UNIDAD 2 - LÍMITE

El estudio de límite tiene muchas aplicaciones en distintas ciencias y además es la base de una rama de la Matemática denominada el Cálculo o Cálculo Diferencial e Integral; que es el alma de esta asignatura.

El concepto de límite fue mencionado en forma implícita en los siglos XVII y XVIII, quién le dio la notación moderna fue Bolzano en 1817 (técnica épsilon-delta). Luego, tras los aportes de Cauchy en 1821, finalmente Weierstrass en 1850 y 1860, dio la definición rigurosa épsilon-delta, que es el método más usado para trabajar con límites.

Bernard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano *(Praga, 1781–1848). Matemático, lógico, filósofo y teólogo.*

Augustin Louis Cauchy ***(****París, 1789-Sceaux, Lion, 1857). Matemático francés*

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß *(Ostenfelde, 1815-Berlín, 1897). Matemático alemán llamado: el «padre del análisis moderno».*

Estudio de límite de una función en un punto:

Básicamente consiste en buscar los valores que toma una función cuando la variable independiente x se aproxima indefinidamente a un valor específico, digamos: a, pero sin adoptar ese valor; es decir en el estudio consideramos: $x \neq a$.

Este valor, cuando existe, recibe el nombre de ***límite de la función cuando x tiende a "a"*** y se simboliza: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Se lee: ***"el límite de f(x) cuando x tiende a "a", es L"***. Por lo tanto, si el límite existe, $L \in R$

Cuando se investiga el límite de una función en un punto, en realidad se está preguntando si $f(x)$ se acerca a un valor específico (un único número real), a medida que x se aproxima más y más a un número real a, donde $f(a)$ puede o no existir.

Se dispone de varios procedimientos para determinar el límite de una función en un punto. Intuitivamente se trata de sustituir el valor $x=a$ en f y así determinar $f(a)$. (Sustitución directa).

Este procedimiento es válido en el cálculo del límite de muchas funciones, pero no de todas.

Para abordar este estudio es necesario conocer algunos:

Conceptos previos:

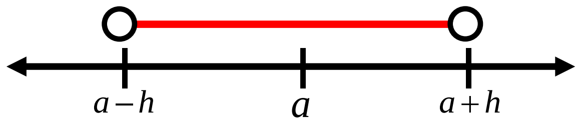
Entorno de un punto:

Si definimos un número real $\boldsymbol{a}$ y un número positivo $\boldsymbol{h}$; se llama *entorno de* $\boldsymbol{a}$ *y radio* $\boldsymbol{h}$, y se lo denota como $\mathcal{N}(a, h)$, al intervalo abierto:

$N_{(a,h)} = (a - h, a + h)$ $o\ bien$

$N_{(a,h)} = \{x \in \Re / a - h < x < a + h\}$, o

$N_{(a,h)} = \{x \in \Re / |x - a| < h\}$



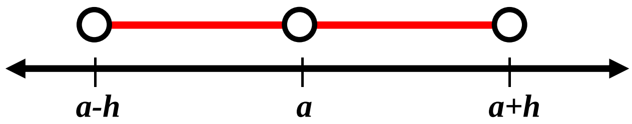
Entorno Reducido de un punto:

Es el entorno $\mathcal{N}(a,h)$, al que se le suprime el valor de $x=a$. Si definimos un número real $\boldsymbol{a}$ y un número positivo $\boldsymbol{h}$; se llama *entorno reducido de* $\boldsymbol{a}$ *y radio* $\boldsymbol{h}$, y se lo denota como $\mathcal{N}^*(a,h)$, a la unión de intervalos abiertos:

$N^*_{(a,h)} = (a - h, a) \cup (a, a + h)$ $o\ bien$

$N^*_{(a,h)} = \left\{x \in \frac{\Re}{a} - h < x < a + h \ con\ x \neq a\right\}$, ó

$N^*_{(a,h)} = \{x \in \Re / 0 < |x - a| < h\}$



Este último concepto es el que se utiliza en el estudio de límites: Cuando decimos que $\boldsymbol{x}$ se acerca o tiende a $\boldsymbol{a}$ por la izquierda o por la derecha, se considera que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, vale decir que consideramos el entorno reducido de $\boldsymbol{a}$. Recordemos que $\boldsymbol{h}$ es un número positivo que puede ser tan pequeño como uno quiera; entonces la variable $\boldsymbol{x}$ puede tomar todos los valores cercanos a $\boldsymbol{a}$ pero nunca el valor $\boldsymbol{a}$, o sea: $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$.

Se deduce de esta definición:

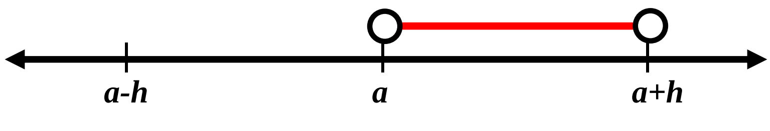
El concepto de entorno reducido de un punto es fundamental para entender límites.

Entorno Reducido por la derecha:

Se define como *entorno reducido por la derecha de un número real* $\boldsymbol{a}$ *y radio* $\boldsymbol{h}$ *(h>0)*, y se lo denota como $\mathcal{N}^*(a+,h)$, al intervalo abierto:

$N^*_{(a^+,h)} = (a, a + h)$ $o\ bien$

$N^*_{(a^+,h)} = \{x \in \Re / a < x < a + h\}$

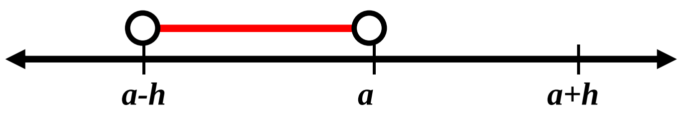


Entorno Reducido por la izquierda:

Se define como *entorno reducido por la izquierda de un número real* $\boldsymbol{a}$ *y radio* $\boldsymbol{h}$ *(h>0)*, y se lo denota como $\mathcal{N}^*(a\text{-},h)$, al intervalo abierto:

$N^*_{(a^-,h)} = (a - h, a) obien$

$N^*_{(a^-,h)} = \{x \in \Re / a - h < x < a\}$



Concepto intuitivo de límite – Interpretación geométrica del límite

Sea ***f*** una función definida en los puntos próximos a ***x=a***, tanto ***por izquierda*** como ***por derecha***, excepto posiblemente en ***x=a***,

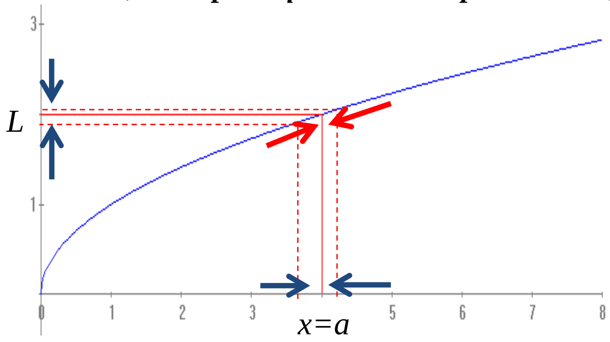
donde la función puede no existir,

diremos que el $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si

cuando ***x*** toma valores muy próximos a ***a***,

acercándose ***por derecha*** y ***por izquierda,***

f(x) se acerca a un único número real ***L***.



EJEMPLO 1:

Dada la función: $f(x) = x^2$, calcular el $\lim_{x \to 2} f(x)$

Solución:

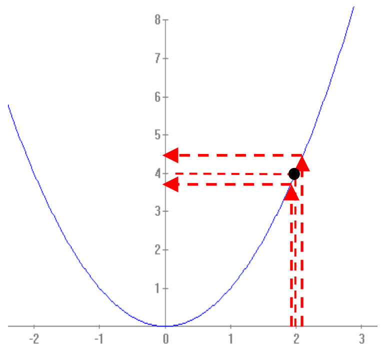
x se acerca a 2 por la izquierda a 2 → ← x se acerca a 2 por la derecha a 2

x	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999	***2***	2,001	2,01	2,05	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	2,25	3,61	3,8025	3,9601	3,996001	?	4,00401	4,0401	4,2025	4,41	6,25	9

$f(x)$ tiende a 4 → ← $f(x)$ tiende a 4

No se consideró el valor que toma la función en ***x=2***, sólo se calcularon los valores que toma la función en los puntos próximos a 2. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

De acá se deduce que; en este caso el valor del límite coincide con ***f(2)***, lo que se puede observar más claramente en la gráfica de la función.



