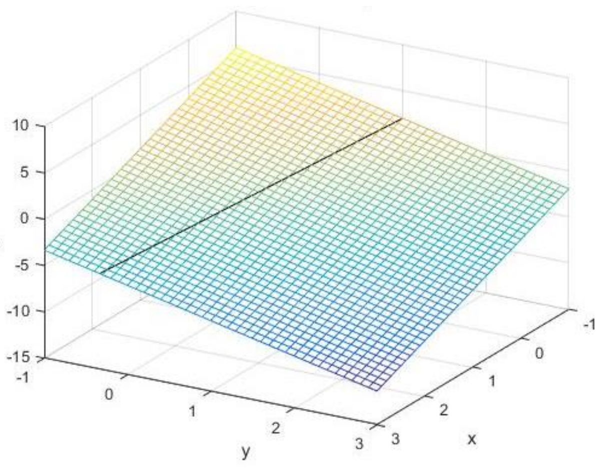
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL TUCUMÁN

RECTA Y PLANO

NOTAS TEÓRICAS
EJERCICIOS Y APLICACIONES



ESP. MARIA ROSA RODRIGUEZ
ESP. GRACIELA ABRAHAM

Repasamos algunos conceptos:

LA RECTA en R^2

Hacemos un breve repaso de LA RECTA en R^2

La ecuación polinómica de primer grado en **x** e **y** es de la forma:

A x +B y +C = 0 **(1)** y representa una recta en el plano.

Existen distintas formas de expresar la ecuación de una recta en el plano.

Si se conoce:

- La pendiente y ordenada al origen: $y = mx + b$ Ecuación Explicita
- La pendiente m y un punto $P_1(x_1, y_1)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Dos puntos de la recta: $P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2, y_2)$: $\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)}$

Otras ecuaciones son:

Ecuación segmentaria: $\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$; a = Abscisa al origen; b =ordenada al origen

Ecuación General o Implícita: $Ax + By + C = 0$

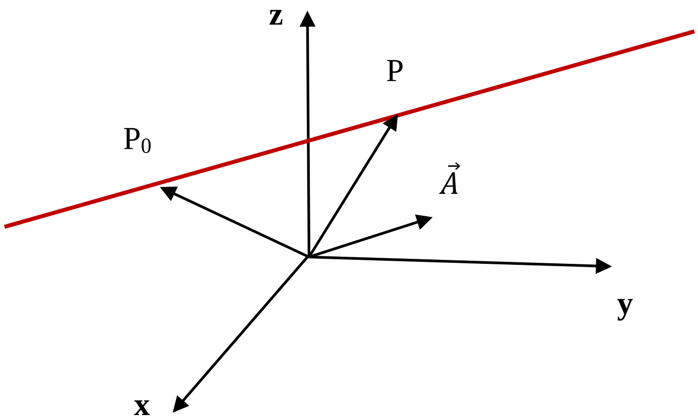
Para determinar:

Ordenada al origen de la recta, se hace “x = 0” en la ecuación de la recta.

Abscisa al origen de la recta, se hace “y = 0” en la ecuación de la recta.

APLICACIONES DE VECTORES

Ecuación vectorial de la Recta en R^3



Consideremos el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un punto genérico $P(x, y, z)$ tracemos una recta cualquiera que tiene la dirección de un vector $\vec{A}(a,b,c)$. Para encontrar la ecuación de la recta, ubicamos los vectores :

$\overline{OP_0} = P_0$ y $\overline{OP} = P$. Observamos que $\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}$. El vector $\overline{P_0P}$ es paralelo a $\vec{A} \Rightarrow \overline{P_0P} = \lambda\vec{A}$.

La Ecuación vectorial de la recta en R^3, determinada por P_0 y la dirección del vector $\vec{A}$, es:

(1) $\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda\vec{A}$, donde λ es el parámetro de la recta. Cuando el parámetro varía desde $-\infty$ *a* ∞, el punto P describe a la recta.

Si escribimos la ecuación (1) en términos de sus componentes, obtenemos:

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a,b,c)$.

Igualando las componentes homólogas, se tiene:

(2) $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

Que son las *ecuaciones paramétricas de la recta en R^3*.

Si en (2) eliminamos el parámetro λ, de cada ecuación obtenemos:

$\dfrac{x - x_0}{a} = \lambda$; $\dfrac{y - y_0}{b} = \lambda$; $\dfrac{z - z_0}{c} = \lambda$. Igualando las tres expresiones, se tiene:

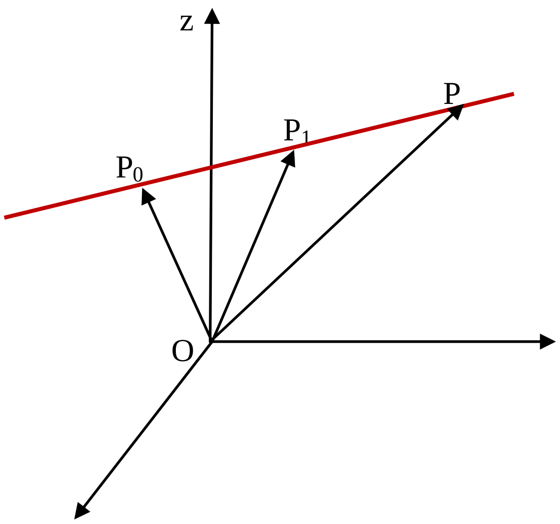
(3) $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ *Ecuaciones cartesianas de la recta en R^3*

