30/04/2025

APLICACIONES DE VECTORES

RECTA en R^3 - RECTA en R^2 - PLANO

DISTANCIAS - ANGULOS - POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

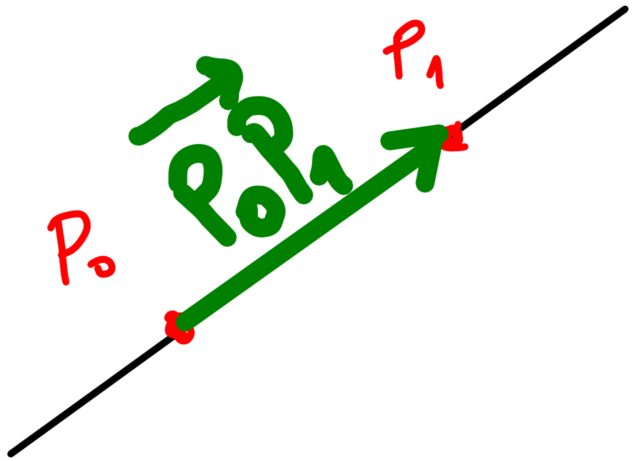
Ecuaciones de la recta en el espacio

$$\begin{cases} P_0(x_0, y_0, z_0) \in \text{recta} \\ \vec{d} = (a, b, c) \ \text{vector director} \end{cases}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{d}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



Dados dos puntos pertenecientes a la recta

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{P_1} - \vec{P_0}$$

Vector Dirección de la recta

Ecuaciones de la recta en el plano

$$\begin{cases} P_0(x_0, y_0) \in \text{recta} \\ \vec{d} = (A, B) \end{cases}$$

$y = mx + b$

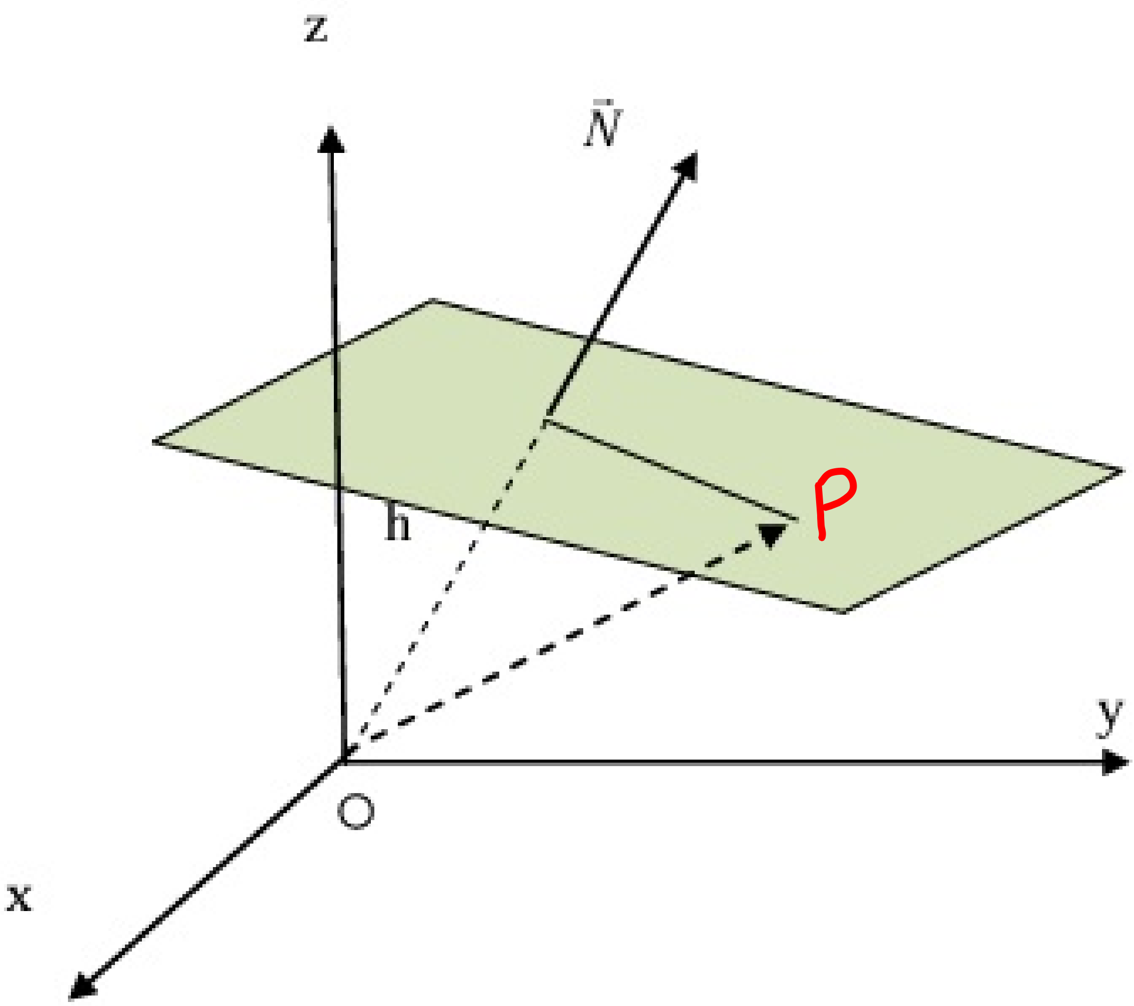
$Ax + By + C = 0$

$$\vec{P} = \vec{P_0} + \lambda \vec{d}$$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda (A, B)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$$



Recordemos que, el producto escalar se puede escribir:

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = \left|\vec{N}\right|.\ proyeccion_{\vec{N}}\ \vec{P}\ .$$

Si llamamos h $= proyeccion_{\vec{N}} \quad \vec{P}$

h= distancia desde el origen al plano.