EJEMPLO 2: Dada la función: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, calcular el $f(0)$, $f(2)$ y $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Solución:

Procediendo de manera similar, construimos la tabla:

Para determinar f(0) , como 0 pertenece al dominio, entonces f(0) = 2

En el segundo caso, 2 no pertenece al dominio de f por lo cual no está definida para x =2.

Para el cálculo del límite, usaremos la siguiente tabla:

x se acerca a 2 por la izquierda → ← x se acerca a 2 por la derecha

x	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999	*2*	2,001	2,01	2,05	2,1	2,5	3
$f(x)$	3	3,5	3,9	3,95	3,99	3,999	?	4,001	4,01	4,05	4,1	4,5	5

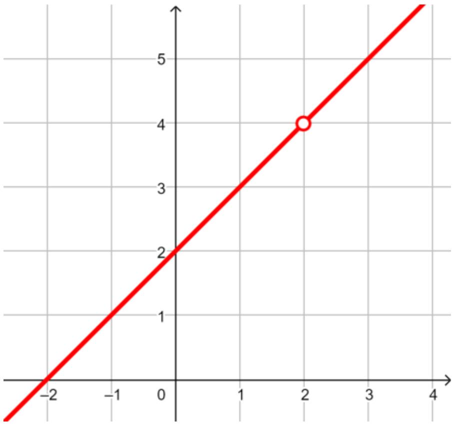
$f(x)$ tiende a 4 → ← $f(x)$ tiende a 4

Estudiando los valores que toma ***f*** en el ***entorno reducido de 2***, se deduce que: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 2$

Procediendo de manera algebraica:

$$si \quad x \neq 2: \quad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2).\boxed{(x-2)}}{\boxed{(x-2)}} =$$

$\lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$



De manera que si consideramos otra función: ***g: g(x)=x+2***, se observa que ***f*** y ***g*** son idénticas, excepto cuando ***x=2***, pues ***f(2) no existe*** y ***g(2)=4***.

Vale decir que si: $x \neq 2, \quad f(x) = g(x)$

La gráfica de ***f*** es, igual al de ***g excepto*** en ***x=2***, donde ***f*** no existe (es un punto vacío), y ***g*** sí:

EJEMPLO 3: Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} f(x), si f(x) = \begin{cases} 3x-1 & si x \leq 2 \\ 2x+3 & si x > 2 \end{cases}$

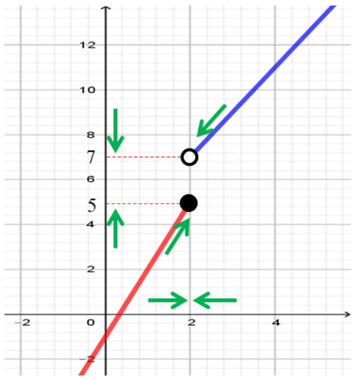
Solución:

Construimos la tabla, considerando un entorno reducido de 2:

x se acerca a ***2 por la izquierda*** → ← ***x*** se acerca a ***2 por la derecha***

x	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,05	2,1	2,5	3
$f(x)$	2	4,5	4,7	4,85	4,97	4,997	?	7,002	7,02	7,1	7,2	8	9

$f(x)$ ***tiende a 5*** → ← $f(x)$ ***tiende a 7***



Cuando ***x*** tiende a 2 ***por la izquierda***, ***f(x)*** tiende a 5, esto se denota:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$$

pero cuando ***x*** tiende a 2 ***por la derecha***, ***f(x)*** tiende a 7, es decir:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$$

Se ve que ***f(x)*** no tiende a un único valor real cuando ***x*** tiende a 2; por lo tanto, en estos casos diremos que ***no existe el límite de f(x) cuando x tiende a 2***, y lo expresamos de la siguiente *manera:* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Observa: ***no existe el límite, pero si existe f(2)=5***!!!

EJEMPLO 4:

Dada la función: $f(x) = \sqrt{x-1}$, calcular el $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1}$

Solución:

Este es un caso especial, donde se desea calcular el límite de una función en un punto extremo del dominio de dicha función.

El dominio de la función es: *dom f=[1, ∞)*, por lo tanto no podemos calcular el límite de ***f*** cuando ***x*** tiende a 1 ***por la izquierda***: $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x-1} \nexists$,

porque a la izquierda de ***x=1***, no existe la función. Por lo tanto, esta función, se determinará el límite por derecha exclusivamente:

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0$$

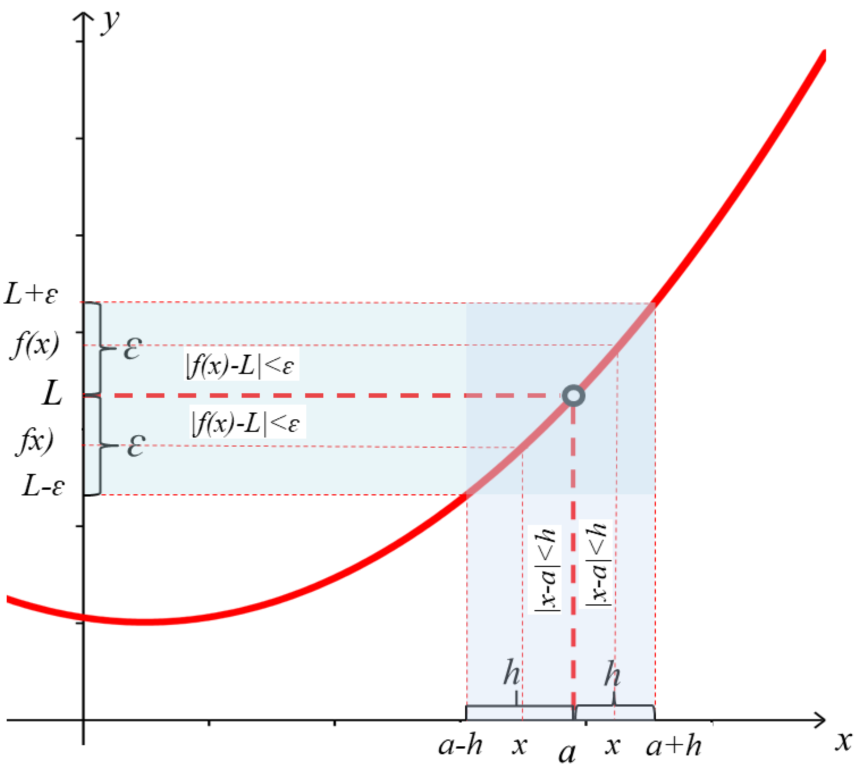
Finalmente existe el $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0}$

Definición de Limite de una Función en un punto:

Se define el límite de ***f(x)*** cuando ***x*** tiende a ***a***: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, con ***a*** y ***L ϵ R***, si para todo número real ***ε>0*** arbitrariamente prefijado, existe un número real ***h>0***, que en general depende de ***ε,*** tal que ***|f(x)-L|<ε*** para todo ***x*** que cumple con la condición ***0<|x-a|<h***.

Su interpretación gráfica es:

ε : letra griega épsilon, mayuscula.



