UNIDAD N° 7 DIFERENCIALES

Recordemos que

- $\Delta x = x_2 - x_1$ es la **variación en x** o **incremento** en la variable x
- $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ es la **variación en y** o **incremento** en la variable y

Con esta notación podemos escribir escribimos directamente

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Sea f es una función derivable en $x = x_1$, sabemos entonces que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Así, si Δx es pequeña, es decir $\Delta x \approx 0$, el cociente $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ será aproximadamente $f'(x_1)$, es decir

$\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \approx f'(x_1)$ o lo que es lo mismo $\Delta y \approx f'(x_1) \,.\, \Delta x$

La expresión $f'(x_1) \,.\, \Delta x$ representa el **cambio aproximado en y**.

Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^2$ en $x_1 = 1$. Encuentre los cambios reales en x , en y, y el cambio aproximado en y. Compare estos últimos.

Para el cambio aproximado usamos $f'(x_1)\Delta x = 2\Delta x$

$x_1 = 1$	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Δx	Δy	$f'(x_1)\Delta x$
1	1.1	1	1.21	0.1	0.21	0.2
1	1.01	1	1.0201	0.01	0.0201	0.02
1	0.9	1	0.81	-0.1	-0.19	-0.2

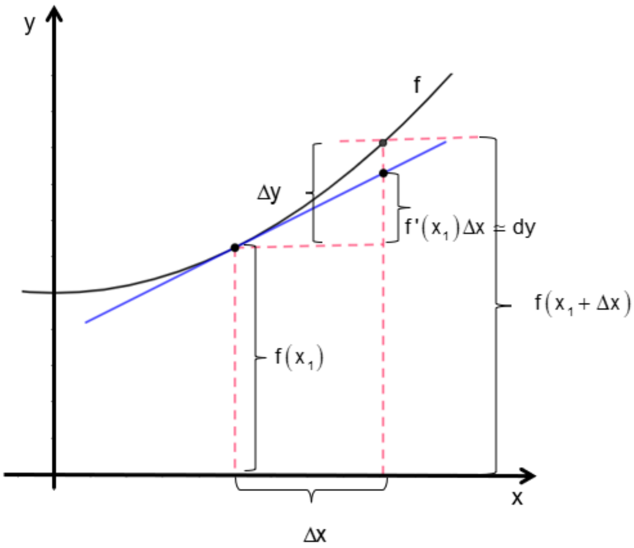
Observe que las últimas dos columnas de la derecha presentan valores muy próximos, esto mejora a medida que Δx se hace cada vez más pequeño

Definición de diferenciales

Sea y = f (x) una función derivable de la variable independiente x y sea Δx cualquier número real distinto de cero.

- dx es la **diferencial de la variable independiente** x y es igual a Δx
- dy es la **diferencial de la variable dependiente** y, y se define como

$$dy = f'(x)\,.\,dx$$



Observación importante

La diferencial de una función f en x = a es una transformación lineal que mejor aproxima a f(x) − f(a) en un entorno de a.

Ejemplo

Encuentre dy, si

a) $y = x^3 - 3x + 1$

b) $y = \operatorname{sen}\left(x^4 - 3x^2 + 11\right)$

c) $g(t) = \sqrt{t^2 + 3t}$

Solución

a) $dy = \left(3x^2 - 3\right)dx$

b) $dy = \cos\left(x^4 - 3x^2 + 11\right)\left(4x^3 - 6x\right)dx$

c) $dy = \dfrac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t}}dt$

Una aplicación de los diferenciales

En muchas aplicaciones, las diferenciales son usadas para aproximar valores. Esto es, $\Delta y \approx dy$, nos queda

$$\Delta y \approx f'(x)\,dx$$

La cual deriva en la siguiente expresión equivalente

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

Al considerar la función $f(x) = x + c$ observe que el incremento en

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x$ con lo cual la diferencial en y, nos queda, $dy = dx$ ó $dy = \Delta x$, en consecuencia, nos queda $dy = \Delta y$

Es decir que para la función $f(x) = x + c$ la diferencial en y, dy, es igual al incremento en y, Δy y al incremento en x, Δx.

Hacer un trabajo análogo para $f(x) = ax + c$, $a \neq 0$

Ejemplo

Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$ pero su calculadora está sin funcionar. Use la noción de diferencial para aproximar.

