VECTORES

Introducción

Algunas cantidades físicas, como la longitud y la masa quedan completamente determinadas al dar su magnitud en términos de unidades específicas. Tales cantidades se llaman escalares. Otras, como la fuerza y la velocidad, de las que importa tanto la magnitud como la dirección se llaman vectores-

Para referirnos a vectores necesitamos previamente recordar algunos conceptos básicos:

Producto Cartesiano de Conjuntos: Sean A y B dos conjuntos no vacíos de elementos al conjunto de pares ordenados (a , b) donde $a \in A$ y $b \in B$, o sea $A \times B = \{(a , b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Análogamente si, dados A, B; C conjuntos no vacíos se define:

$A \times B \times C = \{(a , b , c) / a \in A,\ \ b \in B , c \in C \}$

Siguiendo así, dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, se define:

$A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n = \{(a_1 , a_2 , \ldots,a_n) / a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2 , \ldots, a_n \in A_n \}$

Observación 1: Si A = B $A \times A = A^2 = \{(a , b) / a, b \in A \}$ es decir A^2 no es una potencia de A.

Y en general $\forall\ n \in \aleph$ $A \times A \times A \ldots\ldots \times A = A^n = \{(a_1 , a_2 ,) / a, b \in A \}$

Observación 2:

Si en particular $\forall\ i = 1, 2, \ldots n$ $A_i = \Re$ obtenemos sucesivamente:

$\Re \times \Re = \Re^2 = \{(x , y) / x, y \in \Re \}$ Conjunto de pares ordenados de números reales.

$\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x , y , z) / x, y, z \in \Re \}$ Conjunto de ternas ordenadas de números reales.

$\Re^n = \Re \times \Re \times \ldots\ldots \times \Re = \{(x_1 , x_2 , \ldots,x_n) / \forall\ i, \quad x_i \in \Re \}$ Conjunto de n – uplas ordenadas de números reales.

Definición de vector en $\Re^n$

Un vector de $\Re^n$ es una n – upla ordenada de números reales, es decir: $v = (x_1 , x_2 , \ldots,x_n)$ es un vector de $\Re^n$-

Cada x_i con $i = 1, 2, \ldots n$ se denomina componente del vector.

Los vectores se denominan con letras mayúsculas A, B, C, etc o con las letras u, v, w.

Ejemplos: $A = (a_1 , a_2 , \ldots, a_n) \in \Re^n$, $B = (0 , 1 , -2) \in \Re^3$ $v = (0 , 1) \in \Re^2$

Definición de Norma o Módulo de un vector

Sea el vector $\mathbf{v} = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \in \Re^n$, definimos norma o módulo de v y lo denotamos $|\, v \,|$ o bien $\|\, v \,\|$ al número real no negativo $|\, v \,| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Ejemplo: calcular el módulo de los siguientes vectores: a) u = (-2 , 3) b) v = (-1, -2 , 1)
c) w = (2 , 1 , 0 , -1)

a) $|\, u \,| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\, v \,| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

c) $|\, w \,| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Igualdad de vectores en $\Re^n$ – Definición.

Sean $u = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) \in \Re^n$ y $v = (v_1 , v_2 , \ldots, v_n) \in \Re^n$.

Decimos que $u = v \Leftrightarrow u_i = v_i \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots n$

Ejemplo

1.- Sean $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ y $B = \left(\cos\frac{\pi}{4} , \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \right)$

A = B pues $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.- Sean u = (-2 , 3, 4, 0) y v = (-2 , 3 . 4 , 1) .

$$u \neq v \text{ pues } \begin{cases} -2 = -2 \\ 3 = 3 \\ 4 = 4 \\ 0 \neq 1 \end{cases}$$

3.- Sean los vectores A = (2x + 3y – 1 , x + y + 5) y B = (x – y , 2x – y + 3)

Encontrar los valores de x e y para los cuales se verifica que A = B.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 1 = x - y \\ x + y + 5 = 2x - y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ -x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3} \quad y = -\frac{1}{6}$$

Suma de vectores en $\Re^n$. Definición

Sean $u = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) \in \Re^n$ y $v = (v_1 , v_2 , \ldots, v_n) \in \Re^n$

Se define la suma de u y v al vector $u + v = (u_1+v_1 , u_2+ v_2 , \ldots, u_n+ v_n) \in \Re^n$

Propiedades

1.- Propiedad Conmutativa: $\forall\, u , v \in \Re^n$: $u + v = v + u$

2.- Propiedad Asociativa: $\forall\, u , v, w \in \Re^n$: $(u + v) + w = v +(u+w)$

3.- Existencia del elemento neutro aditivo: $\exists\ \tilde{0} = (0 , 0 , \ldots 0) \in \Re^n$ / $\forall\, u \in \Re^n$: $u+\tilde{0} = \tilde{0} +u = u$

4.- Existencia del opuesto: $\forall\, u \in \Re^n\ \exists\ (-u) \in \Re^n$ / $u + (-u) = (-u) + u = \tilde{0}$

Ejemplos

1.- Dados los vectores A = (1 , - 2 . 4) , B = (3 , 5 , 0)

Entonces A + B = (1 , - 2 . 4) + (3 , 5 , 0) = (4 , 3 , 4)

2.- Dados los vectores u = (3 , 5) y v = (-3 , -5) . Entonces u + v = (3 , 5)+(-3 , -5) = (0 ,0) .

