ANÁLISIS MATEMÁTICO I – Segundo Parcial – Anual 2021 – Curso K1025

Todas sus respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. No puede utilizar calculadoras programables ni tabla de derivadas e integrales. Los gráficos de las funciones deben ser confeccionadas haciendo un breve estudio previo.

1. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas fundamentando la respuesta.

a. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n}$ converge con suma $S = \frac{1}{80}$

b. Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces la función f es idénticamente nula en $[a,b]$.

2. Analice la continuidad y la derivabilidad de la función definida por:

$H(x) = \begin{cases} \int_0^{2x^2} \cos(t^2)dt & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$ ¿Es H derivable en el punto $x_0 = \sqrt[4]{\pi}$? Fundamente todas las respuestas, y si es posible calcule $F'(x_0)$.

3. Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función definida por $f(x) = x.\sqrt[3]{2-x}$ con $0 \leq x \leq 4$. Dibuje la región indicada.

4. Determine el polinomio de Taylor de 2do. grado en el punto $x_0 = 1$ asociado a la función definida por $F(x) = \int_1^{4x^3-3} g(u)du$. Se sabe que $g \in C^1(R)$ y que $y = -x + 3$ es la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto $x = 1$. Fundamente todo el procedimiento elegido.

5. Determine el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}(x+2)^n$.

CRITERIO DE APROBACIÓN: Para aprobar el examen (nota SEIS) deberá resolver correctamente al menos 3 de los 5 problemas planteados.

- Dispone de 2 (dos) horas para la resolución del examen. Desde 9.00 a 11.00 hs.
- A las 11.15 hs. finaliza el plazo para subir el examen resuelto al Aula Virtual en la Actividad SEGUNDO PARCIAL.
- Debe resolver cada ejercicio en una sola hoja.
- Firmar al pie de cada carilla.
- Compaginar las hojas escaneadas o con foto y convertirlas en un archivo pdf (todas juntas en un solo archivo pdf)
- Letra manuscrita legible y gráficos confeccionados a mano alzada.
- Indicar el número de hojas entregadas.
- En todas las hojas debe figurar claramente nombre y apellido y Nro. de legajo.
- Los Profesores estarán conectados en ZOOM para responder consultas individuales y dificultades técnicas para subir el examen.

Segundo Parcial (c)
2021

1) V o F

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n}$ converge con suma $S = \frac{1}{80}$ V

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2}\right]^{n} = \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}}$$

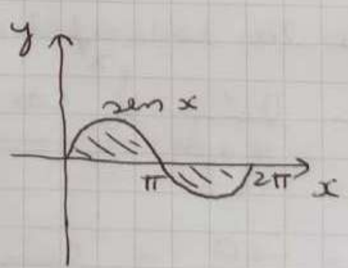
$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1/25}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}\cdot\frac{5}{4} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20} = \boxed{\frac{1}{80}}$$

b) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces f es idénticamente nula en $[a;b]$ F

Contraejemplo:

$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ no es idénticamente nula.



② Analice la continuidad y la derivabilidad de:

$$H(x) = \begin{cases} \int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

¿Es H derivable en el punto $x_0 = \sqrt[4]{\pi}$?

Fundamente. Halle $H'(x)$

$H(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt = 0 \Rightarrow H \text{ es continua en } x = 0$$

Además H es cont. en $\mathbb{R}$, ya que:

$$H(x) = \int_0^{x^2} \underbrace{\cos(t^2)\, dt}_{f(t)\, dt}$$

y como f es cont. en $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por Barrow:

$$H(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt = F(x^2) - F(0)$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow H'(x) = \cos(x^4) \cdot 2x$

$$H'(\sqrt[4]{\pi}) = \cos\left[(\sqrt[4]{\pi})^4\right] \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{\pi}$$

$$= \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} \cdot 2\sqrt[4]{\pi} = \underline{-2\sqrt[4]{\pi}}$$

Analizo la derivabilidad en $x = 0$

$$H'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt - 0}{x - 0} =$$

$$= \frac{\to 0}{\to 0} \underset{B-L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^4) \cdot 2x}{1} = \underline{0}$$

$\therefore \underline{H'(x) = \cos(x^4) \cdot 2x}$

Segundo Parcial (c)
2021

(3) Calcule el área de $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{2-x}$, $0 \leq x \leq 4$

Dibuje la región indicada.

$$x \cdot \sqrt[3]{2-x} = 0$$

$$\underbrace{x=0} \lor \sqrt[3]{2-x} = 0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow \underbrace{x=2}$$

$$x \cdot \sqrt[3]{2-x} > 0$$

si $x>0 \land \sqrt[3]{2-x} > 0$ ya que $0 \leq x \leq 4$

$$x>0 \land 2-x>0$$
$$2>x \Rightarrow x \in (0;2)$$

$$x \cdot \sqrt[3]{2-x} < 0$$

si $x>0 \land \sqrt[3]{2-x} < 0$

$$2-x<0 \Rightarrow x \in (2;4]$$
$$2<x$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{2-x} + x \cdot \frac{1}{3}(2-x)^{-2/3} \cdot (-1)$$

