

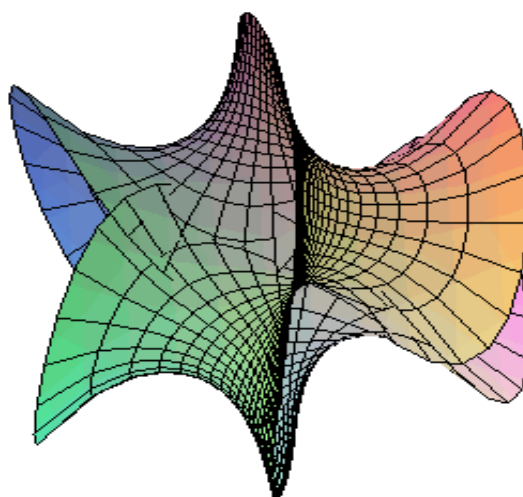


**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL TUCUMÁN**

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

ECUACION DE SEGUNDO GRADO EN TRES VARIABLES

NOTAS TEÓRICAS



***ESP. GRACIELA ABRAHAM
LIC. AÍDA FERNÁNDEZ***

ECUACION GENERAL DE 2º GRADO EN TRES VARIABLES

Superficies de Segundo Orden

Una superficie se representa por una ecuación que relaciona entre sí las coordenadas x, y, z de un punto del espacio.

Definición:

Una cuádrica es una superficie cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas es un polinomio de segundo grado en las tres variables x, y, z igualado a cero.

La expresión analítica de una cuádrica es:

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Las Cuádricas son la generalización, al espacio, de las cónicas. Al estudiar éstas, vimos que sus ecuaciones pueden ser reducidas mediante rotación y/o traslación de ejes.

Al efectuar una conveniente rotación de ejes, ésta puede hacer desaparecer los términos en dos variables y algún término cuadrático, mientras que una traslación permite eliminar los términos lineales de la ecuación (1).

Luego de ambas transformaciones, resulta:

$$(2) \quad A^*x^2 + B^*y^2 + C^*z^2 + J = 0 \qquad \text{ó} \qquad (3) \quad A^*x^2 + B^*y^2 + l^*z = 0$$

Llamadas formas reducidas de la ecuación de una cuádrica.

Las superficies que responden a una ecuación como la (2) son simétricas con respecto al origen y a cada uno de los ejes coordenados. Dichas superficies se llaman **Cuádricas con centro**.

Las superficies representadas por ecuaciones del tipo (3) carecen de centro de simetría y se llaman **Cuádricas sin centro**.

Clasificación y análisis de las Cuádricas

La naturaleza de una superficie depende de los coeficientes de la ecuación que la represente, de los cuales uno o más pueden ser ceros.

Para clasificar las Cuádricas y efectuar un análisis de cada una de ellas, debemos previamente establecer el enfoque dado al estudio de las superficies, el cual se basa particularmente en:

- Intersecciones con los ejes coordenados.
- Trazas sobre los planos coordenados.
- Simetría respecto a los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen.

- Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
- Extensión de la superficie.

Definiciones:

La intersección de una superficie con un eje coordenado es la coordenada correspondiente al punto de intersección de la superficie y el eje coordenado.

La traza de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Sección plana es la curva intersección de la superficie con un plano paralelo a los planos coordenados.

De acuerdo al tipo de ecuación que represente a la superficie, éstas se clasifican en: esférica, cilíndrica, elipsoide.

Superficie esférica

Definición: Es el lugar geométrico de los puntos de R^3 que equidistan de un punto fijo. La distancia se llama radio y el punto fijo se llama centro.

Si $C(h, k, l)$ es el centro y R es el radio, la ecuación se escribe como:

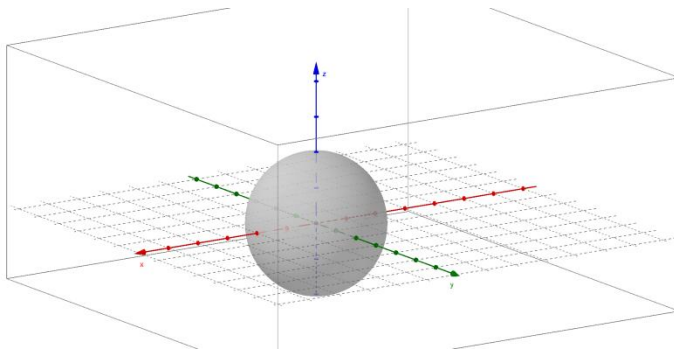
$$(4) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = R^2$$

y en forma general:

$$(5) \quad x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Observamos que ésta es un caso particular de la (1) y para determinar las coordenadas del centro se completan cuadrados en la (5) para llevar a la forma (4).

La sección plana de una esfera es una circunferencia cuya ecuación se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la superficie esférica y el plano.

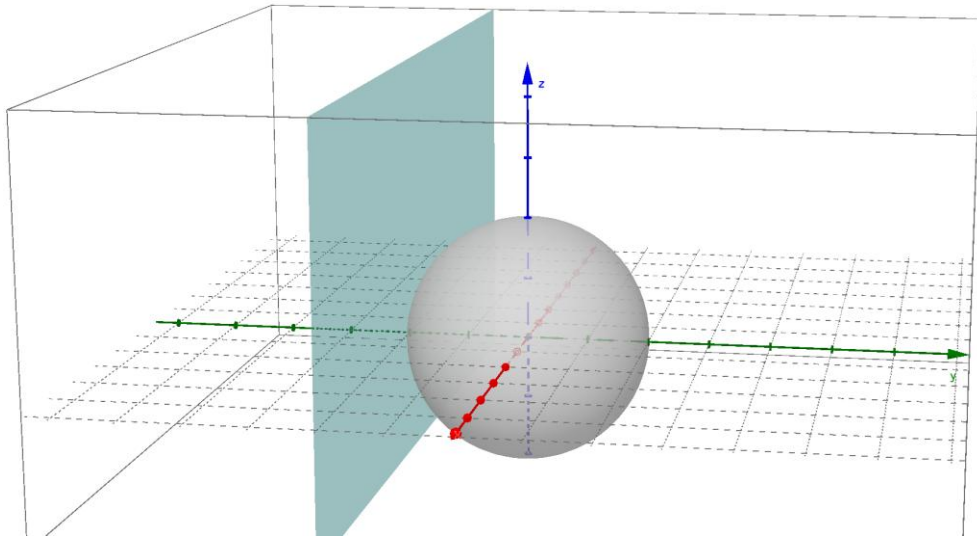


Así, la sección plana obtenida por la intersección de la superficie esférica con el plano $z = k$ se expresa:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = k \end{cases}$$

k : distancia del plano al origen de coordenadas.

Del sistema resulta: $x^2 + y^2 = R^2 - k^2$ que corresponde a la ecuación de una circunferencia (situada en $z = k$)



Si la intersección de la superficie esférica con el plano es un punto, el plano es tangente a la superficie y es perpendicular al radio en ese punto, que se llama punto de tangencia.

Para escribir la ecuación de este plano tangente, llamamos P_0 al punto de tangencia:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $C(h, k, l)$; $\overrightarrow{CP_0} = (x_0 - h; y_0 - k; z_0 - l)$

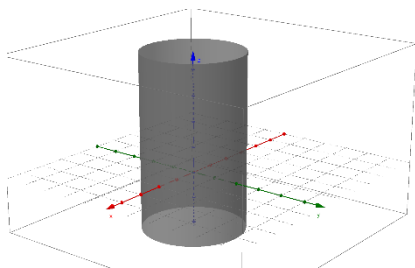
El vector $\overrightarrow{CP_0}$ es perpendicular al plano y como P_0 pertenece a éste, la ecuación de él puede escribirse:

$$(x_0 - h)(x - x_0) + (y_0 - k)(y - y_0) + (z_0 - l)(z - z_0) = 0$$

Que es la ecuación del plano tangente a la superficie esférica en $P_0(x_0, y_0, z_0)$. También puede obtenerse por desdoblamiento de la ecuación de dicha superficie.

