Tema: ALGEBRA DE BOOLE. FUNCIONES. COMPUERTAS Y CIRCUITOS LÓGICOS. SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES (MAPAS DE KARNAUGH).

Objetivos:

Que el alumno:
- Aprenda a analizar, sintetizar e interpretar funciones booleanas y circuitos lógicos.
- Identifique y obtenga funciones canónicas.
- Pueda comparar funciones booleanas con circuitos lógicos.
- Represente funciones lógicas o booleanas por medio de Mapas de Karnaugh.
- Determine expresiones canónicas por medio de Mapas de Karnaugh.
- Simplifique funciones por medio de Mapas de Karnaugh.

1 .1 - INTRODUCCIÓN

Una computadora digital, como su nombre lo indica, es un sistema digital que realiza diversas operaciones de cómputo. La palabra digital implica que la formación se representa en la computadora por variables que toman un número limitado de valores discretos o cuantificados. Estos valores son procesados internamente por componentes electrónicos que pueden mantener un número limitado de valores discretos o cuantificados. Los dígitos decimales (0, ...9), por ejemplo, proporcionan 10 valores discretos. En la práctica, las computadoras digitales funcionan más confiablemente si solamente se utilizan dos estados. Debido a la restricción física de los componentes y a que la lógica humana tiende a ser binaria (esto es cierto o falso, si o no), los componentes digitales se restringen para que tomen dos valores discretos y se dice que son binarios.

El Álgebra de Boole constituye una formalización adecuada para representar información digital binaria y proporciona un modelo matemático para determinar la respuesta de los circuitos digitales de computadoras.

George Boole (1815-1864) matemático inglés. Trabajó originalmente en el álgebra que ahora lleva su nombre para tratar de dar una representación simbólica y matemático-formal de los procesos del pensamiento. Estos trabajos originaron los libros “Estudio de las leyes del pensamiento” y “Análisis matemático de la lógica”. El objetivo inicial de Boole no fue cumplido, pero dio origen a la llamada “Lógica Simbólica”. Debido al atraso tecnológico de la época (siglo XIX), los resultados no tuvieron aplicación inmediata, pero con el advenimiento de los semiconductores (1947), comienza a hacerse un uso intenso de ellos.

Es por todo esto que el Álgebra de Boole también se denomina álgebra o lógica binarias y las operaciones de esta álgebra se denominan como operaciones lógicas. También los circuitos digitales que procesan información binaria se denominan circuitos lógicos digitales.

1.2 - VARIABLES, FUNCIONES Y OPERACIONES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE.

El propósito del álgebra booleana es facilitar el análisis y diseño de circuitos lógicos digitales que se utilizan en computadoras digitales. Existen diferencias y analogías entre una función del álgebra convencional y otra del álgebra booleana. En la tabla siguiente se listan algunas de ellas.

ÁLGEBRA CONVENCIONAL	***ÁLGEBRA DE BOOLE***
▪ Las variables se designan por letras minúsculas (a, x, etc.). ▪ Variables y funciones pueden tomar cualquier valor dentro del campo de los números reales. ▪ Los operadores del álgebra convencional	▪ Las variables se designan por letras mayúsculas (A, X, etc.). ▪ Variables y funciones pueden tomar valores 0 o 1 solamente. ▪ Los operadores de Boole son + (OR), • (AND) y – (NOT).

son: + (más), - (menos), x (por), y / (división)	

Una función o expresión booleana esta formada por variables binarias, símbolos de operaciones lógicas, paréntesis y signos de igualdad.

Las variables binarias ó lógicas ó booleanas pueden asumir valores 0 ó 1 únicamente. Desde el punto de vista de la teoría de la información, una variable lógica significa un bit (dígito binario) de información, dado sus dos valores posibles.

Una función lógica es una variable lógica cuyo valor es equivalente al valor de una expresión algebraica, constituida por otras variables lógicas relacionadas entre sí por medio de las operaciones suma lógica, y/o producto lógico y/o negación, simbolizadas +, $\bullet$ y – respectivamente. El valor de dicha expresión depende de los valores lógicos asignados a las variables que la constituyen, y de la realización de las operaciones indicadas.

Sea la función:

$$Z = A \bullet B \bullet (A + C) + \overline{B}$$

Z es una variable cuyo valor equivale al valor de la expresión formada por las variables A, B y C con las operaciones +, $\bullet$, y **-.**

Las tres operaciones mencionadas son las operaciones básicas del álgebra de Boole y se describen a continuación.

OPERACIÓN	FUNCIÓN ALGEBRAICA	TABLA DE VERDAD
Suma lógica – Función O Función OR (en inglés)	X = A + B	A B | X 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Producto lógico – Función Y Función AND (en inglés)	Y=A•B ó Y=AB	A B | Y 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
Negación – Función NO Función NOT (en inglés)	X=A´ ó X= $\overline{A}$	A | X 0 | 1 1 | 0

1.3. POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Las siguientes son algunas de las propiedades y postulados fundamentales del álgebra booleana.

1) A+B=B+A
2) A•B=B•A

Propiedad conmutativa de la suma y el producto.

3) A•(B+C)=A•B+A•C
4) A+(B•C)=(A+B) •(A+C)

Propiedad distributiva de la suma y el producto.

5) A+0=A

La suma lógica es invariable respecto del 0 y el producto del 1.

6) A•1=A

7) $A+\overline{A}=1$
8) $A\bullet\overline{A}=0$

La suma y el producto lógico de una variable y su negación resultan siempre 1 y 0, respectivamente.

