

Secciones Cónicas - Elipse

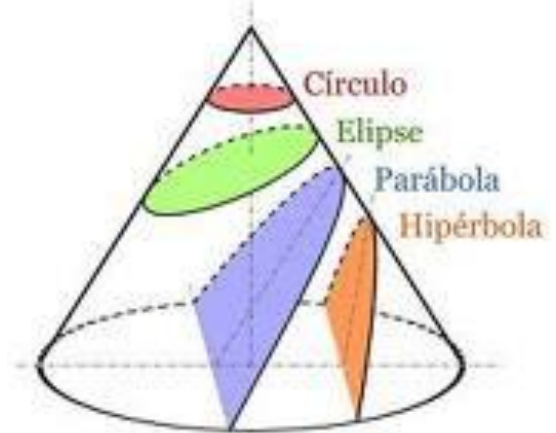
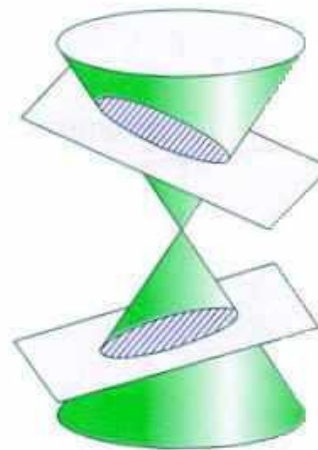
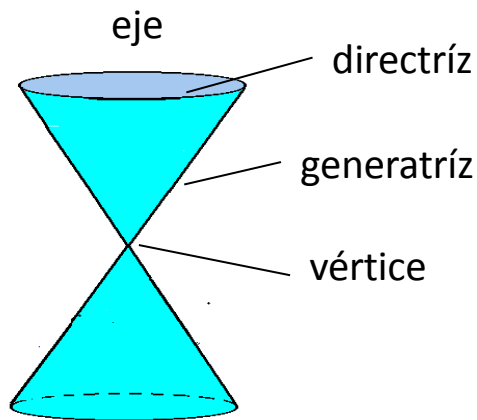
Objetivos

- Describir e identificar los elementos de una elipse.
- Interpretar sus ecuaciones.
- Resolver problemas utilizando coordenadas geográficas.
- Identificar a la elipse en diferentes contextos cuando aparece como lugar geométrico.
- Reconocer la importancia de la elipse en la ciencia y en la técnica.
- Aplicar la ecuación matemática de la elipse para resolver problemas que se puedan presentar en la vida diaria o profesional.



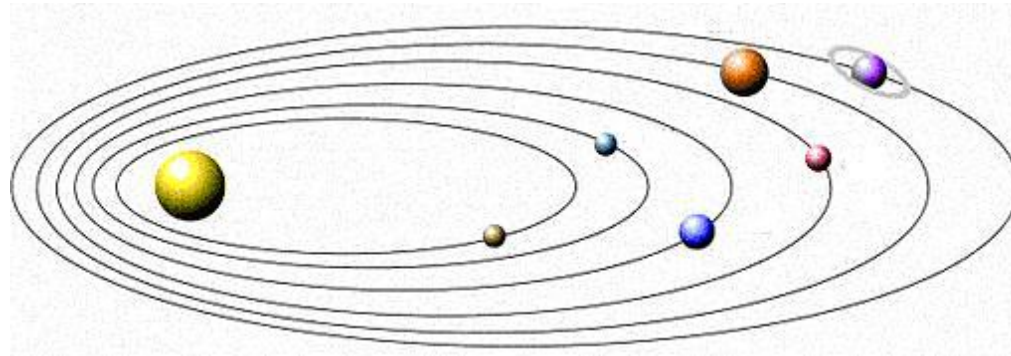
Secciones Cónicas

- Una superficie cónica está generada por una recta (generatriz) que se mueve apoyándose en una curva fija (directriz) y que pasa por un punto fijo (vértice) no contenido en el plano de esa curva.
- Una **sección cónica** es la intersección de un plano con la superficie cónica, de la que obtenemos curvas.
- El nombre de **cónicas** con que se designa a circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas es debido a estas intersecciones.