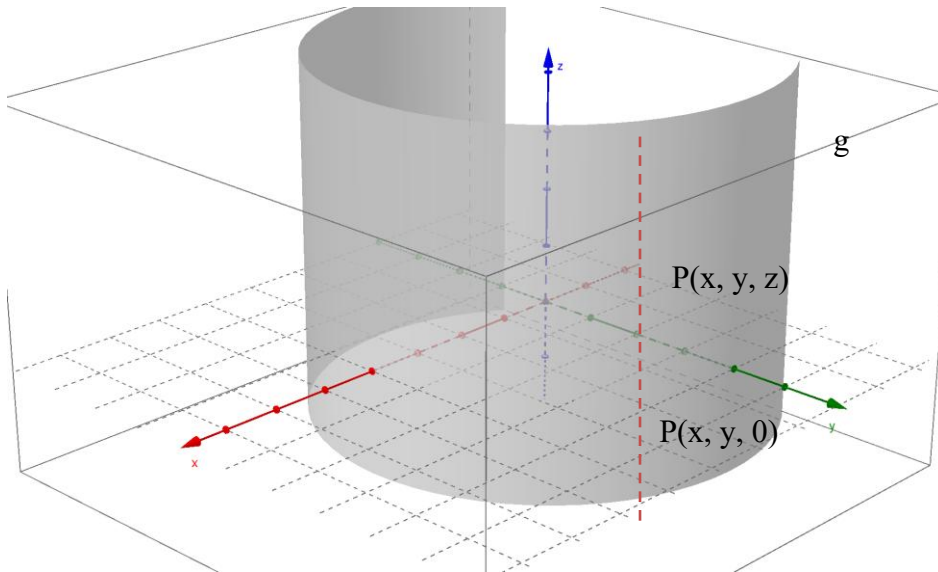
Superficie cilíndrica

Definición : Es la superficie lugar geométrico de las sucesivas posiciones de una recta, llamada generatriz de la superficie, que se desplaza paralelamente a sí misma, pasando por los infinitos puntos de una curva fija dada, llamada directriz.



Una ecuación que contenga dos variables representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son paralelas al eje de la variable ausente. La directriz tiene la misma ecuación que la superficie y está sobre el plano coordenado que es perpendicular a las generatrices de la superficie.

Para simplificar nuestro estudio, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la curva directriz está contenida en uno de los planos coordenados (por ejemplo el plano x, y), entonces su ecuación puede escribirse de la forma: $f(x, y) = 0; \quad z = 0$.



Sean además a, b y c , los números directores de la recta generatriz (g). Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la generatriz y $P'(x', y', 0)$ es un punto que pertenece a la directriz y a la generatriz, la ecuación de la recta g es: (6) $\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z}{c}$

Como $P'(x', y', 0)$ pertenece también a la curva directriz verifica su ecuación $f(x, y) = 0$ y podemos escribir: $f(x', y') = 0; \quad z' = 0$ (7)

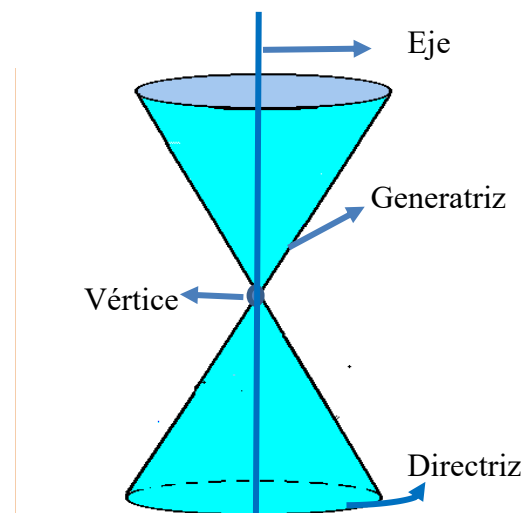
Las ecuaciones (6) y (7) constituyen un sistema cuya solución nos conduce a la ecuación en las variables x, y, z que será la de una superficie cilíndrica.

Si la directriz de una superficie cilíndrica es una circunferencia, la superficie se llama circular.

Del mismo modo tenemos superficies cilíndricas, parabólicas, elípticas, hiperbólicas

Superficie cónica

Es una superficie generada por una recta (llamada **generatriz**) que se mueve apoyándose en una curva fija (llamada **directriz**) y que pasa por un punto fijo (llamado **vértice**) no contenido en el plano de esa curva. El vértice divide a la superficie en dos porciones distintas, cada una de las cuales es una hoja o rama de la superficie cónica.



Una ecuación representa una superficie cónica con vértice en el origen si y sólo si es homogénea en las tres variables x, y, z y es de grado no menor que dos.

✱ Recordemos que: una ecuación en dos o más variables es homogénea, si todos sus términos son del mismo grado.

CUÁDRICAS

Clasificamos y analizamos ahora las Cuádricas con centro, representadas por la ecuación (2). En ésta consideramos todos los coeficientes diferentes de cero, podemos entonces escribir la (2) en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8)$$

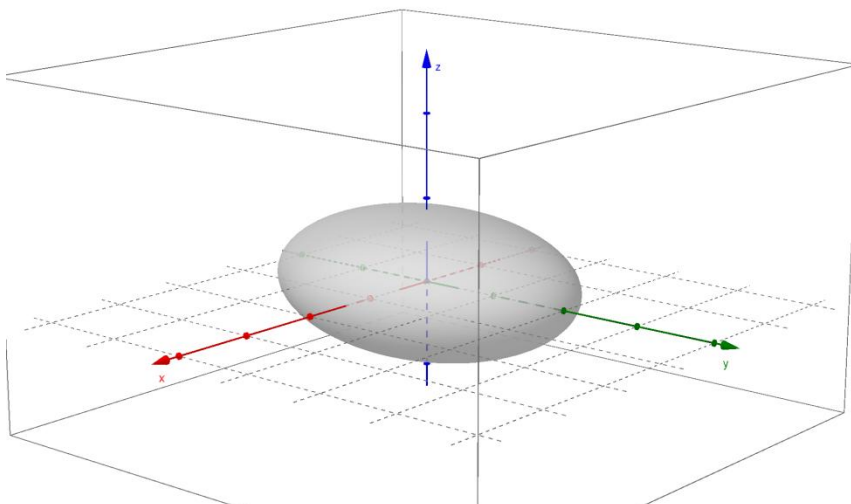
de la cual se deduce que cada cuádrlica con centro tiene tres planos de simetría (los planos coordenadas) llamados planos principales , tres ejes de simetría coordenadas (llamados ejes principales) y un centro de simetría que es el origen centro de la superficie .

Si todos los coeficientes de la (8) son negativos no hay lugar geométrico. Solamente consideramos tres casos -.

- a) Todos los coeficientes son positivos (elipsoide)
- b) Dos coeficientes positivos y uno negativo (hiperboloide de una hoja)
- c) Un coeficiente positivo y dos negativos (hiperboloide de dos hojas)

Elipsoide

La forma canónica de la ecuación de un elipsoide es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Las intersecciones con los ejes coordenadas son: $\pm a, \pm b, \pm c$ respectivamente.

Los seis puntos de intersección del elipsoide con los ejes coordenadas se llaman vértices. Todas las trazas sobre los planos coordenadas son elipses y las secciones sobre los planos paralelos a los planos coordenados son elipses dentro de los límites de la superficie, que es cerrada.

Si dos cualquiera de los coeficientes son iguales, la superficie se llama elipsoide de revolución.

Si los tres coeficientes son iguales, se obtiene una superficie esférica.

