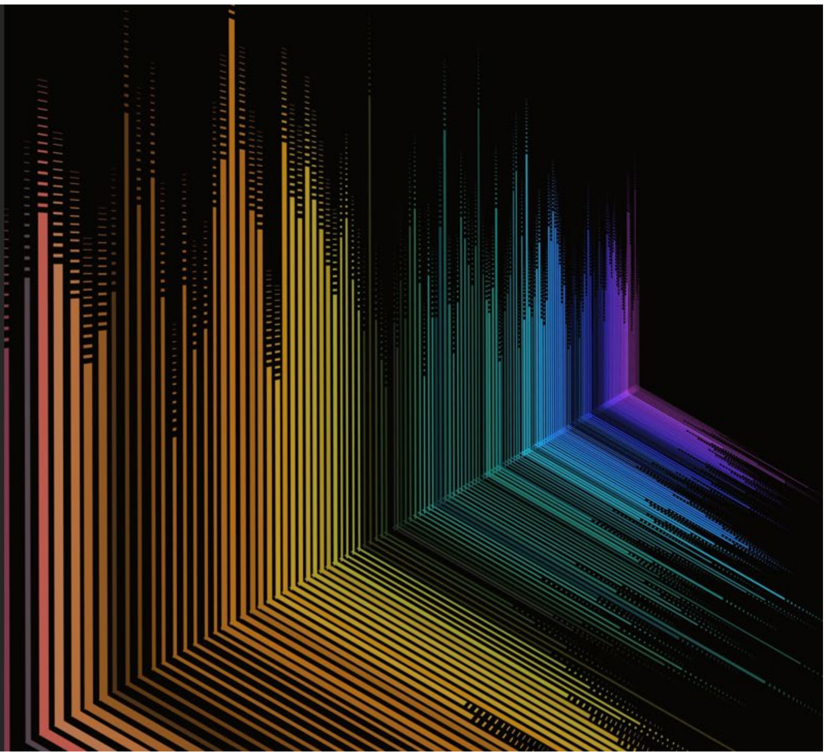
UNIDAD 9

INTEGRALES IMPROPIAS



Contenidos

Introducción

El concepto de integral definida visto hasta ahora, solo se refiere a funciones continuas (o que presentan discontinuidades finitas) y acotadas en un intervalo cerrado $[\mathrm{a},\ \mathrm{b}]$ con $a, b\ \in \mathbb{R}$.

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Este concepto se puede extender eliminando estas restricciones.

Veremos un procedimiento para evaluar integrales que normalmente no satisfacen estos requisitos porque cualquiera de los dos límites de integración podría ser infinito, o bien f podría tener discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Las integrales que poseen estas características son las ***integrales impropias***.

Henri L. Lebesgue introdujo esta nueva idea, que generaliza la noción de la integral definida (integral de Riemann) extendiendo el concepto de área bajo una curva.

Estas integrales son fundamentales en muchas aplicaciones de las matemáticas, la física y la ingeniería.

Podríamos preguntarnos, por ejemplo

- *El área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, +\infty)$ ¿es finita o infinita?*
- *Luego, si esta misma región se hace girar alrededor del eje x, ¿el volumen es finito o infinito?*

Para dar respuestas a estas preguntas, primero veamos algunas definiciones y conceptos.

Conocimientos previos

Para abordar este tema, el estudiante deberá repasar los siguientes conceptos.

- Métodos de integración
- 2° Parte Teorema Fundamental del Calculo Integral (Regla de Barrow)
- Regla de L'Hopital
- Definición de Límite

Integrales Impropias

Las ***integrales impropias*** son una clase especial de *integrales definidas* en las cuales puede suceder que:

- el intervalo de integración sea infinito (o indefinido).
- la función en el integrando sea discontinua en el intervalo de integración.

Clasificación

Las integrales impropias se clasifican en:

- Integrales impropias de ***Primera Especie***
- Integrales impropias de ***Segunda Especie***.

A. INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

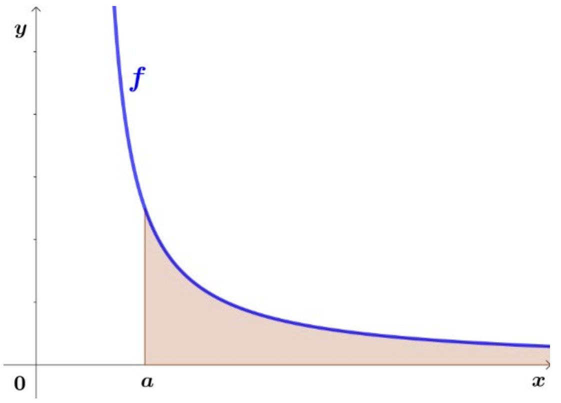
Son aquellas integrales definidas cuya función integrando es continua en $[a, b]$ y el intervalo de integración es infinito.

