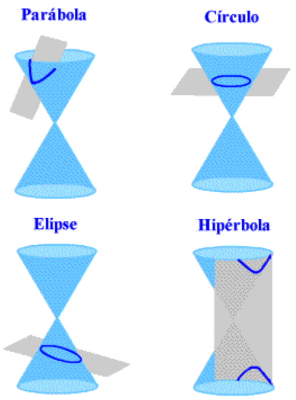
ALGEBRA
Y
GEOMETRIA ANALITICA

ESTUDIO PARTICULAR DE LAS CONICAS



ESP. GRACIELA ABRAHAM

MG. ANALIA MENA

ESP. MABEL RODRIGUEZ ANIDO

ESTUDIO PARTICULAR DE LAS CONICAS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Que el alumno sea capaz de:

- Identificar las distintas cónicas mediante el análisis de su ecuación.
- Determinar sus elementos a partir de la ecuación.
- Graficar las distintas cónicas a través de los elementos y la ecuación.
- Aplicarlas para resolver situaciones de la vida real.

Lugar Geométrico

Se llama Lugar Geométrico al conjunto de puntos del plano o del espacio que cumplen determinadas condiciones. Todo lugar geométrico del plano es la gráfica cartesiana de una ecuación en dos variables x e y de la forma **F(x, y) =0.**

Sin embargo, la ecuación de un lugar geométrico del espacio es de la forma **F(x, y, z) = 0.**

Recíprocamente, el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación **F(x, y) =0** representan una curva en el plano. Y el conjunto de todos los puntos (x, y,z) del espacio que satisfacen la ecuación **F(x, y, z) =0** representan una superficie.

Cabe aclarar que sólo estudiaremos lugares geométricos cuyas ecuaciones sean polinómicas.

Teniendo en cuenta que*: Una ecuación polinómica o algebraica racional entera es una ecuación en la que las variables están afectadas sólo por las operaciones enteras (suma, resta producto, potencia).*

Las Secciones Cónicas

Una **sección cónica** es la curva de intersección de un plano con un cono de dos mantos (o dos hojas). El nombre de **cónicas** con que se designa a circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas es debido a estas intersecciones.

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

- La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.
- Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.
- La órbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola.

1.- Superficie Cónica

Una superficie cónica está generada por una recta (llamada generatriz) que se mueve apoyándose en una curva fija (llamada directriz) y que pasa por un punto fijo (llamado vértice) no contenido en el plano de esa curva

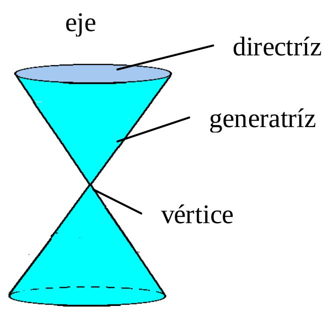


Gráfico Nº 12: Superficie Cónica

Si la directriz es una circunferencia, la superficie se llama **superficie cónica circular.**

2.- Obtención de las Cónicas como Secciones Planas

Si el plano no pasa por el vértice del cono las curvas que se obtienen son cónicas verdaderas. Si el plano corta a todas las generatrices se obtiene la **elipse.** En particular si el plano es además perpendicular al eje se obtiene la **circunferencia**. Si el plano es paralelo a dos generatrices se obtiene la **hipérbola**. Si el plano es paralelo a una generatriz se obtiene la **parábola.** Estas situaciones, se observan en los gráficos que se muestran a continuación.

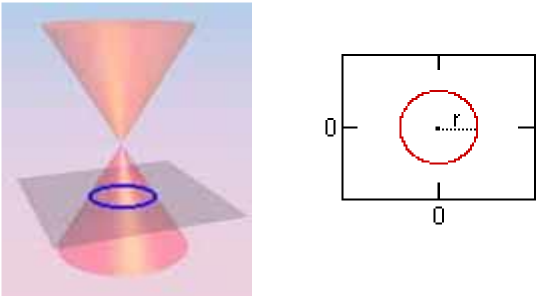


Gráfico Nº 1: Circunferencia

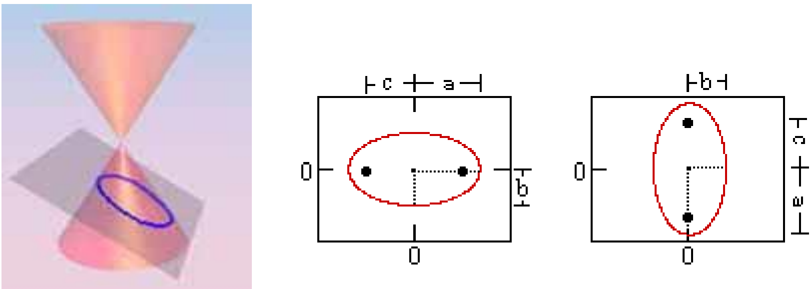


Gráfico Nº 2: Elipse con eje focal horizontal y vertical

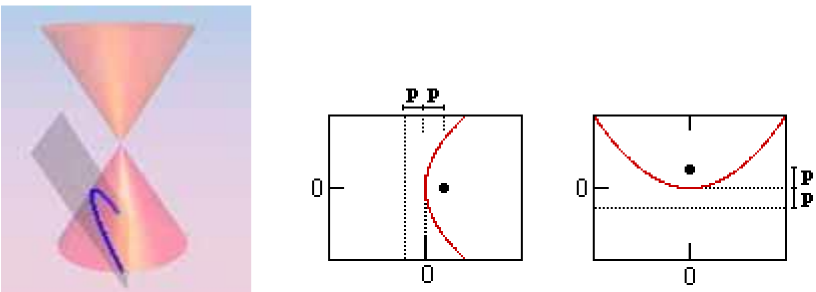


Gráfico Nº 3: Parábola con eje focalhorizontal y vertical

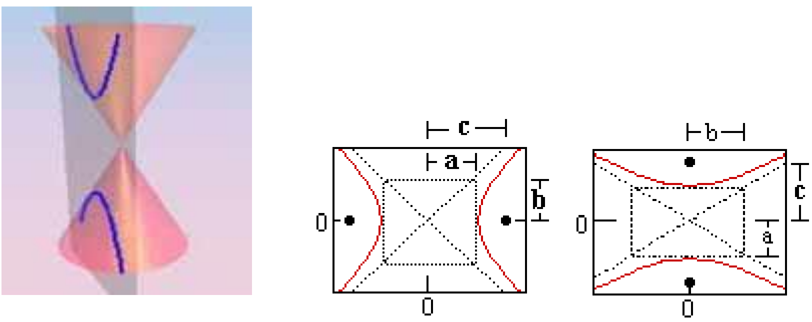


Gráfico Nº 4: Hipérbola con eje real horizontal y vertical.

Si el plano pasa por el vértice del cono, manteniéndose paralelo a su posición primitiva, se obtienen las llamadas **cónicas degeneradas**. En el caso de la elipse y la circunferencia degeneran en un **punto**. La hipérbola degenera en un **par de rectas** que se cortan. La parábola degenera en dos **semirrectas paralelas o coincidentes**. Estos casos se muestran en los gráficos siguientes.

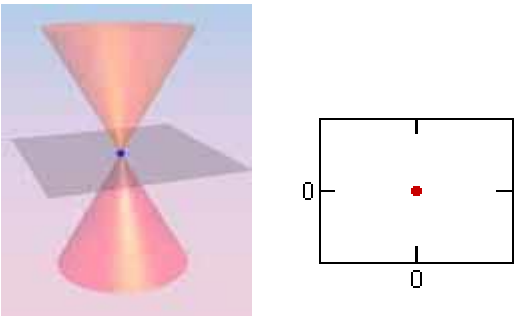


Gráfico Nº 5: la elipse y las circunferencias degeneran en un punto

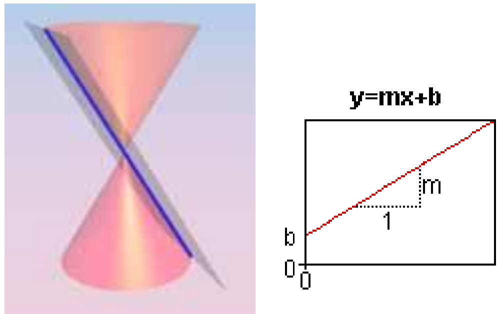


Gráfico Nº 6: la parábola degenera en dos semirrectas paralelas o coincidentes

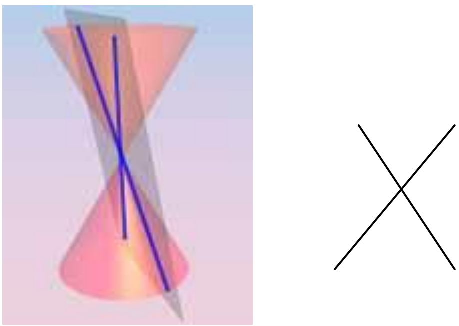


Gráfico Nº 7: La hipérbola degenera en un par de rectas que se cortan

La Ecuación General de una cónica verdadera o degenerada es una ecuación polinómica de segundo grado en x e y :

$$Ax^2 + B\,x\,y + Cy^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

- Si B=0, resulta: $Ax^2 + Cy^2 + D\,x + E\,y + F = 0$ **que es la ecuación de 2º grado en dos variables, sus coeficientes determinan el tipo de**

La curva cuadrática más simple es la circunferencia.

