CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

En la vida cotidiana como en la ingeniería nos encontramos con problemas donde aparecen funciones que presentan puntos y/o intervalos de discontinuidad.

Definición de función continua en un punto:

Una función ***f*** es ***Continua*** en un punto de abscisa ***x=a***, ***sí y solo sí***:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

De acá se deducen tres condiciones:

$$1)\ \exists\ f(a)$$

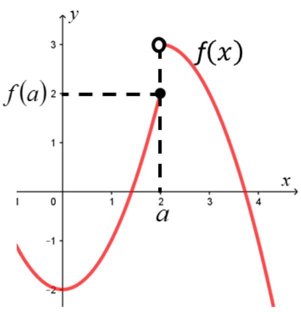
$$2)\ \exists \lim_{x \to a} f(x)$$

$$3)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Función que presenta discontinuidad en un punto:

Si no se cumple cualquiera de las tres condiciones, la ***función presenta una Discontinuidad*** en ***x=a***.

Funciones que presentan discontinuidades. Tipos de Discontinuidades

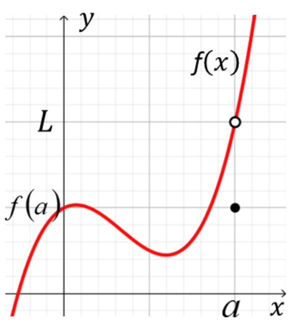


$\exists\ f(a)$

$\nexists \lim_{x \to a} f(x)$

f presenta Discontinuidad en x=a

$\boxed{\textit{f presenta Discontinuidad INEVITABLE (D.I.) o NO EVITABLE o ESENCIAL}}$



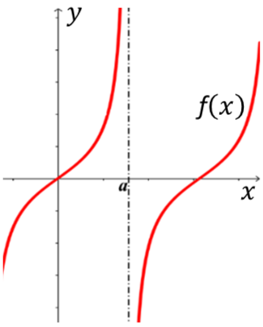
$\exists\ f(a)$

$\lim_{x \to a} f(x) = L;\ \exists$

$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

f presenta Discontinuidad en x=a

$\boxed{\textit{f presenta Discontinuidad EVITABLE (D.E.) en x=a}}$

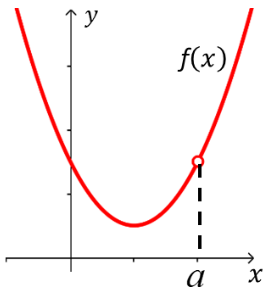


$\nexists\ f(a)$

$\nexists \lim_{x \to a} f(x)$

f presenta Discontinuidad en x=a

$\boxed{\textbf{D.I.}}$



$\nexists f(a)$

$\exists \lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

f presenta Discontinuidad en x=a

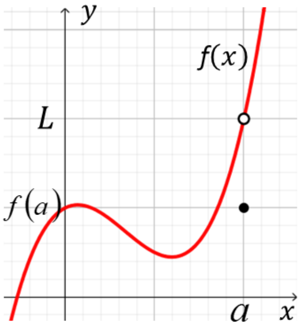
$\boxed{\textbf{D.E.}}$

Conclusión:

Si f presenta Discontinuidad en x=a y se verifica:

$$\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x)\ \exists \rightarrow D.E. \\ \lim_{x \to a} f(x)\ \nexists \rightarrow D.I. \end{cases}$$

En los casos en que *f* presenta discontinuidad evitable:



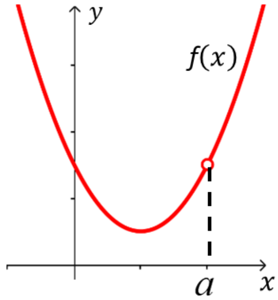
$\exists\ f(a)$

$\lim_{x\to a} f(x) = L;\ \exists$

$f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$

***f* presenta Discontinuidad en x=a**

$\boxed{\textit{f presenta Discontinuidad EVITABLE (D.E.) en x=a}}$



$\nexists f(a)$

$\exists \lim_{x\to a} f(x)$

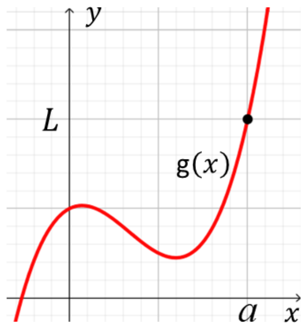
$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