Definición 1

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, +\infty)$. Entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\ dx$$

siempre que exista este límite.



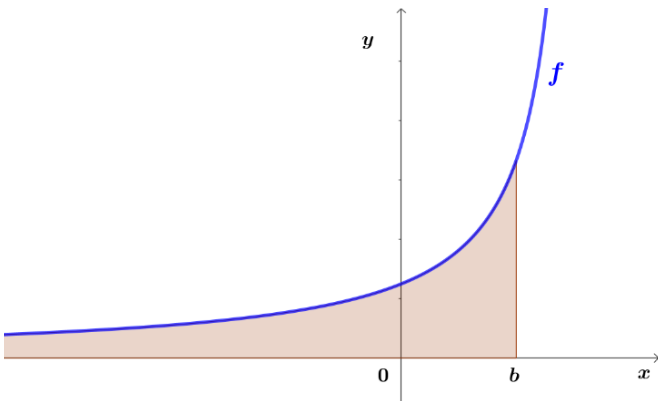
Definición 2

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $(-\infty, b]$.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx$$

siempre que exista este límite.



En cada caso, si el límite existe, decimos que la ***integral impropia converge***.

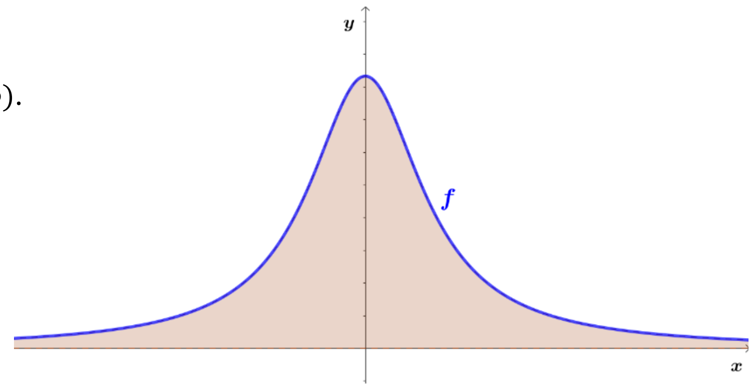
Si el límite no existe, se dice que la ***integral impropia diverge***.

Definición 3

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx$$



siempre que $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx\ \ y\ \ \int_c^{+\infty} f(x)\ dx$ ambas convergen.

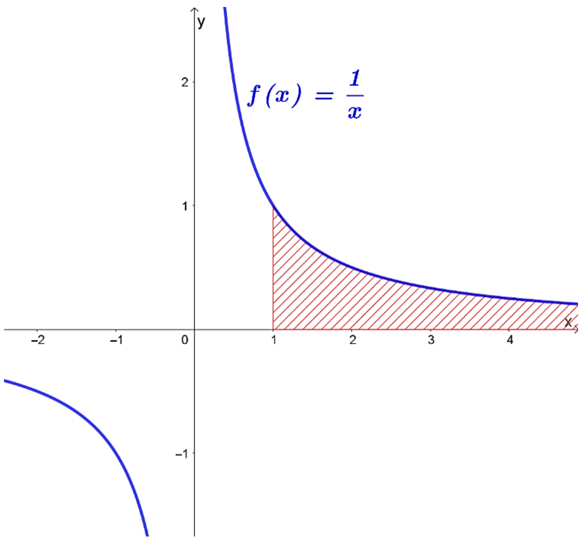
Si cualquiera de estas dos o ambas integrales divergen, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ diverge.

Volviendo a nuestras preguntas iniciales

- ***El área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1,+\infty)$ ¿es finita o infinita?***

Respuesta

En primer lugar, hacemos una gráfica de la región solicitada.



