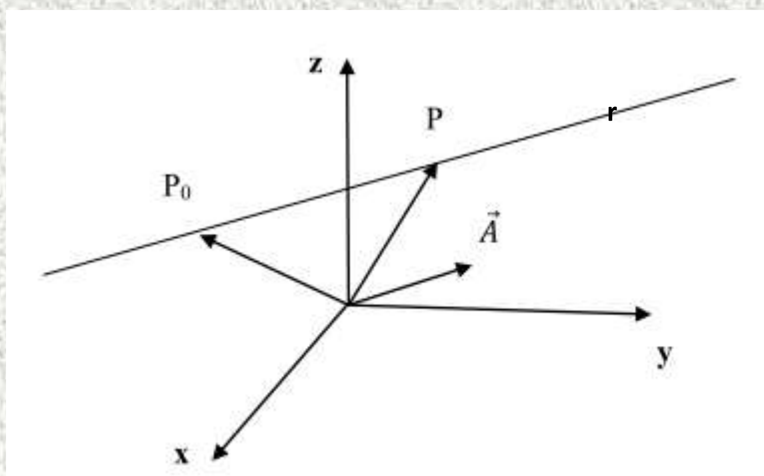
TRABAJO PRACTICO N° 7: Ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^3$ y Ecuaciones del plano

Repaso de conceptos importantes

La recta "**r**" que pasa por el Punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene por vector dirección al Vector $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$ es el conjunto de puntos P del espacio $\mathbb{R}^3$ que verifica la relación vectorial $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{A}$ con $\lambda\epsilon\mathbb{R}$.



FORMAS DE LAS ECUACION DE LA RECTA EN $\mathbb{R}^3$

Ecuación vectorial: $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{A}$ con $\lambda\epsilon\mathbb{R}$., donde $\vec{A}$ es el vector dirección de la recta "**r**" y P_0 punto de paso de la recta.

Ecuaciones paramétricas cartesianas:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda . a_x \\ y = y_0 + \lambda . a_y \\ z = z_0 + \lambda . a_z \end{cases}$$

Ecuación Simétrica:

$$r: \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Ecuación General o implícita:

$$r: \begin{cases} A.x + B.y + C.z + D = 0 \\ A'.x + B'.y + C'.z + D' = 0 \end{cases}$$

Ejercitación de $\mathbb{R}^3$

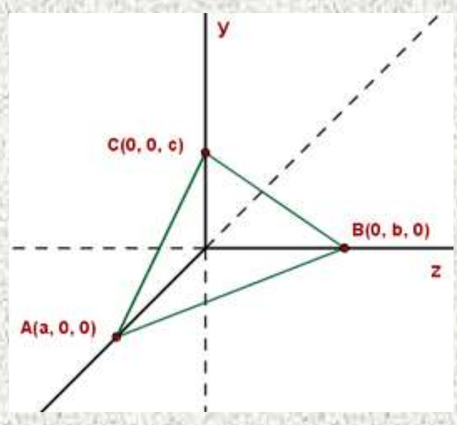
1. Sea "r" la recta de ecuación: $\boldsymbol{r}: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$
   Pertenecen a "***r***" los puntos $A\ (2,-2,-2)$ y $B\ (3,2,6)$?
2. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta:
   a. Que pasa por el punto $A\ (1,2,1)$ y cuyo vector dirección es $\vec{u} = (4,5,-1)$.
   b. Que pasa por los puntos $P\ (-1,3,2)$ y $Q\ (0,-3,1)$.
   c. Que pasa por el punto $B\ (8,2,3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{j}$.
3. Encuentre la ecuación simétrica de la recta que contiene al punto $A\ (-3,-1,1)$ y es paralela a la recta cuyo vector dirección es $\vec{v} = (2,0,-1)$.
4. Escriba las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P\ (1,-3,0)$ y es paralelo al vector $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ siendo $\vec{u} = (1,-1,2)$ y $\vec{v} = (2,0,0)$
5. Encuentre los valores de ***m*** y ***n*** para que las rectas "***r***" y "***s***" sean paralelas:
   $r: \begin{cases} x = 5 + 4.\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ $\qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$
6. Determine el ángulo que forman las rectas: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z+3}{1}$ y $s: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$
7. Hallar las ecuaciones de la recta "***T***" que pasa por el punto $P_0\ (-2,4,3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $P_1\ (1,3,4)$ y $P_2\ (-2,2,3)$.
8. Dados los puntos $A\ (1,2,3)$ y $B\ (3,3,1)$ y un vector $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\,\vec{k}$; siendo "***L***" la recta que pasa por ***A*** y es paralela a $\vec{v}$.
   a. Probar que *B* no pertenece a ***L***.
   b. Calcular la distancia desde *B* hacia la recta ***L***.
   c. Calcular la distancia mínima entre las rectas ***L*** y ***T*** (ejercicio 7).

