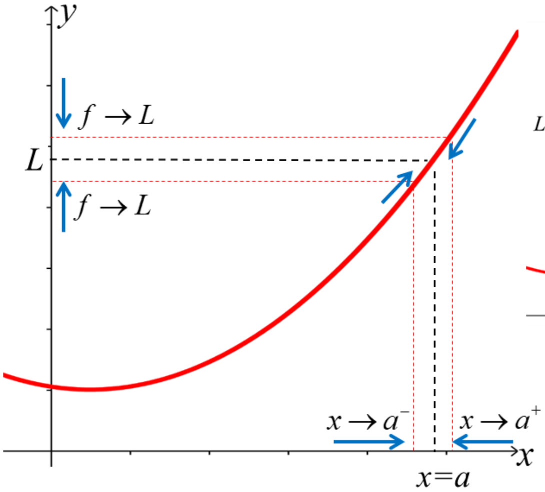
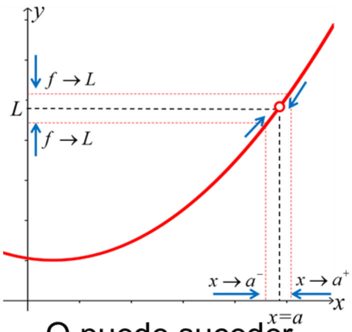
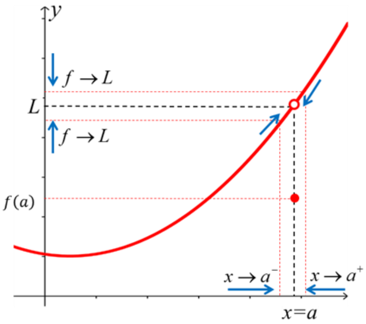
Concepto intuitivo de límite

Sea ***f*** una función definida en los puntos próximos a ***x=a***, tanto ***por izquierda*** como ***por derecha***, excepto posiblemente en ***x=a***, donde la función puede no existir, diremos que el límite: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si cuando ***x*** toma valores muy próximos a ***a***, acercándose ***por derecha*** y ***por izquierda***, ***f(x)*** se acerca a un único número real ***L***.





O puede suceder que: $f(a)\nexists$



O también puede suceder: $f(a)\exists, pero\ f(a) \neq L$

Puede suceder que: $f(a) = L$

Observemos que ***f*** está definida en los ***puntos próximos*** a ***a***, pero no necesariamente en $x = a$, lo que indica que en este estudio $\boldsymbol{x \neq a}$.

Estudiemos más detenidamente este concepto.

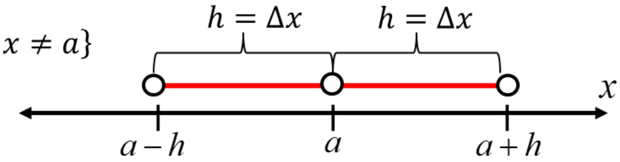
Entorno Reducido de un punto :

Si definimos un número real ***a*** y un número positivo ***h***; se llama ***entorno reducido*** de ***centro a*** y ***radio h***, y se lo denota como ***N*(a,h)***, a la unión de intervalos abiertos :

$$\mathcal{N}^*_{(a,h)} = (a-h,a) \cup (a,a+h)$$

$$\mathcal{N}^*_{(a,h)} = \{x \in R / a-h < x < a+h, con\ x \neq a\}$$

$$\mathcal{N}^*_{(a,h)} = \{x \in R / 0 < |x-a| < h\}$$



Recordemos que: $h = \Delta x$

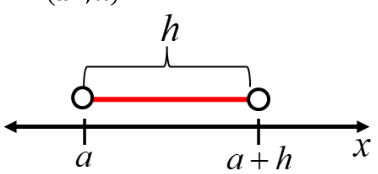
El concepto de entorno reducido de un punto es la base del estudio de límites.

Entorno Reducido por la derecha:

Se define como *entorno reducido por la derecha de un número real **a** y radio **h** (h>0)*, y se lo denota como ***N*(a⁺,h)***, al intervalo abierto:

$$\mathcal{N}^*{}_{(a^+,h)} = (a, a+h)$$

$$\mathcal{N}^*{}_{(a^+,h)} = \{x \in R / a < x < a+h\}$$

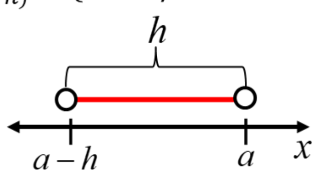


Entorno Reducido por la izquierda:

Se define como *entorno reducido por la izquierda de un número real **a** y radio **h** (h>0)*, y se lo denota como ***N*(a⁻,h)***, al intervalo abierto:

$$\mathcal{N}^*{}_{(a^-,h)} = (a-h, a)$$

$$\mathcal{N}^*{}_{(a^-,h)} = \{x \in R / a-h < x < a\}$$

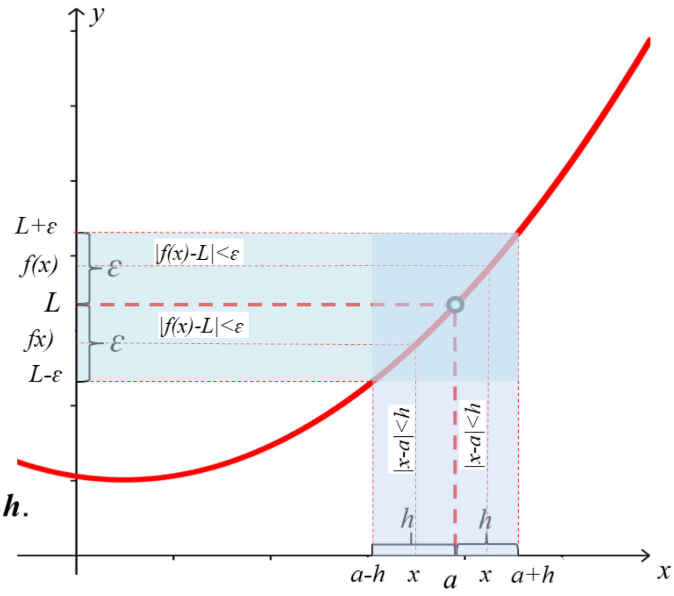


Definición Rigurosa de Limite

Se define el límite de ***f(x)*** cuando ***x*** tiende a ***a***: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