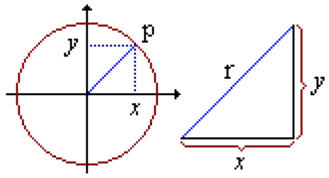
Circunferencia

"Se denomina Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro."

Llamamos **radio** de la circunferencia a la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.

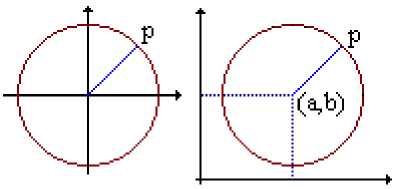
1.- Ecuación analítica de la circunferencia:

Si hacemos coincidir el centro con el origen de coordenadas, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia (x, y) determina un triángulo rectángulo, y por supuesto que responde al teorema de Pitágoras:



$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen



Puesto que la distancia entre el centro (h, k) y uno cualquiera de los puntos (x, y) de la circunferencia es constante e igual al radio r tendremos que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Ecuación Canónica de la circunferencia con centro en C(h , k)

Desarrollando los cuadrados obtenemos: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky - r^2 = 0$.

Si reemplazamos $-2h = D$; $-2k = E$; $F = h^2 + k^2 - r^2$ tendremos que:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

Ecuación General de la Circunferencia

<u>Ejemplo</u>: Si tenemos la ecuación: $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$. Entonces $D = 6 \Rightarrow 6 = -2h \Rightarrow h = -3 \Rightarrow E = -8 \Rightarrow -8 = -2k \quad k = 4 \Rightarrow C(-3, 4)$.

Hallemos el radio, $F = (-3)^2 + 4^2 - r^2$ □$-11 = (-3)^2 + 4^2 - r^2$, $r = 6$

La ecuación de la circunferencia queda: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

2.- Rectas Secantes, tangentes y externa a una circunferencia

Dada la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y la ecuación de una recta: $y = mx + b$

Reemplazando el valor y de la recta en la circunferencia obtenemos una ecuación de segundo grado tal que:

Si el radicando o discriminante cumple:

$$\begin{array}{ll}
\Delta > 0 & \text{las raices son reales y distintas (la recta es secante a la circunferencia)} \\
\Delta = 0 & \text{las raices son reales e iguales (la recta es tangente a la circunferencia)} \\
\Delta < 0 & \text{las raices son dos números complejos conjugados (la recta es exterior a la circunferencia)}
\end{array}$$

3.- Ecuaciones de las Rectas Tangente y Normal en un punto P_0.

Para obtener la ecuación de la recta tangente a una cónica, se desdobla la ecuación de la misma remplazando $x^2 = x.x$; $y^2 = y.y$; $y = \frac{y+y}{2}$; $x = \frac{x+x}{2}$ luego se remplaza una "x" y una "y" por las coordenadas del punto de tangencia P_0 (x_0, y_0) y se obtiene la ecuación de la recta tangente $y - y_0 = m_T(x - x_0)$.

Para obtener la ecuación de la recta normal, que es perpendicular a la recta tangente, se busca la pendiente $m_N = -\frac{1}{m_T}$; y se escribe la ecuación $y - y_0 = m_N(x - x_0)$

Dada la **Ecuación General** $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y el punto $P_0(x_0, y_0)$, usamos la **regla del desdoblamiento** para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal.

$$A\,x.x + C\,y.y + D\left(\frac{x+x}{2}\right) + E\left(\frac{y+y}{2}\right) + F = 0$$

Particularizando para P_1, nos queda:

$$A\,x.\,x_0 + C\,y.\,y_0 + D\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + E\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + F = 0,$$

Desarrollando obtenemos:

a) Ecuación de la **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\,x + b_1}$

b) Ecuación de la **recta normal,** teniendo $m_n = -\frac{1}{m_{tg}}$ y el P_0 (x_0, y_0)

$$(y - y_1) = m_n\,(x - x_1) \rightarrow \quad \mathbf{y = m_n\,x + b}$$

Observación: Estas ecuaciones son válidas para todas las cónicas

4.- Ejercitación

1.- Escribe la ecuación canónica y general de la circunferencia dando sus elementos.

a) La ecuación de la circunferencia con C (0,0) y radio r tiene ecuación………………….

b) La ecuación de la circunferencia con centro sobre el eje X tiene ecuación……..................…………

c) La ecuación de la circunferencia con centro sobre el eje Y tiene ecuación…………………………………………

d) Si (a, b) y (c, d) son los extremos del diámetro de una circunferencia, cuáles serán las coordenadas de su centro?¿Cuál será la medida de su radio?

2) Si la circunferencia es tangente al eje x se cumple que…………………………….

3) Si la circunferencia es tangente al eje y se cumple que…………………………….

4) Si la circunferencia es tangente a ambos ejes se cumple que……………………….

5) Si una recta corta a la circunferencia en dos puntos se dice que son……………….

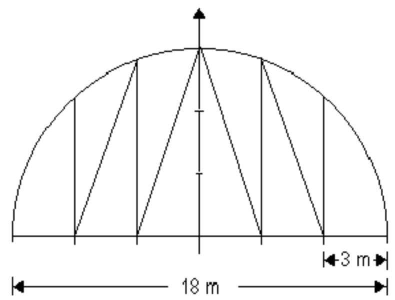
6)Si la recta no corta a la circunferencia se dice que son………………………………

7) El centro de un círculo circunscrito a un triángulo con vértices (0,4) (2,0) y (4,6) se encuentra en las mediatrices de los lados. Utilice este hecho para encontrar el centro del círculo.

8) Escribe las ecuaciones de las circunferencias: pasa por la intersección de 3x+5y- 14=0 y x-y-2=0 y es concéntrica con: $x^2 + y^2 +6x +14y +18=0$.

9) Replantee cada metro de un arco de circunferencia de 5 metros de radio. Grafique.

10) En la estructura que se indica calcule las longitudes de todas las barras. (Aclaración: Dibuje en escala e indique ésta.)



5.- Ejercicios Resueltos

1.- Dadas las circunferencias: a) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ $\quad C_a$ $\quad$ b) $x^2 + (y-1)^2 = 9$ $\quad C_b$

c) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$ $\quad C_c$

i) Determinar centro y radio. Graficar.

ii) Averiguar si los siguientes puntos pertenecen a las mismas: $P_1(2,2);\ P_2(0,4);\ P_3(7,-1)$

Resolución Ejercicio 1)

i) $C(2,0);\ r = 2,\quad C(0,1);\ r = 3,\quad C(3,-1);\ r = 4$

ii) Si los puntos pertenecen a la circunferencia, deben verificar su ecuación.

Para ***Cₐ***: $\quad (x-2)^2 + y^2 = 4$

$¿P_1(2,2) \in C_a?\qquad (2-2)^2 + 2^2 = 4; \qquad \Rightarrow \qquad P_1 \in C_a$

$¿P_2(0,4) \in C_a?\qquad (0-2)^2 + 4^2 = 20 \neq 4; \qquad \Rightarrow \qquad P_2 \notin C_a$

$¿P_3(7,-1) \in C_a?\qquad (7-2)^2 + (-1)^2 = 26 \neq 4; \qquad \Rightarrow \qquad P_3 \notin C_a$

Para $\boldsymbol{C_b}$: $x^2 + (y-1)^2 = 9$

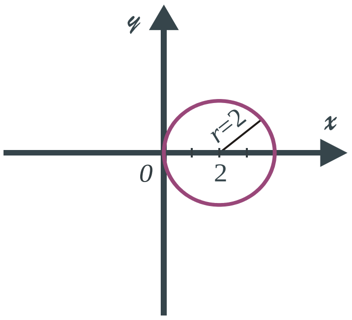
¿ $P_1(2{,}2) \in C_b$?	$2^2 + (2-1)^2 = 5 \neq 9$;	$\Rightarrow$	$P_1 \notin C_b$
¿ $P_1(2{,}2) \in C_a$?	$0 + (4-1)^2 = 9$;	$\Rightarrow$	$P_2 \in C_b$
¿ $P_3(7,-1) \in C_b$?	$(2-2)^2 + 2^2 = 4$;	$\Rightarrow$	$P_3 \notin C_b$

Para $\boldsymbol{C_c}$: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

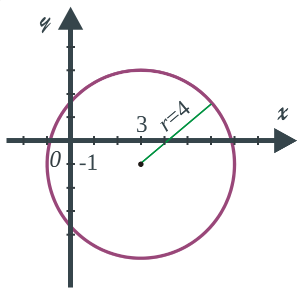
¿ $P_1(2{,}2) \in C_c$?	$(2-3)^2 + (2+1)^2 = 10 \neq 16$;	$\Rightarrow$	$P_1 \notin C_c$
¿ $P_2(0{,}4) \in C_c$?	$(2-2)^2 + 2^2 = 4$;	$\Rightarrow$	$P_2 \notin C_c$
$P_1(2{,}2) \in C_a$?	$(2-2)^2 + 2^2 = 16$;	$\Rightarrow$	$P_3 \in C_c$

