Integral definida

Prof. Pablo Bazzano

Área bajo una curva

En la unidad de derivadas se explicó de qué manera aquel concepto evolucionó como una solución a un problema que había desvelado a los matemáticos por siglos: el de encontrar la recta tangente a una curva en un punto. El concepto de integral definada, que es la piedra fundamental de la otra gran parte del cálculo, es decir, del cálculo integral, se desarrolló a partir de otro problema milenario: el de hallar el área de una superficie delimitada por curvas.

¿De qué manera se podría encontrar, por ejemplo, el área limitada por el eje de abscisas, la recta vertical de ecuación $x = 1$ y la parábola $y = x^2$? Encontrar el área imterior de un polígono es fácil y se sabe cómo hacerlo desde hace milenios. Existen fórmulas adecuadas para muchos de ellos y de ser necesario siempre se puede descomponer en triángulos. Pero en este caso, la figura plana está limitada por arriba por una línea curva.

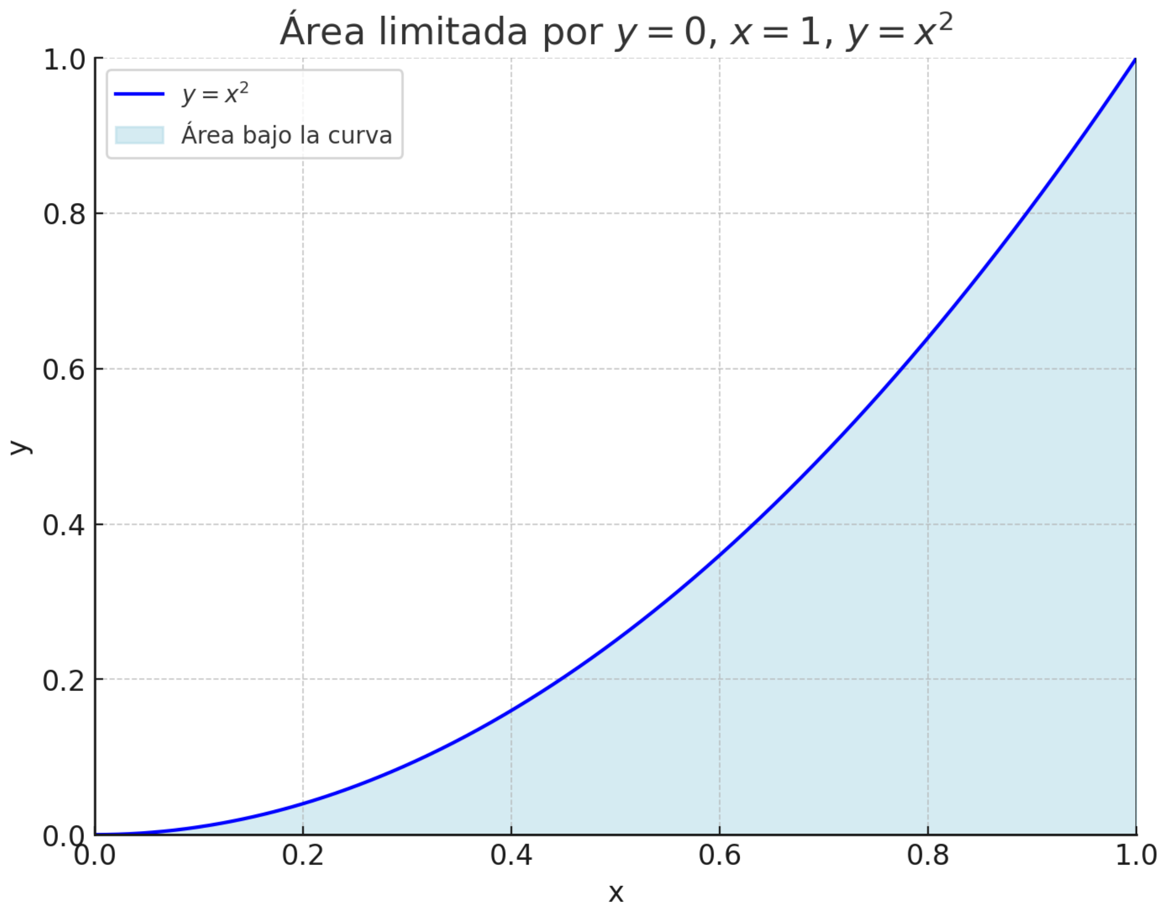

Figura 1: Área bajo una parábola.

Una forma de encarar el problema podría ser empezar por obtener una aproximación al área mediante rectángulos de altura determinada por la parábola.

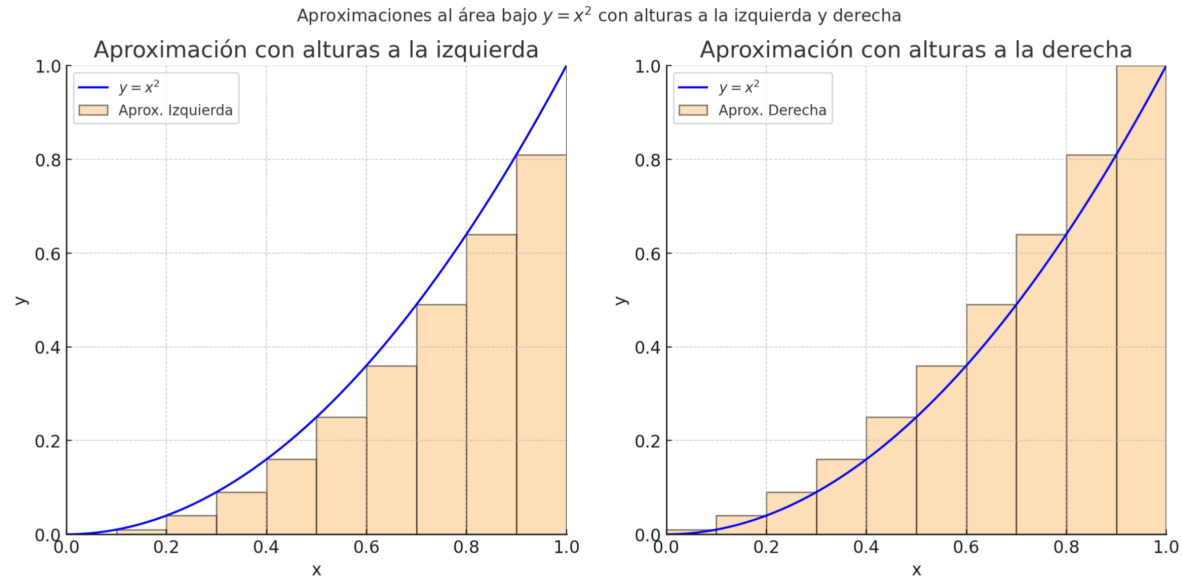

Figura 2: Áreas aproximadas con 10 rectángulos.

De esta forma, se obtienen dos aproximaciones al área bajo la curva, una de ellos por defecto (es decir, menor que el área buscada) y la otra por exceso (mayor que el área buscada). Pero hay varias preguntas que podrían plantearse acá:

1. Esta función es positiva (excepto en $x = 0$, donde tampoco es negativa), por lo que la altura del rectángulo hasta la parábola es un número positivo o como mínimo cero. ¿Qué pasaría si la función tomara también (o solamente) valores negativos?

2. La función es estrictamente creciente en el intervalo considerado, por lo que siempre se tiene un área por defecto si la altura se toma en el punto de frontera izquierdo del intervalo y por exceso si se hace en el punto de frontera derecho. ¿Es esto importante? ¿Qué pasa si la función no es monótona?

3. ¿Es necesario que todos los intervalos tengan la misma amplitud?

4. ¿No se obtendría una mejor aproximación si se tomara la altura en el punto medio o se formaran trapecios en lugar de rectángulos?

5. ¿No sería mejor subdividir en muchos más intervalos? Por ejemplo, 100 o 1000 en lugar de 10.

La respuesta a las dos primeras preguntas es que, efectivamente, esas situaciones se presentan habitualmente, pero no representan ningún problema grave. Luego de desarrollar este ejemplo se verá cómo se generalizan estas ideas.

Con respecto a la tercera pregunta, los intervalos se toman por lo general de la misma amplitud porque se facilitan los cálculos, pero no es necesario que sea así desde el punto de vista teórico. También se discute esto más adelante.

La respuesta a la cuarta pregunta es que sí, efectivamente, se tendría una mejor aproximación del área bajo la curva (esto es cierto en general para los trapecios y en particular en este caso también para la propuesta de tomar la altura en el punto medio).

