Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

Unidad 8 – INTEGRAL INDEFINIDA y APLICACIONES

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN:

En el Cálculo Diferencial determinamos la derivada y la diferencial de una función

Dada: $y = f(x)$ $\quad y' = f'(x); \quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ $\quad dy = f'(x).dx$

A estas operaciones las llamamos ***proceso de derivación*** y ***proceso de diferenciación***, respectivamente.

El ***proceso inverso*** de la ***diferenciación*** se lo denomina: ***proceso de INTEGRACIÓN***, y es: dada una función encontrar su PIMITIVA o ANTIDERIVADA.

Por ejemplo $\quad f : f(x) = 2x$

Debemos encontrar: $\quad F(x)/F'(x) = f(x)$

Entonces: $\quad F(x) = x^2, de\ modo\ que: F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2$ Es una PRIMITIVA de f

Definición de PRIMITIVA o ANTIDERIVADA de una función:

Toda función ***F(x)*** diferenciable en un intervalo ***I*** se llama ***Primitiva*** o ***Antiderivada*** de la función ***f(x)*** en dicho intervalo, si: $\boldsymbol{F'(x) = f(x) \forall x \in I}$

Esta definición nos advierte que la función primitiva No es única, ya que si F es primitiva de f;$G(x) = F(x) + C$ también lo es, siendo $C \in R$

Entonces si $G´(x) = f(x); \; (F(x) + C)´ = F´(x) + 0 = f(x)$

ANTIDERIVADA GENERAL

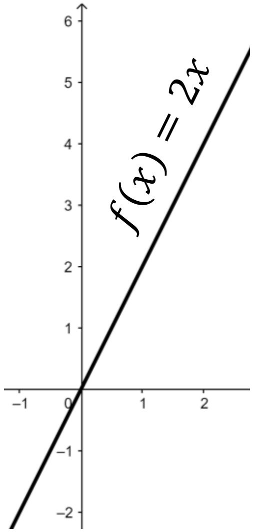
Si $\boldsymbol{F}$ es una Primitiva o Antiderivada de $\boldsymbol{f}$ en el intervalo $\boldsymbol{I}$, toda ***Antiderivada General*** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{I}$ está dada por: $F(x)+C \quad con\ C \in \Re$

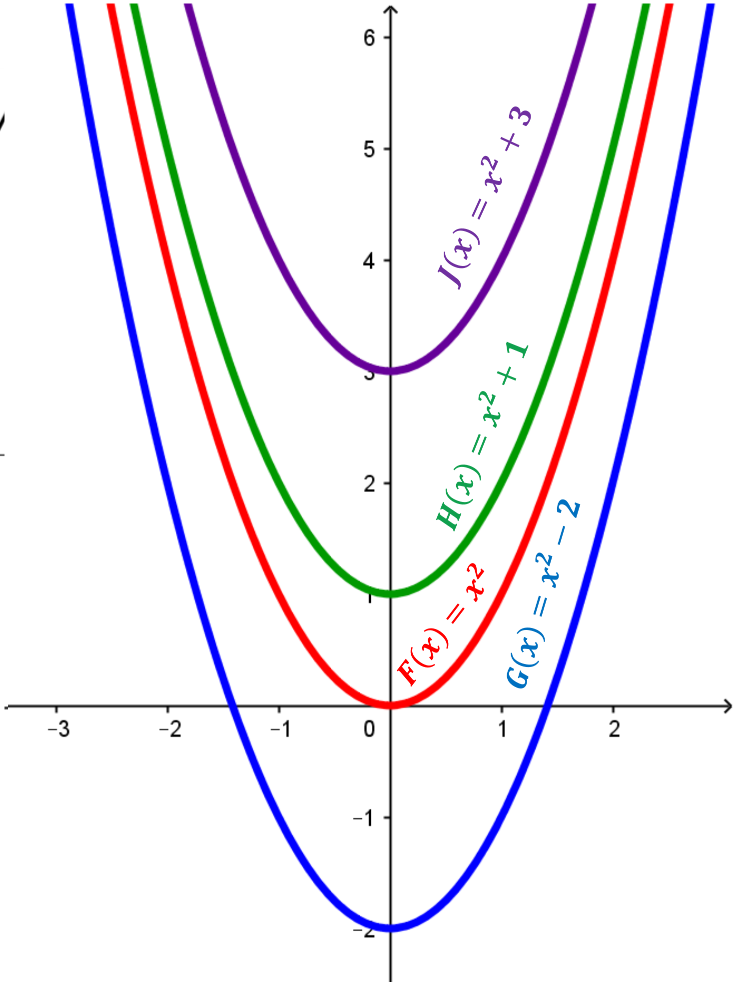
Si $\boldsymbol{F(x) = x^2}$ es una Primitiva de $\boldsymbol{f}$, ya que $F'(x) = 2x = f(x)$, habrá una familia de infinitas Primitivas de $\boldsymbol{f}$, tales como:

$\boldsymbol{G(x) = x^2 - 2}$ $\qquad G'(x) = 2x = f(x)$

$\boldsymbol{H(x) = x^2 + 1}$ $\qquad H'(x) = 2x = f(x)$

$\boldsymbol{J(x) = x^2 + 3}$ $\qquad J'(x) = 2x = f(x)$





Y así sucesivamente.

En general:

$Si: F(x)$ Es primitiva de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\boldsymbol{F(x) + C}}$ Es la **Primitiva General de $\boldsymbol{f}$**

INTEGRAL INDEFINIDA DE *f*

A la expresión ***F(x)+C*** se la denomina ***Integral Indefinida de f(x)*** y se la simboliza:

$$\overset{\textit{Símbolo integral}}{\int} \underbrace{f(x)}_{\textit{función Integrando}} \cdot \overbrace{dx}^{\textit{Variable de integración}} = \underbrace{F(x)}_{\textit{función Primitiva de } f} + \overbrace{C}^{\textit{Constante de integración}}$$

El símbolo $\int$ se denomina símbolo integral y surge como una deformación de la letra S, de Suma y fue definido por Leibniz en el siglo XVII.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Sea ***f*** una función con ***antiderivada*** $\int f(x)dx$, o sea: $\int f(x)dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$, entonces:

1) La ***derivada*** de la ***integral indefinida*** de f es igual a la función misma:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2) La ***diferenciación*** es la operación inversa de la ***integración***.

O sea, La ***diferencial*** de una ***integral indefinida*** es igual a la expresión que figura bajo el signo integral.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

3) Si ***f´*** es una función continua:

$$\int df(x)\,dx = f(x) + C$$

La ***integral*** de la ***diferencial*** de función es igual a la función misma. O sea, la ***integración*** es la operación inversa de la ***diferenciación***.

4) Sea ***f*** una función con ***antiderivada*** $\int f(x)dx$, y sea ***k*** un número real; entonces:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

La ***integral indefinida*** del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

5) Si $y = f(x) \pm g(x)$ es una función que tiene Primitiva:

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$$

La integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de cada una de ellas.

Es ***importante*** recordar y tener en cuenta que el proceso de integración sólo goza de:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$$

A diferencia de los procesos de derivación y diferenciación, que gozan de más propiedades.

TABLA DE INTEGRALES

Para facilitar los cálculos se construyó una Tabla de funciones integrales:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad con\ n \neq -1$

3) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$

4) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

5) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ con\ a > 0\ \ y\ \ a \neq 1$

6) $\int sen\, x \cdot dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x \cdot dx = sen\, x + C$

8) $\int \sec^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = tg\ x + C$

9) $\int co\sec^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{sen^2\ x} \cdot dx = -cotg\ x + C$

10) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = arctg\ x + C$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = arcsen\, x + C$

12) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arccos x + C$

13) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \mathrm{arc}\sec x + C$

14) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \mathrm{arc}\, co\sec x + C$

15) $\int tg\ x \cdot \sec x \cdot dx = \sec x + C$

Para tener en cuenta:

Aceptamos, sin demostración, que el resultado de una integral indefinida es independiente del nombre que tenga la variable.

Es decir: $\int f(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt = \int f(z) \cdot dz = \cdots$, aunque hay que reconocer que el nombre más usado para la variable es $\boldsymbol{x}$.

MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN

El proceso de integración no es tan sencillo como el de derivación; por eso existen métodos o procedimientos generales de integración, más que reglas fijas.

Aun así, en el cálculo de algunas integrales se debe recurrir a la intuición, apelando al conocimiento y la experiencia en las transformaciones matemáticas conducentes a integrandos más fáciles de integrar. Algunos de estos métodos son:

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN

Este método combina las propiedades de la integral indefinida con las integrales inmediatas de la Tabla de Integrales.