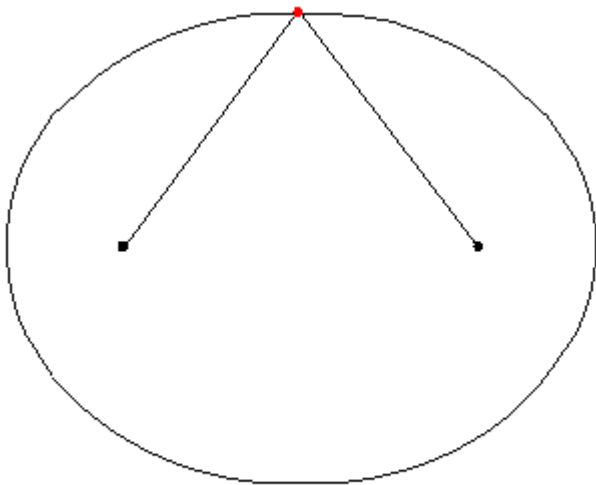
Secciones Cónicas

- La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:
 - La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.
 - Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.

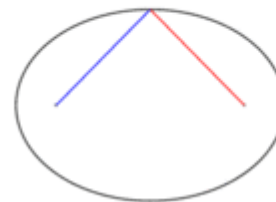


Ellipse - Definición

- Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se denominan focos de la elipse.***

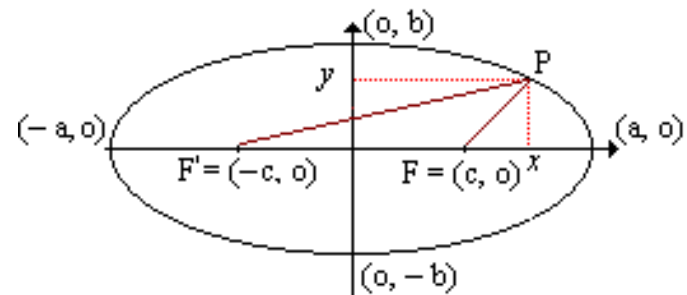


Blue line length: (5.000)
Red line length: (5.000)
Total length: (10.00)



Ecuación analítica de la elipse

- Ubicamos los focos sobre el eje x , situados en puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.
- Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas sean (x, y) .
- En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble de la coordenada del vértice sobre el eje mayor (a).



Entonces: $PF + PF' = 2a$

- Aplicando Pitágoras tenemos que

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Deducción ecuación elipse

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2 \quad \text{Elevo al cuadrado a.m.}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4.a.\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2$$

$$\cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4.a.\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{4.a.\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} = \cancel{4xc} + \cancel{4a^2}$$

$$a.\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc + a^2$$

Elevo al cuadrado a.m.

Deducción ecuación elipse

$$\left[a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2 = (xc + a^2)^2$$

$$a^2 \cdot (x+c)^2 + a^2 y^2 = x^2 c^2 + 2a^2 xc + a^4$$

$$a^2 \cdot (x^2 + 2xc + c^2) + a^2 y^2 = x^2 c^2 + 2a^2 xc + a^4$$

$$a^2 x^2 + 2a^2 xc + a^2 c^2 + a^2 y^2 = x^2 c^2 + 2a^2 xc + a^4$$

$$a^2 x^2 - x^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2$$

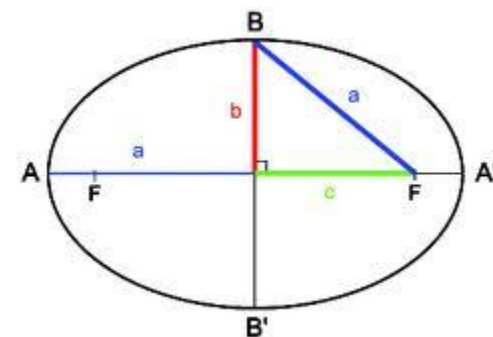
$$x^2 (a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

$$x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Divido a.m. por
 $a^2 b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