9) A+1=1
10) A•0=0

Leyes de Acotamiento.

11) A+A=A
12) A•A=A

Leyes de Idempotencia.

13) A+(B+C)=(A+B)+C
14) A•(B•C)=(A•B) •C

Leyes Asociativas.

15) $\overline{\overline{A}}=A$

16) $\overline{\overline{\overline{A}}}=\overline{A}$

17) $\overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$
18) $\overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$
19) $A+B=\overline{\overline{A}\bullet\overline{B}}$
20) $A\bullet B=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$

Teoremas de De Morgan.

1.4. FORMAS CANÓNICAS DE UNA FUNCIÓN DE BOOLE

1.4.1. EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN DE BOOLE SEGÚN SUS MINITÉRMINOS

Mediante 2 variables A y B y sus negaciones, es posible formar 2^2 = 4 productos distintos:

$$\overline{A}.\overline{B};\ \overline{A}.B; A.\overline{B}; A.B$$

Tres (3) variables A, B y C y sus negaciones, dan lugar a 2^3 = 8 productos:

$$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C};\ \overline{A}.\overline{B}.C;\ \overline{A}.B.\overline{C};\ \overline{A}.B.C;\ A.\overline{B}.\overline{C};\ A.\overline{B}.C;\ A.B.\overline{C};\ A.B.C$$

Cuatro variables y sus negaciones producen 16 productos diferentes y en general n variables y sus negaciones producen 2^n productos diferentes. Cada producto así formado se denomina minitérmino. Resulta inmediato que cada minitérmino toma el valor lógico 1 sólo para una única combinación de valores lógicos de las variables que lo constituyen, resultando 0 para las restantes combinaciones. Por lo tanto, puede establecerse una correspondencia biunívoca entre cada combinación de valores lógicos de una tabla de verdad y el minitérmino que toma el valor 1 para dicha combinación.

Del mismo modo que una función se representa por una tabla de verdad, puede definirse por la sumatoria de minitérminos se denomina <u>forma canónica</u> o <u>forma normal disyuntiva.</u>

Puede establecerse que una función resultará 1 para tantas combinaciones como minitérminos presente su forma normal.

Regla 1: Para obtener la forma canónica en expresión de minitérminos de una función a partir de su tabla de verdad, se toma aquellas filas de la tabla que hacen que la función resulte 1 y se forma el minitérmino con el valor que toman las variables de la tabla para esa fila. Luego se realiza la suma de los minitérminos así determinados.

EJEMPLO: Obtener la forma canónica de la función expresada por la tabla de verdad siguiente:

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	— $\overline{A}.\overline{B}.C$
0	1	0	0	
0	1	1	1	— $\overline{A}.B.C$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	— $A.B.C$

3 MINITERMINOS que corresponden a los 3 unos (1s) de la tabla.

Por lo tanto, según la regla 1, la función es: F = $\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C$ + ABC

1.4.2. EXPRESIÓN DE UNA FUNCION DE BOOLE SEGÚN SUS MAXITERMINOS.

Mediante 2 variables y sus negaciones, es posible formar 4 sumas distintas.

$$\overline{A}+\overline{B};\ \overline{A}+B;\ A+\overline{B};\ A+B$$

Tres variables y sus negaciones nos darán 8 sumas diferentes:

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C};\overline{A}+\overline{B}+C;A+\overline{B}+\overline{C};\overline{A}+B+\overline{C};\overline{A}+B+C;A+\overline{B}+C;A+B+\overline{C};A+B+C$$

En general n variables y sus negaciones nos darán 2^n sumas diferentes. Cada suma así formada se denomina maxitérmino. Resulta inmediato que cada maxitérmino toma el valor lógico 0 solo para una única combinación de valores lógicos de las variables que lo constituyen, resultando 1 para las restantes combinaciones. Por lo tanto, es posible obtener otro tipo de expresión normalizada de una función denominada <u>forma normal conjuntiva</u> constituida por los productos de sumas o maxitérminos.

Regla 2: para obtener la forma canónica en expresión de maxitérminos de una función a partir de la tabla de verdad, se toman aquellas filas de la tabla que hacen que la función resulte 0 y se forma el maxitérmino con el valor que toman las variables de la tabla para esa fila. Luego se realiza el producto de los maxitérminos así determinados.

EJEMPLO: Tomando el ejemplo del apartado anterior obtener la forma canónica de la función expresada en maxitérminos.

Los maxitérminos se determinan por los ceros de la tabla de verdad y son:

$$A+B+C;A+\overline{B}+C;\overline{A}+B+C;\ \overline{A}+B+\overline{C};\ \overline{A}+\overline{B}+C$$

Por lo tanto, según la regla 2 la función F es:

$$F=(A+B+C).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Las expresiones canónicas o normales de una función también se denominan <u>suma de productos</u> para el caso de minitérminos y <u>producto de suma</u> para los maxitérminos.

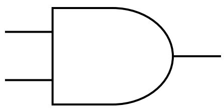
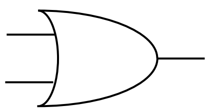
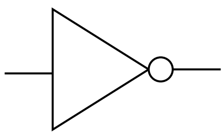
Es posible obtener las formas normales de una función usando métodos algebraicos, apelando a las expresiones del apartado 1.3 para operar sobre las funciones y lograr expresiones sumas de productos o producto de sumas.