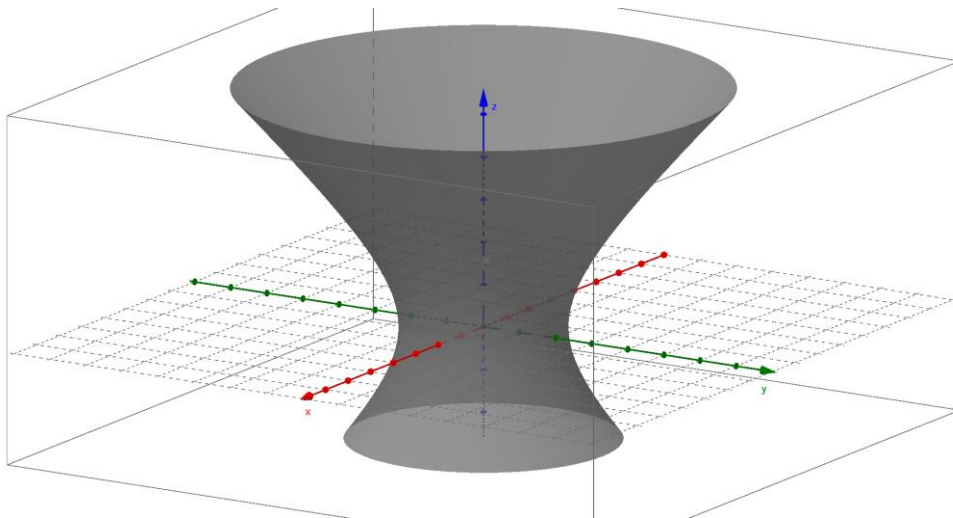


Un ejemplo real es una Pelota de Rugby

Hiperboloide de una hoja

Una forma canónica de la ecuación de éste es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Otras formas canónicas

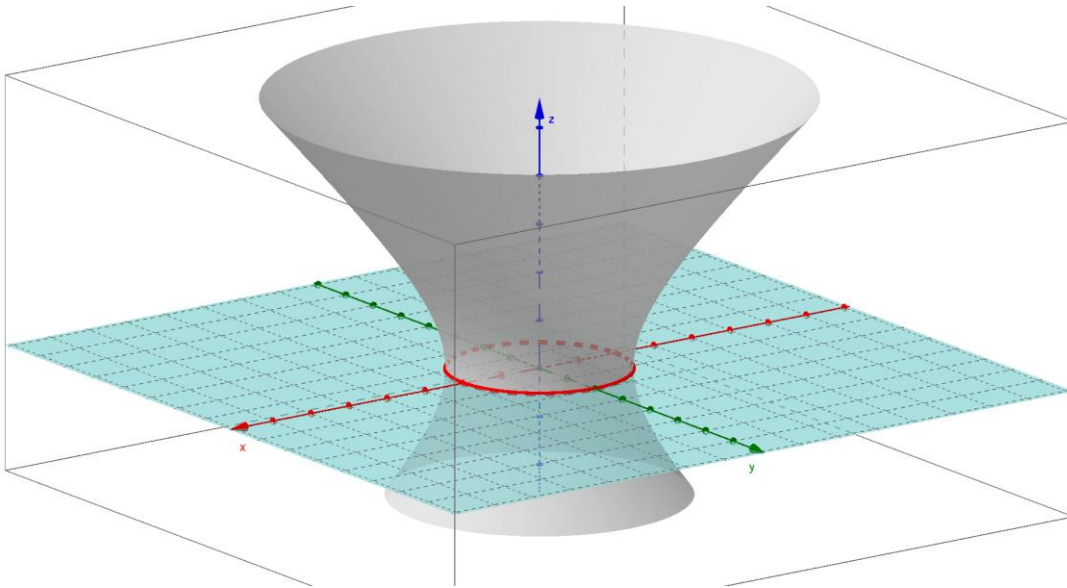
$$\text{son: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



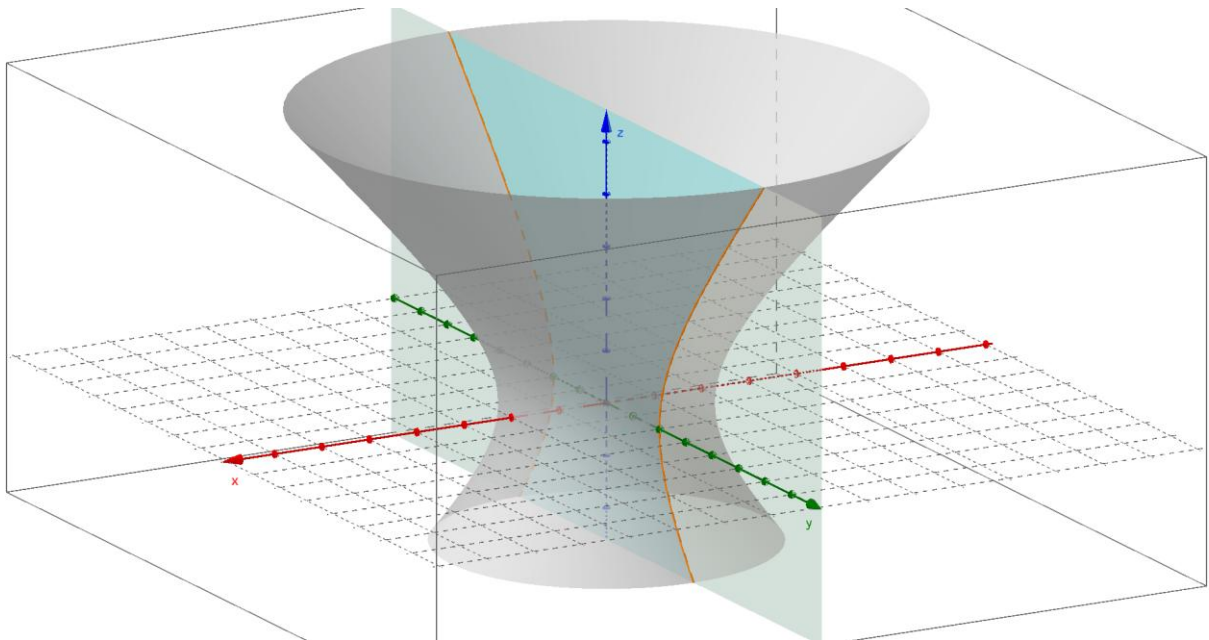
Las intersecciones con los ejes x e y son $\pm a$ y $\pm b$ respectivamente.

No hay intersecciones con el eje z . Las trazas sobre los planos coordenadas son:

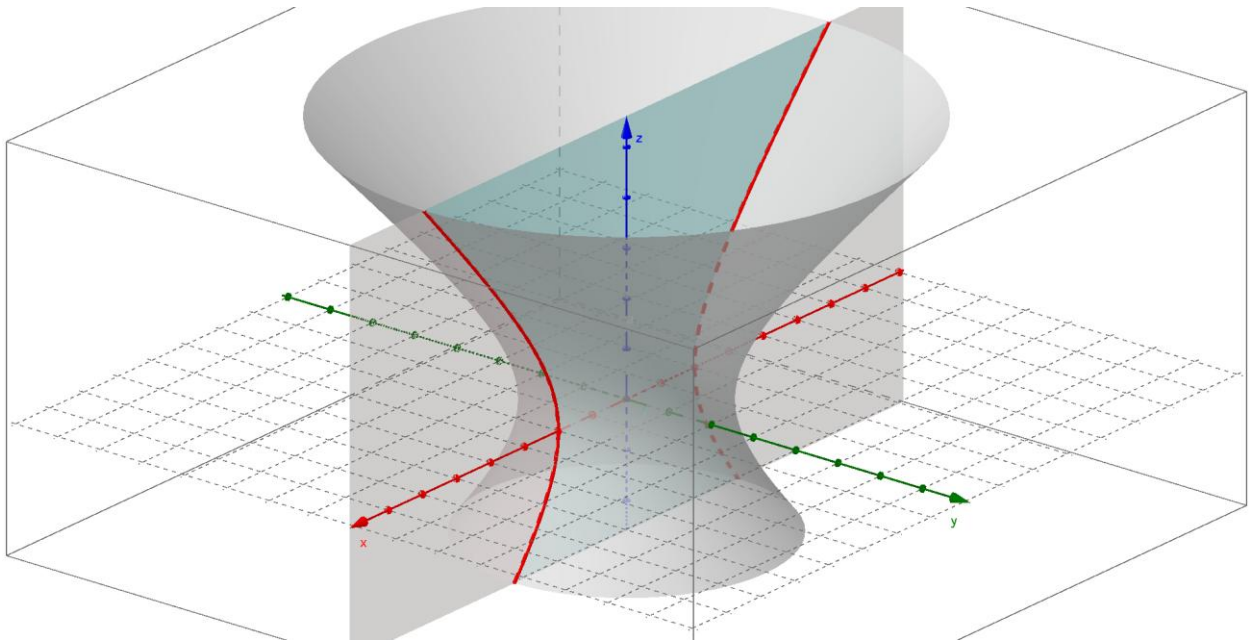
Con el plano xy ($z = 0$), la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Con el plano y z ($x = 0$), la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Con el plano x z ($y = 0$), la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes de coordenadas y al origen.

