**ANÁLISIS MATEMÁTICO I – INGENIERÍA**
**PRIMER PARCIAL – 10/08/2023**

**APELLIDO y NOMBRE:.........................................................................Correo:…………………………….**

| 1 | | 2 | 3 | 4 | 5 | NOTA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**Todas sus respuestas deben estar justificadas.**

1) Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o (F). **Justifique las respuestas**: ya sea proporcionando un argumento basado en las herramientas teóricas que conoce o mostrando un contraejemplo, según corresponda.

a) (10 pts) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $2x^3+2y^3-9xy=0$ en el punto $P=(2,1)$ es: y=$\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$

b) (10pts) Si $x\in\Re$ y $|g(x)|\le k, k\in\Re^+$ entonces $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+4}\ g(x)\right)=0$

2) (20 pts) Hallar los valores de $a,\ b\ y\ k\ (k>0)$ para que exista el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, sabiendo que la recta de ecuación $y=-\frac{1}{4}x+1$ es asíntota correspondiente al gráfico de $f$, donde:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(kx)}{x^2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x^2-2}{ax+b} & \text{si } x>0\end{cases}$$

3) (20 pts) Hallar $a>0,\ \text{b}\in\Re\,/$ la recta tangente a $f$ en $x=0$ sea $y=9x+4$, donde $f(x)=-3sen(bx)+e^{\ln(2x^2+a)}+3a$

4) (20pts) Hallar el estudio completo de la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$

5) (20 pts) Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\dfrac{\pi-3}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$ y escriba $f'(x)$

# Primer parcial 2023

1) a) $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en $(2, 1)$

$6x^2 + 6y^2 \cdot y' - 9y - 9xy' = 0$

$y'(6y^2 - 9x) = 9y - 6x^2$

$y' = \dfrac{9y - 6x^2}{6y^2 - 9x} \Rightarrow y'(2,1) = \dfrac{9 - 24}{6 - 18} = \dfrac{-15}{-12}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{5}{4}$

Recta tangente :

$\underset{1}{y} = \underset{\frac{5}{4}}{m}\underset{2}{x} + b \Rightarrow 1 = \dfrac{5}{2} + b \Rightarrow 1 - \dfrac{5}{2} = b$

$-\dfrac{3}{2} = b$

luego, RT : $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{2}$ V

b) $\lim_{x \to 0} \left( \frac{x^2}{x^2+4}^{\to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{acot} \right) = 0$ por prop. producto de un infinitésimo por una fc acotada

Como $|g(x)| \leq k,\ k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -k \leq g(x) \leq k$

entonces $g$ es una función acotada V

2) $y = -\frac{1}{4}x + 1$ es AO de $f \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$ y $b = 1$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{x(ax+b)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{ax^2+xb} = \frac{1}{a} = -\frac{1}{4}$$

Entonces, $\boxed{a = -4}$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{-4x+b} + \frac{1}{4}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{4(x^2-2)-4x^2+bx}{4(-4x+b)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x^2}-8-\cancel{4x^2}+bx}{-16x+b} = \frac{b}{-16} = 1 \Rightarrow \boxed{b = -16}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \frac{\to 0}{\to 0} \underset{\text{B-L'H}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(kx)\cdot k}{2x} \underset{\text{B-L'H}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{k \cdot \overbrace{\cos(kx)}^{\to 1} \cdot k}{2} = \frac{k^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2}{-4x - 16} = \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{k^2}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |k| = \frac{1}{2} \quad \text{como } k > 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

Otra forma:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \frac{\to 0}{\to 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1-\cos(kx))(1+\cos(kx))}{x^2\cdot(1+\cos kx)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2(kx)}{x^2\,(1+\cos(kx))} \cdot \frac{k^2}{k^2} = \lim_{x \to 0^-} \overbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx}\right]^2}^{\to 1} \cdot \frac{k^2}{1+\cos(kx)} = \frac{k^2}{2}$$

3) $f(x) = -3\,\text{sen}(bx) + e^{\ln(2x^2+a)} + 3a$

$f(0) = -3\,\text{sen}(0) + e^{\ln(a)} + 3a = 4a$

RT : $y = 9x + 4 \Rightarrow F(0) = 4$
$f'(0) = 9$

$f'(x) = -3\cos(bx) \cdot b + 4x \Rightarrow f'(0) = -3b\overbrace{\cos(0)}^{1} = -3b$

$f'(0) = 9 \Rightarrow -3b = 9$

$\boxed{b = -3}$

4) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ $\quad D_F = \mathbb{R} - \{0\}$

$\dfrac{e^{-x}}{x} \neq 0 \Rightarrow$ no tiene raíces

Asíntotas: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{-x}}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$

$\Rightarrow$ F presenta una AV en $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{x}}_{\to +\infty}} = 0$$

Luego, $\underline{y = 0}$ es $AH_{+\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \frac{\to \infty}{\to \infty} \underset{B-L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

$\Rightarrow \nexists\ AH_{-\infty}$

¿ $\exists\ AO_{-\infty}$ ?