1.5. CIRCUITOS LÓGICOS DIGITALES

Las computadoras digitales utilizan el sistema de numeración posicional binario, que, como se sabe, tiene dos dígitos: 0 y 1. Un dígito binario se denomina bit, por la contracción de las palabras inglesas Binary – digiT. La información esta representada en las computadoras digitales en grupos de bits. Utilizando diversas técnicas de codificación, los grupos de bits pueden hacerse que representen no solamente números binarios, sino también otros símbolos discretos cualquiera, tales como dígitos decimales o letras del alfabeto. Por medio de un uso racional de los grupos de bits y utilizando diversas técnicas de codificación, como se verá en otro trabajo práctico, los dígitos binarios pueden utilizarse para desarrollar conjuntos completos de instrucciones para realizar diversos tipos de cálculos.

Es un hecho que una computadora responda a señales eléctricas las cuales no tienen relación alguna con los símbolos abstractos del álgebra booleana, sin embargo, estableciendo una correspondencia entre los símbolos numéricos 1 y 0 y las magnitudes de voltaje de una señal eléctrica, puede hacerse que los circuitos electrónicos internos trabajen tal como los operadores boléanos vistos anteriormente.

El elemento básico de la constitución interna de una computadora digital es la compuerta digital, que puede ser de diversos tipos, como veremos adelante. Por supuesto, estas compuertas digitales o compuertas lógicas son elementos físicos que manejan señales eléctricas. Dichas compuertas pueden encontrarse en dos posibles estados diferentes: Voltaje alto o 1 lógico, Voltaje bajo o cero lógico. Todos los sistemas digitales se construyen usando solo 3 compuertas lógicas básicas: AND, OR y NOT. Estas compuertas tienen un símbolo gráfico diferente y su operación puede describirse por medio de funciones algebraicas que son: Producto lógico para la compuerta AND, Suma lógica para la compuerta OR y negación o complemento lógicos para la compuerta NOT. Las relaciones entrada–salida de las variables binarias para cada compuerta pueden representarse por medio de una tabla de verdad. Los nombres, símbolos gráficos, funciones algebraicas y tablas de verdad de las tres compuertas básicas se muestran en la tabla siguiente:

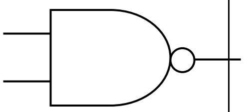
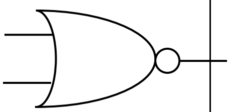
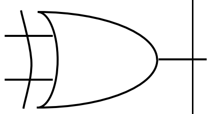
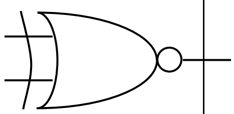
COMPUERTA	SÍMBOLO GRÁFICO	FUNCIÓN ALGEBRAICA	TABLA DE VERDAD	
			A B	X
AND		X = A.B	0 0 0 1 1 0 1 1	0 0 0 1
			A B	X
OR		X = A + B	0 0 0 1 1 0 1 1	0 1 1 1
			A	X
NOT		X = $\overline{A}$	0 1	1 0

1.5.1 OTRAS COMPUERTAS LÓGICAS

Se pueden tener compuertas lógicas a partir de las fundamentales AND, OR y NOT. Estas son:

- NAND y NOR, son compuertas AND y OR a las que se les ha agregado un negador lógico a su salida.
- Las compuertas OR EXCLUSIVO o abreviadamente XOR y la compuerta NOR EXCLUSIVO o XNOR, se obtienen mediante una combinación apropiada de las compuertas básicas.

  En el siguiente cuadro se describen cada una de estas funciones.

COMPUERTA	**SÍMBOLO GRÁFICO**	**FUNCIÓN ALGEBRAICA**	**TABLA DE VERDAD**	
			A B	X
NAND		$X = \overline{A \cdot B}$	0 0 0 1 1 0 1 1	1 1 1 0
			A B	X
NOR		$X = \overline{A + B}$	0 0 0 1 1 0 1 1	1 0 0 0
			A B	X
OR EXCLUSIVO (XOR)		$X = A \oplus B$ $X = \overline{A}.B + A.\overline{B}$	0 0 0 1 1 0 1 1	0 1 1 0
			A B	X
NOR EXCLUSIVO (XNOR)		$X = \overline{A \oplus B}$ $X = \overline{A}.\overline{B} + A.B$	0 0 0 1 1 0 1 1	1 0 0 1