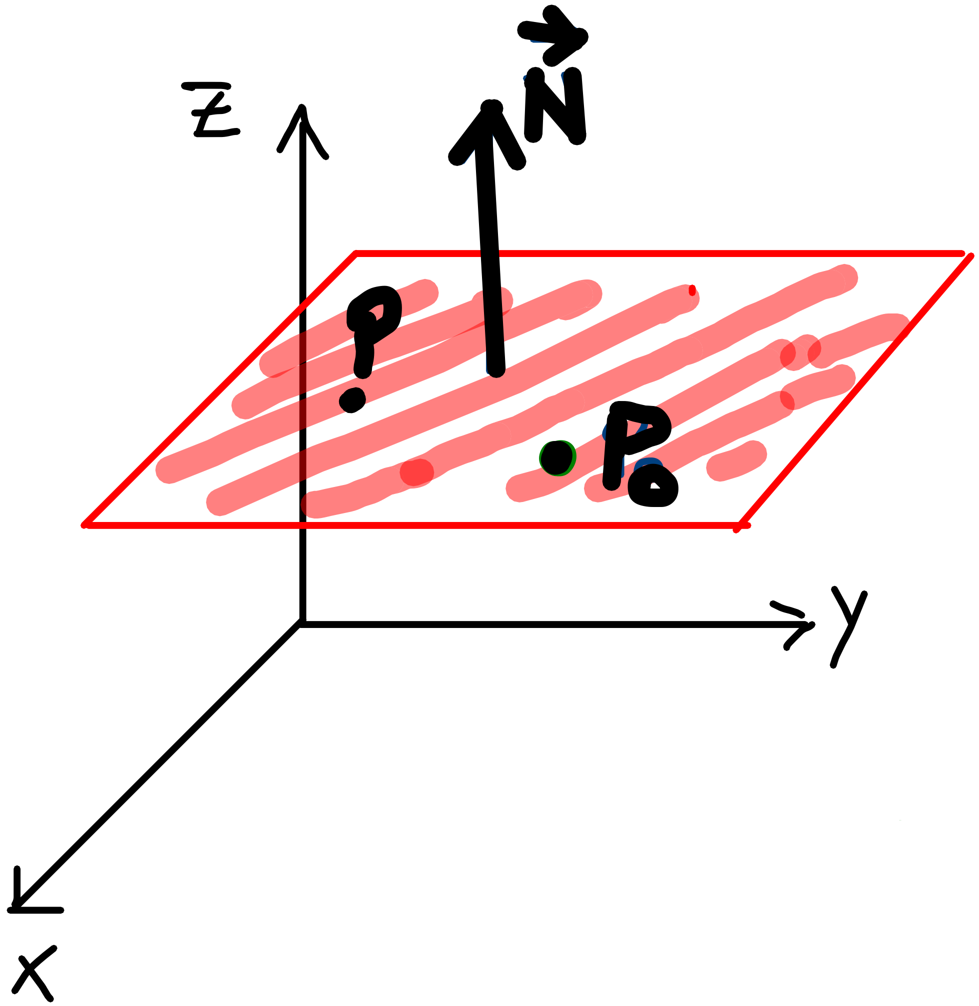
$$\therefore\ \vec{N} \cdot \vec{P} = \left|\vec{N}\right| \cdot h$$

Como modulo de $\vec{N}$ y h son constantes independientes de $\vec{P}$,

$\left|\vec{N}\right| \cdot \mathrm{h} = \mathrm{cte}$, que llamamos $\left|\vec{N}\right| \cdot \mathrm{h} = \mathrm{D}$,

PLANO COMO APLICACION DE VECTORES

Ecuación general de los planos que pasan por un punto

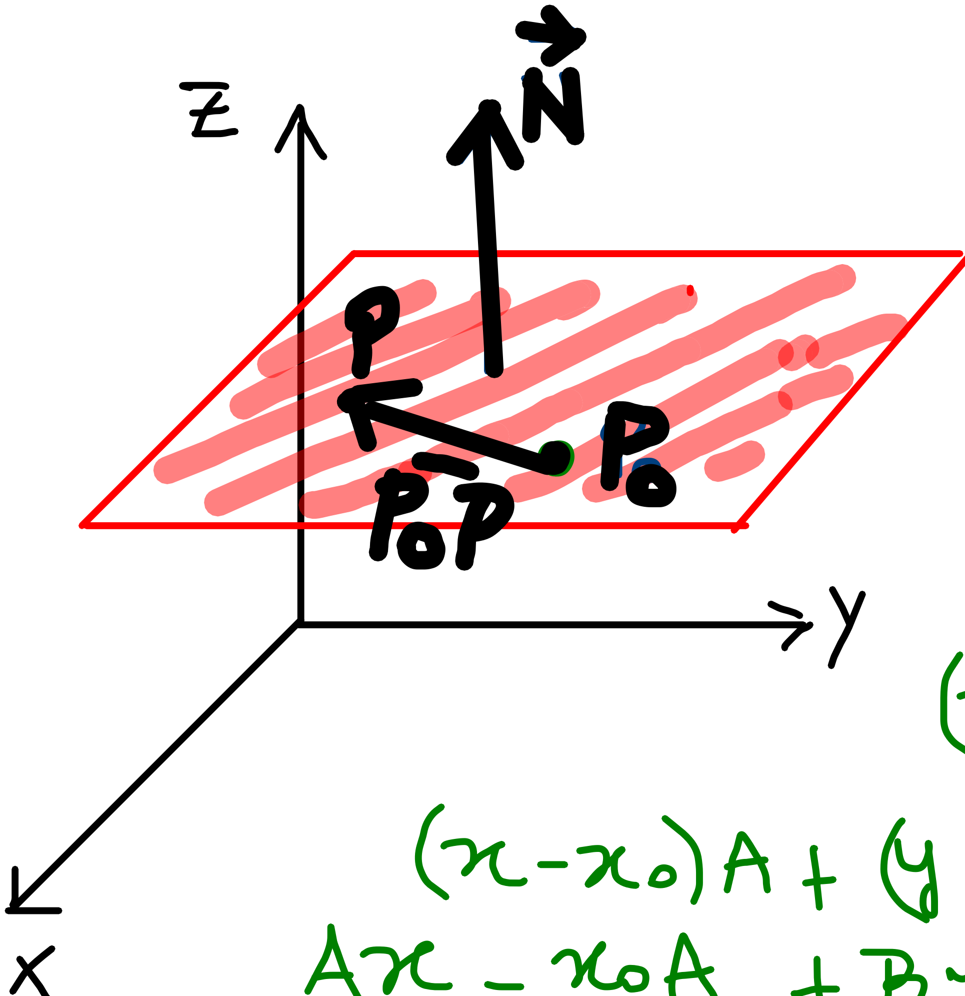


$P_o(x_o, y_o, z_o)$ $\quad \vec{N} = (A, B, C)$

$P(x, y, z)$ $\quad \overrightarrow{P_oP} = P - P_o$

PLANO COMO APLICACION DE VECTORES

Ecuación general de los planos que pasan por un punto



$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \vec{N} = (A, B, C)$

$P(x, y, z)$ $\quad \overrightarrow{P_0P} = P - P_0$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \iff \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$$

$$(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N} = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$$

