Ejercicio 1. Analizar el comportamiento de las siguientes integrales impropias:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

b) $\int_0^{+\infty} e^{px} dx$

Ejercicio 2. Estudiar la naturaleza de las siguientes integrales impropias de primera especie y determinar el valor de estas cuando sean convergentes.

a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+3}$

f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

g) $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$

h) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Ejercicio 3. Determine la convergencia de cada una de las siguientes integrales por comparación con la integral dada. Si la integral converge, halle el número al que converge.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$ comparar con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ comparar con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Ejercicio 4. Sin integrar, determinar si la integral dada converge (o diverge)

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{2x^{\frac{5}{3}}} dx$

Ejercicio 5. Estudiar la convergencia

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\, dx$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

Ejercicio 6. Dada la integral impropia $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x\,(2-x)}} dx$. Se solicita:

a) Identificar la especie de la integral impropia

b) Calcular la integral, indicando si es convergente o divergente

c) Transfórmela en una integral impropia de primera especie

d) Transfórmela en una integral propia

Ejercicio 7. Estudiar la naturaleza de las siguientes integrales impropias de segunda especie y determinar el valor de estas cuando sean convergentes.

a) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

d) $\int_{-2}^7 \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

e) $\int_0^1 (x-1)\ln x\,dx$

f) $\int_0^\pi \sec^2 x\,dx$

g) $\int_2^4 \frac{x-2}{x^2-5x+4}\,dx$

h) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

Ejercicio 8. Determine si fuera posible asignar un valor real al área de la región plana limitada por las curvas dadas:

a) $y = \frac{18}{9x+x^3}$, su asíntota vertical, el eje x, y la recta de x = 3.

b) $y = \frac{18}{9x+x^3}$, su asíntota horizontal, desde la recta x = 3 hacia la derecha.

c) $y = e^{3x-2}$, y = 0, desde el eje y hacia la izquierda.

d) $y = \frac{4}{\sqrt{4x-x^2+12}}$, el eje x, entre sus asíntotas verticales.

Ejercicio 9. Aplicaciones.

a) Hallar el área de la región plana en el primer cuadrante entre la curva $y = e^{-6x}$ y el eje x.

b) Hallar el área de la región plana delimitada por la curva $y = \frac{7}{x^2}$, el eje x, y a la izquierda de $x = \pm 1$.

c) Hallar el área bajo la curva $y = \frac{7}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ delimitada a la izquierda por x = 3.

d) Hallar el área encerrada por la curva $y = \frac{5}{1+x^2}$ y el eje x en el primer cuadrante.

e) Calcular el volumen del solido generado al rotar alrededor del eje x la región plana bajo la curva $y = \frac{3}{x}$ de $x = 1$ a $x = +\infty$.

f) Calcular el volumen del solido generado al rotar alrededor del eje y la región plana bajo la curva $y = 6e^{-2x}$ en el primer cuadrante.

g) Calcular el volumen del solido generado al rotar alrededor del eje x la región plana bajo la curva $y = 3e^{-x}$ en el primer cuadrante.

h) Determinar el área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y sus asíntotas.

i) Probar que el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, el eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = \pm 1$ es infinita.

Problema 1. Sea $f(x) = ax2^{-x}, x \geq 0$. Hallar el valor de "a" para que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2023$.

Problema 2. Se denomina Funcion Gamma a la que se define como

$$\boldsymbol{\Gamma : \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad , n > 0}$$

Muestre que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad y \quad \Gamma(3) = 2$

Problema 3. Sea R la región del plano limitada por los ejes coordenados y la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{5}{x^2+1}}$ $con\ x \geq 0$. Calcular si fuera posible:

a) El área de la región

b) El volumen del solido generado al girar R alrededor del eje x

Problema 4. Sea F la función definida en los reales por $\boldsymbol{F(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{e^t}{t} dt}$

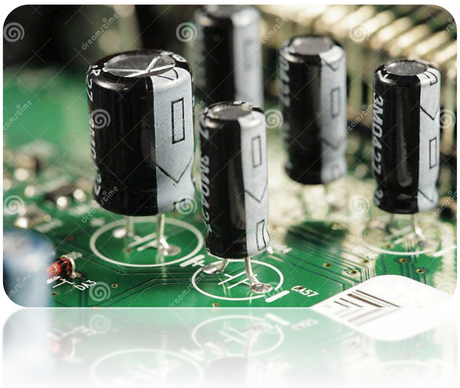
a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de F

b) Probar que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \infty$

Aplicaciones de las Integrales Impropias en la Ingeniería

- **Ingeniería en Energía Eléctrica**

Problema 5. Carga Total en un Capacitor



La carga Q(t) en un capacitor C se descarga con una resistencia R según la ley

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

donde Q_0 es la carga inicial. Determinar la carga total transferida a través del circuito.

Problema 6. Potencia Promedio en un Circuito

La potencia instantánea P(t) disipada en una resistencia en un circuito es $P(t) = P_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}$. Calcular la potencia promedio en el intervalo [0, ∞).

- **Ingeniería Electrónica**

Problema 7. Integración de la Señal de Ruido

Una señal de ruido blanco tiene una densidad espectral de potencia constante $S(\omega) = \omega_0$. Encontrar la potencia total del ruido.

Problema 8. Decaimiento Exponencial de una Señal

Una señal $V(t) = V_0 e^{-\alpha t}$ se aplica a un circuito. Calcular la energía total de la señal.

- **Ingeniería Mecánica**

Problema 9. Trabajo realizado por un Gas Ideal

El trabajo realizado por un gas ideal en expansión a presión constante es $W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$. Si la presión decrece de acuerdo con $P(V) = P_0 e^{-kV}$. Calcular el trabajo total realizado.

Problema 10. Transferencia de Calor

La tasa de transferencia de calor en un sistema es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Encontrar el calor total transferido.

- **Ingeniería Civil**

Problema 11. Flujo de Agua en una Canalización

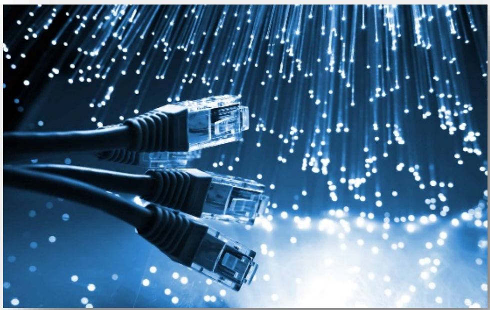
La velocidad de flujo de agua en una canalización es $v(x) = v_0 e^{-\alpha x}$. Calcular la cantidad total de agua que fluye por el canal.

Problema 12. Colapso de una Estructura

La probabilidad de colapso de una estructura bajo una carga es $P(t) = P_0 e^{-kt}$. Calcular la probabilidad total de colapso durante un período infinito.

- **Ingeniería en Sistemas**

Problema 13. Análisis de Red de Comunicaciones



El tiempo de respuesta de una red es $T(t) = T_0 e^{-t/\tau}$. Encontrar el tiempo total de respuesta acumulado.

Problema 14. Distribución de Cargas en un Servidor

La carga de trabajo en un servidor se distribuye como $L(t) = L_0 e^{-kt}$. Calcular la carga total procesada por el servidor.