1.6 MAPAS DE KARNAUGH

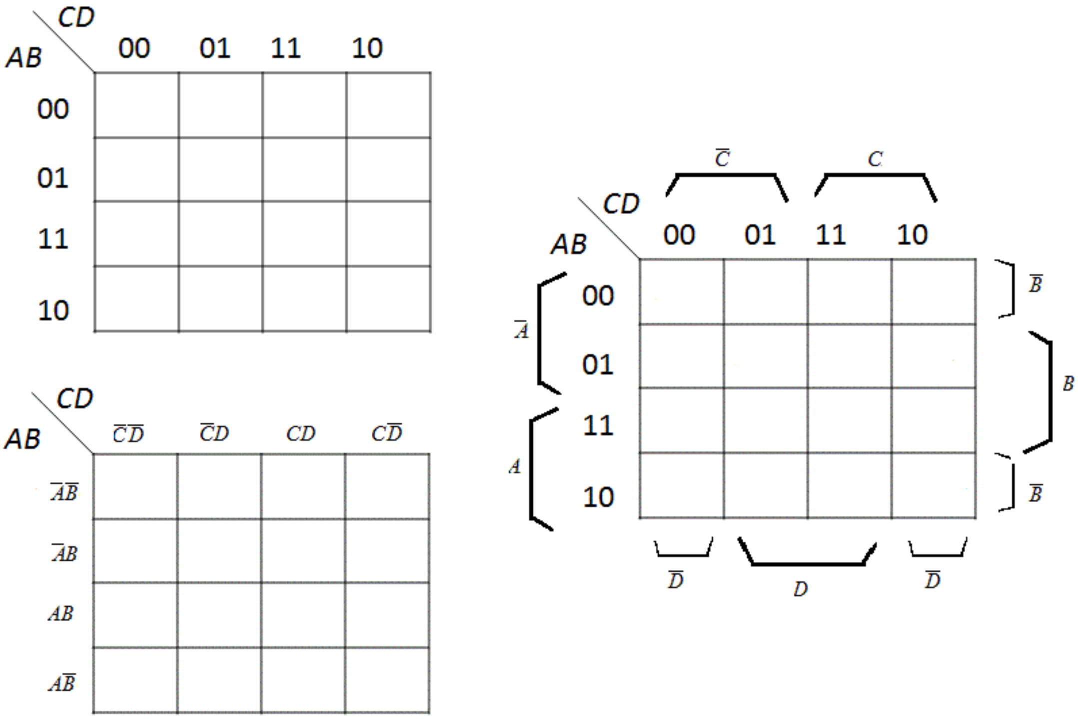
Los Mapas de Karnaugh o diagramas de Veitch-Karnaugh constituyen otra forma de representar una función lógica. Por la disposición de las variables en el diagrama, es posible encontrar rápidamente una expresión sencilla de la función representada, mediante un adecuado agrupamiento de unos y ceros.

Esta simplificación o minimización permite determinar entre las expresiones del tipo suma de productos o producto de sumas, las más simples, correspondiéndoles circuitos de dos niveles que representan el menor número de compuertas y/o entradas por compuerta.

Los diagramas se emplean también en la determinación de las expresiones canónicas de una función y el estudio y generación de códigos. El uso de estos mapas se limita a funciones de hasta 5 o 6 variables como máximo, debido a que se torna difícil la visualización de funciones más complejas.

En este práctico trabajaremos con mapas de hasta cuatro variables.

Distintas formas de graficar un mapa de cuatro variables:



1.6.1 REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

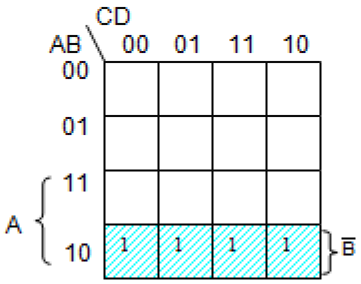
La determinación del mapa de Karnaugh que representa a una cierta función lógica constituye el paso previo a su minimización. Las expresiones del tipo suma de productos se prestan mejor para ser representadas de manera directa en el diagrama.

Ejemplo: dada la siguiente función, pasar los unos correspondientes al mapa.

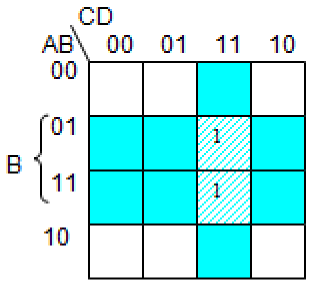
$$F = A\overline{B} + BCD + \overline{A} + A\overline{B}C\overline{D}$$

El procedimiento consistirá en representar en el diagrama cada uno de los sumandos. En las siguientes figuras se hace esto con un diagrama para cada término.

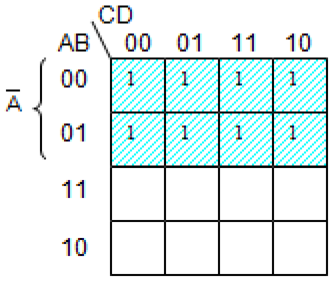
Cada sumando está representado en el diagrama por los unos relativos a las combinaciones de valores lógicos para los cuales el sumando y la función valen 1. Los cuatro diagramas de los distintos sumandos, en la práctica se realizan en uno solo directamente, que es el diagrama suma o superposición de aquellos, y que representa a la función en cuestión.