C

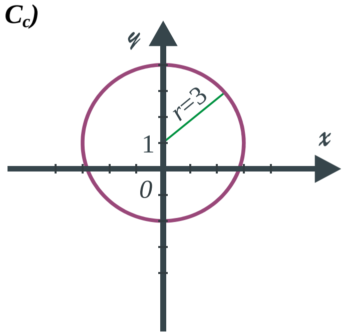
$\boldsymbol{C_a)}$



$\boldsymbol{C_b)}$



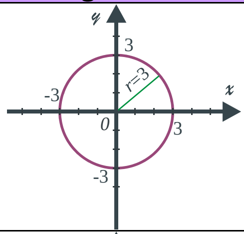
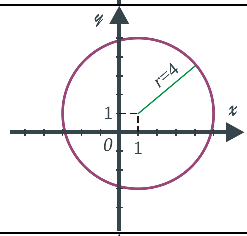
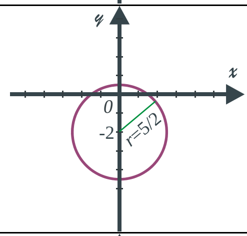
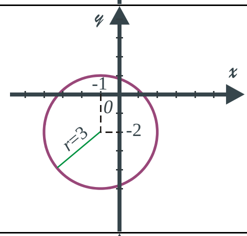
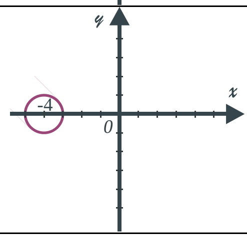
$\boldsymbol{C_c)}$



2.- Completar el siguiente cuadro:

Centro C	**Radio R**	**Ecuación de la circunferencia de centro *C* y radio *r***	**Representación gráfica**
$(0{,}0)$	3		
$(0{,}0)$	4		
$(0,-2)$	$\frac{5}{2}$		
		$x^2 + y^2 = 9$	
		$(x+4)^2 + y^2 = 1$	

Resolución Ejercicio 2.-.

Centro C	Radio R	Ecuación de la circunferencia de centro C y radio r	Representación gráfica
(0 , 0)	3	$x^2+y^2=9$	
$(0{,}0)$	4	$(x-1)^2+(y-1)^2=16$	
$(0{,}-2)$	$\frac{5}{2}$	$x^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$	
(-1 , -2)	3	$(x+1)^2+(y+2)^2=9$	
(-4 , 0)	1	$(x+4)^2+y^2=1$	

3.- Representar gráficamente la siguiente circunferencia. Determinar el centro y el radio.

a) $x^2+y^2-4x+9y-3=0$

b) $x^2+y^2+10x-2y-22=0$

Resolución Ejercicio 3.-

Esta es la ecuación general de la circunferencia: $x^2+y^2-4x+9y-3=0$

Para encontrar centro y radio hay que completar cuadrados:

$(x^2-4x+4-4)+(y^2+9y+9-9)-3=0\,,\qquad (x-2)^2-4+(y+3)^2-9-3=0$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16$$

Luego, el centro es $C(2,-3)$ y el radio es 4.

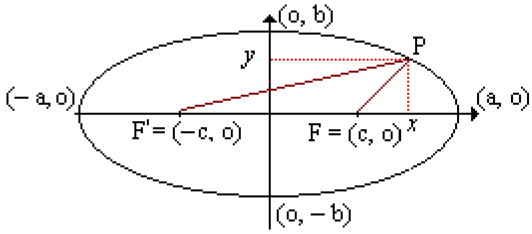
¿Te animas a resolver la ecuación b?

¿Siempre estas ecuaciones representan circunferencias?¿Por qué?. ¡Investiga!

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Analíticamente: $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$



Gráfica Nº 20: Elipse de focos F' (-c , 0) y F (c , 0)

1.- Ecuación analítica de la elipse:

Para simplificar la explicación ubiquemos a los focos sobre el eje de las *x*, situados en los puntos F (c, 0) y F' (– c, 0). Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas son (*x*, *y*). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje *x*. Entonces: PF + PF' = 2a. Aplicando Pitágoras tenemos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para sacar las raíces y desarrollamos los cuadrados queda finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación Canónica de la Elipse con centro en C (0,0) y eje focal el eje x

Si la elipse estuviese centrada en un punto cualquiera (h, k) la ecuación debería de ser:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación Canónica de la Elipse con centro en C (h ,k) y eje focal paralelo al eje x

Siguiendo el mismo razonamiento, busca las ecuaciones de las elipses con eje focal eje $\vec{y}$ y paralelo al eje $\vec{y}$. Grafica.

Luego de tu desarrollo obtendrás los siguientes resultados: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$,

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ respectivamente.

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que:

$b^2x^2 + a^2y^2 - 2xhb^2 - 2yka^2 + h^2b^2 + k^2a^2 - a^2b^2 = 0$,

Si hacemos $A = b^2$; $B = a^2$; $C = -2hb^2$; $D = -2ka^2$; $E = h^2b^2 + k^2a^2 - a^2b^2$

Tendremos la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Ecuación General de la Elipse

Ejemplo:

Si tenemos la ecuación: $4x^2 + 9y^2 + 24x - 81y + 81 = 0$, entonces: $A = 4 \Rightarrow 4 = b^2 \Rightarrow b = 2$; $B = 9$, $9 = a^2$, $a = 3$

Los radios de la elipse son: sobre el eje x , $a = 3$; sobre el eje y , $b = 2$. Hallemos C(h, k).

Como $C = 24 \Rightarrow 24 = -2hb^2 \Rightarrow h = -3$, $D = -54$, □$-54 = -2qa^2$, $q = 3$

El centro es C(h, k) = (– 3, 3). Para verificar que se trate de una elipse calculemos E que debe tener el valor de 81. $E = h^2b^2 + k^2a^2 - a^2b^2 = 81$

La ecuación de la elipse queda: $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ (Realice la gráfica).

2.- Ecuaciones de la recta tangente y normal a la cónica en un punto $P_1(x_1,y_1)$,

Dada la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje horizontal

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se desdobla esta ecuación $\frac{x.x}{a^2}+\frac{y.y}{b^2}=1$ y luego se reemplaza por el punto P_1, obteniendo:

$\frac{x.x_1}{a^2}+\frac{y.y_1}{b^2}=1 \Rightarrow$ Despejando **y** **,** resultan las ecuaciones:

a) **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\, x + b_1}$

b) **recta normal** $(y-y_1) = m_n\ (x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\, x + b_2}$

3.- Ejercitación

1.- Califique con VERDADERO o FALSO cada una de las siguientes proposiciones justificando en cada caso su respuesta:

a) En la elipse los focos equidistan del Centro de la elipse

b) La **distancia focal** es menor que la longitud del semieje mayor.

c) Los focos se encuentran en el eje menor

d) La elipse es simétrica con respecto de sus ejes y del centro.

2.- Complete:

a) La excentricidad (**e**) está dada por......................

b) Para la elipse el valor de **e < 1** por que...............

c) La relación entre "a", "b" y "c" es:......................

3.- Escriba las propiedades focales de la elipse

4.- Relacione cada ecuación de elipse con la gráfica correspondiente

a) $(x-2)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

c) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{81}=1$ d) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{100}=1$

Grafico 1

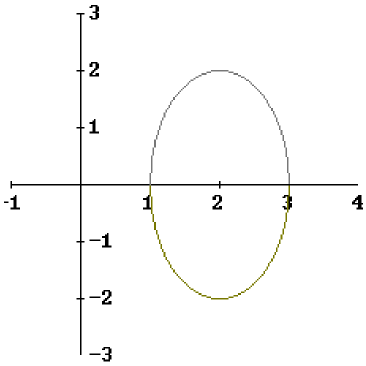


Grafico 2

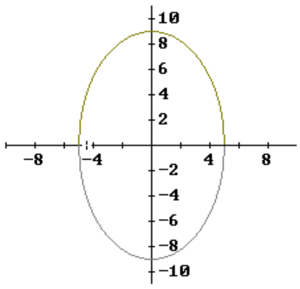


Gráfico 3

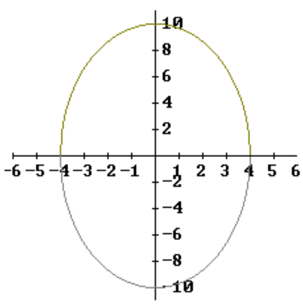
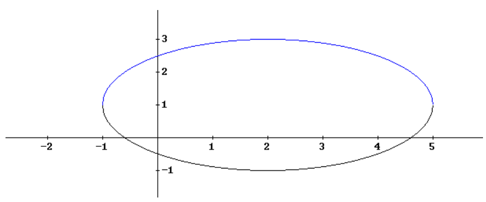


Gráfico 4



5.- Escriba la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes condiciones:

a) Centrada en origen de coordenadas, semieje menor b = 8, foco F_1 (3; 0).

b) Centro C(1;-1), distancia focal 6, $e=\dfrac{2}{3}$. Grafique en ambos casos.