Se observa que v es el opuesto de u, es decir que v = -u

Diferencia de vectores en $\Re^n$. Definición.

Sean $u = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) \in \Re^n$ y $v = (v_1 , v_2 , \ldots, v_n) \in \Re^n$

Se define la diferencia de u y v al vector

$u - v = u + (-v) = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) +(-v_1 , -v_2 , \ldots, -v_n) = (u_1-v_1 , u_2- v_2 , \ldots, u_n- v_n) \in \Re^n$

Representación gráfica

Un vector también se puede estudiar desde el punto de vista geométrico y en este sentido se afirma:

“Vector es un segmento de recta que une dos puntos P y Q de dicha recta y que está orientado porque se distingue cual es el punto inicial y cual es final”

Es decir que, vector es un ente matemático que posee **magnitud, dirección y sentido**.

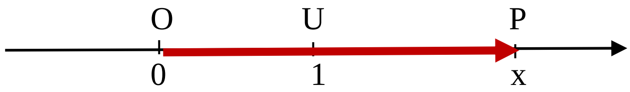
La magnitud o módulo de un vector **u** es la longitud de la flecha, medida con una cierta unidad y denotamos $|u|$.

La dirección del vector está dada por la recta que lo contiene o soporta y el sentido por el extremo de la flecha.

Los vectores pueden graficarse en: **1)** la recta real ($\Re$), **2)** en el plano ($\Re^2$) y **3)** en el espacio ($\Re^3$).

1) Si n = 1 $\quad \Re^1 = \{(x) / x \in \Re\} = \Re$

En una recta r fijamos un punto O como origen de la recta, orientamos la recta y tomamos una unidad de medida determinando un segundo punto U sobre r.



Al punto O le hacemos corresponder el número real 0 y al punto U el número real 1, el segmento de recta $\overrightarrow{OU}$ es la unidad de medida sobre r. Y ahora establecemos una correspondencia 1 a 1 entre el conjunto de los números reales y los puntos de r. Esta correspondencia permite identificar al punto P de r con el número real x. Esta recta recibe el nombre de eje x o eje de las abscisas.

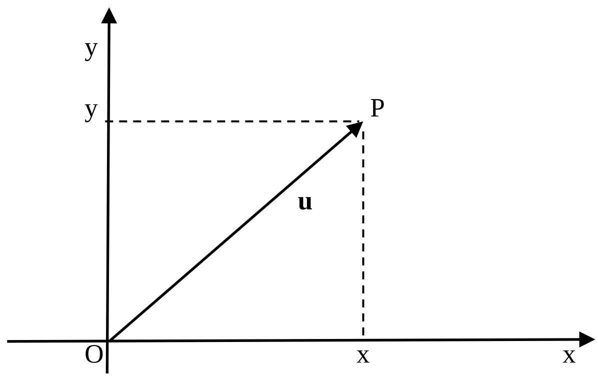
El vector $\overrightarrow{OP}$ (segmento orientado o dirigido) tiene por origen al punto O y por extremo al punto P de abscisa x.

Es decir que $\overrightarrow{OP} = P = (x)$ es el vector que identificamos con su extremo P y con el número real x que es la abscisa de P.

Ejemplo. Graficar el vector P = (-3)

2) Si n = 2, entonces a $\Re^2 = \{(x , y) / x, y \in \Re\}$ es el conjunto de pares ordenados de números reales que se identifica con puntos del plano.

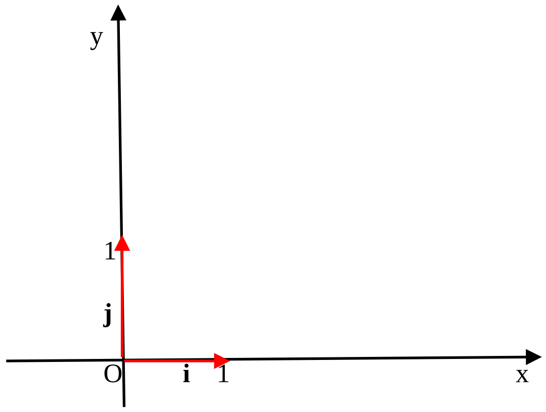
En efecto, si se introduce como sistema de referencia un par de ejes x e y perpendiculares entre sí y con el origen común O, observamos que a cada punto P le corresponde un y sólo un par ordenado de números reales (x , y) . Y recíprocamente a cada par ordenado de números reales (x , y) le corresponde uno y sólo un punto P del plano. Por lo tanto identificamos al punto P del plano con el par ordenado (x , y) y escribimos: P = (x , y)



Consideremos el segmento orientado $\overrightarrow{OP}$, que por definición de vector de $\Re^2$ podemos identificar a $\overrightarrow{OP}$ = P = (x , y) = **u** que es el segmento orientado cuyo origen es el (0 , 0) y extremo (x , y). Por lo tanto, todo vector **u** = (x , y) queda unívocamente determinado por las coordenadas de su exptremo-

En $\Re^2$, existen dos vectores particulares que denominamos versores o vectores canónicos, ellos son: **i** = (1 , 0) y **j** = (0 , 1) tales que $|\,i\,| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ $\quad |\,j\,| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

Gráficamente:

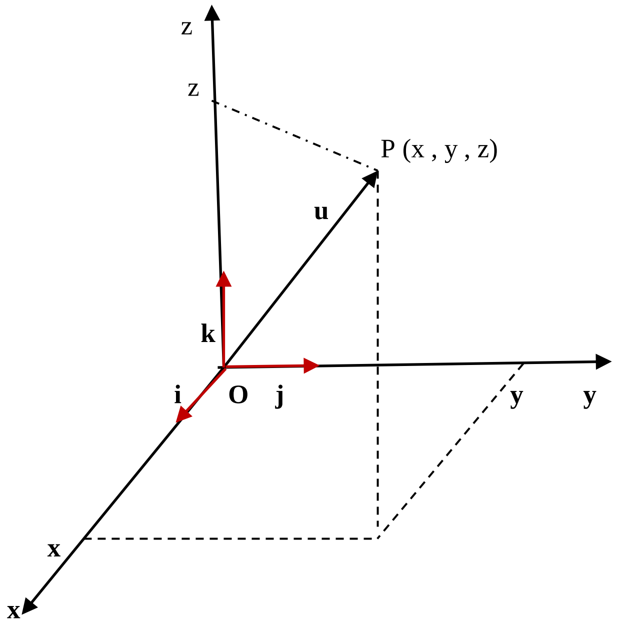


Se puede demostrar que consid

u = (x , y) = x (1 , 0) + y (0 , 1) = x **i** + y **j** $\Rightarrow$ **u =** x **i** + y **j** Que es la expresión canónica o cartesiana del vector **u**

3) Si n = 3, entonces $\Re^3$ = {(x , y , z) / x, y, z $\in$ $\Re$ } es el conjunto de ternas ordenadas de números reales que se identifican con puntos del espacio en tres dimensiones.

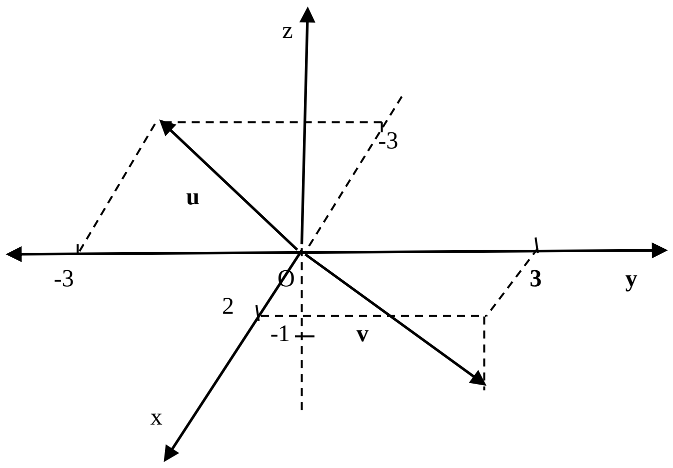
Consideremos tres ejes perpendiculares dos a dos con el origen común. Cada terna ordenada de números reales se identifica con un punto del espacio. Más aun, identificamos al vector $\overrightarrow{OP}$ con P y con la terna (x , y , z). Es decir $\overrightarrow{OP}$ = P = (x , y , z) = **u**



Los vectores canónicos o versores son: **i** = (1 , 0 , 0), **j** = (0 , 1 , 0) y **k** = (0 , 0 , 1) sobre los tres ejes respectivamente. Tales que $|\,i\,| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, $|\,j\,| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$ y $|\,k\,| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$

A cualquier vector **u** lo expresamos en términos de los tres versores canónicos de la siguiente manera, **u** = (x , y z) = x **i** + y **j** + z **k**

Ejemplo Graficar: **v** = (2 , 3 , -1) = 2**i**+3**j**-**k** **u** = (-3 , -3 , 0)=-3**i**-3**j**

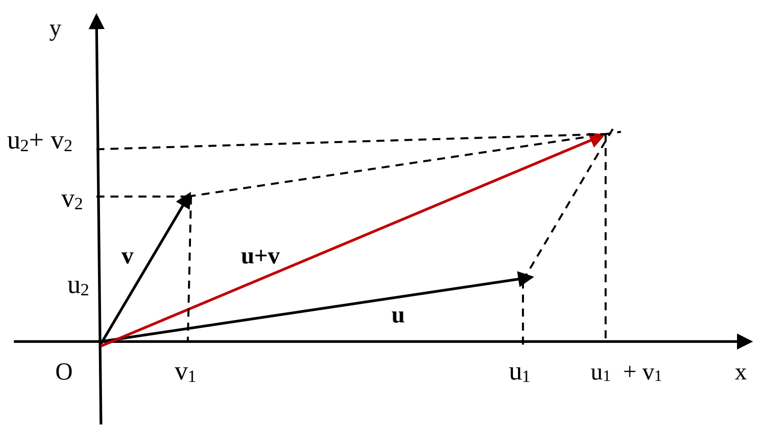


Observación: Es importante destacar la diferencia entre los conceptos de vector y punto en la notación. Estos es, si notamos u $(u_1 , u_2 , \ldots, u_n)$ es un punto del espacio $\mathfrak{R}^n$, sin embargo cuando escribimos **u** = $(u_1 , u_2 , \ldots, u_n)$ estamos haciendo referencia a un vector del espacio $\mathfrak{R}^n$,