EJEMPLOS: Calcular las siguientes integrales.

$a)\ \int (x-1)^2 \cdot dx$

No existe en la tabla de integrales la integral de: $\int [f(x)]^2 \cdot dx$

Pero es evidente que se puede desarrollar el cuadrado del binomio de la función integrando: $\int (x-1)^2 \cdot dx = \int (x^2-2x+1) \cdot dx =$

Por propiedades de la integral indefinida:

$$\int (x^2-2x+1) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx - \int 2x \cdot dx + \int 1 \cdot dx +$$

$$= \int x^2 \cdot dx - 2 \cdot \int x \cdot dx + \int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$

Finalmente: $\boldsymbol{\int (x-1)^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C}$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$Ojo: \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx \neq \frac{\int (x+1)\,dx}{\int \sqrt{x}\,dx}$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx =$$

$$= \int x^{1/2}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método se basa en la regla de derivación de funciones compuestas (Regla de la cadena)

Desarrollo del método:

Sea la integral

$$I = \int f(x)\,dx$$

Donde ***f*** es una función compuesta en la variable ***x***

Para determinar la primitiva de ***f*** se adopta una nueva variable, por ejemplo: ***u***, tal que ***x=g(u)***.

Entonces: $x = g(u) \Rightarrow dx = g'(u) \cdot du$

Sustituyendo en ***I***: $I = \int f(g(u)) \cdot g'(u) \cdot du$

De este modo se transformó la integral ***I*** en otra, donde, si la elección de la nueva variable ***u*** fue acertada, la integral será más fácil.

$$I = \int f(g(u)) \cdot g'(u) \cdot du = F(u) + C$$

Finalmente regresamos a la variable original ***x***.

Importante: En la nueva integral debe quedar todo en función de la nueva variable ***u***.

EJEMPLO:

$$\int senx \cdot \cos x \cdot dx$$

Solución:

Observemos que la función integrando está formada por un producto de dos funciones, siendo un factor la derivada del otro; por lo tanto, es aconsejable realizar la siguiente sustitución:

$$t = senx \Rightarrow dt = \underbrace{\cos x \cdot dx}$$

$$\int senx \cdot \cos x \cdot dx = \int t \cdot dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + C$$

Ahora "regresamos" a la variable original:

$$\boldsymbol{\int senx \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} sen^2 x + C}$$

En ciertas ocasiones es necesario aplicar más de una vez el método de integración por sustitución, o bien, combinarlo con otro método; veamos algunos ejemplos:

f) $$\int \frac{2x+1}{x^2+9}dx = \int \left[\frac{2x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+9}\right]dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+9}.dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+9}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{2x}{x^2+9}.dx$$

$$t = x^2+9 \therefore dt = 2x.dx$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1$$

$$I_1 = \ln(x^2+9) + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{9.\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{9}.\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}$$

Recordemos que en la tabla de derivadas está: $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$t = \frac{x}{3} \therefore dt = \frac{1}{3}.dx \Rightarrow dx = 3.dt$$

$$I_2 = \frac{1}{9}.\int \frac{3.dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}.arctg\, t + C_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}.arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C_2$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+9}dx = I_1 + I_2 = \ln\left|x^2+9\right| + \frac{1}{3}.arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C; \quad siendo\ C = C_1 + C_2$$

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Se basa en el método de derivación del producto de dos funciones.

Sean ***u(x)*** y ***v(x)*** funciones en la variable ***x***, entonces:

$$\int \boldsymbol{u(x)\cdot dv = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du}$$

Siendo: $\begin{cases} du = u'(x)dx \ \left(diferencial\ \ de\ la\ \ función\ u(x)\right) \\ dv = v'(x)dx \ \left(diferencial\ \ de\ la\ \ función\ v(x)\right) \end{cases}$

Ejemplos: $\int x\cdot \cos x\cdot dv =$

Aplicando el método de integración por partes, debemos elegir $\boldsymbol{u}$ y lo restante será $\boldsymbol{dv}$. En este caso tenemos dos posibilidades:

$i)\ \begin{cases} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos x\cdot dx; \quad v = sen\ x \end{cases}$

$$\therefore \int x\cdot\cos x\cdot dv = x\cdot sen\ x - \int sen\ x\cdot dx =$$

$$= x\cdot sen\ x - (-\cos x) + C$$

$$\int \boldsymbol{x\cdot \cos x\cdot dv = x\cdot sen\ x + \cos x + C}$$

Si hubiéramos elegido al revés:

$ii)\ \begin{cases} u = \cos x\,; \quad du = -sen\ x\cdot dx \\ dv = x\cdot dx; \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\therefore \int x\cdot\cos x\cdot dv = cos\ x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot(-sen\ x)\cdot dx$$

Es más difícil que la integral original.