Las secciones planas, por planos paralelos al XY, de ecuación $z = k$ son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1+k^2}{c^2}, \quad z = k$$

En la cual se observa que a medida que k aumenta de valor, las elipses aumentan de tamaño.

Además, la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente.

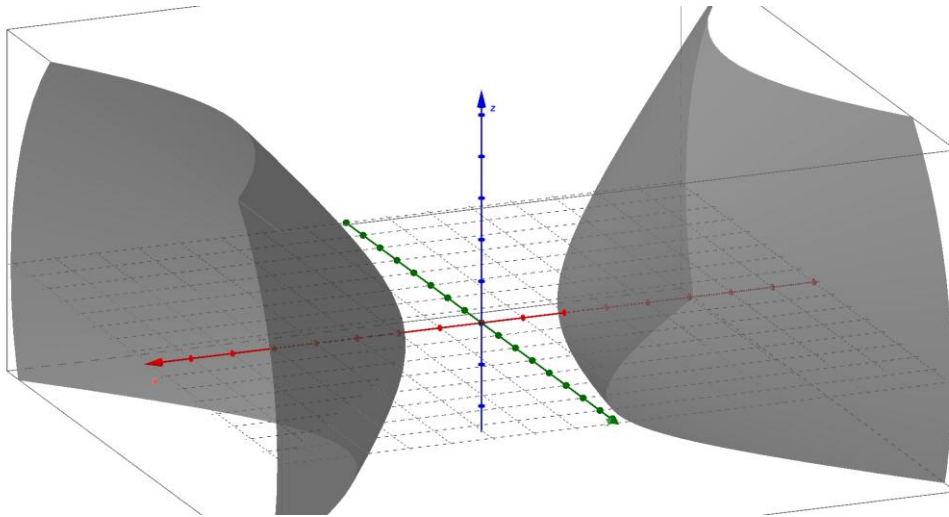


Algunos ejemplos de
hiperboloides en la
vida real

Hiperboloide de dos hojas

La forma canónica de la ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hay otras dos formas canónicas que se analizan del mismo modo que ésta.

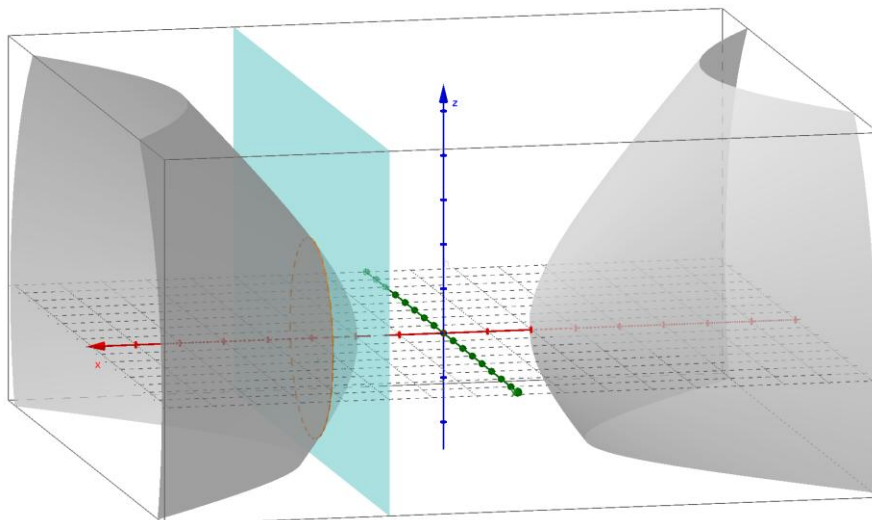


Las intersecciones con el eje x son $\pm a$. No hay intersecciones con el eje y ni con el eje z. Las trazas sobre los planos XY y XZ son respectivamente las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad y = 0$$

No hay trazas sobre el plano YZ. La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

Las secciones con planos paralelos al YZ son las elipses $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2 - 1}{a^2}, \quad x = k$



Si $k = \pm a$ se tiene los puntos de intersección con el eje x

Si $-a < k < a$ no hay lugar geométrico. Por lo tanto, la superficie consta de dos ramas que se extienden indefinidamente



Ejemplo cotidiano de hiperboloide

Cuádricas sin centro

Están representadas por ecuaciones del tipo (3), en la cual todos los coeficientes son distintos de cero. La ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$(8) \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Llamada forma canónica de una superficie cuádrica sin centro. De la ecuación (8) se deduce que las Cuádricas sin centro tienen dos planos de simetría, llamados planos principales y un eje de simetría llamado eje principal.

De acuerdo a las distintas combinaciones de signos de la ecuación (8), podemos diferenciar dos tipos de cuádricas sin centro:

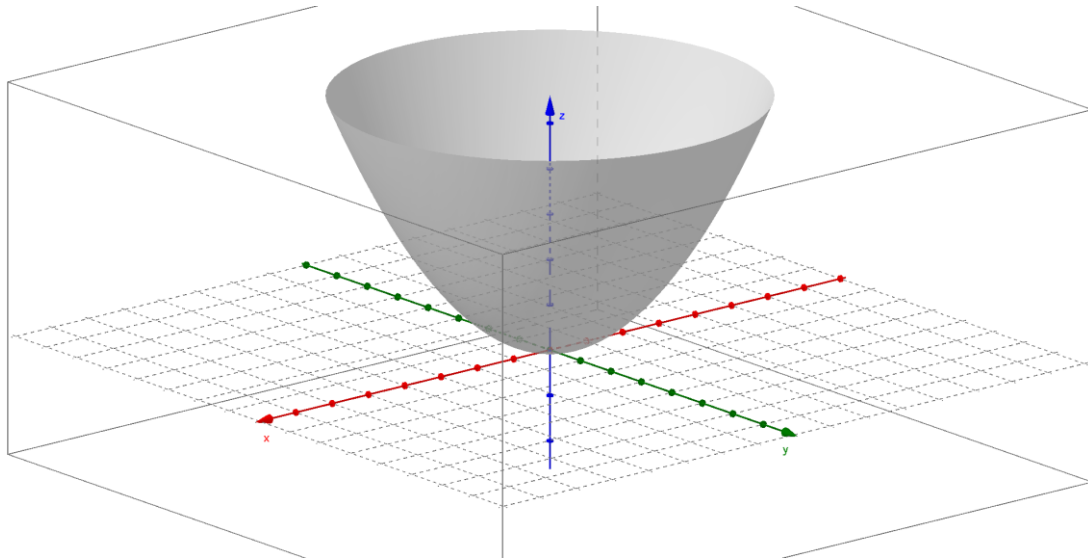
- a) Los coeficientes de grado dos son de igual signo (Paraboloides elípticos)
- b) Los coeficientes de grado dos son de signos contrarios (Paraboloides hiperbólicos)

