T.P. N° 8. INTEGRAL INDEFINIDA Y APLICACIONES

EJERCICIO Nº 1:

Resuelve las siguientes integrales aplicando tabla y el **Método de integración por Descomposición**.

a) $\int \left(3x^3 - \frac{4}{x^2} + 6x^2 - 12x - \frac{3}{5}\right) \cdot dx =$

b) $\int \left(x^2 - 1\right)^2 \cdot dx =$

c) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x}} \cdot dx =$

d) $\int \frac{4x^3 + x^2 - 2x + 2}{x} \cdot dx =$

e) $\int (x+1) \cdot (x-1) \cdot dx =$

f) $\int \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot dx =$

g) $\int \sqrt{x} \cdot (x-1) \cdot dx =$

h) $\int (x + sen\, x) \cdot dx =$

i) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$

EJERCICIO Nº 2:

Resuelve las siguientes integrales aplicando tabla y el **Método de integración por Sustitución**.

a) $\int e^{(x+2)} \cdot dx =$

b) $\int \frac{dx}{9+x^2} =$

c) $\int \cos(5x) \cdot dx =$

d) $\int \frac{dx}{x+9} =$

e) $\int \frac{e^x}{e^x - 5} \cdot dx =$

f) $\int \left(x^4 + x^2 - 2x\right)^2 \cdot \left(4x^3 + 2x - 2\right) \cdot dx =$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}} =$

h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{3-x^4}} \cdot dx =$

i) $\int \cos x \cdot sen\, x \cdot dx =$

j) $\int \frac{dx}{\sec^2(3x+2)} =$

k) $\int \frac{dx}{sen(2x+1)} =$

l) $\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 4} \cdot dx =$

EJERCICIO Nº 3:

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes.

a) $\int \ln x \cdot dx$

b) $\int x \cdot e^x \cdot dx$

c) $\int arctg\, x \cdot dx$

d) $\int x \cdot \cos x \cdot dx$

e) $\int \left(x^2 + 5x + 6\right) \cdot \cos(2x) \cdot dx$

f) $\int x^x \cdot arctg\, x \cdot dx$

g) $\int \cos(\ln x) \cdot dx$

h) $\int x \cdot sen\, x \cdot \cos x \cdot dx$

i) $\int arc\cos(2x) \cdot dx$

j) $\int \frac{arc\, sen \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

k) $\int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx$

l) $\int e^x \cdot \cos(2x) \cdot dx$

m) $\int x \cdot \sqrt{1+x} \cdot dx$

n) $\int x^2 \cdot \ln\left(\sqrt{1-x}\right) \cdot dx$

o) $\int x \cdot sen^2 x \cdot dx$

p) $\int \frac{ln(\ln x)}{x} \cdot dx$ q) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \cdot dx$

EJERCICIO Nº 4:

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método de integración por descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{x^2+7x-6}$ b) $\int \frac{x}{x^2-4x+4} \cdot dx$ c) $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x} \cdot dx$

d) $\int \frac{9x^2-16x+4}{-x^3-3x^2-2x} \cdot dx$ e) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3 \cdot (x+1)^2} \cdot dx$ f) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \cdot dx$

g) $\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} \cdot dx$ h) $\int \frac{3x^2+5x+1}{x \cdot (x+2)^2} \cdot dx$ i) $\int \frac{x+3}{x^2+8x+7} \cdot dx$

j) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} \cdot dx$

EJERCICIO Nº 5:

Resuelve los siguientes ejercicios combinados.

$a) \int \frac{x}{sen^2 x} \cdot dx$ $b) \int arctg\, x \cdot dx$ $c) \int \frac{\ln(arcsenx)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

$d) \int y \cdot arc\sec y \cdot dy$ $e) \int 5 \cdot \arccos x \cdot dx$

EJERCICIO Nº 6:

Resuelve los siguientes ejercicios por el o los métodos más convenientes.

a) $\int e^x \cdot sen\, x \cdot dx$ b) $\int \frac{x^2-2x+1}{x-1} \cdot dx =$ c) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x} \cdot dx$

d) $\int \frac{2x+1}{x^2+9} \cdot dx =$ e) $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12} \cdot dx$ f) $\int \frac{x^3-4x}{x-2} \cdot dx =$

g) $\int \left(\sqrt{x}+tg\, x \cdot \sec x\right) \cdot dx =$ h) $\int \left(x^2+8\right) \cdot \ln x \cdot dx$ i) $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx =$

EJERCICIO Nº 7:

Resuelve los siguientes problemas con las condiciones indicadas.

a) $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 3x^2 + x \qquad y(0) = 6$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x} \qquad y(1) = -5$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y(0) = 1$

d) $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \cos x \qquad y\left(\pi/2\right) = \pi$

PROBLEMA N° 1:

Encontrar la función para las condiciones iníciales dadas.