**Ecuación canónica
de la Elipse
Eje Mayor Horizontal**

Elipse – Relación entre parámetros

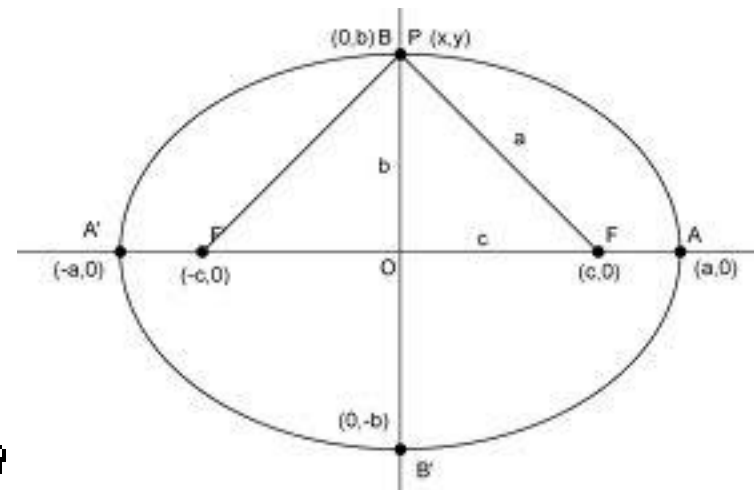
$$\overline{PF} = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \overline{PF'} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a. \quad \text{Por definición de elipse}$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a \Rightarrow 2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2 + c^2} = a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



Elipse - Excentricidad

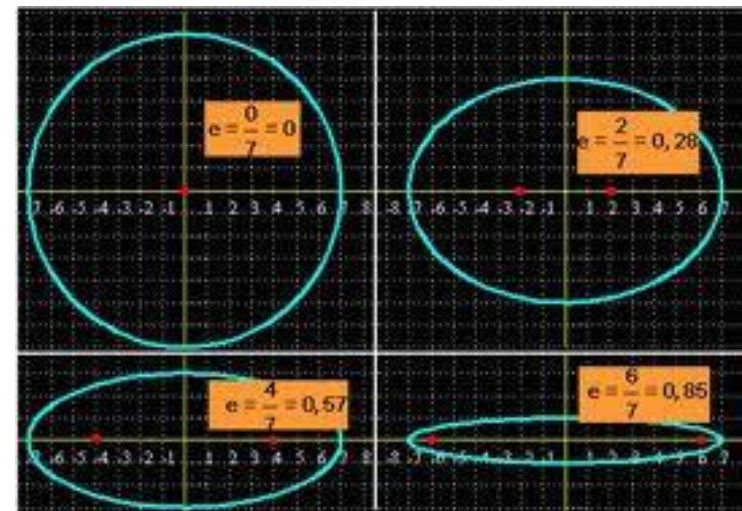
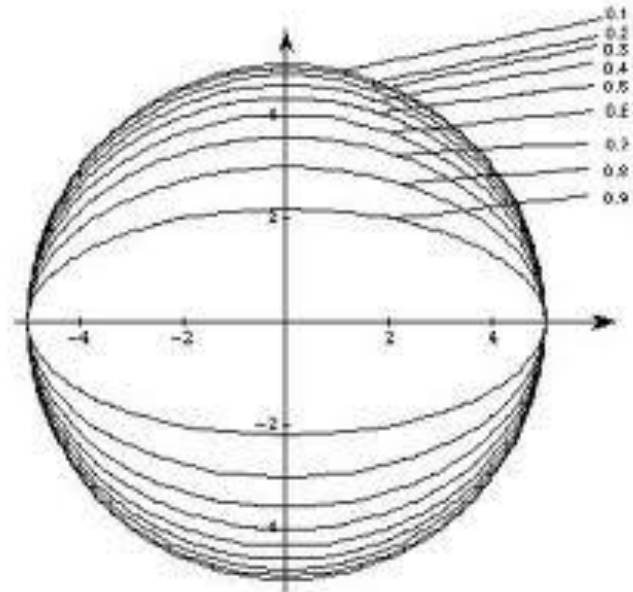
- Es la relación entre “c” y “a”