7.- Dada la ecuación de la elipse, determine sus elementos y grafique.

a) $x^2+4y^2-4x-8y-92=0$ b) $9x^2+4y^2-36=0$

8.- Determine la ecuación de la recta tangente y normal a la elipse del apartado a) del ejercicio anterior en el punto P (8;5).

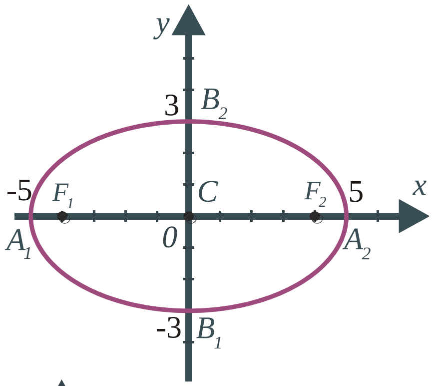
4.- Ejercicios Resueltos

1.- Encontrar los elementos de las siguientes elipses y graficar:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, b) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$, c) $\dfrac{(x+5)^2}{36}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

Resolución del Ejercicio 1.-

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$



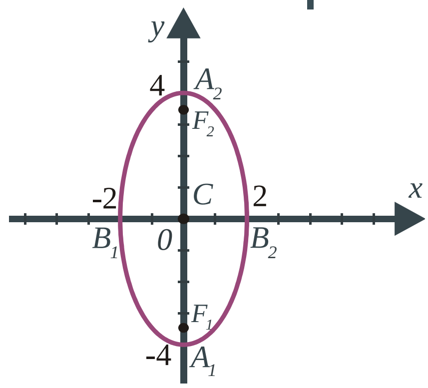
Centro $(0,0)$, el eje mayor está sobre el eje $\boldsymbol{x}$. $a=5$; $b=3$

$A_1=(-5,0)$; $A_2=(5,0)$; $B_1=(0,-3)$; $B_2=(0,3)$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \Rightarrow c=\pm 4$

$F_1=(-4,0)$; $F_2=(4,0)$ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}<1$

b) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$



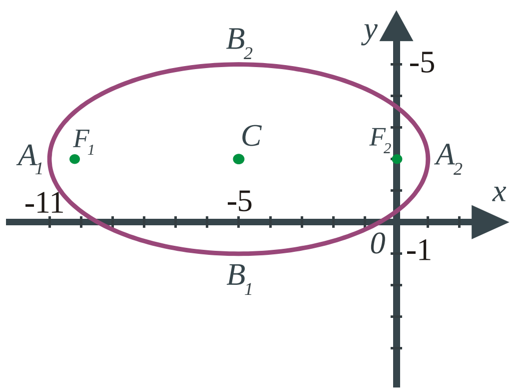
$C(0,0)$, el eje mayor está sobre el eje $\boldsymbol{y}$. $a=4$, $b=2$.

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$ $A_1=(0,-4)$;

$A_2=(0,4)$; $B_1=(-2,0)$; $B_2=(2,0)$ $F_1=(0,-\sqrt{12})$; $F_2=(0,\sqrt{12})$

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{12}}{4}$

c) $\dfrac{(x+5)^2}{36}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$



$C(-5,2)$; $a=6$; $b=3$. La distancia focal es

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-6}=\sqrt{27}$. Para determinar A_1

y A_2: Cuando $y=2$: $\dfrac{(x+5)^2}{36}=1$ $(x+5)^2=36$

$x+5=\pm\sqrt{36}\qquad x+5=\pm 6\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-11 \end{array}\qquad A_1=(-11{,}2);\ A_2=(1{,}2)$. Para determinar

B_1 y B_2:

Cuando $\boldsymbol{x=-5}$: $\dfrac{(y-2)^2}{9}=1\qquad (y-2)^2=9\qquad x+5=\pm\sqrt{36}$

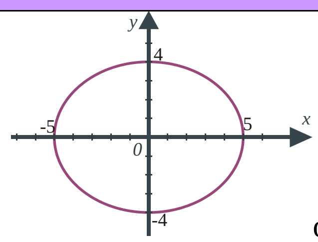
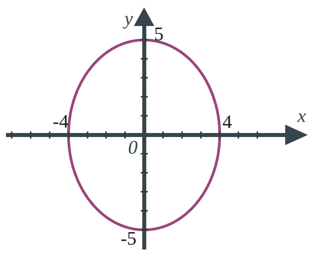
$y-2=\pm 3\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=-1 \end{array}$

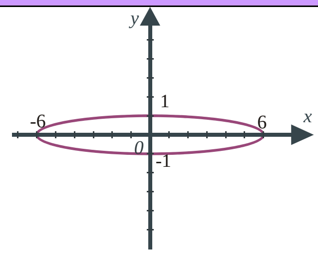
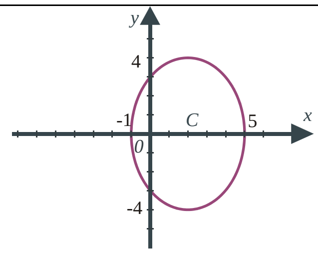
$B_1=(-5,-1);\ B_2=(2{,}0)\qquad F_1=(0,-\sqrt{12});\ F_2=(-5+\sqrt{27},2)\qquad e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{12}}{4}$

2.- Completar el siguiente cuadro:

C (x_0,y_0)	**a**	**b**	**Ecuación**	**Representación Gráfica**
$(0{,}0)$	5	4		
			$\dfrac{x^2}{36}+y^2=1$	
			$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$	

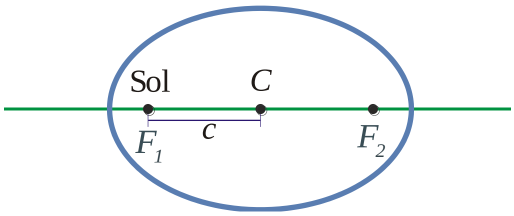
Resolución del Ejercicio 2.-

C (x_0,y_0)	**a**	**b**	**Ecuación**	**Representación Gráfica**
$(0{,}0)$	5	4	$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1}$ ó $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1}$	 ó 

$C(x_0, y_0)$	**a**	**b**	**Ecuación**	**Representación Gráfica**
$(0,0)$	6	1	$\frac{x^2}{36}+y^2=1$	
$(2,0)$	4	3	$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$	

3.- La primera ley de Kepler afirma que: “Las órbitas de los planetas son elipses que tienen al sol en uno de sus focos”. Calcular la distancia del sol al centro de la elipse, sabiendo que la excentricidad de la órbita terrestre es $0{,}017$ y que $a = 153.493.000$ Km.

Resolución del Ejercicio 3.-



$e = 0{,}017 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = 0{,}017.$

La distancia del sol al centro de la elipse es la distancia focal c, de modo que: $\boldsymbol{c = a \cdot e} \quad \Rightarrow$

$c = 153.493.000 \cdot 0{,}017 \quad \therefore \quad c = 260.938$ Km**.**

Hipérbola:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que el valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados <u>focos</u> es constante.

Analíticamente: $\left|\overline{PF'} - \overline{PF}\right| = 2a$

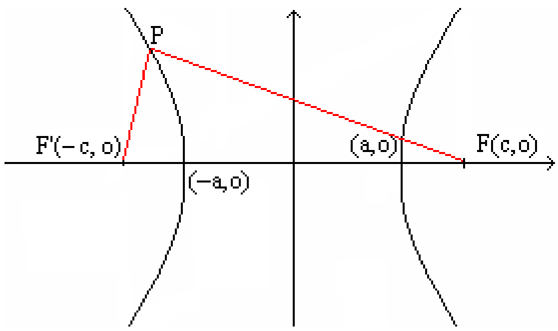


Gráfico Nº 21: Hipérbola de focos F’(-c , 0) y F(c , 0)

1.- Ecuación analítica de la hipérbola:

Nuevamente ubiquemos los focos sobre el eje x, F = (c,0) y F' = (– c,0), y tomemos un punto cualquiera P(x, y) de la hipérbola. En este caso, la diferencia de las distancias entre PF y PF' es igual al doble de la distancia que hay entre el centro y la intersección de la hipérbola con el eje x. Entonces tendremos que: $\left|\overline{PF'} - \overline{PF}\right| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y procediendo matemáticamente podemos llegar a esta expresión: $(c^2 – a^2).\ x^2 – a^2y^2 – (c^2 – a^2)\ a^2 = 0$ (los cálculos los dejo por tu cuenta pero puedes guiarte con el desarrollo que hicimos para la elipse). Nuevamente a partir del dibujo y aplicando el Teorema de Pitágoras podemos obtener que $c^2 = a^2 + b^2$ y por lo tanto la ecuación nos queda: $b^2x^2 – a^2y^2 = a^2b^2$. Dividiendo cada término por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Canónica de la hipérbola con C(0,0) y eje focal el eje x

Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (h, k) la ecuación debería de ser:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Canónica de la hipérbola con C(h,k), y eje focal paralelo al eje x

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que:

$b^2x^2 – a^2y^2 – 2xhb^2 + 2yka^2 + h^2b^2 – k^2a^2 – a^2b^2 = 0$

Si hacemos: $A = b^2$; $B = – a^2$; $C = – 2hb^2$; $D = 2ka^2$; $E = h^2b^2 – k^2a^2 – a^2b^2$

La ecuación: $Ax^2 – By^2 + Cx + Dy + E = 0$,

Ecuación General de la hipérbola

Siguiendo el mismo razonamiento, busca las ecuaciones de las hipérbolas con eje focal eje $\vec{y}$ y paralelo al eje $\vec{y}$. Grafica.