***f* presenta Discontinuidad en x=a**

$\boxed{\textit{D.E.}}$

Se puede Redefinir la función para que sea continua en $\boldsymbol{x = a}$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x \neq a \\ L\ si\ x = a \end{cases}$$



g es Continua en x = a

Nótese que $\boldsymbol{f(x) \neq g(x)}$

En ambos casos la función presenta D.E. en $\boldsymbol{x = a}$:

Ejemplo 1:

Dada la función
$$f: f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ \ x \leq 2 \\ 2x+1 & si\ \ x > 2 \end{cases}$$

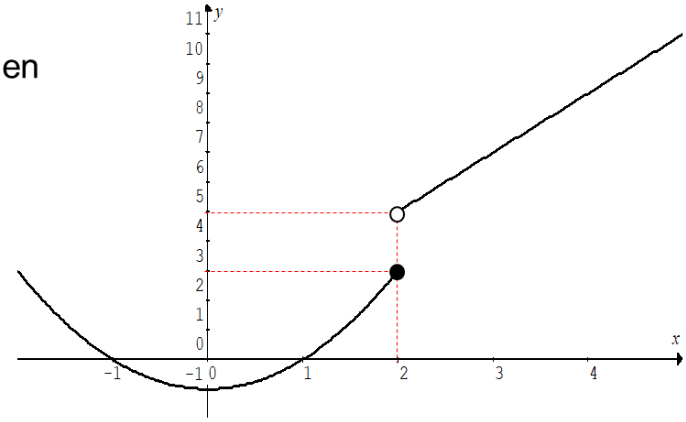
Analizar la continuidad en ***x=2***

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \exists$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x+1) = 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

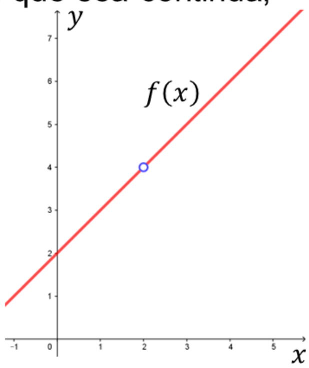
f tiene ***Discontinuidad No evitable*** en ***x=a***; con ***Salto Finito***



Ejemplo 2:

Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Determinar si presenta discontinuidades; en tal caso, indicar de qué tipo es/son y, si fuera/n discontinuidad/es Evitable/s, redefinir $\boldsymbol{f}$ para que sea continua, luego graficar.



$$dom\ f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$$

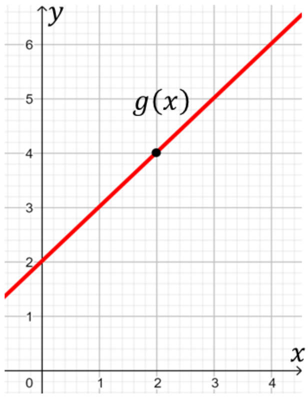
$$f(2)=\frac{2^2-4}{2-2}$$

$$=\frac{0}{0};\ F.I.$$ $\boldsymbol{f}$ tiene una ***discontinuidad*** en ***x=2***

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$$

$$\therefore\ \lim_{x\to2} f(x)=4$$

Se deduce que $\boldsymbol{f}$ presenta ***Discontinuidad Evitable*** en ***x=2***



Redefinimos $\boldsymbol{f}$:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x\neq 2\\ 4 & si\ x=2\end{cases}$$

Ejemplo 3:

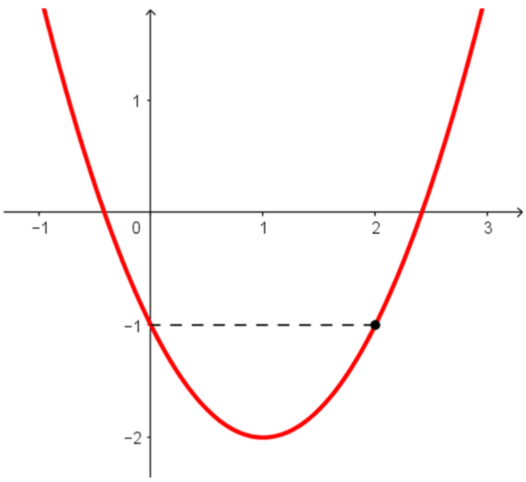
Verificar que la función $f(x)=(x-1)^2-2$ es continua en $x=2$