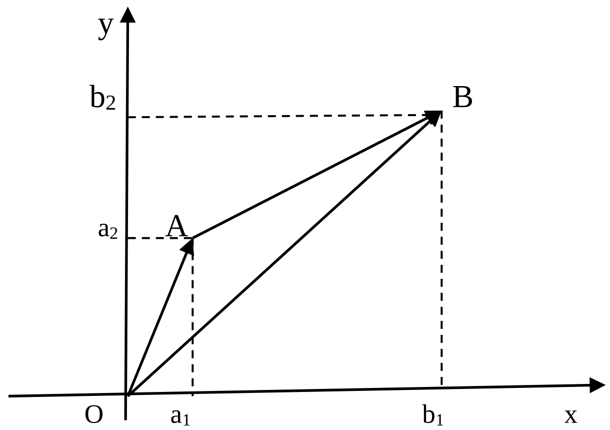
Suma Vectorial gráfica

Geométricamente, la suma de dos vectores **u** y **v** se efectúa construyendo el paralelogramo de lados **u** y **v**. la diagonal que tiene por origen el origen de coordenadas es la suma de **u** + **v.**

Consideremos los vectores **u** , **v**$\in\Re^2$, tales que **u** = (u_1 , u_2) y **v** = (v_1 , v_2)



Consideremos ahora el vector de $\Re^2$ que tiene por origen al punto $A(a_1 , a_2)$ y por extremo al punto $B(b_1 , b_2)$.



Es fácil ver que: **A** + **AB** = **B** y de aquí **AB** = **B** – **A** = $(b_1 – a_1 , b_2 – a_2)$

Análogamente, dado **AB** $\in \Re^n$ se expresa: **AB** = **B** – **A** = $(b_1 – a_1 , b_2 – a_2 , \ldots, b_n – a_n)$

Y por lo tanto $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$

Ejemplo: Dados los puntos A y B, calcular en cada caso el vector **AB** y su módulo

a) A (2 , 1) y B (3 , -2) $\Rightarrow$ **AB** = **B** – **A** = (3 , -2) – (2 , 1) = (1 , -3) $\Rightarrow$ **AB** = (1 , -3)

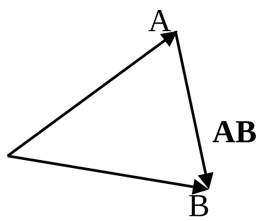
$|\mathbf{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{5}$

b) A (1 , 0 , -3) y B (-2 , -1 , 1) $\Rightarrow$ **AB** = **B** – **A** = (-2 , -1 , 1) - (1 , 0 , -3) = (-3 , -1 , 4)

$\Rightarrow$ **AB** = (-3 , -1 , 4) $\Rightarrow$ $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

Distancia entre dos puntos

Definición: Sean los puntos A, B $\in \Re^n$, se define la distancia entre A y B como la norma o módulo del vector **AB**



dist (A , B) = $|\mathbf{AB}| = |B - A|$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

Producto de un número real por un vector. Definición

$\forall\, k \in \Re$, $\forall$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \Re^n$ se define el producto de k por v como el vector

$k\,\mathbf{v} = (k\,v_1, k\,v_2, ..., k\,v_n) \in \Re^n$

Ejemplos: Sean los vectores **u** = -3 i + j + 5 k y **v** = - i + j – k , calcular 2 **u** – 3 **v.**

2 **u** – 3 **v =** 2 (- 3 , 1 , 5) – 3 (-1 , 1 , -1) = (-6 , 2 , 10) – (-3 , 3 , -3) = (-3 , -1 , 13)

Producto escalar o Producto interno en $\Re^n$. Definición 1

Sean $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \Re^n$ y $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \Re^n$, definimos producto escalar de u y v que denotamos u **.** v**,** al escalar o número real igual a la suma de los productos de las respectivas componentes de los vectores u y v. Es decir:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Ejemplo Calcular el producto escalar de los vectores: **a)** u = (-1 , 3 , 0 , 4) y v = (0 , 1 , 1, -1)

u **.** v = (-1) 0 + 3 . 1 + 0 . 1 + 4 (-1) = -1

b) u = 2 i + 3 j y v = - 7 i + j

u **.** v = (2 , 3) **.** (-7 , 1) = 2 . (-7) + 3 . 1 = - 11

Producto escalar o Producto interno en $\Re^n$. Definición 2

Sean u , v $\in \Re^n$ dos vectores no nulos. Su producto escalar es el número que se obtiene como el producto de los módulos de u y v por el coseno del ángulo que forman los vectores.

Es decir: $u \,.\, v = |u|\,|v|\ \cos\alpha$

Ejemplo Sean u = (3 , 0), v = (5 , 5) y $\alpha = 45°$

$$|u| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \qquad |v| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$u\,.\,v = 3\,.\,5\sqrt{2}\ \cos 45 = 15$$

Propiedades. Para el producto escalar de vectores valen las siguientes propiedades:

1.- $\forall$ u , v $\in \Re^n$: u . v = v . u

2.- $\forall\, k \in \Re \wedge \forall$ u, v $\in \Re^n$: (k u) v = k (u . v)

3.- $\forall$ u , v , w $\in \Re^n$: u (v + w) = u . v + u . w

4.- $\forall$ u $\in \Re^n$: u . u $\geq$ 0 $\wedge$ u . u = 0 $\Leftrightarrow$ u = $\tilde{0}$