Luego de tu desarrollo obtendrás los siguientes resultados: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ respectivamente.

2.- Ecuaciones de las Asíntotas de la Hipérbola

Son rectas que jamás cortan a la hipérbola, aunque se acercan lo más posible a ella. Ambas deben pasar por el "centro" C(0,0) ó C(h , k). Las ecuaciones de las asíntotas para c (0,0) son: $y = \pm \frac{b}{a}x$ eje horizontal $y = \pm \frac{a}{b}x$ eje vertical

Como ejercicio, encuentra las ecuaciones de las asíntotas para c (h, k) tanto para el eje real paralelo al eje x como al eje y.

3.- Ejercitación

1.- Considere un cono circular recto de dos hojas. ¿Cómo debe "pasar" un plano cortante para que la sección definida por la intersección del cono con el plano sea una hipérbola?. Grafique.

2.- Una hipérbola es el conjunto de puntos P del plano que satisfacen..

3.- A partir de la definición como lugar geométrico, determine la ecuación de una hipérbola de centro C (0,0) y eje real x.

4.- Complete y seleccione el signo (+ ó -) de cada término para que la ecuación dada a continuación defina una hipérbola de centro C(h,k) y eje real paralelo al eje y:

$$\pm\frac{(x-....)^2}{.........}\pm\frac{(.....-k)^2}{........}=1$$

5.- La excentricidad de una hipérbola es 5/3 y la de otra es 3/2. ¿Cuál de las dos es más cerrada?

6.- Dadas las hipérbolas cuyas ecuaciones se indican, obtenga centro ; longitud del eje real, coordenadas de los vértices, excentricidad y grafique.

a) $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{49}=1$

b) $25y^2-4x^2=100$

c) $9x^2-16y^2+54x-32y-79=0$

d) $4y^2-9x^2+16y=29$

7.- En las ecuaciones de los apartados b) y c) del ejercicio anterior obtenga las ecuaciones de las asíntotas.

8.- Obtenga la ecuación de una hipérbola cuyos focos sean los vértices de la elipse $7x^2+11y^2=77$ y cuyos vértices son los focos de la elipse dada.

9.- Un cable colgante sujeto en los extremos por columnas de 27 metros de altura separadas 40 metros tiene la forma de arco hiperbólico que en su parte mas baja dista 7 metros del piso. Calcule cada 4 metros, la distancia del cable al piso.

4.- Ejercicios Resueltos

1.- Encontrar los elementos de las siguientes hipérbolas:

a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, b) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ c) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

Resolución del Ejercicio 1.-

a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

Observamos de la ecuación que el centro es $(0,0)$; que $a=4$, $b=3$ y eje real: $\boldsymbol{x}$.

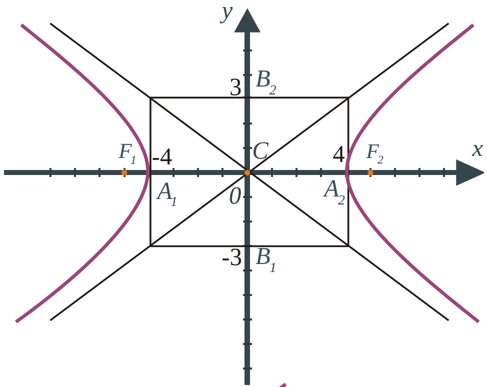
$\boldsymbol{a=3}$; $A_1=(-4,0)$; $A_2=(4,0)$; $B_1=(0,-3)$;

$B_2=(0,3)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$ $\Rightarrow$

$c=\pm 5$

$F_1=(-5,0)$; $F_2=(5,0)$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}>1$

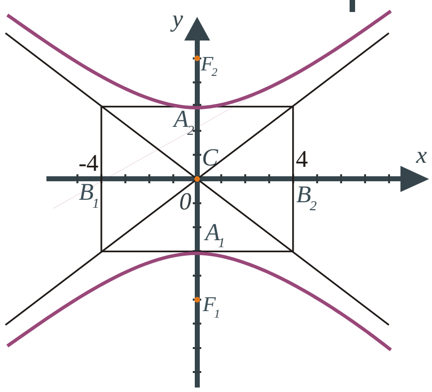
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{3}{4}x$ y $y=-\dfrac{3}{4}x$



b) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

$C(0,0)$; $b=4$; eje real: y

$A_1=(0,-3)$; $A_2=(0,3)$; $B_1=(-4,0)$;



$B_2=(4,0)$,

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$ $\Rightarrow$

$c=\pm 5$,

$F_1=(0,-5)$; $F_2=(0,5)$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

Asíntotas: $y=\pm\dfrac{a}{b}x$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{3}{4}x$ y $y=-\dfrac{3}{4}x$

> *Observa que: Las hipérbolas de los apartados a). y b) tienen las mismas asíntotas, por eso se llaman hipérbolas conjugadas.*

c) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

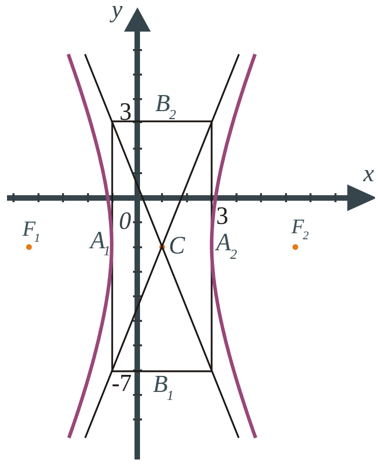
$C(0,0)$; $a=2$, $b=5$; eje real || al eje $\boldsymbol{x}$

Para encontrar A_1 y A_2 se hace $y=-2$:

$$\frac{(x-1)^2}{4}=1 \qquad (x-1)^2=4 \qquad x-1=\pm\sqrt{4} \;\Rightarrow\; x=\pm 2+1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{array}$$

$A_1=(-1,-2)$; $A_2=(3,-2)$

Para encontrar B_1 y B_2, se considera $\boldsymbol{x=1}$, sin olvidar que estos vértices son imaginarios, es decir la hipérbola no corta al eje $\boldsymbol{y}$. No consideramos el signo negativo que precede a:



$$\frac{(y+2)^2}{25}=1,\;\; (y+2)^2=25,\;\; y+2=\pm\sqrt{25} \;\Rightarrow\; y=\pm 5-2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=-7 \end{array}, \qquad B_1=(1,-7); \qquad B_2=(1,3),$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29} \qquad \Rightarrow \qquad c=\pm\sqrt{2}\;,$$

$$F_1=\left(1-\sqrt{29},-2\right);\; F_2=\left(1+\sqrt{29},-2\right), \qquad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Asíntotas: $y=\pm\dfrac{a}{b}x \;\Rightarrow\; y=\dfrac{3}{4}x$ y $y=-\dfrac{3}{4}x$

2.- Determinar la ecuación de la hipérbola sabiendo que $a=8$, $b=3$ y que:

a) El centro es el origen y los focos están sobre el eje $\boldsymbol{x}$.

b) Centro $(1,4)$ y eje real || al eje $\boldsymbol{y}$.

c) Determinar las asíntotas de la hipérbola del inciso **a.**

d) La distancia focal.

Resolución del Ejercicio 2.-

a) $C(0,0)$, $a=8$, $b=3$. Como los focos están sobre el eje $\boldsymbol{x}$, el eje real es $\boldsymbol{x}$, luego la ecuación es $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

b) $C(1,4)$, eje real || al eje y, la ecuación es $\dfrac{(y-4)^2}{64}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$

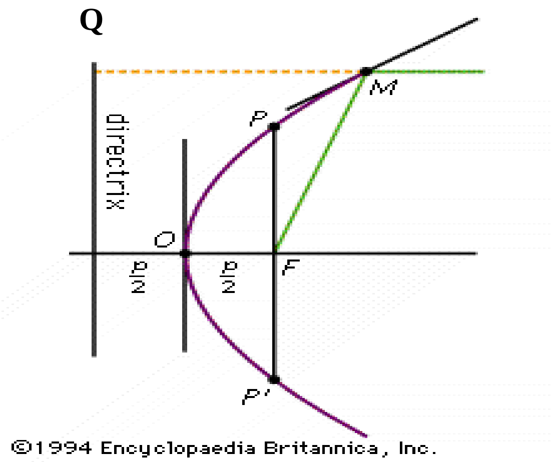
c) $y=\pm\dfrac{b}{a}x$; $y=\pm\dfrac{3}{8}x$

d) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+9}=\sqrt{73} \quad \Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{73}$

Parábola

"Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz ".