Solución

Consideramos la función $y=\sqrt{x}$ entonces $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Entonces para aproximar $\sqrt{4.6}$ consideramos x = 4 y dx = 0.6 entonces $dy=\frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6)=0.15$ por lo tanto reemplazando en $dy\simeq f(x+\Delta x)-f(x)$ nos queda que $0.15\simeq\sqrt{4.6}-\sqrt{4}$ o lo que es lo mismo $\sqrt{4.6}\simeq 2+0.15=2.15$

De manera análoga, haremos para aproximar $\sqrt{8.2}$ pero en este caso tenemos que x = 9 y dx= -0.8. Lo cual nos dará como resultado $\sqrt{8.2}\simeq 3-0.133=2.867$

Ejemplo

Aproxime mediante diferencial el valor de $\operatorname{sen}(62°)$

Solución

Para aproximar $\operatorname{sen}(62°)$ usamos la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ y el valor más próximo a 62° que conocemos el seno de dicho valor es 60°

Es importante aquí darse cuenta de que, para usar la aproximación por diferenciales, debemos trabajar con números reales, con lo cual usaremos las equivalencias $60°\equiv\frac{60\pi}{180}$ rad y $62°\equiv\frac{62\pi}{180}$ rad de esta manera $\Delta x=\frac{62\pi}{180}-\frac{60\pi}{180}=\frac{\pi}{90}$

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{62\pi}{180}\right)\approx\operatorname{sen}\left(\frac{60\pi}{180}\right)+\cos\left(\frac{60\pi}{180}\right).\frac{\pi}{90}\approx 0.88348$$

Así, sen (62°) ≈ 0.88348.

El valor que se obtiene usando una calculadora convencional es aproximadamente 0.88294

Ejemplo

Para un determinado experimento, en el laboratorio de materiales, se fabricó una probeta cúbica de hormigón de 20cm de arista cuando en realidad debería haberse realizado de 20,4cm. Determine, aplicando diferenciales, la variación de volumen que experimenta la probeta cuando se modificó la medida de la arista

Solución

La variación de volumen es $\Delta V = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$, al ser una probeta cubica, la formula del volumen de ésta es $V(x) = x^3$.

Usando diferenciales

$$\Delta V \approx 3x^2 \Delta x$$

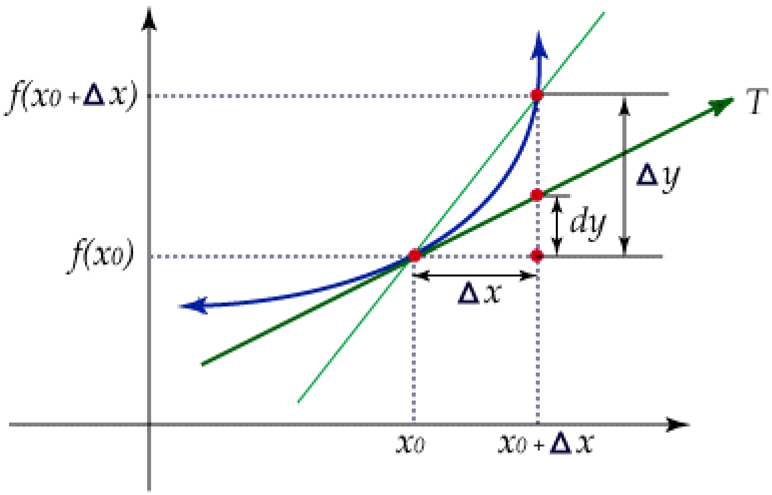
Reemplazando x = 20 cm y $\Delta x = 0,4\,cm$ obtenemos $\Delta V \approx 480\,cm^3$

Comparación entre Δy y dy

Sabemos que $\Delta y \approx dy$ y se cumple $\Delta y = dy$ únicamente cuando y = ax+c, con lo cual es interesante determinar para que casos $\Delta y \geq dy$ y $\Delta y \leq dy$

La respuesta a este interrogante viene dada por la concavidad de la gráfica de la función en un intervalo dado.