Paraboloide elíptico

Una forma canónica de la ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

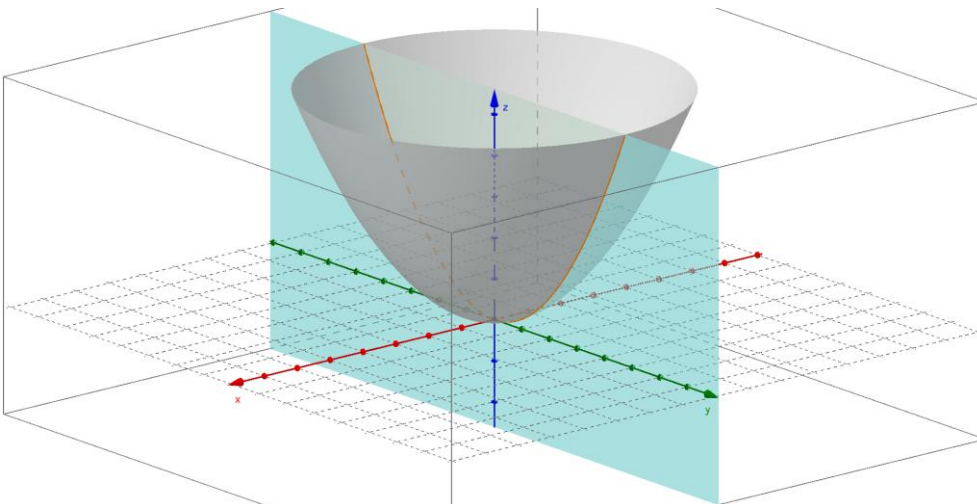
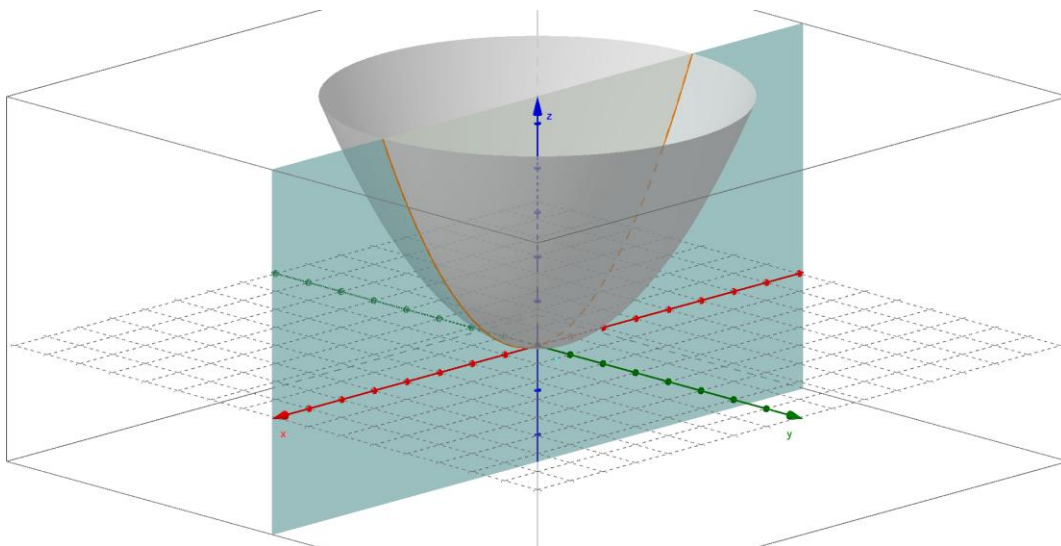
Las otras formas son $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = cy$ y $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = cx$, donde puede ser $c > 0$ ó $c < 0$.

La superficie pasa por el origen y no hay otras intersecciones con los ejes coordenadas.



Las trazas sobre los planos X Y, X Z, Y Z son , respectivamente : el origen , la Parábola

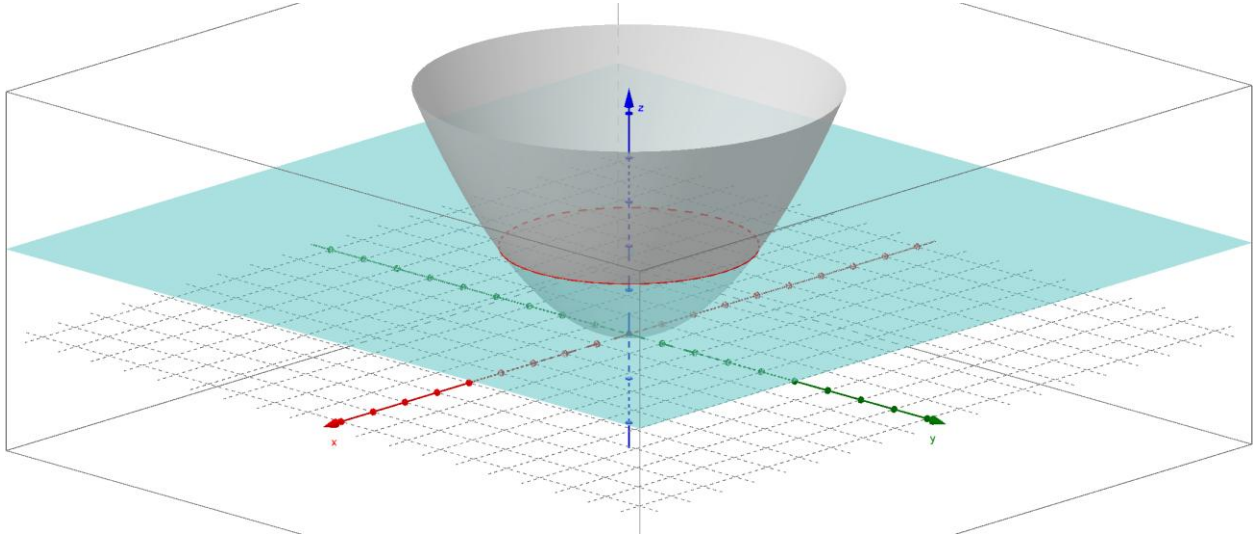
$$\frac{x^2}{a^2} = cz, \ y = 0 \text{ y la parábola } \frac{y^2}{b^2} = cz, \ x = 0$$



La superficie es simétrica respecto a los planos YZ y XZ y al eje z .

Las intersecciones con planos paralelos al XY son las curvas

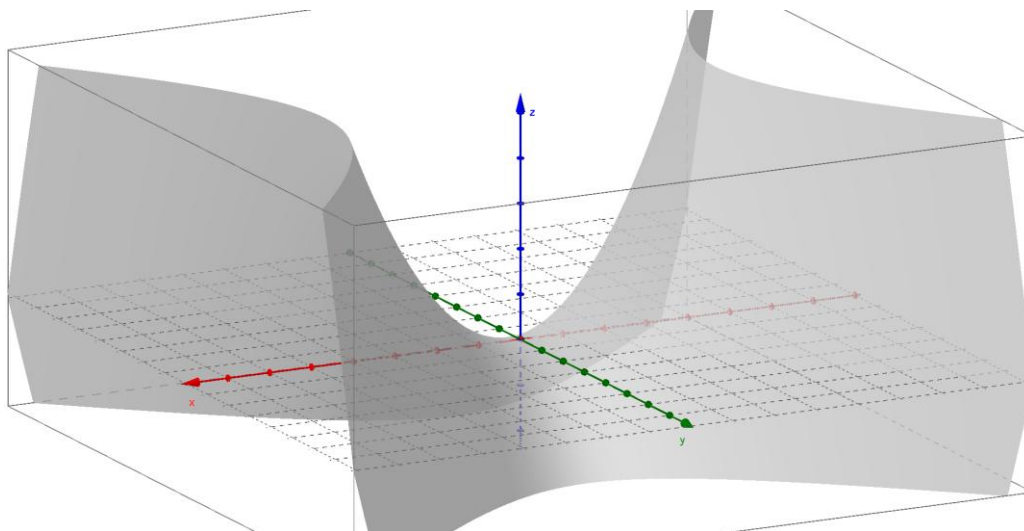
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz; \quad z = k$$



Estas curvas son elipses si c y k tienen el mismo signo y a medida que k aumenta de valor, las elipses aumentan de tamaño. Por lo tanto la superficie se extiende indefinidamente a lo largo del eje z (o del eje coordenado correspondiente a la variable de 1º grado de la ecuación). Las secciones por planos paralelos a XZ e YZ son parábolas cuyos vértices se alejan del plano XY .

Paraboloide hiperbólico

Una forma canónica de la ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$.