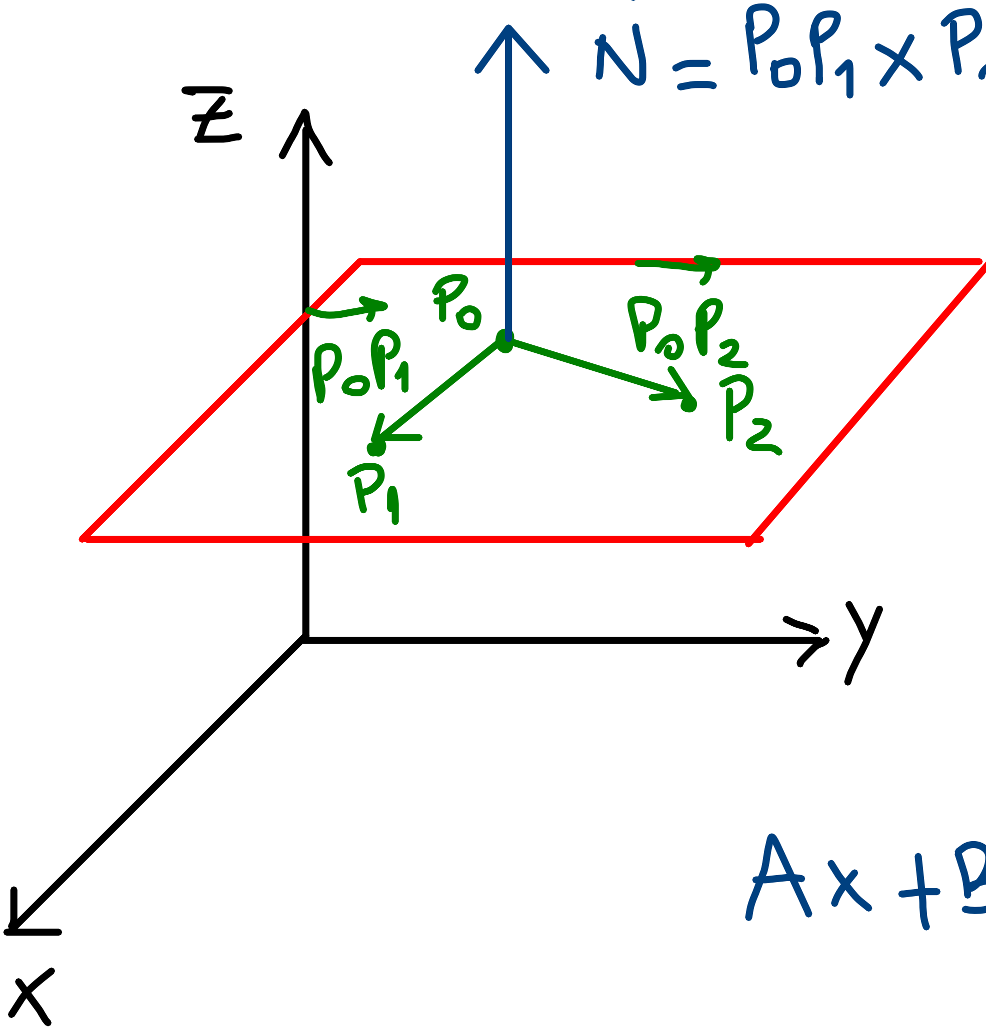
$$Ax - x_0A + By - y_0B + Cz - z_0C = 0$$

$$Ax + By + Cz - \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)} = 0$$

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

PLANO A PARTIR DE 3 PUNTOS CONOCIDOS

$$\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$



$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$(P - P_0) \cdot \vec{N} = 0$$

$$(P - P_0)\left(\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right) = 0$$

$$Ax + By + Cz = D$$

Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{N} = (2,1,0)$ **y pasa por el punto** $P_0(-1,0,2)$

$$\vec{N} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(2,1,0) \cdot (x+1,\ y-0,\ z-2) = 0$$

$$2(x+1) + y + 0(z-2) = 0$$

$$2x + 2 + y = 0$$

$$\boxed{2x + y + 2 = 0}$$

1- Encontrar la ecuación del plano, perpendicular al vector (2,-1,2) y cuya distancia al origen es 6.

$$\vec{N} = (2,-1,2) \qquad h = 6$$

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = D$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = |\vec{N}| \cdot h$$

$$|\vec{N}| = 3$$

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = 3 \cdot 6$$

$$(2,-1,2)(x,y,z) = 18$$

$$\boxed{2x - y + 2z = 18}$$

Determinar la ecuación del plano que pasa por $\underbrace{(-1,0,4)}$ y es $\perp$ al vector $\underbrace{(5,3,-2)}_{\vec{N}}$

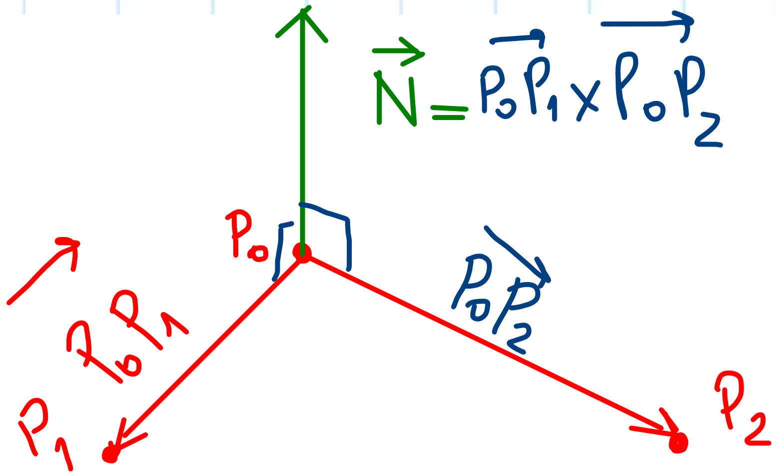
$$5x+3y-2z=\vec{P_0}\cdot\vec{N}$$

$$=(-1)\cdot 5+0\cdot 3+4\cdot(-2)$$

$$5x+3y-2z=-13$$

Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos (1 , 0, 3); (-2,-4, 5) y (2,-1,3).