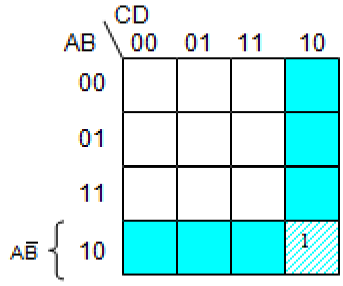
Sumando $A\overline{B}$



Sumando BCD

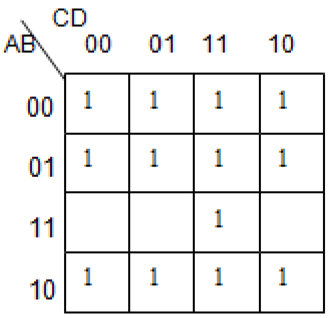


Sumando$\bar{A}$



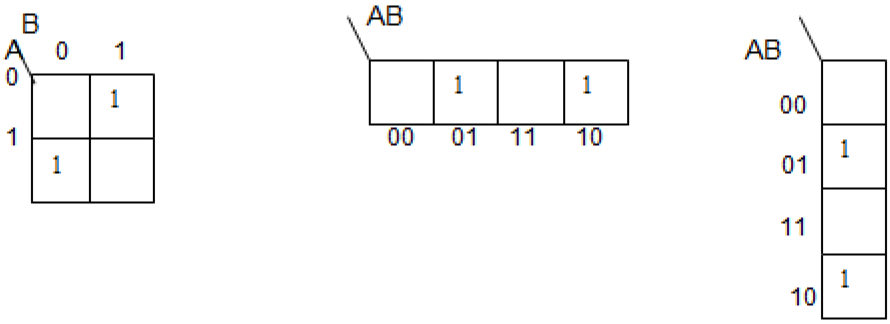
Sumando$A\bar{B}C\bar{D}$

Dejamos para el alumno la tarea de encontrar la tabla de verdad de la función tratada y verificar el mapa de la función completa, que es el que sigue, también deben encontrar la función mínima:



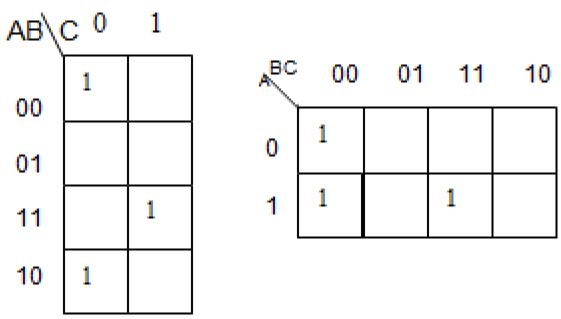
Función F

Para representar funciones de 2 y 3 variables se utilizan los diagramas que siguen:



2 Variables

$F=\bar{A}B+A\bar{B}$



3 variables

$F = ABC + \bar{B}\bar{C}$

1.6.2 DETERMINACIÓN DE EXPRESIONES CANONICAS

En lugar de obtener las formas canónicas de una función en forma algebraica, puede resultar más práctico utilizar para el mismo fin el diagrama, teniendo en cuenta, para hallar los minitérminos, aquellas combinaciones de valores correspondientes a las celdillas donde la función vale 1, dado que el diagrama es en esencia una tabla de verdad. La forma canónica sería luego la sumatoria de todos los términos correspondientes a las celdas donde hubiera un uno.

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

Veamos un ejemplo:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11				
10	1	1		1

Función F

La forma canónica de la función representada por el diagrama anterior es:

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

1.6.3 MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES

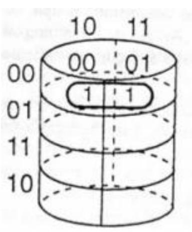
Los diagramas de Karnaugh se utilizan principalmente para minimizar expresiones del tipo suma de productos, obteniéndose otra suma de productos minimizada.

Una suma de productos será mínima si no existe otra expresión suma de productos con menor número de sumandos, ni otra de igual número de sumandos, pero con menor cantidad de variables. También puede haber dos o más sumas de productos equivalentes que sean igualmente mínimas.

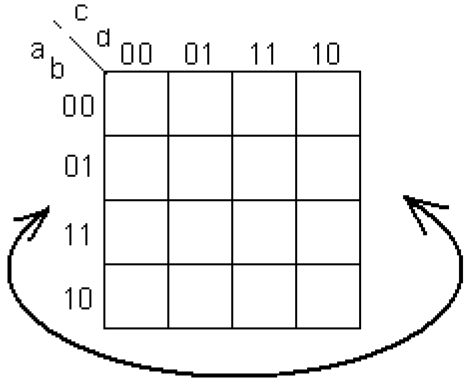
Todo lo dicho hasta aquí para suma de productos es igualmente válido para producto de sumas, haciendo los cambios correspondientes.

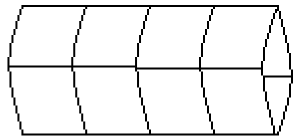
Mediante otros métodos, no tan sistemáticos, es posible hallar expresiones más sencillas que usando mapas de Karnaugh, pero con más de dos niveles de retardo, y por lo tanto no serán SP ni PS, ni casos particulares de este tipo de expresiones.

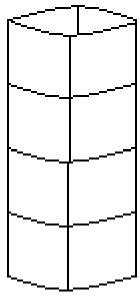
Objetivos de la minimizacion usando Mapas de Karnaugh:



Consiste en enlazar todos los unos del mapa utilizando el menor número posible de lazos, siendo que cada lazo abarque la mayor cantidad de celdas adyacentes que sea permitido agrupar. Cuanto más grande es el lazo, mas variables desaparecen del producto a formar.
Recuerden que al ser mapa se puede doblar formando un cilindro.







MAPA DE 4 VARIABLES				MAPA DE 3 VARIABLES		
Expresiones de 4 variables	↔	**1 celda**		**Expresiones de 3 variables**	↔	**1 celda**
Expresiones de 3 variables	↔	**2 celda**		**Expresiones de 2 variables**	↔	**2 celda**
Expresiones de 2 variables	↔	**4 celda**		**Expresiones de 1 variables**	↔	**4 celda**
Expresiones de 1 variables	↔	**8 celda**				

1.6.3.1 MÉTODO GENERAL DE SIMPLIFICACIÓN

Daremos aquí un método general para la minimización de funciones, que posteriormente se discutirá y ejemplificará.

PASO 1 Expresar la función como suma de productos.

PASO 2 Representar la función en el mapa.