El área de la región estará dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\ dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \ln|x| \Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln|t| - \ln|1|) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \ln|t| = +\infty
\end{aligned}
$$

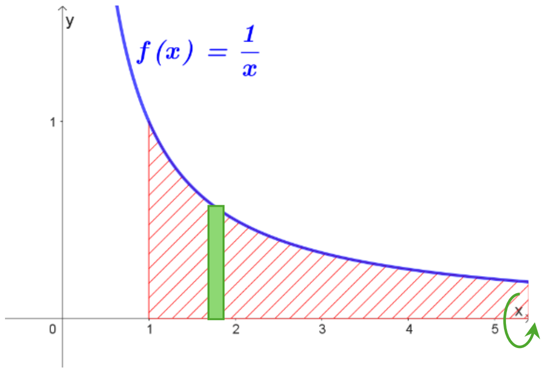
∴ Como la integral impropia diverge a $+\infty$, **el área de la región plana es infinita**

Y la segunda pregunta

- ***Luego, si esta misma región se hace girar alrededor del eje x, ¿el volumen es finito o infinito?***

Respuesta

Dada la región plana, consideramos un elemento diferencial como muestra la figura



El sólido se obtiene al girar la región plana alrededor del eje x, si aplicamos el método del disco, el volumen del solido será

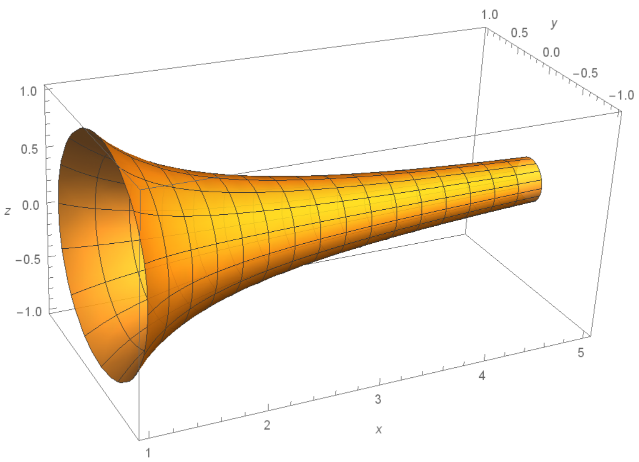
$$V = \pi \int_1^{+\infty} [f(x)]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \pi \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= \pi \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \pi \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right)$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{\infty} + 1\right) = \pi$$

$\therefore$ Como la integral impropia converge a π, **el volumen del sólido de revolución es π $[L^3]$**



Grafica realizada con software Wolfram Mathematica 11.0

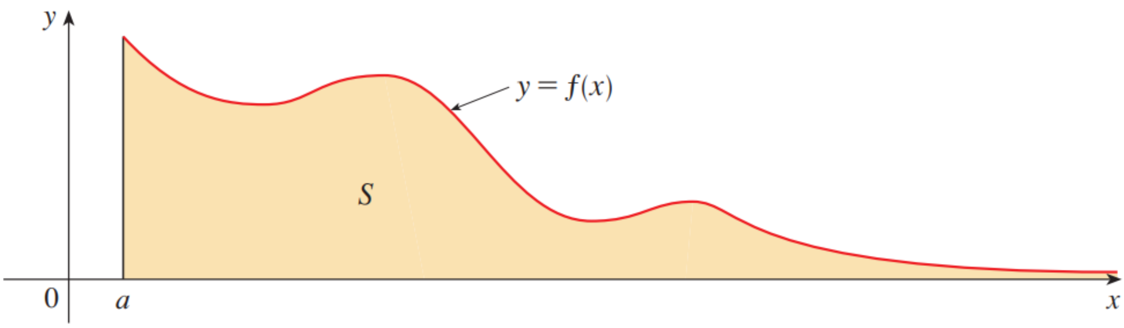
Interpretación Geométrica

Cualquiera de las integrales impropias en las definiciones 1, 2 o 3 puede interpretarse como un *área*, siempre que f sea una función positiva.

Por ejemplo, en la Definición 1,

Si $f(x) \geq 0$ y la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces el **área de la región** es

$$\boldsymbol{S = \{(x, y) | x \geq a,\ 0 \leq y \leq f(x)\}}$$



Propiedades

Las siguientes propiedades son análogas a las correspondientes en las integrales propias, sólo consideraremos el caso del intervalo $[a, +\infty)$ pues el segundo caso, $(-\infty, b]$ se puede reducir al primero con el cambio de variable $z = -x$ y el tercer caso, $(-\infty, +\infty)$ es combinación de los dos anteriores al descomponer la integral en dos sumandos.