$P_0 \quad P_1 \quad P_2$



$$\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

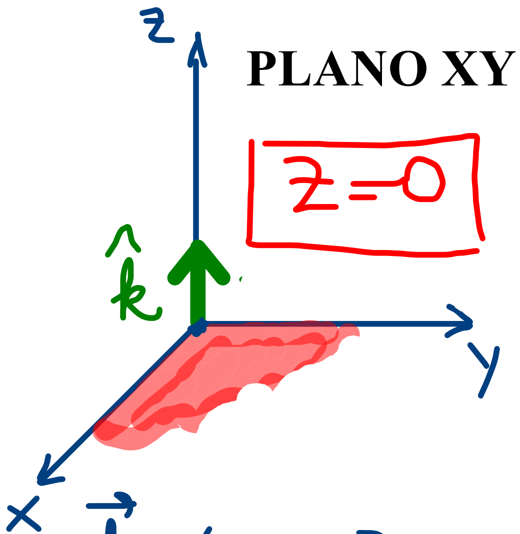
$$\overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0$$
$$= (-2,-4,5) - (1,0,3)$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} = (-3,-4,2)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0$$
$$= (2,-1,3) - (1,0,3)$$
$$\overrightarrow{P_0P_2} = (1,-1,0)$$

$$\vec{N} = (2, 2, 7)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & -4 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