PASO 3 En un mapa de cuatro variables, agrupar los unos del diagrama en grupos de 8, 4, 2 o 1 celdas adyacentes, sin dejar ninguno libre, buscando el menor número posible de agrupamientos, para dar lugar al menor número de términos en la expresión final.

PASO 4 Eliminación de variables en los agrupamientos así formados, cuyo valor no influirá en el valor de los términos.

PASO 5 La función minimizada será la sumatoria de todos los términos hallados en el paso 3 que nos den una expresión mínima.

Resta aún establecer algunas definiciones y reglas que permitan llegar a la solución óptima especialmente en los casos en que existan varias posibilidades de agrupar celdas.

1.6.3.2 IMPLICANTES PRIMOS Y TERMINOS ESCENCIALES

IMPLICANTES PRIMOS: Son los mayores agrupamientos de celdas adyacentes que es posible realizar en un diagrama, tales que cualquiera de ellos no pueda ser absorbido o cubierto por otro mayor.

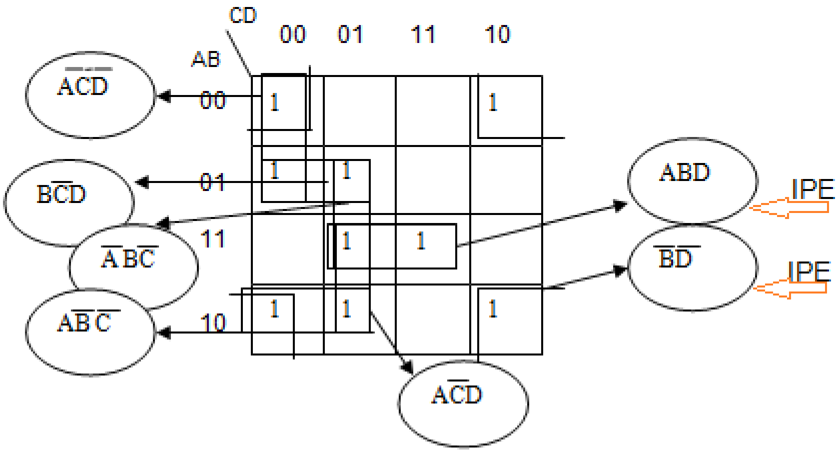
Un implicante primo es ESENCIAL (IPE) si tiene una o más celdas no compartidas con otros implicantes primos, sean estos esenciales o no.

Un implicante primo NO ESENCIAL (IPNE) tiene todas sus celdas compartidas con otros implicantes primos, esenciales o no.

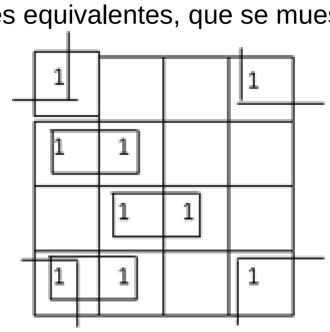
Los IPE deben aparecer siempre en una expresión minimizada y de haber varias soluciones en todas ellas. Los IPNE pueden aparecer o no en el resultado final. No aparecerán si son redundantes, esto es, porque los unos que cubre ya son cubiertos por otros IP sean pudiendo dar lugar a varias soluciones mínimas equivalentes.

Veamos un <u>ejemplo</u>, minimizar la siguiente función:

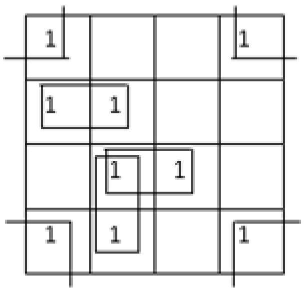
$$F = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}C\overline{D} + ABCD$$



Se han señalado en el ejemplo anterior todos los IP, y además se han señalado los que resultan esenciales. Para cubrir todas las celdas, en el diagrama anterior, existen dos soluciones equivalentes, que se muestran a continuación:



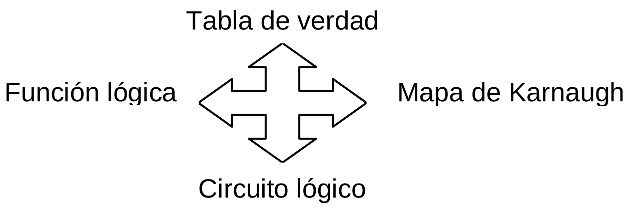
$F = \overline{B}\,\overline{D} + ABD + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{BC}$



$F = \overline{B}\,\overline{D} + ABD + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{C}D$

<u>Resumiendo</u>:

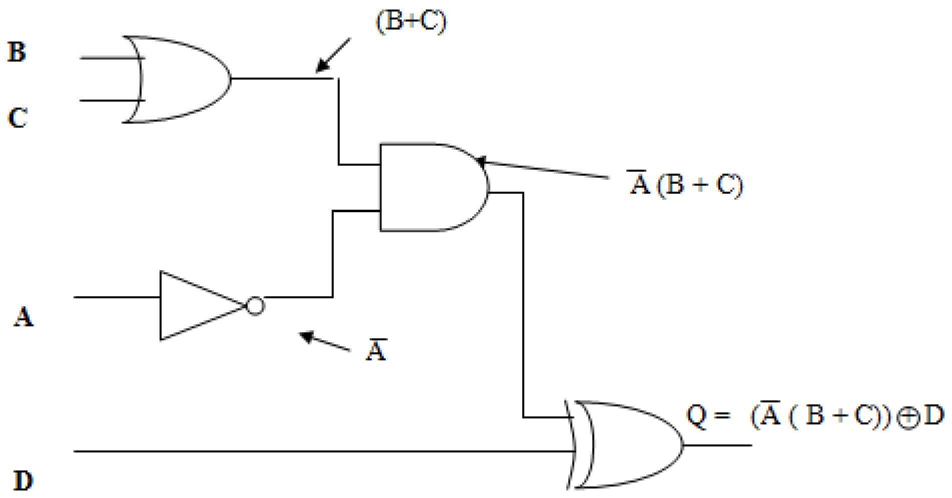
Formas de representar lo mismo:



PROBLEMAS RESUELTOS

Ej 1. Dada la función, elaboramos el circuito lógico.

$$Q = (\overline{A}\,(B + C)) \oplus D$$



Ej 2. Dada la función **Q =** $\overline{A}$ **. (B + C)**, obtenemos la tabla de verdad.

ENTRADAS			INTERMEDIAS		SALIDAS
A	**B**	**C**	$\overline{A}$	(B + C)	Q= $\overline{A}$. (B+C)
0	0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	1	1	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**0**
1	1	0	0	1	**0**
1	1	1	0	1	**0**

Ej 3. Usando propiedades simplifique la siguiente expresión booleana:

$$\mathbf{F = (\overline{A + B})\,(\overline{A} + \overline{B})}$$

$\mathbf{F} = \overline{A}\,\overline{B}\ (\overline{A} + \overline{B})$ □ *propiedad de De Morgan (17)*

$\mathbf{F} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{A}\ +\ \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{B}$ □ *propiedad distributiva (3)*

$\mathbf{F} = \overline{A}\ \overline{B}\ +\ \overline{A}\ \overline{B}$ □ *propiedad de Idempotencia (12)*

$\mathbf{F} = \ \mathbf{\overline{A}\,\overline{B}}$ □ *propiedad de Idempotencia (11)*

Ej 4. Construcción de un mapa de Karnaugh de 4 variables.

1) Para ilustrar cómo se elabora el mapa de Karnaugh usaremos una función cualquiera de 4 variables, a la que le corresponde la siguiente tabla de verdad:

Entradas				Salida
A	B	C	D	Z
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

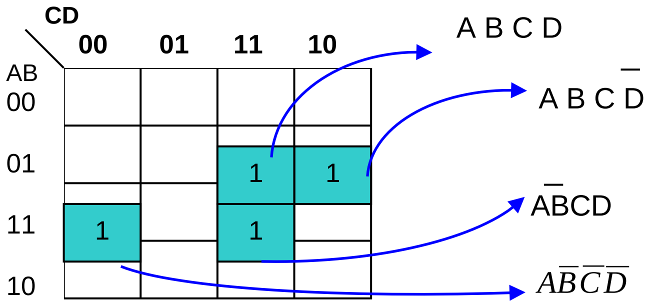
Obsérvese que la tabla de verdad consta de 16 filas, que como ya se sabe, corresponden a las 16 combinaciones posibles de las 4 entradas.
El mapa de Karnaugh, a la derecha de la tabla, contiene 16 cuadros, uno por cada fila de la tabla. En el costado izquierdo del mapa se representan verticalmente las variables A y B, cuyos valores de pareja serán **00, 01, 11 y 10**. Nótese que esta secuencia de numeración corresponde a una secuencia de conteo en Gray de 2 bits, y es sobre esto que el mapa se fundamenta, porque entre dos cuadros vecinos o adyacentes, sólo cambiará una variable, tanto en el sentido horizontal, como en el vertical.

2) Para llenar el mapa comenzaremos por fijarnos en aquellas entradas de la tabla cuyas salidas sean iguales a 1. La primera de ellas corresponde a la fila n° 9, cuya combinación de entradas es 1000. Entonces el cuadro correspondiente en el mapa es el de la esquina inferior izquierda.

Entradas				Salida
A	B	C	D	Z
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

AB \ **CD**	**00**	**01**	**11**	**10**
00				
01				
11			1	1
10	1		1	

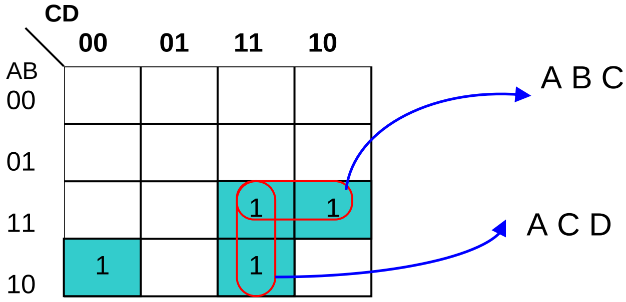
3) A partir de ahora se debe obtener la función lógica que el mapa de Karnaugh representa, tomando los unos del mapa tendremos los siguientes minitérminos:



Concluimos entonces que la función canónica para Z será:

$$Z = A\,B\,C\,D + A\,B\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

4) Para la obtención de la función simplificada a través del mapa es necesario poner en práctica el concepto de *adyacencia* para realizar los correspondientes *enlaces* de cuadros.



En la figura los dos unos adyacentes verticalmente nos producen **A C D**, ya que es la variable **B** la que cambia al pasar de un cuadro al otro, mientras que las otras valen 1. Para los unos enlazados horizontalmente la variable que cambia es la **D**, lo que la elimina, y el producto que resulta será entonces **A B C.** El último sumando de la expresión corresponderá al uno que no ha sido enlazado.