$$e = \frac{c}{a}$$

- Ya que $a > c$ el limite superior es 1 y el inferior 0

$$- e \sim 1 \quad c \sim a \quad \rightarrow b \sim 0$$

$$- e = 0 \quad c = 0 \quad \rightarrow a = b$$



Elipse

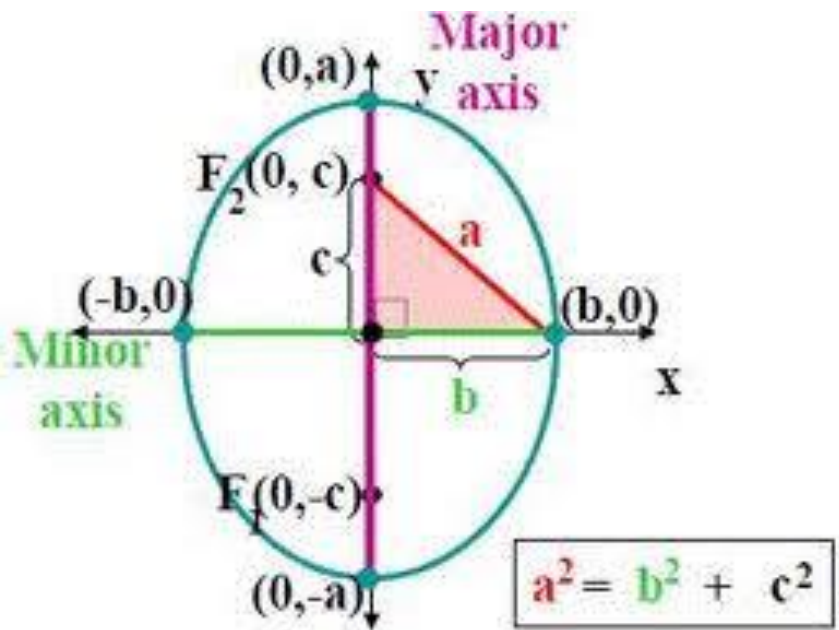
- Ejercicio.
 - Identificar la siguiente ecuación de una cónica
 - Graficar
 - Encontrar sus elementos característicos

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Elipse en forma vertical

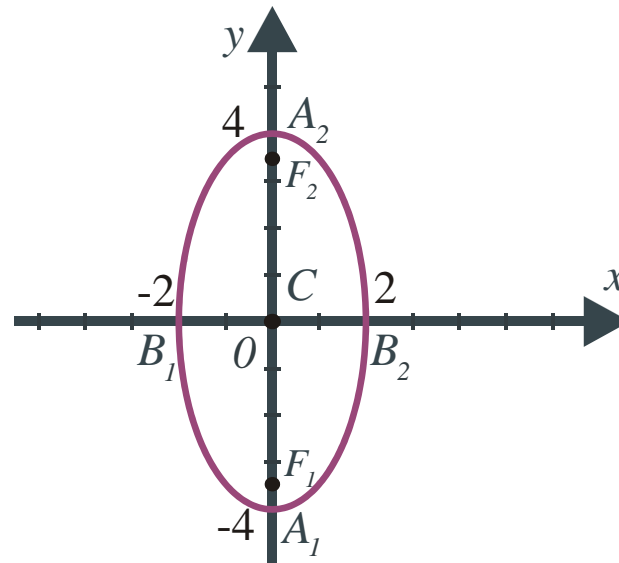
- Una elipse con centro en el origen, orientada en forma vertical, respecto a nuestro sistema de referencia, responderá a la ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Elipse