REGLA: I.L.A.T.E.

Se trata de un método nemotécnico para elegir la parte del integrando que conviene que sea $\boldsymbol{u}$. El orden de la sigla indica que parte debe elegirse como $\boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{I}$: Inversa de funciones trigonométricas; $\boldsymbol{L}$: Logarítmicas, $\boldsymbol{A}$: Algebraicas, $\boldsymbol{T}$: Trigonométricas y $\boldsymbol{E}$: Exponenciales.

Ejemplos:

a) $\int \mathrm{x}.\cos x.dx$; se debe elegir $u=x$, puesto que las funciones ***Algebraicas*** tienen prioridad antes que las *trigonométricas*. Este ejemplo ya está resuelto al principio.

b) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$ Si aplicamos el método I.L.A.T.E., la función algebraica está antes que la antes que la exponencial.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right\} \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \underbrace{\int 2x \cdot e^x \cdot dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int 2x \cdot e^x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x \cdot dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right\} I_1 = 2 \cdot \int x \cdot e^x \cdot dx = 2\left[(x \cdot e^x) - \int e^x \cdot dx\right]$$

$$I_1 = 2x \cdot e^x - 2e^x + C_1$$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$$ Vemos que el método es iterativo.

c) $\int \frac{\ln x}{x} . dx$ $u = \ln x$ (Logarítmica) tiene prioridad, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x; \;\; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x}; \;\; v = \ln x \end{array}\right\} \int \frac{\ln x}{x} . dx = \ln x . \ln x - \int \ln x . \frac{1}{x} . dx = \ln^2 x - \underbrace{\int \frac{\ln x}{x} . dx}_{\substack{= al\ 1^{o}\ miembro \\ pero\ con\ (-)}}$$

$$2 . \int \frac{\ln x}{x} . dx = \ln^2 x \;\; \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} . dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Hay casos en que es necesario combinar los métodos de sustitución con integración por partes; por ejemplo:

d) $\int \operatorname{arctg} x \cdot dx$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{u} = \operatorname{arctg} x\,;du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx; \qquad v = x \end{array}\right\} \int \operatorname{arctg} x \cdot dx = \operatorname{arctg} x \cdot x - \underbrace{\int x \cdot \frac{dx}{1+x^2}}_{I_1} = I$$

A I_1 conviene resolverla por Sustitución.

$$\left.\begin{array}{ll} t = 1+x^2, & dt = 2x \cdot dx \\ & dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right\} I_1 = \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot ln|t| + C_1$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C_1$$

Reemplazando: $\int \operatorname{arctg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C_1$

Existen casos donde no es aplicable directamente la regla ILATE.

$e)\ \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx$

En este caso conviene hacer la siguiente transformación previa y luego aplicar el método de integración por partes:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx$$

$$dv = x \cdot e^{x^2} \cdot dx \rightarrow v = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

$$t = x^2 \rightarrow dt = 2x \cdot dx$$

$$v = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int e^t \cdot dt$$

$$v = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C_1$$

$$\int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} - \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

$$\int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$$

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Cuando se quiere calcular la primitiva de funciones de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n\, x^n}{b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_m\, x^m}; \quad con\ m > n$$

Es útil aplicar el siguiente Método, que tiene dos nombres:

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este Método consiste en transformar la fracción *f(x)* en una suma de fracciones que tengan denominadores más sencillos de calcular su integral.

Existen 5 (cinco) casos distintos en que se puede presentar la fracción *f(x)*, pero trataremos acá solo 3.

<u>Caso I</u>: El polinomio denominador es de mayor grado que el numerador y tiene raíces reales simples.

Se debe factorizar el denominador.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)\cdots(x-n)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \cdots + \frac{N}{(x-n)}$$

El desarrollo tiene el mismo número de términos que el grado de *Q(x)*.