Repaso de conceptos importantes

Dado un punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y el vector $\vec{N} = (A, B, C)$, el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que cumplen la condición $\overrightarrow{P_0P}.\ \vec{N} = 0$ se denomina plano en $\mathbb{R}^3$.

Ecuación General:

$$A.x + B.y + C.z + D = 0$$



Ecuación del plano que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$**:**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - x_0 & z_2 - x_0 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Segmentaria:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ejercitación

1. Dado el plano de ecuación: $3x + 2y - z = 0$, verificar si pertenecen al mismo, los puntos $P\ (2,0,1)$; $Q\ (1,2,7)$; $R\ (0,2,4)$ y $S\ (1,-2,0)$.
2. Encuentre la ecuación del plano que:
    a. Pasa por el punto $P\ (3,-2,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{N} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$
    b. Es paralelo al plano de ecuación $3x - 7y = 2$ y pasa por el punto $Q\ (2,-1,5)$.
    c. Pasa por el punto $R\ (-3,-1,2)$ y es paralelo al plano de ecuación $z = 2$.
    d. Pasa por el punto $S\ (2,-1,3)$ y es paralelo al plano "YZ".
    e. Es perpendicular al vector definido por los puntos $A\,(2,-1,3)$, $B\,(2,-1,3)$ y pasa por el punto $S\ (0,-3,3)$.
    f. Pasa por los puntos $C\ (2,5,-1)$, $D\ (1,-1,2)$, y $E\ (3,0,-2)$.

3. Escriba la ecuación general del plano que es:
    a. Paralelo al plano "YX" y a 5 unidades de él.
    b. Paralelo al plano "XZ" y a 8 unidades de él.
4. Determine el ángulo entre los planos:
    a. $\pi_1: 3x - y - 2z - 5 = 0$; $\pi_2: x + 9y - z + 2 = 0$
    b. $\pi_3: 2x + 3y - z - 3 = 0$; $\pi_4: x - y - z + 5 = 0$
    c. Encuentre la distancia del punto $C\ (2,5,-1)$ a los planos de **a.** y **b.**
5. Cuatro planos tienen las ecuaciones generales siguientes:

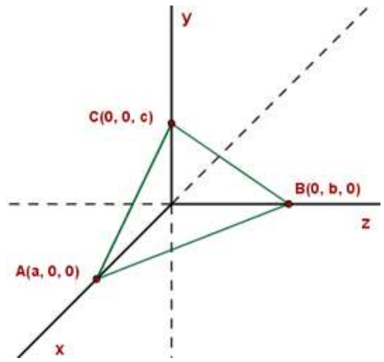
    $\alpha: x + 2y - 2z = -3$; $\beta: 2x + y + 2z = 3$

    $\gamma: 3x - 6y + 3z = 7$; $\varphi: x - 2y - 8z = 7$

    a. Determinar cuáles son paralelos y cuales perpendiculares.
    b. Si los planos son paralelos calcule la distancia entre ellos.
    c. Calcule el ángulo mínimo entre ellos si no son paralelos ni perpendiculares.
6. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $A\ (2,3,2)$; $B\ (3,1,-1)$ y $C\ (6,-4,6)$.
7. Dados los planos de ecuación: $\pi_1: x - 2y + z - 2 = 0$ y $\pi_2: 2x - 3y - 2z - 5 = 0$, determine la ecuación de la recta definida por la intercepción de ambos.
8. Calcule la distancia del punto $P\ (2,3,-9)$ a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + 3.\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2.\lambda \end{cases}$
9. Determine la distancia del punto $P\ (3,2,-2)$ a los planos:
    a. $\gamma: 2x + y + z + 1 = 7$
    b. $\sigma: 2x - 3 = 7$
10. Determine la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta "***r***" que es perpendicular a los vectores $\vec{A} = (2,0,1)$ y $\vec{B} = (-3,1,1)$ y que pasa por la intercepción de las rectas: $\begin{cases} \frac{x-7}{-3} = \frac{y+7}{4} = z + 3 \\ (x,y,z) = (2,0,4) + t.(1,-1,3), \ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$
11. Encuentre el ángulo entre la recta $r: \begin{cases} x = 5 + 4.\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y el plano de ecuación $\gamma: 3x - y - 2z - 1 = 7$.
12. Estudie las posiciones relativas entre los siguientes planos:

    a. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$

13. Encontrar la ecuación del plano determinado por los puntos A, B, y C de la figura, cuyas coordenadas son $A\ (2,0,0)$; $B\ (0,3,0)$ y $C\ (0,0,6)$



14. ¿ Cuál es el ángulo entre $s\colon\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ y el plano $\gamma\colon 3x-4y+2z-5=0$

EJERCICIOS RESUELTOS: RECTA EN $\mathbb{R}^3$ Y PLANO

1. Hallar la ecuación continua o simétrica de la recta que es paralela a los planos $\pi_1\colon x-3y+z=0$, $\pi_2\colon 2x-y+3z-5=0$ y pasa por el punto $C\ (2,-1,5)$.