Analíticamente: $\overline{PF}=\overline{PQ}$



El **vértice** de la parábola es el punto medio entre la directriz y el foco. El vértice y el foco determinan una línea perpendicular a la directriz, a ésta línea se le conoce como el **eje de la parábola.**

Para una parábola que tiene el vértice en el origen la ecuación es $\mathbf{y^2 = 2px}$, donde **p** es la distancia entre la directriz y el foco.

1.- Ecuación analítica de la parábola:

Para deducir la ecuación tomamos una parábola de V(0,0) y eje de simetría el eje X.

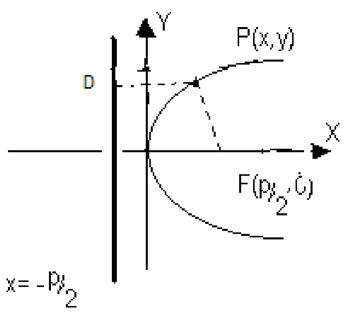


Gráfico Nº 22: Parábola de V(0,0) y eje de simetría el eje x

Supongamos que el foco esté situado en el punto F ($\frac{p}{2}$, 0) y la directriz **D** es la recta $x = -\frac{p}{2}$, por lo tanto el vértice está en su punto medio (0,0), si tomamos un punto genérico P (x , y) de la parábola debe de cumplirse que: Dist(P,D) = dist(P,F) entonces: $P\overline{F} = P\overline{D}$ calculando las distancias $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}$ Elevando al cuadrado resulta:

$\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2=(x-\dfrac{p}{2})^2+y^2$ Desarrollando los binomios

$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$ Cancelando y reagrupando, p x +p x = y^2 entonces, obtenemos: $\mathbf{y^2 = 2px}$

Ecuación Canónica de la Parábola con V (0 , 0) y eje de simetría el eje x

Observaciones: 1) Si la parábola se abre hacia la izquierda a ecuación es: $\mathbf{y^2 = -2px}$ (ver Gráfico Nº 24.

2) Si el foco está a la derecha de la directriz, la parábola tiene sus ramas hacia la derecha. Ver Gráfico Nº 23

2) Si el foco está a la izquierda de la directriz, la parábola tiene sus ramas hacia la izquierda. (Ver Grafico Nº 24.)

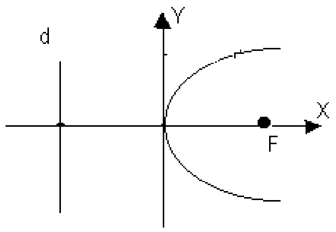


Gráfico Nº 23: Parábola con foco a la derecha de la directriz

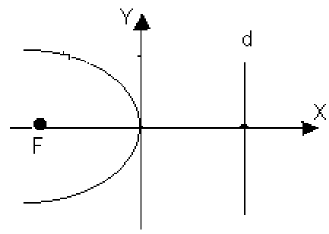


Gráfico Nº 24: Parábola con foco a la izquierda de la directriz

Si la parábola no tiene su vértice en V (0,0) si no en (h, k) entonces la ecuaciones serán**:**

$$\mathbf{(y-k)^2 = \pm 2\,p\,(x-h)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ecuación canónica de la parábola con V(h , k) y eje focal paralelo al eje x

Desarrollando la ecuación tendremos: $y^2 - 2\,y\,k - 2\,p\,x + k^2 + 2\,p\,h = 0$

Si hacemos $E = -2\,k$; $D = -2\,p$; $F = k^2 + 2\,p\,h$

Obtendremos: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, Ecuación general de la Parábola con V(h , k) y eje focal o de simetría paralelo al eje x.

Si el eje de simetría es el eje y , el foco es F $(0, \frac{p}{2})$ y la directriz es $y=-\frac{p}{2}$ donde p es un número real y es distinto de cero, entonces la ecuación de la parábola es:

$$\mathbf{x^2 = 2py}$$

Ecuación Canónica de la Parábola con V (0 , 0) y eje de simetría el eje y

Observación: Si $\mathbf{x^2 = -2py}$ la parábola se abre hacia abajo. (ver gráfico nº 25)

Aclaración: $\left|\frac{p}{2}\right|$ es la distancia entre el vértice y el foco y entre el vértice y la directriz.

Observación: Se presentan los siguientes casos:

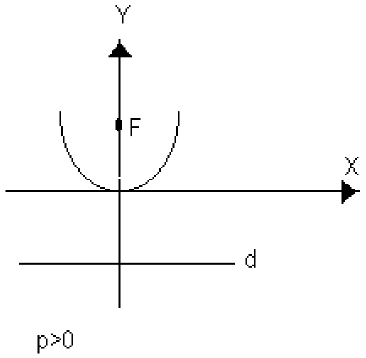


Gráfico Nº 24: Parábola con C(0 , 0) eje focal el eje y , $p > 0$

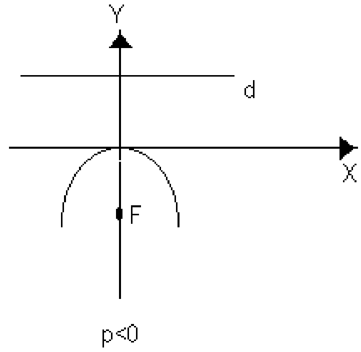


Gráfico Nº 25: Parábola con C(0 , 0) eje focal el eje y , $p < 0$

Si la parábola tiene su vértice (h, k) entonces la ecuación sería**:**

$$(x - h)^2 = \pm 2p(y - k)$$

Ecuación Canónica de la Parábola con eje de simetría paralelo al eje y

Observación: 1) Si $(x- h)^2 = 2p(y - k)$ la parábola se abre hacia arriba.

2) Si $(x- h)^2 = -2p(y - k)$ la parábola se abre hacia abajo.

Desarrollando la ecuación tendremos: $x^2 - 2xh - 2py + h^2 + 2pk = 0$

Si hacemos $D = -2h$; $E = -2p$; $F = h^2 + 2pk$

Obtendremos: $\mathbf{x^2 + Dx + Ey + F = 0}$ **Ecuación general de la Parábola**

2.- Ejercicios

1.- Complete as siguientes proposiciones:

a) Una parábola es el conjunto P del plano que satisfacen…………………………….

b) A partir de la definición de lugar geométrico, se puede determinar la ecuación de una parábola de C(0,0) y eje de simetría el eje X, considerando……………………………

c) La ecuación de una parábola en función de la luz y la flecha es:………..………………

d) La ecuación de una parábola con eje de simetría el eje Y es……………………………..

e) El lado recto de la parábola es:……………………………

f) Enuncie la propiedad focal de la parábola

g) La excentricidad de la parábola es ………………….

h) El parámetro p en la parábola, representa…………………………

i) En la ecuación general de la cónica, distingue cuando se trata de una parábola porque…………………………………………………………

2.- Determine los elementos de las siguientes parábolas y grafique:

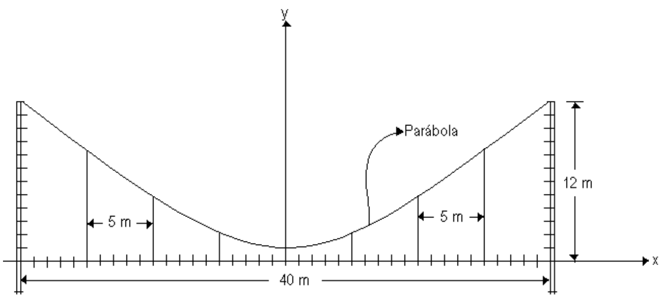
a) $x^2 + 6x + 5y - 1 = 0$, b) $y^2 - 3x - 2y + 4 = 0$

3) Determine la ecuación de la parábola, los elementos restantes y su gráfica si:

a) V(2,3) F(2,5) b) V(4,2) y directriz de ecuación x = 2 c) V(3,-2), directriz // al eje OY, y pasa por el punto P(2,0)

4.- Determine las ecuaciones de las rectas tg y normal a la parábola $y^2 = 16x$ en P (4,8)

5.- En la estructura colgante que se indica el cable parabólico está suspendido de dos torres de 12 m de altura y su distancia es de 40 m. Calcule las longitudes de los cables verticales que se indican.



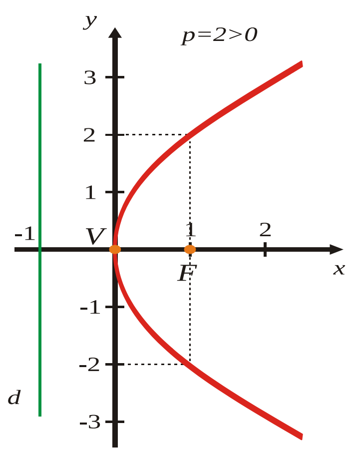
6.- En una bóveda de hormigón de arco parabólico de 20 m de luz y 6 m de flecha, calcule las alturas de las columnas cada 2 metros.