- Ejercicio.
 - Identificar la siguiente gráfica de una cónica
 - Detallar su ecuación analítica
 - Encontrar sus elementos característicos



Lado Recto

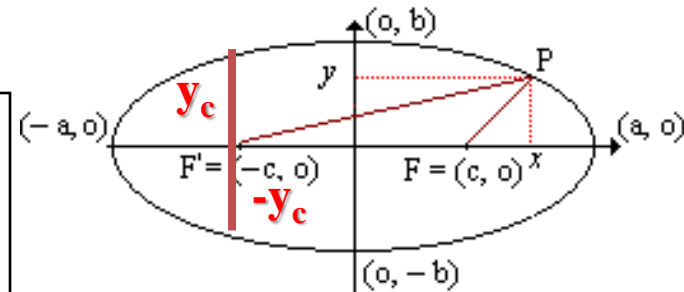
- Es un segmento de recta que pasa por los focos, || al eje menor y tiene como extremos los lados de la elipse.
- Si en la ecuación canónica de la elipse analizada en forma horizontal reemplazamos $x=c$:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y_c^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{y_c^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

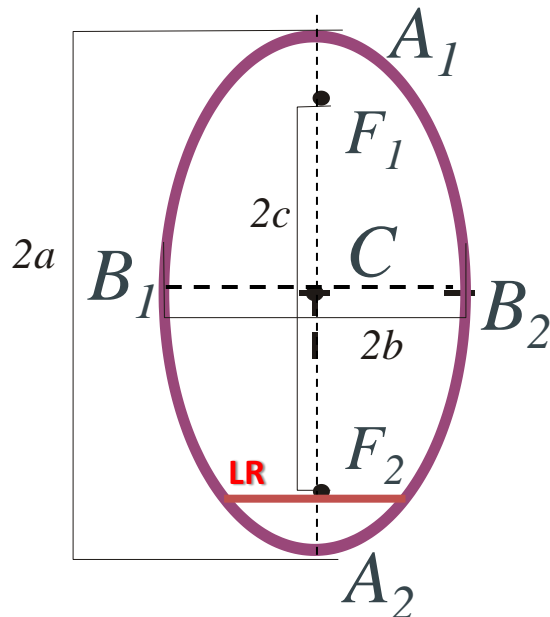
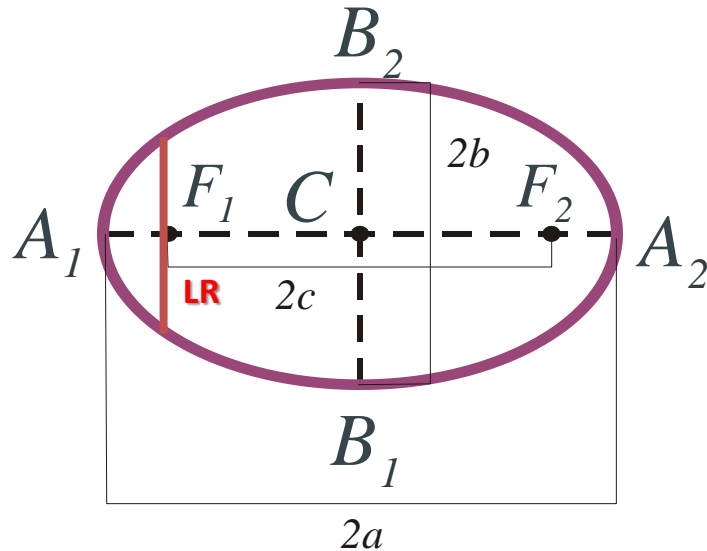
$$y_c = \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$LR = 2 \frac{b^2}{a}$$

Elementos de una elipse



Elipse	Elemento
C	Centro
$F_1 F_2$	Focos
$2c$	Distancia Focal
$\overline{A_1 A_2}$	Eje Mayor
$2a$	Medida Eje Mayor
$\overline{B_1 B_2}$	Eje Menor
$2b$	Medida Eje Menor
LR	Lado Recto

