ANÁLISIS MATEMÁTICO I –2do. Parcial Anual 2021 – curso K1025

Todas sus respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. NO puede utilizar calculadoras programables ni tablas. La resolución del examen debe ser escrita en tinta. Los gráficos deben ser fundamentados realizando un breve estudio de la función.

1) Analice si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F). **Justifique las respuestas**: si es F, alcanza con que de un contraejemplo; si es V proporcione un argumento basado en las herramientas teóricas que conoce.

a) La serie $1+\frac{2}{3}(x+3)+\frac{1}{3}(x+3)^2+\frac{4}{27}(x+3)^3+\frac{5}{81}(x+3)^4+...$ converge en todo el eje real

b) NO existe valor real de a para que $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)}=\frac{1}{3}$

2) Calcule el área limitada por las rectas $x=1$ y $x=0$, la curva $y=\frac{x}{1+x^2}$ y la recta tangente a $f(x)=1/x$ en $x=1$. Justifique su respuesta.

3) a)Analice la convergencia de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n>0\ \ \forall n$, sabiendo que su suma

n-ésima parcial viene dada por $S_n=\left(\frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1}\right)^{\frac{n^2+6}{n+20}}$

b) Calcule c_6.

4) Si se sabe que la función $g(x)$ es de clase C^2, determine el Polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $x_0=1$ asociado a la función g defina por $x^3.g(x)=4sen(\pi x)+3\int_1^x g(t)dt$.

Justifique su respuesta.

5) Analice la convergencia de $\int_0^{+\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}dx$.

CRITERIO DE APROBACIÓN: Para aprobar el examen (nota SEIS) deberá resolver correctamente al menos 3 de los 5 problemas planteados.

- Dispone de 2 (dos) horas para la resolución del examen. Desde 9.00 a 11.00 hs.
- A las 11.15 hs. finaliza el plazo para subir el examen resuelto al Aula Virtual en la Actividad SEGUNDO PARCIAL.
- Debe resolver cada ejercicio en una sola hoja.
- Firmar al pie de cada carilla.
- Compaginar las hojas escaneadas o con foto y convertirlas en un archivo pdf (todas juntas en un solo archivo pdf)
- Letra manuscrita legible y gráficos confeccionados a mano alzada.
- Indicar el número de hojas entregadas.
- En todas las hojas debe figurar claramente nombre y apellido y Nro. de legajo.
- Los Profesores estarán conectados en ZOOM para responder consultas individuales y dificultades técnicas para subir el examen.

Segundo Parcial 2021 ①

① V o F

a) La serie $1+\frac{2}{3}(x+3)+\frac{1}{3}(x+3)^2+\frac{4}{27}(x+3)^3+\frac{5}{81}(x+3)+\cdots$ CV en todo el eje real (F)

$$1+\frac{2}{3}(x+3)+\frac{3}{9}(x+3)^2+\frac{4}{27}(x+3)^3+\frac{5}{81}(x+3)^4+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{3^n}\cdot(x+3)^n$$

Por Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)(x+3)^n}{3^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n+1}\cdot\sqrt[\cancel{n}]{|x+3|^{\cancel{n}}}}{\sqrt[\cancel{n}]{3^{\cancel{n}}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(1+\frac{1}{n})}\cdot|x+3|}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\cdot|x+3|}{3}=$$

$$\frac{|x+3|}{3}<1\Rightarrow -3<x+3<3\Rightarrow -6<x<0$$

No hace falta analizar los extremos, porque la afirmación es falsa, pero igual los analizo así practicamos:

- $x=-6$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-3)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^n\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1) \quad \text{alternada}$$

Por Leibniz: $\lim_{n\to\infty} n+1=\infty\Rightarrow$ la serie no es CV

- $x=0$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ DV

ya que $\lim_{n\to\infty} n+1=\infty\neq0$

③ a) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n > 0$ $\forall n$ sabiendo que $S_n = \left(\frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1}\right)^{\frac{n^2+6}{n+20}}$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1}\right)^{\frac{n^2+6}{n+20}} = (\to 1)^{(\to\infty)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1} - 1\right)^{\frac{n^2+6}{n+20}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-2n+1}{3n-1}}\right)^{\frac{n^2-2n+1}{3n-1}}\right]^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n^2-2n+1}\cdot\frac{n^2+6}{n+20}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+18n-n^2-6}{n^3+20n^2-2n^2-40n+20}} = \underline{e^3} = S$$

C. A.

$$\frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1} - 1 = \frac{n^2+n-6-(n^2-2n+1)}{n^2-2n+1} = \frac{\cancel{n^2}+n-6-\cancel{n^2}+2n-1}{n^2-2n+1} =$$

$$= \frac{3n-1}{n^2-2n+1} = \frac{1}{\frac{n^2-2n+1}{3n-1}}$$

b) Calcule c_6

$S_1 = c_1$

$S_2 = c_1 + c_2 = S_1 + c_2 \Rightarrow S_2 - S_1 = c_2$

$S_3 = c_1 + c_2 + c_3 = S_2 + c_3 \Rightarrow S_3 - S_2 = c_3$

$\vdots$

$S_n = S_{n-1} + c_n \Rightarrow \underline{c_n = S_n - S_{n-1}}.$

$$c_6 = S_6 - S_5 = \left(\frac{6^2+6-6}{6^2-2.6+1}\right)^{\frac{6^2+6}{6+20}} - \left(\frac{5^2+5-6}{5^2-2.5+1}\right)^{\frac{5^2+6}{5+20}} = \dots$$

hacer la cuenta

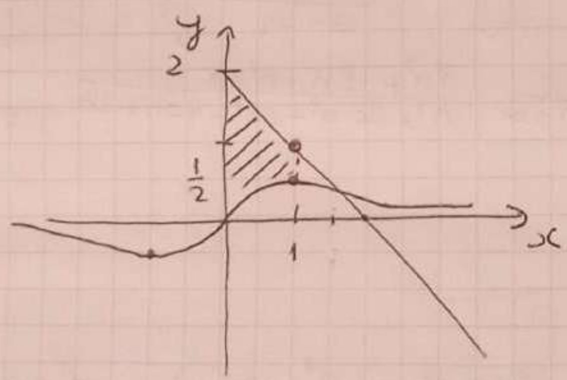
② Área entre $x=1$, $x=0$, $y=\frac{x}{1+x^2}$ y la RT a $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x=1$

Justificar.

