Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

FUNCIONES UNO A UNO O BIUNÍVOCAS

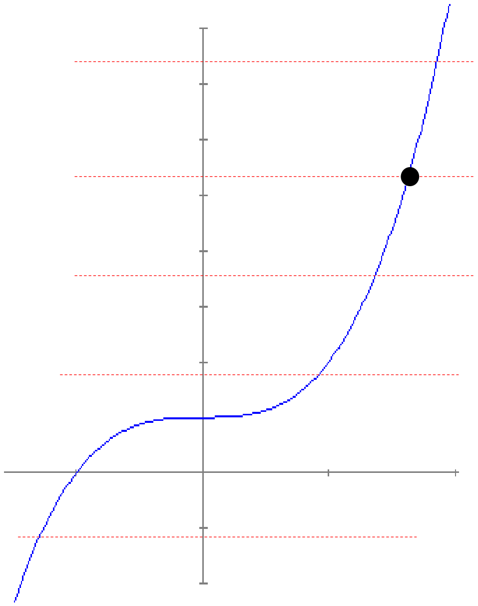
Definición:

Una función ***f*** es Uno a uno si y sólo si a dos elementos distintos cualesquiera de dominio de ***f*** le corresponde dos imágenes distintas.
O bien; no existen dos pares ordenados con igual imagen.

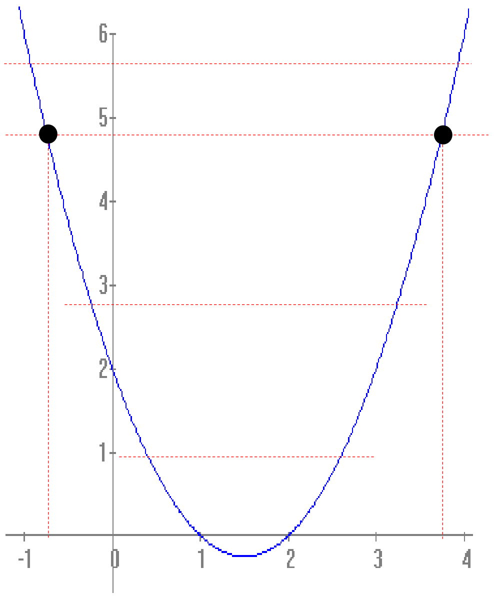
$$\forall\, x_1, x_2 \in dom\ f,\ \ con\ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Criterio de la regla horizontal

Si dada la representación gráfica de una función, desplazamos sobre ella una recta ***horizontal***, verticalmente y ésta corta a la curva en más de un punto; entonces la gráfica analizada no representa una función Biunívoca.



Es Uno a uno



No es Uno a uno

FUNCIÓN INVERSA

Definición:

Si ***f*** es una ***función uno a uno***, entonces tiene función inversa y el conjunto obtenido de intercambiar las componentes de cada uno de los pares ordenados de la función ***f***, se llama ***función inversa de f*** y se la denota por f^{-1}

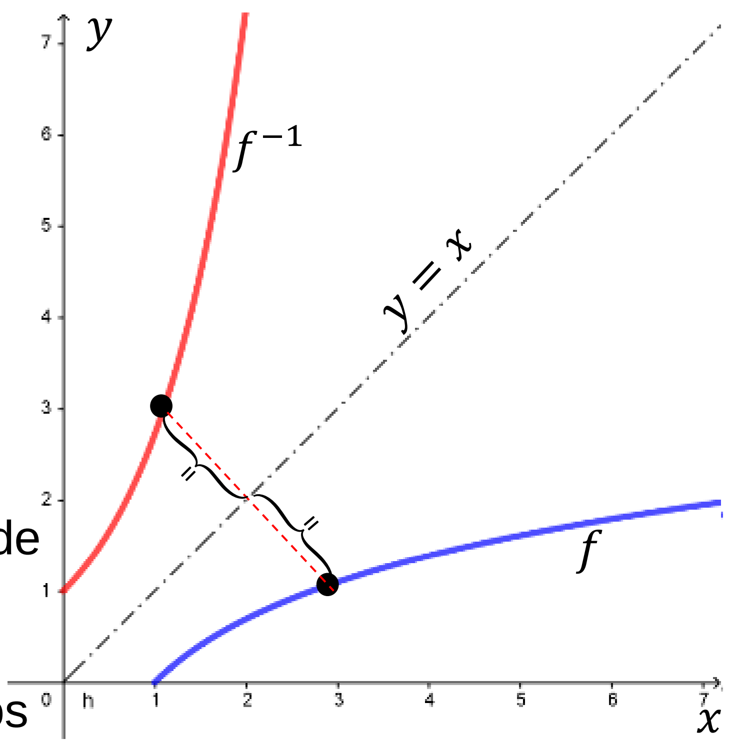
De esta definición se deduce claramente que:

i) $\forall (x;\ y) \in f \Leftrightarrow (y;\ x) \in f^{-1}$

ii) $f\begin{cases} dom\ f \\ rgo\ f \end{cases} \qquad \begin{rcases} dom\ f^{-1} \\ rgo\ f^{-1} \end{rcases} f^{-1}$

Para obtener la ecuación de f^{-1}, se procede a despejar ***x*** en función de ***y*** en la función ***f*** y finalmente se realiza un cambio de variables.

iii) Las gráficas de ***f*** y f^{-1} son simétricas respecto de la primera bisectriz, o sea de la recta ***y=x***



Se debe tratar de graficar con igual escala en ambos ejes, para que la gráfica no salga deformada.