ECUACIONES DE LOS PLANOS COORDENADOS



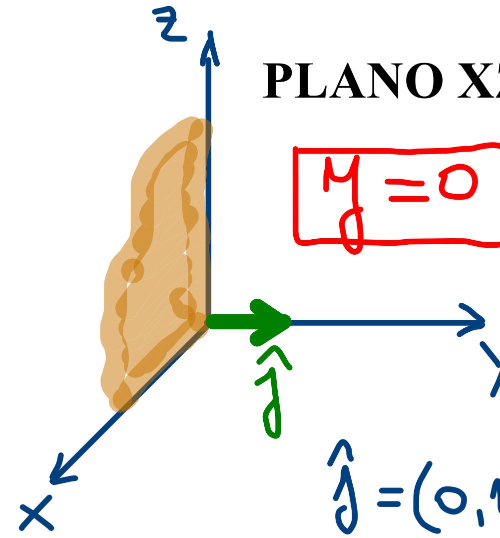
PLANO XY

$\boxed{z=0}$ Plano $\parallel$ Plano XY

$z = k$

$k \in \mathbb{R}$

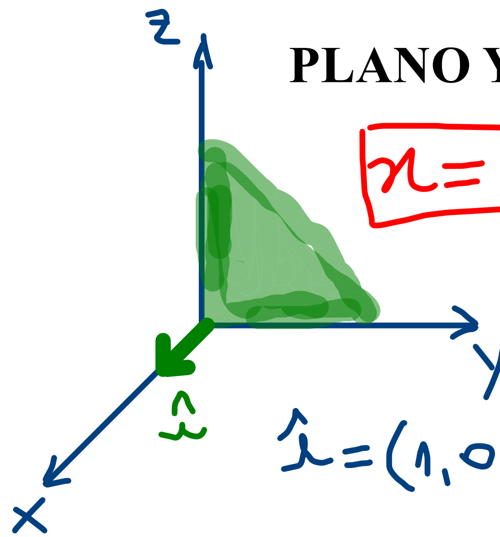
$\vec{k} = (0,0,1)$



PLANO XZ

$\boxed{y=0}$ $\parallel$ $y = k$

$\hat{j} = (0,1,0)$

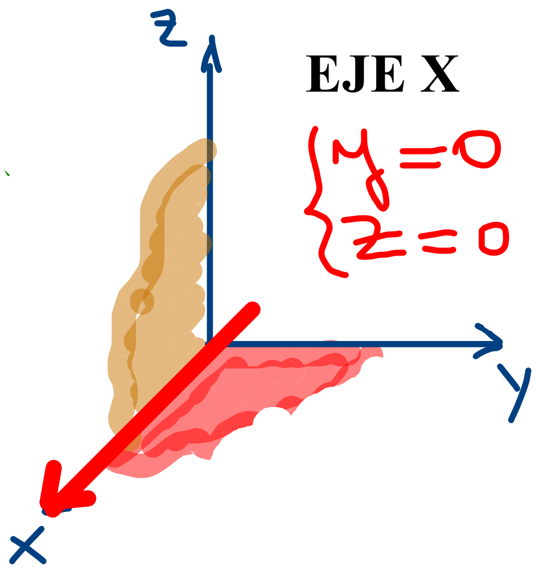


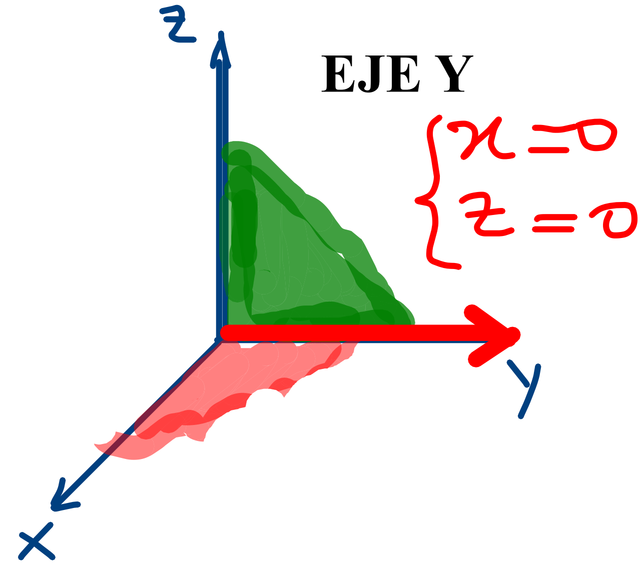
PLANO YZ

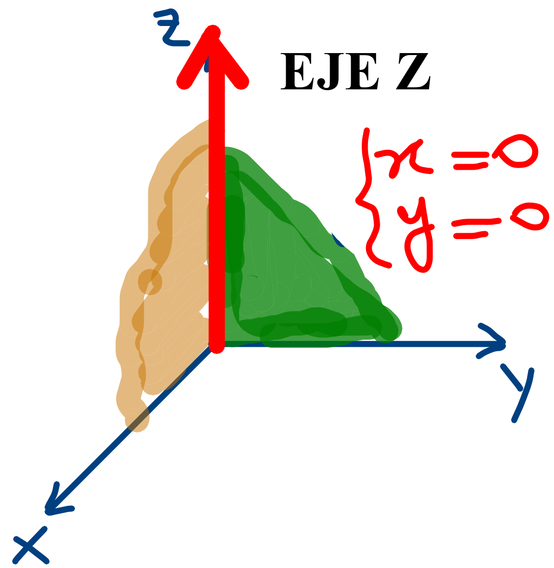
$\boxed{x=0}$ $\parallel$ $x = k$

$\hat{i} = (1,0,0)$

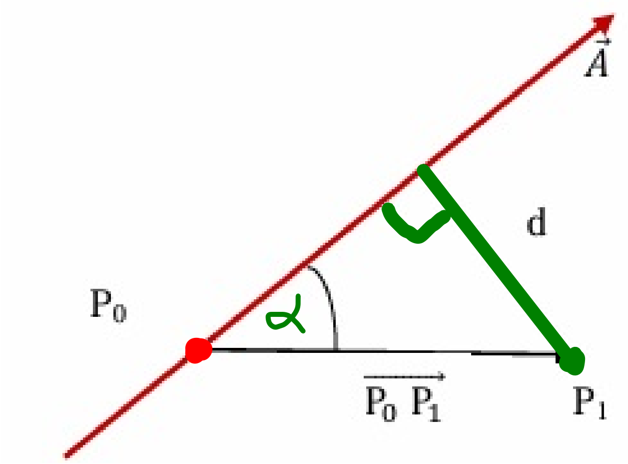
ECUACIONES DE LOS EJES COORDENADOS







Distancia de un punto a una recta



$$\therefore \quad \boxed{d = \frac{\left|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times \vec{A}\right|}{\left|\vec{A}\right|}}$$

obrev

$\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \operatorname{sen}\alpha$

Donde $\vec{A}$, $\vec{P}_0$ y $\vec{P}_1$, es todo conocido.

Deduccion

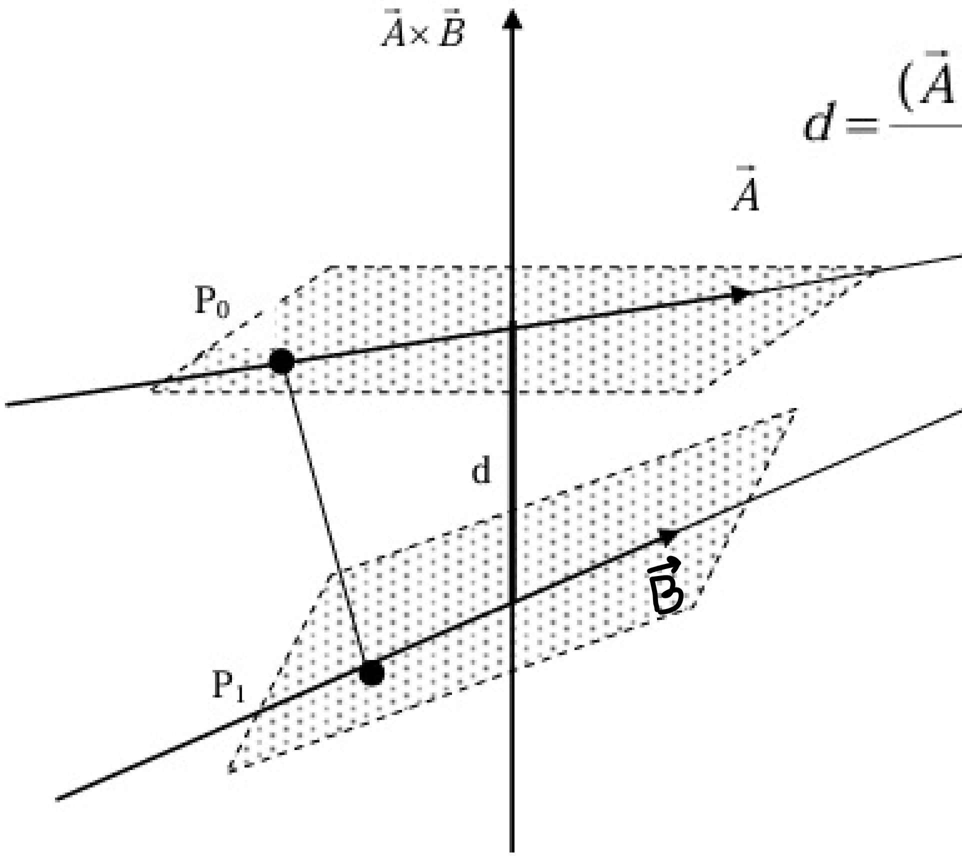
$$d = |\overrightarrow{P_0P_1}| \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{|\overrightarrow{P_0P_1}|}$$

$$d = |P_0P_1| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

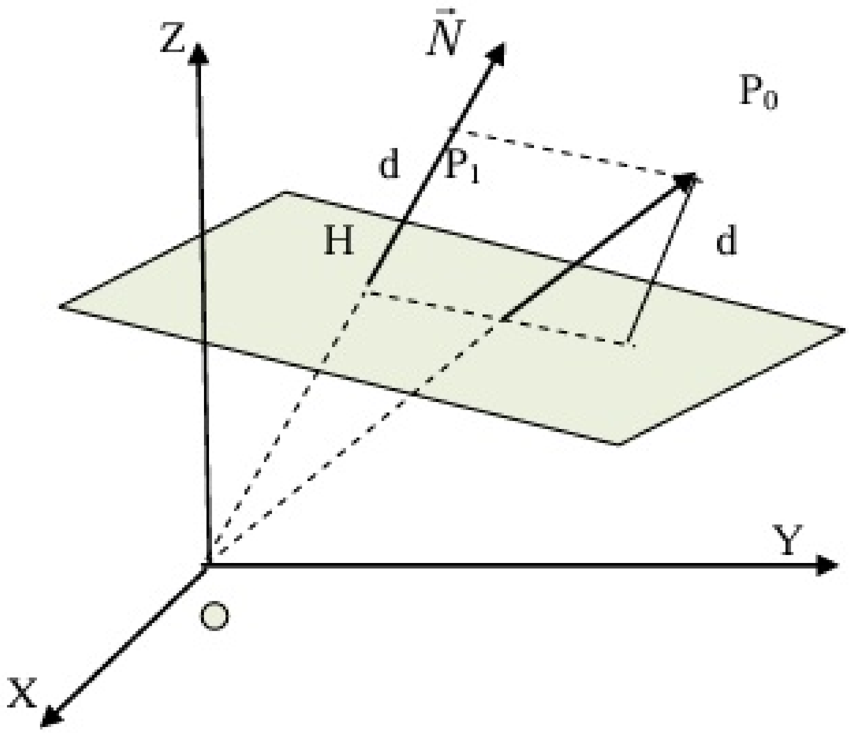
$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}| . |\vec{A}| \operatorname{sen}\alpha}{|\vec{A}|} = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{A}|}{|\vec{A}|}$$