Realizar el análisis funcional de $y=\frac{x}{1+x^2}$ y

observar que presenta un máx. relativo (local) y

absoluto (global) cuando $x=1$.



$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(1)=1$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1)=-1$

RT: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=-1\,(x-1)+1$

$y=-x+2$

$$|A| = \int_0^1 \left(-x+2-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = -\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}\ln(2)-0 = \frac{3}{2}-\ln(\sqrt{2})$$

C.A.

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{dz}{2}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$z=1+x^2$

$dz=2x\,dx$

$\frac{dz}{2}=x\,dx$

① b) NO existe a / $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)} = \frac{1}{3}$ (F)

Esta integral podría ser impropia si:

$\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+a) \to 0$ cuando $x \to (-a)^2$

$\sqrt{x}=0$ ó $\sqrt{x}+a=0$

$\sqrt{x}=-a$

$x=(-a)^2$

Como $1<x<4$

$1<\sqrt{x}<2$

$1<-a<2$

$-1>a>-2$

Entonces si $a\in[-2;-1] \Rightarrow \displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+a)}$ es impropia

Veamos si $a\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+a)$ nunca es cero

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)} = \int \frac{2\,dz}{z} = 2\ln|z|+C = 2\ln|\sqrt{x}+a|+C =$$

$$= 2\ln(\sqrt{x}+a)+C$$

$z=\sqrt{x}+a$

$dz=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$2\,dz=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+a)} = 2\ln(\sqrt{x}+a)\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left[\ln(2+a)-\ln(1+a)\right] =$$

$$= 2\ln\left(\frac{2+a}{1+a}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{2+a}{1+a}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{2+a}{1+a}\right)^2} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{2+a}{1+a}\right)^2 = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{2+a}{1+a} = e^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{e}\,(1+a) = 2+a \Rightarrow \sqrt[6]{e} + a\sqrt[6]{e} = 2+a$$

$$a\sqrt[6]{e} - a = 2-\sqrt[6]{e}$$

$$a(\sqrt[6]{e}-1) = 2-\sqrt[6]{e}$$

$$a = \frac{2-\sqrt[6]{e}}{\sqrt[6]{e}-1}$$ sí existe

Segundo Parcial 2021

4 $P_{2,g(x),1}(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \dfrac{g''(1)}{2!}(x-1)^2$

$$x^3 \cdot g(x) = 4 \cdot sen(\pi x) + 3\int_1^x g(t)\,dt \quad \text{I}$$

deriva m.a m. $\quad 3x^2 \cdot g(x) + x^3 \cdot g'(x) = 4\cos(\pi x)\cdot \pi + 3\cdot g(x)$

$$(3x^2-3)\,g(x) + x^3 g'(x) = 4\pi\cos(\pi x) \quad \text{II}$$

deriva m.a m. $\quad 6x \cdot g(x) + (3x^2-3)\cdot g'(x) + 3x^2 g'(x) + x^3 g''(x) = -4\pi^2 sen(\pi x) \quad \text{III}$

en I, si $x=1$:

$$1\cdot g(1) = 4\cdot \underbrace{sen(\pi)}_{0} + \underbrace{3\int_1^1 g(t)\,dt}_{0} = 0 \Rightarrow \underline{g(1) = 0}$$

en II, si $x=1$:

$$\underbrace{(3-3)\cdot g(1)}_{0} + g'(1) = 4\pi\overbrace{\cos(\pi)}^{-1} \Rightarrow \underline{g'(1) = -4\pi}$$

en III, si $x=1$:

$$6\cdot g(1) + 0\cdot g'(1) + 3\cdot\overbrace{g'(1)}^{-4\pi} + g''(1) = \overbrace{-4\pi^2 \underbrace{sen(\pi)}_{0}}^{0}$$

$$\Rightarrow \underline{g''(1) = 12\pi}$$

Luego, $\underline{P_{2,g(x),1}(x) = -4\pi(x-1) + 6\pi(x-1)^2}$

(5) Analizar la CV de $\int_0^{+\infty} \frac{2-x}{e^{-x}}\, dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2-x}{e^{-x}}\, dx = \int_0^{+\infty} (2-x) \cdot e^{x}\, dx = -\int_0^{+\infty} (x-2)\, e^{x}\, dx =$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} (x-2)\, e^{x}\, dx = -\lim_{b \to +\infty} (x-3)\, e^{x} \Big|_0^{b} =$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} \Big[\overbrace{(b-3) \cdot e^{b}}^{\to +\infty} \underbrace{- (-3) \cdot e^{0}}_{+3} \Big] = -\infty \quad \underline{DV}$$

C.A.

$u = x-2 \qquad dv = e^{x}\, dx$
$du = dx \qquad v = e^{x}$

$$\int (x-2)\, e^{x}\, dx = (x-2) \cdot e^{x} - \int e^{x}\, dx = (x-2-1)\, e^{x} + c$$
$$= (x-3) \cdot e^{x} + c$$