Solución:

$$f(2)=(2-1)^2-2=-1 \qquad \exists\, f(2)$$

$$\lim_{x\to2}(x-1)^2-2=-1 \qquad \exists\lim_{x\to2} f(x)\ =-1$$

$$f(2)=\lim_{x\to2} f(x)\ =-1$$ ***f es Continua en x=2***

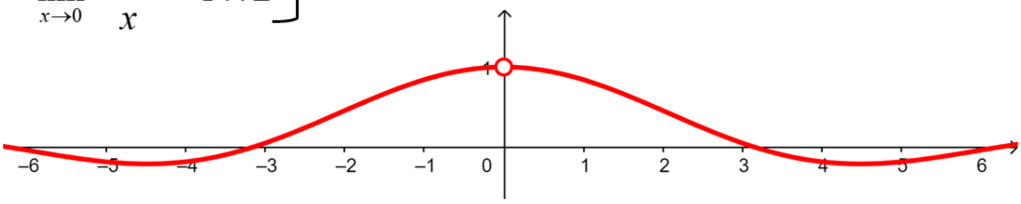


Ejemplo 4:

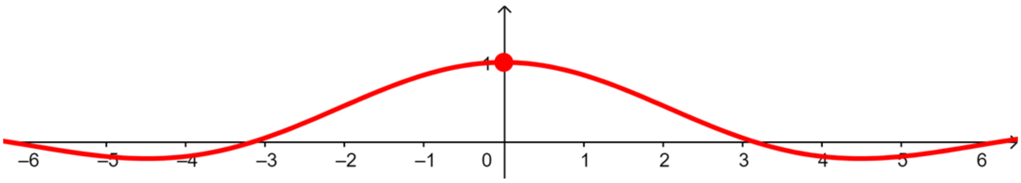
Dada la función $f(x)=\dfrac{sen\,x}{x}$, analiza la continuidad en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{sen\,0}{0}=\dfrac{0}{0}\ I.M.\ \nexists \\ \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1\ \therefore \exists \end{array}\right\}$$

f presenta *Discontinuidad Evitable* en *x=0*



Redefinamos la función: $g(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$



Propiedades de las funciones continuas

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son dos funciones continuas en $\boldsymbol{x=a}$, entonces:

$\boldsymbol{f+g}$ es continua en $\boldsymbol{x=a}$

$\boldsymbol{f - g}$ es continua en $\boldsymbol{x=a}$

$\boldsymbol{f\,.\,g}$ es continua en $\boldsymbol{x=a}$

Si además $g(a)\neq 0$; $\dfrac{f}{g}$ $es\ continua\ en\ x=a$

Continuidad de funciones Compuestas

Si $\boldsymbol{g}$ es continua en $\boldsymbol{x=a}$ y $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{g(a)}$, entonces:

$\boldsymbol{f\,(g)}$ es continua en $\boldsymbol{x=a}$

Continuidad por izquierda y por derecha en un punto

1) Diremos que una función es continua por derecha en un punto de abscisa ***x=a***, ***sí y solo sí***:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

2) Diremos que una función es continua por izquierda en un punto de abscisa ***x=a***, ***sí y solo sí***:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad de una función en un intervalo

1) Diremos que una función es continua en un intervalo abierto ***(a, b)***, ***si y solo si*** es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.

2) Diremos que una función es continua en un intervalo cerrado ***[a, b]***, si:

a) La función es continua en el intervalo abierto ***(a, b)***

b) La función es continua por derecha en ***a***

c) La función es continua por izquierda en ***b***

3) y **4)** De manera similar se define función continua en los intervalos ***(a, b]*** y ***[a, b)***.