<u>Observación</u>: los números a, b, c, se llaman números directores de la recta. Y si llamamos α, β y γ los ángulos que forman el vector $\vec{A}$, con los ejes coordenados. Los cósenos directores de las rectan serían $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|A|} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{|A|} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

Los cósenos directores tienen la propiedad que: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Recta determinada por 2 puntos



Consideramos 2 puntos sobre la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ para encontrar la ecuación de la recta necesitamos conocer el vector dirección de la misma.

Podemos considerar como vector dirección al vector que une P_0 .con P_1, es decir:

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}$$

La ecuación de la recta será:

$\vec{P} = \overrightarrow{P_0} + \lambda(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0})$ Ecuación vectorial de la recta que pasa por 2 puntos.

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \quad (5) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por 2 puntos en R^3.

Si de las ecuaciones (5) eliminamos el parámetro λ, se obtiene

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ecuación. cartesiana de la recta que pasa por 2 puntos en $R^{3.}$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene la dirección de $\vec{A} = (2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,2,-7) \rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{P_0} + \lambda\vec{A} \rightarrow (x, y, z) = (1,2,-7) + \lambda(2,-1,4)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -7 + 4\lambda \end{cases}$$ Ecuación paramétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{4}$$ Ecuación cartesiana

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,-1,5) y (3, 2,2).

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_0} + \lambda(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0})$$

$$(x, y, z) = (2,-1,5) + \lambda(3-2,2+1,2-5)$$

$$(x, y, z) = (2,-1,5) + \lambda(1,3,-3)$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-3}$$

Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos.

Observación:

Si estamos en R^2 o sea que el punto P_0 y el vector A pertenecen al plano XY, la expresión 1 sigue siendo válida y la ecuación 2 se reduce a solo 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$ Ecuación paramétrica de la recta en R^2

Si eliminamos λ queda $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ ecuación cartesiana

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$$

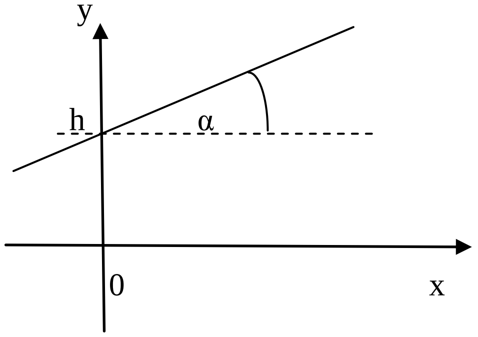
$$bx - ay + (bx_0 + ay_0) = 0$$

Que tiene la forma A x + B y +C = 0: Ecuación general o implícita de la recta en R^2

De la ecuación (a) podemos escribir:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$
$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0$$
$$y = mx + h$$

Donde m = $\frac{b}{a}$: pendiente de la recta, que se define como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta. Es decir: $m = tg\alpha$, y α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo x.



h se llama ordenada al origen : $h = -\frac{b}{a}x_0 + y_0$

Si conocemos 2 puntos $P_0(x_0, y_0)$; $P_1(x_1, y_1)$ *en* R^2 la ecuación 4 sigue siendo valida:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Eliminando λ tenemos: $\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Ecuación cartesiana de la recta que pasa por 2 puntos

Ejemplo: Encontrar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por $P_0(1,2)$ y es paralela al vector $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$$\mathrm{P = P_0 + \lambda A \rightarrow (x, y) = (1,2) + \lambda(2,1)}$$

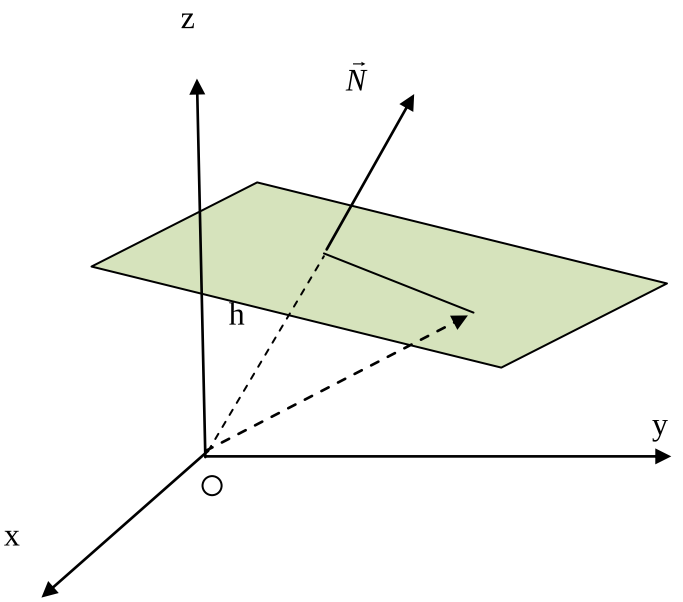
$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$, eliminando el parámetro se tiene $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow 2(y-2) = (x-1)$

$y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ Ecuación explicita.