Por lo cual,

$$\mathbf{S = A\,C\,D + A\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$$

Es la función lógica simplificada resultante.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Generalice, con sus palabras, el enunciado de las funciones AND, OR y XOR para *n* variables.

2. Dada la función:

$$Y = A.B.C + B.\overline{C}.\overline{D} + D.A(A.B + B.C)$$

   a) Dibuje el circuito lógico.

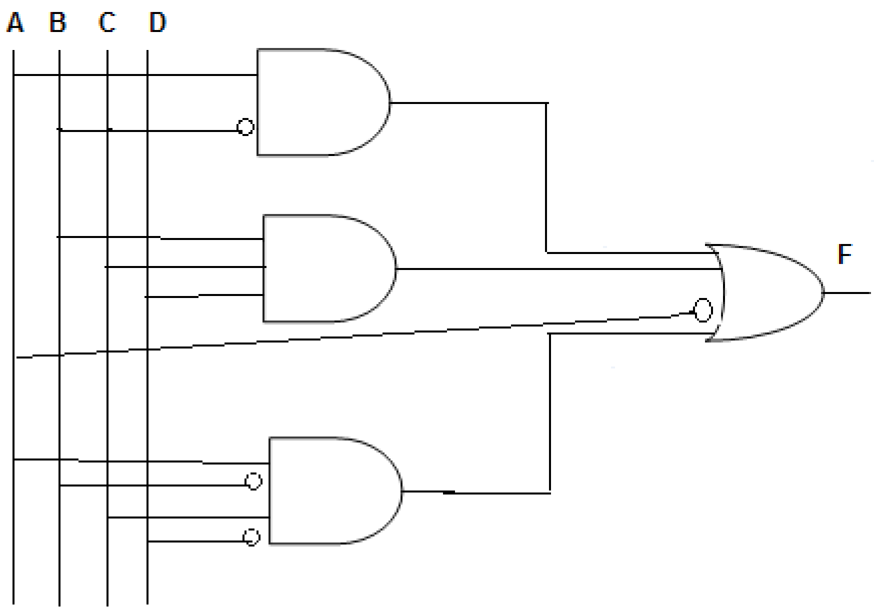
   b) Realice la tabla de verdad.

   c) Obtenga las funciones canónicas, como suma de productos y productos de sumas.

   d) Mediante mapa de Karnaugh obtenga funciones mínimas, agrupando unos y ceros.

   e) Dibuje los circuitos mínimos obtenidos.

3. Dado el siguiente circuito:



   a) Escriba la función.

   b) Realice la tabla de verdad.

   c) Obtenga las funciones canónicas, como suma de productos y productos de sumas.

   d) Mediante mapa de Karnaugh obtenga funciones mínimas, agrupando unos y ceros.

   e) Dibuje los circuitos mínimos obtenidos.

4. Dada la siguiente tabla de verdad:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**0**

a) Obtenga las funciones canónicas, como suma de productos y productos de sumas.

b) Pase los 0 y 1 de la tabla a un mapa de Karnaugh y obtenga las funciones mínimas.

c) Dibuje los circuitos mínimos obtenidos.

5. A partir del siguiente mapa de Karnaugh:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

d) Realice la tabla de verdad.

e) Obtenga las funciones canónicas, como suma de productos y productos de sumas.

f) Obtenga funciones mínimas, agrupando unos y ceros.

g) Dibuje los circuitos mínimos obtenidos.

6. Demuestre por medio de tablas de verdad, la validez de las siguientes identidades:

$$\textit{Teorema de}\ \text{De Morgan}\ \overline{X.Y.Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

7. Simplifique la siguiente función usando métodos algebraicos y compare el resultado mediante el uso de mapa de Karnaugh:

$$F = XYZ + \overline{X}Y + XY\overline{Z}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Dadas las siguientes funciones booleanas:
   - Dibuje los circuitos lógicos.
   - Escriba la tabla de verdad.
   - A partir de la tabla de verdad obtenga una expresión canónica en forma de minitérminos y de maxitérminos.
   - Obtenga la función simplificada de cada una.

$$a)\ Y = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + B.C.(A + B)$$

$$b)\ Y = A.B.\overline{C} + \overline{A}.C + \overline{A}.\overline{B}$$

$$c)\ Y = (A + \overline{B}.C).(B.C + \overline{A}.\overline{B})$$

$$d)\ Y = \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.C + \overline{C} + (A \oplus \overline{B})$$

$$e)\ F(A, B, C) = \Sigma(0,1,5,6,7)$$

$$f)\ F(A, B, C) = \Pi(0,1,5,6,7)$$

$$g)\ F = A + BC\overline{D} + (AB + BC)A$$

2. Dadas las siguientes funciones, sin usar tablas de verdad, páselas directamente a mapas de Karnaugh y obtenga todas las funciones mínimas posibles, agrupando ceros y unos, verificando implicantes primos esenciales.

$$a)\ Y = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C} + C$$

$$b)\ Y = A.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B} + B.\overline{C}.D + A.\overline{B}.C.\overline{D}$$

$$c)\ F = \Sigma(1,2,3,5,6,7,10,11)$$

$$d)\ Y = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + D + C)(A + D)\overline{C}$$

3. Dados los siguientes mapas obtener las funciones mínimas y dibujar sus circuitos:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	
11	1	1		
10	1			

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10			1	

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1		
11		1	1	
10	1	1		

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1