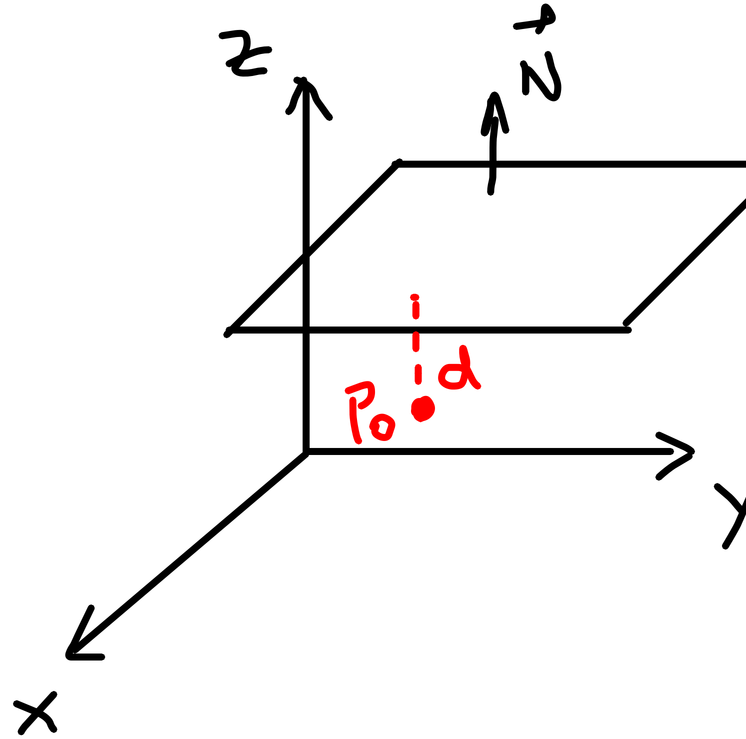
Mínima distancia entre dos rectas alabeadas



$$d=\frac{(\vec{A}\times\vec{B})\bullet(\vec{P}_1-\vec{P}_0)}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$ ***Mínima distancia entre las dos rectas***

Distancia de un punto al plano





$$\operatorname{dist}(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{N}|}$$

Calcular la dist. entre el punto $P(2,1,0)$ y el plano $\pi: 2x-3y+z=5$

Paralelismo, perpendicularidad y ángulo

El ángulo entre las rectas es el ángulo entre los vectores dirección de las rectas:

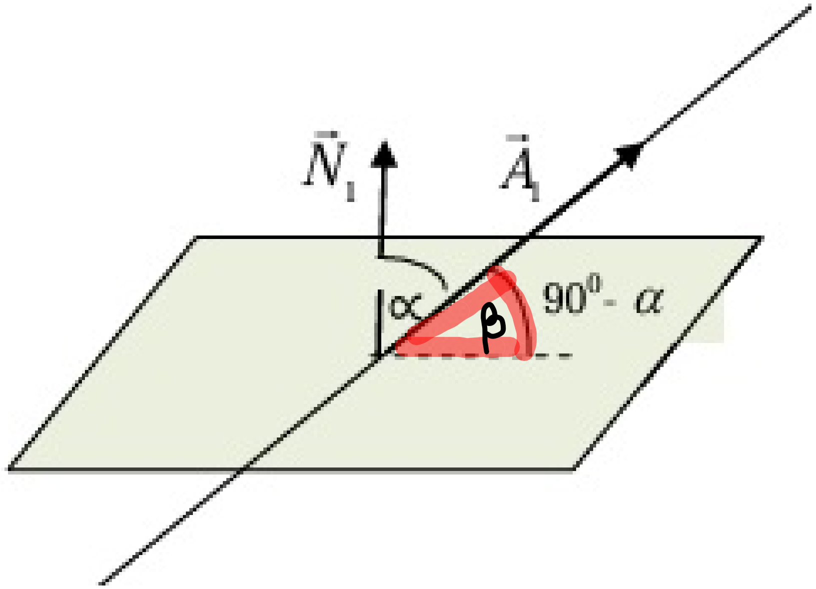
- $R_1 // R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{A}_2$
- $R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$

El ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales a ambos planos:

- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 // \vec{N}_2$
- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$

El ángulo entre la recta R_1 ***y el plano*** π_1 ***es el ángulo complementario del que forman el vector dirección de la recta y el vector normal al plano.***

ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO - POSICIONES RELATIVAS

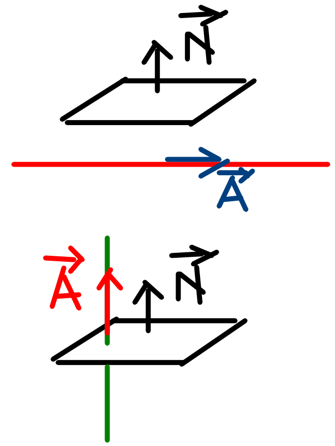


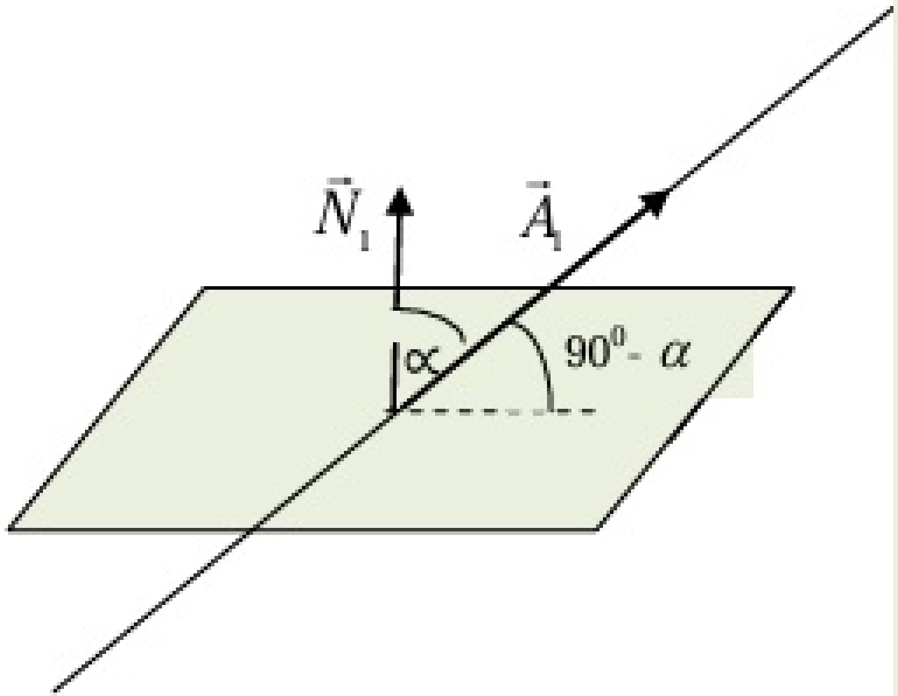
$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{A}_1}{|\vec{N}_1| \cdot |A_1|}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$R_1 // \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{N}_1$$

$$R_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{N}_1$$





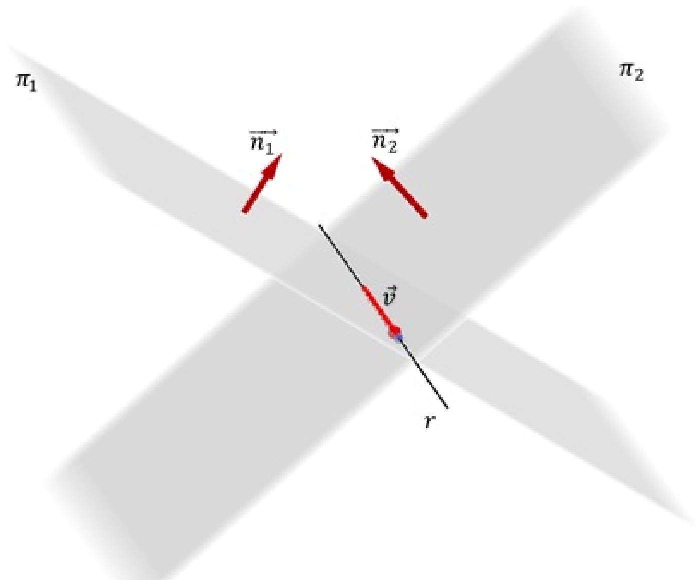
Dado que $\propto \, = \, \prec (\, \vec{N}_1, \, \vec{A}_1)$, entonces el ángulo que forma la recta con el plano es 90^0- α .

Como cos $\propto \, = \, \dfrac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{A_1}}{|\vec{N}_1||\vec{A}_1|}$ = sen (90^o- $\propto$) .

Entonces: $R_1 \, // \pi_1 \, \Leftrightarrow \, \vec{A}_1 \, \perp \, \vec{N}_1$

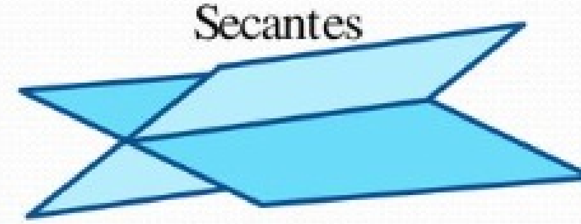
$R_1 \, \perp \, \pi_1 \, \Leftrightarrow \, \vec{A}_1 // \, \vec{N}_1$

Encontrar la ecuación de la recta intersección de los planos π_1) $2x + y - z = 3$ y π_2) $3x + 2y + 2z = 0$.



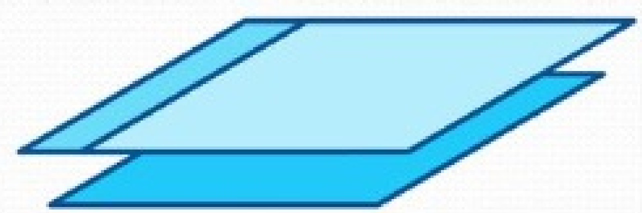
POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANO

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &: Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 &: A'x + B'y + C'z = D' \end{aligned}\right\} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right)$$

Rango(M)	**Rango(M^*)**	**Sistema**	**Posición relativa**
1	1	Compatible indetermin ado 2 grados de libertad	Coincident es 
1	2	Incompatib le	Paralelos 
2	2	Compatible indetermin ado 1 grado de libertad	Secantes 

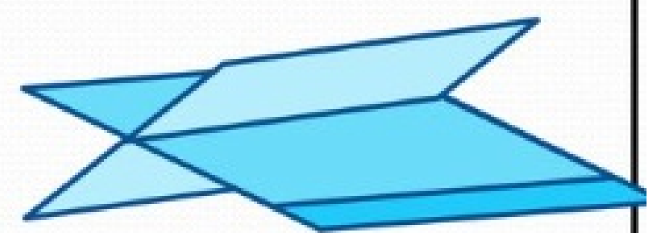
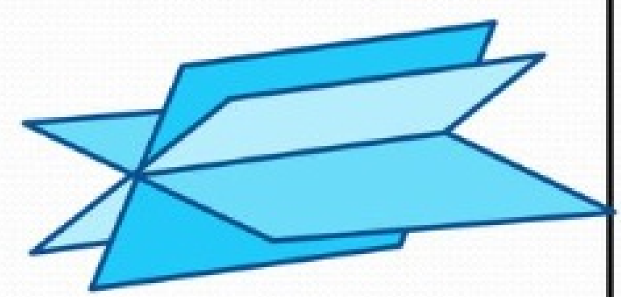
POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANO

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi_3 : A''x + B''y + C''z = D''\end{array}\right\} M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

Rango(M)	**Rango(M*)**	**Sistema**	**Posición relativa**
1	1	Compatible indeterminado 2 grados de libertad	Coincidentes 
1	2	Incompatible	Paralelos  2 Paralelos - 1 coincidente 