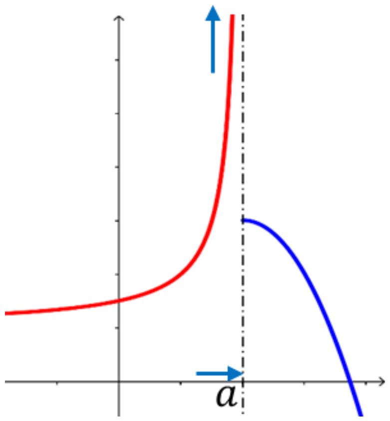
Límites laterales *(Conceptos introducidos por Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750 - 1840)*

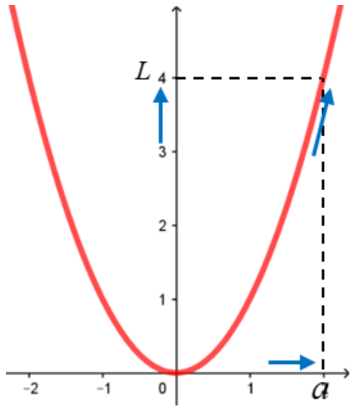
Límite lateral por izquierda

Se dice que ***f(x)*** tiende a ***P***, cuando ***x*** tiende a ***a*** *por la izquierda*, si a medida que ***x*** toma valores cada vez más cercanos a ***a***, pero menores que él ***(x<a)***, entonces ***f(x)*** toma valores cada vez más próximos a ***P***.

x pertenece al ***entorno reducido por la izquierda*** $\mathcal{N}^*(a^-,h)$ de ***a***, y además $\mathcal{N}^*(a^-,h)$ está incluido en el ***dom f***.

En símbolos: $\lim_{x \to a^-} f(x) = P$ (***Límite lateral por izquierda***)



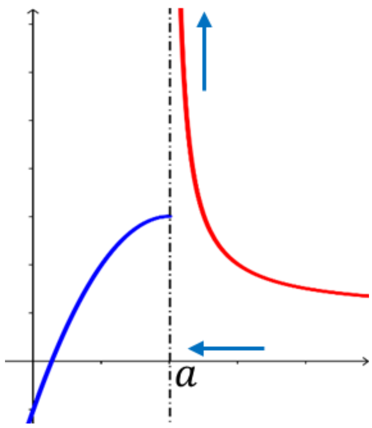


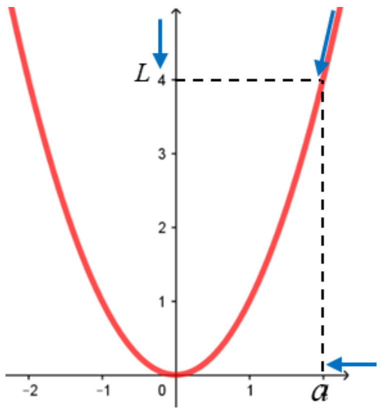
Límite lateral por derecha

Se dice que ***f(x)*** tiende a ***S***, cuando ***x*** tiende a ***a*** *por la derecha*, si a medida que ***x*** toma valores cada vez más cercanos a ***a***, pero mayores que él ***(x>a)***, entonces ***f(x)*** toma valores cada vez más próximos a ***S***.

x pertenece al ***entorno reducido por la derecha*** $\mathcal{N}^*(a^+,h)$ de ***a***, y además $\mathcal{N}^*(a^+,h)$ está incluido en el ***dom f***.

En símbolos: $\lim_{x \to a^+} f(x) = S$ (***Límite lateral por derecha***)

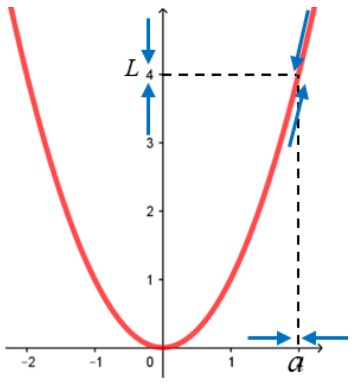




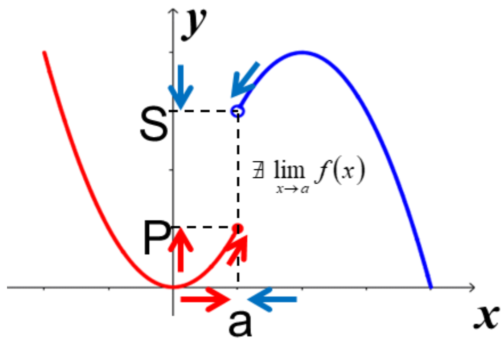
Teorema Unidad del Limite

El límite de una función, cuando $x \to a$ si existe, es único.

$$\boxed{\begin{array}{c} Si: \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \\ \Updownarrow \\ \lim_{x\to a} f(x) = L, \quad L \in R \end{array}}$$



$$\exists \lim_{x\to a} f(x)$$



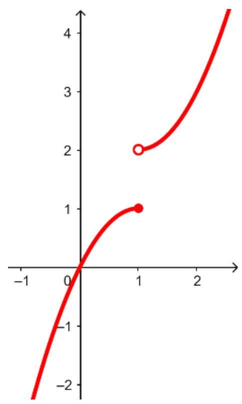
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) \nexists$$

EJEMPLO 1:

Calcular, si existe el límite: $\lim_{x\to 1} f(x), si f(x) = \begin{cases} -x^2+2x & si \;\; x \leq 1 \\ x^2-2x+3 & si \;\; x > 1 \end{cases}$

Solución:

Como se ve, la función está dada en ramas y nos piden calcular el límite en 2, justo donde cambian las definiciones. Esto nos obliga a calcular los límites laterales.



$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 1^-}(-x^2+2x) = 1;\;\; \exists \\ \lim_{x\to 1^+}(x^2-2x+3) = 2;\;\; \exists \end{array}\right\}$$

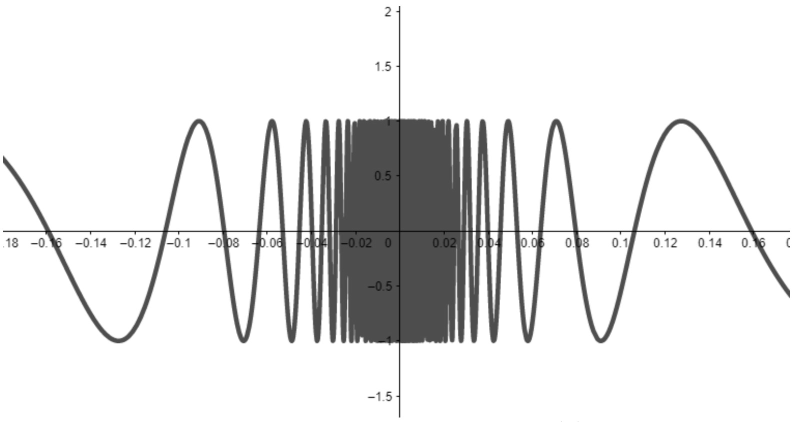
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

No existe el límite, aunque exista f(1)=1

Si no hubiera existido $f(1)$, ¿cambiaría el estudio de este límite?

EJEMPLO (de no existencia) Determine $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Estamos ante un límite que no puede ser resuelto mediante técnicas algebraicas de simplificación. Recurriremos a GeoGebra para poder determinar una solución



De la gráfica podemos concluir que la función $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en las cercanías de 0 presenta demasiadas oscilaciones no pudiendo permitir concluir sobre el valor del límite pedido.
De esta manera concluimos que: no existe $\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$

Al trabajar de manera algebraica con limite, surgen de manera inmediata expresiones que requieren ser analizadas, algunas de ellas reciben el nombre de formas indeterminadas.

FORMAS INDETERMINADAS (F.I.)

Las expresiones siguientes se llaman Formas indeterminadas

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad \mathbf{0}\cdot\infty \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}} \qquad \infty^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{1}^{\infty}$$

Se llaman así, ya que depende de como "nos acercamos" a cada valor involucrado, dependerá el resultado que se obtiene.

No son formas indeterminadas:

$$\frac{c}{\infty} \to 0, \quad \frac{c}{0} \to \infty, \quad \frac{\infty}{0} \to \infty, \quad \infty + \infty \to \infty, \quad \infty\cdot\infty \to \infty, \quad \infty\cdot(-\infty) \to -\infty$$

Si al realizar la sustitución directa de un límite nos da como resultado alguna de estas Formas Indeterminadas (F.I.), no sabemos, a priori, si existe o no el límite planteado.

