# TRABAJO PRACTICO N° 6: Vectores

## Repaso de conceptos importantes

**Definición:** Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**). Se caracterizan por poseer: MÓDULO, DIRECCIÓN Y SENTIDO

El **módulo(o norma) del vector** $\overrightarrow{AB}$ es la l**ongitud del segmento AB**, se representa por $|AB|$. El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre $\geq 0$

La **dirección del vector** es la **dirección de la recta** que contiene al vector o de cualquier **recta paralela** a ella.

Módulo de un vector a partir de sus componentes

**En R²** $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

**En R³** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

*Formas de representa r un vector* $: \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *terna de n° reales*

$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ *forma cartesiana mediante los versores* $i, j$ *y* $k$.

**Operaciones Con Vectores:**

**Suma:** **se suman sus respectivas componentes.**

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$

**Producto de un número real por un vector:**

$K \cdot \vec{u} = (Ku_1, Ku_2, Ku_3)$

$K \in \Re$

**Producto Escalar de vectores:** Geométricamente es un **nº real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos\alpha$

Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ $y$ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v\ \vec{j} + v_3\vec{k}$ entonces

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3$

**Producto Vectorial de los vectores u y v**

$\vec{u}\ x\ \vec{v}$. Da como resultado un vector

El **módulo**: | $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ |= |**u**| · |**v**| **sen**φ, $\varphi \angle(u, v)$

La **dirección** de $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ es perpendicular a los vectores **u** y **v**, o sea, $u \times v \perp u,\ u \times v \perp v$

El **sentido** lo da la regla de la mano derecha

Dados por sus componentes:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

**Producto mixto de vectores:** El número **(u x v)· w** se llama **producto mixto** de los vectores **u, v, w.**

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

**Interpretación geométrica: El producto mixto de u, v, w,** es igual al volumen *V* del paralelepípedo construido sobre estos vectores como las aristas.

## Ejercitación

### Vectores en $\Re^2$

1. Dadas las siguientes magnitudes, determinar cuáles son de carácter escalar y cuáles de carácter vectorial

a) Peso b) calor c) velocidad d) densidad e) volumen f) energía g) fuerza

2. Represente gráficamente los siguientes vectores.

a) $\vec{u}$ = (- 4 , 4 ) c) $\vec{w}$ = ( 3 , - 1 ) e) $\vec{s} = 5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$

b) $\vec{v}$ = ( 4 , - 4 ) d) $\vec{r}$ = ( 1, - 3 ) f ) $\vec{t} = -7\vec{i} + 9\vec{j}$

i) Calcular el módulo de los vectores

ii) Encuentre el vector unitario en la dirección de los vectores dados .

iii) Calcular: a) $-3\vec{u}$ b) $2\vec{v} - \vec{r} + 4\vec{w}$, c) $\left|3\,\vec{s} - 4\,\vec{t}\right|$

iv) Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

3. Sabiendo que el ángulo que forman los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es 60 º y que el módulo del vector $\vec{u}$ es igual a 2. Determinar el módulo de $\vec{v}$, para que:

$a)\ \vec{u} - \vec{v} \perp \vec{u}$
$b)\ \vec{u} + \vec{v} \perp \vec{v}$
$c)$ *el ángulo que forman* $\vec{u}\ y\ \vec{u} + \vec{v}$ *sea* $30^{\circ}$

4. Un bloque se arrastra hacia arriba por un plano inclinado 20° sobre la horizontal con una fuerza **F** que forma un ángulo de 30° con el plano. Determinar:

a) El valor de **F** para que su componente, $F_x$ , paralela al plano sea de 16 N.

b) El valor de la componente $\mathbf{F_y}$ perpendicular al plano.