Angulo entre dos vectores no nulos

De $u \cdot v = |u|\,|v|\cos\alpha$ se obtiene $\cos\alpha = \dfrac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$, que es la expresión que nos permite calcular el ángulo no negativo más pequeño entre los vectores u y v

Ejemplo. Sean los vectores u = 2 i + 2 j , v =3 j. Calcular: **a)** El producto escalar **b)** El ángulo entre los vectores

a) u . v = (2 , 2) . (0 , 3) = 6

b) $|u| = \sqrt{8}$ $|v| = 3$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{8}.3} = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 45°$

Vectores paralelos

Sean u = $(u_1 , u_2 , …., u_n) \in \Re^n$ y v = $(v_1 , v_2 , …., v_n) \in \Re^n$

El vector u es paralelo a v y denotamos u // v $\Leftrightarrow \exists\, k \in \Re - \{ 0 \}$ / v = k u

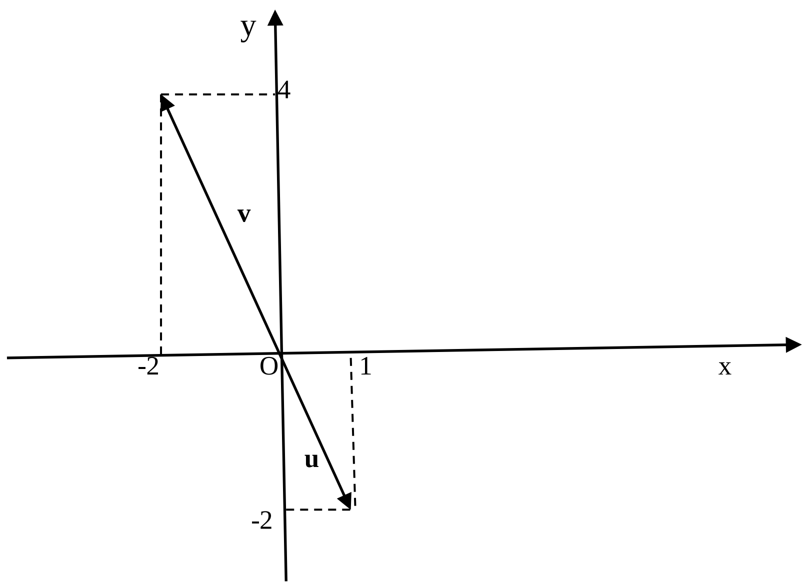
$\Leftrightarrow \exists\, k \in \Re - \{ 0 \}$ / $v_i = k\,u_i$ $\forall$ i = 1, 2, ….,n

Ejemplo. Averiguar si los vectores u = (1 , -2) y v = (-2 , 4) son paralelos.

Es necesario averiguar si $\exists\, k \in \Re - \{ 0 \}$ / v = k u

(-2 , 4) = k (1 , -2) $\Rightarrow$ (-2 , 4) = (k , -2k) $\Rightarrow$ $\begin{cases} k = -2 \\ -2k = 4 \Rightarrow k = -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\exists$ k = -2 $\in \Re - \{ 0 \}$ /

v = -2 u $\Rightarrow$ u // v



Observaciones

u // v significa que los vectores tienen la misma dirección

Si además $k > 0$ significa que tienen igual sentido

Si $k < 0$ significa que tienen sentido contrario.

Vectores perpendiculares

Dos vectores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Re^n$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \Re^n$ son perpendiculares sí y sólo sí $u \cdot v = 0$

Ejemplo 1. Si $u = (x^2 - 2x+1, 3, -1)$ y $v = (1, x+1, 4)$, determinar $x \in \Re$ para que u y v sean perpendiculares.

$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x+1, 3, -1) . (1, x+1, 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x+1+ 3x + 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1$

Ejemplo 2. Hallar $x \in \Re$ para que $u \perp v$, si $u = (2, x, -1)$ y $v = (x, -3x, x^2)$

$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow (2, x, -1) . (x, -3x, x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3x^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1/2$

Vectores Unitarios o Versores

Dado $u \in \Re^n$, $u \neq \tilde{0}$ llamamos vector unitario en la dirección de u al vector de módulo 1, paralelo a u que se calcula como el cociente entre el vector u y su módulo.

Es decir: $u_u = \dfrac{u}{|u|}$ vector unitario en la dirección de u

Observación 1: Dado $u \in \Re^n$, $u \neq \tilde{0}$, vector unitario en la dirección de u verifica que: a) $|u| = 1$ b) u_u // u

Observación 2: En $\Re^n$ hay n versores en la dirección positiva de los ejes y se denominan e_1, e_2, ……, e_n tales que: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots.0)$, ……, $e_n = (0, 0, \ldots\ldots 1)$ denominados versores fundamentales.

Ejemplo. Sean los vectores $u = (-2, 3)$ y $v = (-1, -5)$, encuentre los vectores unitarios en la dirección de los vectores dados.