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{\to \infty}{\to \infty} \underset{B-L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \frac{\to \infty}{\to \infty} =$$

$$\underset{B-L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty \Rightarrow \nexists\ AO_{-\infty}$$

Candidatos a extremos:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot x - e^{-x}\cdot 1}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ si $x+1=0$

$\boxed{x=-1}$ candidato a extremo local

$$f'(x) > 0$$

$$\frac{-\overbrace{e^{-x}}^{>0}(x+1)}{\underbrace{x^2}_{>0}} > 0 \Rightarrow -(x+1) > 0$$

$$-x-1>0$$

$$\boxed{-1 > x}$$

$f'(x) < 0$ si $\boxed{x > -1}$

$IC = (-\infty; -1)$

$ID = (-1; 0) \cup (0; +\infty)$

Luego, $f$ presenta en $x=-1$ un máx. local.

$$F'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$$F''(x) = \frac{\left[e^{-x}(x+1) - e^{-x}\right]x^2 + e^{-x}\overbrace{(x+1)\cdot 2x}^{(2x^2+2x)}}{x^4}$$

$$= \frac{\left[e^{-x}x + e^{-x} - e^{-x}\right]x^2 + 2x^2e^{-x} + 2xe^{-x}}{x^4}$$

$$= \frac{x^3e^{-x} + 2x^2e^{-x} + 2xe^{-x}}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}\,e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2+2x+2}_{>0} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+2x+2=0$$

$\Rightarrow$ no hay puntos de inflexión

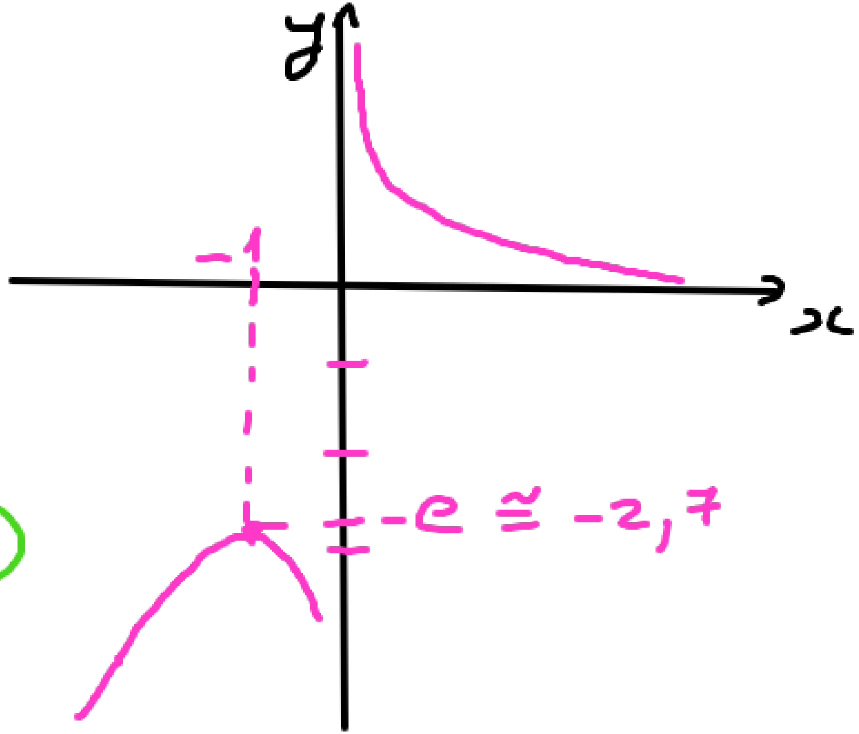
$F''(x) > 0$

$$\frac{\overbrace{e^{-x}}^{>0}\,\overbrace{(x^2+2x+2)}^{>0}}{x^3} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow \underline{x > 0}$$

$f''(x) < 0$ si $\underline{x < 0}$

$IC^+ = (0; +\infty)$

$IC^- = (-\infty; 0)$




$Im_F = (-\infty; 2{,}7] \cup (0; +\infty)$

5)
$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi-3}{x}\right) + x^2 \cdot \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-3}{x}\right) \cdot (\pi-3) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= 2x\cos\left(\frac{\pi-3}{x}\right) + (\pi-3)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-3}{x}\right) \quad \forall x \neq 0$$

$f$ es cont. en $x=0$ ya que: $\exists f(0)=0$

y $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\text{inf}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi-3}{x}\right)}_{\text{acot}} = 0 = f(0)$

¿$f$ es derivable en $x=0$?

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\left(\frac{\pi-3}{x}\right) - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\text{inf}} \overbrace{\cos\left(\frac{\pi-3}{x}\right)}^{\text{acot}} = 0$$