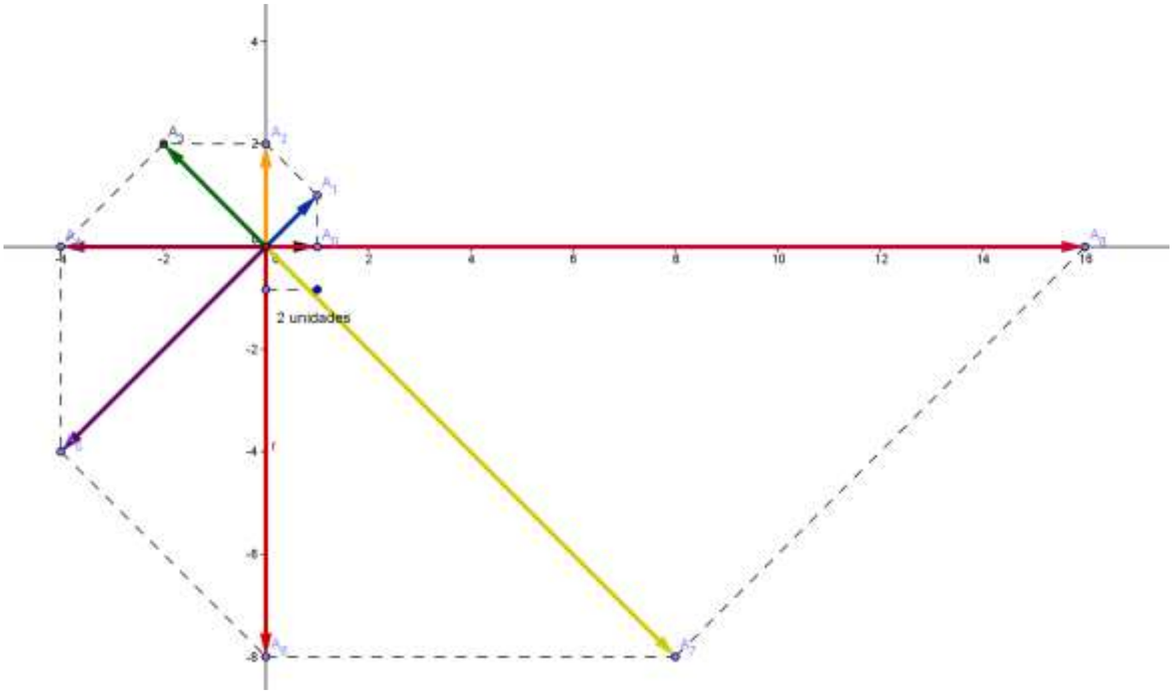
5. Hallar el vector $\vec{u} \in \Re^2$ que tiene magnitud $\sqrt{5}$ y cuya primera componente sea el doble de la segunda.

6. Desde el punto $A_0$ , sobre el eje x y distante 2 unidades del origen, se lleva una perpendicular al eje x, que corta a la primera bisectriz en el punto $A_1$. Desde $A_1$, se lleva otra perpendicular a la 1º bisectriz, que corta al eje "y", en el punto $A_2$, y asi

sucesivamente, hasta completar ocho operaciones semejantes. Uniendo el origen O, con cada punto $A_0$, $A_1$, $A_2$,…, $A_8$, se obtienen 9 vectores.

a) Encontrar las componentes de cada uno de los vectores: $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, ..., \vec{V}_9$.

b) La resultante de los 9 vectores, calcular módulo, componentes y ángulo que forma la resultante con el eje x. ( $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + ... + \vec{V}_9$ )




**Vectores en** $\Re^3$

7. Hallar x e y números reales para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean iguales, dado: $\vec{u}$=(x-2, x, $y^2$) y $\vec{v}$=($-x^2$, y, 3y-2)

8. Dados los vectores $\vec{u} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{v} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$. Determinar:

   a) $2\vec{v} - 3\vec{u}$ b) $|2\vec{u} + 4\vec{v}|$

   b) El producto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$

   c) La proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

   d) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

9. Encontrar el valor de x para que los vectores $\vec{u}$=(2x, 3, x) y $\vec{v}$=(4x+2, -4x,x-1) sean perpendiculares.

10. Determinar el valor del parámetro k para que los vectores: $\vec{x}=k\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}$;
$\vec{y}= -\vec{u}+k\vec{v}+\vec{w}$ sean:

a) Ortogonales b) Paralelos

11. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$

12. De los vectores $\vec{u}$ y v sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$ y $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$ siendo

$\vec{a}$ =(2,-1,0) y $\vec{b}$= (1,3,-1) . Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

13. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se sabe que forman entre si un ángulo de 60°. Calcular $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ si se sabe que: $(\vec{u}-\vec{v})$ es perpendicular a $\vec{u}$; y $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{7}$

14. Sean los vectores $\vec{w}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$, calcular:

a) $\vec{w}\times\vec{v}$ b) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})$

15. a) Sean $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=-3\vec{i}+\vec{k}$ y $\vec{w}=\vec{j}+\vec{k}$, mostrar que:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\bullet\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\bullet\vec{w})\vec{u}$$

b) Sean $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{w}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, encontrar un vector