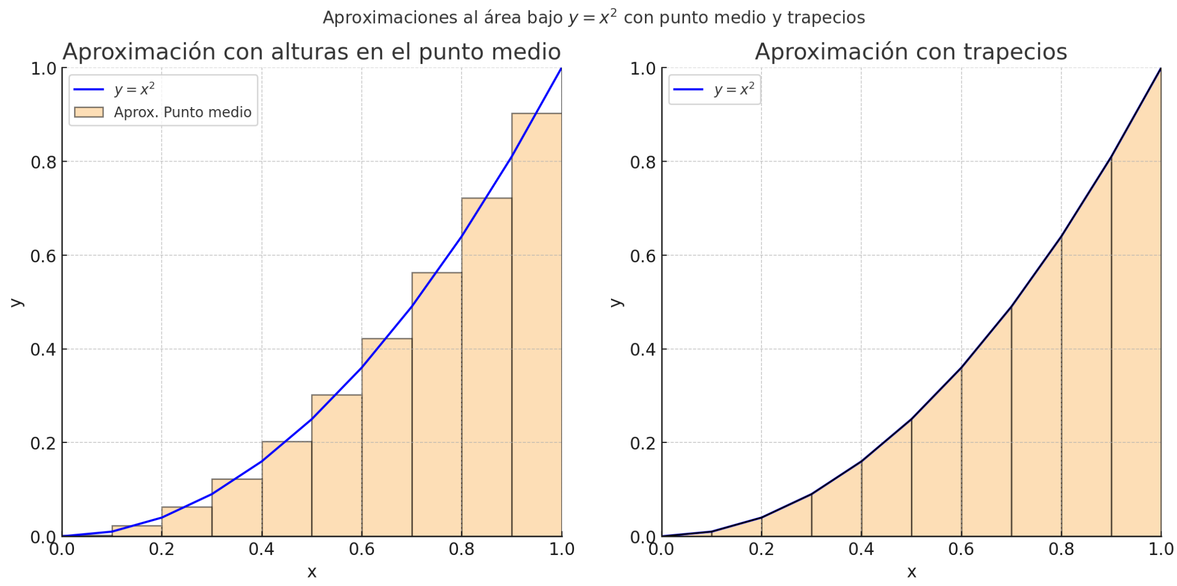

Figura 3: Otras aproximaciones al cálculo del área.

Pero ocurre que el objetivo final no es logar una mejor aproximación al área, sino *definir un área que sea teóricamente exacta*. Y para eso es aún mejor tener dos aproximaciones, una que sea claramente por defecto y la otra, por exceso. Si de alguna forma es posible demostrar que, al aplicar cierto proceso, ambas aproximaciones tienden a un mismo valor límite, entonces sería posible definir ese valor límite como el área bajo la curva.

Y por último, con respecto a la quinta cuestión, la respuesta es sí, es preferible una subdivisión más fina del intervalo, y además, esa es exactamente la estrategia que se seguirá a continuación.

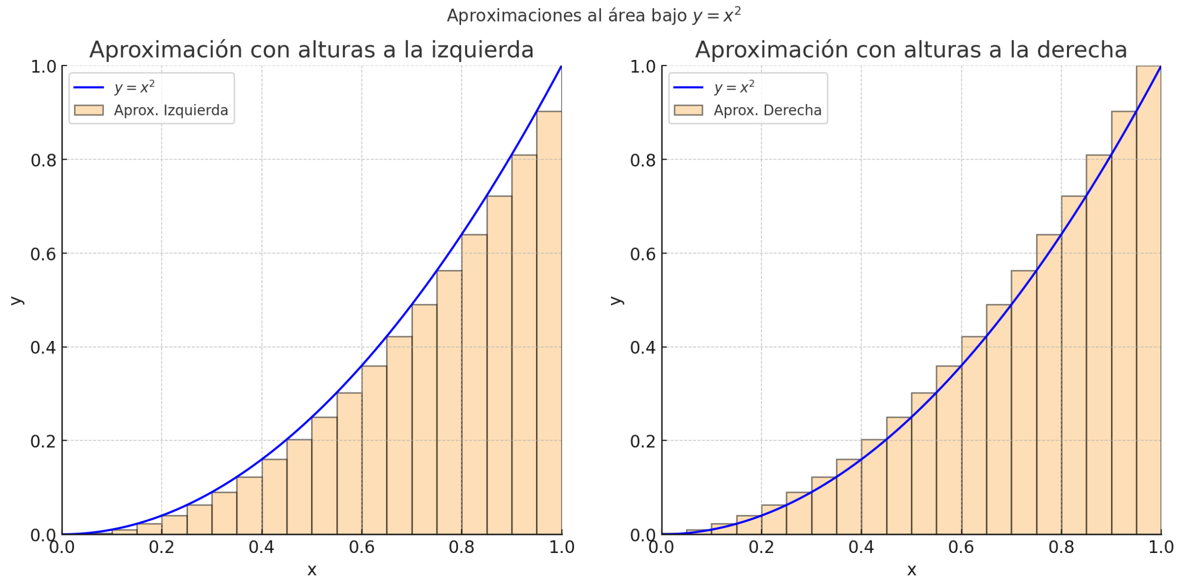

Figura 4: Aproximación con 20 rectángulos.

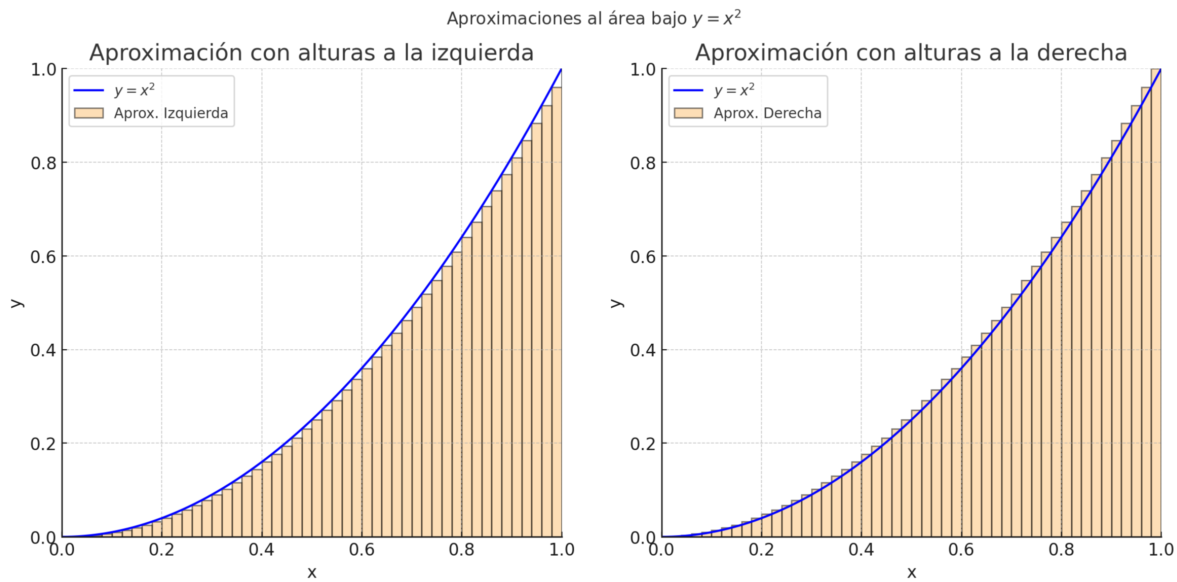

Figura 5: Aproximación con 50 rectángulos.

De la observación de estas gráficas, surge a las claras que a medida que el intervalo se divide en más y más subintervalos, ambas aproximaciones son cada vez mejores. Si el intervalo $[0, 1]$ se divide en n subintervalos de la misma amplitud, entonces estas aproximaciones toman la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot h_k$$

La base de cada rectángulo mide $1/n$ porque la longitud del intervalo es 1; en general, sería $(b-a)/n$ para un intervalo genérico $[a,b]$. Por su parte, la altura h_k depende de si se toma en el punto de frontera izquierdo o derecho. En el primer caso, las sucesivas alturas serían:

$$0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

En el segundo caso:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \underbrace{\left(\frac{n}{n}\right)^2}_{=1}$$

Por lo tanto, las respectivas áreas A_i (inferior, por defecto) y A_s (superior, por exceso) son:

$$A_i = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$A_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Los valores que se obtengan para estas sumas por defecto y por exceso dependen de cómo se haya subdividido el intervalo. En este caso, se ha elegido dividirlo en diez, veinte o cincuenta partes de igual amplitud, pero por supuesto que hay infinitas posibilidades de cómo hacerlo. Cada una de estas posibilidades se denomina una partición $\mathcal{P}$ del intervalo. Y si f es una función contnua en el intervalo $[a,b]$, como lo es x^2 en $[0,1]$, para cada partición, pueden definirse una suma de valor mínimo y otra de valor máximo que se denominan, respectivamente, suma inferior y suma superior.

En efecto, a ser f continua en $[a,b]$, es acotada y alcanza sus cotas -en otras palabras, tiene mínimo y máximo- en ese intervalo (teorema de Weierstraß) y por lo tanto también en cualquier subintervalo $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, de modo que existen $m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Con esto en mente, es posible dar las siguientes definiciones:

Suma inferior y suma superior

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$. Se define **suma inferior** de f asociada a $\mathcal{P}$ a:

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Y se define **suma superior** de f asociada a $\mathcal{P}$ a:

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Pero en este ejemplo, al ser f una función positiva, estas sumas pueden a su vez identificarse con las áreas por defecto y por exceso limitadas por la curva, es decir: $A_i = s(\mathcal{P})$ y $A_s = S(\mathcal{P})$, de tal modo que el área teóricamente exacta A estará entre estos valores: $A_i = s(\mathcal{P}) \leq A \leq A_s = S(\mathcal{P})$.