EJEMPLO 1

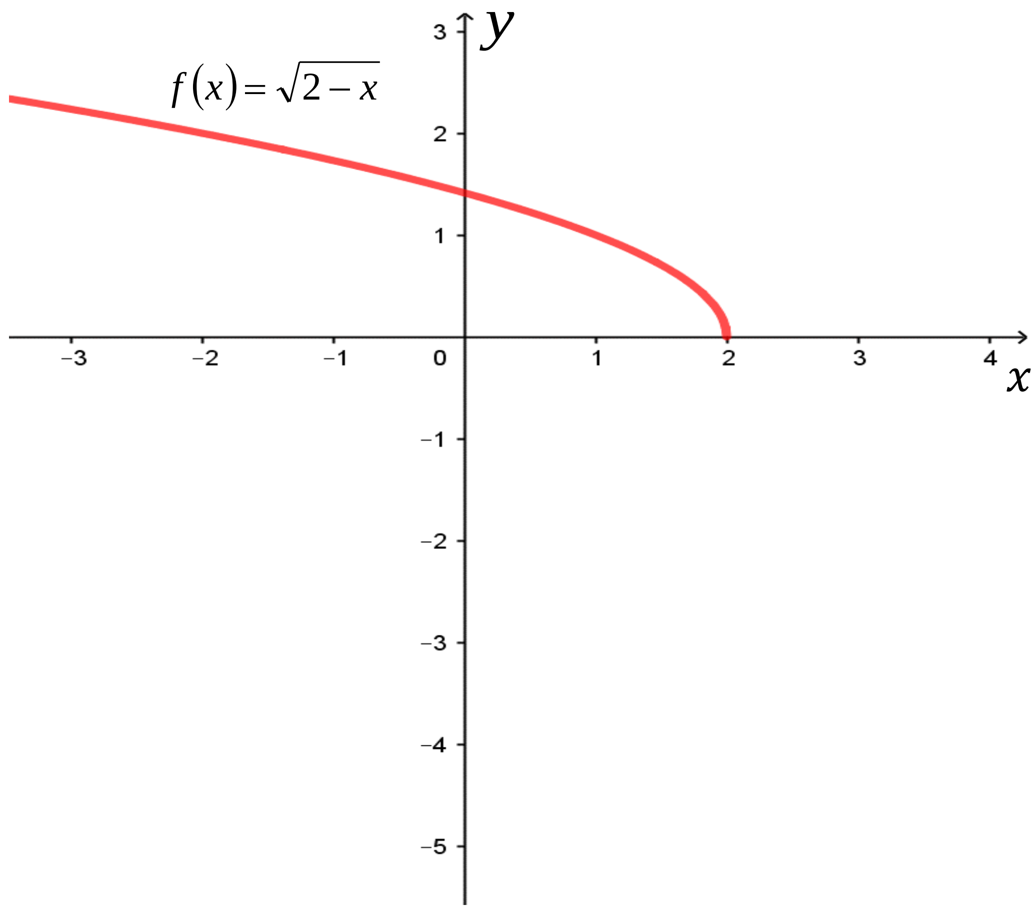
Determinar si la función dada es biunívoca; en tal caso determinar su función inversa.

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

Solución:

$$f(x) = \sqrt{2-x} \qquad \begin{cases} domf = (-\infty; 2] \\ rgof = [0; \infty) \end{cases}$$

Observando la gráfica se aprecia que ***f*** es uno a uno.



Procedamos a despejar ***x*** en función de ***y***

$$y = \sqrt{2-x} \Rightarrow y^2 = 2-x$$

Despejando ***x***

$$\therefore\; x = 2 - y^2$$

Realizando el cambio de variables:

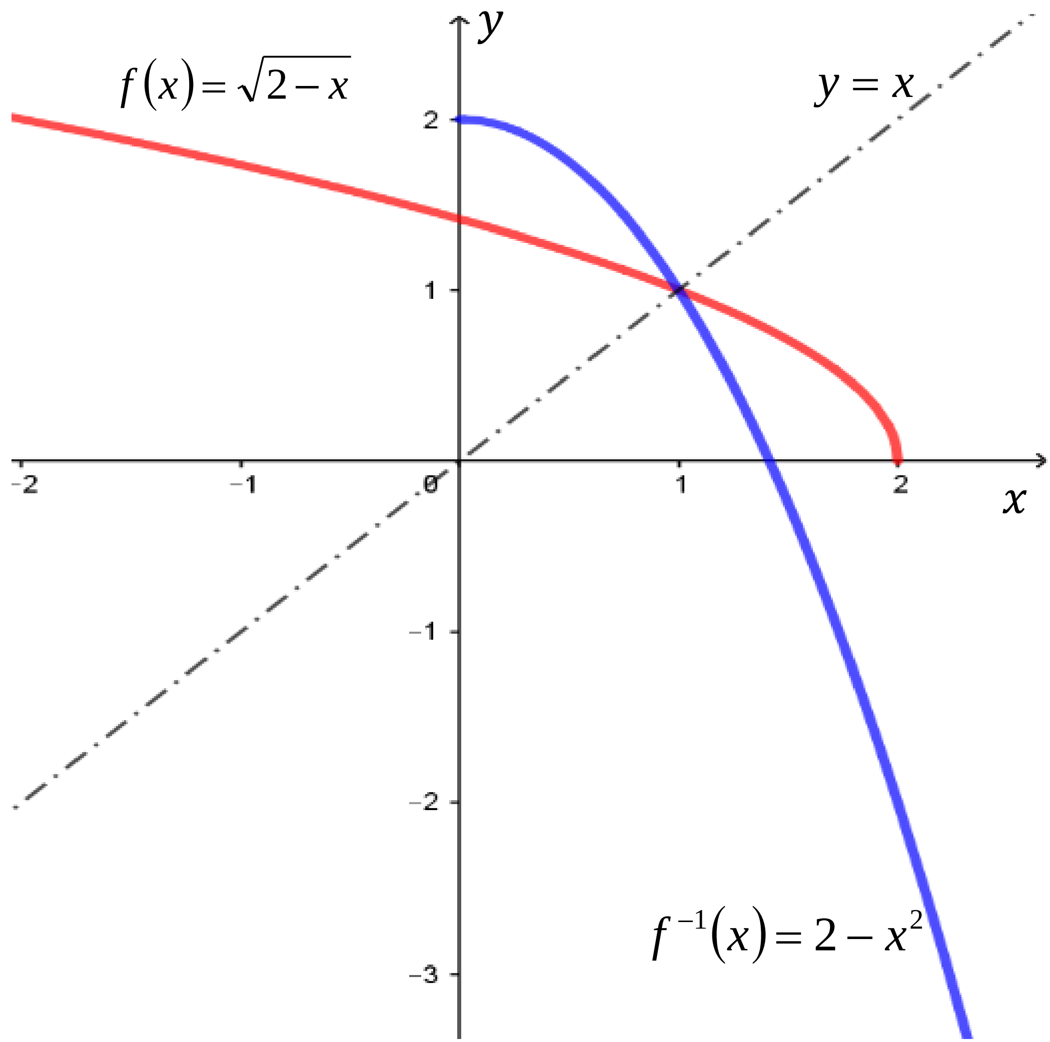
$$\therefore\; f^{-1}(x) = 2 - x^2$$

$$\begin{cases} dom\ f^{1} = [0;\ \infty) \\ rgo\ f^{-1} = (-\infty;\ 2] \end{cases}$$

Para graficar debemos tener en cuenta que el sistema cartesiano tiene que ser Simétrico; vale decir, el segmento que representa una unidad en x debe ser igual al de una unidad en y.

$$f^{-1}(x) = 2 - x^2$$

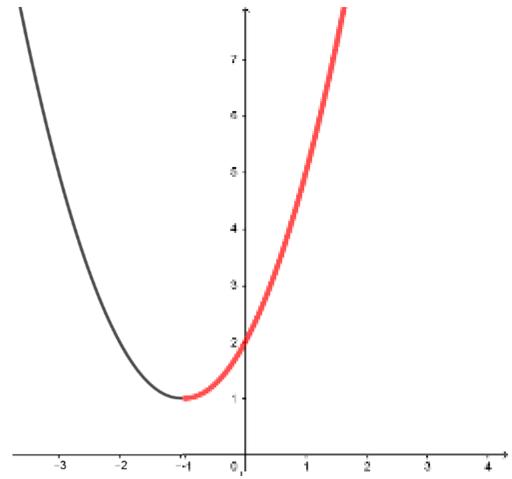
$$\begin{cases} dom\ f^{1} = [0;\ \infty) \\ rgo\ f^{-1} = (-\infty;\ 2] \end{cases}$$



EJEMPLO 2:

Dada la siguiente función, determine: dominio y grafíquela; diga si es uno a uno, si no es, restrinja el dominio para que admita inversa. Defina f^{-1} grafique en el mismo sistema cartesiano f y f^{-1}; dé dominio y rango de f y f^{-1}

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$



Solución:

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 \qquad dom\ f = \Re$$

$$h = \frac{-2}{2} = -1 \qquad k = f(-1) = (-1)^2 - 2 + 2 = 1$$

$$V(-1;\ 1); \quad rgo\ f = [1;\ \infty)$$

f No es uno a uno. luego:

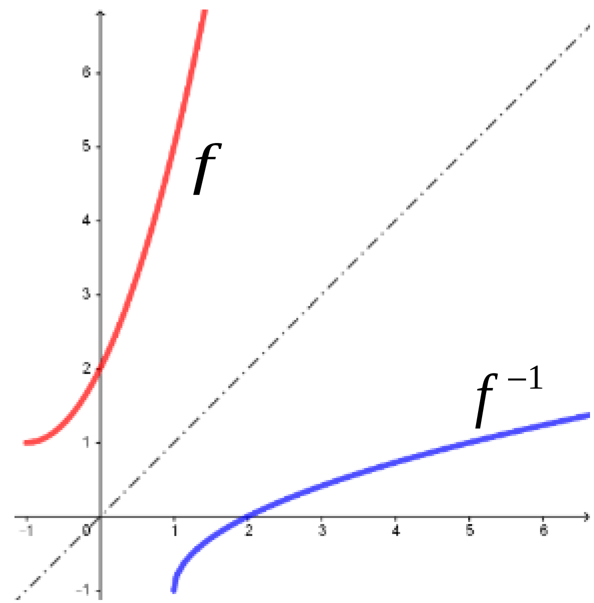
$$dom^*\ f = [-1;\ \infty)$$

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 + 1 - 1 = (x+1)^2 + 1$$

$$y - 1 = (x+1)^2 \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y-1}$$

$$\forall x \geq -1;\ |x+1| = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1} - 1$$