Para saber si existe el límite, debemos realizar transformaciones algebraicas hasta llegar al resultado, que puede ser: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A; A \in R,\ entonces \ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty;\ entonces \ \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases}$

El trabajo algebraico que se desarrolla para *levantar la indeterminación* se puede hacer porque en el estudio de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, se considera el entorno reducido de a. Esto quiere decir que en el estudio $x \neq a$, luego se pueden simplificar factores.

Recomendamos a nuestros estudiantes, repasar los casos de factoreo y racionalización de denominadores.

EJEMPLO 1:

Dada la siguiente función $f(x)=\frac{x^3+x^2}{x^2-x-2}$, calcular, si existe el: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Solución:

Primero tenemos que efectuar la sustitución directa, esto es reemplazar en f el valor de a

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{(-1)^3+(-1)^2}{(-1)^2-(-1)-2}$$

Como se ve, el resultado es: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \frac{0}{0} F.I.$

Ahora trabajemos para levantar la indeterminación.

Cuando estudiamos $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ sabemos que $x \neq -1$, entonces:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x^2}{(x-2)}$$

Volvamos a realizar la sustitución directa: $=\frac{(-1)^2}{(-1-2)} = -\frac{1}{3}$

Finalmente: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{x^2-x-2} = -\frac{1}{3}$, *Existe*. Pero no existe $f(-1)\nexists$

EJEMPLO 2:

Calcular el $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

Solución:

Por sustitución directa se llega a: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{2^2-5.2+6}{2-2} = \frac{0}{0}$, que es una Forma Indeterminada; pero cuando ***x* tiende a 2**, toma valores próximos a ***2***. Dividiendo por ***x-2*** se obtiene:

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)\boxed{(x-2)}}{\boxed{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)\boxed{(x-2)}}{\boxed{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1$$

EJEMPLO 3:

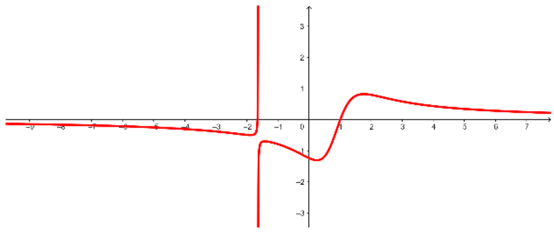
Calcular el $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-3x+4}$

Solución:

En este caso tenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, para poder eliminar esta indeterminación es conveniente extraer como factor común la mayor potencia de x tanto en el numerador como en el denominador, en este límite es x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{x^2}.\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\boxed{x^2}.\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{3+\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty 2}}{2-\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty 2}}=\frac{3}{2}$$

Observemos que si $x\to\infty$, resulta que $\frac{2}{x},\frac{5}{x^2},\frac{3}{x}\, y\, \frac{4}{x^2}$ ***tienden a 0***, con lo que el numerador ***tiende a 3*** y el denominador a ***2***.



Luego: $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-3x+4}=\frac{3}{2}$$

EJEMPLO 4:

Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$

Solución:

En este caso tenemos la forma indeterminada $\infty-\infty$, nos conviene racionalizar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{x}+5-\boxed{x}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)=0$$

Propiedades de los límites

1). $\lim\limits_{x\to c}k=k;k\in\Re$, El límite de una constante es la constante misma.

EJEMPLO: $\lim\limits_{x\to 4}5=5$

Si ***f(x)*** y ***g(x)*** son dos funciones y ***cϵR***, tal que se cumple:

2). $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to c}f(x)+\lim\limits_{x\to c}g(x)=A+B$

EJEMPLO: $$\lim_{x\to 4}\left[(x-1)+\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to 4}(x-1)+\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=$$

$$=\left[(4-1)+\sqrt{4}\right]=3+2=5$$

$$\lim_{x\to 4}\left[(x-1)+\sqrt{x}\right]=5$$

3). $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to c}f(x)-\lim\limits_{x\to c}g(x)=A-B$

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=A-B$$

EJEMPLO: $$\lim_{x\to 3}[(x^2-9)-x]=\lim_{x\to 3}(x^2-9)-\lim_{x\to 3}x=$$

$$=[0-3]=-3$$

$$\lim_{x\to 3}[(x^2-9)-x]=-3$$

4). $\lim_{x\to c}[k.g(x)] = k.\lim_{x\to c} g(x); con k \in \Re$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 1}\left[-4\cdot\sqrt{x^2-1}\right] = -4\cdot\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1} =$

$$= -4\cdot\sqrt{1^2-1} = -4\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1}\left[-4\cdot\sqrt{x^2-1}\right] = 0$$

5). $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x) = A.B$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 0}[(x^3-2x^2+x-1).e^x] =$

$$= \lim_{x\to 0}(x^3-2x^2+x-1).\lim_{x\to 0} e^x = -1\cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}[(x^3-2x^2+x-1).e^x] = -1$$

6). $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{A}{B}, con B \neq 0$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-4}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^2+2x-4)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} =$

$$= \frac{3^2+2.3-4}{3+2} = \frac{11}{5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-4}{x+2} = \frac{11}{5}$$

7). $\lim_{x\to a}\left[k^{f(x)}\right] = (k)^{\lim_{x\to a} f(x)}$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 1}\left[(-5)^{(x^2+2x+1)}\right] = (-5)^{\lim_{x\to 1}(x^2+2x+1)} = (-5)^4 = 625$

8). $\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 2}\left[(x^2-2x+1)^{(x+2)}\right] = \left[\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)\right]^{\lim_{x\to 2}(x+2)} =$

$$= 1^4 = 1$$

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-2x+1)^{(x+2)}\right] = 1$$

9). $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}; c \in \Re y n \in N$

EJEMPLO: $\lim_{x\to 27}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27} = 3$

Esta propiedad también vale para los casos de funciones con exponentes fraccionarios, siempre que ***la raíz esté definida en c***.

EJEMPLOS:

$a)\ \lim_{x\to 2}(x)^{3/2} = (2)^{3/2} = 4;\ \ b)\ \lim_{x\to -3}(x)^{4/3} = (-3)^{4/3} = 27;\ \ c)\ \lim_{x\to -8}(x)^{1/3} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

10). $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$

EJEMPLO:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[sen\ x]^2 = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sen\ x\right]^2 = A^n$$
$$= 1^2 = 1$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[sen\ x]^2 = 1$$

Cuestionario 1

En cada planteamiento contesta y justifica matemáticamente tu afirmación, basándote en los conocimientos aprendidos. Puedes usar gráficas para explicar.

¿Cuántas y cuáles son las Formas Indeterminadas? ¿qué significa si la sustitución directa de un límite da como resultado alguna de las F.I.? ¿existe el límite?

¿Cuánto vale $f(a)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1^{\infty}$?

¿Por qué se puede reducir el siguiente límite? $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}{\cancel{x-2}}$

Si el resultado de un límite da ∞ ¿Existe el límite?

¿Qué propiedad se aplica en: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]$?

Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, ¿significa que $\exists\ f(a)$?

Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, ¿significa que $\nexists\ f(a)$?

Límites e infinitos

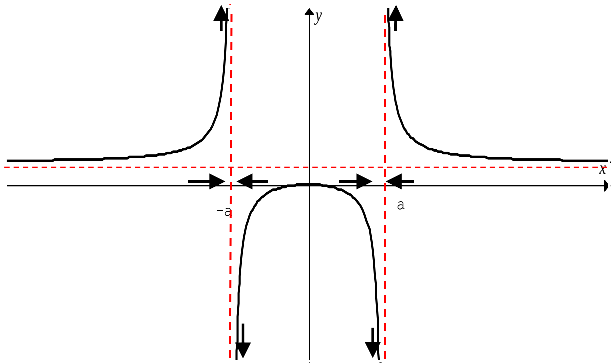
Diremos que una función ***f(x) tiende a infinito***, cuando ***x*** tiende a ***a***, si a medida que ***x*** toma valores cada vez más próximos a a, |***f(x)***| toma valores cada vez más grandes. En estos casos escribiremos:$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Evidentemente ***el límite No existe***, ya que éste debe ser un número real.