Ejemplo 1:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}.dx = I$$

$$\frac{2x+1}{x^2+2x-3} = \frac{2x+1}{(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{2x+1}{\cancel{x^2+2x-3}} = \frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)}{\cancel{(x-1)\cdot(x+3)}}$$

Como los denominadores son iguales se pueden simplificar, luego los numeradores serán también iguales.

$$2x+1 = A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)$$

$$= (A+B)\cdot x + 3A - B$$

$$2x+1 = (A+B)\cdot x + 3A - B \begin{cases} A+B=2 & \Rightarrow B = 2-A \;\therefore B = \frac{5}{4} \\ 3A-B=1 & \Rightarrow 3A-2+A=1 \therefore A = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}\cdot dx = \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3} \right)\cdot dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$\int \frac{dx}{x-1} \qquad t = x-1;\;\; dt = dx$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= ln|t| + C \qquad \int \frac{dx}{x-1} = ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}\cdot dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C$$

CASO II: El polinomio denominador es de mayor grado que el numerador y tiene raíces reales; algunas de ellas o todas, múltiples.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)^n} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{C}{(x-b)^{n-1}} + \cdots + \frac{Z}{(x-b)}$$

El desarrollo tiene el mismo número de términos que el grado de $Q(x)$.

Ejemplo: $\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2+x}\cdot dx = I$

$$\frac{2x-3}{x^3-2x^2+x} = \frac{2x-3}{x\cdot(x^2-2x+1)} =$$

$$= \frac{2x-3}{x\cdot(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$\frac{2x-3}{\cancel{x^3-2x^2+x}} = \frac{A\cdot(x-1)^2 + B\cdot x + C\cdot x\cdot(x-1)}{\cancel{x\cdot(x-1)^2}}$$

$$2x-3 = A\cdot(x-1)^2 + B\cdot x + C\cdot x\cdot(x-1)$$

Esta es una igualdad que vale para todo valor de x; en particular:

$$Si\ \ x=0;\ \ 2\cdot 0-3 = A\cdot(0-1)^2 + B\cdot 0 + C\cdot 0\cdot(0-1) \therefore A=-3$$

$$Si\ \ x=1;\ \ 2\cdot 1-3 = A\cdot(1-1)^2 + B\cdot 1 + C\cdot 1\cdot(1-1) \therefore B=-1$$

$$Si\ \ x=2;\ \ 2\cdot 2-3 = A\cdot(2-1)^2 + B\cdot 2 + C\cdot 2\cdot(2-1) \therefore 1 = A+2B+2C$$

$$1 = -3+2(-1)+2C \quad \therefore C=3$$

$$\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2+x}\cdot dx = \int \frac{-3}{x}\cdot dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2}\cdot dx + \int \frac{3}{x-1}\cdot dx$$

$$\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2+x}\cdot dx = -3\cdot ln|x| + \frac{1}{x-1} + 3\cdot ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$t = x-1;\ \ dt = dx$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int t^{-2}dt =$$

$$= -t^{-1} + C$$

CASO V: El polinomio numerador es de mayor o igual grado que el denominador.

En estos casos, previamente se debe dividir los polinomios.

Ejemplo 5:

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 4}{x^2 - 4} . dx = I$$

Dividimos el polinomio numerador en el denominador:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 0.x^2 - 4x - 4 & x^2 - 4 \\ \hline -2x^3 \qquad\quad + 8x & 2x = C(x) \\ \hline \qquad\qquad 4x - 4 = R(x) & \end{array}$$

$$\underline{\underline{4x - 4}} = R(x) \quad \therefore \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

El desarrollo tiene el mismo número de términos que el grado de $Q(x)$.

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 4}{x^2 - 4} \cdot dx = \underbrace{\int 2x \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{4x - 4}{x^2 - 4} \cdot dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int \frac{4x - 4}{x^2 - 4} \cdot dx$$

$$\frac{4x - 4}{\cancel{x^2 - 4}} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{\cancel{x^2 - 4}} =$$

$$4x - 4 = (A + B)x + 2(A - B)$$

$$\begin{cases} A + B = 4 \quad \therefore B = 4 - A; \quad B = 3 \\ 2(A - B) = -4 \quad \therefore 2(A - 4 + A); \quad A = 1 \end{cases}$$