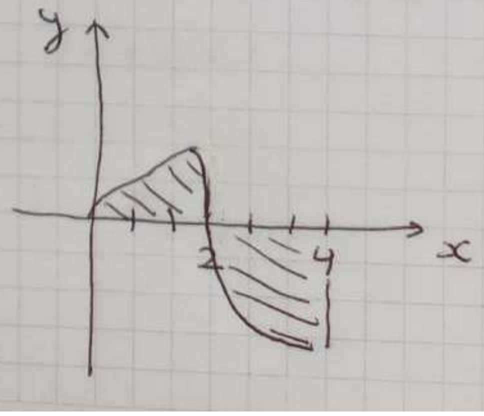
$$= \sqrt[3]{2-x} - \frac{x}{3(2-x)^{2/3}} = \frac{3(2-x)-x}{3(2-x)^{2/3}} =$$

$$= \frac{6-4x}{3(2-x)^{2/3}} = 0 \quad \text{si } 6-4x=0 \Rightarrow \underbrace{x=\frac{3}{2}}$$

$$\frac{6-4x}{3(2-x)^{2/3}} > 0 \text{ si } 6-4x>0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2}>x}$$

$$\frac{6-4x}{3(2-x)^{2/3}} < 0 \text{ si } 6-4x<0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2}<x}$$

$\therefore$ f presenta un máx. rel. (local) en $x = \frac{3}{2}$



$$|A| = \int_0^2 x \cdot \sqrt[3]{2-x}\,dx + \left(-\int_2^4 x\,\sqrt[3]{2-x}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}(2-x)^{4/3} + \frac{3}{7}(2-x)^{7/3}\Big|_0^2 - \left[-\frac{3}{2}(2-x)^{4/3} + \frac{3}{7}(2-x)^{7/3}\Big|_2^4\right]$$

$=$ ... reemplazar y calcular

C.A.

$$\int x \cdot \sqrt[3]{2-x}\,dx =$$

$$\int (2-z^3) \cdot z \cdot (-3z^2)\,dz =$$

$$= \int (2z - z^4)(-3z^2)\,dz = \int (-6z^3 + 3z^6)\,dz =$$

$$= -\frac{6}{4}z^4 + \frac{3}{7}z^7 + c = -\frac{3}{2}(2-x)^{4/3} + \frac{3}{7}(2-x)^{7/3} + c$$

$$\begin{cases} z = \sqrt[3]{2-x} \\ z^3 = 2-x \\ 3z^2\,dz = -dx \\ -3z^2\,dz = dx \\ z^3 - 2 = -x \\ 2 - z^3 = x \end{cases}$$

(4) $F(x) = \int_1^{4x^3-3} g(u)\,du \qquad P_{2,F(x),1}(x)$

$g \in C'(\mathbb{R})$ (g tiene derivada primera continua)

$y = -x+3$ RN a g en $x=1 \implies \underline{g'(1)} = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$

$R_1 \perp R_2 = m_1 = -\frac{1}{m_2}$

$\underline{g(1)} = -1+3 = \underline{2}$

$$P_{2,F(x),1}(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)(x-1)^2}{2!}$$

$$= 0 + 24(x-1) + 96(x-1)^2$$

$$F(1) = \int_1^1 g(u)\,du = 0$$

$$F'(x) = g(4x^3-3)\cdot 12x^2 \implies F'(1) = \underbrace{g(1)}_{2}\cdot 12 = \underline{24}$$

$$F''(x) = g'(4x^3-3)\cdot(12x^2)\cdot 12x^2 + g(4x^3-3)\cdot 24x$$

$$\implies F''(1) = \underbrace{g'(1)}_{1}\cdot 12\cdot 12 + \underbrace{g(1)}_{2}\cdot 24 = 144+48 = \underline{192}$$

(5) Determine el dominio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}(x+2)^n$$

Por Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(x+2)^n}{n^2+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 1}{\sqrt[n]{1^n}}\cdot\overset{\to 1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\overset{\to |x+2|}{\sqrt[n]{|x+2|^n}}}{\sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} =$

$\sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \left(\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2\left(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} |x+2| = |x+2| < 1$$

$$-1 < x+2 < 1$$

$$\boxed{-3 < x < -1}$$

Si $x=-3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} \cdot (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{=1} \cdot n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad \text{DV}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie armónica DV

Si $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} \quad \text{serie alternada}$$

Por Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \quad ✓$$

¿es decreciente? ¿$a_n \geq a_{n+1}$?

Asocio a $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ si } -x^2+1<0$$

$$1 < x^2$$

$$1 < |x|$$

$$\underline{x > 1}$$

Luego, a partir de $n=2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$ es decreciente ✓

En $x=-1$ la serie es condicionalmente CV, ya que es CV, pero no ABS. CV ($\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es DV)

Luego, el dominio de CV es: $(-3; -1]$