7.- Un arco en forma parabólica y eje vertical tiene 10 m de flecha y 30 m de luz. Halle la altura de la columna para soporte a 3 m de un extremo del arco.

3.- Ejercicios Resueltos

1.- Encontrar los elementos de las siguientes parábolas y graficar:

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = 10y$ c) $(y-4)^2 = 4(x+1)$ d) $(x-3)^2 = -6(y-1)$



Resolución del Ejercicio 1.-

a) $y^2 = 4x$; $2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$. El parámetro $p = 2$ $(p > 0)$, la parábola se abre a la derecha del eje $\boldsymbol{y}$.

El vértice $V(0,0)$. El foco está sobre el eje $\boldsymbol{x}$ y tiene coordenadas $F\left(\frac{p}{2},0\right) = (1,0)$. La directriz tiene ecuación $x = -\frac{p}{2} = -1$.

El eje de la parábola es el eje $\boldsymbol{x}$. Si $x = 1$; $y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

Observación: Para saber cuánto se abre la rama de la parábola, se reemplaza la coordenada ***x*** o ***y*** del foco y se determina la ordenada o abscisa del mismo.

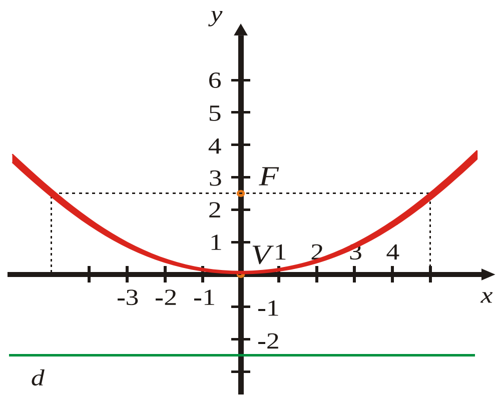
b) $x^2 = 10y$

$V(0,0)$. El eje de la parábola es el eje $\boldsymbol{y}$.

$2p = 10 \quad \Rightarrow \quad p = 5,\ F\left(0, \dfrac{p}{2}\right) = \left(0, \dfrac{5}{2}\right).$

La directriz tiene ecuación $y = -\dfrac{p}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Si $y = \dfrac{5}{2};\ x^2 = 10 \cdot \dfrac{5}{2} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5$



c) $(y-4)^2 = 4(x+1)$

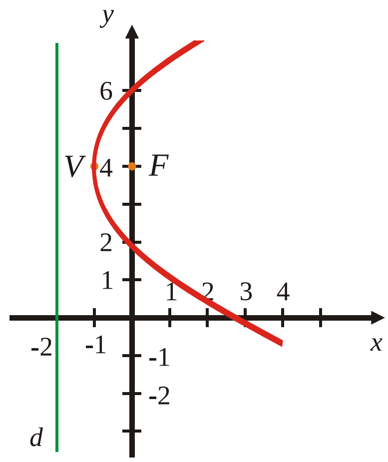
De la ecuación observamos que el vértice es.

$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2 > 0.$

El foco es ahora: $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}, y_0\right) \quad F(-1+1,4) = (0,4).$

La directriz es: $x = x_0 - \dfrac{p}{2} = -1-1 = -2$; $x = -2$.

Cuando $x = 0$,



$(y-4)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2 + 4$

$\boldsymbol{y} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}.$

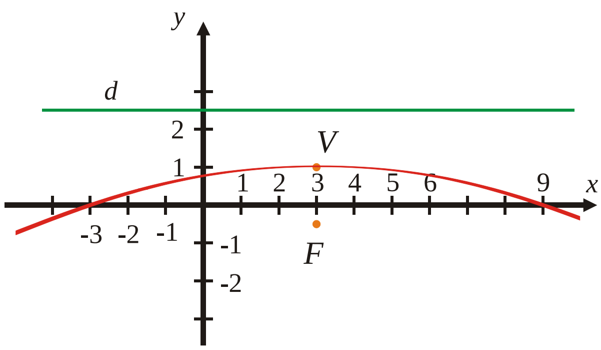
d) $(x-3)^2 = -6(y-1)$

Observamos que el vértice es $V(3,1)$.

$2p = -6$, la parábola se abre hacia la dirección negativa del eje $\boldsymbol{y}$.

El foco tiene coordenadas $\left(x_0, y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$

$F\left(3, 1 - \dfrac{3}{2}\right) = \left(3, -\dfrac{1}{2}\right).$

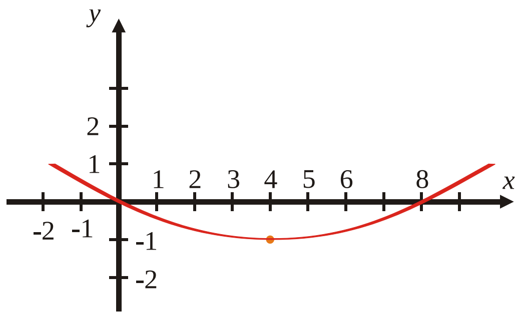


La directriz tiene ecuación $y = y_0 - \dfrac{p}{2}$: $y = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5}{2}$.

2.- Encontrar la ecuación de la parábola, con vértice $(4,-1)$, eje paralelo al eje $\boldsymbol{y}$, y que contiene al origen.

Resolución del Ejercicio 2.-

Si el eje es paralelo al eje $\boldsymbol{y}$, la ecuación es: $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ $\quad(x-4)^2 = 2p(y+1)$. Como contiene al origen, éste verifica la ecuación: $(0-4)^2 = 2p(0+1)$, $\quad 16 = 2p \quad \Rightarrow \quad p = 8$



La ecuación es: $(x-4)^2 = 16(y+1)$

$$y = 0:\ (x-4)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x-4 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4 + 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{cases} 8 \\ 0 \end{cases}$$

3.- La trayectoria que describe un proyectil lanzado horizontalmente, con una velocidad $\boldsymbol{v}$ (m/seg) desde un punto situado $\boldsymbol{y}$ (metros) sobre el suelo, es una parábola de ecuación: $x^2 = -\dfrac{2v^2}{g}\cdot y$, donde $\boldsymbol{x}$ es la distancia horizontal desde el lugar de lanzamiento y $g \approx 9{,}81$ (m/seg^2). El origen se considera como el punto de salida del proyectil del arma.

Con estas condiciones podemos resolver el siguiente ejercicio:

Se lanza horizontalmente una piedra desde la cima de una torre de **185** m de altura, con una velocidad de **15** m/s. Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre (se supone el suelo horizontal). a) Vértice en $(1{,}3)$ y directriz $x = 0$ …b) Vértice $(-3{,}5)$ y directriz $y = 1$

Resolución del Ejercicio 3.-

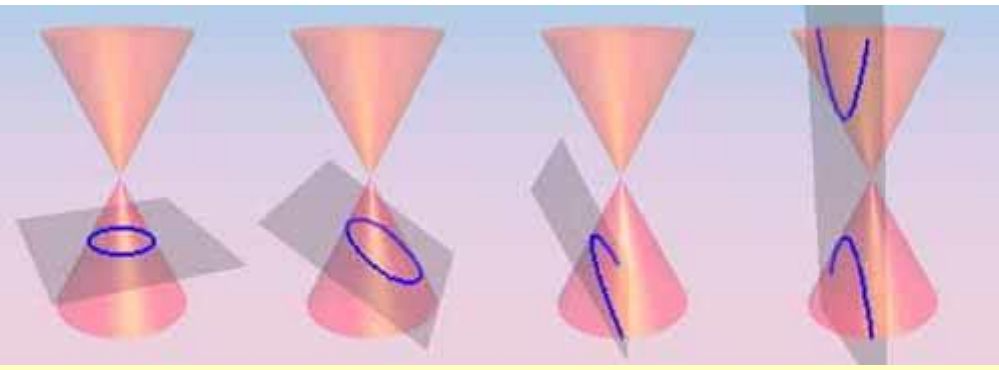
$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}\cdot y = -\frac{2\cdot 15^2}{9{,}8}\cdot(-185) \approx 8.495 \qquad x \approx 92{,}16\,\text{m}.$$

****

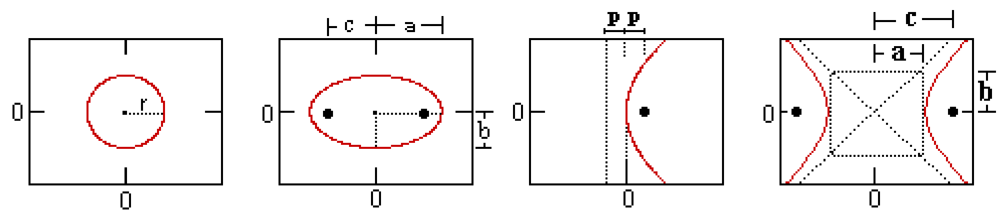
CÓNICAS: SINTESIS DE LA UNIDAD

Definición:

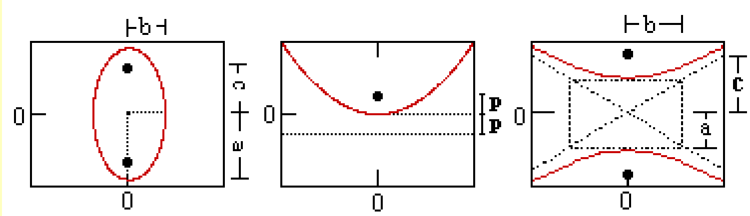
Una sección cónica **es la curva** de intersección de un plano con un cono de dos mantos (o dos hojas).