con ***a*** y ***L*** ϵ ***R***, si para todo número real ***ε>0*** arbitrariamente prefijado, existe un número real ***h>0***, que en general depende de ***ε,*** tal que **|*f(x)-L*|**< *ε* para todo ***x*** que cumple con la condición ***0***<|***x-a***|<***h***.

Su interpretación geométrica es:



0<|***x-a***|<***h***, indica que ***x*** pertenece al ***Entorno Reducido*** de centro ***a*** y radio ***h***.

EJEMPLO 1:

Dada la función: $f(x) = x^2$, calcular el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

Solución

Realizamos la ***sustitución directa*** $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1^2 \quad \therefore f(1) \exists$

Confeccionemos una tabla de valores:

x	*f(x)*
0,5	*0,25*
0,9	*0,81*
0,99	*0,9801*
$x \to 1$	$f(x) \to 1$
1,01	*1,021*
1,1	*1,21*
1,5	*2,25*

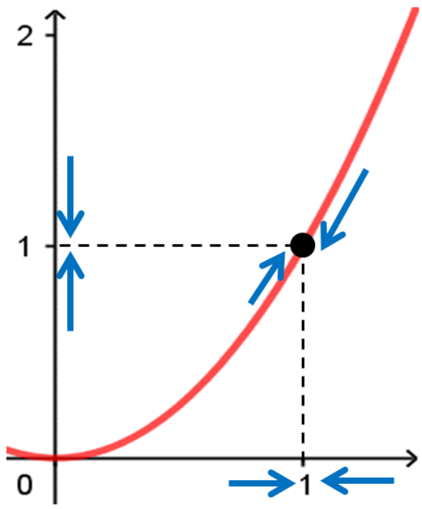
¿A qué valor se acerca *f* cuando *x* se acerca a *1*, con valores menores y mayores que 1?

Esto nos indica que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Además, en este caso

$$f(1) = 1$$



Pero eso no es una condición, porque definimos que ***x pertenece al entorno reducido de 1***.

FORMAS INDETERMINADAS

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad \mathbf{0}\cdot\infty \qquad \mathbf{0^0} \qquad \infty^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{1}^{\infty}$$

Si cuando realizamos la sustitución directa de un límite nos da como resultado alguna de estas Formas Indeterminadas (F.I.), No sabemos si existe o no el límite planteado. Lo que sí sabemos, es que $\nexists f(x)$

Cuando calculamos límites, diremos que:

El límite EXISTE si: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ Siendo ***a*** y ***k*** números reales

El límite EXISTE si: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ Siendo ***k*** un número real

El límite NO EXISTE si: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ Siendo ***a*** un número real

El límite NO EXISTE si: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Siendo ***a*** un número real

Pero existen situaciones en que la sustitución directa de un límite da como resultado alguna de las F.I. Este resultado No nos informa si existe o no el límite; en estos casos debemos trabajar matemáticamente para obtener, si existe, el valor de ese límite.

A ese trabajo matemático lo llamaremos para *trabajo para levantar la indeterminación*. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 2:

Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ calcular el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución:

Haciendo la ***sustitución directa***: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{2^2-4}{2-2}$

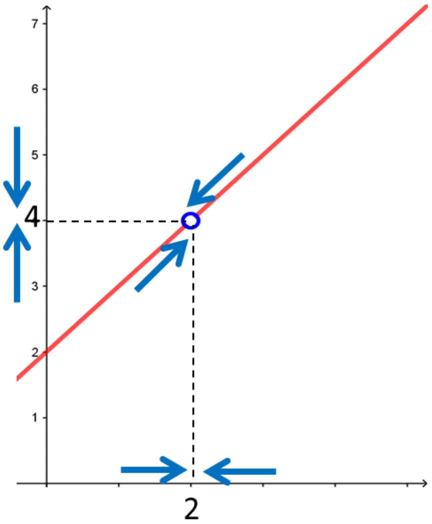
$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

Esto significa que *no existe f(2)*. Podemos confeccionar una tabla de valores, como en el ejemplo anterior, o proceder de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} =$$

Como estudiamos en $x \neq 2$: $= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}} =$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2$$



Esto significa que el límite ***existe*** y es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Debemos tener en cuenta que $\frac{x^2-4}{x-2} \neq x+2$.