Gráficamente:

$\lim\limits_{x\to -a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -a^+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$



Asíntota vertical

La recta ***x***=***a*** es una ***asíntota vertical de la gráfica de f,sí y solo sí***
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad y/o \ \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

En la gráfica anterior $x = -a$ y $x = a$ son asíntotas verticales de ***f(x)***.

EJEMPLO 1:

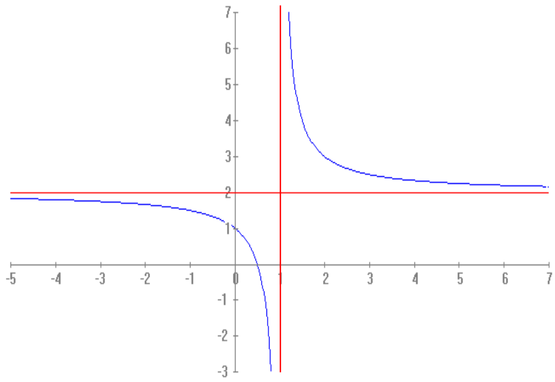
$f: f(x) = \frac{1}{x-1} + 2,\ domf = \Re - \{1\}$

Se debe investigar si hay una

$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x-1} + 2\right) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} + 2\right) = +\infty$

Esto indica que ***x*=*1*** es asíntota vertical de ***f***



EJEMPLO 2:

$f: f(x) = \frac{1}{x^2},\quad domf = \Re - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow x = 0 esA.V.def$$

Ejemplo 3: $f: f(x) = \frac{-x}{x^3},\ domf = \Re - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{-x}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow x = 0 esA.V.def$$

Límite cuando *x* tiende a infinito

Diremos que una función ***f(x)*** tiende a un número ***k***, si a medida que |***x***| toma valores cada vez más grandes, ***f(x)*** tiende a ***k***. En estos casos escribiremos:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, o bien: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ o $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$

En el ejemplo anterior: $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-1} + 2\right) = 2$ y $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-1} + 2\right) = 2$; ***y=2 es A.H. de f***

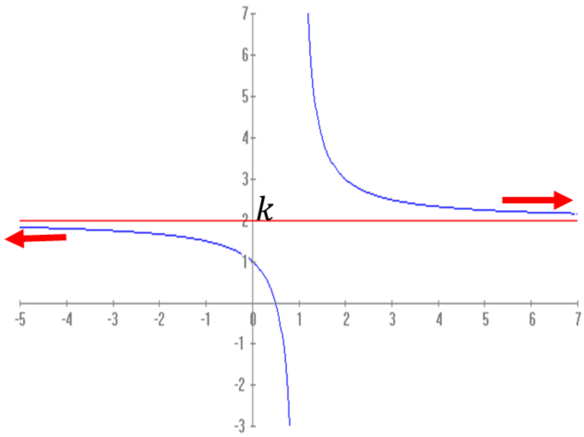
Asíntota horizontal

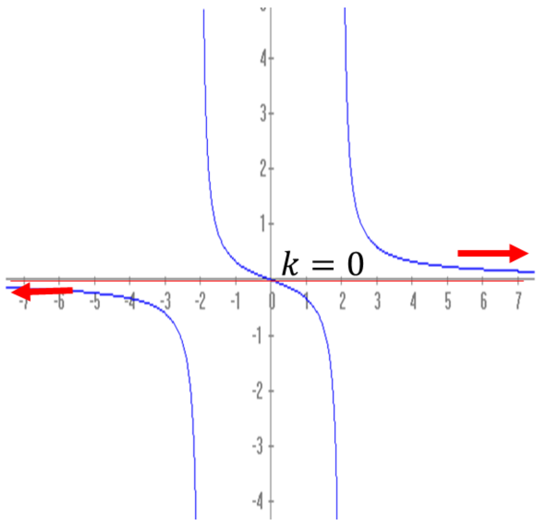
La recta ***y***=***k*** es una ***asíntota horizontal de la gráfica de f sí y solo sí***

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k \text{ o bien } \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

En el gráfico anterior ***y=2*** es una ***asíntota horizontal de f***.

EJEMPLOS:





$$\boldsymbol{y = k\ es\ A.H.\ de\ f}$$

Por último, diremos que ***una función NO tiene asíntotas horizontales***, si a medida que |x| toma valores cada vez más grandes, ***f(x)*** toma también valores cada vez más grandes.

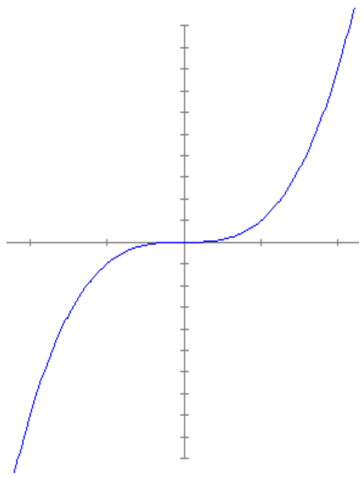
En símbolos:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ó $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, ó

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, ó $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Gráficamente: $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$



EJEMPLO 1: $\quad f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Solución:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4$$

$$|x| \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$dom f = (-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$$

$$\cap\ c/\overrightarrow{OX}: \frac{x}{x^2-4} = 0 \in dom f \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P_1(0,0)$$

$$\cap\ c/\overrightarrow{OY}: x = 0 \Rightarrow P_1(0,0) Paridad:$$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = \frac{-x}{x^2-4} \neq f(x) \Rightarrow NoPar$$

$$-f(-x) = \frac{x}{(-x)^2-4} = \frac{x}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow f es IMPAR$$

$AsíntotasVerticales$:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{(2)^2-4} = \frac{2}{0} = \infty$

$\Rightarrow x = 2 \; es \; A.V. de \; f$

$Por \; Simetría: x = -2 \; es \; A.V. de \; f$

$Asíntota Horizontal:$

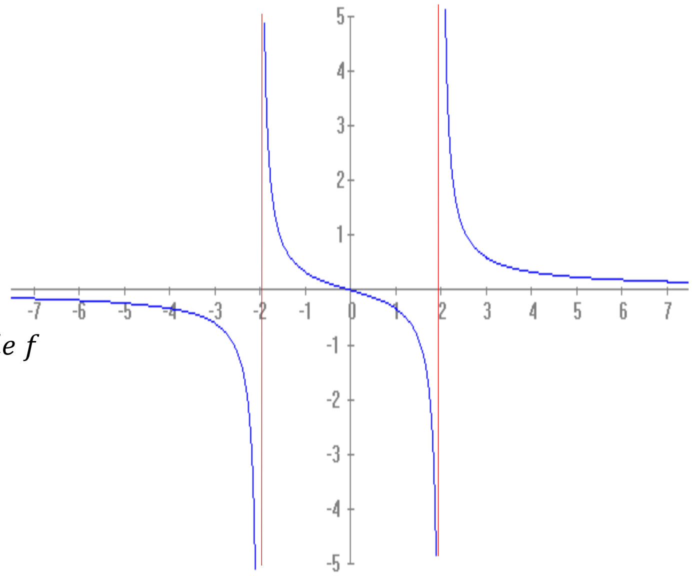
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{-\infty}}{1-\frac{4}{(-\infty)^2}} = \frac{0}{1-0} = 0 \Rightarrow y = 0 \; es \; A.H. de \; f$

$Rgof = \Re; \; f \; es \; Monótona \; decreciente$

No es Biunívoca



EJEMPLO 2: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-x-2}$

Solución:

$dom f = \Re - \{-1,2\}$

$Asíntotas Verticales:$

$$x = -1 \therefore \lim_{x\to-1} f(x) = \frac{(-1)^3 + (-1)^2}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{0}{0} F.I.$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{x^2(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2}{(x-2)} =$$

$$= \frac{(-1)^2}{(-1-2)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \; x = -1 \; NO \; es \; AV \; de \; f$$

$$x = 2 \therefore \lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - x - 2} =$$

$$= \frac{(2)^3 + (2)^2}{(2)^2 - (2) - 2} = \frac{12}{0} = \infty$$

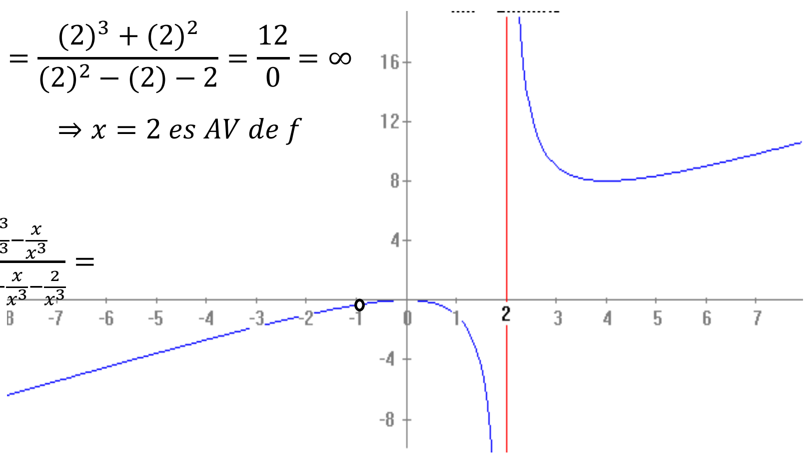
$$\Rightarrow x = 2 \; es \; AV \; de \; f$$

$Asíntota \; Horizontal:$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}} = \frac{1+\frac{1}{(\infty)^2}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{(\infty)^2}-\frac{2}{(\infty)^3}} =$

$= \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow f \; NO \; tiene \; A.H.$



EJEMPLO 3:

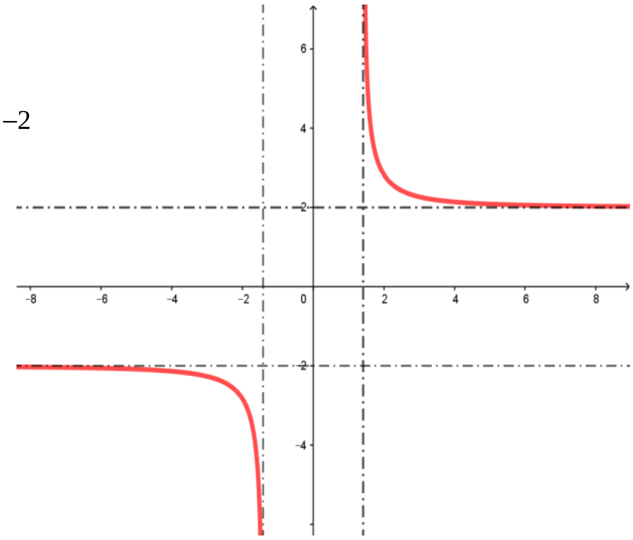
Determine si la siguiente función tiene asíntotas horizontales $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}$

Solución:

$domf = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{-\infty}{\infty} F.I.$ **A.H.:**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}} = -2$$



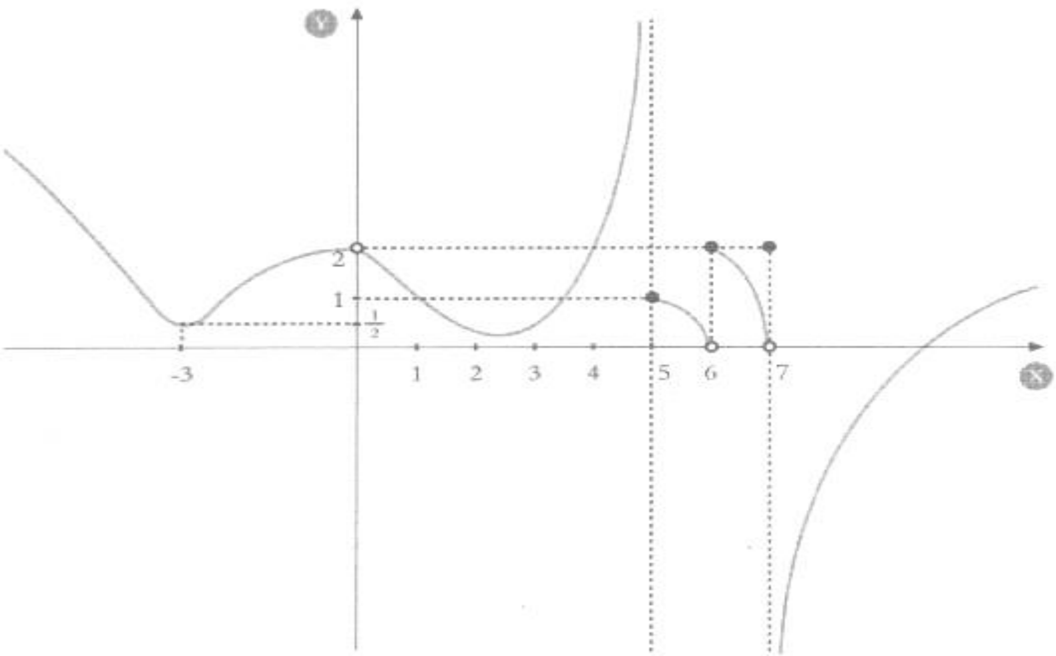
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} F.I.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}} = 2$$ ***y=2 es A.H. de f***

EJEMPLO 4:

Observando el gráfico de la función f y calcular, si existen, los límites indicados.



$a) \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =;\ b) f(-3) =;\ c) \lim\limits_{x\to-3^-} f(x) =;\ d) \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) =;\ e) \lim\limits_{x\to3} f(x) = f) f(0) =;$

$g) \lim\limits_{x\to0^-} f(x) =;\ h) \lim\limits_{x\to0^+} f(x) =;\ i) \lim\limits_{x\to0} f(x) =;\ j) f(5) = k);\ \lim\limits_{x\to5^-} f(x) =;\ l) \lim\limits_{x\to5^+} f(x) =$

$ll) \lim\limits_{x\to5} f(x) =;\ m) f(6) =;\ n) \lim\limits_{x\to6^-} f(x) =;\ ñ) \lim\limits_{x\to6^+} f(x) =;\ o) \lim\limits_{x\to6} f(x) =;\ p) f(7) =$

$q) \lim\limits_{x\to7^-} f(x) =;\ r) \lim\limits_{x\to7^+} f(x) =;\ s) \lim\limits_{x\to7} f(x) =;\ t) \lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

¿Tiene asíntotas?

Solución:

$a) \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $b) f(-3) = \frac{1}{2}$; $c) \lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{1}{2}$; $d) \lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{1}{2}$, por el teorema fundamental de límites, debe cumplirse que: $e) \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{2}$

$f) f(0)\nexists$; $g) \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $h) \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$; $i) \lim_{x\to 0} f(x) = 2$

$p) f(7) = 2$; $q) \lim_{x\to 7^-} f(x) = 0$; $r) \lim_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$; $s) \lim_{x\to 7} f(x)\nexists$

EJEMPLO 5:

Bosqueja la gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-1^-} f(x) = 4$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$; $f(-1) = 4$;

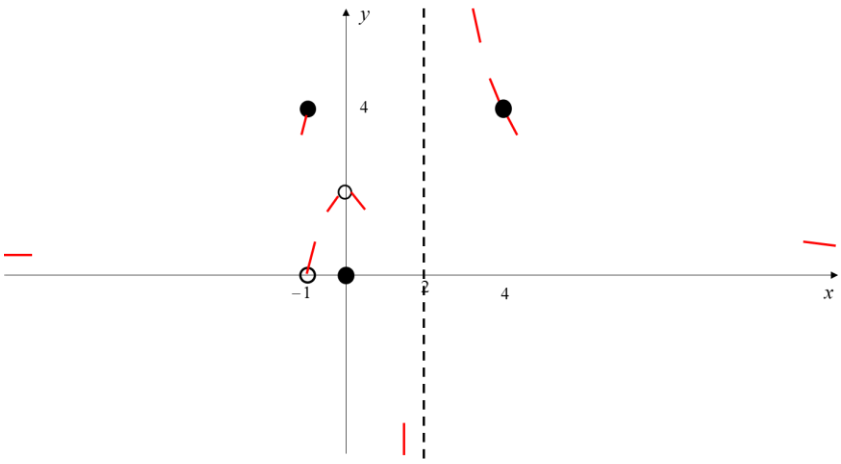
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$; $f(0) = 0$;