Elipse desplazada del origen

- Equivale a desplazar el sistema de referencia en valores (h,k) respecto a las coordenadas originales.
- Tendremos nuevas coordenadas respecto al nuevo sistema de referencia (x,y) , tal que considerando al anterior (x',y') :

$$x = x' + h \rightarrow x' = x - h$$

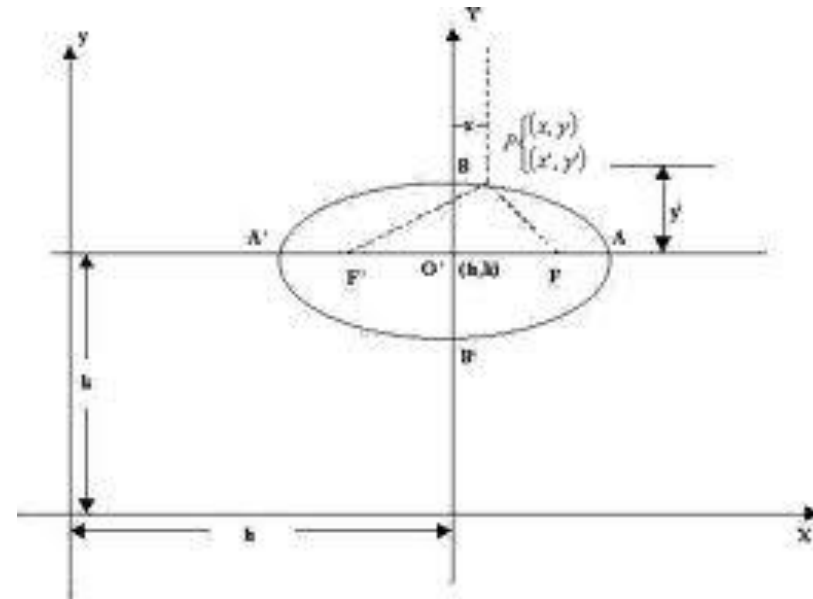
$$y = y' + k \rightarrow y' = y - k$$

- Reemplazando en la ecuación

original:

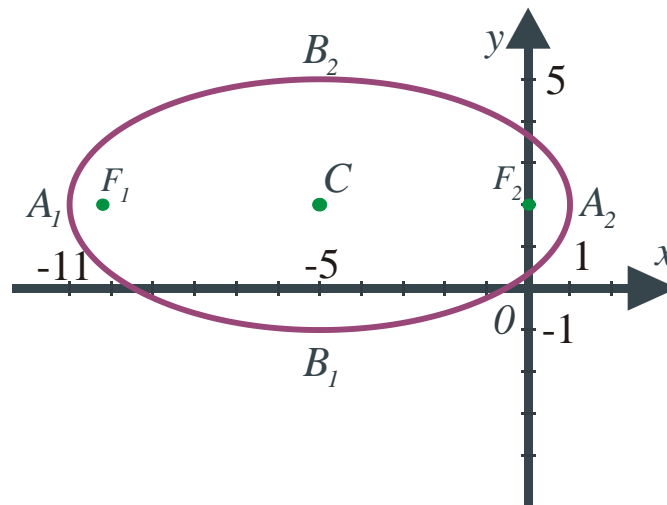
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**Ecuación canónica de la
elipse con $C(h,k)$**



Elipse

- Ejercicio.
 - Identificar la siguiente gráfica de una cónica
 - Detallar su ecuación analítica
 - Encontrar sus elementos característicos



Ellipse – Ecuación General

- Si desarrollamos los cuadrados de la ecuación canónica, tenemos que:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