Límites laterales

Límite lateral por izquierda

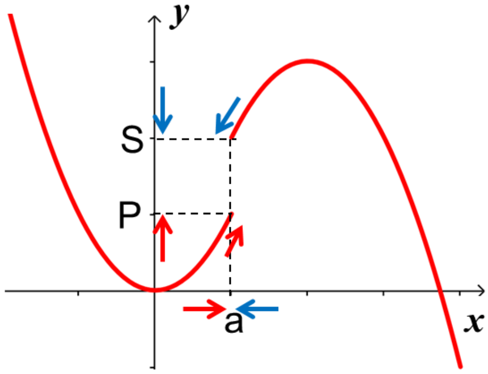
Se dice que ***f(x)*** tiende a ***P*∈*R***, cuando ***x*** tiende a ***"a" por la izquierda***, si a medida que ***x*** toma valores cada vez más cercanos, pero menores que ***a*** $(x \to a^-)$, ***f(x)*** toma valores cada vez más próximos a ***P***. "***x*** pertenece al ***entorno reducido por la izquierda*** de ***a***" ***N*(a-,h)***, que está incluido en el ***dom f***.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = P$$

Límite lateral por derecha

Se dice que ***f(x)*** tiende a ***S*∈*R***, cuando ***x*** tiende a ***"a" por la derecha***, si a medida que ***x*** toma valores cada vez más cercanos, pero mayores que ***a*** $(x \to a^+)$, ***f(x)*** toma valores cada vez más próximos a ***S***. "***x*** pertenece al ***entorno reducido por la derecha*** de ***a***" ***N*(a+,h)***, que está incluido en el ***dom f***.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = S$$



Teorema: **Condición de existencia del límite**

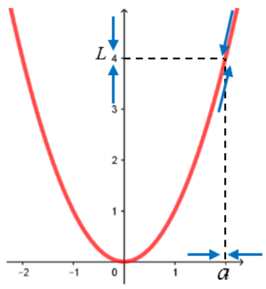
Diremos que una función ***f(x)*** tiene límite ***L***, cuando ***x*** tiende a ***"a", sí y solo sí, los límites laterales en "a", existen y son iguales***.

$a)$ $\lim_{x \to a^-} f(x) \exists$

$b)$ $\lim_{x \to a^+} f(x) \exists$

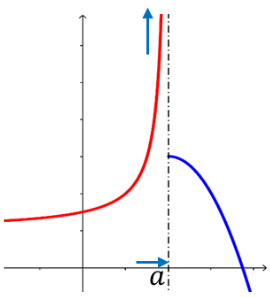
$c)$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} Si: \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \\ \Updownarrow \\ \lim_{x \to a} f(x) = L, \quad L \in R \end{array}}$$



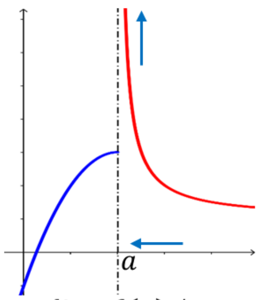
$\exists \lim_{x \to a} f(x)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones el límite No existe:



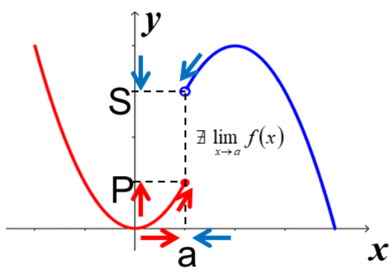
$\lim_{x \to a^-} f(x) \nexists$

$\lim_{x \to a} f(x) \nexists$



$\lim_{x \to a^+} f(x) \nexists$

$\lim_{x \to a} f(x) \nexists$



$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) \nexists$

EJEMPLO 3

Calcular, si existe el límite: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\quad si\ \ f(x) = \begin{cases} -x^2+2x & si\ \ x \leq 1 \\ x^2-2x+3 & si\ \ x > 1 \end{cases}$

Solución:

La función está definida en ramas y nos piden calcular el límite en 1, justo donde cambian las definiciones. Esto nos obliga a calcular los límites laterales.

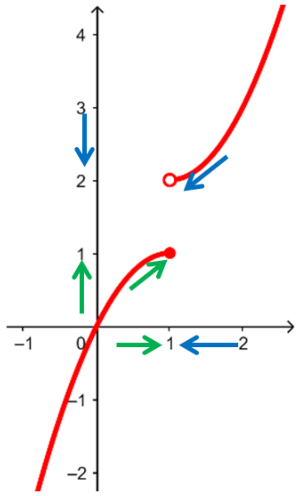
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+2x) = $$
$$= 1;\ \ \exists$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2-2x+3) = $$
$$= 2;\ \ \exists$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

No existe el límite, aunque exista f(1)=1

Si no hubiera existido $f(1)$, ¿cambiaría el estudio de este límite?



Propiedades fundamentales del límite de una función en un punto

1) $\lim\limits_{x\to c} k = k$ El límite de una constante es la constante misma

EJEMPLO: $\lim\limits_{x\to 4} 5 = 5$

Si ***f(x)*** y ***g(x)*** son dos funciones y ***c*∈*R***, tal que se cumple:

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = A, \lim\limits_{x\to c} g(x) = B\ \ con\ A\ y\ B \in R$ entonces:

2) $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = A \pm B$

El límite de una suma algebraica de funciones es la suma algebraica de cada uno de los límites

EJEMPLO 1: $\lim\limits_{x\to 4}[(x-1)+\sqrt{x}] = \lim\limits_{x\to 4}(x-1) + \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$

$$= (4-1)+\sqrt{4}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 4}[(x-1)+\sqrt{x}] = 5}$$

EJEMPLO 2:

$$\lim_{x \to 3}[(x^2 - 9) - x] = \lim_{x \to 3}(x^2 - 9) - \lim_{x \to 3} x =$$

$$= \lim_{x \to 3}[0 - 3] = -3$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 3}\left[\left(x^2 - 9\right) - x\right] = -3}$$

3) $$\lim_{x \to c}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to c} f(x); \quad con\ k \in R$$

$$\lim_{x \to c}[k \cdot f(x)] = k \cdot B$$

El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 1}\left[-4 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\right] = -4 \cdot \lim_{x \to 1} \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= -4 \cdot 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1}\left[-4 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\right] = 0}$$

4) $$\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = A \cdot B$$

El límite del producto de dos funciones es el producto de los límites de cada una de ellas

