Análisis Matemático I — 1° Parcial — Fecha: 2-06-23 — Z1016

Aprob 8 (ocho)

Apellido y Nombre: [redacted]

1) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 2 \\ b x^2 + d & \text{si } x < 2 \end{cases}$

B La recta tangente al gráfico de " g " en $(x_0, y_0) = (2, y_0)$ tiene ecuación: $4y - x = 8$

1-1) Traducción de datos correspondiente a " g ".

1-2) Hallar los valores de " b " y " d " para que f sea derivable en $x_0 = 2$

---

2) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2} + 1$

B° Se pide: a) Dominio, Extremos relativos de f, Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de f

b) Asíntotas con sus respectivas ecuaciones. c) Esbozar el gráfico de f

---

3) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. / $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2bx + \ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

B Se sabe que $y = 5x$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de " g " en $(x_0, y_0) = (0, y_0)$ 3-1) Traducir datos

3-2) Halle el valor de b para que exista el $\lim_{x \to 0} f(x)$

---

4) Hallar los valores de a y b para que f es derivable en $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2bx & si \ x \leq 0 \\ \ln(1 + ax) & si \ x > 0 \end{cases}$$

5a) Sea $f: [a\ ,\ b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f' - 2 < 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Si $f(a) < 2a$, $f(b) - 2b > 0$

Probar que la ecuación: $f(c) = 2c$ tiene al menos una solución real en (a , b)

¿Es única ? Fundamentar la respuesta.

5b) Sea $y = f(x)$ definida por $(2y^3 - 2x)^3 - 1 = x.y^2 + \ln(x.y) + e^y - 2x - e$

Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva gráfica de f en $(1, y_0)$

ANÁLISIS MATEMÁTICO I CURSO: Z1016
Tiempo asignado: 2 hs

[redacted] HOJA N° 1
FECHA

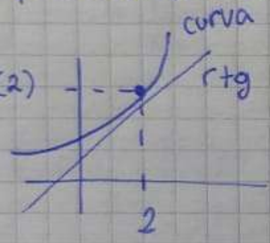
1) $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 2 \\ bx^2 + d & \text{si } x < 2 \end{cases}$

recta tg de "g" en $(x_0, y_0) = (2, y_0)$ tiene ecuación $4y - x = 8$

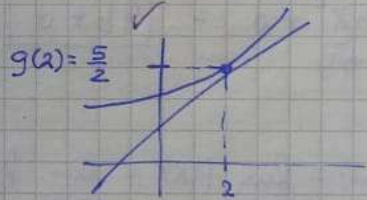
1-1) TRADUCCION DE DATOS:

$4y = x + 8 \rightarrow y = \frac{1}{4}x + 2$ ✓

La pendiente $\left(\frac{1}{4}\right)$ es >0 por lo tanto tiene pendiente positiva (crece)



$y = \frac{1}{4} \cdot 2 + 2 = \boxed{\frac{5}{2}}$ ✓



$P(2, \frac{5}{2}) \in R.tg$

$P(2, \frac{5}{2}) \in$ a la curva que representa la función la Curva

Como (g) admite recta tg en su curva puedo decir que:

g es derivable en $x_0 = 2$ ⟶ g es continua en $x_0 = 2$

• Continua: I) $\exists\, g(2) = 5/2$

II) $\exists \lim_{x \to 2} g(x)$

III) $g(2) = \lim_{x \to 2} g(x) = 5/2$

• Derivable: $g'(\underset{\text{debe anotar 2}}{\overset{2}{x}}) = \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - \overbrace{g(2)}^{\to 5/2}}{x - 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ por la pendiente $y = \frac{1}{4}x + 2$

NOTA

1-2) $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 2 \\ bx^2+d & \text{si } x<2 \end{cases}$

Hallar b y d para que sean derivables en $x_0=2$

Condición necesaria pero no suficiente de la derivabilidad es que la función sea continua, entonces:

Continuidad:

I) $f(x) = g(x)$?