*Multiplico a.m.
por a^2b^2*

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) + a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2xh - 2a^2yk + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Definiendo:

$$A = b^2$$

$$C = a^2$$

$$D = -2b^2h$$

$$E = -2a^2k$$

$$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

**Ecuación General
de la elipse**

Ellipse

- Ejercicio.
 - Determinar si la siguiente ecuación representa una ellipse, en caso afirmativo escribirla nuevamente en la forma canónica, identificando sus elementos característicos.

$$4y^2 + 9x^2 - 36x - 32y + 64 = 0$$

Elipse - Rectas tangentes

- Dada la ecuación canónica de la elipse
- Queremos encontrar la recta tangente en un punto P1 (x1,y1)
- Utilizamos la técnica del desdoblamiento:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h).(x_1-h)}{a^2} + \frac{(y-k).(y_1-k)}{b^2} = 1$$

- Reemplazamos las coordenadas del punto de paso y ordenamos la ecuación quedando:

$$y = m_{tg}.x + b$$

ó

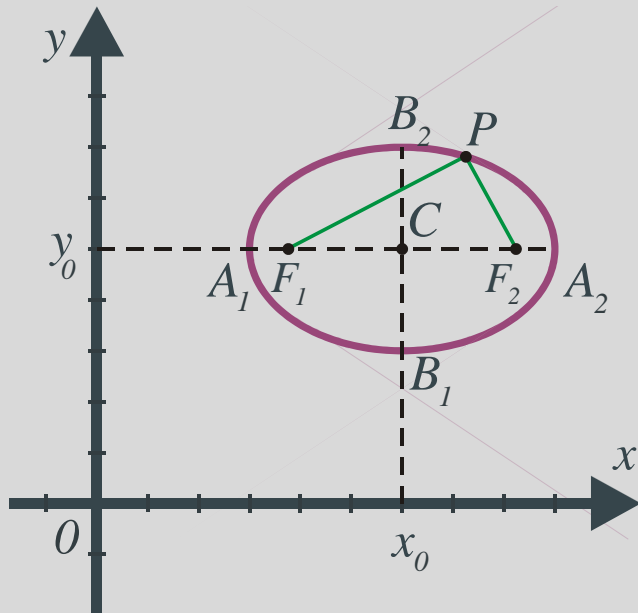
$$(y - y_1) = m_n.(x - x_1)$$

Con

$$m_{tg}.m_n = -1$$

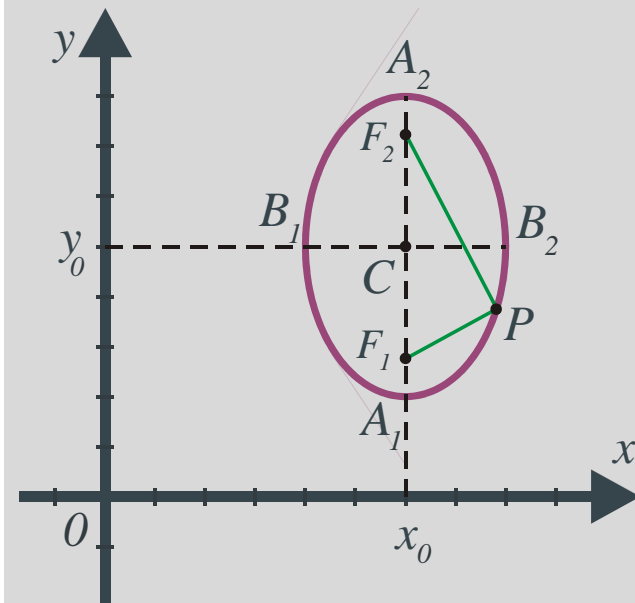
Ecuaciones Canónicas de Elipses

Eje mayor || al eje x



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eje mayor || al eje y



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Elipse

Ejercicio de Aplicación

Un jardinero desea trazar un cantero elíptico donde el semieje mayor tenga una longitud de 2,5 metros y el semieje menor mida 1,5 metros. Para ello utilizará una cuerda no elástica. Desea conocer la longitud de la cuerda y la posición donde deberá ubicar las estacas. Graficar el mismo, identificando elementos característicos.