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 0}[(x^3 - 2x^2 + x) \cdot e^x] = \lim_{x \to 0}(x^3 - 2x^2 + x) \cdot \lim_{x \to 0} e^x$$

$$= \lim_{x \to 0}(-1 \cdot 1)$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0}}[(x^3 - 2x^2 + x) \cdot e^x] = \mathbf{-1}$$

5) $$\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{A}{B}; \quad con\ B \neq 0$$

El límite del cociente de dos funciones es el cociente de los límites de cada una de ellas

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 3}\left[\frac{x^2 + 2x - 4}{x + 2}\right] = \frac{\lim_{x \to 3}(x^2 + 2x - 4)}{\lim_{x \to 3}(x + 2)} =$$

$$= \frac{3^2 + 2 \cdot 3 - 4}{3 + 2} = \frac{11}{5}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 3}\left[\frac{x^2 + 2x - 4}{x + 2}\right] = \frac{11}{5}}$$

6) $\lim\limits_{x \to a} \left[k^{f(x)}\right] = k^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ El límite de una constante elevada a una función es igual a la constante elevada al límite de la función.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 1} \left[(-5)^{(x^2+2x+1)}\right] = (-5)^{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+2x+1)}$$
$$= (-5)^4 = 625$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 1} \left[(-5)^{(x^2+2x+1)}\right] = 625}$$

7) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ El límite de una función elevada a otra función es igual al límite de la función base, elevado al límite de la función exponente.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 2} \left[(x^2 - 2x + 1)^{(x+2)}\right] = \left[\lim_{x \to 2}(x^2 - 2x + 1)\right]^{\lim\limits_{x \to 2}(x+2)}$$
$$= 1^4 = 1$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 1} \left[(-5)^{(x^2+2x+1)}\right] = 1}$$

8) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}; \quad c \in \Re \ y \ n \in N$ La raíz debe estar definida en ***c***

EJEMPLOS:

$$a)\ \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

$$b)\ \lim_{x \to -27} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Esta propiedad también vale para los casos de funciones con exponentes fraccionarios, siempre que ***la raíz esté definida en c***.

EJEMPLOS:

$$a)\ \lim_{x \to 2} (x)^{3/2} = (2)^{3/2} = \sqrt{8}$$

$$b)\ \lim_{x \to -3} (x)^{4/3} = (-3)^{4/3} = 27$$

$$c)\ \lim_{x \to -8} (x)^{1/3} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

9) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$

El límite de una función elevada a una constante es igual al límite de la función elevado a la constante.

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[sen\,x]^2 = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(sen\,x)\right]^2$$
$$= 1^2 = 1$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[sen\,x]^2 = 1}$$

10) $\lim_{x\to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

El límite de una función compuesta $f(g)$ es igual f del límite de la función g.

EJEMPLOS:

$$a)\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\ln(x^2-1) = \ln\left[\lim_{x\to 2}(x^2-1)\right]$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} arcsen\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = arcsen\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)\right]$$

Cuestionario 1

¿Cuántas y cuáles son las Formas Indeterminadas?

Si la sustitución directa $\lim_{x\to a} f(x) = 1^\infty$ ¿Existe $f(a)$? ¿Cuánto vale?

¿Por qué se puede reducir el siguiente límite? $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}}$

Si el resultado de un límite da ∞ ¿Existe el límite?

¿Qué propiedad se aplica en: $\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]$?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, ¿significa que $\exists\ f(a)$?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, ¿significa que $\nexists\ f(a)$?

Límites infinitos

Diremos que una función ***f(x) tiende a infinito***, cuando ***x*** tiende a un número real ***a*** si a medida que ***x*** toma valores cada vez más próximos a ***a***, el |***f(x)***| toma valores cada vez más grandes.

En estos casos escribiremos: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

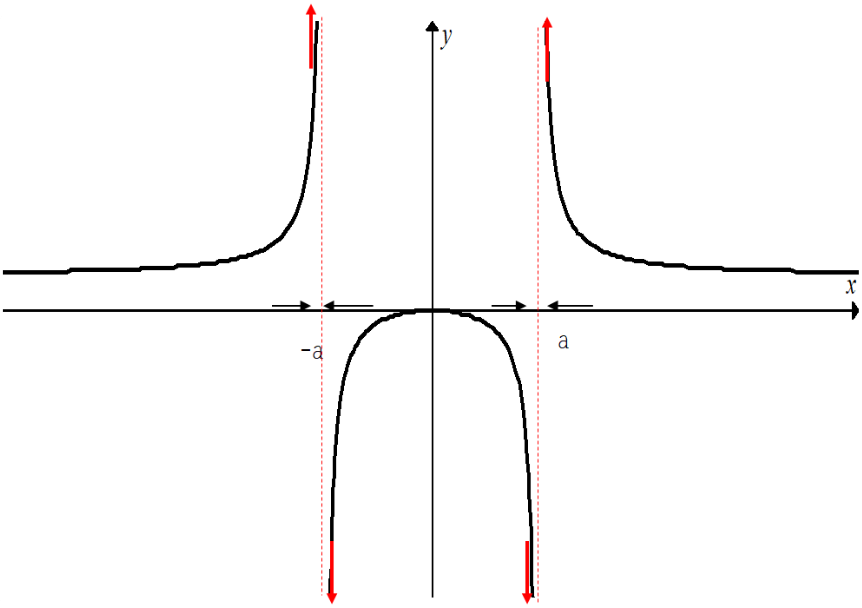
EJEMPLOS:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -a^-} f(x) = +\infty$