Por ejemplo: define función continua en el intervalo ***[a, b)***, Si:

a) La función es continua en el intervalo abierto ***(a, b)***

b) La función es continua por derecha en ***a***

Ejemplo:
Analizar la continuidad de la siguiente función en el intervalo ***[-4, 6)***, si presentara discontinuidades, determinar de qué tipo es o son y, si fuera posible, redefinirla para que sea continua en ese punto. Finalmente grafique. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-x-2}$

Solución:

$$x^2-x-2\neq 0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\neq\frac{1\pm 3}{2}\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 2\end{cases}$$

$$\therefore \quad dom\, f=\Re-\{-1,2\}$$

-1 y ***2*** pertenecen al intervalo ***[-4, 6)***, por lo tanto debemos estudiar la continuidad en estos valores de ***x***.

Continuidad en x=-1

$$f(-1)=\frac{0}{0} \qquad \nexists f(-1);\ f\ tiene\ discontinuidad$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x-2}=-\frac{1}{3} \qquad \exists \lim_{x\to -1} f(x)\Rightarrow D.E.$$

$$\text{Re}\,defino: \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2}{x^2-x-2} & si\ x\neq -1 \\ -\dfrac{1}{3}\ si\ x=-1\end{cases}$$

Continuidad en x=2

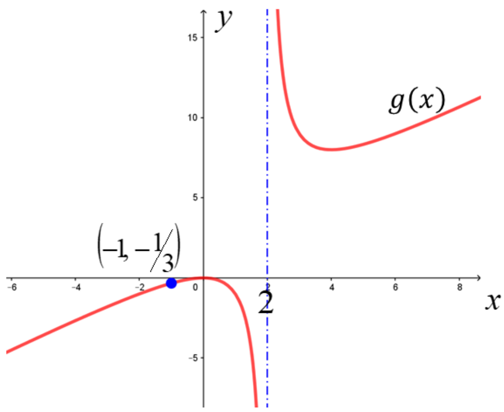
$$f(2)=\frac{12}{0} \qquad \nexists f(2);\ f\ presenta\ discontinuidad$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$$

$$\nexists \lim_{x\to 2} f(x)\Rightarrow D.I.$$

Ahora analizaremos la continuidad de la función en el intervalo ***[-4, 6)***.
La función ya esté redefinida, y es continua en ***x=-1***, pero presenta ***Discontinuidad Inevitable*** en ***x=2***, que pertenece al intervalo de estudiado; por lo que se concluye que:

f presenta ***Discontinuidad*** en el intervalo ***[-4, 6)***.



Analizar la continuidad de la siguiente función en el intervalo ***[-1, 7]***, si presentara discontinuidades, determinar de qué tipo es o son y, si fuera posible, redefinirla para que sea continua en ese punto. Finalmente grafique.

$$f(x)=\begin{cases} 6x-x^2 & si \;\; x<5 \\ x^2-4x & si \;\; x\geq 5 \end{cases}$$

Solución:

f es continua en el intervalo ***(-∞, 5)***, por ser una función polinomial. Por lo tanto es Continua por derecha en ***x=-1***

De igual manera, ***f*** es continua en el intervalo ***[5, ∞)***, por ser una función polinomial. Por lo tanto es Continua por izquierda en ***x=7***

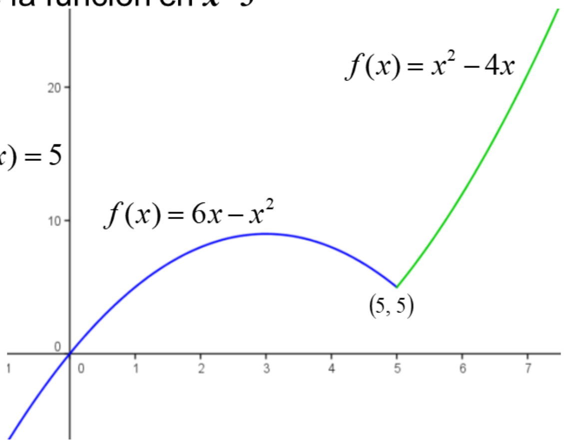
Entonces, hay que analizar la continuidad de la función en ***x=5***

$$f(5)=5^2-4\cdot 5=5 \Rightarrow \exists$$

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} 6x-x^2=5 \\ \lim\limits_{x\to 5+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} x^2-4x=5 \end{cases} \quad \therefore \lim_{x\to 5} f(x)=5$$

$$f(5)=\lim_{x\to 5} f(x)=5$$

f es ***Continua*** en el intervalo ***[-1, 7]***.