Elipse

Ejercicio de Aplicación

Se desea construir un puente carretero semielíptico para el cruce de un río ubicado en un profundo valle. La distancia entre los bordes superiores del río es de 120 m. Las recomendaciones de ingeniería recomiendan no superar una excentricidad del 0,6, ni ubicarse por debajo de 0,5 en este tipo de construcciones. Determinar a qué altura deberán ubicarse los soportes en los bordes del valle.



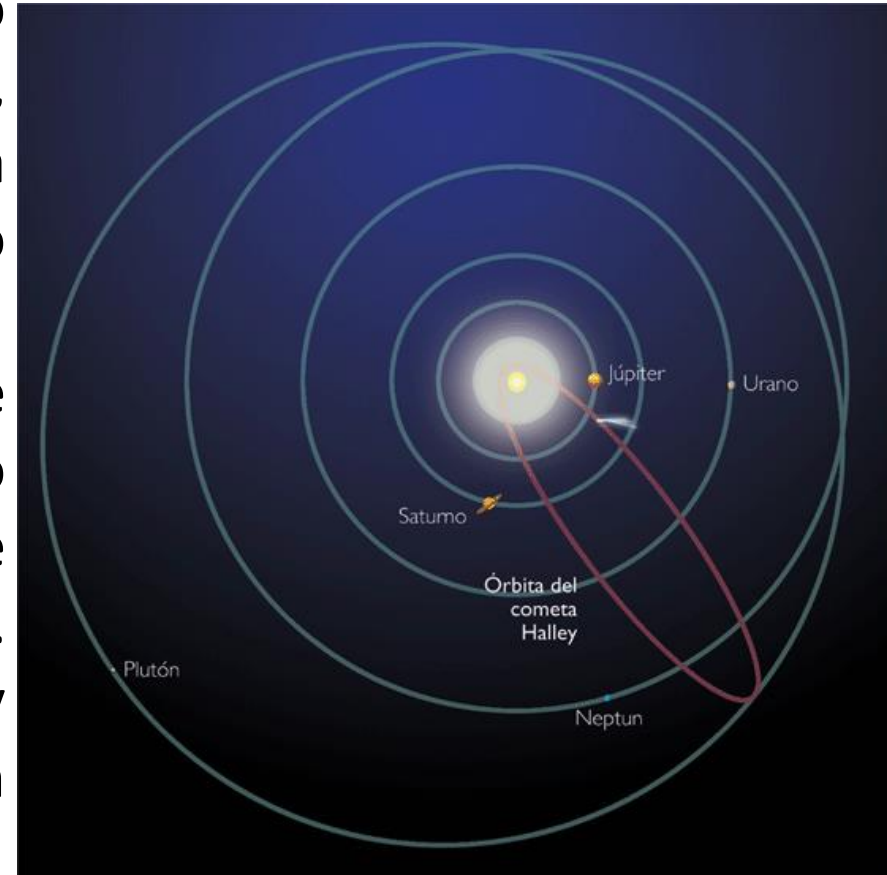
Elipse

Ejercicio de Aplicación

El cometa Halley tiene un recorrido elíptico, con el sol en uno de sus focos, con una excentricidad $e=0,98$ y una órbita de alrededor de 7 U.A. de ancho (1 U.A.: 150 millones de km).

El período de revolución de este cometa es de 76 años. Fue observado por Halley en 1682 el cual predijo que volvería a aparecer en 1758. Efectivamente así ocurrió, pero Halley no pudo ver verificada su predicción ya que murió en 1742.

- Determinar las coordenadas del centro de la elipse.



Sistemas de ecuaciones lineales

Bibliografía

- **Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal.**

Serie Mc Graw Hill. Pastorelli, Kozak, Vardanega.

- **Geometría Analítica.** Serie Schaum. Joseph Kindle.

- **Geometría Analítica Plana.** Editorial Limusa.

Charles Lehman.