$| u | = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Rightarrow u_u = \dfrac{u}{| u |} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2\,,3) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ tal que $| u_u | = 1$

Ángulos Directores

Se llama así, a los ángulos que forma un vector con los ejes coordenados

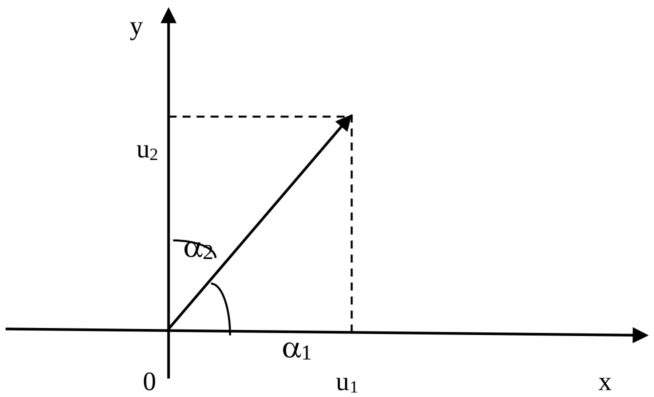
Sea $u \in \Re^n$, $u \neq \tilde{0}$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n$ los ángulos directores de u.

$\forall$ i = 1, 2, …n , α_i es el ángulo director que forma el vector u con el je e_i y los cosenos directores se calculan: $\cos\alpha_i = \dfrac{u\,.e_i}{| u || e_i |} = \dfrac{(u_1 , u_2 ,....u_i ,..,u_n).(0,0,....1,....0)}{| u |} = \dfrac{u_i}{| u |}$ ….

$$.\Rightarrow \cos^2 \alpha_i = \frac{u_i^2}{| u |^2}$$

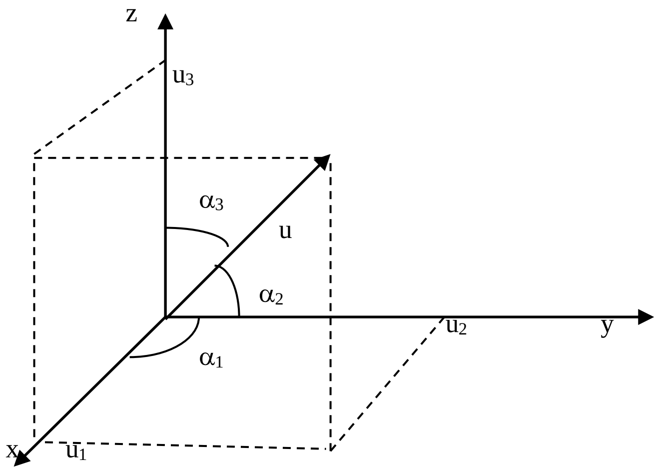
Y entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{| u |^2} = \frac{1}{| u |^2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \frac{| u |^2}{| u |^2} = 1$

Observación 1: Sea $u \in \Re^2$, $u \neq \tilde{0}$ $\Rightarrow$ $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 = 1$ que es la conocida relación pitagórica



Cosenos directores: $\cos \alpha_1 = \dfrac{u_1}{| u |}$ $\cos \alpha_2 = \dfrac{u_2}{| u |}$

Observación 2: Sea $u \in \Re^3$, $u \neq \tilde{0}$ $\Rightarrow$ $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$

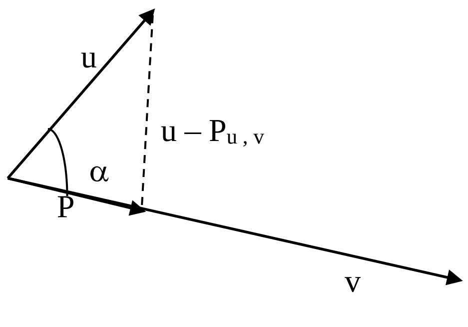


$$\cos \alpha_1 = \frac{u_1}{|u|} \qquad \cos \alpha_2 = \frac{u_2}{|u|} \qquad \cos \alpha_3 = \frac{u_3}{|u|}$$

Proyección de un vector sobre otro

Sean $u, v \in \Re^n$ tal que $u \neq \tilde{0}$ y $v \neq \tilde{0}$, definimos proyección vectorial ortogonal de u sobre v al vector $P_{u,v}$ tal que cumple las siguientes condiciones:

1) $v \,//\, P_{u,v}$ 2) $u – P_{u,v} \perp v$



1) Vamos a determinar $P_{u,v}$. Como $v \,//\, P_{u,v}$ $\Leftrightarrow \exists\, k \in \Re - \{ 0 \}$ / $P_{u,v} = k\, v$. (1)

Además como $u – P_{u,v} \perp v$ $\Rightarrow$ $(u – P_{u,v}) . v = 0$ $\Leftrightarrow$ $(u – k v) v = 0$ Por (1) $\Leftrightarrow$ $u.v – k\,|v|^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $k = \dfrac{u.v}{|v|^2} \in \Re$. Por (1) $P_{u,v} = k\, v$ $\Rightarrow$ $P_{u,v} = \dfrac{u.v}{|v|^2}\, v$ **Vector proyección vectorial ortogonal de u sobre v**

La proyección escalar de u sobre v es el módulo de P, o sea:

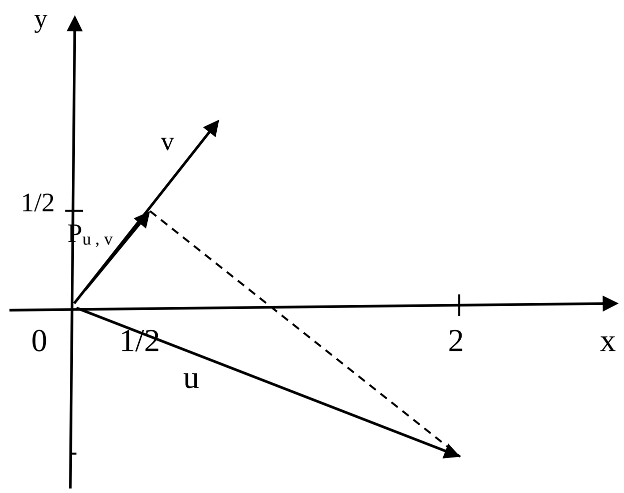
$$|P_{u,v}| = |k\,v| = |k|\,|v| = \left|\frac{u.v}{|v|^2}\right| |v| = \frac{|u.v|}{|v|^2}|v| = \frac{|u.v|}{|v|} \quad \Rightarrow \quad |P_{u,v}| = \frac{|u.v|}{|v|}$$

Ejemplo. Calcular el vector $P_{u,v}$ (vector proyección ortogonal de u sobre v). Siendo u = (2 , -1) y v = (1 ,1).

$$P_{u\,,\,v} = \frac{u.v}{|v|^2}\,v = \frac{(2\,,-1).(1,1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2}\,(1\,,\,1) = \frac{1}{2}(1\,,\,1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_{u\,,\,v} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$ **Vector proyección vectorial ortogonal de u sobre v**

$$|P_{u,v}| = \frac{|u.v|}{|v|} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ **Proyección escalar de u sobre v**

Gráficamente



Ejemplo. Hallar $x \in \aleph$ tal que la proyección escalar del vector u sobre el vector v sea $2\sqrt{6}$, siendo u = (1 , x , -x) y v = (1 , 2 , -1)

Como $|P_{u,v}| = \frac{|u.v|}{|v|}$, calculamos u . v = (1 , x , -x). (1 , 2 , -1) = 1 + 2x + x = 1 + 3x

$$|v| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad |P_{u,v}| = \frac{|1+3x|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow |1+3x| = 2(\sqrt{6})^2$$

$$\Rightarrow\ |1+3x| = 12 \quad \Rightarrow\ 1 + 3x = \pm 12 \ \Rightarrow\ 3x = \pm 12 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{3} \\ x_2 = -\dfrac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow\ \nexists\ x \in \aleph : P_{u\,,\,v} = 2\sqrt{6}$$

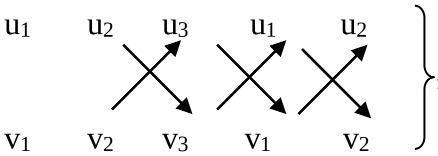
Producto Vectorial

Dados dos vectores u= $(u_1 , u_2 , u_3) \in \Re^3$ y v = $(v_1 , v_2 , v_3) \in \Re^3$ definimos **Producto**

$$c = u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2 , u_3 v_1 - u_1 v_3 , u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Observación 1

El producto vectorial recibe el nombre de producto exterior o producto cruz. Existe un recurso nemotécnico para recordar la fórmula del producto vectorial que consiste en colocar las componentes de los vectores y multiplicar como lo indica la figura:



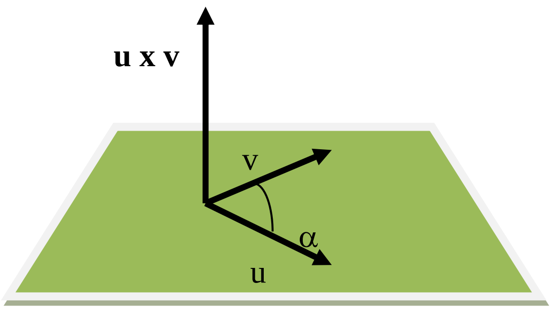
$$\Rightarrow \quad u \times v = \ (u_2 v_3 - u_3 v_2 , u_3 v_1 - u_1 v_3 , u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Observación 2:

El producto vectorial da como resultado un **vector c = u x v** donde:

1.- El **Módulo o magnitud** se obtiene $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores u y v.

2.- La **Dirección** del vector u x v es perpendicular al plano determinado por los vectores u y v



3.- El **Sentido** del vector u x v está dado por la regla de la mano derecha. Es decir que los vectores u y v, se encuentran situados de modo tal que u tiene la dirección del **índice** de la mano derecha, el vector v la del dedo **mayor** y el **pulgar** indica la dirección positiva del vector uxv.

Observación 3 Si consideramos los vectores no nulos $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ y $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

Se puede demostrar que $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 \,,\, u_3 v_1 - u_1 v_3 \,,\, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

Ejemplo

Sean $u = i - 2j$ y $v = 3k$. Calcular: i) $u \times v$ y ii) $v \times u$

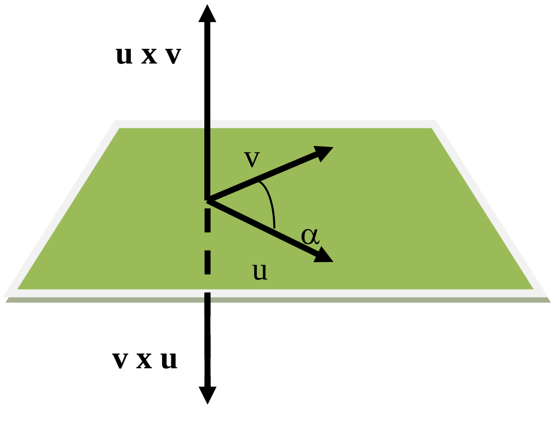
i) $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,(-2\,i - j\,) = -6i - 3\,j = (-6 \,,\, -3 \,,\, 0)$

ii) $v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\,(-2\,i - j) = 6\,i + j = (\,6 \,,\, 1 \,,\, 0)$

Se concluye que $u \times v \neq v \times u$

Observación Importante

El producto vectorial es anticonmutativo, es decir: u x v **= -** (v x u). Estos vectores **u x v** y **v x u** tienen igual longitud y son colineales. Los sentidos de estos vectores son contrarios, ya que desde el extremo del vector **u x v** se ve que el giro más breve de u a v pasa en sentido contrario a las agujas del reloj y desde el extremo del vector **v x u** en sentido de las agujas del reloj.