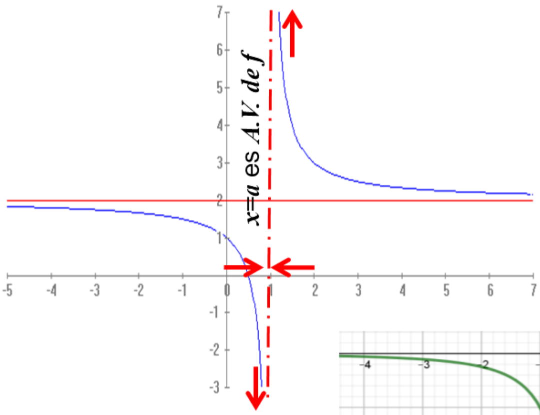
$\lim\limits_{x \to -a^+} f(x) = -\infty$

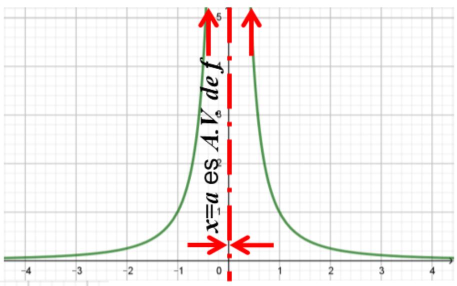


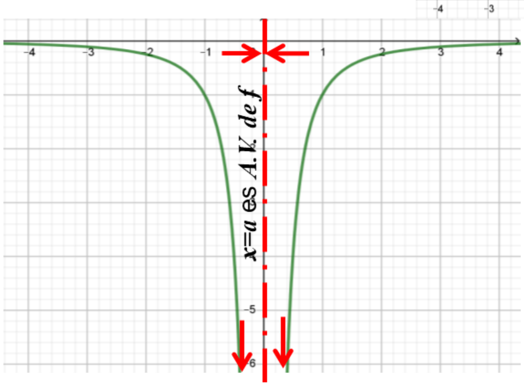
Asíntota vertical

La recta vertical ***x=a*** es una ***Asíntota Vertical de la gráfica de f, sí y solo sí***

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \end{cases}$$ ***a NO pertenece al dom f***







EJEMPLO 1: Determine si la siguiente función tiene asíntotas verticales .

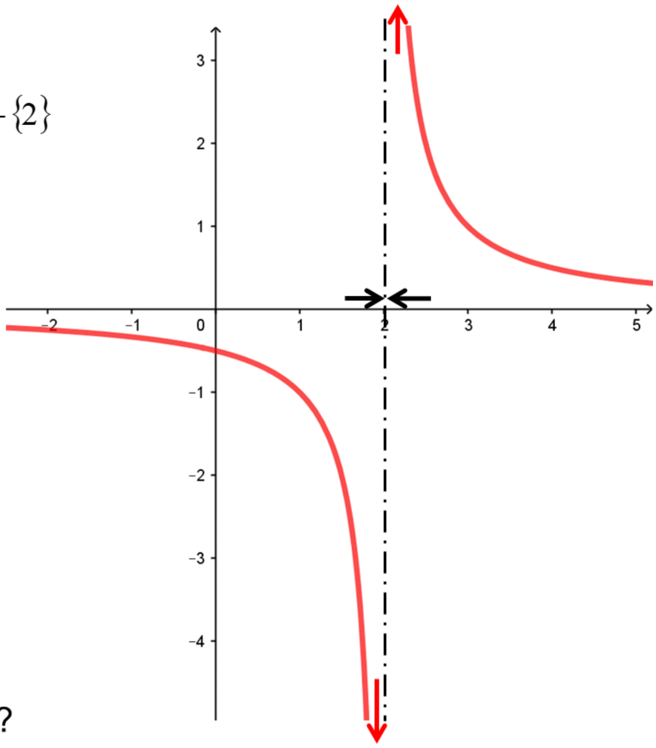
$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

Solución:

Determinemos el dominio: $dom\ f = R-\{2\}$

$$f(2)=\frac{1}{2-2} \quad \therefore f(2)=\infty$$

$$f(2)\nexists$$



Esto nos indica que debemos estudiar la posibilidad que exista una *Asíntota Vertical* en $x=2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} =$$

$$=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$$

$$\boldsymbol{x=2\ \ es\ \ AV\ \ de\ \ f}$$

¿Por qué el resultado del límite es $\pm\infty$?

Lo explica el estudio de los límites laterales.

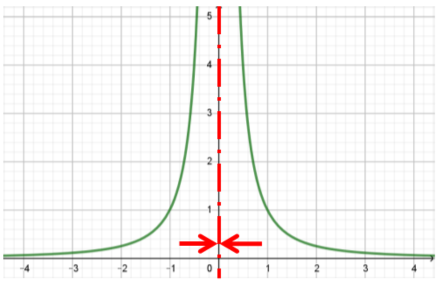
EJEMPLO 2: Determine si la siguiente función tiene asíntotas verticales .

$$f: f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$dom\ f=\Re-\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$\boldsymbol{x=0\ es\ A.V.de\ f}$$



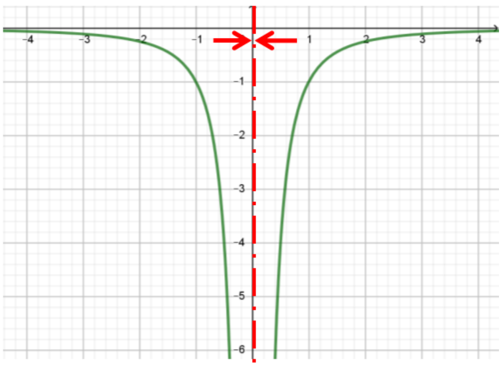
EJEMPLO 3: Determine si la siguiente función tiene asíntotas verticales .