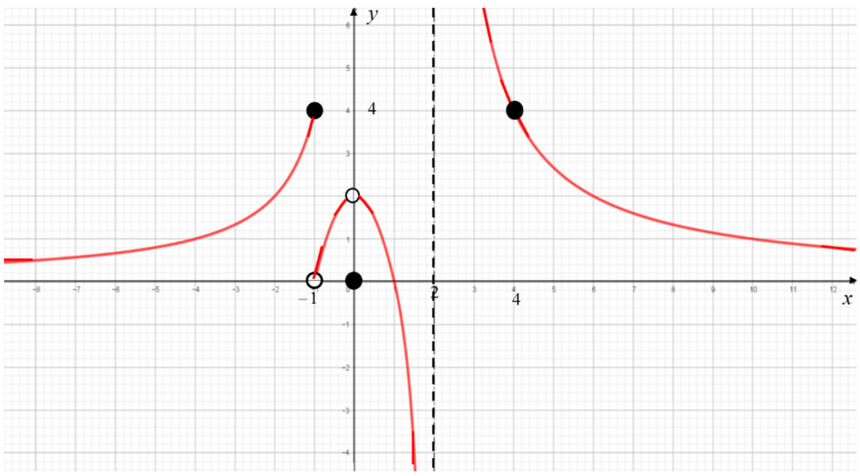
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $f(2)\nexists$;

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 4$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$; $f(4) = 4$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Solución:

Tracemos un sistema cartesiano y en él vamos plasmando cada una de las condiciones dadas.





EJEMPLO 6:

Calcular el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2}{x^2+1}$

Solución:

Acá estamos ante la misma indeterminación del ejemplo anterior, podemos usar el mismo procedimiento, pero aplicaremos la siguiente regla:

Regla para límites de cociente de polinomios, con indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Dados dos polinomios: $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1}+\ldots+a_n$ y $Q(x) = b_1x^m + b_2x^{m-1}+\ldots+b_m$

Si el grado del numerador ***n*** es mayor que el del denominador ***m***: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

Si el grado del numerador ***n*** es menor que el del denominador ***m***: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Si el numerador es de igual grado que el denominador: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{b_1}$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2}{x^2+1} = \infty \therefore \nexists L$

PROBLEMA Nº 1:

Se estima que el crecimiento poblacional de una ciudad está dado por la expresión: $f(t) = \frac{240+20t}{16+t}$, en miles de habitantes, desde su creación en 1.810.

a). ¿Qué población tenía esa ciudad en 1.810?; b). ¿Qué población tenía en 1.890?; c). ¿Qué tendencia seguirá pasados 200 años?; d). ¿Qué tendencia seguirá pasados muchos años?

Solución:

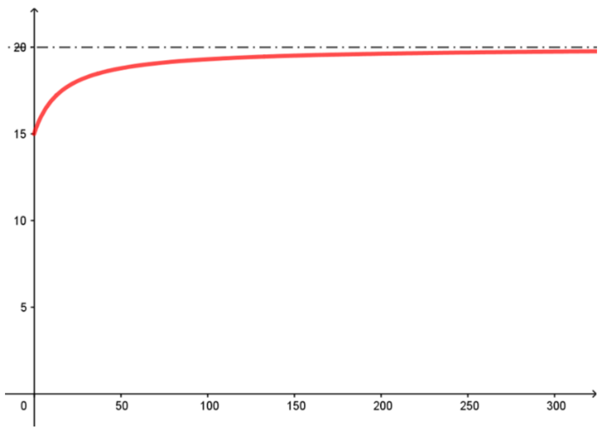
$a)\ f(0) = \frac{240+20\cdot 0}{16+0} = 15 \Rightarrow 15.000\ hab.$

$b)\ f(80) = \frac{240+20\cdot 80}{16+80} = 19{,}1 \Rightarrow 19.100 hab.$

$c)\ \lim\limits_{t\to 200}\frac{240+20\cdot t}{16+t} = 19{,}6 \Rightarrow 19.600 hab.$

$d)\ \lim\limits_{t\to\infty}\frac{240+20t}{16+t} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{240+20t}{16+t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{\frac{240}{t}+20}{\frac{16}{t}+1} = 20 \Rightarrow 20.000 hab.$



Pasados muchos años, la población tenderá a estabilizarse en 20.000 habitantes.

PROBLEMA Nº 2:

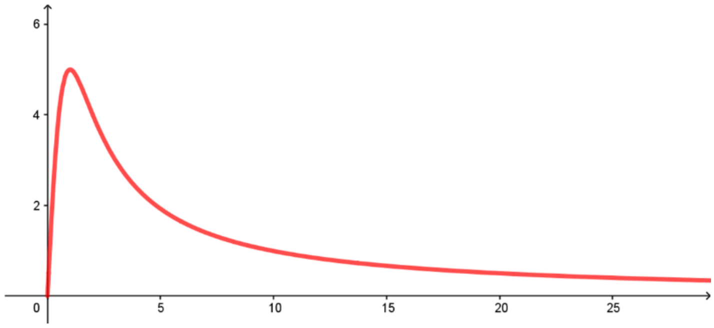
La cantidad de una droga en la corriente sanguínea ***t*** horas después de inyectada intramuscularmente, está dada por la función: $f(t) = \frac{10t}{t^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

Solución:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10t}{t^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{10t}{t^2+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{10}{t+\frac{1}{t}}=$$

$$=\frac{10}{\infty+0}=0$$



Al pasar muchas horas la cantidad de droga en sangre tiende a anularse.

Cuestionario 2

En cada planteamiento contesta y justifica matemáticamente tu afirmación, basándote en los conocimientos aprendidos. Puedes usar gráficas para explicar.

¿Qué se debe estudiar de una función, dada de manera analítica para determinar los posibles valores de x donde se ubica/n la/s asíntota/s vertical/es?

¿Cómo se calculan las asíntotas horizontales en una función de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios reales de x?

¿Qué se debe tener en cuenta a la hora de graficar una función?

Si el $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, ¿qué indica en su gráfica?

Si el $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, ¿qué indica en su gráfica? ¿ $a\in dom\ f$?

¿Una función puede tener más de una asíntota vertical?

Límites notables

Aceptaremos sin demostración los siguientes límites notables:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1}$$

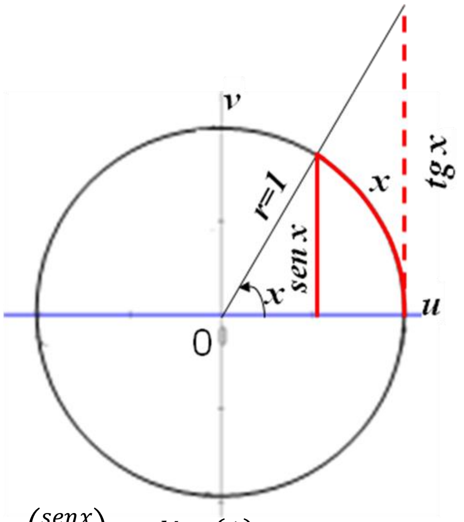
$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Definiremos y demostraremos el límite trigonométrico fundamental, explicando someramente el análisis matemático para definir el número $\boldsymbol{e}$, constante universal muy usada en los cálculos.

Teorema: **Límite Trigonométrico Fundamental**

$$\lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}=1$$



Demostración:

Suponemos que $0<x<\pi/2$.