Ecuación vectorial del plano

Dado un plano, consideramos un vector normal $\vec{N} = (A, B, C)$ al mismo. Para encontrar la ecuación del plano, consideramos un punto genérico P (x, y, z) del plano.

Formamos el vector P, uniendo el origen con el punto P y hacemos el producto escalar de los vectores $\vec{N}$ y $\vec{P}$.



Recordemos que, el producto escalar se puede escribir:

$\vec{N} \cdot \vec{P} = \left|\vec{N}\right| . \, proyeccion_{\vec{N}} \; \vec{P}$.

Si llamamos h $= proyeccion_{\vec{N}} \quad \vec{P}$

h= distancia desde el origen al plano.

$\therefore \vec{N} \cdot \vec{P} = \left|\vec{N}\right| \cdot h$

Como modulo de $\vec{N}$ y h son constantes independientes de $\vec{P}$,

$\left|\vec{N}\right| \cdot h = cte$, que llamamos $\left|\vec{N}\right| \cdot h = D$,

Se llega a la ecuación $\boxed{\vec{N} \cdot \vec{P} = D}$ (1) que es la ecuación vectorial del plano, donde $\vec{N}$ es un vector de modulo cualquiera perpendicular al plano y $\vec{P}$ es un punto genérico.

Si $D = 0 \quad \Rightarrow h = 0$ entonces el plano pasa por el origen y la ecuación es $\vec{N} \cdot \vec{P} = 0$.

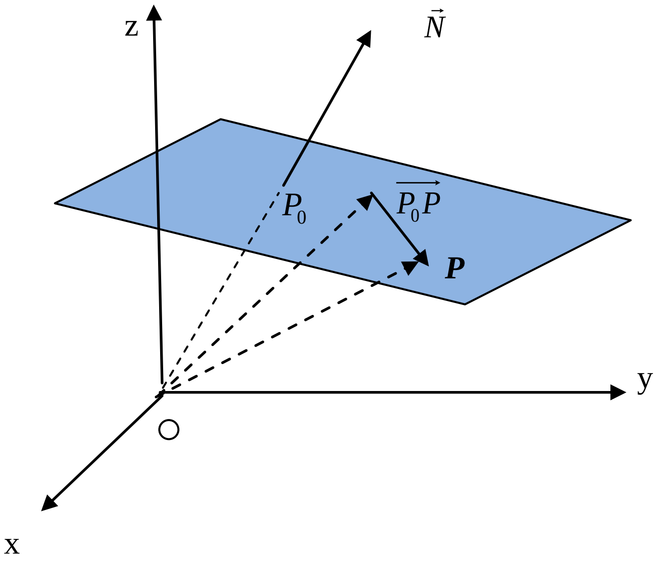
Si $D \neq 0$; su signo depende del sentido del vector $\vec{N}$; pues tomando $-\vec{N}$ en vez de $\vec{N}$; D cambio de signo. Se adopta criterio siguiente. Consideramos $\vec{N}$ dirigido siempre desde el origen hacia el plano, de manera que D resulte positivo.

Por componentes la ecuación (1) queda:

$(A, B, C).(x, y, z) = D$

$\boxed{Ax + By + Cz = D}$ Ecuación cartesiana del plano.

Ecuación general de los planos que pasan por un punto



Para encontrar la ecuación de los planos que pasan por un punto, consideramos un vector normal al plano $\vec{N}=(A,B,C)$, un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y un punto genérico ***P (x, y, z)*** contenidos en el plano. Uniendo el origen con cada punto obtenemos los vectores $\vec{P_0}$ y $\vec{P}$ y formamos el vector $\overrightarrow{P_0P}=\vec{P}-\overrightarrow{P_0}$.

Por lo tanto el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular a $\vec{N}$ o sea $\vec{N}\perp(\vec{P}-\overrightarrow{P_0})$ y esto significa que el producto escalar es cero. Se obtiene:

$\boxed{\vec{N}\cdot(\vec{P}-\overrightarrow{P_0})=0}$ Ecuación general de los planos que pasan por un punto.

Por componentes tenemos:
$$\begin{cases}(A,B,C).(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0\\ (A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\\ Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0\\ Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0\end{cases}$$