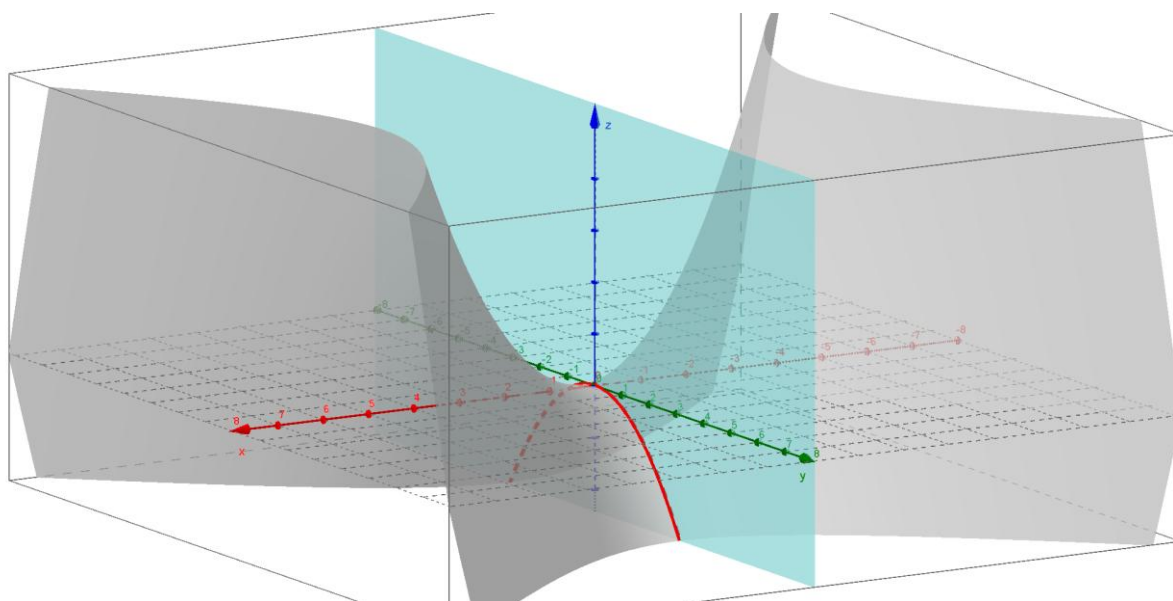
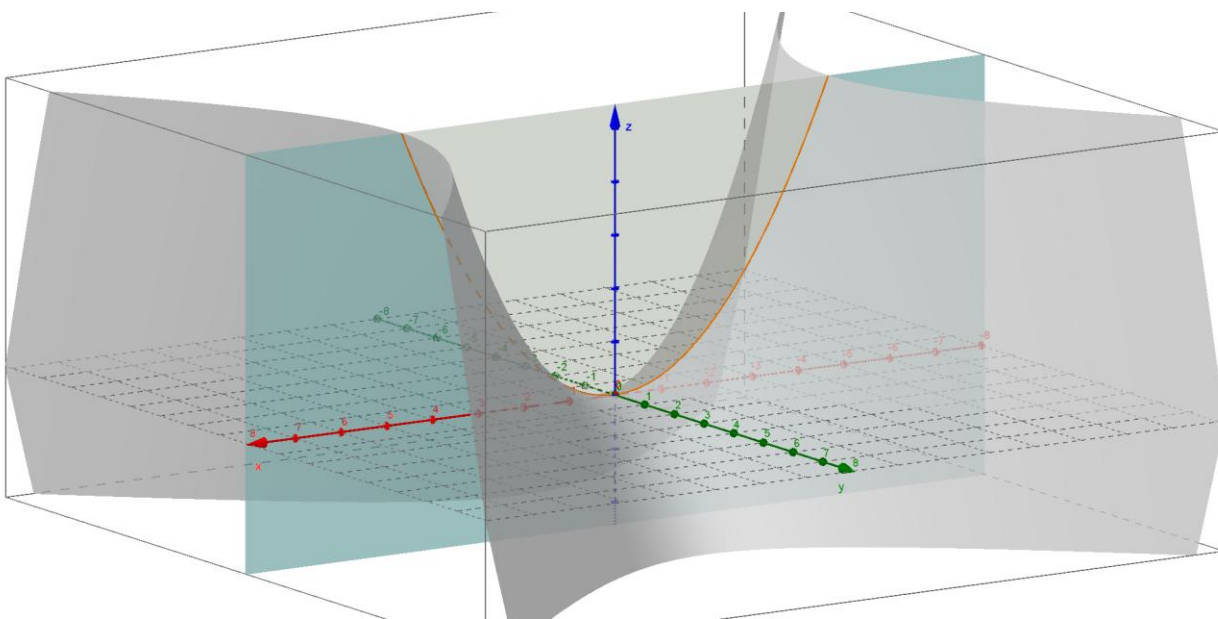


Las otras formas son $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = cy$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = cx$

La superficie pasa por el origen de coordenadas y no hay otras intersecciones con los ejes coordenados. Las trazas sobre los planos XY , XZ e YZ son respectivamente las rectas que se cortan:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, z = 0$$

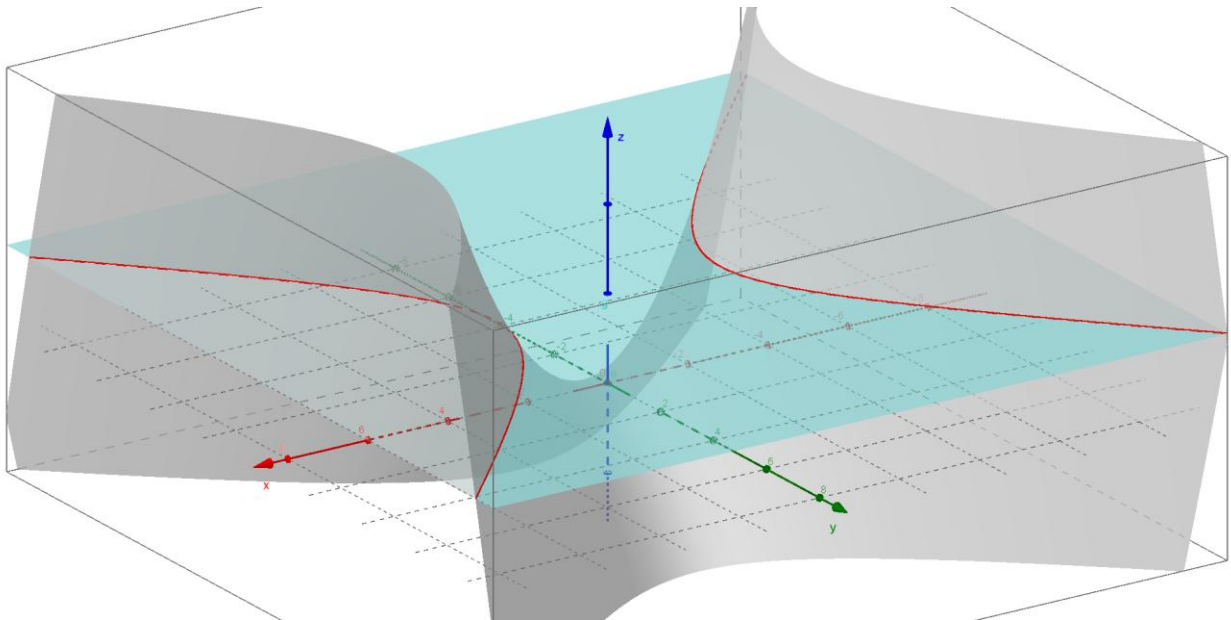
la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz \quad (y = 0)$ y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz \quad (x = 0)$



La superficie es simétrica respecto a los planos YZ, XZ y al eje z

Las secciones por planos paralelos al XY son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad z = k = 0$$



y a medida que k crece, las ramas de la hipérbola se alejan del eje z, la superficie se extiende indefinidamente.

$$\frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2}; y = 0 \quad (2) \quad \text{Las secciones por planos paralelos al XZ son las parábolas}$$

abiertas hacia arriba o hacia abajo según c sea positivo o negativo.

$$\frac{x^2}{a^2} = -cz + \frac{k^2}{b^2}, \quad x = k \quad (3) \quad \text{Las secciones de las superficies por planos paralelos al plano}$$

YZ son las parábolas abiertas hacia arriba o hacia abajo según c sea positivo o negativo.