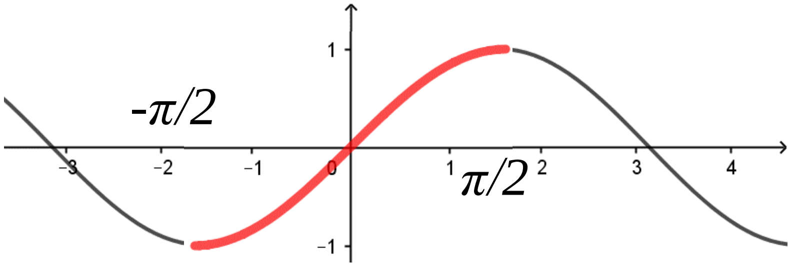
$$y^{-1} = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 1 \qquad \begin{cases} dom f^{-1} = [1;\infty) \\ rgo f^{-1} = [-1;\infty) \end{cases}$$



Funciones Trigonométricas inversas

La Función Seno inverso (arcsen)

Recordemos la gráfica de la Función Seno:



Evidentemente no es uno a uno

Si reducimos su dominio a *[-π/2, π/2]*

Esta se denomina Rama Principal de la función seno.

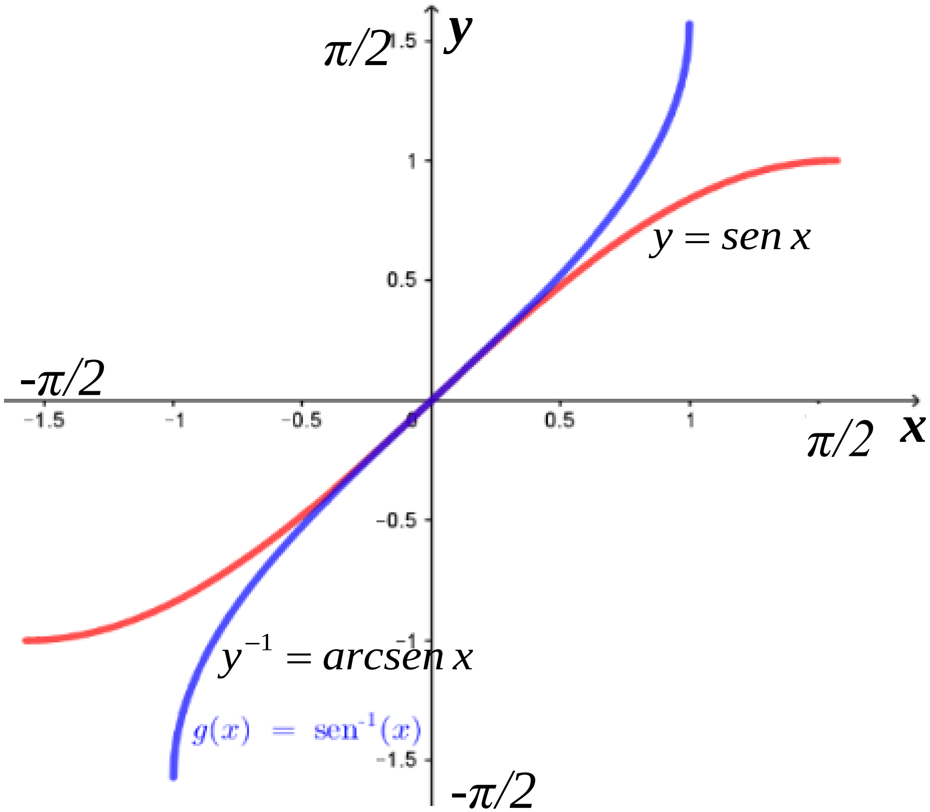
Luego:

La Función Seno inverso (arcsen)

$$f^{-1}(x) = sen^{-1}x$$

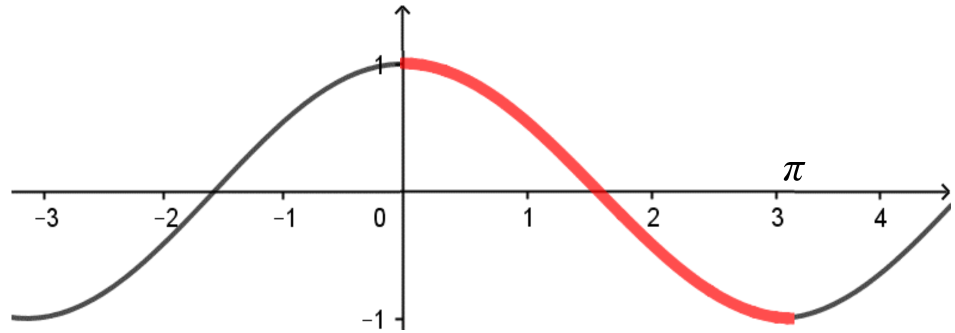
$$dom\, sen^{-1} = [-1, 1]$$

$$rgo\, sen^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



La Función Coseno inverso (arcos)

Recordemos la gráfica de la Función coseno:



No es biunívoca

Si reducimos su dominio a $[0, \pi]$

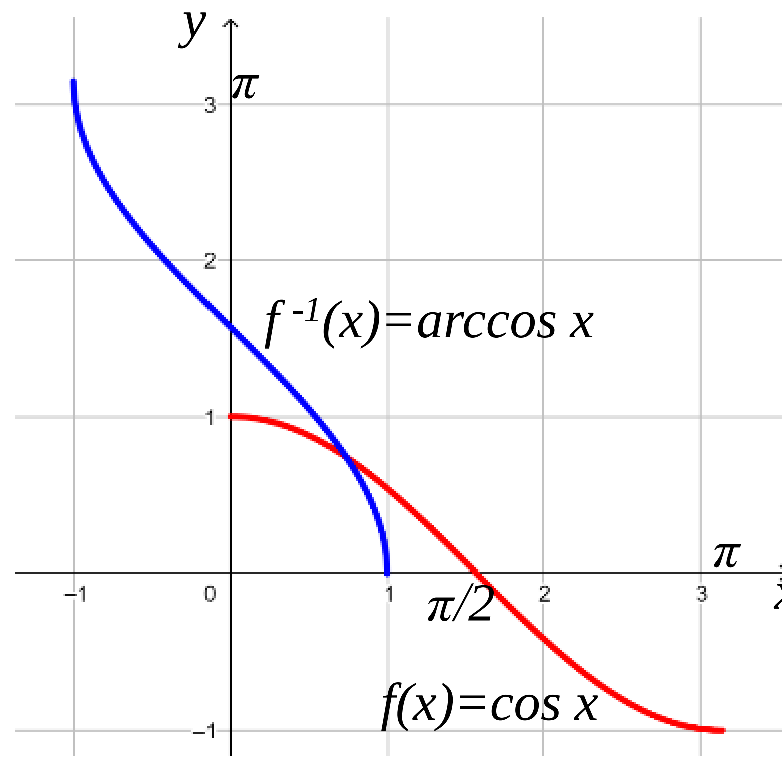
Esta se denomina Rama Principal de la función coseno.
Luego:

La Función Coseno inverso (arcos)

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$$

$$dom \cos^{-1} = [-1, 1]$$

$$rgo \cos^{-1} = [0, \pi]$$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Así como definimos operaciones entre números reales, definiremos en esta sección operaciones entre funciones.

Definición:

Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** para las cuales existe por lo menos un número real que pertenece a ambos dominios, esto es: $dom\, f \cap dom\, g \neq \emptyset$, entonces existen las funciones:

$$f+g \qquad f-g \qquad f \cdot g \qquad \frac{f}{g} \; y \; \frac{g}{f}$$

En los dos últimos casos, si los denominadores son distintos de cero

y se definen:

Función Suma de *f* y *g*

Definición: Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Suma ***f*** + ***g*** y se define por:	$f + g = \{(x, y)/y = f(x) + g(x)\}$
	$dom(f + g) = dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f + g);\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Función Resta de *f* y *g*

Definición: Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Diferencia ***f* - *g*** y se define por:	$f - g = \{(x, y)/y = f(x) - g(x)\}$
	$dom(f - g) = dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f - g);\ (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Función Producto de *f* y *g*

Definición: Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Producto ***f*** x ***g*** y se define por:	$f \cdot g = \{(x, y)/y = f(x) \cdot g(x)\}$
	$dom(f \cdot g) = dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f \cdot g);\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Función Cociente de *f* y *g*	
Definición: Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$ con $g(x) \neq 0$, existe la función Cociente ***f / g*** y se define por:	$\frac{f}{g} = \left\{(x,y)/y = \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ $dom(f\ /\ g) = dom\ f \cap dom\ g, \quad con\ g(x) \neq 0$ $\forall\ x \in dom\left(\frac{f}{g}\right);\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Función Cociente de *g* y *f*	
Definición: Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ g \cap dom\ f \neq \theta$ con $f(x) \neq 0$, existe la función Cociente ***g / f*** y se define por:	$\frac{g}{f} = \left\{(x,y)/y = \frac{g(x)}{f(x)}\right\}$ $dom(g\ /\ f) = dom\ g \cap dom\ f, \quad con\ f(x) \neq 0$ $\forall\ x \in dom\left(\frac{g}{f}\right);\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Representaciones de operaciones entre funciones

Existen distintas representaciones de las operaciones entre funciones:

EJEMPLO 1:

Dadas las funciones ***g*** y ***f***, determina si existen las funciones ***(f+g)(x)***; ***(f-g)(x)***; ***(f . g)(x)***; ***(f/g)(x)*** y ***(g/f)(x)***; determina sus dominios y calcula, si es posible: ***(f+g)(0)***; ***(f - g)(3)***; ***(f . g)(1)***; ***(f/g)(0)*** y ***(g/f)(-1)*** $f/f(x)=\sqrt{1-x}$ $g/g(x)=\sqrt{x+1}$

Solución: ***Representación analítica***

$dom\ f=(-\infty,1]$ $dom\ g=[-1,\infty)$

$dom\ f\cap dom\ g=(-\infty,1]\cap[-1,\infty)$

$dom\ f\cap dom\ g=\ [-1,1];\ \neq\emptyset$

$\exists\ \boldsymbol{f+\ g};\ \ \boldsymbol{f-g\ y\ f\cdot g}$

$dom\ (f+g)=\ [-1,1]$

$(\boldsymbol{f}+\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{1-x}}+\sqrt{\boldsymbol{x+1}}$

$(f+\ g)(0)=f(0)+g(0)=$

$=1+1$

$(f+\ g)(0)=2$

$dom\ (f-g)=\ [-1,1]$

$(\boldsymbol{f}-\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{1-x}}-\sqrt{\boldsymbol{x+1}}$

$(f-\ g)(3)=\nexists$

$dom\ (f\cdot g)=\ [-1,1]$

$(\boldsymbol{f}\cdot\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{1-x}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{x+1}}$

$(f\cdot\ g)(1)=f(1)\cdot g(1)=$

$=0\cdot\sqrt{\boldsymbol{2}}$ $(f\cdot\ g)(1)=0$

$dom\ (f/g)=[-1,1]/g(x)\neq 0$ $\therefore\ x\neq -1$

$dom\ (f/g)=(-1,1]$

$(\boldsymbol{f}\ /\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{1-x}}}{\sqrt{\boldsymbol{x+1}}}$

$(f\ /\ g)(0)=\dfrac{1}{1}$ $(f\ /\ g)(0)=1$

$dom\ (g/f)=[-1,1]/f(x)\neq 0$

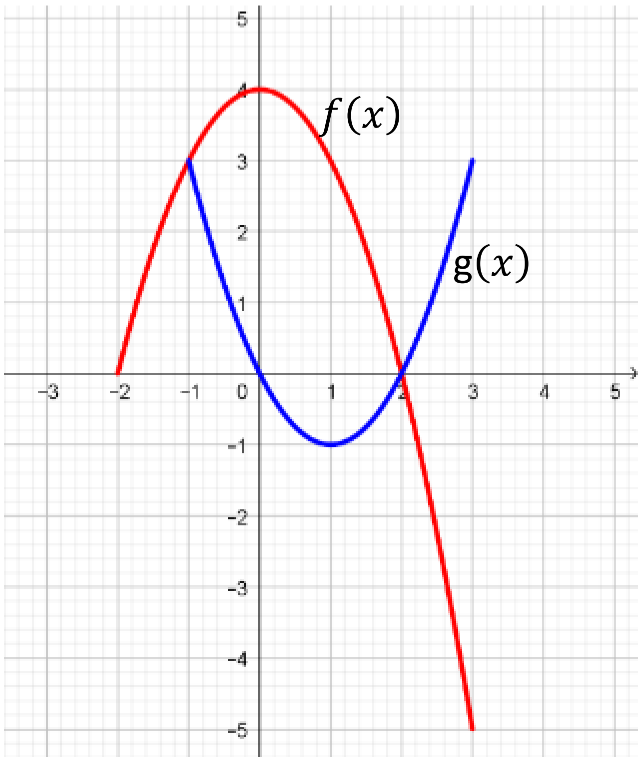
$dom\ (g/f)=[-1,1)$

$(\boldsymbol{g}\ /\ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{x+1}}}{\sqrt{\boldsymbol{1-x}}}$ $(g\ /\ f)(-1)=0$

EJEMPLO 2:

Dadas las gráficas de ***g*** y ***f***, calcula, si es posible:

(f+g)(0); ***(f - g)(3)***; ***(f . g)(1)***; ***(f/g)(0)*** y ***(g/f)(1)***



Solución: ***Representación gráfica***

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) =$$

$$= 4 + 0$$

$$\boldsymbol{(f+\ g)(0) = 4}$$

$$(f-\ g)(3) = f(3) - g(3) =$$

$$= -5 - 3$$

$$\boldsymbol{(f-\ g)(3) = -8}$$

$$(f\cdot\ g)(1) = f(1)\cdot g(1) =$$

$$= 3\cdot(-1)$$

$$\boldsymbol{(f\cdot\ g)(1) = -3}$$

$$g = 0; x = 0\ \ y\ x = 2$$

$$\boldsymbol{(f\ /\ g)(0) = \nexists\ 0 \ni dom\ f}$$

$$f = 0; x = -2\ \ y\ x = 2$$

$$(g\ /\ f)(1) = \frac{-1}{3}$$

$$\boldsymbol{(g\ /\ f)(1) = -\frac{1}{3}}$$

EJEMPLO 3:

Dadas las funciones ***g*** y ***f***, calcula, si es posible: ***(f+g)(0)***; ***(f - g)(3)***; ***(f . g)(1)***; ***(f/g)(0)*** y ***(g/f)(1)***

$$f = \{(-1,3); (0,0); (1,0); (3,3)\} \qquad g = \{(-2,0); (0,4); (1,2); (2,-1); (3,5)\}$$

Solución: ***Representación analítica***

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) =$$

$$= 0 + 4$$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\mathbf{0}) = \mathbf{4}$$

$$(f - g)(3) = f(3) - g(3) =$$

$$= 3 - 5$$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\mathbf{3}) = \mathbf{-2}$$

$$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) =$$

$$= 0 \cdot 2$$

$$(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

$$(f \,/\, g)(0) = \frac{f(0)}{g(0)}$$

$$= \frac{0}{4}$$

$$(\boldsymbol{f} \,/\, \boldsymbol{g})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$(g \,/\, f)(1) = \frac{g(1)}{f(1)}$$

$$f(1) = 0$$

$$(\boldsymbol{g} \,/\, \boldsymbol{f})(\mathbf{1}) = \nexists$$

EJEMPLO 4: *Sean las funciones* $h(x) = x^2 - 2x + 1$; $g(x) = \sqrt{x-1}$; *calcular, si existe, la función* $f(x) = h - 2g$; *determinar su dominio y, si existen:* $f(0)$; $f(1)$ y $f(2)$

Solución: ***Representación gráfica***

$f(x)\exists \;\; si \;\; dom\, h \cap dom\, g \neq \theta$

$$\begin{cases} dom\, h = R \\ dom\, g = [1,\infty) \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} dom\, h \cap dom\, g \neq \theta \\ f(x)\exists \end{matrix}$$

$dom\, f = [1,\infty)$

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2\sqrt{x-1}}$

$f(0)$; $0 \ni dom\, f$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{f(0)\nexists}$

$f(1)$; $1 \in dom\, f$

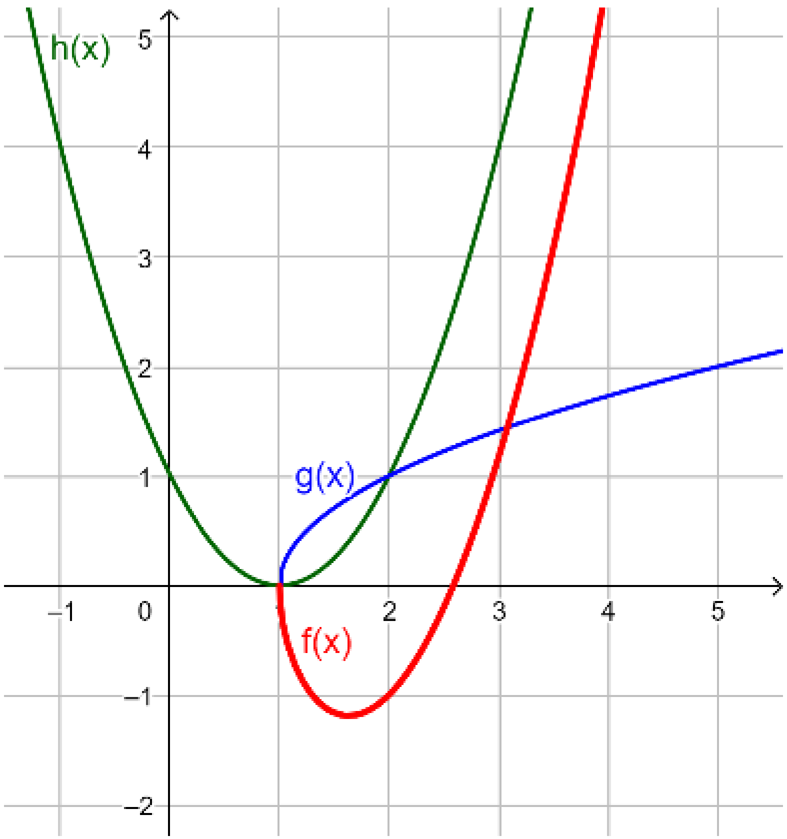
$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 - 2\sqrt{1-1}$

$\boldsymbol{f(1) = 0}$

$f(2)$; $2 \in dom\, f$

$f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 + 1 - 2\sqrt{2-1}$

$\boldsymbol{f(2) = -1}$



Función Compuesta de *f* y *g*	
Definición	Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ f \cap rgo\ g \neq \emptyset$, existe la función compuesta ***f(g)*** o bien ***f o g*** y se define por: $f(g)(x) = \{(x, y)/y = f[g(x)]\}$
Dominio	$dom\ f(g) = \{x \in dom\ g\ /\ g(x) \in dom\ f\}$ $dom\ f(g) \subseteq dom\ g$
Expresión	$\forall x \in dom\ f(g);\ [f(g)](x) = f[g(x)]$

Función Compuesta de *g* y *f*	
Definición	Dadas dos funciones ***f*** y ***g*** tales que $dom\ g \cap rgo\ f \neq \emptyset$, existe la función compuesta ***g(f)*** o bien ***g o f*** y se define por: $g(f)(x) = \{(x, y)/y = g[f(x)]\}$
Dominio	$dom\ g(f) = \{x \in dom\ f\ /\ f(x) \in dom\ g\}$ $dom\ g(f) \subseteq dom\ f$
Expresión	$\forall x \in dom\ g(f);\ [g(f)](x) = g[f(x)]$

Representaciones de funciones compuestas

Existen distintas representaciones de las operaciones entre funciones:

EJEMPLO1:

Dadas ***f*** y ***g***, determine si existen las funciones compuestas ***[f(g)](x)*** y ***[g(f)](x)***; en caso afirmativo determine sus dominios, defínalas y encuentre, si es posible: ***[f(g)](-1)***, ***[f(g)](-2)***, ***[g(f)](0)*** y ***[g(f)](π)***

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad g(x) = sen\ (x+1)$$

Solución:

$$f(g)\exists;\, si\ domf \cap rgog \neq \emptyset$$

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad g(x) = sen\ (x+1)$$

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 4 \geq x^2$$

$$x^2 \leq 4 \quad \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} dom\, g = \Re \\ rgo\, g = [-1;\, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} domf = [-2{,}2] \\ rgof = [0{,}2] \end{cases}$$

$$dom\ f \cap rgo\ g = [-2,\ 2] \cap [-1,\ 1] \neq \emptyset \Rightarrow \quad \exists\ f(g)$$

$$dom\ f(g) = \{R\,/\underbrace{sen(x+1) \in [-2,\ 2]}_{[-1{,}1]\cap[-2{,}2]=[-1{,}1]}\} = [-1,1]$$

$$domf(g) = [-1{,}1]$$

$$[f(g)](x) = \sqrt{4 - \left(sen(x+1)\right)^2}$$

$$[f(g)](-1) = \sqrt{4 - \left(sen(0)\right)^2} = 2$$

$$[f(g)](-2) \nexists;\, -2 \ni dom\ f(g)$$

$$dom\ g \cap rgo\ f = \Re \cap [0;\ 2] = [0;\ 2] \neq \emptyset \therefore g(f)\exists$$