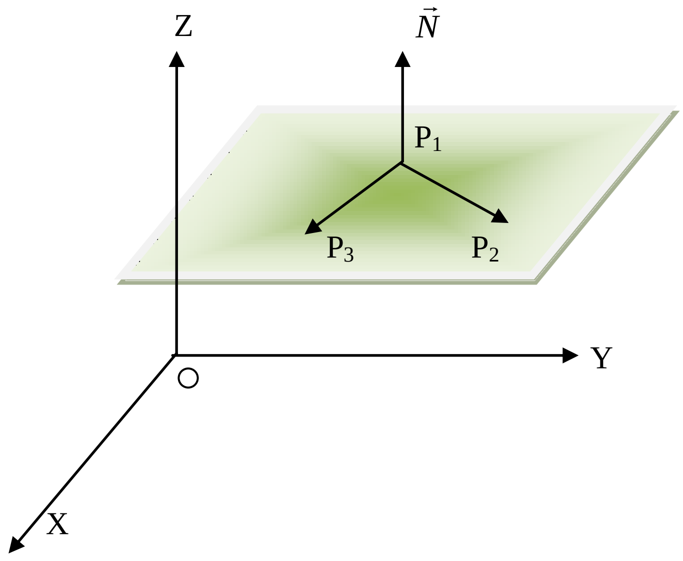
Llamamos $D=Ax_0+By_0+Cz_0$

La ecuación cartesiana del plano que pasa por un punto es:

$$\boxed{Ax+By+Cz=D}$$

Ecuación de un plano determinado por tres puntos

Si conocemos tres puntos del plano $P_1(x_1,y_1,z_1);P_2(x_2,y_2,z_2);P_3(x_3,y_3,z_3)$, para encontrar la ecuación del plano necesitamos determinar un vector normal al plano.



Si unimos el punto P_1 con los puntos P_2 y P_3 formamos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ y podemos conocer un vector normal del plano haciendo el producto vectorial de los dos vectores contenidos en el plano.

Es decir:

$$\vec{N} = (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3})$$

$$\vec{N} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_1)$$

Entonces usando la ecuación $\boxed{\vec{N} \cdot (\vec{P} - \overrightarrow{P_0}) = 0}$ tenemos:

$\vec{N} \cdot (\vec{P} - \vec{P}_1) = 0$ y remplazando el vector normal se obtiene:

$\boxed{\left[(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_1)\ \right] \cdot (\vec{P} - \vec{P}_1) = 0}$ Ecuación del plano determinado por tres puntos.

Se puede comprobar que esta expresión se puede escribir, mediante el determinante de tercer orden siguiente:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ Ecuación cartesiana del plano que pasa por tres puntos.

Ejemplos:

1- Encontrar la ecuación del plano, perpendicular al vector (2,-1,2) y cuya distancia al origen es 6.

La ecuación del plano es:

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = D \qquad como \quad h = 6 \quad y \quad D = |\vec{N}|.h$$

$$(2,-1,2).\,(x,y,z) = D$$

Calculamos D

$$D = \sqrt{4+1+4}.6$$

$D = 18$, la ecuación del plano es:

$$2x - y + 2z = 18$$

2- Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos (1 , 0, 3); (-2,-4, 5) y

(2,-1,3).

Elegimos un punto como punto de paso. P_1 (1 , 0, 3) y formamos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$.

Para encontrar la ecuación cartesiana, calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ -2-1 & -4-0 & 5-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante, desarrollando por los elementos de la primera fila, se llega a la ecuación:

$$2(x-1)+2\,y+7(z-3)=0 \qquad con \qquad \vec{N}=(2,2,7),$$

$$\boxed{2x+2y+7z=23}$$

3- Determinar la ecuación del plano que pasa por (-1,0,4) y es $\perp$ al vector (5,3,-2)

5 (x+1) + 3 y-0) -2 (z - 4) = 0

La ecuación queda: **5x + 3y -2z + 13=0**

Ecuaciones de los planos coordenados

Sea el plano de ecuación A x + B y + C z = D (1) veamos los siguientes casos:

1. Si $C=0$; $A=0$; $B\neq 0$ y $D\neq 0$, la ecuación (1) queda $BY = D \Rightarrow Y = \frac{D}{B} = cte = h$. La ecuación Y = h, es la ecuación de un plano // al plano XZ. Si $h=0$ $ó$ $D=0 \Rightarrow$ **Y = 0** ***Ecuación del plano XZ.***

2. Si $C\neq 0$, $D\neq 0$; $A=0$ y $B=0$ la ecuación (1) queda $C\,Z = D$; $Z = \frac{D}{C} = k\,(cte)$; La ecuación Z = k, es la ecuación de un plano // al plano XY; y **Z = 0** ***Ecuación del plano XY.***

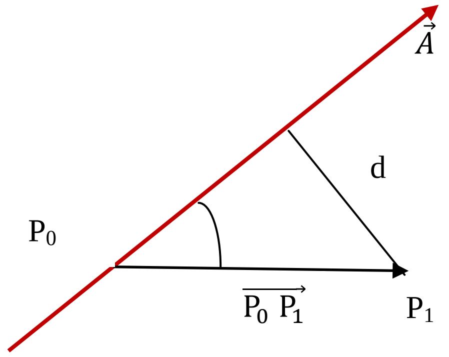
3. Si $A\neq 0$, $B=C=0$; $D\neq 0$. La ecuación (1) queda $X = \frac{D}{A} = cte = t$; *entonces*

X = t Ecuación de un plano paralelo al plano YZ.