Propiedades

1.- El producto vectorial no es conmutativo

$\forall\, u, v \in \Re^3$: $u \times v \neq v \times u$

2.- El producto vectorial no es asociativo

$\forall\, u, v, w \in \Re^3 \quad (u \times v\,) \times w \neq u \times (v \times w)$

Ejemplo: $(i \times j) \times j = k \times j = -i$ y $i \times (j, j) = i \times \tilde{0} = \tilde{0}$

3.- $\forall\, k \in \Re \wedge \forall\, u, v \in \Re^3$: $(k\, u) \times v = k\, (u \times v)$

4.- El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores

$\forall\, u, v, w \in \Re^3$: **i)** $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$ **ii)** $(v + w) \times u = (v \times u) + (w \times u)$

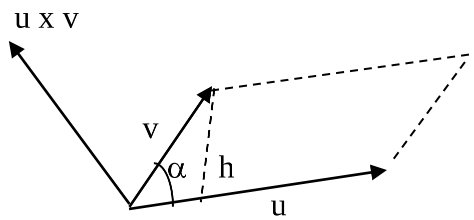
5.- $u \times v = \tilde{0} \Leftrightarrow u \,//\, v$

6.- $\forall\, u, v \in \Re^3$: $(u \times v) \perp u \quad \wedge \quad (u \times v) \perp v$

7.- $\forall\, u, v \in \Re^3$: $|u \times v|$ = área del paralelogramo de lados u y v

Demostración de la propiedad 7

Esta propiedad afirma que la interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores u y v es el área del paralelogramo formado por los vectores mencionados.



ι paralelogramo = base x altura

$= |u|\, h \qquad (1)$

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{h}{|v|} \Rightarrow h = |v| \;\text{sen}\, \alpha$$

Reemplazando en (1) Área del paralelogramo = $|u|\,|v|$ sen α = $|u \times v|$

Por lo tanto se verifica que: $|u \times v| = |u|\,|v|$ sen α

Triple producto escalar o doble producto mixto

Sean los vectores A, B, C $\in \Re^3$ definimos triple producto escalar o doble producto mixto (ABC) al escalar o número real que resulta de multiplicar escalarmente el vector AxB y el vector C

Es decir: $(ABC) = (A \times B) \cdot C$

Se puede demostrar que si $A = (a_1, a_2, a_3)$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ $C = (c_1, c_2, c_3)$

$$(ABC) = (A \times B) . C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

1.- $\forall\, A, B, C \in \Re^3$: $(ABC) = (BCA) = (CAB)$

2.- $\forall\, A, B, C \in \Re^3$: $(BCA) = (ACB) = (CBA) = -(ABC)$

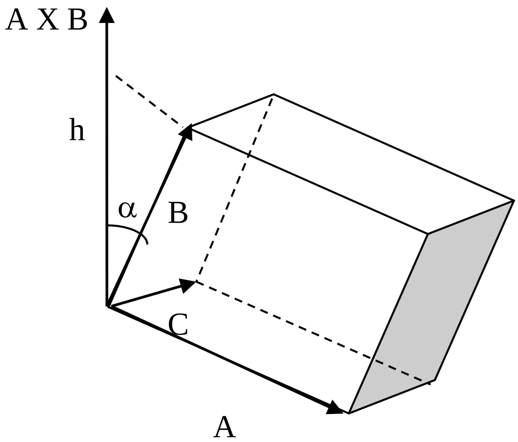
3.- $\forall\, A, B, C \in \Re^3$: $A \times B \cdot C = A \cdot B \times C$

4.- $|(ABC)|$ = Volumen del paralelepípedo de aristas (A , B , C)

5.- (ABC) = 0 $\Leftrightarrow$ A , B , C son coplanares.

Demostración de la propiedad 4

Esta propiedad afirma que el producto mixto de los tres vectores A, B y C, se interpreta geométricamente como el volumen del paralelepípedo construido sobre los mismos una vez llevados a un origen común.



V = Superficie de la base por altura = volumen del paralelepípedo

Como Superficie de la base es $|A \times B| \Rightarrow V = |A \times B|\ h$ siendo h la altura

$h = P_{B\ ,\ (A x B)}$ (proyección del vector B sobre el vector (A x B) $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{h}{|C|} \Rightarrow h = |C| \cos\alpha$

$V = |A \times B|\ |C| \cos\alpha = (A \times B) \cdot C = (ABC)$

Demostración de la propiedad 5

Si (ABC) = 0 $\Leftrightarrow$ Vol del paralelepípedo (ABC) = 0 $\Leftrightarrow$ h = 0 $\Leftrightarrow$ A , B , C son coplanares