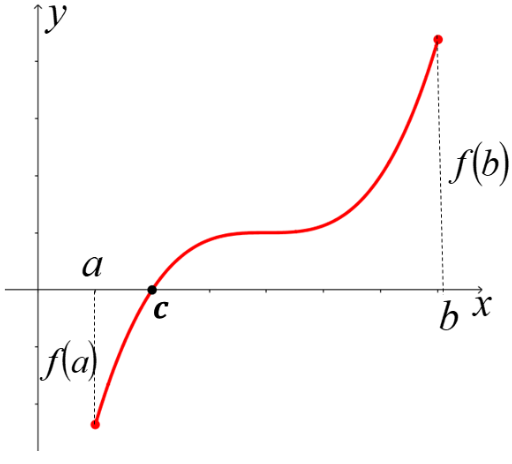
Teoremas de funciones continuas en intervalos cerrados:

Existen ciertos teoremas que serán de aplicación en esta y otras asignaturas de la carrera, por lo que resulta importante presentarlos en este capítulo; sin embargo no haremos sus demostraciones.

Teorema de Bolzano

Sean dos números $a,b\in\Re$ con $a<b$ y ***f*** una función continua en $[a,\, b]$, donde se cumple que $f(a)<0 \;\; y \;\; f(b)>0$ ó viceversa: $f(a)>0 \;\; y \;\; f(b)<0$, entonces existe al menos un número $c\in(a,\, b)/\; f(c)=0$

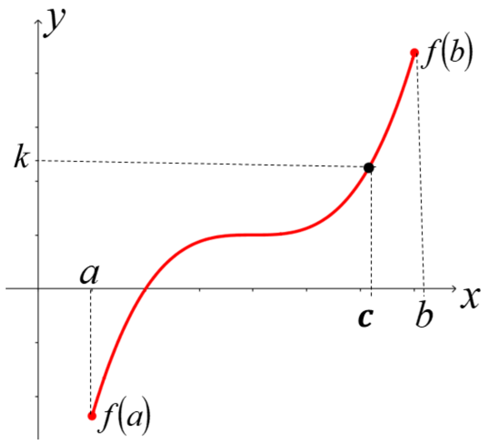
Interpretación geométrica.



Teorema del Valor Intermedio

Es una generalización de T. de Bolzano

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b) / f(c) = k$

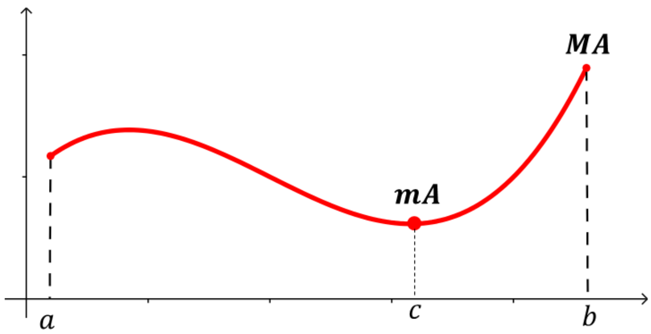


Extremos Absolutos de una función en un intervalo

Sea una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ se dice que:

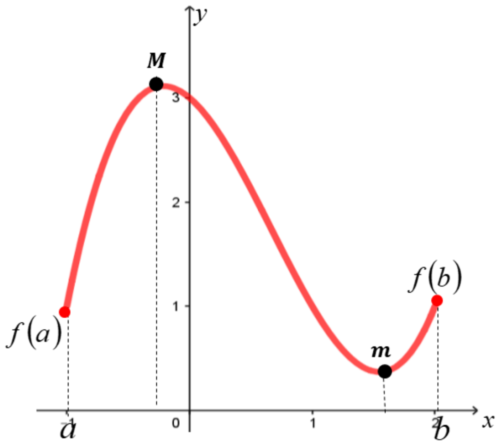
Máximo Absoluto de f es el mayor valor que toma la función en $[a, b]$.

mínimo Absoluto de f es el menor valor que toma la función en $[a, b]$.