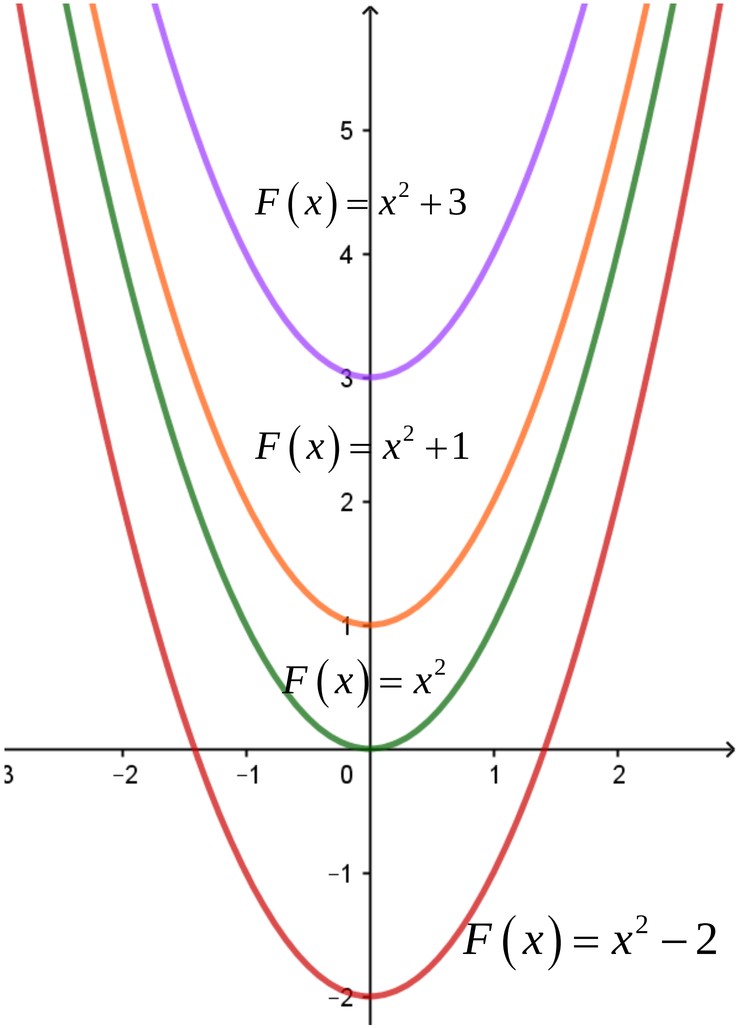
$$I = 2\int x \cdot dx + \int \frac{dx}{x - 2} + \int \frac{3}{x + 2} \cdot dx$$

$$\boldsymbol{\int \frac{2x^3 - 4x - 4}{x^2 - 4} \cdot dx = x^2 + \ln|x - 2| + 3\, ln|x + 2| + C}$$

INTEGRACIÓN con CONDICIONES INICIALES

Hemos visto que la integral indefinida de una función $y=\int f(x)\cdot dx$ admite infinitas soluciones, que difieren entre sí en una constante $\boldsymbol{C}$.

Esto significa que las gráficas de las distintas primitivas se desplazan verticalmente unas de otras según sea el valor de $\boldsymbol{C}$



Si $f(x)=\frac{1}{2}x$ su integral es:

$$I=F(x)=\int\frac{1}{2}x\cdot dx=x^2+C$$

Como se muestra en la gráfica:

Cuando en un problema hay la información necesaria para determinar el valor de $\boldsymbol{C}$, que satisface las condiciones, es posible encontrar la primitiva particular que es solución del mismo.

PROBLEMA N°1:

Encontrar la función para las condiciones iníciales dadas:

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + 3x + 1, \qquad si \;\; y(1) = 2$$

Solución:

$$a) \quad \frac{dy}{dx} = x^4 + 3x + 1 \quad si \;\; y(1) = 2$$

$$I = y = \int (x^4 + 3x + 1) \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$y(1) = \frac{1}{5} \cdot 1^5 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 1 + C = 2$$

$$C = 2 - \frac{10}{27} \qquad C = -\frac{7}{10} = -0{,}7$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 + x - 0,7}$$

PROBLEMA N°2:
Hallar la función *F(x)* cuya derivada sea $f(x) = x + 6$ y tal que para $x=2$ tome valor *25*.

Solución:

$$F(x) = \int (x+6) \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x + C$$

$$F(2) = \frac{(2)^2}{2} + 6 \cdot 2 + C = 25$$

$$C = 11$$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{2} + 6x + 11}$$