Solución.

El vector dirección de la recta es perpendicular a los vectores normales de cada plano:
$\overrightarrow{N_1}=\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k}$ y $\overrightarrow{N_2}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\,\vec{k}$

$$\vec{u}=\overrightarrow{N_1}\,x\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-8\vec{\imath}-\vec{\jmath}+5\,\vec{k}$$

El punto de paso $C\ (2,-1,5)$ y el vector normal $\vec{u}=-8\vec{\imath}-\vec{\jmath}+5\,\vec{k}$, determinan la ecuación de la recta en su forma segmentaria:

$$\boxed{\boldsymbol{r}\colon \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{-8}}=\frac{\boldsymbol{y+1}}{\boldsymbol{-1}}=\frac{\boldsymbol{z-5}}{\boldsymbol{5}}}$$

2. Compruebe que las rectas:

$r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2$ y $s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ sean paralelas.

Posteriormente determine la ecuación plano que las contiene.

<u>Solución.</u>

- El vector dirección de la recta "***r***" es $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ y el punto de paso $P_0\ (1,0,2)$
- El vector dirección de la recta "**s**" es $\vec{B} = (1,0,-2)x\ (1,-2,0) = (-4,-2,-2)$ que resulta paralelo al vector $\vec{A}$ de la recta "***r***".

Las rectas "r" y "s" tienen la misma dirección. Además $P_0\ (1,0,2) \in r$, pero no pertenece a "s". Entonces las rectas son paralelas.

Obtenemos un punto Q de la recta "s" haciendo y=0, quedando $Q\ (11,0,3)$.

El plano que buscamos será paralelo al vector $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ y al vector que se construye desde el Punto ***P₀*** de "r" y ***Q*** de "s"; $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (10,0,1)$. O sea que la normal del plano puede obtenerse $\vec{N} = \vec{A}\ x\ \overrightarrow{PQ} = (2,1,1)x\ (10,0,1) = (1,8,-10)$.

La ecuación del plano será $\pi: 1.(x-1) + 8.(y-0) - 10.(z-2) = 0$

Finalmente $\boxed{\boldsymbol{\pi: x + 8y - 10z + 19 = 0}}$

3. Dado el punto $P_0\ (0,1,1)$, el plano $\pi: 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, encuentre:
   a. La ecuación del plano "α" paralelo a "*π*" y que pase por "P_0".
   b. Ecuación del plano "β" perpendicular a "*r*" y que pasa por "P_0".

<u>Solución.</u>

a) El plano **"α"** es paralelo a ***"π"***, por ende tiene el mismo vector normal. $\overrightarrow{N_\alpha} = \overrightarrow{N_\pi} = (3,-2,1)$.

   Podemos encontrar la ecuación del plano de 2 formas:

   i. $\alpha: \overrightarrow{P_0P}.\overrightarrow{N_\alpha} = 0$; reemplazando $\alpha: (x, y-1, z-1).(3,-2,1) = 0$, donde finalmente $\boxed{\alpha: 3x - 2y + z + 1 = 0}$

   ii. Por ser paralelos se diferencian en ***D***. Siendo $\alpha: 3x - 2y + z + D = 0$; hacemos cumplir la condición que pase por $\boldsymbol{P_0}$. Reemplazamos las coordenadas de P0 en $\alpha: 3.0 - 2.1 + 1 + D = 0 \quad => \quad D = 1$.

Llegando al mismo resultado: $\boxed{\alpha: 3x - 2y + z + 1 = 0}$

b) El vector dirección $\vec{A}$ de "r" es perpendicular a **"β",** por ende $\overrightarrow{N_\beta} = \vec{A} = (1, -1{,}3)$. La ecuación general del plano nos queda $\beta: (x, y - 1, z - 1).(1{,}1, -3) = 0$a. Finalmente $\boxed{\beta: x - y + 3z = 0.}$

Solución ejercicio 11)a)

Escribimos el sistema ordenado $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$. Luego escribimos la matriz ampliada del sistema como sistema de ecuaciones y resolvemos por Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) (1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) (2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$(3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) (4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

r(A)=3

r(A')=3

Operaciones Elementales:

1) $f_2+(-2).f_1$; $f_3+(-1).f_1$
2) $f_1+(-1).f_3$; $f_2+3.f_3$
3) $(-1/9).f_2$
4) $f_1+(-3).f_2$; $f_3+2.f_2$

Como r(A)=r(A')=3, el sistema es compatible determinado. La unica solucion es: x=1; y=2, z=1. Los tres planos se interceptan en el punto