concéntrica con: $x^2 + y^2 +6x +14y +18=0$.

Paso 3: Construyo la ecuación $\longrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$C(-3,-7) \wedge P_0(3,1)$

$(x-(-3))^2+(y-(-7))^2=r^2$

$(x+3)^2+(y+7)^2=r^2$

Para encontrar el radio basta con sustituir la abscisa del punto de paso en "x" y la ordenada en "y"

$(3+3)^2+(1+7)^2=r^2$

$6^2+8^2=r^2$

$36+64=r^2$

$r^2=100$

$\therefore (x+3)^2+(y+7)^2=100$

14/05/2025   CONTROL DE LECTURA

ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TURNO MAÑANA

1) Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta

Si el producto vectorial entre dos vectores en R^n da igual a cero, significa que los vectores son paralelos.

2) Dadas las rectas: r: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$

$$s:\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 0)+\lambda(-2,\ -2,\ 3) \quad \forall\,\lambda\ \in\ \Re$$

Determinar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

1) Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta

Si el producto vectorial entre dos vectores en R^n da igual a cero, significa que los vectores son paralelos.

* La afirmación es Falsa considerando que el producto vectorial es válido solamente para vectores de R^3
* La afirmación es Falsa porque el producto vectorial entre vectores de R^3 da como resultado otro vector (con módulo, dirección y sentido) y No el cero (como número real)

* Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \tilde{0}$

$\tilde{0} = (0,0,0)$ vector Nulo

* Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\therefore$ La afirmación es Falsa

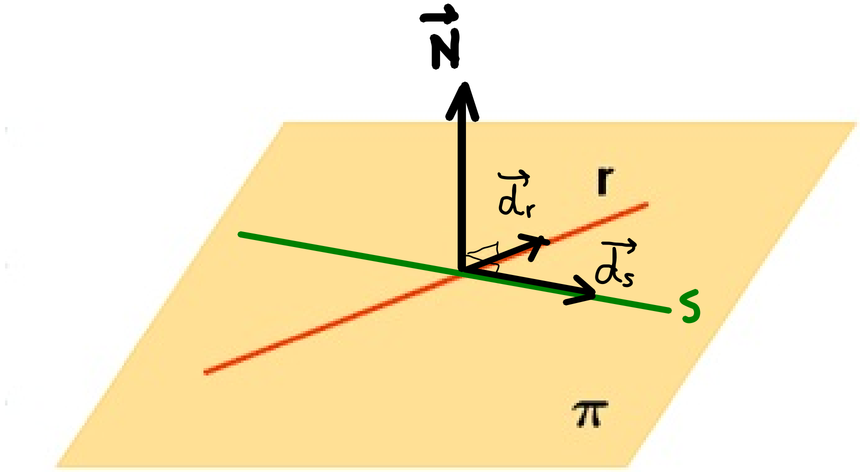
2) Dadas las rectas: $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$

$$s: (x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda(-2, -2, 3) \quad \forall \lambda \in \Re$$

$\vec{d}_r = (3, 2, -1)$

$\vec{d}_s = (-2, -2, 3)$

Determinar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.



Un plano se puede determinar con:

- Un punto del plano
- Dos vectores que estén en el plano (no colineales)

$\vec{N} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s \Rightarrow \vec{N} = (4, -7, -2)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{3} & 2 & -1 & 3 & 2 \\ \cancel{-2} & -2 & 3 & -2 & -2 \end{array}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

Elijo cualquier punto de paso de las rectas $P_0(1, 3, 0) \in \pi$

$4(x-1) - 7(y-3) - 2(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 7y - 2z + 17 = 0}$