$$dom\ g(f) = \{x \in dom\ f\ /\ f(x) \in dom\ g\}$$

$$domg(f) = \left\{[-2;2]/\underbrace{\sqrt{4-x^2} \in \Re}_{4-x^2\geq 0 \Rightarrow x \in [-2,\ 2]}\right\}$$

$$domg(f) = [-2;2]$$

$$g[f(x)] = sen\left(\sqrt{4-x^2} + 1\right)$$

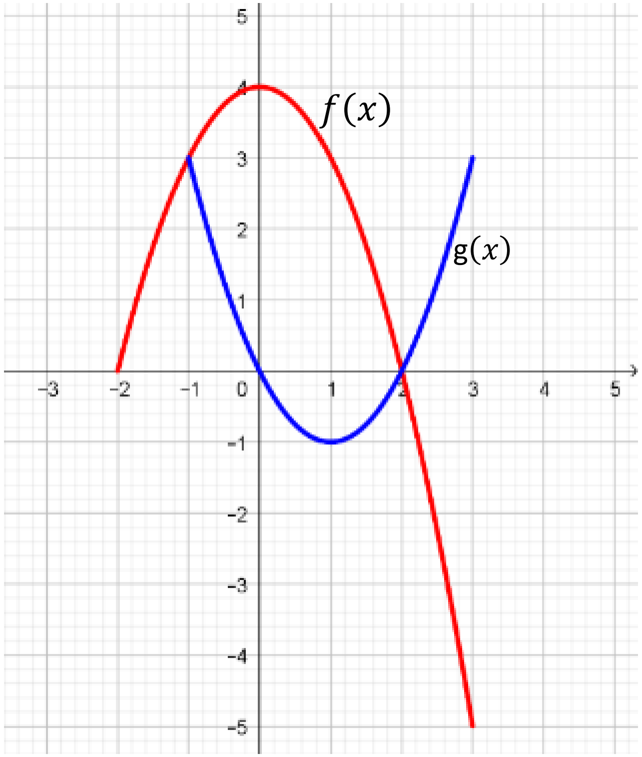
$$g[f(0)] = sen\left(\sqrt{4-0} + 1\right) = sen\ (3)$$

$$g[f(\pi)] \nexists;\, \pi \ni dom\ g(f)$$

EJEMPLO 2:

Dadas las gráficas de ***g*** y ***f***, calcula, si es posible:

[f(g)](1); ***[f(g)](-1)***; ***[g(f)](1)*** y ***[g(f)](4)***



Solución: ***Representación gráfica***

$$[f(g)](1) = f[g(1)] =$$

$$g(1) = -1$$

$$f(-1) = 3$$

$$\mathbf{[f(\boldsymbol{g})](1) = 3}$$

$$[f(g)](-1) = f[g(-1)] =$$

$$g(-1) = 3$$

$$f(3) = -5$$

$$\mathbf{[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})](-1) = -5}$$

$$[g(f)](1) = g[f(1)] =$$

$$f(1) = 3$$

$$g(3) = 3$$

$$\mathbf{[g(\boldsymbol{f})](1) = 3}$$

$$[g(f)](4) = g[f(4)]$$

$$f(4)\nexists$$

$$\nexists\mathbf{[g(\boldsymbol{f})](4)}$$

EJEMPLO 4:

Dadas las funciones ***g*** y ***f***, calcula, si es posible: *f[g(1)]*; *f[g(-2)]*; *g[f(1)]*; *g[f(4)]*; *f[f(0)]*; y *g[g(2)]*

$f(x)=\{(-2,0),(-1,3),(0,4),(1,3),(2,0),(3\ -5)\}$ $g(x)=\{(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)\}$

Solución: ***Representación analítica***

$$[f(g)](1)=f[g(1)]$$
$$g(1)=-1$$
$$f(-1)=3$$
$$[\mathbf{f}(\boldsymbol{g})](\mathbf{1})=\mathbf{3}$$

$$[f(g)](-2)=f[g(-2)]$$
$$g(-2)\nexists$$
$$[\mathbf{f}(\boldsymbol{g})](-\mathbf{2})\nexists$$

$$[g(f)](1)=g[f(1)]$$
$$f(1)=3$$
$$g(3)=3$$
$$[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f})](\mathbf{1})=\mathbf{3}$$

$$[g(f)](4)=g[f(4)]$$
$$f(4)\nexists$$
$$[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f})](\mathbf{4})\nexists$$

$$[f(f)](0)=f[f(0)]$$
$$f(0)=4$$
$$f(4)\nexists$$
$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f})](\mathbf{0})\nexists$$

$$[g(g)](2)=g[g(2)]$$
$$g(2)=0$$
$$g(0)=0$$
$$[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g})](\mathbf{0})=\mathbf{0}$$

CUESTIONARIO 3:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

a). ¿La función Valor absoluto, es uno a uno? ¿y la función seno lo es?

b). Una función racional de la forma: $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$, tiene inversa? Si es así: ¿cuál es?

c). Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ ¿existe la función $h(x) = \frac{f}{g-1}$?. Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

d). Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ ¿existe la función $\mathrm{g}(x) = f + f^{-1}$?, Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

e). Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ¿existe la función $f[f(x)]$?, Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?