Y volviendo a las expresiones anteriormente obtenidas para estas áreas, un resultado conocido del álgebra es que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales puede encontrarse como:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Y tomando en cuenta que la primera suma no va de 1 a n, sino de 0 a $n-1$, para la A_i se tiene que:

$$A_i = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)[2(n-1)+1]}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Mientras que para la A_s:

$$A_s = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Las expresiones obtenidas no son iguales, pero sí tienen el mismo límite a medida que el número de rectángulos tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_s = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Puesto que ambos límites coinciden, puede definirse ese mismo valor de los límites como el área teóricamente exacta bajo la curva.

La suma de Riemann

Partiendo del ejemplo anterior, es posible discutir varias generalizaciones:

1. El intervalo de interés no tiene por qué ser $[0, 1]$, sino en general, $[a, b]$.
2. La función no tiene por qué ser monótona en el intervalo considerado.
3. La función podría tomar tanto valores positivos como negativos (y ceros también, claro). Esto plantea la cuestión de que ya no podría seguir hablándose propiamente de un área, porque al multiplicar la base por la "altura" de los rectángulos el producto sería negativo.
4. El intervalo $[a, b]$ no tiene necesariamente que subdividirse en subintervalos de igual amplitud. Esto puede ser conveniente desde el punto de vista práctico para facilitar los cálculos, pero no es obligatorio desde el punto de vista teórico.
5. El punto en que se evalúa la función (es decir, el que determina la "altura" del rectángulo) no tiene necesariamente que ser uno de los puntos de frontera, ni el punto medio, sino que puede ser cualquier punto del subintervalo.

Proceso de construcción de la suma de Riemann

1. **División del intervalo**: Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, delimitados por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. La amplitud de cada subintervalo se puede denotar como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, ..., n$. Comose ha señalado ya, esto se conoce como una **partición** del intervalo $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma amplitud, se la denomina **partición regular**. En caso contrario, la amplitud del mayor subintervalo (es decir, el mayor Δx_i) se denomina **norma de la partición** y se denota $\|\mathcal{P}\|$.
2. **Elección de puntos en los subintervalos**: En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se selecciona un punto x_i^*. Este punto puede ser cualquier valor dentro del subintervalo y es donde se evaluará la función f.
3. **Suma de Riemann**: La suma de Riemann es la suma de los productos de las amplitudes de los subintervalos por la ordenada del correspondiente punto en que se evalúa la función.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*) \cdot \Delta x_i$$

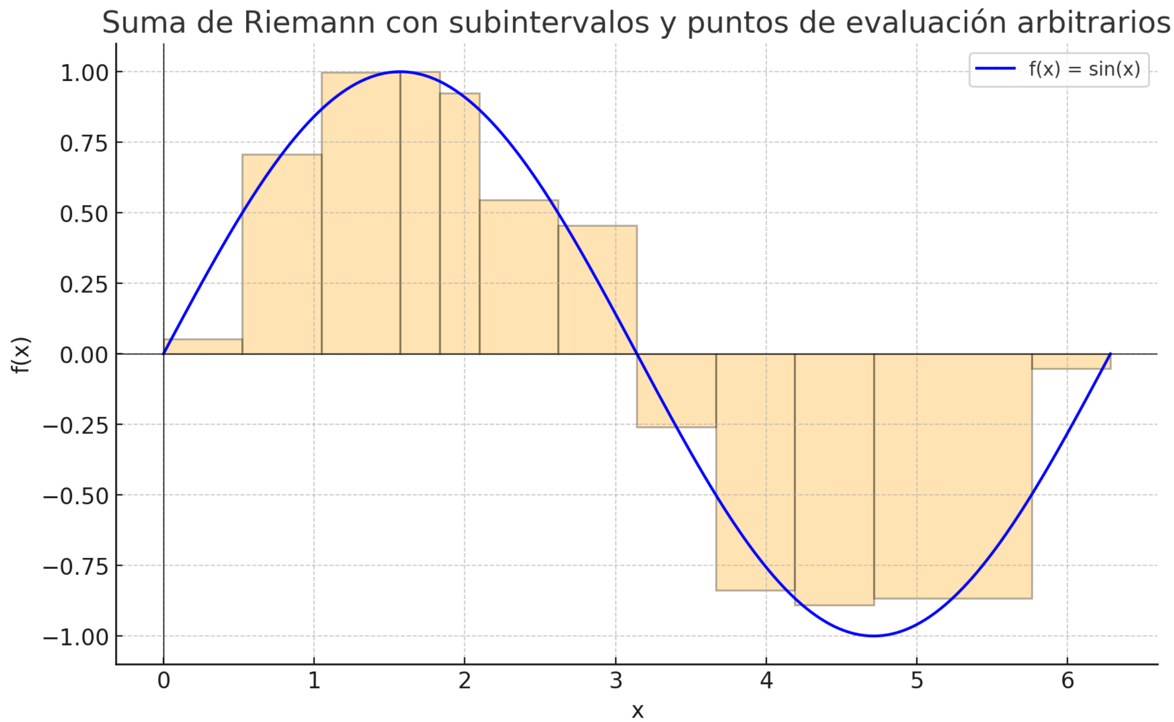

Figura 6: Suma de Riemann.

Por lo tanto, en el ejemplo considerado al principio se planteó una suma de Riemann (de hecho, dos sumas de Riemann), con las particularidades de que todos los Δx_i eran de la misma amplitud y de que en todos los casos la función se evaluó en uno de los puntos de frontera del intervalo. Como además esta suma de Riemann se planteó para una función no negativa, su resultado admitía la interpretación geométrica de ser una aproximación a un área.

La integral definida

> Integral definida
>
> La integral definida de una función f en un intervalo $[a, b]$ es el límite de la correspondiente suma de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero, si ese límite existe.
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i, \text{ si el límite existe.}$$

El **símbolo de la integral** $\int$ es una notación introducida por Leibniz y representa una letra S estilizada, ya que puede interpretarse como una suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas (a las que Leibniz llamó *infinitesimales*). Por su parte, los números a y b se denominan **límites de integración**, la función que se integra se denomina **integrando** y la región sobre la que se integra (en este caso, el intervalo $[a, b]$) se denomina **dominio de integración**. Si el límite de la suma de Riemann existe, se dice entonces que f es **integrable** en $[a, b]$, o bien, y con más precisión, que es **Riemann integrable**, puesto que en realidad existen también otras definiciones de la integral definida.

Y en relación con lo anterior, el lector podría preguntarse por qué el límite se ha tomado para $\|\mathcal{P}\| \to 0$ y no para $n \to \infty$, como en el ejemplo inicial. Y la respuesta es la siguiente: en el caso de una partición regular, ambas expresiones son equivalentes, pero no siempre es así en el caso de una partición irregular. Por ejemplo, podría pensarse en un proceso que mantiene un subintervalo de amplitud fija mientras que todos los demás se hacen cada vez más pequeños. Por lo tanto, en una partición irregular, $\|\mathcal{P}\| \to 0$ implica que $n \to \infty$, pero no al revés.

Teoremas

En relación con la integral definida existen varios teoremas de capital importancia. Éstos se ofrecen a continuación divididos por temas.

Teoremas sobre la existencia de la integral definida

> Continuidad implica integrabilidad
>
> Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en ese intervalo.

Este teorema establece que la continuidad de una función en un intervalo es *condición suficiente* para la integrabilidad; sin embargo, no es *condición necesaria*. De hecho, otro teorema asegura que, bajo ciertas condiciones, también se puede asegurar que una función es integrable aún cuando presente discontinuidades.

> Condiciones suficientes para la integrabilidad
>
> Si f es una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en ese intervalo, entonces es integrable en $[a, b]$.

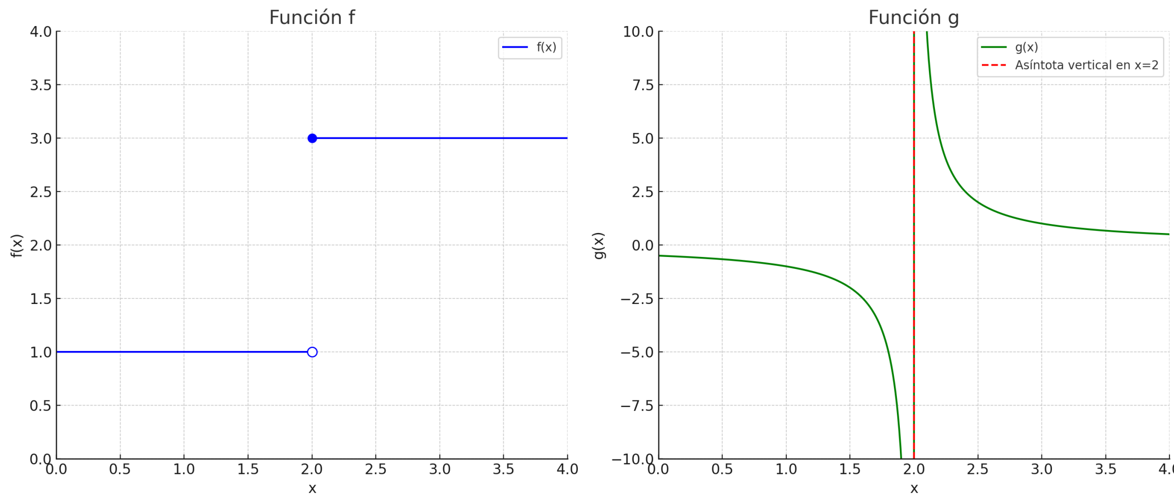

Figura 7: Funciones acotadas y no acotadas en un intervalo.