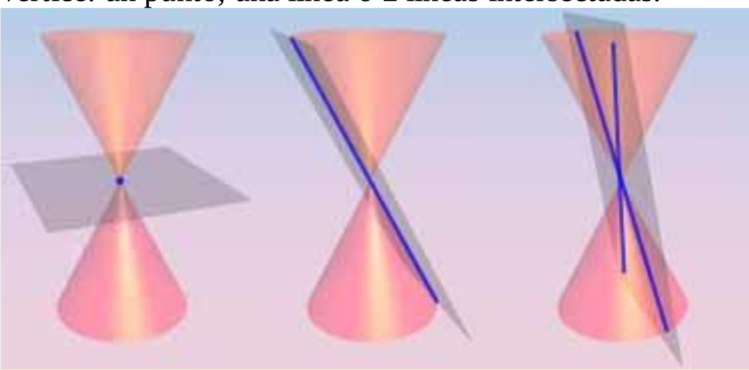
Círcunferencia Elipse (h) Parábola (h) Hipérbola (h)



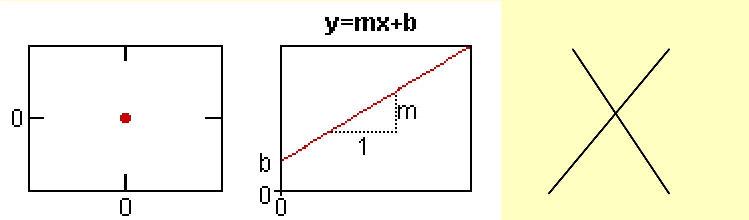
Elipse (v) Parábola (v) Hipérbola (v)



Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola; o en el caso especial cuando el plano se pone en contacto con el vértice: un punto, una línea o 2 líneas intersectadas.



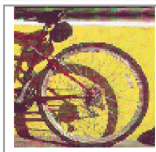
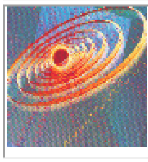
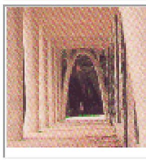
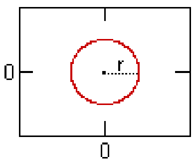
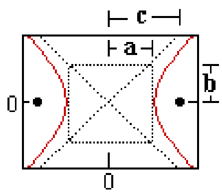
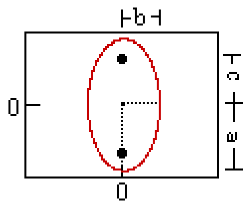
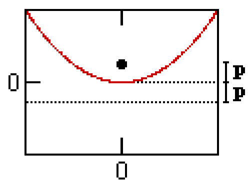
Punto Línea Línea Doble

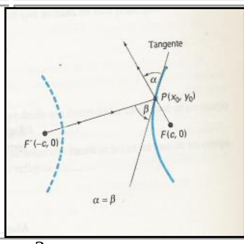


La Ecuación General de una sección cónica:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

- Si B=0, nos queda : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
- En la siguiente tabla, consideremos las curvas que representa esta ecuación:

	Circunferencia	**Elipse**	**Hipérbola**	**Parábola**
Definición: Es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que…			**…la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante 2a. (aquí ,diferencia se toma como la** distancia **mayor menos la menor)**	
Epemplos			 **i**	 **c**
Clasificación según: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (Excepto degenerados)	A=C	A.C > 0	A.C <0	A.C =0; A=0 ó C=0 pero no ambas
Eje horizontal c (0,0)	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$
Gráfica con eje focal y eje de simetría horizontal				
Ecuaciones de las asíntotas:			$y = \pm\frac{b}{a}x$	
Eje horizontal c (h,k)	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$			
Eje vertical c (0,0)	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$		$x^2= 2py$
Gráfica con eje focal y eje de simetría vertical				
Ecuaciones Explicitas	$y=\sqrt{r^2-x^2}$ semicircunferencia (+)			$y=\frac{-4f}{l^2}x^2+f$,dada la luz y la flecha. <u>Otra</u>: $y = ax^2 + bx + c$

Ecuaciones de las asíntotas:			$y = \pm \frac{a}{b} x$	
Eje vertical c (h,k)	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$			
Parámetros	**r** = el radio de la circunferencia	**a:** radio mayor ½ longitud del eje mayor **b**: radio menor ½ longitud del eje menor **c**: distancia del centro al foco		p = la distancia desde el foco a la directriz
Relación entre parámetros	$c = 0$	$a^2= b^2 + c^2$	$c^2 = a^2+ b^2$	$p = p$
Excentric.: $e = \frac{c}{a}$	**e** = 0	0 < **e** <1	**e** >1	**e** = 1
Propiedades Focales de de las cónicas		Un rayo lumínico o sonoro que sale de uno de los focos, choca contra la elipse y se reflejará en el otro foco.		
Propiedades Focales Marcha de los rayos				
Ecuaciones de la recta tangente y normal a una cónica en un punto P_1	Dada la **Ecuación General** $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y el punto $P_1(x_1,y_1)$, usamos la **regla del desdoblamiento** para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal. $A\, x.x + C\, y.y + D\left(\frac{x+x}{2}\right) + E\left(\frac{y+y}{2}\right) + F = 0$ Particularizando para P_1, nos queda: $A\, x.\, x_1 + C\, y.\, y_1 + D\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + F = 0,$ Desarrollando obtenemos: **a)** Ecuación de la **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\, x + b_1}$ **b)** Ecuación de la **recta normal,** teniendo $m_n = -\frac{1}{m_{tg}}$ y el $P_1(x_1,y_1)$ $(y-y_1) = m_n(x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\, x + b_2}$			
Ecuaciones de la recta tangente y normal a la cónica en	Dada la ecuación de la **elipse** con centro en el origen			

un punto $P_1(x_1,y_1)$, dada su ecuación conn C (0,0) y V(0,0). **(eje horizontal)**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se desdobla esta ecuación $\frac{x.x}{a^2}+\frac{y.y}{b^2}=1$ y luego se reemplaza por el punto P_1, obteniendo: $\frac{x.x_1}{a^2}+\frac{y.y_1}{b^2}=1 \rightarrow$ despejando **y ,** resultan las ecuaciones: a) **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\,x + b_1}$ b) **recta normal** $(y-y_1) = m_n\,(x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\,x + b_2}$
Ecuaciones de la recta tangente y normal a la cónica En un punto $P_1(x_1,y_1)$, dada su ecuación en c (0,0) y V(0,0). **(eje vertical)**	Dada la ecuación de la **parábola** $x^2= 2\,p\,y$, cuyo eje de **simetría** es el eje **y** Realizamos el desdoblamiento : $x.x = 2\,p\,(\frac{y+y}{2})$, luego reemplazamos por el punto P_1 , obtenemos: $x.x_1 = 2\,p\,(\frac{y+y_1}{2})$ $\rightarrow$ despejando y , resultan las ecuaciones: a) **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\,x + b_1}$ b) **recta normal** $(y-y_1) = m_n\,(x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\,x}$
Ecuaciones de la recta tangente y normal a la cónica en un punto $P_1(x_1,y_1)$ dada su ecuación con C (h,k) y V(h,k). **(eje horizontal**)	Dada la ecuación de la **parábola** $(y-k)^2= 2\,p\,(x-h)$, cuyo eje de **simetría** es paralelo al eje **x** Realizamos el desdoblamiento : $(y-k).(y-k) = 2\,p\,(\frac{x+x}{2}-h)$, luego reemplazamos por el punto P_1 , obtenemos: $(y-k).(y_1-k) = 2\,p\,(\frac{x+x_1}{2}-h)$ $\rightarrow$ despejando **y ,** resultan las ecuaciones: a) **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\,x + b_1}$ b) **recta normal** $(y-y_1) = m_n\,(x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\,x}$
Ecuaciones de la recta tangente y normal a la cónica en un punto $P_1(x_1,y_1)$, dada su ecuación con C (h,k) y V(h,k). **(eje vertical)**	Dada la ecuación canónica de la **Hipérbola** con centro (h,k), $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$,aplicamos la regla del desdoblamiento obtenemos: $\frac{(y-k).(y-k)}{a^2}-\frac{(x-h).(x-h)}{b^2}=1$, particularizamos para el punto P_1, obtenemos: $\frac{(y-k).(y_1-k)}{a^2}-\frac{(x-h).(x_1-h)}{b^2}=1 \rightarrow$ despejando **y ,** resultan las ecuaciones: a) **recta tangente** $\mathbf{y = m_{tg}\,x + b_1}$ b) **recta normal** $(y-y_1) = m_n\,(x - x_1) \rightarrow$ $\mathbf{y = m_n\,x}$