$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, que cumpla con la condición:

i) $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{w}$; ii) $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$

16.- Sean A (−3, 4, 0), B (3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

**a)** Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

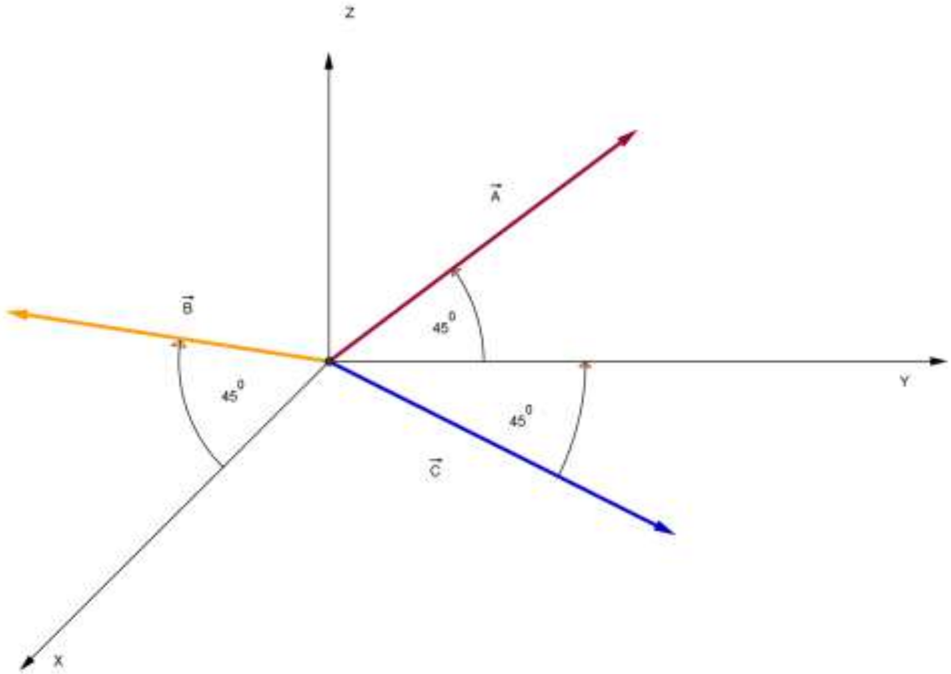
**b)** Calcular el área del triángulo.

17. Encontrar el vector v paralelo a $\vec{u}$=(1,0,-1) tal que el prisma formado por $\vec{u}$; $\vec{v}$=(1,1,0) y $\vec{w}$=(2,0,3) tenga un volumen de 10 $u^3$

18. Los vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ están ubicados como indica la figura y tienen módulo igual a 1.

a) Mostrar que: $(\vec{A}\times\vec{B})\bullet\vec{C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Verificar que los vectores tienen módulo 1




19. Se dan los vértices de una pirámide de base triangular mediante los cuatros vectores: $\vec{A}$ = (0,0,0) ; $\vec{B}$ = (5,0,0) ; $\vec{C}$ = (8,6,0) ; $\vec{D}$= (2,5,7)

Determinar:

a) Los ángulos que las aristas que llegan al vértice D, tomados de dos en dos, forman entre sí.
b) Área lateral total de la pirámide.
c) Volumen del cuerpo.

20. Dados los puntos A (1, 0, 1); B (1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

Hallar si existen valores de a para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

21.Dados los vectores $\vec{u}$= (2, 1, 3), $\vec{v}$= (1, 2, 3), $\vec{w}$= (-1, -1, 0), hallar el producto mixto $[\vec{u}.(\vec{v}\ x\ \vec{w})]$ ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados?

22. Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}$= (7,-1,2) y

$\vec{b}$= (1, 4,-2)

23. Sea el paralelepípedo determinado por $\vec{A}$ = (3, 2, 1), $\vec{B}$ = (1, 1, 2) y

$\vec{C}$ = (1, 3, 3). Hallar: a) Su volumen; b) El área determinada por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

24. Calcula el valor de *m* para que $\vec{u}$= (2, -3, 1), $\vec{v}$= (1, m, 3) y $\vec{w}$= (-4, 5, -1) sean coplanares.