La función f tiene una discontinuidad en salto en $x = 2$, pero está acotada en $[0, 4]$, por lo que es integrable es ese intervalo.

En cambio, la función g presenta una asíntota vertical; por lo tanto, no está acotada en $[0, 4]$ y no puede aplicarse el teorema.

Linealidad de la integral definida

Linealidad de la integral definida

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y λ_1, λ_2 son dos constantes reales, entonces:

$$\int_a^b [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\ dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

Este teorema establece que:

1. La integral definida de una función integrables por una constante es igual a la constante por la integral definida de la función.
2. La integral definida de la suma de dos funciones integrables es igual a la suma de las integrales definidas de las funciones.

Aunque no se desarrollará la demostración, puede señalarse que ésta se basa en las propiedades de las sumas y de los límites.

Definiciones y teoremas sobre los límites de integración

Igualdad de límites

Si a es un punto del dominio de f, entonces:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Esto es una definición, no un teorema, y por lo tanto no hay nada que demostrar. Sin embargo, puede justificarse esta definición por el hecho de que el único "rectángulo" que puede formarse se reduce en realidad a un segmento cuya amplitud, desde luego, es cero y, por lo tanto, también su área es nula.

Inversión de límites

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

De nuevo, se trata de otra definición. En este caso, la justificación es que la suma de Riemann se forma tomando los intervalos de derecha a izquierda, por lo que todos los Δx_i cambian de signo.

Propiedad aditiva del intervalo de integración

Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Este teorema es fácil de demostrar y además intuitivamente obvio si $a < c < b$, pero también es válido si c se encuentra fuera del intervalo $[a, b]$. Esto quizás sea menos intuitivo, pero también puede demostrarse tomando en cuenta el cambio de signo de la integral definida cuando se invierten los límites de integración, de modo que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

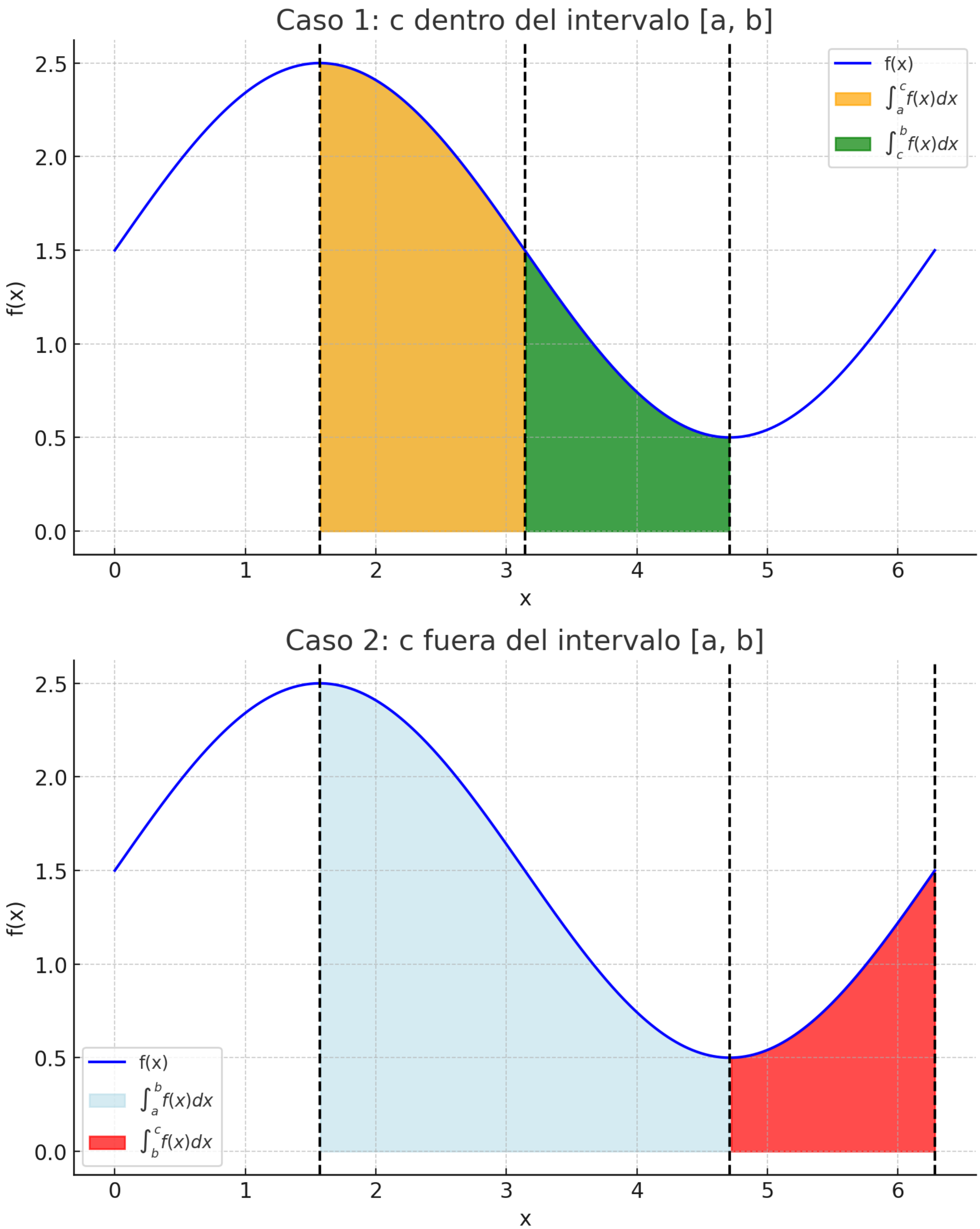

Figura 8: Propiedad aditiva del intervalo de integración.

Teoremas de comparación y de acotación de la integral definida

A continuación se presentan una serie de teoremas que permiten acotar el valor de la integral definida de una función.

> **Atención**
>
> Más arriba se ha presentado un teorema en el que se pide que *la función integrando* sea acotada en el dominio de integración. Estos teoremas, en cambio, fijan cotas para *el valor de la integral definida*. No deben confundirse estos conceptos.

> **Integral definida de una constante**
>
> Para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$, se cumple que:
>
> $$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b-a)$$

Si $k > 0$, el valor de la integral es al área de un rectángulo de lados k y $b-a$.

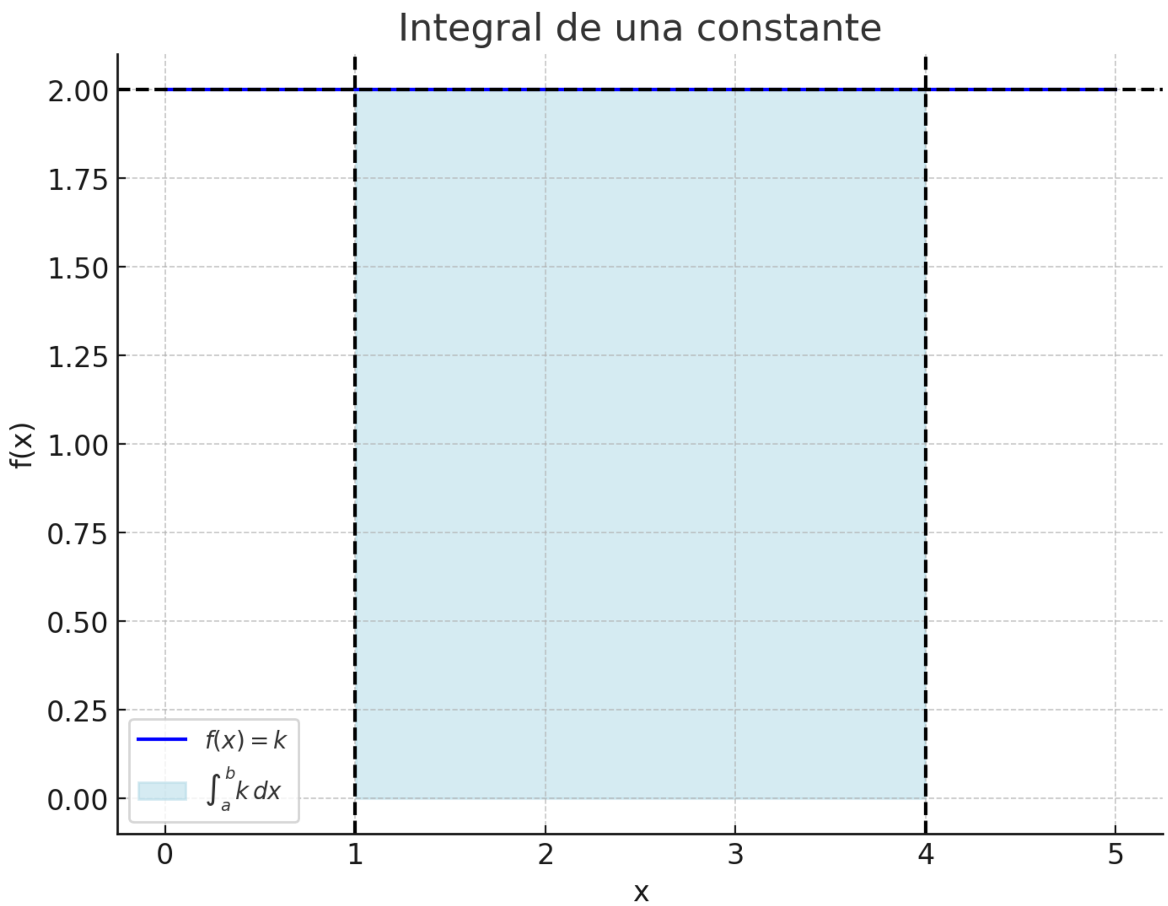

Figura 9: Integral definida de una constante.

En este ejemplo, $a = 1$, $b = 4$ y $k = 2$, y por lo tanto:

$$\int_1^4 2\,dx = 2\int_1^4 dx = 2 \cdot (4 - 1) = 6$$

Propiedades de comparación

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$.

1. Si $\forall x \in [a, b] : \ f(x) \geq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si $\exists\, m, M \in \mathbb{R}\, \forall x \in [a,b] :\ m \leq f(x) \leq M$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

El primero de estos teoremas puede demostrarse fácilmente planteando las respectivas sumas de Riemann para las mismas particiones y para los mismos puntos de evaluación, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

Por su parte, el segundo se demuestra aún más fácilmente aplicando el primer teorema a las funciones $y_1 = m$, $y_2 = f(x)$, $y_3 = M$. Si $f(x) > 0$ en todo el intervalo $[a,b]$, entonces el teorema puede interpretarse en el sentido que el área bajo la curva se encuentra entre las áreas de dos rectángulos.

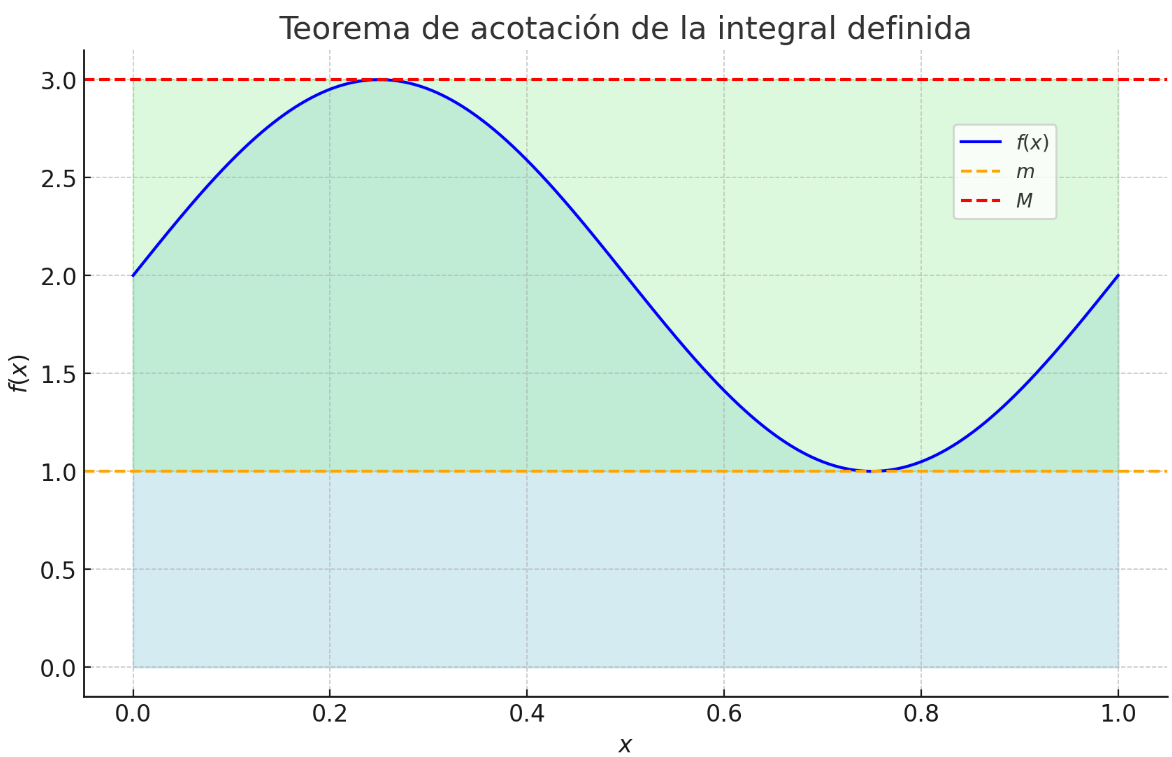

Figura 10: Teorema de acotación de la integral definida.

Teorema del valor medio del cálculo integral

Teorema de valor medio (TVM) del cálculo integral

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, existe al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

⚠ Atención

Nótese que este teorema exige que f sea continua en $[a, b]$, no solamente integrable.

En el primer ejemplo desarrollado en esta unidad, el del área bajo la parábola, $a = 0$, $b = 1$, la función cuadrática es continua en $[a, b]$ (y en todo $\mathbb{R}$) y el valor de la integral resultó ser de $1/3$, por lo tanto, según el TVM del cálculo integral, existe al menos un $c \in [0, 1]$ tal que:

$$c^2 = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

Existen dos valores de c tales que $c^2 = 1/3$, de los cuales:

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0, 1]$$

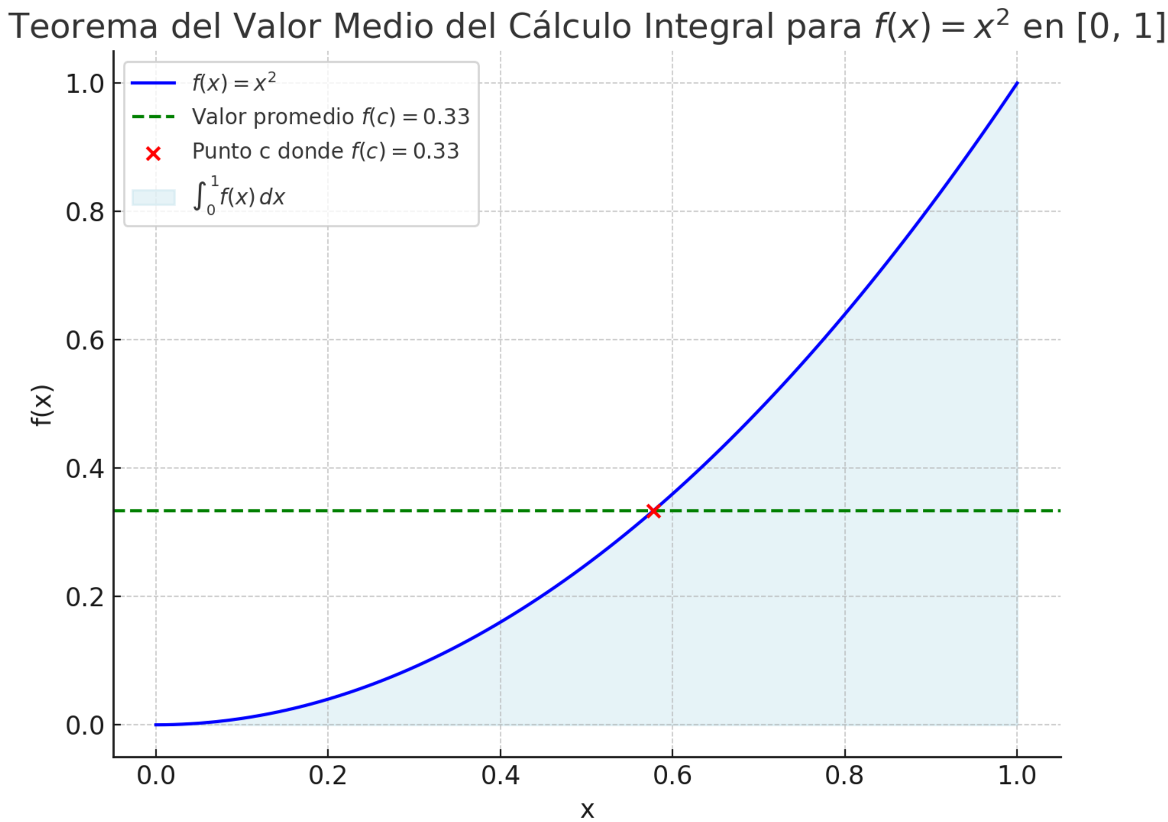

Figura 11: TVM del cálculo integral.

Demostración

En la demostración del TVM del cálculo integral se emplean los teoremas de integrabilidad de las funciones continuas y de acotación de la integral definida, presentados más arriba, y dos teoremas de funciones continuas estudiados en la unidad correspondiente: el teorema de Weierstraß y el del valor intermedio.

Del hecho de que f sea continua en $[a, b]$ se sigue que:

1. f es integrable en $[a, b]$ (teorema de integrabilidad de las funciones continuas).
2. f es acotada en $[a, b]$, y además, alcanza sus cotas (teorema de Weierstraß).

Por lo tanto, existen dos constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$. Entonces, por el teorema de acotación de la integral definida:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

O, lo que es lo mismo:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Y como este valor está entre el mínimo y el máximo de f en $[a,b]$, por el teorema del valor intermedio:

$$\exists\, c \in [a,b]: \; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

En el caso de una función no negativa, este teorema admite la siguiente interpretación geométrica: el área bajo la curva es igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$. Para el ejemplo inicial de la unidad:

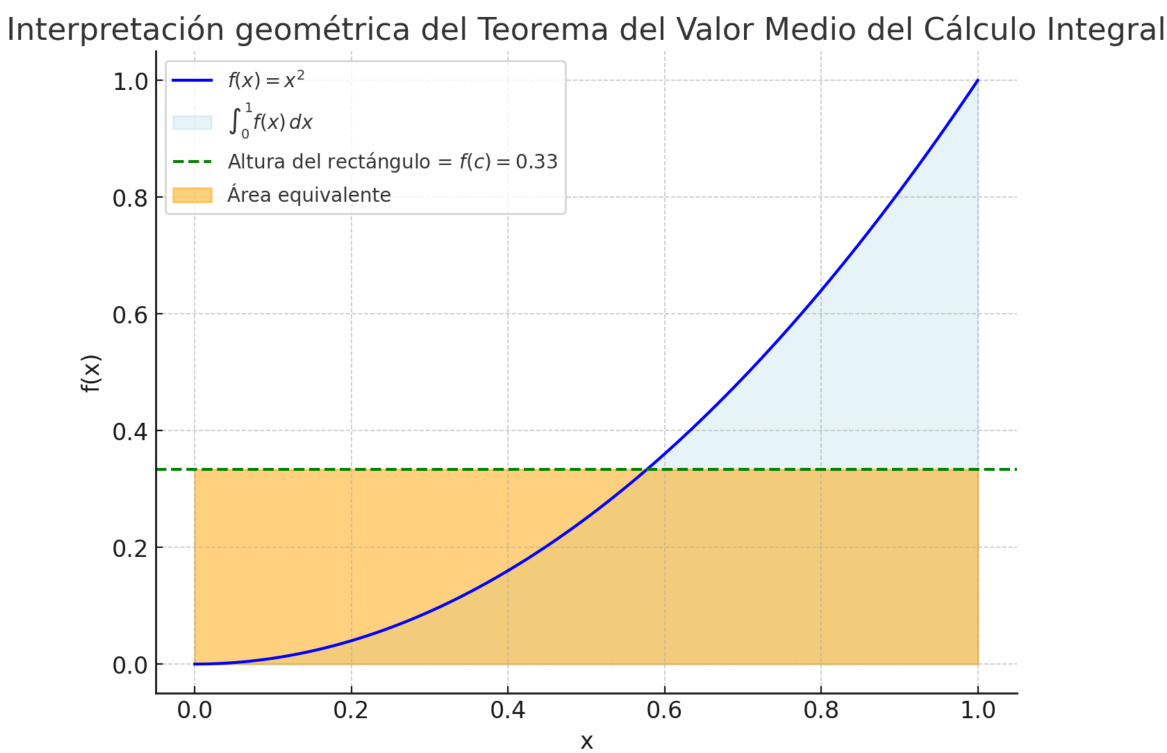

Figura 12: Interpretación geométrica del TVM del cálculo integral.

Falta aún por presentar el *teorema fundamental del cálculo*. Como su nombre lo expresa claramente, se trata de un teorema de la mayor importancia. Sin embargo, para poder estudiarlo es necesario que antes se defina el concepto de **antiderivada** o **primitiva** de una función.

Antiderivada o primitiva

> Antiderivada o primitiva de una función
>
> Se dice que F es una **antiderivada** o **primitiva** de una función f en un intervalo I si y sólo si:
>
> $$\forall x \in I: \ F'(x) = f(x)$$

Para el ejemplo presentado al principio de esta unidad, $F(x) = x^3/3$ es una antiderivada o primitiva de $f(x) = x^2$, y no solamente en el intervalo dado, sino en todo $\mathbb{R}$.

Sin embargo, nótese que no es la única antiderivada de f. Las siguientes también lo son:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 3, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + 13$$

De hecho, toda función de la forma $x^3/3 + C, C \in \mathbb{R}$ es una antiderivada de x^2. Por razones que se comprenderan mejor más adelante, la familia de las infinitas antiderivadas de una función f, que se distinguen entre sí solamente por el valor de la constante C, se denomina **integral indefinida** de f.

Teorema de la antiderivada de la función nula

> Antiderivada de la función nula
>
> Si $f'(x) = 0$, entonces f es una función constante.

> ⚠ Atención
>
> En la unidad de derivadas se demostró que si f está dada por $f(x) = k$, donde k es una constante real, entonces $f'(x) = 0$. El teorema que ahora se presenta es el recíproco de éste. No se debe confundir uno con otro.

Demostración

Se sabe que $\forall x \in \mathbb{R}: \ f'(x) = 0$. Dados cualquier par de puntos a y b, del hecho de que $f'(x) = 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$, por el teorema de Rolle se concluye que $f(a) = f(b)$, cualesquiera que sean las elecciones de a y b, lo que significa que f es una función constante.

Familia de antiderivadas de una función

> Teorema de las antiderivadas de una función
>
> Si F y G son dos antiderivadas de f en un intervalo I, entonces en ese intervalo se cumple que:
>
> $$F(x) - G(x) = C, \quad \text{donde } C \text{ es una constante real.}$$

Demostración

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Por el teorema de la antiderivada de la función nula:

$$(F - G)(x) = F(x) - G(x) = C$$

Este teorema establece que si una función tiene una antiderivada, entonces tiene infinitas antiderivadas, pero éstas sólo se distinguen entre sí por el valor de una constante. Como ya se ha dicho, este conjunto de funciones es la integral indefinida de f.

Su interpretación geométrica es que la representación gráfica de las infinitas antiderivadas de una función (en caso de existir, claro) es una familia de curvas, cada una de las cuales es una translación vertical de las demás.

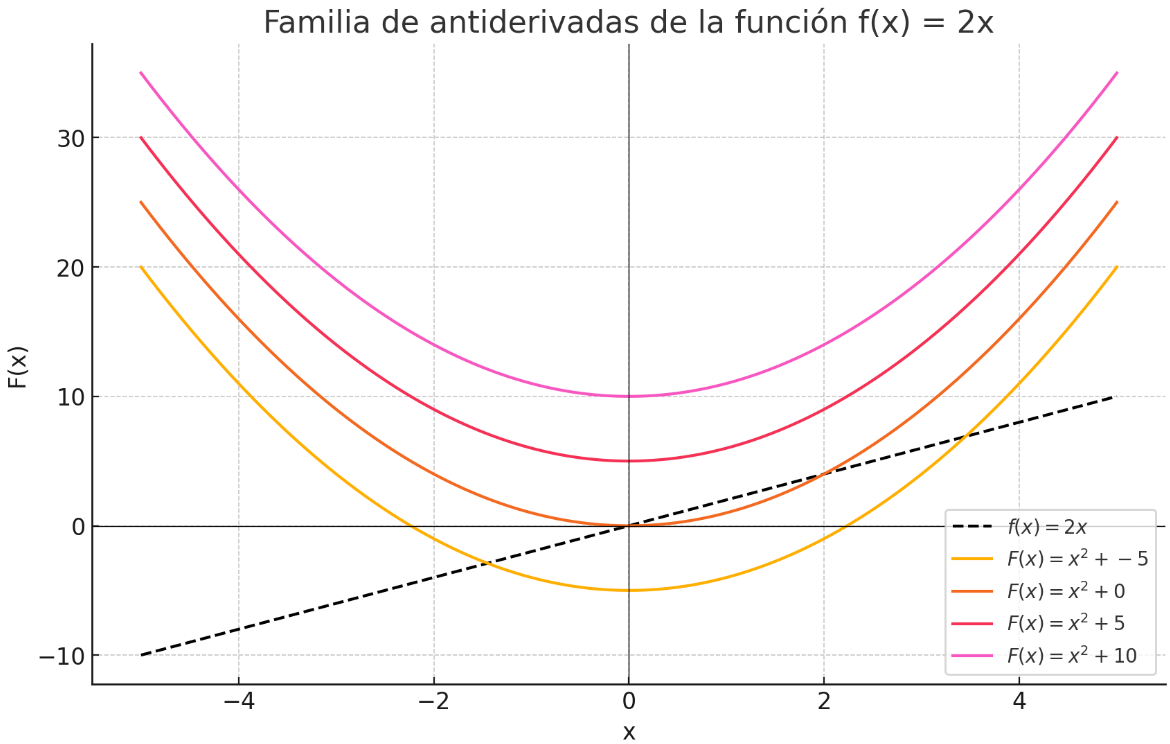

Figura 13: Familia de antiderivadas o integral indefinida de una función.

Una tabla de integrales indefinidas

Lo yo aprendido en la unidad de derivadas permite construir rápidamente una tabla de antiderivadas, o también de integrales indefinidas. Por supuesto, esta tabla no agota, ni mucho menos, toda la variedad de funciones cuyas integrales indefinidas podría ser necesario encontrar, pero es un comienzo.

Función $f(x)$	Integral indefinida $F(x) + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (para $n \neq -1$)
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$ (para $a > 0$ y $a \neq 1$)
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$

Función $f(x)$	Integral indefinida $F(x)+C$
$\csc^2 x$	$-\cot x + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

Teorema fundamental del cálculo

El teorema diferencial del cálculo se presenta en dos formas: la **forma diferencial** y la **forma integral**. Otros autores las llaman, respectivamente, **primer teorema diferencial del cálculo** y **segundo teorema diferencial del cálculo**.

Forma diferencial del teorema fundamental del cálculo

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y sea F la función definida, para valores de $x \in [a, b]$, por la siguiente expresión:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Atención

Debe observarse que, a diferencia de todo lo visto hasta el momento, en esta integral solamente el límite inferior es constante, mientras que el superior es variable.
Además, el haber empleado x para el límite superior obliga a denominar de otra forma a la variable de integración. En este caso, se ha elegido t.

El teorema establece que la derivada de F es igual a la función integrando particularizada para el límite superior de integración. Por ejemplo:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t\,dt \implies F'(x) = e^{-x^2} \cos x$$

Comprensión intuitiva

Imagina que $F(x)$ representa el área bajo la curva $y = f(t)$ desde un punto fijo a hasta un punto variable x. A medida que x cambia, el área acumulada $F(x)$ también cambia. La tasa de cambio de esta área con respecto a x, es decir, la derivada $F'(x)$, es exactamente la altura de la curva en ese punto x, que es $f(x)$.

Demostración

Por definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Y por definición de la función F, el numerador de la expresión anterior es:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

Aplicando la definición de inversión de límies, lo anterior se convierte en:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt$$

Y por el teorema de aditividad del intervalo de integración, se llega a:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Volviendo a la definición de la derivada:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Ahora bien, como f es continua en el intervalo $[x, x+h] \subset [a, b]$, se puede aplicar el TVM del cálculo integral para obtener que:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(c_h) \cdot h = \lim_{h \to 0} f(c_h)$$

La notación $f(c_h)$ se ha elegido para resaltar el hecho de que c depende de h, ya que siempre debe encontrarse entre x y $x+h$, y por lo tanto $c_h \to x$ cuando $h \to 0$. En consecuencia:

$$F'(x) = f(x)$$

Ejemplo

Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{-t} \sin t \, dt}{x^2}$$

Como puede comprobarse fácilmente, se trata de una forma indeterminada 0/0 que puede resolverse aplicando una de las reglas de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{-t} \sin t \, dt}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} \sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} e^{-x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Consejo

Trata siempre de usar tus conocimientos para resolver los ejercicios de la manera más simple y elegante posible. En éste, hay dos "oportunidades" de complicar las cosas, perder tiempo y energías y aumentar la probabilidad de cometer errores:

1. Resolver la integral en vez de aplicar el teorema fundamental del cálculo.
2. Insistir con aplicar la regla de l'Hôpital por segunda vez en lugar de usar el límite trigonométrico fundamental.

Es hora de considerar la forma integral del teorema fundamental del cálculo, también conocida como **regla de Barrow**.

Forma integral del teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en ese mismo intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Sea G la función definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Como f es continua en $[a, b]$, se puede aplicar la forma diferencial del teorema fundamental del cálculo para obtener:

$$G'(x) = f(x)$$

Esto significa que G también es una antiderivada de f en $[a, b]$, al igual que lo es F, y por lo tanto:

$$G(x) = F(x) + C$$

Al evaluar G en a, se tiene que:

$$G(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \implies F(a) = -C$$

Y al evaluar la misma función en b:

$$G(b) = \boxed{\int_a^b f(t)\,dt} = F(b) + C = \boxed{F(b) - F(a)} \quad \textbf{QED}$$

QED son las siglas de *quod erat demostrandum*, que en latín significa *lo que debía demostrarse*. Se utiliza tradicionalmente al final de una demostración matemática o lógica para indicar que la proposición se ha probado satisfactoriamente.

Ejemplo

El cálculo del área bajo la parábola desarrollado al comienzo de esta unidad puede hacerse aplicando la regla de Barrow de la siguiente manera:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

¡El problema que insumió un considerable desarrollo al comienzo de la unidad ahora resuelto en un renglón! Una demostración tan clara de utilidad y potencia de este teorema justifica los esfuerzos por desarrollar técnicas para encontrar antiderivadas que permitan evitar el trabajo de plantear la suma de Riemann y el cálculo de su límite cuando la norma de la partición tiende a cero.

Cuando no se puede aplicar la regla de Barrow

Lamentablemente, hay casos en los que no se puede aplicar la regla de Barrow. Ejemplos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^2\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int_1^4 \ln\sqrt{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$$

Todas estas funciones son continuas, y por lo tanto integrables, en los respectivos intervalos de integración, algunas incluso en todo $\mathbb{R}$, pero no pueden resolverse con la regla de Barrow porque no tienen primitiva elemental. Por ejemplo, no existe ninguna función elemental cuya derivada sea $\sin x^2$.

¿De qué manera se pueden resolver? ¿Hay que hacerlo con el límite de la suma de Riemann? En la práctica, hay varias formas de proceder: aplicando métodos numéricos, integrando la serie de Taylor de la función, con métodos basados en transformaciones, con métodos asintóticos, con métodos de contorno en el plano complejo, etc. Pero son métodos que van más allá de los objetivos de este curso.

En cambio, se explicará cómo se pueden obtener estos resultados empleando el software libre GeoGebra.

Por ejemplo, si se quisiera evaluar la última de las integrales escritas más arriba, los pasos serían:

1. Entrar en GeoGebra, ya sea en la versión web o en la aplicación.
2. Escribir en la barra de entrada la función y llamarla, por ejemplo, `f(x)` y en la siguiente fila escribir `Integral(f(x), -1, 2)`. O bien, escribir directamente la función dentro de ese comando, como primer argumento.

Y ya está, GeoGebra calcula el valor de la integral, que resulta ser aproximadamente 1.629.

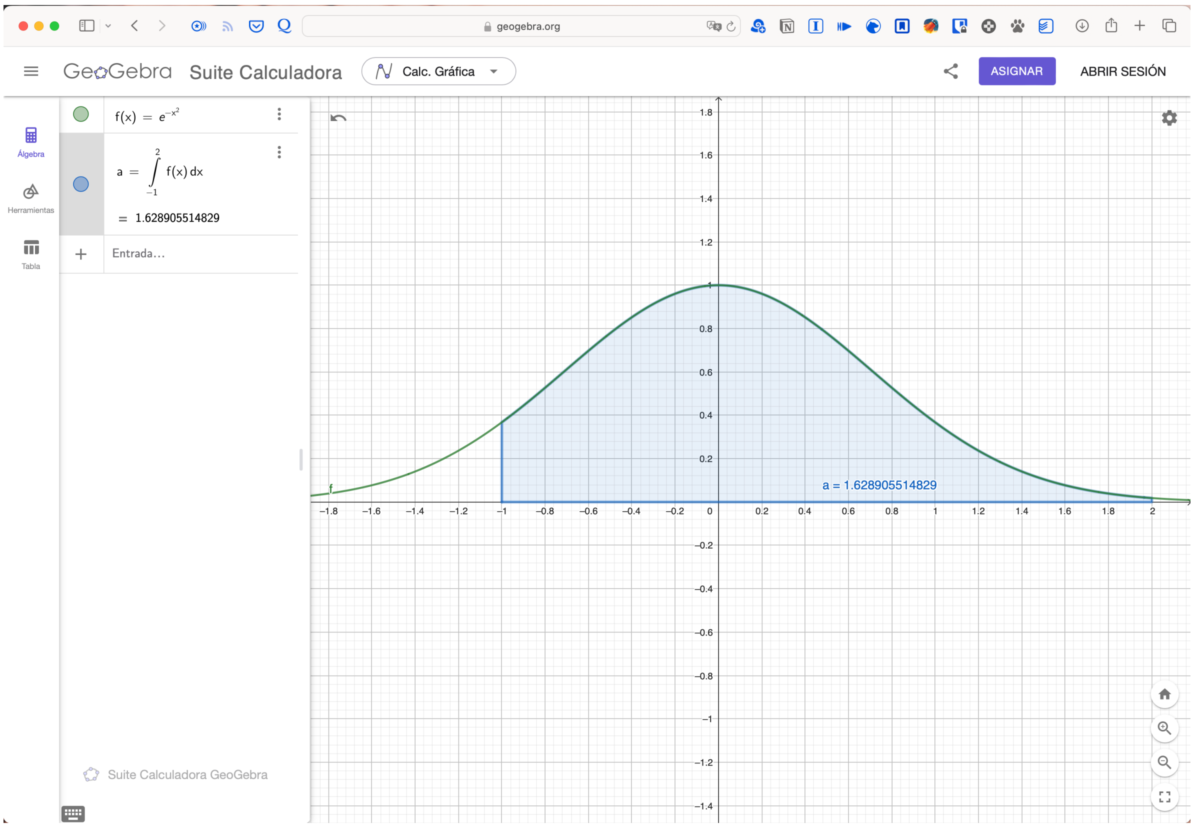

Figura 14: Integral definida con GeoGebra.

Esta función tiene una importancia de primer orden, porque aparece en la distribución de probabilidades normal o gaussiana, cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aunque a primera vista pueda parecer algo complicada, en esencia es la función e^{-x^2} con un desplazamiento horizontal y cambios de escala horizontal y vertical por efecto de unas constantes y de dos parámetros, μ y σ. Esto significa que una función de enorme importancia, presente en problemas de ingeniería, ciencias físicas, finanzas, ciencias de la salud, etc., es integrable, pero su integral no puede evaluarse con la regla de Barrow.

Pero, un momento, ¿cómo es que la integral definida aparece en un problema de probabilidades? ¿Qué tiene esto que ver con el área bajo una curva? Para entenderlo, podría ser conveniente retomar el primer ejemplo desarrollado en la unidad.

Como ya se ha visto, el área bajo la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ es $1/3$. ¿Qué probabilidad hay de que un punto bajo la parábola elegido el azar esté entre $x = 0.50$ y $x = 0.80$? El área bajo la parábola en ese intervalo es:

$$\int_{0.50}^{0.80} x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{0.50}^{0.80} = 0.129$$

Si se divide esta área por el área total bajo la parábola en el intervalo $[0, 1]$, se obtiene la probabilidad buscada:

$$p = \frac{0.129}{0.333} = 0.387$$

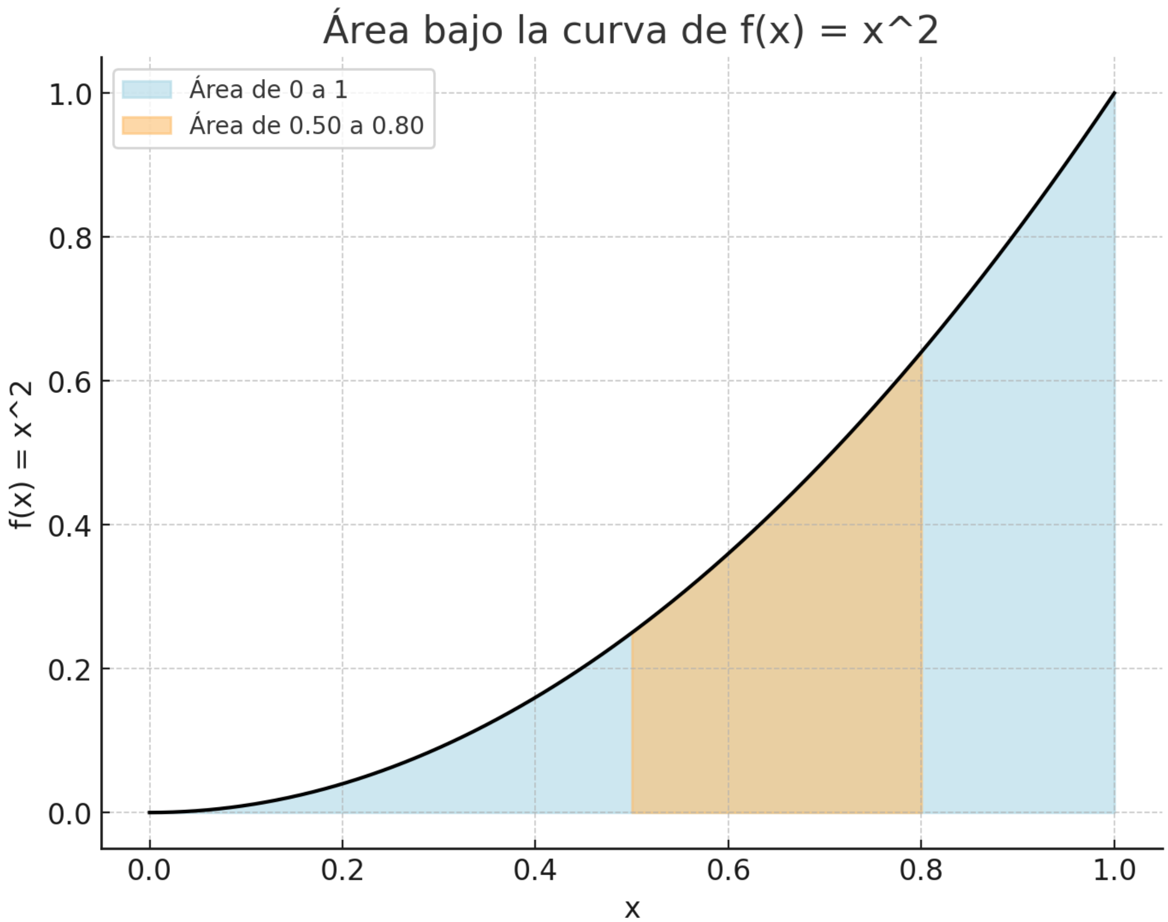

Figura 15: Probabilidad como relación entre áreas.

Pero si se cambia la parametrización de la parábola de tal forma que el área bajo la curva sea 1, entonces la integral habría dado directamente la probabilidad. Para eso, debería tomarse la parábola $y = 3x^2$, ya que como puede comprobarse fácilmente, en tal caso el área bajo la curva en el intervalo $[0, 1]$ es igual a 1:

$$\int_0^1 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

Entonces:

$$\int_{0.50}^{0.80} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0.50}^{0.80} = (0.80)^3 - (0.50)^3 = 0.387$$

En este caso, la integral definida es directamente el valor de la probabilidad.

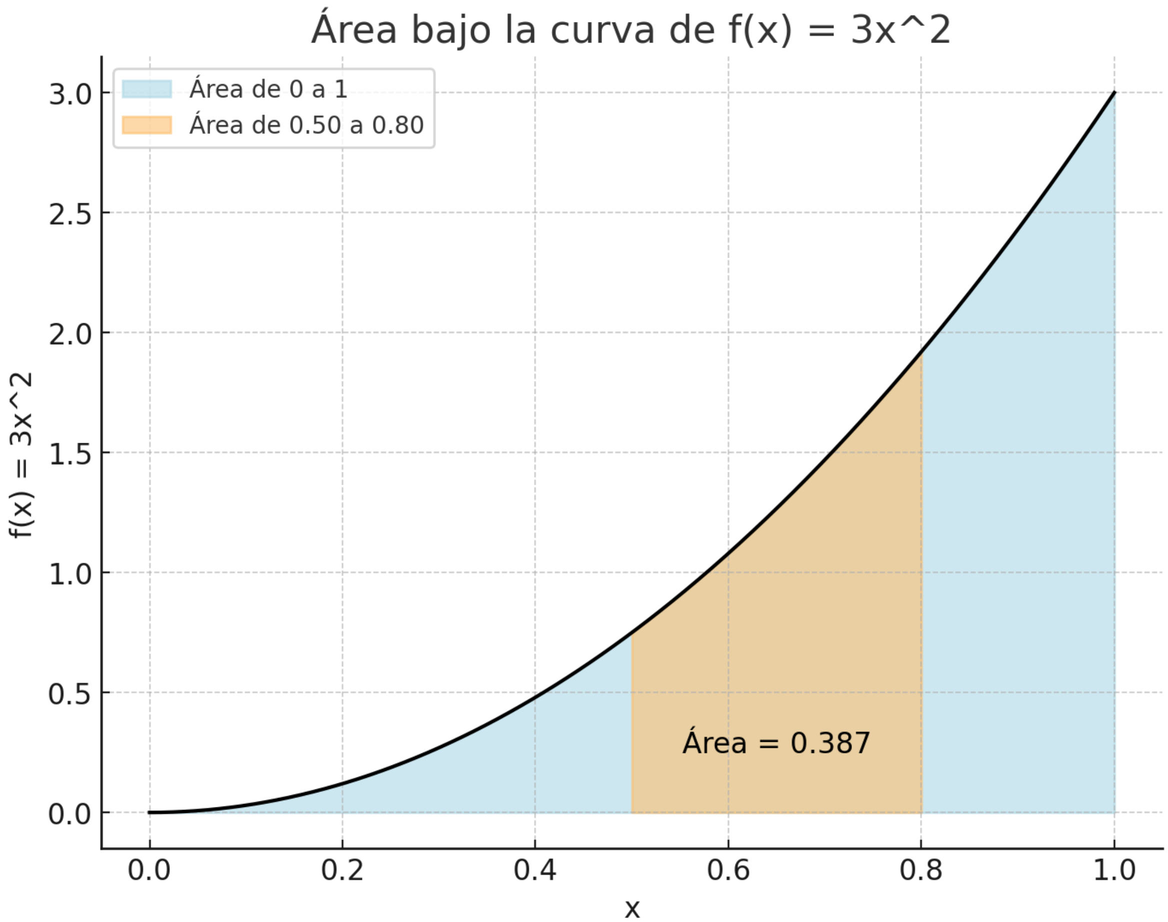

Figura 16: La integral definida como probabilidad.

De este modo, se suma una tercera interpretación posible de la integral definida a las dos ya vistas:

1. La interpretación más general de la integral definida es como una suma infinita de cantidades infinitesimales. El resultado puede ser cualquier número real, siempre que la integral exista.
2. Si la función integrando es no negativa, la integral definida puede interpretarse como el área bajo la gráfica de la función. En caso de que la función fuese negativa, podría interpretarse incluso, de modo menos natural, como un "área con signo".
3. Si la función es no negativa y además el área bajo la curva es igual a 1, la integral definida puede interpretarse como la probabilidad de un acontecimiento.

Así que como puede verse, un concepto nacido al buscar la solución de un problema de geometría da origen al desarrollo de una de las dos grandes partes en las que se divide el cálculo diferencial e integral y encuentra aplicación, entre otras, en la solución de problemas relacionados con el azar y la probabilidad. Sin dudas, un ejemplo maravilloso de la unidad de las matemáticas y de la intrincada red de relaciones entre todas sus ramas.