$f(2) = g(2) = \boxed{5/2}$

II) $\lim\limits_{x\to 2^+} \underbrace{g(x)}_{\to 5/2} = \boxed{5/2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} b\underbrace{x^2}_{\to 4}+d = \boxed{4b+d}$

Como $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$5/2 = 5/2 = 4b+d$

Se desprende que: $5/2 = 4b+d$

$\boxed{\frac{5}{2} - 4b = d}$ lo remplazo en $f(x)$

$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 2 \\ bx^2+\frac{5}{2}-4b & \text{si } x<2 \end{cases}$

Derivabilidad: $f'(2^-) = f'(2^+)$

↓

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, $f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{g(x) - 5/2}{x-2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ por la pendiente

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{bx^2 + \cancel{5/2} - 4b - \cancel{5/2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{bx^2 - 4b}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{b(x^2-4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{b(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2^-} b(\overbrace{x+2}^{\to 4}) = \boxed{4b}$$

como $f'(2^+) = f'(2^-)$

$$\frac{1}{4} = 4b$$

$$\boxed{\frac{1}{16} = b}$$

Busco d: $\frac{5}{2} - 4b = d$

$$\frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{1}{16} = d$$

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{4} = d$$

$$\boxed{\frac{9}{4} = d}$$

Compruebo : $f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \geq 2 \\ \frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{4} & si\ x < 2 \end{cases}$

Continuidad:

I) $f(2) = g(2) = \boxed{5/2}$

II) $\lim_{x \to 2^+} \underbrace{g(x)}_{\to 5/2} = \boxed{5/2}$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{16} \underbrace{x^2}_{\to 4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{9}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$

es continua en $x_0 = 2$

Derivabilidad:

$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - 5/2}{x-2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ por la pendiente

$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{4} - 5/2}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{16}(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{16} \underbrace{(x+2)}_{\to 4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Es <u>derivable</u> en $x_0 = 2$ con los valores de $b = \frac{1}{16}$ ^ $d = \frac{9}{4}$

HOJA N° 3
FECHA

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2} + 1 = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ ✓

Dom $\mathbb{R} - \{2\}$ ✓ $\rightarrow$ $x - 2 = 0$
$\boxed{x = 2}$

Derivo para hallar puntos críticos $(f'(x)=0)$

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x-2)\cdot 1}{(x-2)^2}$ Dom $f' = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + \cancel{x} - \cancel{2} - x^2 - \cancel{x} + \cancel{2}}{(x-2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}}$ ✓

Busco sus puntos críticos:

$x^2 - 4x = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$ Puntos críticos de la función ✓

x	-1	0	1	2	3	4	5
f'	+	0	−	∄	−	0	+

$f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 4\cdot(-1)}{(-1-2)^2} = \dfrac{5}{9} = +$

$f'(1) = \dfrac{1^2 - 4\cdot 1}{(1-2)^2} = \dfrac{-3}{1} = -$

$f'(3) = \dfrac{3^2 - 4\cdot 3}{(3-2)^2} = \dfrac{-3}{1} = -$

$f'(5) = \dfrac{5^2 - 4\cdot 5}{(5-2)^2} = \dfrac{5}{9} = +$

la función crece en:
$(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

la función decrece en:
$(0; 2) \cup (2; 4)$

la función tiene un máx relativo o local en $x = 0$ ✓ $\rightarrow f(0) = \dfrac{-2}{-2} = \boxed{1}$
" " " min " " en $x = 4$ ✓ $\rightarrow f(4) = \dfrac{18}{2} = \boxed{9}$

NOTA

Asintotas: $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ Dom $\mathbb{R}-\{2\}$

AV: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\to 4}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}} = \frac{4}{0} = \boxed{\infty}$$

la f tiene una AV en $\boxed{x=2}$

AH: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ $\quad L\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x-2} = \frac{\to\infty}{\to\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$$

NO $\cancel{\exists}$ AH.

?

AO: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x-2} : x = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2-2x} = \frac{\to\infty}{\to\infty}$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}\right)}{x^2\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{1} = \boxed{1} = m$$

2X

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x-2}{x-2}-x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x\cancel{-2}\cancel{-x^2}+\cancel{2}}{x-2}\right)$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1)}{x\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)} = \boxed{1} = b$$

Entonces AO: $\boxed{y=x+1}$

...EMÁTICO I CURSO: Z1016

Tiempo asignado: 2 hs

APELLIDO y NOMBRE :..............................

Segundo Parcial

Fecha: 11-07-2...