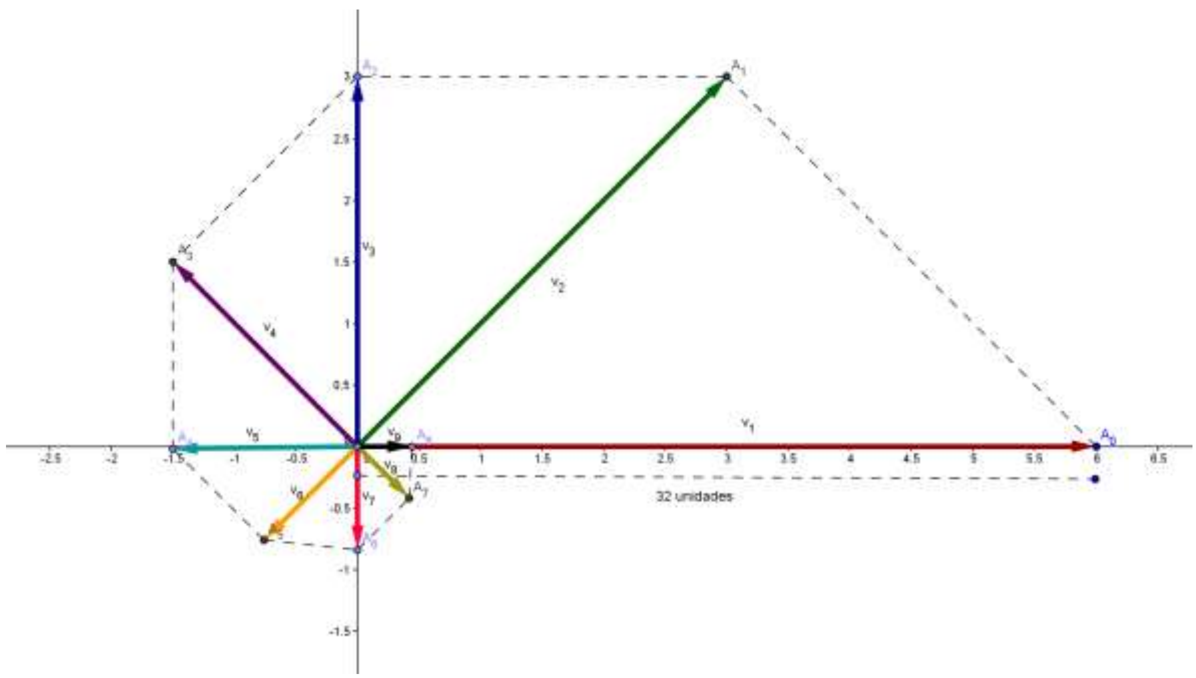
25. Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ =(3,-2,1), $\vec{v}$=(4,3,-6) es rectángulo.

## EJERCICIOS RESUELTOS: VECTORES

1.- Desde el punto $A_0$ del eje x distante 32 unidades del origen, se lleva una perpendicular a la primera bisectriz a la que corta en el punto $A_1$. Desde $A_1$, se lleva otra perpendicular a al eje "y", al que corta en el punto $A_2$, y así sucesivamente, hasta completar ocho operaciones semejantes. Uniendo el origen O, con cada punto $A_0$, $A_1$, $A_2$,…, $A_8$, se obtienen 9 vectores. Encontrar:

a) Las componentes de cada uno de los vectores: $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, ..., \vec{V}_9$.

b) La resultante de los 9 vectores, calcular módulo, componentes y ángulo que forma la resultante con el eje x. $(\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + ... + \vec{V}_9)$

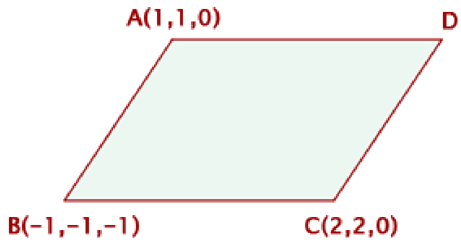



a) Las componentes de cada uno de los vectores son: $\vec{V}_1$= (32, 0) , $\vec{V}_2$= ( 16, 16) , $\vec{V}_3$= (0, 16) , $\vec{V}_4$= ( -8, 8), $\vec{V}_5$= ( -8, 0), $\vec{V}_6$ = ( -4, -4), $\vec{V}_7$ = (0, -4) , $\vec{V}_8$ = (2, -2) , $\vec{V}_9$= (2, 0)

b) $\vec{R} =$ ( 32, -30), $|\vec{R}| = \sqrt{(32)^2 + (-30)^2} = 43{,}86$

$$tg.\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-30}{32} \; ; \varphi = arctg \; 0{,}9375$$