$$f: f(x)=\frac{-x}{x^3} \qquad dom\ f=\Re-\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x^3}=\frac{0}{0}\ FI$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x^3}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

$$\boldsymbol{x=0\ es\ A.V.de\ f}$$

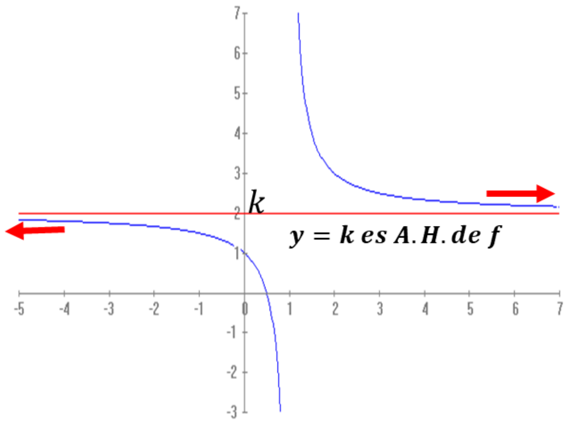


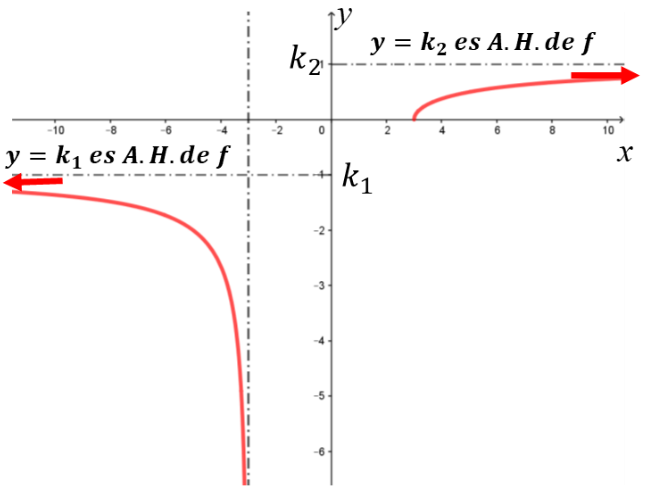
Límite cuando x tiende a infinito. *Asíntota Horizontal*

Diremos que una función $f(x)$ tiene una ***Asíntota Horizontal*** en $y=k$; $k\epsilon R$, si a medida que $|x|$ toma valores cada vez más grandes, $f(x)$ tiende a k.

En estos casos escribiremos; si:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \qquad \text{O bien:} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k_1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k_2 \end{cases}$$





EJEMPLO 1: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

Dominio de f:

El denominador debe ser distinto de 0:

$x^2 - 9 \neq 0$

$x^2 \neq 9$

$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{9}$

$|x| \neq 3 \quad \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$Dom\ f = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty)$

Intersecciones con ejes:

$\cap\ OX: \dfrac{x}{x^2-9} = 0$

$x = 0 \quad P(0,0)$

$\cap\ OY: x = 0 \quad P(0,0)$

Simetría:

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-9} \qquad f(-x) = \dfrac{-x}{x^2-9}$

$f(-x) \neq f(x)$ ***f*** No es Par

$-f(-x) = \cancel{-}\dfrac{\cancel{-}x}{x^2-9}$

$-f(-x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

$f(x) = -f(-x)$ ***f es IMPAR***

Asíntotas:

A.V., debemos estudiar en $x=-3$ y en $x=3$

$\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x}{x^2-9} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x}{x^2-9} = +\infty$ $\quad$ $x=3$ es ***A.V.*** de ***f***

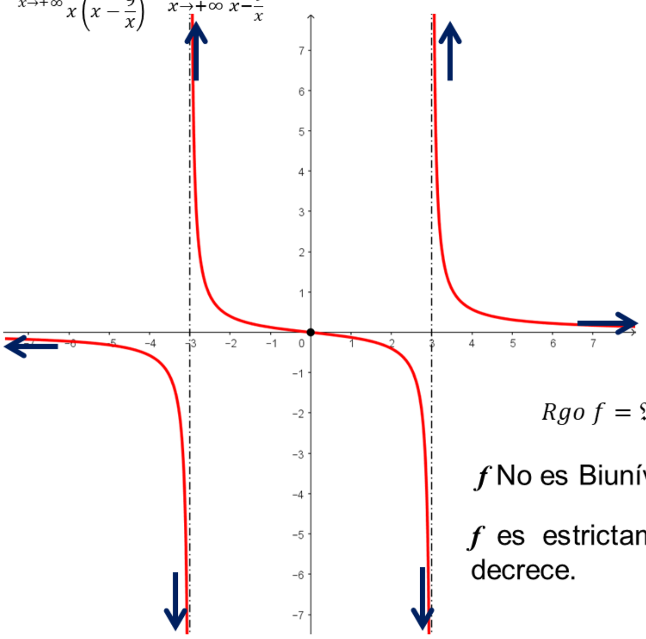
Por Simetría: $x=-3$ es ***A.V.*** de ***f***

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-9} = \dfrac{\infty}{\infty};\ F.I.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\left(x-\frac{9}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-\frac{9}{x}} = 0\ (+)$

¿qué pasa $x \to -\infty$?

$y=0$ es ***A.H.*** de ***f***



$Rgo\ f = \Re$

f No es Biunívoca

f es estrictamente decrece.