Teorema de Weierstrass

Toda función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tiene al menos un máximo absoluto M y un mínimo absoluto m en $[a, b]$



Ejercicio 8: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \le 30 \end{cases}$$

a) ¿es continua?

b) ¿se cumplen las condiciones del **Teorema de Bolzano** en el intervalo [0, 4]?

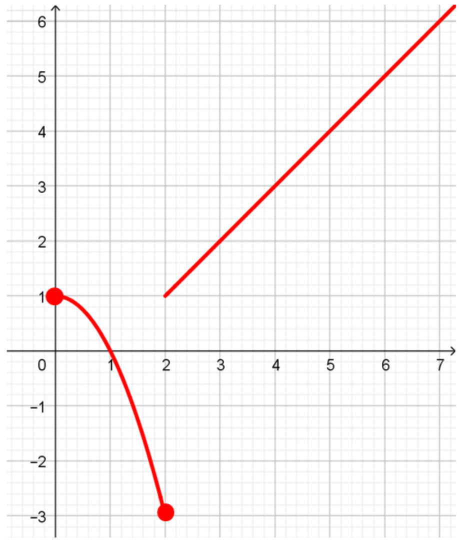
Solución:

f es Continua en ***[0, 2]*** y en ***(2, 30]***; analicemos continuidad en ***x=2***

$$f(2) = 1 - 2^2 = -3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} 1 - x^2 = -3 \\ \lim_{x \to 2^+} x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \nexists$$

f es Discontinua en ***x=2***, y ***2*** perteneciente al intervalo ***[0, 4]***; por lo tato No Cumple las hipótesis del Teorema de Bolzano.



EJEMPLO 9: Teorema de Weiertrass

Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si alcanza su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

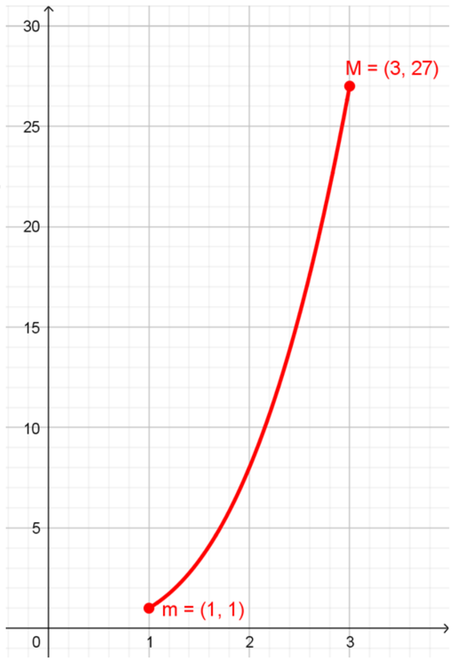
$$f(x) = x^3$$

f es continua en todos los reales, por ser una función polinomial.

Además, *f* es Creciente en todo su dominio.

$f(1) = 1^3 = 1 \qquad \boldsymbol{m(1,1)}$

$f(3) = 3^3 = 27 \qquad \boldsymbol{M(3,27)}$



Cuestionario:

En cada uno de los siguientes apartados, responde la consigna y justifica matemáticamente. Puedes utilizar representaciones gráficas.

a). Una función continua en el intervalo (2, 7], ¿es continua en $x=4$?

b). Si una función presenta discontinuidad en $x=1$, ¿$\exists f(1)$?

c). Si una función presenta discontinuidad evitable en $x=-3$, ¿$\exists f(-3)$?

d). Si $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$, ¿significa que la función es continua en $x=2$?

e). Si $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \\ \wedge \\ \exists f(0) \end{cases}$, ¿significa que la función es continua en $x=0$?

f). Si $\exists \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\exists \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ y $\exists f(3)$, ¿significa que la función es continua en $x=3$?

g). Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty \\ \wedge \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1 \end{cases}$, ¿significa que la función es continua en $x=4$?