ANÁLISIS MATEMÁTICO I Primer Parcial – Anual – Julio 2023

UTN.BA

CURSO: **R1022**

APELLIDO Y NOMBRE: ____________________ MAIL: ____________________

CORRIGIÓ: ____________________ REVISÓ: ____________________

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4	5	Calificación

Todas sus respuestas deben ser **justificadas adecuadamente** para ser tenidas en cuenta.

Condición mínima de aprobación: **6 puntos**. (50% del examen correctamente resuelto).

Condición mínima de aprobación para promocionar: **8 puntos**. (70% del examen correctamente resuelto).

1a) $sen(x) = ln\left(\frac{x}{2}\right)$ tiene solución para algún x positivo. ¿Es V o F?

1b) Dada la función $\begin{cases} x = v\cos(\alpha)\,t \\ y = v\,sen(\alpha)\,t - 4.9\,t^2 \end{cases}$, $0 \le t \le t\ alcance$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, donde v es la velocidad constante y α es un ángulo de disparo. La misma describe la trayectoria de un proyectil que se mueve en un plano. Halle el ángulo α que asegure al mayor alcance horizontal (x máximo).

2a) Demuestre que la recta tangente a la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ en el punto $P(a,b)$ es la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

2b) La recta tangente al gráfico de f en $x = 1$ es $y = 3x - \frac{5}{2}$. Halle la ecuación de la recta normal en $x = 1$ de $h(x) = f(2x\,f(x))$.

3a) Halle la ecuación de las asíntotas lineales a la gráfica de $f(x) = e^{-x} senx + x$

3b) Sea f continua en $x = 2$ y sea $g : \Re \to \Re \,/\, g(x) = f(x)\,sen(x^2 - 4)$. Calcule, si existe, $g'(2)$

4) Halle los valores reales de k que aseguren que $f(x) = \begin{cases} 2 + k\,\frac{1-\cos x}{x} & si\ \ x < 0 \\ k^3 x + 2 & si\ \ x \ge 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$

5) Determine los extremos absolutos de $f : [1, 5] \to \Re \,/\, f(x) = \frac{3\ln x}{x}$

1a) Afirmación verdadera.

$$h(x) = \operatorname{sen} x - \ln\left(\frac{x}{2}\right), \quad x>0 \text{ continua}$$

$$\left.\begin{array}{l} h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ h(\pi) = 0 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_0 / h(x_0) = 0$$

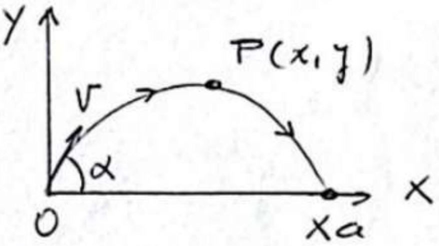
$$x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

En x_0 : $h(x_0) = 0 = \operatorname{sen}(x_0) - \ln\left(\frac{x_0}{2}\right)$

$\therefore$ $\operatorname{sen}(x_0) = \ln\left(\frac{x_0}{2}\right)$ con $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$

1b) $\begin{cases} x = v.\cos\alpha \; t \\ y = v.\operatorname{sen}\alpha \; t - 4{,}9t^2, \quad t \geq 0 \text{ y } t \leq t_{alc}. \end{cases}$

además $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



El punto $(x_a, 0)$ se alcanza cuando $y(t) = 0$

$$v \operatorname{sen}\alpha \, t - 4{,}9t^2 = 0 \Longrightarrow t(v \operatorname{sen}\alpha - 4{,}9t) = 0$$

$t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{v.\operatorname{sen}\alpha}{4{,}9}$. El punto $(x_a, 0)$ se alcanza en $t = t_2 \longrightarrow x_a = v.\cos\alpha.\frac{v \operatorname{sen}\alpha}{4{,}9}$

$$x_a(\alpha) = \frac{v^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{4{,}9} = \frac{v^2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)}{4{,}9}$$

$x_a(\alpha)$ será máximo cuando $\operatorname{sen}(2\alpha) = 1$ (pues $0 \leq \operatorname{sen}(2\alpha) \leq 1$), entonces $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ y en consecuencia $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2a) Derivamos la expresión implícita y buscamos la pendiente de la recta tg.

$$n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{a}+n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{b}\cdot y'=0$$

$$\frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\frac{n}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}y'=0$$

en el punto (a,b) la derivada vale:

$$\frac{n}{a}\cdot 1+\frac{n}{b}\cdot 1\ y'=0 \Longrightarrow y'_{(a,b)}=-\frac{\frac{n}{a}}{\frac{n}{b}}$$

$y'_{(a,b)}=-\frac{b}{a}$. Ahora definimos la recta pedida.