Consideremos cualquier función cóncava hacia arriba y sea $\Delta x > 0$



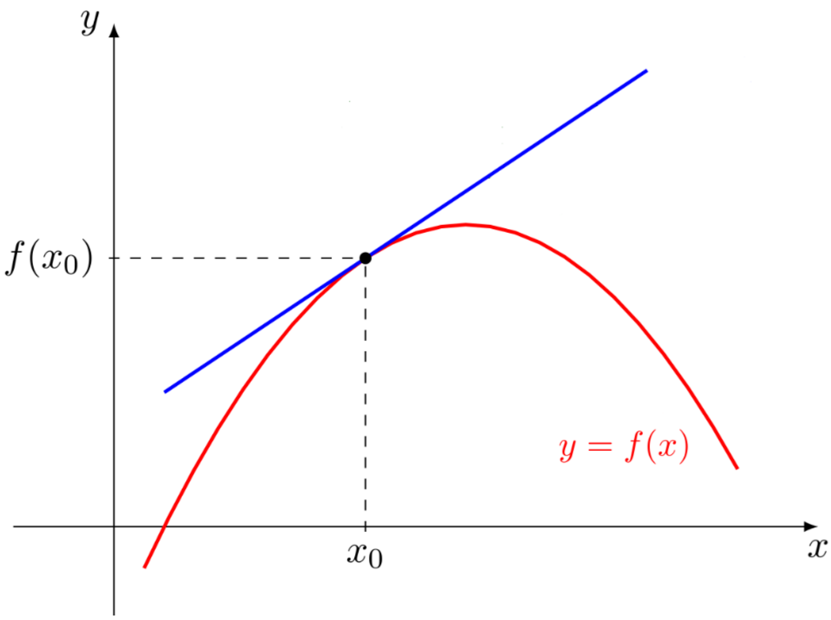
Este hecho surge de la interpretación geométrica de la definición de función cóncava hacia arriba, en la cual todas las rectas tangentes están por *debajo* de la función.

Ahora si consideramos $\Delta x < 0$, y observamos la gráfica la relación de orden se mantiene (Queda este hecho para ser realizado por el lector)

Podemos entonces, afirmar que:

Si f es una función derivable en un intervalo I, y además es **cóncava hacia arriba** en I entonces $$dy \leq \Delta y$$

EJERCICIO: Deducir la relación entre Δy y dy para el caso de una función derivable y **cóncava hacia abajo** en un intervalo I. Ubicar Δx (ambos casos), Δy y dy en la siguiente grafica.



Cálculo de diferenciales

Cada una de las reglas de derivación que se estudiaron anteriormente pueden escribirse en forma diferencial.

Fórmulas Diferenciales

Sean u y v funciones diferenciales de x

Múltiplo constante: $d[cu] = c\,du$

Suma o Diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[u.v] = du.v + u.dv$

Cociente: $d\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{du.v - u.dv}{v^2}$

Ejemplo

Sea $y = v(x) + u(x)$ donde v y u son funciones derivables entonces

$$dy = dv + du$$

O lo que es lo mismo: $dy = v'(x)dx + u'(x)dx = (v'(x) + u'(x))dx$

Ejemplo

Sea $y = v(x).u(x)$ donde v y u son funciones derivables entonces

$$dy = dv.u(x) + v(x)du$$

Diferenciales sucesivas

Sea una función que admite derivada de segundo orden. Se llama **diferencial segunda** de f, y se denota por d^2y, a la diferencial de dy, es decir:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

Obtención

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx\,dx = f''(x)(dx)^2$$

Ejemplo

Obtenga d^2y de $f(x)=\text{sen}(2x)$. Particularice para $x=\dfrac{\pi}{4}$

$dy = 2\cos(2x)dx$, $d^2y = -4\,\text{sen}(2x)(dx)^2$

Para $x=\dfrac{\pi}{4}$ particularizamos $d^2y = -4\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2}(dx)^2$ y nos queda $d^2y = -4(dx)^2$

De manera análoga, para una función f que admite derivada de tercer orden, se define la **diferencial tercera** de f:

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3$$

Para el lector: Complete la siguiente definición con los requisitos necesarios para definir la diferencial n-ésima, además, use una analogía con las expresiones anteriores para deducir la correspondiente expresión

Sea f una función que admite …………………………………..se define la **diferencial n-ésima** de f:

$$d^{\,n)}y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$