EJEMPLO 2: $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

$x^2 - 9 > 0$

$x^2 > 9$

$\sqrt{x^2} > \sqrt{9}$

$|x| > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$

$dom\ g = (-\infty, -3) \cup (3, \infty,)$

Simetría:

$$g(-x) = \frac{-x-3}{\sqrt{(-x^2)-9}} = \frac{-x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

$g(-x) \neq g(x)$ f No es Par

$$-g(-x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$$

$-g(-x) \neq g(x)$ f No es Impar

Asíntotas:

Asíntota Vertical:

Como g no tiene Simetría, debemos calcular las posibles asíntotas en x=-3 y x=3

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

x=-3 Es A.V. de g

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-3}}\cdot\sqrt{x-3}}{\cancel{\sqrt{x-3}}\cdot\sqrt{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = \frac{0}{\sqrt{6}}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 0$$

x=3 NO es A.V. de g

Asíntotas Horizontales:

También debemos calcular las posibles asíntotas horizontales en -∞ y en + ∞

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-\infty}{\infty}$$ (Resultado NEGATIVO)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} =$$

$$\boxed{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$= -\frac{1-\frac{3}{-\infty}}{\sqrt{1-\frac{9}{(-\infty)^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1}}$$

y=-1 Es A.H. de g

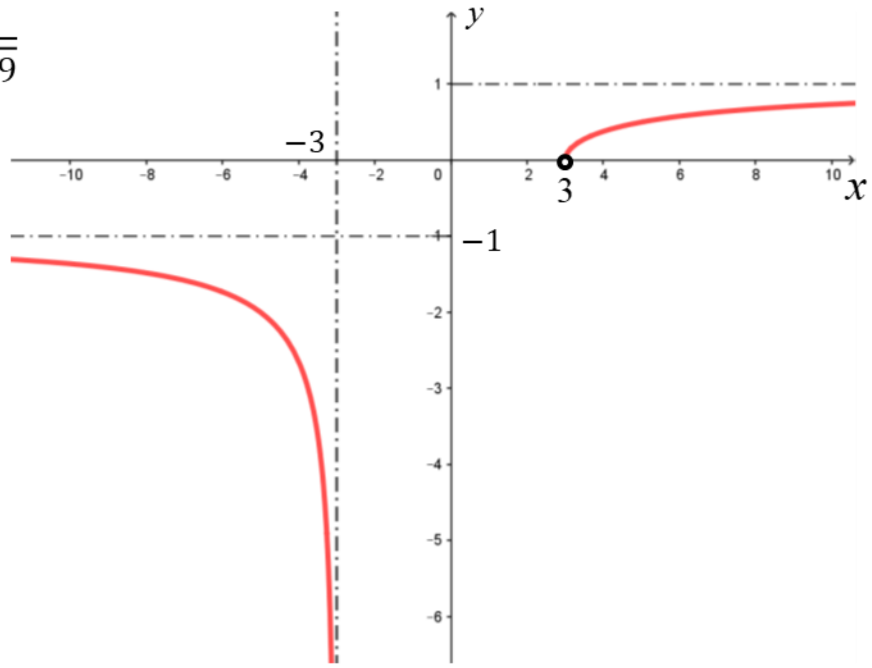
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{\infty}{\infty}$$ (Resultado POSITIVO)

El proceso es el mismo, luego:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

y=1 Es A.H. de g

$$g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$



Una función NO tiene asíntotas horizontales, si a medida que $|x|$ toma valores cada vez más grandes, $|f(x)|$ toma también valores cada vez más grandes.

Pueden darse las siguientes situaciones:

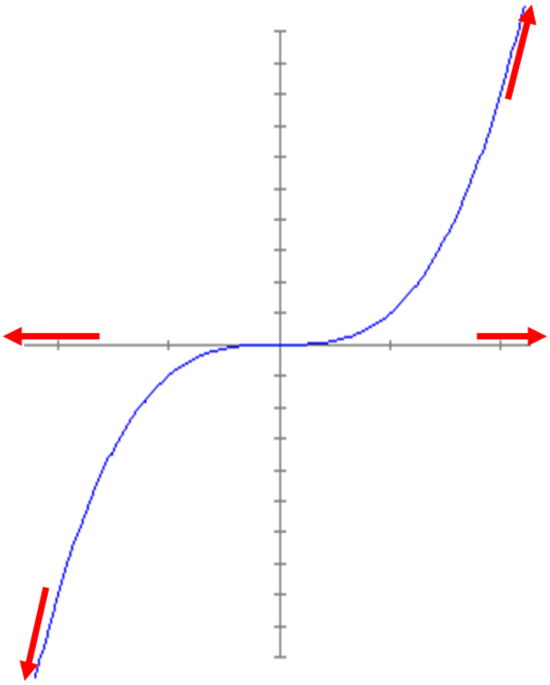
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO: $f(x) = x^3$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



Cuestionario 2

¿Qué se debe estudiar de una función, dada de manera analítica para determinar los posibles valores de x donde se ubica/n la/s asíntota/s vertical/es?

¿Cómo se calculan las asíntotas horizontales en una función de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios reales de x?

¿Qué se debe tener en cuenta a la hora de graficar una función?

Si el $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ¿qué indica en su gráfica?

Si el $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, ¿qué indica en su gráfica?

¿Una función puede tener más de una asíntota vertical?

Límites notables o Límites fundamentales

Limite exponencial fundamental:

Se lo puede expresar de dos maneras distintas; cada una tiene su aplicación práctica.

- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

Limite trigonométrico fundamental:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Para demostrar este teorema necesitamos conocer antes:

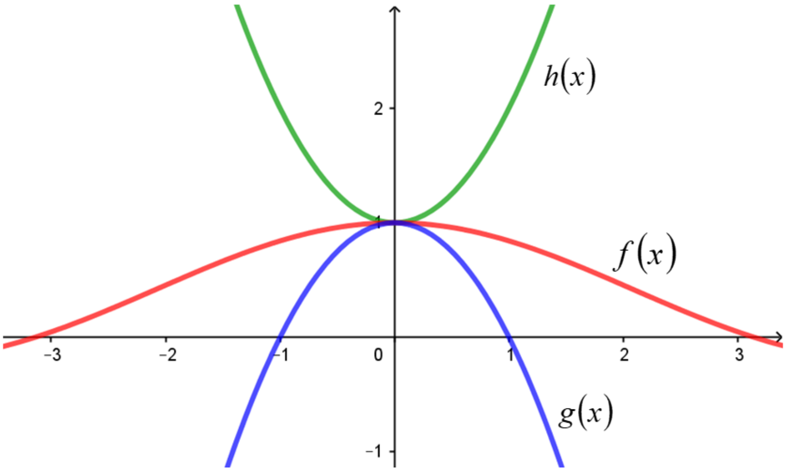
Teorema de Estricción:

Sean ***f***, ***g*** y ***h*** funciones definidas en un intervalo ***I***, que contenga a ***a***, excepto posiblemente en ***x***=***a***. Supongamos que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo $x \ne a$, con la condición de que $x \in I$.

Además, supongamos también que: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

Se verifica que:

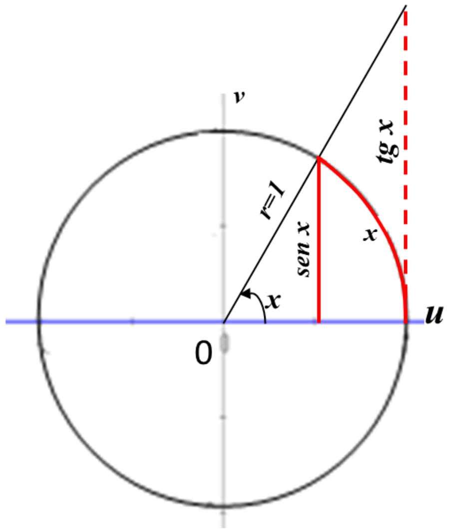
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

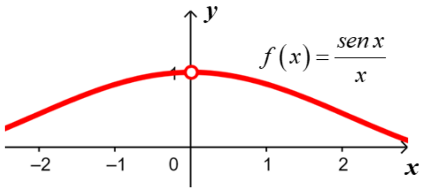


Teorema: Límite Trigonométrico Fundamental

Si $0<x<\pi/2$, se cumple que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$

Demostración:





Es evidente que: $sen\,x < x < tg\,x$

Si dividimos m a m por ***sen x***:

$$1<\frac{x}{sen\,x}<\frac{1}{\cos x}$$

Haciendo los recíprocos y ordenando:

$$\cos x<\frac{sen\,x}{x}<1$$

Tomando límite en los tres miembros cuando $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)<\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)<\lim_{x\to 0}(1)$$

$$1<\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}<1$$

Aplicando el Teorema de Estricción

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Lo que demuestra el Teorema

EJEMPLO 1:

Calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen2x}{sen3x}=\dfrac{0}{0}$

Recordemos el límite trigonométrico fundamental: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x\cdot sen2x}{2x}}{\dfrac{3x\cdot sen3x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cancel{x}\cdot sen2x}{2x}}{\dfrac{3\cancel{x}\cdot sen3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{sen2x}{2x}}{\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{sen3x}{3x}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\frac{2}{3}}$$

PROBLEMA:

La cantidad de una droga (cd) en la corriente sanguínea $\boldsymbol{t}$ horas después de inyectada intramuscularmente, está dada por la función: $f(t)=\dfrac{10t}{t^2+1}$.

Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

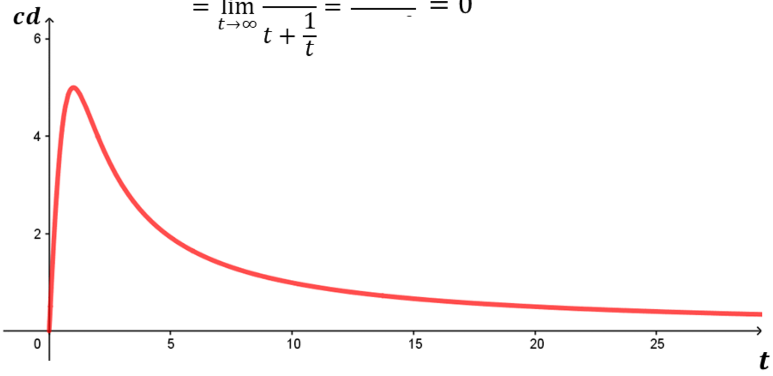
Solución:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10t}{t^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10t}{t^2+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{10t}{t}}{\frac{t^2+1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{10}{t+\frac{1}{t}}=\frac{10}{\ }=0$$

Al pasar muchas horas la cantidad de droga en sangre tiende a anularse.



Cuestionario 3

¿Dada la función $f(x)=\frac{senx}{x}$, $\exists\ f(0)$?

¿Existe le $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$?

¿Existe le $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$?

¿Existe le $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sen\,x}{x}$?

¿Existe el $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{senx}{x}$?, si es así, ¿cuánto es su valor?

Si $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$, ¿significa que $\exists\ f(a)$?

Si $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, ¿significa que $\nexists\ f(a)$?

EJEMPLO 1:

Calcular el $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{2^2 - 5.2 + 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$ Forma Indeterminada

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -5 & 6 \\
2 & & 2 & -6 \\
\hline
 & 1 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array} \quad \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{x - 2}$$

Al estudiar el límite cuando x tiende a 2, sabemos que $x \neq 2$, entonces:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-3)}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x - 3)$$

Finalmente: $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$$

EJEMPLO 2:

Calcular el $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Forma Indeterminada

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}\left(5 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{5 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} =$$

$$= \frac{5}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} = \infty \therefore \nexists \textit{ el límite}$$

EJEMPLO 3:

Calcular el $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = \infty - \infty$ Forma Indeterminada

En este caso conviene racionalizar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+5-\cancel{x}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right) = 0$$