tg: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

$$y=b-\frac{b}{a}(x-a)=b-\frac{b}{a}\cdot x+\frac{b}{a}\cdot a$$

$$y=2b-\frac{b}{a}x=b\left(2-\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{y}{b}=2-\frac{x}{a}\Longrightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$$

2b) De los datos se obtiene:

$f'(1)=3$ y $f(1)=\frac{1}{2}$, además $h(1)=\frac{1}{2}$

$$h(x)=f(2xf(x))\Longrightarrow h'(x)=f'(2xf(x))\left(2f(x)+2xf'(x)\right)$$

$$h'(x)=f'(2xf(x))\cdot\left(2f(x)+2xf'(x)\right)$$

Buscamos la pendiente:

$$h'(1) = f'(2\cdot f(1))\cdot(2f(1) + 2f'(1))$$

$$h'(1) = f'(1)\cdot(1 + 2\cdot 3) = 3(1+6) = 21$$

La pendiente de la recta normal es:

$m_n = -\frac{1}{21}$ y su ecuación será

$$n: \; y - h(a) = -\frac{1}{h'(a)}(x-a)$$

$$y = -\frac{1}{21}(x-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow y_n = -\frac{1}{21}x + \frac{23}{42}$$

3a) $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x + x$; continua por lo tanto no posee asíntota vertical en su dominio ($\forall x \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{e^{-x}\operatorname{sen} x}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to+\infty}) = +\infty$$

y $\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{e^{-x}\operatorname{sen} x}_{\nexists\ (\text{oscila})} + x)$ no existe. De esto deducimos que no posee AH. Buscamos la asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{sen} x + x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 0} + 1\right)$$

$$= 1 \quad \therefore \quad m = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(\underbrace{e^{-x}\operatorname{sen} x}_{\to 0\ (\text{inf} \times \text{acot})}) = 0$$

$$\therefore \; y_{AO} = mx + b \Rightarrow y = x \text{ cuando } x \to +\infty$$

④

3b) $g(x) = f(x) \operatorname{sen}(x^2-4)$

Buscamos la derivada por definición pues f es continua pero no sabemos si es derivable. No podemos utilizar el álgebra de derivadas.

$$g'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) \operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[f(x) \frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{(x-2)(x+2)} \cdot (x+2) \right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[f(x) \frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x^2-4} (x+2) \right] = f(2) \cdot 1 \cdot 4$$

$$\therefore \; g'(2) = 4 f(2)$$

---

4) $$f(x) = \begin{cases} 2 + K \dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0 \\ K^3 x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en el origen.

f es continua en $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 + K \frac{1-\cos x}{x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{K(1-\cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2 (1+\cos x)} \cdot K = \lim_{x \to 0^-} K \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \frac{K}{2} \quad \therefore \; f'(0^-) = \frac{K}{2}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{K^3x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(K^3) = K^3$$

$\therefore\ f'(0^+) = K^3$. Ahora bien: $\exists f'(0) \iff f'(0^+) = f'(0^-)$

$$K^3 = \frac{K}{2} \rightarrow K^3 - \frac{K}{2} = 0 \Longrightarrow K\left(K^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$K = 0 \vee K^2 = \frac{1}{2} \therefore K \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

---

5) $f(x) = \frac{3\ln x}{x}$, $1 \leq x \leq 5$, continua

$$f'(x) = \frac{3\frac{1}{x}x - 3\ln x}{x^2} = \frac{3(1-\ln x)}{x^2}; \quad 1<x<5$$

Buscamos los intervalos de monotonía estricta.

- $f'(x) > 0 \Longrightarrow 1 - \ln x > 0 \Longrightarrow x < e$

$\therefore\ x \in (1, e)$ f es estrictamente creciente.

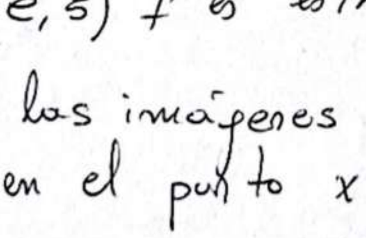
- $f'(x) < 0 \Longrightarrow 1 - \ln x < 0 \Longrightarrow x > e$

$\therefore\ x \in (e, 5)$ f es estrictamente decreciente.

Calculamos las imágenes en los extremos del intervalo, y en el punto $x = e$, donde cambia la monotonía.

$f(1) = 0$ $\quad f(5) = 3\frac{\ln 5}{5}$

$f(e) = \frac{3}{e}$



$f(1) < f(e)$ y $f(e) > f(5)$

Claramente el conjunto imagen es $I_f = \left[0, \frac{3}{e}\right]$

$m = 0$ y $M = \frac{3}{e}$