Es evidente que: $\quad sen\,x < x < tg\,x$

Si dividimos m a m por $sen\,x$: $1<\frac{x}{senx}<\frac{1}{\cos x}$

Haciendo las recíprocas y ordenando, tenemos:

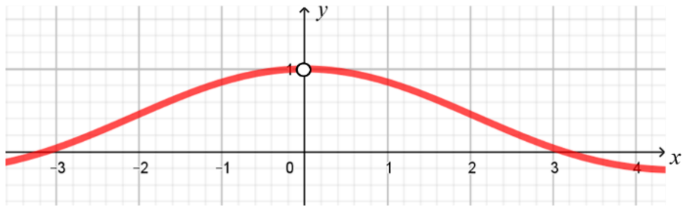
$$\cos x<\frac{sen\,x}{x}<1$$

Aplicando límite con ***x*** tendiendo a cero: $\lim_{x\to 0^+}(cos\,x) < \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{senx}{x}\right) < \lim_{x\to 0^+}(1)$

Haciendo tender al límite en el primer y tercer miembro:$1<\lim_{t\to 0^+}\frac{sent}{t}<1,$

lo que implica: $\lim_{t\to 0^+}\frac{sent}{t}=1$. Ahora suponiendo que $-\pi/2<x<0$ y como la función $f(x)=\frac{senx}{x}$ es par, se prueba análogamente que $\lim_{t\to 0^-}\frac{sent}{t}=1$, con lo cual $\lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}=1$ queda demostrado el teorema.

La gráfica de la función $f(x)=\frac{sen\,x}{x}$ es:



Observe que f no está definida en x = 0.

EJEMPLO 1:

Calcular el $\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\frac{0}{0}$ Forma Indeterminada.

Solución:

Para salvarla, multipliquemos y dividamos en cada caso, por el argumento del seno ***2x*** y ***3x***, de esta manera se logra formar en el numerador y en el denominador, sendos límites trigonométricos fundamentales:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\boxed{x}.sen2x}{2x}}{\frac{3\boxed{x}.sen3x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}.\frac{\frac{sen2x}{2x}}{\frac{sen3x}{3x}}=\frac{2}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen2x}{2x}}{\frac{sen3x}{3x}}=$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}}=\frac{2}{3}.\frac{1}{1}=$$

$$=\frac{2}{3}\therefore\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}=\frac{2}{3}$$

EJEMPLO 2:

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & si \quad x < 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x+2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$; Calcula, si existe, el límite en ***x*=0**

Solución:

$$\lim_{x\to 0} f(x) si f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \dfrac{0}{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{2} sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 3:

Determina el valor de ***a*** de manera tal que el siguiente límite exista:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad si \quad f(x) = \begin{cases} 6.\cos x & si \quad x \leq 0 \\ a.(x^2 + 2) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 6.\cos x = 6$$

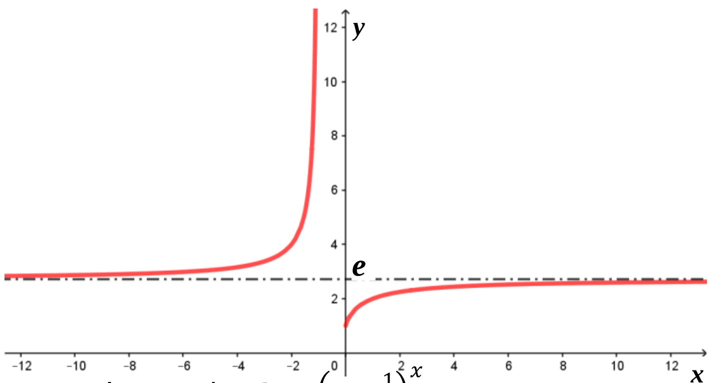
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a.(x^2 + 2) =$$

$$= a.(0^2 + 2) = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{2}$$

$$a = 3$$

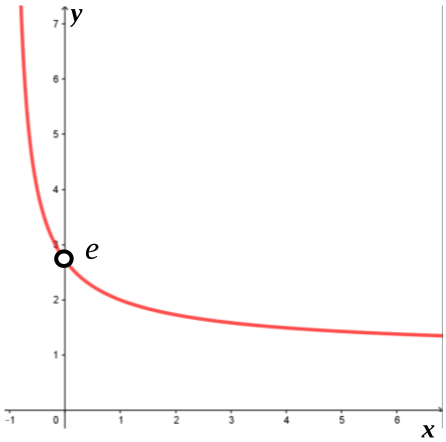
Teorema: **Límite Exponencial Fundamental**

$$Sea\ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ se\ verifica:\ \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



El teorema también se cumple cuando: $\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

El número $e \cong 2{,}71828 \ldots$, conocido como número de Euler o constante de Napier, es un número irracional de fundamental importancia en matemática, siendo la base de los logaritmos neperianos.



Si se reemplaza ***x*** por ***1/x***, se verifica que:

$\begin{cases} x \to \infty \\ \frac{1}{x} \to 0 \end{cases}$, entonces:

$Sea\ f(x) = (1+x)^{1/x},\ se\ verifica\colon\ \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$

Estos teoremas nos permiten resolver límites de funciones exponenciales cuando la sustitución directa da como resultado alguna de las F.I. exponenciales 0^0; ∞^0 o 1^∞.

Sin embargo, en este curso no abordaremos las estrategias algebraicas que se utilizan en estos casos, ya que existe otro método más sencillo que aplica conocimientos del cálculo, que veremos más adelante.

Cuestionario 3

En cada planteamiento contesta y justifica matemáticamente tu afirmación, basándote en los conocimientos aprendidos. Puedes usar gráficas para explicar.

¿Dada la función $f(x) = \frac{senx}{x}$, $\exists\ f(0)$?

¿Existe le $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$?

¿Existe le $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$?

¿Existe le $\lim_{x \to \infty} \frac{sen\ x}{x}$?

¿Existe el $\lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{x}$?, si es así, ¿cuánto es su valor?

¿Cómo se define un número irracional? ¿qué diferencia tiene con un racional?

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; y $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$, ¿significa que $\exists\ f(a)$? ¿qué pasa con la gráfica allí?

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$; y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, ¿significa que $\nexists\ f(a)$? ¿qué pasa con la gráfica allí?

BIBLIOGRAFÍA

- AYRES, F. Jr. (1971). *Teoría y Problemas de Cálculo Diferencial e Integral*. Mc. Graw Hill. México.
- CÁTEDRA AMI. FRT-UTN. (2024). *Unidad 2- Límites*. Aula virtual AMI. FRT-UTN.
- DANUN, A. (2021) – Nociones de Cálculo Diferencial. Editorial UNSTA.
- ETCHEGOYEN, S. y otros, (2001), *Matemática 1*. Kapelusz editorial S.A., Buenos Aires.
- FONES, A., (2005), *Matemática 2*. Kapelusz editorial S.A., Buenos Aires.
- CÁTEDRA AMI. FRT-UTN. (2024). *Guía de Trabajos Prácticos N° 2. - Límites*. Aula virtual AMI. FRT-UTN.
- KACZOR, R. y otros, (1999), *Matemática I*. Ediciones Santillana S.A., Bs. As.
- LARSON, HOSTELER y EDWARS, (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Mc Graw Hill, Madrid.
- MENOCAL, G. (2018). *Matemática Preuniversitaria. Teoría y Práctica*. Editorial Académica Española. Madrid.
- PURCELL, E. y otros. (2007). *Cálculuo 9e*. Pearson Educación. México D.F.
- SPIVAK, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté. México D.F.
- STEWART, J. (2010) 4ta. Edición. *Cálculo Conceptos y Contextos*. Cengage Learning Editores. México, D.F.
- STEWART, J. (2012) 7ma. Edición. *Cálculo de una variable Trascendentes tempranas*. Cengage Learning Editores. México, D.F.
- TAYLOR, H. y WADE, T. (1971). *Cálculo Diferencial e Integral*. Litografía Ingramex, S.A., México D.F.