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + 3x + 1, \quad si \;\; y(1) = 2$$

PROBLEMA N°2:

Hallar la función *F(x)* cuya derivada sea $f(x) = x + 6$ y tal que para *x*=*2* tome valor *25*.

PROBLEMA N° 3:

Hallar la función de la recta cuya pendiente es *2* y pasa por el punto *P(0, 4)*.

PROBLEMA N° 4:

Escriba la función primitiva de $y = x^2 + 2x$ cuya representación gráfica pasa por el punto *P(1, 3)*.

Cálculo de Área

1. Encuentre el área acotada por $y = -3 + \frac{x^2}{2}$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
2. Encuentre el área acotada por $y = x^3 - 2x^2 - x + 5$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
3. Encuentre el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^4$ y $g(x) = -x^2 + 2x$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
4. Encuentre el área de la región encerrada por las curvas $y^2 = 4x$ y la recta $-3y + 4x - 4 = 0$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
5. Encuentre el área de la región encerrada por las curvas $y = sen\, x$ y $y = \cos x$ en el intervalo $[0,\ \pi]$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.

6. Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
7. Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 2y - y^2$ y $x = y^2 - 4y$. Grafique la región y marque el elemento diferencial.

Cálculo de Volumen

1. Encontrar el volumen del tronco de cono generado por la región generada por las curvas $y = -x + 5$, el eje OY, la recta $x = 4$. Cuando giran alrededor del eje OX. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
2. Encontrar el volumen generado por la región limitada por $y = sen\ x$, la recta $x = 0$ y la recta $x = \pi$. Al girar en torno al eje OX. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
3. Encontrar el volumen del sólido generado por la región formada por las curvas $y = -x^2 + 6x$ y la recta que corresponde a la 1° Bisectriz; al rotar sobre el eje OX. Grafique la región y marque el elemento diferencial.
4. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por $x = \frac{y^2}{8}$ y la recta $x = 2$, alrededor del eje OY.
5. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región limitada por las curvas $y = 2 - x^2$, $x = 0, x = 2$, alrededor del eje OX.

6. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región limitada por las curvas $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = 0, y = 1$, alrededor del eje OY.
7. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$ alrededor del eje OX.

Longitud de Arco

1. Calcular el perímetro de una circunferencia de radio = a.
2. Encuentre la longitud de arco de la curva $y = x.\sqrt{x}$, desde el punto P(1, 1) hasta Q(4, 8).

3. Calcular la longitud de arco de la curva $y = \frac{(x-2)^2}{6}$, desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

4. Calcular la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo [2, 4].

5. Calcular la longitud de arco de la espiral logarítmica $r = e^t$ para t, que va desde 0 hasta 1.

Problemas de Aplicación

1. Se tiene un capacitor, cuya corriente que fluye hacia el varía con el tiempo de acuerdo a la siguiente función $I(t) = 2e^{-0,1t}\,A$, donde $I(t)$ es la corriente en Amperios y t es el tiempo. Calcular la carga $Q(t)$ almacenada en el capacitor desde $t = 0$ hasta $t = 5$ segundos.

2. Dado un cable colgando entre 2 postes separados por una distancia horizontal de L, el cual forma una curva parabólica cuya ecuación es $y = \frac{x^2}{4a}$, donde x es la distancia horizontal desde el vértice de la parábola y (a) es la apertura de la misma. Obtener la expresión que permitirá encontrar la longitud del cable desde $x = -L/2$ hasta $x = L/2$

3. Encontrar la longitud del cable entre dos postes, que atraviesan un rio de 560 metros, sabiendo que la altura máxima que el cable desciende es 20 metros; y que la forma que describe la parábola es $y = ax^2$. (*la gráfica sería similar al ejemplo anterior*)

4. Calcular la longitud de un hierro que sigue la forma de una bóveda parabólica, con una luz de 20 m y cuya altura máxima es de 5 m.

5. Se pretende diseñar un deposito esférico para almacenar combustible, el mismo debe tener un radio de 4 m. Cual es el volumen de combustible que podría almacenarse.