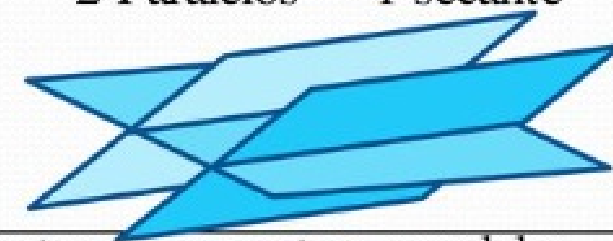
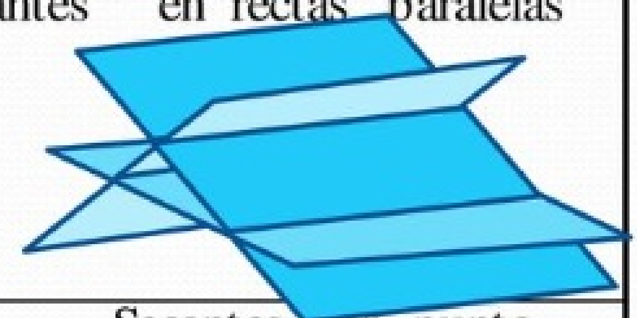
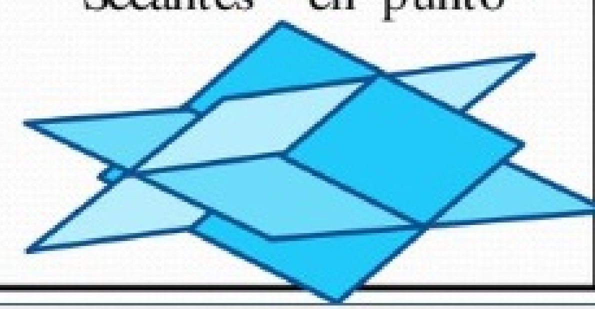
POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANO

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi_3 : A''x + B''y + C''z = D'' \end{array}\right\} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

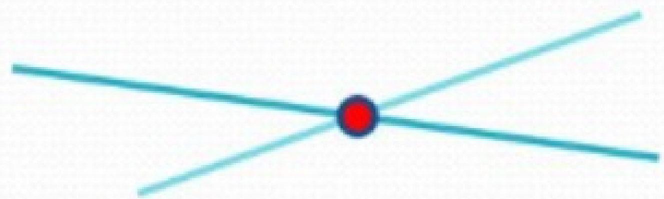
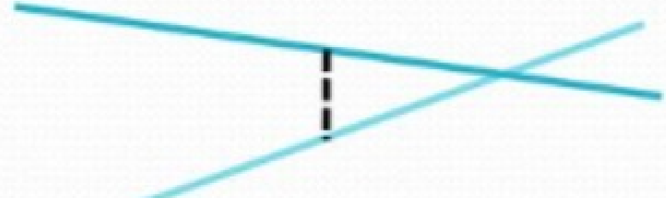
Rango(M)	Rango(M*)	Sistema	Posición relativa
2	2	Compatible indeterminado 1 grado de libertad	2 Coincidentes - 1 secante 
			Secantes en recta 

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANO

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi_3 : A''x + B''y + C''z = D''\end{array}\right\} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

Rango(M)	**Rango(M^*)**	**Sistema**	**Posición relativa**
2	3	Incompatible	2 Paralelos - 1 secante  Secantes en rectas paralelas 
3	3	Compatible determinado	Secantes en punto 

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Posición relativa	
Coincident es	
Paralelas	
Secantes	
Se cruzan	

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

$$\left.\begin{array}{l} r_1: \left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{array}\right\} \\ r_2: \left.\begin{array}{l} A''x + B''y + C''z = D'' \\ A'''x + B'''y + C'''z = D''' \end{array}\right\} \end{array}\right\} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{array}\right)$$

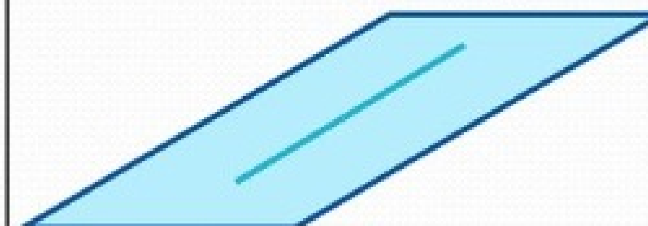
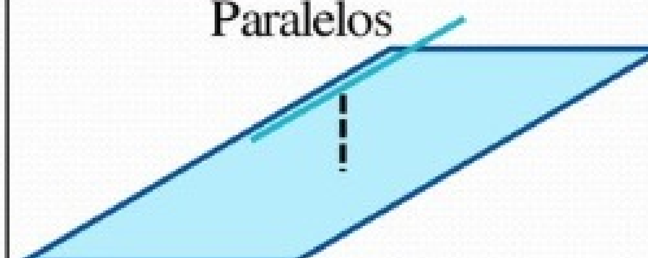
Rango(M)	Rango(M*)	Sistema	Posición relativa
2	2	Compatible indeterminado 1 grado de libertad	Coincidentes
2	3	Incompatible	Paralelas
3	3	Compatible determinado	Secantes
3	4	Incompatible	Se cruzan

POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO

$$\pi: Ax + By + Cz = D$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{array} \right.$$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array} \right)$$

Rango(M)	**Rango(M*)**	**Sistema**	**Posición relativa**
2	2	Compatible indeterminado 1 grado de libertad	Recta contenida en plano 
2	3	Incompatible	Paralelos 
3	3	Compatible determinado	Secantes 

Encontrar las ecuaciones de la recta:

2) a) Que pasa por el punto $A(1,2,1)$, en la dirección del vector $\vec{u}=(4,5,-1)$

$$(x,y,z)=(1,2,1)+\lambda(4,5,-1)$$ Ec. Vectorial

$$\begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2+5\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$ Ec. Paramétrica

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{-1}$$ Ec. cartesiana

2) a) Que pasa por el punto $A(1,2,1)$ y tiene dirección del vector $\vec{u} = (4,5,-1)$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} \quad \wedge \quad \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$5(x-1) = 4(y-2) \qquad -1(y-2) = 5(z-1)$$

$$5x-5 = 4y-8 \qquad -y+2 = 5z-5$$

$$5x-4y+3 = 0 \qquad -y-5z+7 = 0$$

$$\begin{cases} 5x-4y+3=0 \\ -y-5z+7=0 \end{cases}$$

Ec. Implícita