HOJA Nº 4

FECHA

Grafico: Por izq de 2:

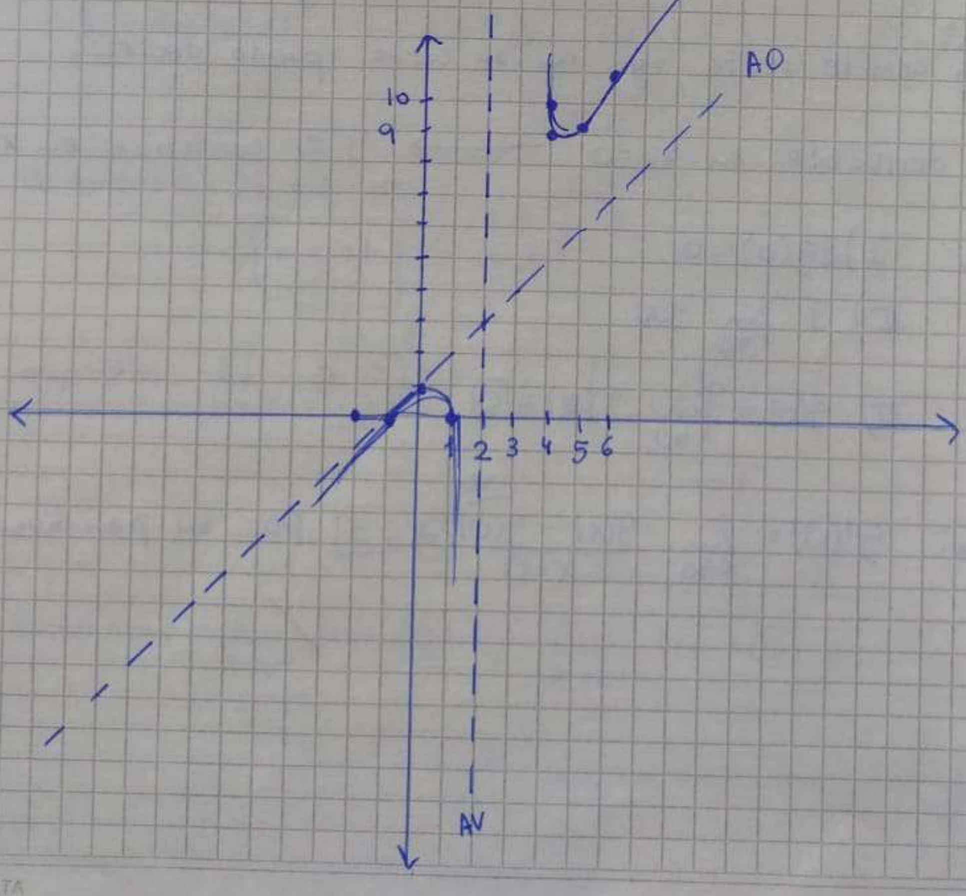
x	$f(x)$
1	0
0	1
-1	0,666
-2	0

Por derech. de 2:

x	$f(x)$
3	$\frac{10}{1} = 10$
4	$\frac{18}{2} = 9$
5	$\frac{28}{3} = 9,333$
6	$\frac{40}{4} = 10$

AO: $y = x + 1$:

x	$f(x)$
1	2
2	3
3	4



NOTA

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2bx + \ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

$y = 5x$ es ec. de la R.tg de "g" en $(0, y_0)$

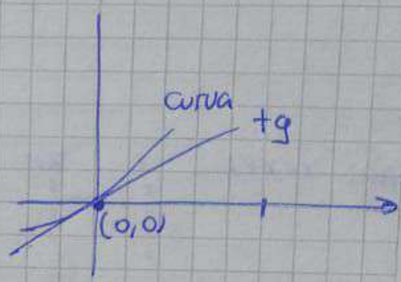
3-1) ~~T~~RADUCIR DATOS:

$y = 5x$ como $5>0$ la ec tiene pendiente positiva

Busco y_0: $y = 5 \cdot 0 \rightarrow \boxed{y=0}$

$P(0,0) \in \mathbb{R}$ tg.

$P(0,0) \in$ a la curva que representa la función



Como g admite recta tg en su curva puedo decir:

g es derivable en $x_0 = 0 \longrightarrow$ g es continua en $x_0 = 0$

• Continua: I) $\exists\, g(0) = 0$

II) $\exists \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

III) $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \boxed{0}$

• Derivada: $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - \overset{\to 0}{g(0)}}{x - 0} = \boxed{5}$ por su pendiente

3-2) Hallar el valor de b para que exista $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)}{x} = \boxed{0}$$ NO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2bx + \ln(1+x)}{x} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{2b\cancel{x}}{\cancel{x}}}_{\to \boxed{2b}} + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (*)$$

$(*)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$ por propiedad de la logaritmación:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\Big(\underbrace{\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}\Big) = \ln(e) = \boxed{1}$$

entonces: $2b + 1 = 0$ arrastra ERROR

$$\boxed{b = \frac{-1}{2}}$$

Compruebo: $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}^{\to -1} \cancel{x}}{\cancel{x}} + \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1}$$

$$= -1 + 1 = \boxed{0}$$

Entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \boxed{0}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{0}$

$\boxed{0 = 0}$ cumple $\leftarrow$ con $b = -\frac{1}{2}$

NOTA

4) Hallar a y b para que f sea derivable en $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2bx & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+ax) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como condición necesaria pero no suficiente f tiene que ser continua:

Continuidad:

I) $f(x) = 4x^2 + 2bx$

$f(0) = 4 \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 = \boxed{0}$

II) $\lim_{x \to 0^+} \ln(1+\underbrace{ax}_{\to 0}) = \ln(1) = \boxed{0}$

$\lim_{x \to 0^-} \underbrace{4x^2}_{\to 0} + \underbrace{2bx}_{\to 0} = 0 + 0 = \boxed{0}$

III) $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{0}$ f Es continua

Derivable: $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+ax) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+ax)$

$= \lim_{x \to 0^+} \ln(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} \left[(1+ax)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{a}{a}}\right)$

$= \ln\left(\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \left[(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a}}_{\to e}\right) = \ln(e)^a = a \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1}$

$f'(0)^+ = \boxed{a}$

↓

NOTA

ación

Segundo Parcial

Fecha: 11-07-23

[redacted]

HOJA Nº 6

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x^2 + 2bx - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}(\overset{\to 0}{4x} + 2b)}{\cancel{x}(1)} = \boxed{2b}$$

Como $f'(0^+) = f'(0^-)$ la relación queda: $a = 2b$

5-a) las 2 condiciones de Bolzano son:

I) que f sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$

II) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Creo una función aux: $f(c) = 2c \rightarrow f(c) - 2c = 0$ Entonces:

$h(x) = f(x) - 2x$

$h(x) : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = f(x) - 2c$

Condición I de Bolzano: Se cumple porque la consigna me da de dato que $f' - 2 < 0$ y para que sea derivable previamente se cumple que es continua.

Condición II: $h(a) = f(a) - 2a$, $h(b) = f(b) - 2b$

¿$h(a) \cdot h(b) < 0$?

Digo que $h(a) = f(a) - 2a$ pero como tengo que $f(a) < 2a \rightarrow f(a) < 0$

Digo que $h(b) = f(b) - 2b$ pero como tengo que $f(b) - 2b > 0 \rightarrow f(b) > 0$

Por regla de signos, un núm. $\ominus$ por un núm. $\oplus$ es un $\ominus$

Se cumple Bolzano

Falto

¿Es unica?

$h(x) = f(x) - 2x$ y tengo que $f' - 2 < 0$, entonces derivo $h(x)$

$h'(x) = f'(x) - 2 \rightarrow f' - 2 < 0$ al ser menor que cero (minimo) ?

Se puede afirmar que la función corta al eje x UNA ÚNICA vez.

NOTA

5-b) Busco y_0 que lo encuentro reemplazando las x por $x_0 = 1$

$$(2y^3 - 2x)^3 - 1 = xy^2 + \ln(xy) + e^y - 2x - e$$

$x_0 = 1$:

$$(2y^3 - 2)^3 - 1 = y^2 + \ln(y) + e^y - 2 - e$$

Por ensayo digo que $y_0 = 1$

$$\cancel{(2-2)^3} - 1 = 1 + 0 + \cancel{e} - 2 - \cancel{e}$$

$$-1 = 1 - 2$$

$$-1 = -1$$ ✓ cumple con $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$

Ahora busco y':

$$3(2y^3 - 2x)^2 \cdot (6y^2 \cdot y' - 2) = y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + \frac{1}{xy} \cdot (y + x \cdot y') + e^y \cdot y' - 2 - 0$$

Reemplazo $x_0 = y_0 = 1$

$$3\cancel{(2-2)}\cancel{(6y'-2)} = 1 + 2y' + 1 \cdot (1 + y') + e y' - 2$$

$$0 = \cancel{2} + 2y' + y' + ey' - \cancel{2}$$

$$0 = 3y' + ey'$$

$$0 = y'(3 + e)$$

$$\boxed{0 = y'}$$

Recta tg: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - 1 = 0\,(x - 0)$$

$$\boxed{y = 1}$$

Recta normal: $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ Pero ~~...~~ como $f'(x_0) \neq 0$ en la recta normal

me queda que $\boxed{x = 1}$