2.- Dada la siguiente figura:




Calcular

**a)** Coordenadas de D para que ABCD sea un **paralelogramo**.

**b)** **Área** de este **paralelogramo**.

a) Por ser la figura un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AD}$ $y$ $\overrightarrow{BC}$ son **equipolentes** (igual módulo, dirección y sentido). D(x, y, z)

(x -1, y -1, z) = (2+1, 2+1, 1) $\Rightarrow$ x -1 = 3; x = 4 ; y -1 = 3; y = 4 ; z = 1

$D(4,4,1)$

b) $\overrightarrow{BC} = (3,3,1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA} = (2,2,1)$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right|$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\, u^2$$

3.- Dados los puntos A (1, 0, 1), B (1, 1, 1) y C (1, 6, a), se pide:

**a)** Encontrar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

**b)** Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

**Resolución**

a) Si A, B y C están alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}$ $y$ $\overrightarrow{AC}$ , tienen la misma dirección, por lo que son paralelos y tienen sus componentes proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 1-1) = (0,1,0)$$

$\overrightarrow{AC} = (1-1, 6-0, a-1) = (0, 6, a-1)$

$(0, 6, a-1) = k\,(0, 1, 0) \qquad a-1=0 \qquad a=1$

**b)** Hallar si existen valores de "*a*" para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

El módulo del **producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual al **área del paralelogramo** construido sobre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} = (a-1)\vec{i}$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3$$

$$3 = \sqrt{(a-1)^2 + 0^2 + 0^2} \qquad 9 = (a-1)^2$$

$$a-1 = 3 \qquad a = 4 \qquad C(1, 6, 4)$$

$$a-1 = -3 \qquad a = -2 \qquad C(1, 6, -2)$$

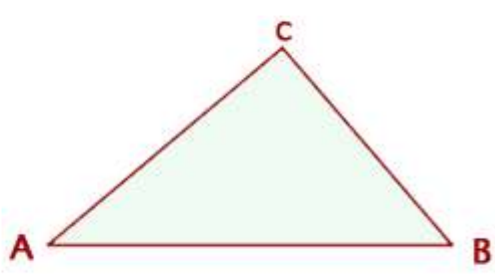
4.- Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

b) Calcular el área del triángulo.

Resolucion

a) Calcular el coseno de cada uno de los tres ángulos del triángulo.




$\overrightarrow{AB} = (3+3, 6-4, 3-0) = (6, 2, 3) \qquad \overrightarrow{BA} = (-6, -2, -3)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1+3, 2-4, 1-0) = (2,-2,1) \qquad \overrightarrow{CA} = (-2,2,-1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1-3, 2-6, 1-3) = (-4,-4,-2) \qquad \overrightarrow{CB} = (4,4,2)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{12-4+3}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{4+4+1}} = \frac{11}{21}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{24+8+6}{\sqrt{36+4+9}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{38}{21}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{-8+8-2}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{16+16+4}} = \frac{-1}{9}$$

b) Calcular el área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \sqrt{16+256} = 4\sqrt{17}$$

5.- Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprobar que este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Hallar el vector $\vec{v} \times \vec{u}$ y compararlo con $\vec{u} \times \vec{v}$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \qquad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

$(2,-1,-7)\cdot(3,-1,1)=6+1-7=0$

$(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v} \qquad (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0$

$(2,-1,-7)\cdot(2,-3,1)=4+3-7=0$

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

6.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,3,4)$ y $\vec{v}=(-1,3,-5)$, y que sea unitario.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 3 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{k}=-27\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-27)^2+6^2+9^2}=\sqrt{846}$$

$$\vec{w}=\left(\frac{-27}{\sqrt{846}},\frac{6}{\sqrt{846}},\frac{9}{\sqrt{846}}\right)$$

7.- Hallar dos vectores de módulo la unidad y ortogonales a (2, −2, 3) y (3, −3, 2).

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+5\vec{j}$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{5^2+5^2+0}=5\sqrt{2}$$

$$\vec{u}=\left(\frac{5}{5\sqrt{2}},\frac{5}{5\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\vec{v}=\left(\frac{-5}{5\sqrt{2}},\frac{-5}{5\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$$