Por lo tanto **X = 0:** ***Ecuación del plano YZ***

Distancia de un punto a una recta

Dada la recta $\vec{P}=\vec{P}_0+\lambda\vec{A}$ y un punto P_1 la distancia d del punto P_1 a la recta se obtiene de la siguiente manera:



Formamos el triangulo de la figura y vemos que:

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|.sen\alpha$$

Como para obtener α, necesitamos conocer el ángulo α, podemos transformar la ecuación multiplicando y dividiendo por $|\vec{A}|$.

$$\therefore \quad \boxed{d=\frac{\left|(\vec{P}_1-\vec{P}_0)\times\vec{A}\right|}{|\vec{A}|}}$$

Donde $\vec{A}, \vec{P}_0$ y $\vec{P}_1$, es todo conocido.

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P_1=(-3,2,1)$ a la recta $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{-1}$

$P_0=(-1,3,1);\quad \vec{A}=(-2,4,1);$

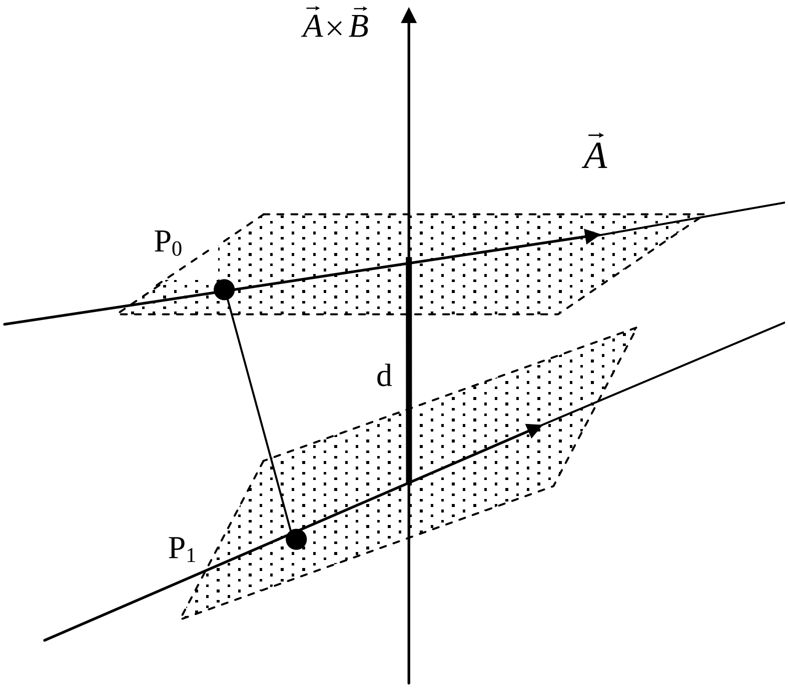
$$\vec{P}_1-\vec{P}_0=(-3+1,2-3,1-1)$$
$$\vec{P}_1-\vec{P}_0=(-2,-1,0)$$

$$(\vec{P}_1-\vec{P}_0)\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 0\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}-10\vec{k}$$
$$=(1,-2,-10)$$

$$\left|(\vec{P}_1-\vec{P}_0)\times\vec{A}\right|=\sqrt{1+4+100}=\sqrt{105}$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21},\quad luego\, d=\sqrt{\frac{105}{21}}=\sqrt{5};\quad d=\sqrt{5}$$

Mínima distancia entre dos rectas alabeadas



Sean las rectas $\vec{P}=\vec{P}_0+\lambda\vec{A}$ y $\vec{P}=\vec{P}_1+\lambda\vec{B}$

La mínima distancia entre las dos rectas es el segmento ***d*,** de la perpendicular común a las dos rectas.

Es por lo tanto la proyección del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$, sobre la dirección perpendicular a las dos rectas, que está dada por el vector $\vec{A}\times\vec{B}$.

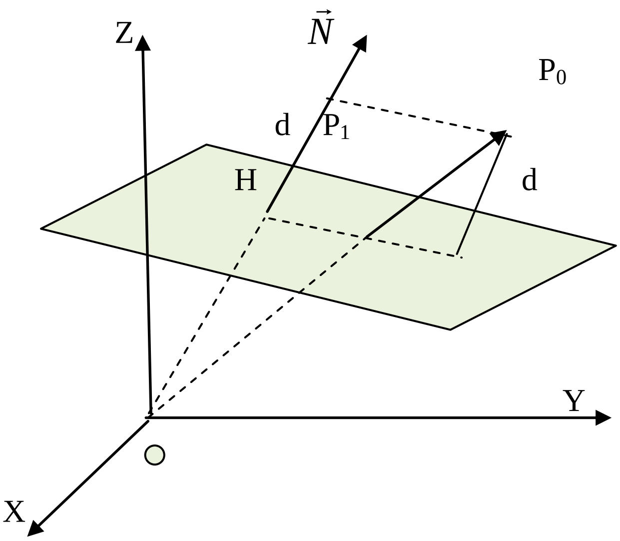
Entonces: $d = proyec_{\vec{A}\times\vec{B}}(\vec{P}_1-\vec{P}_0)$ y recordando que $proyec_{\vec{v}}\ \vec{u}=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$, se llega a :

$$d=\frac{(\vec{A}\times\vec{B})\bullet(\vec{P}_1-\vec{P}_0)}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$ ***Mínima distancia entre las dos rectas***

Distancia de un punto al plano

Dado un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y un plano de ecuación $\vec{N}\cdot\vec{X}-D=0$.

