## UTN BA - ANÁLISIS MATEMÁTICO I

**Primer Parcial- K1023**

**10-08-22**

**APELLIDO NOMBRE:** Longo Nicolás Gustavo

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | NOTA |
|---|---|---|---|---|---|
| B B | B | B | | | 7 (siete) |

**Todas sus respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.**

**Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto.**

**1. Analice si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique las respuestas: ya sea mostrando un contraejemplo o proporcionando un argumento basado en las herramientas teóricas que conoce, según corresponda.**

a. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2} & si\ x>0 \\ x^2+k^2 & si\ x\le 0 \end{cases}$, existe al menos un valor de $k\in\Re$ tal que $f$ es continua en $x=0$.

b. La función $g(x)=-|2x-4|$ es continua y derivable en todo su dominio.

2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función y = f (x) definida en forma implícita por la ecuación $3+\cos(xy)=y^2+x+xy$ con $y\ge 0$, en el punto x=0

3. Hallar asíntotas lineales, analizar la continuidad en reales y la existencia de extremos de

$$f(x)=\begin{cases} 2-(x+1)^3 & si\ x<0 \\ \dfrac{2x+1}{x+1} & si\ x\ge 0 \end{cases}$$

4. a. Dadas las funciones $f(x)=x^3-7x+6$ y $h(x)=x^3+x^2-6x$ analizar en qué puntos son infinitésimos simultáneos y compararlos en cada uno de esos puntos.

b. ¿Para qué valores de $\alpha\neq 0$ y $\beta\neq 0$ se verifica que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\beta}{sen(\alpha x^5)}=4$?

5. El perímetro de un triángulo isósceles es 24. ¿Cuáles son sus dimensiones para que sea máxima su área?

Nicolás
Longo

HOJA N° 1

FECHA

1 ) Analizar si es V. o F.

a) Dado $f(x)$, existe al menos un valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $f$ es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + k^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

• Analizamos continuidad en $x = 0$ calculando límites laterales

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2(1+\cos x - \cos x - \cos^2 x)}{x^2 (1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2(1-\cos^2 x)}{x^2 (1+\cos x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2 (1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \cdot \overbrace{\operatorname{sen} x}^{1} \cdot \overbrace{\operatorname{sen} x}^{1}}{x \cdot x \cdot (1+\cos x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{2} = \underline{1}$$

Para que sea continua en $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-}$ debe ser $= 1$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + k^2 = 1 \rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{k = 1}_{} \vee \underbrace{k = -1}_{}$$

$$\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^-} \text{ y si } k = \pm 1 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

∴ La afirmación es verdadera

b) $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio

- Analizamos cuando la función cambia de signo

$-|2x-4|=0 \rightsquigarrow |2x-4|=0$

$2x-4=0 \quad \vee \quad -2x+4=0$

$2x=4 \quad \vee \quad -2x=-4$

$x=4/2 \quad \vee \quad x=4/2$

$x=2 \quad\quad x=2$

$$f(x)=\begin{cases} 2x-4 \\ -2x+4 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en todo su dominio por ser función módulo

- Analizamos derivabilidad en $x=2$

- Derivada por definición:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$f'(2^+)=$ ~~2x~~

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})}=2$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}-2\,\frac{(x-2)}{(x-2)}=-2$$

~~Como~~ $f'(2^+)\neq f'(2^-) \Rightarrow \nexists$ la derivada en $x=2$ (Punto anguloso)

$\therefore$ La afirmación es falsa (función continua pero no derivable en todo su dominio)

Nicolás
Longo

2

2) Hallar ecuaciones de la recta tangente y normal a la función:

$3 + \cos(xy) = y^2 + x + xy$ en $x=0,\ y \geq 0$

$x=0$

~~$3 + \cos(xy) - y^2 - x - xy = 0$~~

$3 + 1 = y^2 \rightarrow y^2 - 4 = 0$

$y^2 = 4$

$y = 2 \vee y \cancel{=} -2$

hallo
• ~~[illegible]~~ la derivada

$= -\mathrm{sen}(xy) \cdot (y + xy') = 2y \cdot y' + 1 + y + xy'$

$-\mathrm{sen}(xy) = \dfrac{2yy' + 1 + y + xy'}{y + xy'}$

$0 = \dfrac{4y' + 1 + 2 + 0}{2} \rightarrow 0 = 4y' + 3$

$4y' = -3$

$y' = -\dfrac{3}{4} \rightarrow$ pendiente recta tangente

• ecuación recta tangente

$y - 2 = -3/4\,(x - 0)$

$y = -3/4\,x + 2$

• ecuación recta normal

$y - 2 = \dfrac{4}{3}(x - 0)$

$y = 4/3\,x + 2$

3) Analizar continuidad en $\mathbb{R}$, existencia de extremos y hallar asíntotas en $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2-(x+1)^3 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

· Asíntota vertical (haciendo tender el límite a valores donde se anula la función)

$\lim\limits_{x \to -1} 2-(x+1)^3 \rightsquigarrow$ no posee por ser un polinomio (continua en todo su dominio)

$\dfrac{2x+1}{x+1} \rightsquigarrow$ no presenta A.V en el intervalo en donde existe la función

· Asíntota horizontal (haciendo tender el límite a $\infty$)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}} = 2$$

Asíntota horizontal en $y = 2$

· No presenta asíntota oblicua por tener asíntota horizontal

- Analizamos continuidad en $x = 0$

$-\lim\limits_{x \to 0^-} 2-(x+1)^3 = 1$

$\wedge \; f(0) = 1$

$-\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = 1$

$\therefore$ $f(x)$ es continua en todo su dominio ya que es continua en el punto en el que varía $(x=0)$ y es continua de $(-\infty; 0)$ por ser polinomio y de $[0; +\infty)$ por ser cociente de funciones continuas.