Si uno o más de los coeficientes de la (2) o (3) son nulos, se dice que la cuádrica es degenerada.

Las degeneraciones son esencialmente de cuatro tipos:

- No hay lugar geométrico: Los coeficientes de (2) son todos negativos, uno nulo y dos negativos; dos nulos y uno negativo.
- Un punto: Todos los coeficientes de la (2) son de mismo signo
- Una recta: Los coeficientes de la (2) son: uno nulo y dos del mismo signo. Los coeficientes de la (3) son del mismo signo.
- Uno o dos planos: Los coeficientes de la (2) son: uno nulo; dos de signos contrarios o dos nulos. Los coeficientes de la (3) son de signos opuestos, o uno nulo.



Ejemplos de la vida real de
paraboloides elíptico e
hiperbólico

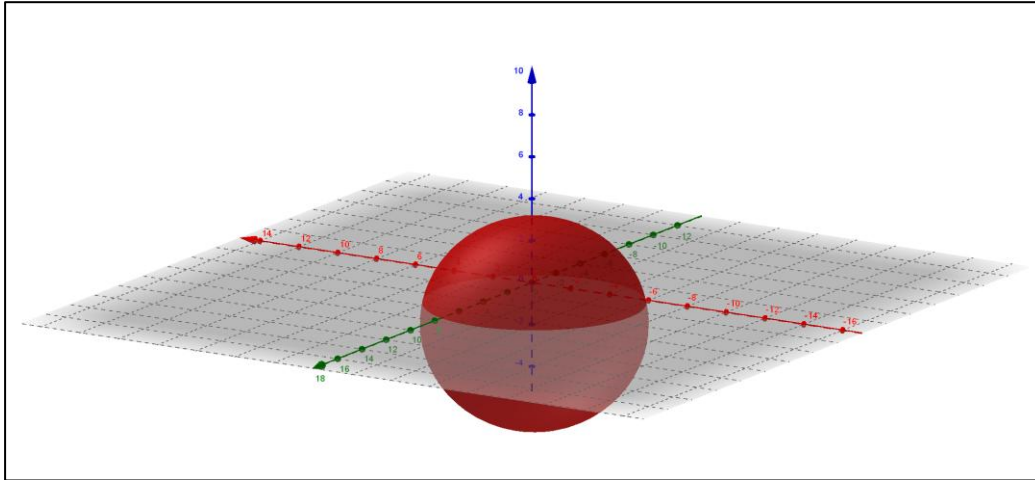


EJEMPLOS DE CADA UNA DE LAS SUPERFICIES ESTUDIADAS

1- Determinar la ecuación y graficar la superficie esférica con centro en $(-2, 3, -1)$ y radio igual a 5.

La ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25$.

La gráfica es: **una esfera**



2- Determinar la naturaleza de las superficies siguientes y representarlas gráficamente.

Las ecuaciones son:

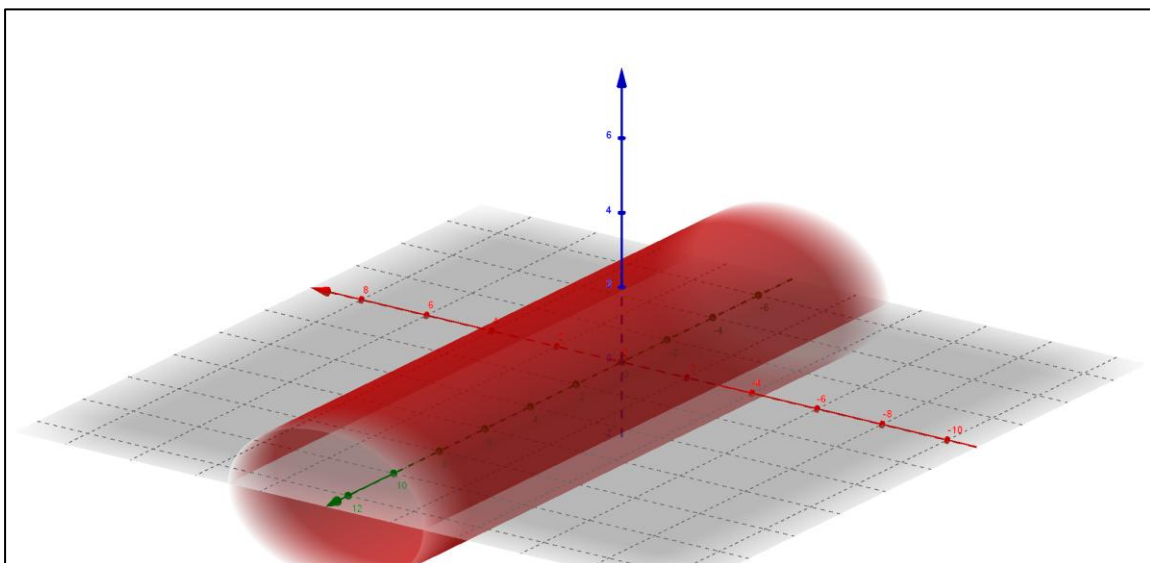
a) $4x^2 + 9z^2 = 36$

b) $x^2 + 16y^2 - z^2 = 0$

Resolución:

a) $4x^2 + 9z^2 = 36$ es una **superficie cilíndrica** cuya directriz es la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ y generatrices paralelas al eje y .

La gráfica es:



b) $x^2 + 16y^2 - z^2 = 0$ es una **superficie cónica elíptica** con vértice en el origen.

La intersección con el plano XY es decir $z = 0$, es $\frac{x^2}{16} + y^2 = 0$ es el vértice $(0, 0, 0)$

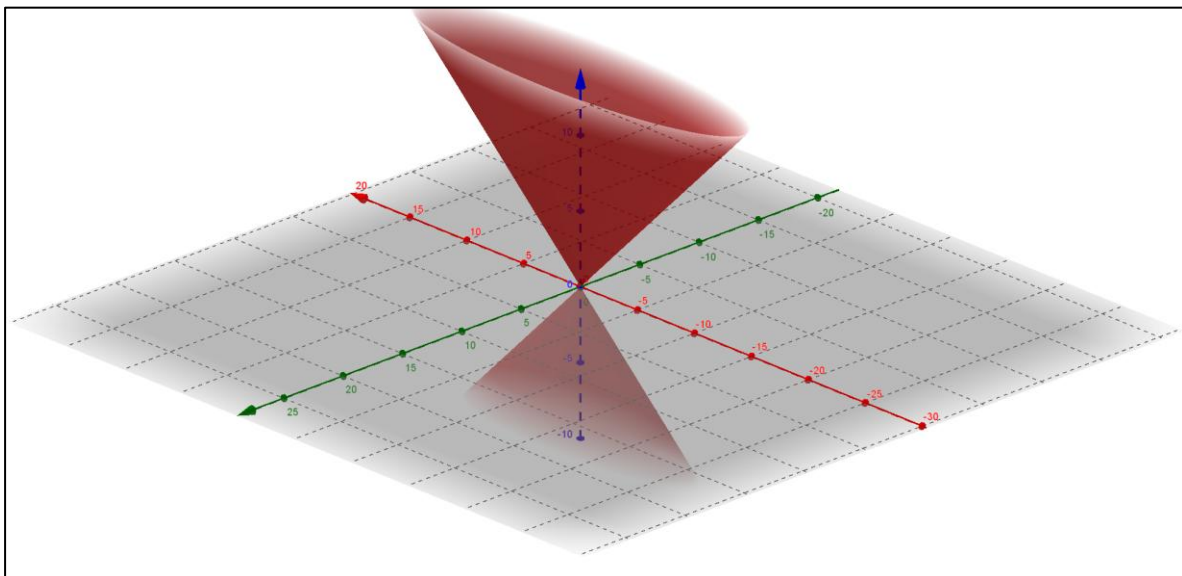
Las secciones con planos horizontales $z = k$, son las elipses: $\frac{x^2}{16} + y^2 = k^2$, cuyo tamaño aumenta a medida que aumenta k . Lo mismo para $z = -k$. La superficie es simétrica respecto al plano XY.