La distancia de un punto P_0; a un plano $\vec{N}\cdot\vec{P}-D=0$ es igual al valor que toma la ecuación del plano particularizada para el punto P_0, dividido por el modulo del vector normal. Es decir



$$d=\frac{\vec{N}\cdot\vec{P}_0-D}{\left|\vec{N}\right|}\quad(1)$$

Para hallar la distancia d: distancia del punto P_0 al plano, proyectamos el vector $\overrightarrow{P_0}$, sobre el vector $\vec{N}$.

La distancia d buscada es la diferencia entre $\overrightarrow{OP_1}$ y OH = h que es la distancia del origen al plano.

Vimos que $|\vec{N}| \cdot h = D \Rightarrow h = \dfrac{D}{|\vec{N}|}$ = OH y que $proy_{\vec{N}}\ \vec{P}_0 = \dfrac{\overrightarrow{N} \cdot \vec{P}_0}{|\overrightarrow{N}|}$.

Como además $Proy_{\vec{N}}\ \vec{P}_0 = h + d \Rightarrow\ d = proy_{\vec{N}}\ \vec{P}_0 - h$. Remplazando se tiene:

$$d = \frac{\overrightarrow{N} \cdot \vec{P}_0}{|\overrightarrow{N}|} - \frac{D}{|\overrightarrow{N}|} = \frac{\overrightarrow{N} \cdot \vec{P}_0 - D}{|\overrightarrow{N}|}$$, que es la expresión (1)

Para fijar un signo a esta distancia siempre se mide desde el plano al punto, en el dibujo desde H a P_1, y se considera signo positivo, cuando este sentido coincida con el del vector $\vec{N}$ y negativo en caso contrario.

Paralelismo, perpendicularidad y ángulo

Consideremos las rectas R$_1$) $\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{A}_1$ y R$_2$) $\vec{P} = \vec{P}_1 + \lambda \vec{A}_2$ y los planos π_1) $\vec{N}_1 \cdot \vec{P} = D_1$ y π_2) $\vec{N}_2 . \vec{P} = D_2$

De acuerdo a lo que vimos en la condición de paralelismo y perpendicularidad entre vectores, se tiene que:

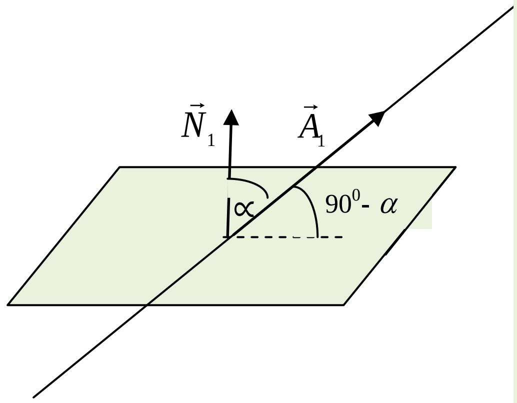
El ángulo entre las rectas es el ángulo entre los vectores dirección de las rectas:

- $R_1 // R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{A}_2$
- $R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$

El ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales a ambos planos:

- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 // \vec{N}_2$
- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$

El ángulo entre la recta R_1 y el plano π_1 es el ángulo complementario del que forman el vector dirección de la recta y el vector normal al plano.



Dado que $\propto\, = \prec (\vec{N}_1, \vec{A}_1)$, entonces el ángulo que forma la recta con el plano es 90^0- α .

Como $\cos \propto\, = \dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{A_1}}{|\vec{N}_1||\vec{A}_1|}$ = sen (90º- $\propto$) .

Entonces: $R_1 \,//\, \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{N}_1$

$R_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \,//\, \vec{N}_1$

Ejemplos:

1. Hallar la distancia del punto (6,3,-2) al plano 2x-4y+z=2

$\vec{N} = (2,-4,1)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1$

$$d = \frac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_0} - D}{|\vec{N}|} \quad ; \quad |\vec{N}| = \sqrt{4+16+1}$$

$$d = \frac{2.6 - 4.3 - 2 - 2}{\sqrt{21}} \rightarrow d = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$

El signo de d es positivo cuando al medirla desde el plano al punto, este sentido coincida con el del vector normal

2. Hallar la mínima distancia entre las rectas.

$r_1)\ \vec{P} = (1,2,-3) + \lambda(2,1,-1)$ $\qquad$ $r_2)\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

$\vec{P} = (2,2,-1) + \lambda(3,3,4)$

$$d = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0})}{|\vec{A}\times\vec{B}|} \qquad \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0} = (2,2,-1) - (1,2,-3) = (1,0,2)$$
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}) = (7,-11,3) \cdot (1,0,2)$$
$$= 7 + 6 = 13$$
$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{7^2 + 11^2 + 9}$$
$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{49 + 121 + 9} = \sqrt{179}$$
$$d = \frac{13}{\sqrt{179}}$$

3. Encontrar la ecuación del plano $\perp$ al vector $(2,-1,2)$ y cuya distancia al origen es 6

$$2x - y + 2z = D$$
$$D = \left|\vec{N}\right|.6$$
$$D = \sqrt{4+1+4}.6$$
$$D = 18$$

4. Encontrar la ecuación del plano que pasa por (1,0,3); (-2,-4,5) y (2,-1,3)

   Remplazamos en la ecuación cartesiana del plano $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+2 \\ -2-1 & -4-0 & 5-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 3z - 9 + 4z + 11 + 2x - 2 = 0$$

La ecuación es: $2x + 2y + 7z - 23 = 0$

5. Determinar la ecuación del plano que pasa por (-1,0,4) y es $\perp$ al vector (5,3,-2)

$$5(x+1) + 3(y-0) + 4(z-4) = 0$$
$$5x + 3y + 4z = 11$$

6. Encontrar la ecuación de la recta intersección de los planos $\pi_1)$ 2x + y – z = 3 y $\pi_2)$ 3 x + 2 y + 2 z = 0.

   Para encontrar la ecuación formamos el sistema con las dos ecuaciones de los planos

   $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y lo resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim (1) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim (2) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim (3) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 7 & -9 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right)$$

(1) $F_2 - F_1(-2)$, (2) $F_2(-1)$, (3) $F_1 - F_2(-2)$

Escribimos el sistema equivalente: $\begin{cases} y + 7z = -9 \\ x - 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -9 - 7z \\ x = 6 + 4z \end{cases}$

Llamamos $z = \lambda$ y obtenemos:

$\begin{cases} x = 6 + 4\lambda \\ y = 9 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ Ecuaciones paramétricas de la recta, con

$\vec{P}_0 = (6, 9, 0) \quad y \quad \vec{A} = (4, -7, 1)$

7. Encontrar el punto de intersección de la recta $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{3}$, con el plano

$2x - 3y + 5z = 2$.

Para encontrar el punto despejamos x e y de la recta en función de z y remplazamos en la ecuación del plano:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow x - 2 = \frac{4}{3}z \Rightarrow x = \frac{4}{3}z + 2$$

$$\frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{3}z - 1$$

$2\left(\dfrac{4}{3}z + 2\right) - 3\left(\dfrac{-2}{3}z - 1\right) + 5z = 2$, de donde se obtiene:

$z = 6 / 29$, remplazando en x e y, se tiene:

$x = 8 / 29$, $y = -41 / 29$. El punto de intersección es $(8/29, -41/29, 6/29)$

Para Recordar:

Sistema de Coordenadas Rectangulares en el Espacio.

1. 1.-Planos coordenados

Plano α**:** Determinado por las rectas ***x′ x*** e ***y′ y***, al que denotaremos como el **plano *xy*.**

Plano β**:** Determinado por las rectas ***y′ y*** y ***z′ z***, al que denotaremos como el **plano *yz*.**

Plano δ **:** Determinado por las rectas ***x′ x***α y ***z′ z***, al que denotaremos como el **plano xz.** β

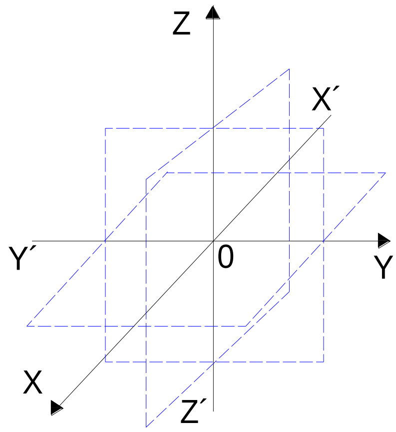


Gráfico Nº 4: Planos Coordenados, Ejes Coordenados

1. 2.- Ejes Coordenados

Eje *x′ x***:** determinado por la intersección de los planos **xy** y **xz** ,lo llamamos **eje x**.

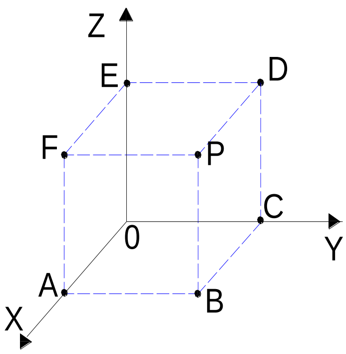
Eje *yy ′***:** determinado por la intersección de los planos xy e yz, lo llamamos **eje y.**

Eje *z′ z*: determinado por la intersección de los planos xz y zy, lo llamamos **eje z.**

1. 3.- Origen de Coordenadas

O (0 , 0) es el punto intersección de los 3 planos coordenados. Los planos coordenados dividen el espacio en 8 subespacios llamados octantes, el 1º octante está formado por los tres semiejes positivos.

Lo más usual es representar este sistema por los 3 semiejes



A partir de la figura anterior hallaremos las coordenadas del punto P en el espacio, definidas por la distancia de P a cada uno de los planos coordenados, medidas sobre los ejes x, y, z.

X : distancia del punto P al plano yz se llama ***abscisa del punto***.

Y: distancia del punto P al plano xz se llama ***ordenada del punto.***

Z: distancia del punto P al plano xy se llama ***cota del punto*.**

1. 4.-Situación de puntos en el espacio

Ejemplo Nº 1: Para situar el punto P (2,3,5) en el espacio, a partir del origen marcamos: 2 unidades sobre el eje **x** , 3 unidades sobre el eje **y.** Luego levantamos una perpendicular al plano **xy** de 5 unidades paralela al eje **z** y de este modo queda situado P (2,3,5).

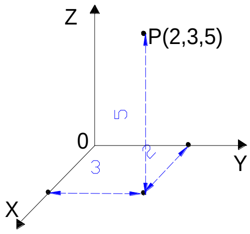


Gráfico Nº 6: Punto P (2 , 3, 5)

Ejemplo Nº 2:

En cuanto a los siguientes puntos sabemos que sus coordenadas están sobre los ejes, como se observa en el gráfico nº 7 :

El punto A(a,0,0) es un punto sobre el eje x

El punto B (0,b,0) es un punto sobre el eje y

El punto C(0,0,c) es un punto sobre el eje z.

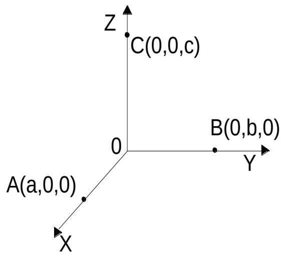


Gráfico Nº 7: Ubicación de los puntos A, B y C.

2.- Ecuaciones de Planos

La ecuación de la forma A **x** + B **y** +C **z** + D = 0 representa un plano. A continuación se mostraran algunos casos particulares:

a) Las ecuaciones de los Planos coordenados:

- La ecuación del plano coordenado xy es **z = 0** (todos los puntos ubicados en el plano xy tienen *cota* 0).
- La ecuación del plano coordenado xz es y = 0 (todos los puntos ubicados en el plano xz tienen *ordenada* 0).
- La ecuación del plano coordenado yz es x = 0 (todos los puntos ubicados en el plano yz tienen *abscisa* 0).

Es decir, que los puntos que tienen una coordenada cero están ubicados sobre un plano coordenado (ver gráfico Nº 8):

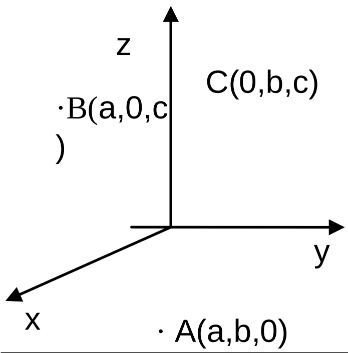


Gráfico Nº 8: Ubicación de los puntos que tienen una coordenada cero.

A(a, b, 0) es un punto del plano **xy.,** B(a, 0, c) es un punto del plano **xz.,** C(0,b , c) es un punto del plano **yz**

b) A continuación se consideraran las ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados:

- Las ecuaciones de los planos paralelos al plano coordenado **XY** son:

z = c, z = constante. Todos los puntos de este plano tienen *cota* **z = c** .

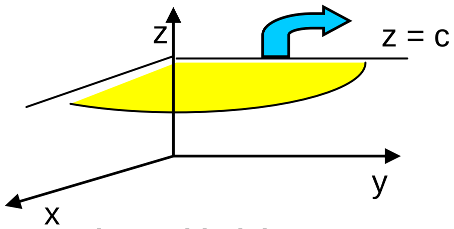


Gráfico Nº 9: Plano paralelo al plano XY

- La ecuación de un **plano paralelo** al plano coordenado **XZ** es **:**

y = b , con b constante.

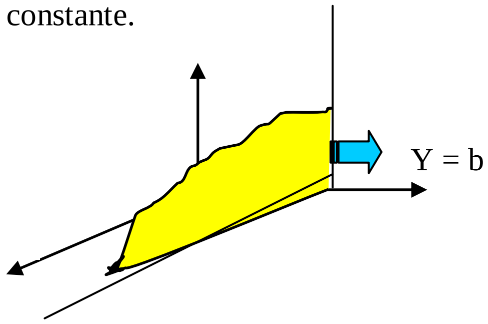


Gráfico Nº 10: Plano paralelo al plano XZ

La ecuación de un **plano paralelo** al plano coordenado **YZ** es**:**

x = a , cuya intersección con el eje x es el punto (a,0,0).

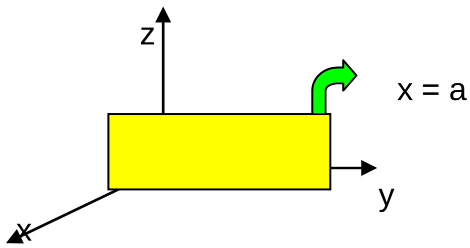


Gráfico Nº 11: Plano paralelo al plano YZ

En síntesis, las ecuaciones de los tres planos obtenidos son:

Plano	Paralelo al Plano Coordenado
X = a	**YZ**
Y = b	**XZ**
Z = c	**XY**