1) Homogénea

Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^{\infty} \lambda\, f(x)\,dx$ es convergente, ∀ λ ∈ ℝ y se cumple

$$\int_a^{\infty} \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

2) Aditiva

Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ $\quad y \quad$ $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ convergen, entonces $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ converge y además

$$\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

3) Monotonía

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\ dx$$

Esto es útil cuando se busca comparar integrales o aplicar el ***teorema de comparación*** para determinar si una integral converge o diverge.

Criterios de Convergencia

1) La convergencia de la integral no depende del límite de integración finito.

Es decir, $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_b^{\infty} f(x)\, dx$ converge

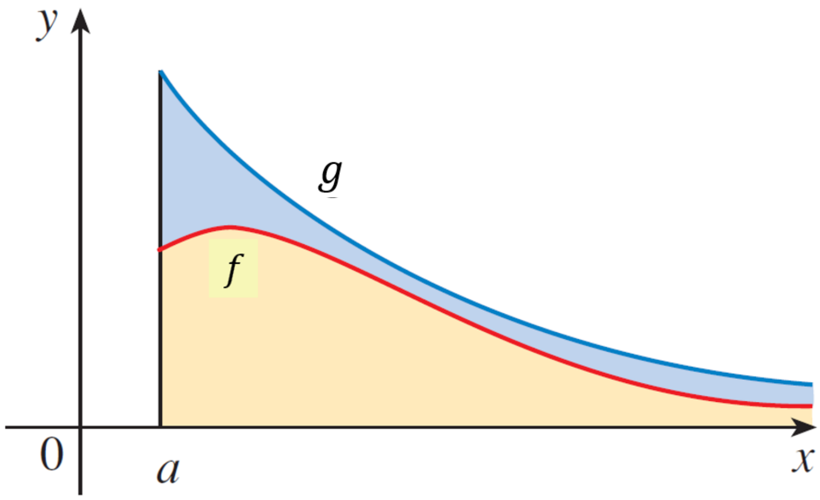
2) Teorema de comparación

Si f y g son funciones continuas en $[a, +\infty)$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$, entonces

$$0 \leq \int_a^{\infty} f(x)\, dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\, dx$$

Por tanto, si $\int_a^{\infty} g(x)\ dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ también converge.

Por el contrario, si $\int_a^{\infty} g(x)\ dx$ diverge y $f(x) \geq g(x)$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ también diverge.



3) Comparación por paso al limite

Sean f y g continuas y no negativas en $[a, +\infty)$.

a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0,\ k\ finito,$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ converge \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{\infty} g(x)\,dx\ \ converge$$

b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ entonces

$$\int_a^{\infty} g(x)\,dx\ \ converge \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ converge$$

En muchos casos, debido a que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} converge\ si\ p > 1 \\ diverge\ si\ p \leq 1 \end{cases}$$

se aplica el criterio anterior con $g(x) = \frac{1}{x^p}$

Este queda entonces así:

c) Sea f una función continua y no negativa en $[a, \infty)$

i. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p\, f(x) = k \neq 0,\ \ k\ finito,$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ converge \quad \Leftrightarrow \quad p > 1$$

ii. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p\, f(x) = 0\ \ y\ \ p > 1,$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ converge$$

iii. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p\, f(x) = \infty\ \ y\ \ p \leq 1,$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ converge$$

Estas propiedades facilitan el manejo de las integrales impropias de primera especie y permiten establecer criterios de convergencia o divergencia en diferentes contextos.

Ejemplo 1: Evaluar e indicar si las siguientes integrales convergen (o divergen).

1. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\, dx$

Solución

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+4}\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\, arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_t^0$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to-\infty} \left[arctg(0) - arctg\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{la\ integral\ converge\ a\ \frac{\pi}{4}}}$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\, dx$

Solución

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\, dx = \int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx + \int_{0}^{+\infty} xe^x\, dx \qquad (1)$$

Si cualquiera de $\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx$ o $\int_{0}^{+\infty} xe^x\, dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\, dx$ diverge.

Resolviendo por separado cada integral, tenemos

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^x\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (xe^x - e^x)\Big|_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-1 - te^t + e^t)$$

$$= -1 - \lim_{t\to-\infty} te^t \qquad (2)$$

El límite del segundo miembro de (2) será:

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = 0\cdot\infty \quad \leftarrow \quad forma\ indeterminada$$

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{\frac{1}{e^t}} = \frac{\infty}{\infty} \ \leftarrow\ forma\ indeterminada\ \Rightarrow\ aplicamos\ regla\ de\ L'Hopital$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{e^{-t}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

luego, en (2)

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = -1$$

Veamos ahora que pasa con la segunda integral de (1).

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} xe^x\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} xe^x\,dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}(xe^x - e^x)\Big|_0^t\\
&= \lim_{t\to+\infty}(te^t - e^t + 1)\\
&= \lim_{t\to+\infty}[(t-1)e^t + 1] = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathit{esta\ integral\ es\ divergente}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{xe^x\,dx} \quad \boldsymbol{diverge}}$$

Ejemplo 2: Evaluar si las siguientes integrales son convergentes aplicando criterios de convergencia.

1. $\int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}\,dx}$

   Solución

   La integral dada podemos escribirla de la siguiente manera

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

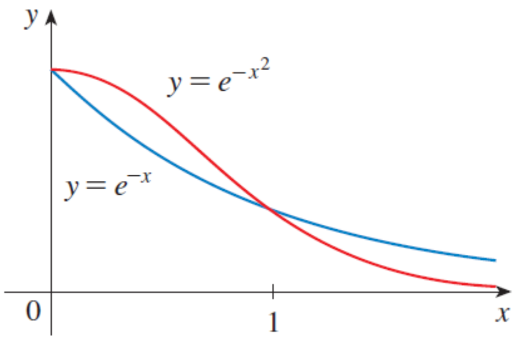
En el segundo miembro se observa que: la primera integral es una integral definida ordinaria; mientras que la segunda es una integral impropia en la que para:

$$x \geq 1 \;\rightarrow\; x^2 \geq x \;\rightarrow\; -x^2 \leq -x \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Aplicamos el teorema de comparación. Evaluamos $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ para responder si $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ es convergente o no. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t} e^{-x}\,dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx \quad \mathit{es\ convergente}$$



$$\boxed{\therefore \int_{\boldsymbol{1}}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}\,dx} \quad \boldsymbol{tambi\acute{e}n\ es\ convergente}}$$

2. Demostrar $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$ converge.

Solución

Podemos ver que $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

Según el teorema de comparación, si $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, entonces también los hace $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$.

Evaluemos entonces $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{t\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_1^t$$
$$= \lim_{t\to+\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}$$

$$\boxed{\therefore \textit{dado que} \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx \ \textit{converge, también lo hace} \int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx}$$

Ejercicios de control

1. Evaluar e indicar si la integral dada converge o diverge.

$$\int_{-3}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

2. Demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge $\forall\, p < 1$.

B. INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

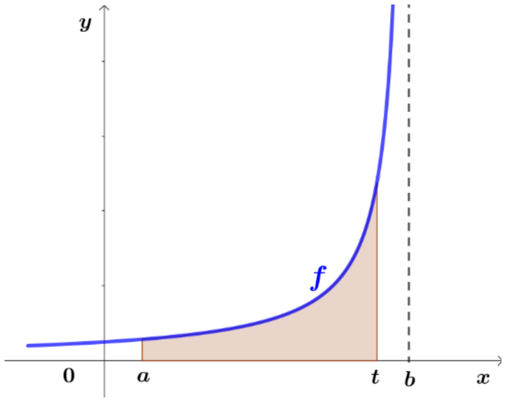
Son aquellas integrales definidas cuya función integrando es discontinua en $[a,b]$ y presentan algún comportamiento asintótico vertical en dicho intervalo.

Definición 4

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b)$, pero en $x=b$ la función no está definida o es discontinua, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ dx$$

siempre que exista este límite.

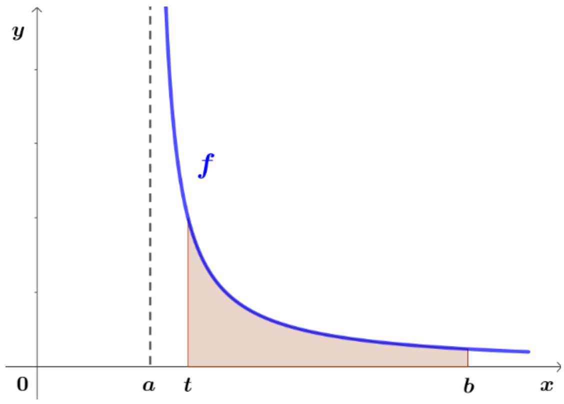


Definición 5

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $(a,b]$, pero en $x=a$ la función no está definida o es discontinua, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que exista este límite.



En cada caso, si el límite existe, decimos que la ***integral impropia converge***. Si el límite no existe, se dice que la ***integral impropia diverge***.

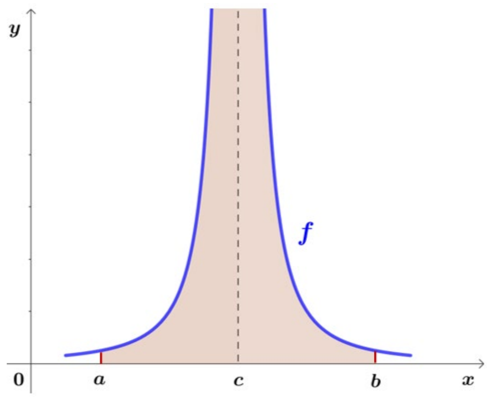
Definición 6

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y en $c\in(a,b)$ la función no está definida o es discontinua de salto infinito, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que $\int_a^c f(x)\ dx\ \ y\ \int_c^b f(x)\ dx$ que ambas convergen.



Si cualquiera de estas dos o ambas integrales divergen, entonces $\int_a^b f(x)\ dx$ diverge.

Ejemplo 1: Evaluar si la integral dada converge (o diverge)

1. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

Solución

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = \lim_{t\to 4^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 4^-}\left(-2\sqrt{4-x}\right)\Big|_0^t$$

$$= -2\lim_{t\to 4^-}\left[\sqrt{4-t}-2\right]$$

$$= -2[0-2] = 4$$

$$\therefore \textit{la integral converge a } 4$$

2. $\int_0^2 x\ln x\,dx$

Solución

$$\int_0^2 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^2 x\ln x\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_t^2$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[2\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{1}{4}t^2\right]$$

$$= 2\ln 2 - 1 \cong 0{,}39$$

$$\therefore \textit{la integral converge aproximadamente a } 0{,}39$$

Ejercicio de control

Evaluar e indicar si la integral dada converge o diverge.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx$$

C. APLICACIONES AL CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES

El concepto de integral impropia permite también aplicarlo al cálculo de áreas y volúmenes de regiones no acotadas. Veremos la posibilidad de que regiones no acotadas tengan áreas o volúmenes finitos, lo cual será debido a la convergencia de las integrales que las definen.

Ejemplo

Hallar el área de la región plana delimitada por la curva $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{x^2}}$, el eje x, y las rectas $x = \pm 1$.

Solución

La función es discontinua en x = 0.

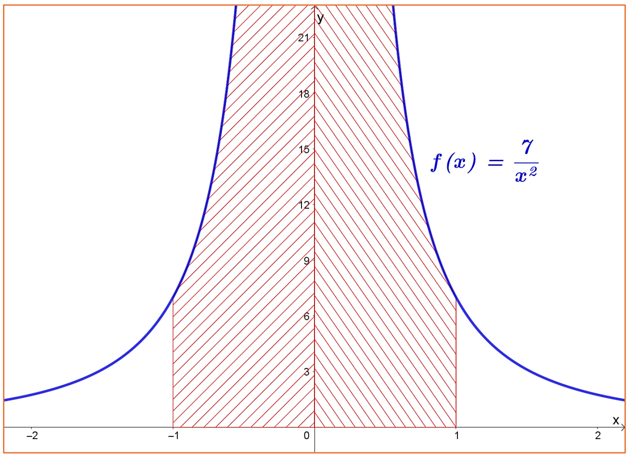
$$\int_{-1}^{1} \frac{7}{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{7}{x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{7}{x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{7}{x^2}dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{7}{x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{7}{x}\right)\Big|_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{7}{x}\right)\Big|_{t}^{1}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{7}{t} - 7\right) + \lim_{t\to 0^+} \left(-7 + \frac{7}{t}\right)$$

$$= \infty + \infty = \infty$$



$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{la\ integral\ es\ divergente\ \Rightarrow\ el\ área\ es\ infinita}}$$

D. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Evaluar el resultado de las siguientes integrales

   a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$

   b) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

   d) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

   e) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

2. Estudiar la convergencia de la integral $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} dx$

3. ¿Para qué valores de α es convergente $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$?

4. Usando la fórmula de longitud de arco, demostrar que el circulo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ tiene un perímetro igual 2π.

5. Calcular el área de la región limitada por la curva $y^2 = \frac{x}{1-x^3}$ entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$