La intersección con el plano XZ, $y = 0$, son las rectas $x^2 - z^2 = 0$, $x = \pm z$

La intersección con el plano YZ, $x = 0$, son las rectas $y^2 - \frac{z^2}{16} = 0$, $y = \pm z / 4$

Las secciones con planos paralelos al plano XZ y al plano YZ son hipérbolas.

La gráfica es:



3- Analizar y representar las superficies cuyas ecuaciones son:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$

c) $x^2 + y^2 = 2z$

d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$

Resolución:

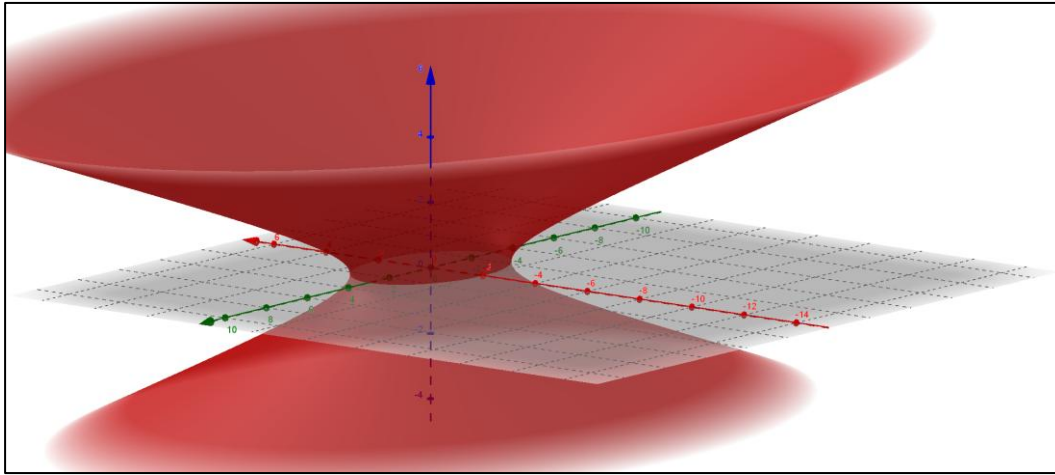
a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ Es un hiperboloide de una hoja

- Cuando $z = 0$ (Intersección con el plano XY) obtenemos la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, de semiejes 2 y 3.

- Cuando $y = 0$ (Intersección con el plano XZ) obtenemos la hipérbola $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$, de semiejes 2 y 1.

Cuando $x = 0$ (Intersección con el plano YZ) obtenemos la hipérbola $\frac{y^2}{9} - z^2 = 1$, de semiejes 3 y 1.

La gráfica es:

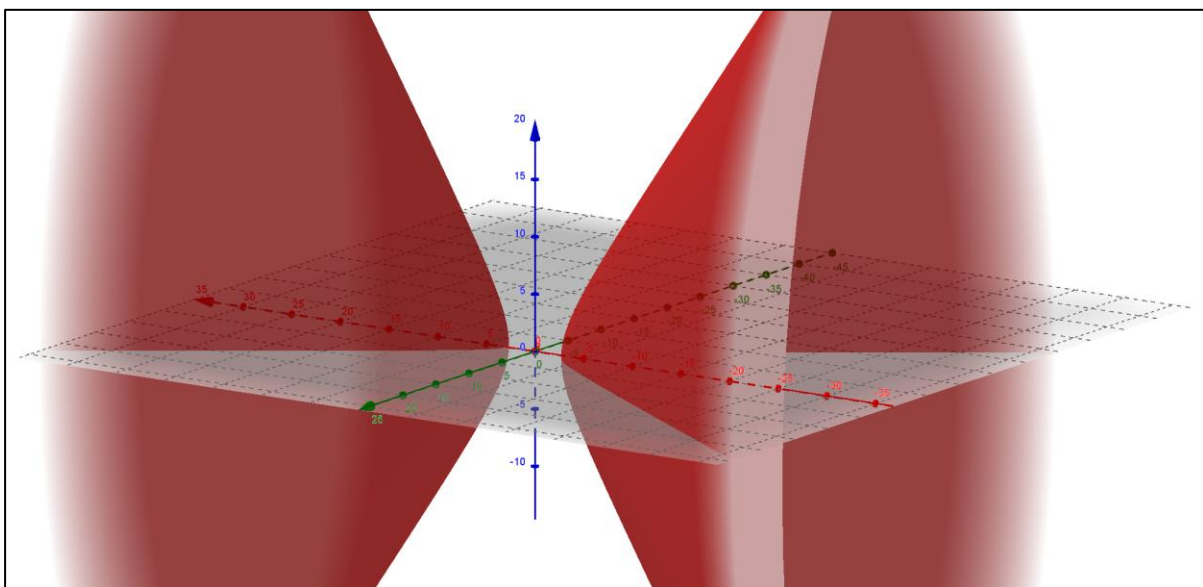


b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$, es un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje de simetría es el de la variable que tiene signo positivo, es decir x.

- Cuando $z = 0$ (Intersección con el plano XY) obtenemos la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, de semiejes 3 y 2, en el plano XY.

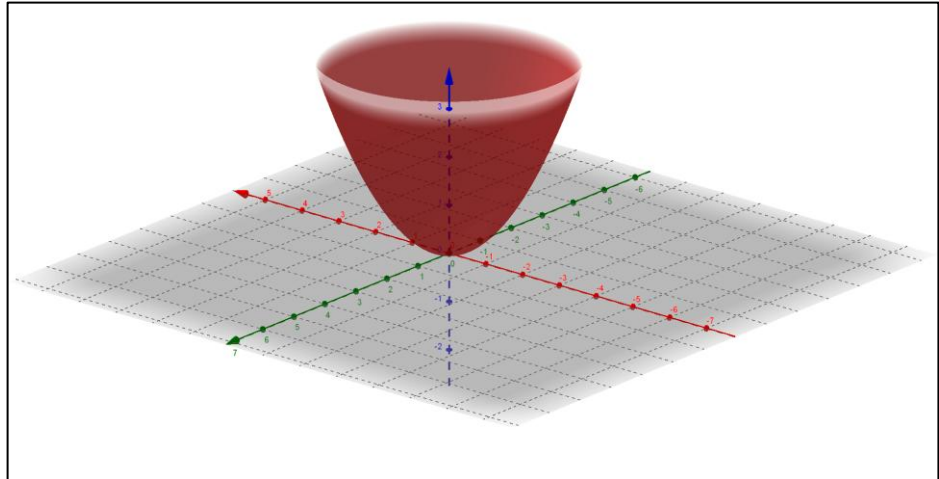
- Cuando $y = 0$ (Intersección con el plano XZ) obtenemos la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, de semiejes 3 y 4, en el plano XZ.

- Cuando $x = 0$ (Intersección con el plano YZ) resulta una elipse imaginaria $-\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ no hay intersección real. La gráfica es:



c) $x^2 + y^2 = 2z$ Es un **paraboloides circular** que gira alrededor del eje z

- Cuando $z = 0$ (Intersección con el plano XY) obtenemos $x^2 + y^2 = 0$. Es decir el punto $(0, 0, 0)$ es el vértice del paraboloides
- Cuando $x = 0$ (Intersección con el plano YZ), obtenemos la parábola $y^2 = 2z$ con vértice en el origen y eje de simetría el eje z.
- Cuando $y = 0$ (Intersección con el plano XZ) obtenemos la parábola: $x^2 = 2z$, con vértice en el origen y eje de simetría el eje z. La gráfica es:



d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$ representa un **paraboloides hiperbólico**

- Cuando $z = 0$ (Intersección con el plano XY) obtenemos las rectas: $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0$
- Cuando $y = 0$ (Intersección con el plano XZ) obtenemos la parábola $\frac{x^2}{4} = 2z$ Con vértice en el origen y eje de simetría el eje z.
- Cuando $x = 0$ (Intersección con el plano YZ), obtenemos la parábola $-\frac{y^2}{9} = 2z$ con vértice en el origen y eje de simetría el eje z. La gráfica es:

