Unidad 2: TEORIA DE CONJUNTOS Y ANALISIS COMBINATORIO

Conjuntos y Elementos.

Inclusión de conjuntos. Subconjuntos.

Operaciones entre conjuntos.

Partición de un conjunto.

Cardinal de la unión de conjuntos

Principios Fundamentales de Conteo

Permutaciones y Combinaciones

2.1 Introducción

Nuestro interés en los conjuntos se debe tanto al papel que representan en las matemáticas como a su utilidad en la modelización e investigación de problemas en la informática. La Teoría de Conjuntos junto a la Teoría de Lógica es la base de las Ciencias para la Computación ya que sirven de fundamento para el Álgebra Booleana, para los Lenguajes, para los Autómatas, de las relaciones entre Bases de Datos, de los Grafos, de las Redes , etc .

2.2 Conjuntos y Elementos

Definición

Un conjunto es cualquier colección de objetos que pueda tratarse como una entidad. A cada objeto de la colección se lo denomina elemento o miembro del conjunto.

Notación

A los conjuntos se los designa con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. A los elementos del conjunto se los encierra entre llaves y la afirmación “el elemento a pertenece al conjunto A” se denota $a \in$ A y si “a no pertenece al conjunto A” se escribe $a \notin$ A (negación del hecho de que $a \in$ A).

La especificación de un conjunto no debe ser ambigua en el sentido de que pueda decidirse cuando un objeto particular pertenece, o no, a un conjunto.

Conjunto finito e infinito

Definición

Un conjunto A se dice finito si y sólo si tiene n elementos distintos, con $n \in \mathbb{N}_0$.

Caso contrario se dice infinito

Si A es finito y tiene n elementos, se dice que el cardinal de A es n y se denota $|A| = n$.

Ejemplos

a) Si A es el conjunto de las letras del abecedario, A es finito, y su |A| = 27, o sea A tiene 27 elementos, incluida la letra ñ de nuestro idioma castellano.
b) El conjunto de los estudiantes de la UTN es finito.
c) El conjunto de las materias del diseño curricular de Ingeniería en Sistemas es finito.
d) El conjunto de los números naturales es infinito mientras que el conjunto de los dígitos usados en el sistema de numeración decimal es finito.

Por otro lado los conjuntos infinitos se clasifican en numerables y no numerables.

Son numerables cuando se pueden poner en correspondiencia biunívoca con los Numeros Naturales. Caso contrario se dicen no numerables

A veces, tanto en conjuntos finitos demasiado grandes como en conjuntos infinitos numerables, se utiliza puntos suspensivos "…" (elipsis matemática) para caracterizar a los elementos de un conjunto.

Algunos conjuntos aparecerán muy frecuentemente a lo largo del texto y se usan símbolos especiales para designarlos.

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los Números Enteros

$\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}^+$: Conjunto de los Números Naturales o Enteros Positivos.

$\mathbb{N}_0$: Conjunto de los Enteros No Negativos.

$\mathbb{Q}$: Conjunto de los Racionales.

$\mathbb{R}$: Conjunto de los Números Reales

$\mathbb{R}^+$: Conjunto de los Reales positivos

Todos son conjuntos infinitos, pero $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ se caracterizan por ser numerables mientras que $\mathbb{R}$ es no numerable.

Especificación de Conjuntos

Un conjunto se puede definir por extensión o por comprensión. Aunque existen conjuntos que pueden definirse de ambas maneras, otros solo de una.

Especificación por Extensión o Enumeración

Definición

Un conjunto está definido por extensión cuando se especifica, mediante un listado entre llaves, a todos los elementos que forman el mismo.

Ejemplos

Los siguientes conjuntos están definidos por extensión.

i) El conjunto de las vocales del alfabeto.

$$A = \{ a , e , i , o , u \}$$

ii) El conjunto de los números enteros pares no negativos y menores que mil.

$$B = \{ 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , ..., 1000 \}$$

Observaciones

- Los conjuntos finitos definidos por extensión se indican como una lista de elementos encerrada entre llaves, separados por comas, sin importar el orden y sin repetir.
- Los elementos de un conjunto infinito, salvo aquellos que se puedan enumerar, no pueden especificarse por extensión; consecuentemente, se necesita una forma alternativa de describir tales conjuntos implícitamente.

Especificación por Comprensión

Definición

Se dice que un conjunto está especificado por comprensión cuando es descripto a través de la propiedad que caracteriza a todos sus elementos.

Esta propiedad se hace a menudo mediante un predicado en una variable. El conjunto estará determinado por aquellos elementos del universo que hacen del predicado una proposición verdadera.

De aquí que, si $p(x)$ es un predicado en x, la notación A = { $x \in$ U / $p\ (x)$ } denota al conjunto A formado por los elementos $x \in$ U para los cuales $p\ (x)$ es verdadero.

Ejemplos

i) El conjunto de los enteros mayores que diez, definido por comprensión:

A = { $x \in \mathbb{Z}$ / $x > 10$ }

por ser un conjunto infinito numerable también podría escribirse por extensión:

A = { 11, 12, 13, …}

ii) El conjunto de los enteros pares, definido por comprensión:

B = { $x \in \mathbb{Z}$ / $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ }

definido por extensión: B = { …, -4 , -2 , 0 , 2 , 4 , …}.

iii) El conjunto { 1, 2, 3, 4, 5 } está expresado por extensión, luego expresado por comprensión se tiene: { $x \in \mathbb{Z}$ / $1 \leq x \leq 5$ }

Observación

Si el universo se da por sobreentendido se indica simplemente A = { x / $p\ (x)$ }

Conjuntos Especiales

Definiciones

Conjunto Vacío

Un conjunto se dice Vacío si y solo si no tiene elementos. Su cardinal es 0 y se representa $\emptyset$ o por { }.

Conjunto Unitario: se dice Unitario si y solo si tiene un elemento. Su cardinal es 1.

Conjunto Universal: conjunto que contiene todos los elementos del tema de referencia se le llama conjunto Universal y se denota con la letra U.

Ejemplos

i) El conjunto de personas que tiene el cargo de Decano de la FRT es unitario.
ii) El conjunto de personas que trabajan en la FRT y que viajaron a la luna es vacío.
iii) El universo correspondiente al conjunto de las vocales puede ser el conjunto de las letras del abecedario de nuestro idioma o un conjunto más amplio que incluya símbolos usados en otro idioma.

Actividad 2.1

¿Cuál de los siguientes conjuntos es vacío? ¿Cuál es unitario? Indique cuál es el universo correspondiente a cada conjunto.

A = $\{ x \in \mathbb{N} \ / \ x - 3 = 5 \}$

B = $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = 5 \}$

C = $\{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x$ es par $\wedge \ x^2$ es impar $\}$

2.3 Igualdad de Conjuntos

Definición

Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.

Es decir, cada elemento del conjunto A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. Simbólicamente, se expresa:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ (x \in A \ \Leftrightarrow x \in B)$$

Ejemplos

Considerando U = $\mathbb{Z}$ se analizará cuáles de los siguientes conjuntos son iguales.

A = {x / x es par y x^2 es impar}

B = { x / $x = 2y$ para algún y }

C = { 1, 2, 3 }

D = { 0, 2, −2, 3, −3, 4, −4, . . .}

E = { $2x$ / $x \in \mathbb{Z}$ }

F = { 3 , 2 , 1 }

G = { x / $x^2 + 1 = 0$ }

Un camino para determinar si poseen los mismos elementos, es expresar a cada conjunto por extensión, si es que no lo estuviera ya.

Sea x cualquier número entero,

- En el conjunto A no existe un elemento x que pertenezca a él, ya que la proposición x es par y x^2 es impar es falsa para todo x , por lo tanto A = ∅.
- B = {…, -4, -2, 0, 2, 4, …} ya que está formado por todos los números que se pueden expresar como el doble de otro.
- Dando valores enteros a x se tiene que E = { 0, 2,−2, 4,−4, 6,−6, . . .}
- Como no existen enteros que satisfagan $x^2 + 1 = 0$, se tiene que G = ∅.

De todo lo anterior, se sigue que $A = G$, $B = E$ y $C = F$.

¿Cuándo dos conjuntos son distintos?

Para encontrar una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos sean distintos, se consideremos $\sim(A = B)$.

Dado que $A = B \iff \forall x\,(x \in A \iff x \in B)$, negando miembro a miembro se tiene:

$A \neq B \Leftrightarrow \neg\forall x\,(x \in A \iff x \in B) \Leftrightarrow \exists\, x\,[\,(\,x \in A \wedge x \notin B\,) \vee (\,x \notin A \wedge x \in B\,)\,]$

Entonces A y B serán distintos si y solo si existe un elemento de A que no esté en B o existe un elemento de B que no esté en A.

2.4 Conjuntos Disjuntos

Definición

A y B son disjuntos si y solo sí A y B no tienen elementos en común.

Simbólicamente**:** A y B son disjuntos $\Leftrightarrow \sim\exists\, x\ (x \in A \wedge x \in B)$

Ejemplos

- $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3, 4\}$ no son disjuntos pues tienen un elemento en común pero son conjuntos distintos.
- $A = \{1, 2\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$ son disjuntos , no tienen elementos en común, y además son distintos.

Actividad 2.2

Sea $U = \mathbb{N}$ y sean los conjuntos A y B que se dan en cada apartado, se pide analizar si son disjuntos:

a) $A = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es par $\}$ y $B = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es impar $\}$

b) $A = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, 2x$ es par $\}$ y $B = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es impar $\}$

c) $A = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, 2x$ es par $\}$ y $B = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, 3x$ es par $\}$

2.5 Diagramas de Venn

Son diagramas para representar conjuntos: el Universo U por medio de un rectángulo y cualquier otro conjunto A por una curva cerrada.

De este modo quedan delimitadas dos regiones: los elementos de A estarán en su interior (región I) y los elementos que no pertenecen a A en su exterior (región II). Ver Figura 2.1

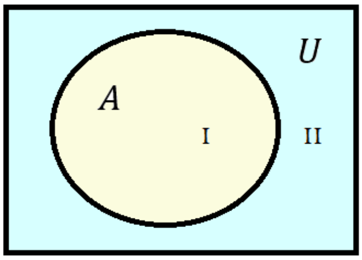


Fig. 2.1. Diagrama de Venn

Diagramas de Venn para dos conjuntos

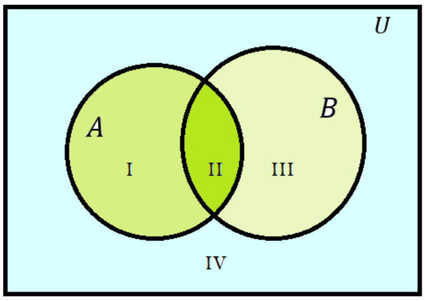


Fig. 2.2. Diagrama de Venn para dos conjuntos

En la Figura 2.2 se observa que dos conjuntos A y B delimitan cuatro regiones: I, II, III, IV. Es posible que algunos elementos estén en A pero no en B (región I), algunos en B pero no en A (región III), algunos en ambos (región II) y algunos ni en A, ni en B (región IV).

Diagramas de Venn para tres conjuntos

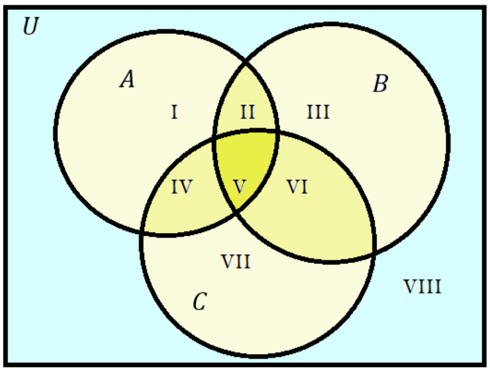


Fig. 2.3. Diagrama de Venn para tres conjuntos.

En la Figura 2.3, se observan ocho regiones: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII pues con tres conjuntos A , B y C es posible que algunos elementos pertenezcan a solo uno de ellos (sólo a A, región I; sólo a B, región III; sólo a C, región VII), a dos (pertenecen sólo a A y B, región II; pertenecen sólo a B y C, región VI; pertenecen sólo a A y C, región IV), a los tres conjuntos (región V) o a ninguno (región VIII).

🗒 Ejemplo

Sean A, B y C dados por la Figura 2.4 , y sean los elementos a,b,c,d,f,g,h,i $\in U$

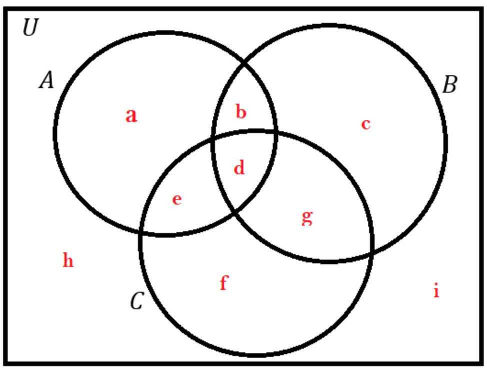


Fig. 2.4. Diagrama de Venn

Observe que **a** pertenece sólo al conjunto A, **c** pertenece sólo a B y **f** pertenece sólo a C. Mientras que **b** pertenece a A y B, **g** pertenece a B y C, y **e** pertenece a A y C. Por otro lado **d** pertenece a los tres conjuntos y **h** e **i** no pertenecen a ninguno de los tres conjuntos.

Actividad 2.3

i) Suponga que U = { x / x es alumno de la FRT} , A = { $x \in U$ / x cursa Matemática Discreta } y B = {$x \in$ U / x cursa Algebra}

Diga cuales son las características de los estudiantes que pertenecen a cada una de las regiones delimitadas en un diagrama de Venn que contenga a A y B

ii) Si U = { x / x es alumno de la UTN-FRT} y los conjuntos A, B y C definidos como sigue:

A = { $x \in$ U / x tiene al menos 20 años} ,

B = { $x \in$ U / x trabaja} ,

C = { $x \in$ U / x tiene al menos un hijo }

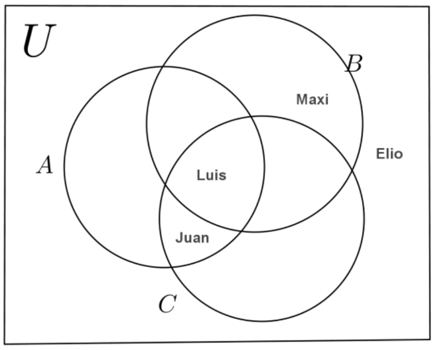


Fig. 2.5. Diagrama de Venn de la Actividad 2.3.ii

Responder y justificar:

i) ¿Luis trabaja? ¿Cuántos trabajan?

¿Juan tiene hijos y trabaja?

ii) ¿Elio es alumno de la FRT? ¿Cuántos alumnos tiene la FRT?

iii) ¿Maxi es un alumno de la FRT menor de 20 años?

iv) ¿Quienes tienen al menos 20 años y tienen hijos?

v) ¿Quienes trabajan y no tienen hijos?

2.6 Inclusión de conjuntos. Subconjunto

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A está incluido en B si cada elemento de A es un elemento de B. Se denota $A \subseteq B$.

Simbólicamente: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

También se expresa: A es subconjunto de B

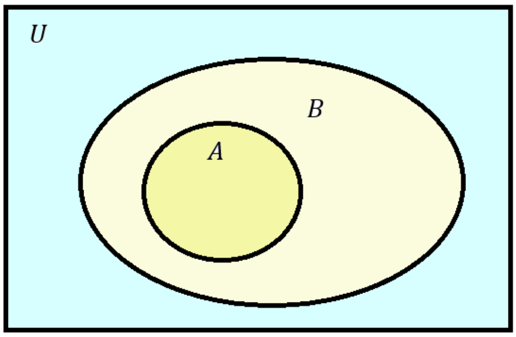


Fig.2.6. Inclusión.

Observaciones

- Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B es que exista, al menos, un elemento en A que no esté en B.

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \sim (A \subseteq B) \Leftrightarrow \sim[\forall\, x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)] \Leftrightarrow \exists\, x\, (x \in A \wedge x \notin B)$$

- $A \subseteq B$ también se lee A está contenido en B o B contiene a A.

- El símbolo $\subseteq$ se llama "Símbolo de inclusión amplia". Si en particular A es subconjunto de B y en B existen elementos que no pertenecen a A, se dice que A es subconjunto propio de B y se escribe $A \subset B$. El símbolo $\subset$ se llama "símbolo de inclusión estricta".

Ejemplos

i) Si A = {4, 2, 3} y B = {2,3,4,5}, entonces $A \subset B$ pero también $A \subseteq B$

ii) Si A = { 5, 2, 3, 4 } y B = { 2 , 3 , 4 , 5 }, entonces $A \subseteq B$. Observe que en este caso se da la igualdad

iii) Si $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 3x + 2 = 0 \}$ y B = {1, 2, 4} , se puede probar que $A \subseteq B$ ya que todo elemento de A pertenece a B.

Sea $a \in A$, entonces debe verificar la ecuación $a^2 - 3a + 2 = 0$. De aquí que a toma dos valores $a = 2 \vee a = 1$, entonces $a \in B$

iv) ¿Es B = {1, 2, 4} un subconjunto de $A = \{ x \in \mathbb{R}\colon x^2 - 3x + 2 = 0 \}$?

Observe que $4 \in B$ y, sin embargo, $4^2 - 3 . 4 + 2 \neq 0$, luego $4 \notin A$, es decir, hay un elemento en B que no está en A, por lo tanto, $B \not\subset A$.

Actividad 2.4

a) En cada caso colocar el símbolo que corresponda: $\subseteq$ o $\supseteq$

i) $\mathbb{N}$ ... $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ .... $\mathbb{Z}$

ii) $\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es par $\}$ ... $\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, (x - 2).(x + 4) = 0 \}$

iii) $\{ x \,/\, x$ es una vocal $\}$ ... { a, e, i, o, u }

b) Sean $A = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x = 3k , k \in \mathbb{Z} \}$, $B = \{ x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x = 3k , k \in \mathbb{Z} \}$ y

$C = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x = 6k , k \in \mathbb{Z} \}$, indicar Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

i) $B \subset A$ ii) $C \subseteq A$ iii) $C \subseteq B$ iv) $B \nsubseteq C$

Propiedades de la Inclusión

Si A es un conjunto cualquiera, se cumple que:

1) $\varnothing \subseteq A$ El vacío es subconjunto de cualquier conjunto

Demostración :

Por definición: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$.

Si se considera la proposición: $\forall x \ (x \in \varnothing \Longrightarrow x \in A)$, ésta es Verdadera, por ser el antecedente Falso. En consecuencia, de acuerdo con la definición de inclusión: $\varnothing \subseteq A$.

2) $A \subseteq A$ Todo conjunto es subconjunto de sí mismo

Demostración**:**

Es evidente que se cumple que $\forall x \in A$, $(x \in A \Rightarrow x \in A)$, luego por definición de inclusión: $A \subseteq A$, que se lee “ A es subconjunto de A”.

3) $A \subseteq U$ Todo conjunto es subconjunto del conjunto Universal

Demostración:

Para demostrar que $A \subseteq U$, se tiene que demostrar que $\forall x \in A$, $(x \in A \Rightarrow x \in U)$.

Por definición de conjunto universal, $x \in U$ es verdadero para todos los x. Luego la implicación también es verdadera por ser su consecuente verdadero siempre. Por lo tanto $A \subseteq U$.

4) Sean A y B subconjuntos de U. Entonces:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Demostración:

En efecto, por definición de igualdad de conjuntos se tiene que:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\ [\ (x \in A\ \Rightarrow x \in B)\ \wedge\ (x \in B\ \Rightarrow x \in A)\ ]$$

$$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A\ \Rightarrow x \in B)\ \wedge\ \forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B\ \wedge\ B \subseteq A$$

5) Sean A, B y C $\subseteq$ U. Si A $\subseteq$ B $\wedge$ B $\subseteq$ C, entonces A $\subseteq$ C.

Demostración:

Sea $x \in$U. De $A \subseteq B$, se sigue que $x \in A \Rightarrow x \in B$. De $B \subseteq C$, se sigue que $x \in B \Rightarrow x \in C$. Por la transitividad de la implicación lógica se sigue que $x \in A \Rightarrow x \in C$ y al ser x arbitrario, se tiene $\forall x$, $(x \in A \Rightarrow x \in C)$, por la regla de Generalización Universal (GU). Luego, $A \subseteq C$.

Observaciones

- Los conjuntos también pueden ser objetos, pueden ser elementos de otros conjuntos, por ejemplo, el conjunto A = {{1, 2}, {1, 3}, {2}, {3}} tiene cuatro elementos que son los conjuntos {1, 2}, {1, 3}, {2} y {3}.
- Sea A es un conjunto cualquiera, luego {A} es un conjunto con un único elemento A, sin importar cuantos elementos tenga A, luego ambos conjuntos: A y {A} son conjuntos distintos.

Ejemplos

¿Cuál es la diferencia entre los conjuntos $\{a\}$ y $\{\{a\}\}$ y entre los conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ y $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$?

- $\{a\}$ es un conjunto cuyo único elemento es a mientras que $\{\{a\}\}$ es un conjunto cuyo único elemento es el conjunto $\{a\}$.
- $\varnothing$ es el conjunto vacío, el cual no tiene elementos; $\{\varnothing\}$ es el conjunto con un único elemento: el $\varnothing$. Luego, se tiene que $\varnothing \in \{\varnothing\}$ e incluso $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, pero $\varnothing \neq \{\varnothing\}$. Por otro lado $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ es el conjunto con dos elementos: $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$.

2.7 Conjunto Potencia de un conjunto finito

Definición

Dado un conjunto A, llamamos Potencia de A al conjunto de todos los subconjuntos de A. Se denota por $P(A)$.

Ejemplos

i) Si $A = \{a, b\}$, de las propiedades de la inclusión se tiene que $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$. Por lo tanto en $P(A)$ estarán ambos. Por otra parte, $a \in A$ y $b \in A$ luego por definición de inclusión $\{a\}$, $\{b\}$ son subconjuntos A. De aquí que:

$$P\ (A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

En la Figura 2.7.a se ilustra a los subconjuntos propios de A , dando por sobreeentendidos que Ø y A son elementos de $P\ (A)$

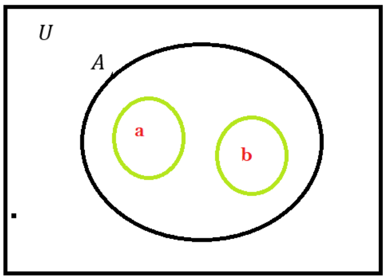


Figura 2.7.a

ii) Si A = {1, 2, 3}, entonces, P(A) = { Ø, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, A}

En la Figura 2.7.b se ilustra a los subconjuntos propios de A , dando por sobreeentendidos que Ø y A son elementos de $P\ (A)$

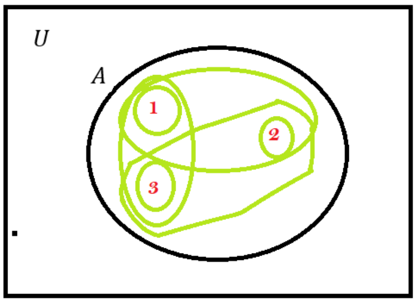


Figura 2.7.b

Observaciones

- De acuerdo con la definición, si X es un subconjunto cualquiera del universo arbitrario U, entonces $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$.
- El conjunto Potencia del conjunto Ø es P(Ø) = { Ø }, un conjunto unitario.
- El conjunto Potencia del conjunto {Ø} es P({Ø}) = { Ø, { Ø} } un conjunto con dos elementos.

Cardinal del Conjunto Potencia

Teorema

Dado un conjunto A finito.

Si $|A| = n$, entonces $|P(A)|=2^n$

Actividad 2.5

Sea el conjunto finito A = { u, v, x, y }. Calcular $|A|$ y $|P(A)|$ y expresar por extensión $P(A)$. Además, decir cuántos elementos de $P(A)$ tienen cardinal 0, cardinal 1, cardinal 2, cardinal 3 y cardinal 4. ¿Hay elementos de $P(A)$ con cardinal 5?

A continuación, se verán las operaciones que se pueden realizar entre conjuntos.

2.8 Operaciones entre conjuntos

Sean A, B y C subconjuntos cualesquiera de un universal U.

Unión de Conjuntos

Definición

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.

Simbólicamente: $A \cup B = \{ x \in U \ / \ x \in A \ \vee \ x \in B \}$

Generalizando para tres conjuntos: $A \cup B \cup C = \{x \in U \ / \ x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$

Las regiones sombreadas representan a las operaciones indicadas:

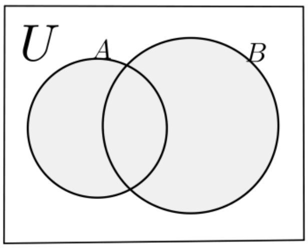


Fig.2.8. $A \cup B$.

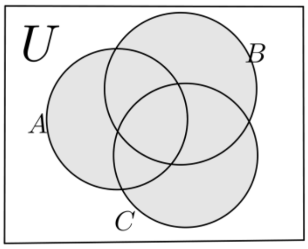


Fig.2.9. $A \cup B \cup C$.

Intersección de Conjuntos

Definición

La Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez.

Simbólicamente: $A \cap B = \{ x \ / \ x \in A \ \wedge \ x \in B \}$.

Generalizando para tres conjuntos $A \cap B \cap C = \{ x \ / \ x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C \}$

Las regiones sombreadas representan a las operaciones indicadas:

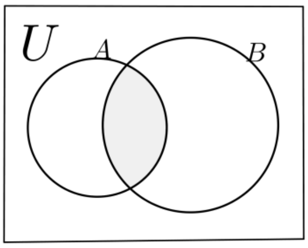


Fig. 2.10. $A \cap B$.

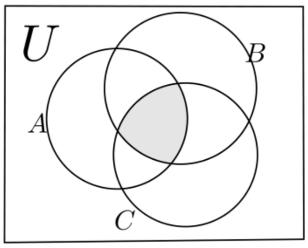


Fig. 2.11. $A \cap B \cap C$.

Observación

Si A y B son disjuntos, entonces $A \cap B = \emptyset$

Diferencia entre Conjuntos

Definición

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Simbólicamente: $A - B = \{x \in U \, / \, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$

Se puede, luego de restar un conjunto de otro, restar a su resultado un tercero:

$A - B - C = (A - B) - C = \{ x \in U \, / \, x \in (A - B) \wedge x \notin C \}$

$= \{ x \in U \, / \, x \in (A - B) \wedge x \notin C\} = \{ x \in U \, / \, x \in A \;\wedge\; x \notin B \;\wedge\; x \notin C \}$

Las regiones sombreadas representan a las operaciones indicadas:

C

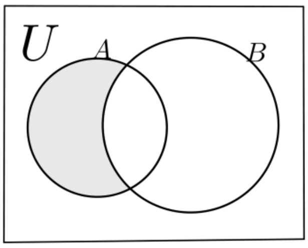


Fig. 2.12. A - B.

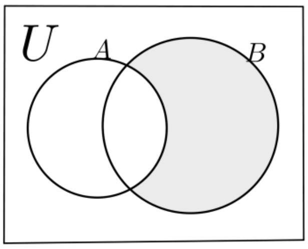


Fig.2.13. B - A.

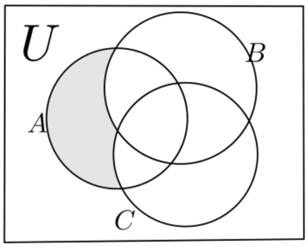


Fig. 2.14. $A - B - C$.

- Siguiendo la definición, se tiene que: $B - A = \{x \in U \,/\, x \in B \wedge x \notin A\}$
- Existe una estrecha vinculación entre el concepto de diferencia y las operaciones lógicas de conjunción y negación
- $A - B = A$ si y solo si A y B son disjuntos

Complemento de un Conjunto

Definición

El complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos de universo que no pertenecen a A. Se denota A' o A^c. Simbólicamente se escribe

$$A' = \{ x \in U \,/\, x \notin A \}$$

Observaciones

- Existe una estrecha vinculación entre el concepto de complemento y la operación lógica de negación.
- De la definición se desprende que $A' = U - A$.

Las regiones sombreadas representan a las operaciones indicadas:

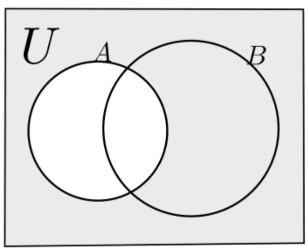


Fig. 2.15. A'

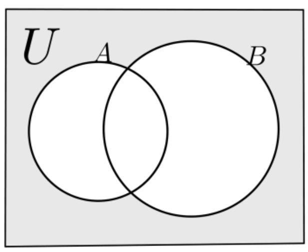


Fig. 2.16. $(A \cup B)'$

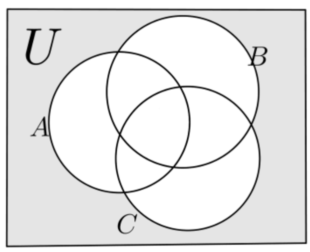


Fig.2.17. $(A \cup B \cup C)'$

Diferencia Simétrica entre Conjuntos

Definición

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

Simbólicamente: $A \oplus B = \{ x \ / \ x \in A \ \underline{\vee} \ x \in B \}$

Otra forma de expresar la diferencia se deduce si hacemos:

$$A \oplus B = \{ x \ / \ x \in A \ \underline{\vee} \ x \in B \} = \{ x \ / \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \vee (x \in B \ \wedge \ x \notin A) \},$$
$$= \{ x \ / \ (x \in A \ \wedge \ x \in B') \vee (x \in B \ \wedge \ x \in A') $$
$$= \{ x \ / \ x \in (A - B) \ \vee x \in (B - A) \ \}$$

Luego: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, por definición de unión de conjunto.

En el caso de la diferencia simétrica de tres conjuntos:

$$A \oplus B \oplus C = (A - B - C) \cup (B - A - C) \cup (C - A - B) \cup (A \cap B \cap C)$$

Las regiones sombreadas representan a las operaciones indicadas en cada pie de los diagramas de Venn:

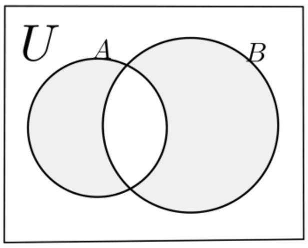


Fig.2.18. $A \oplus B$

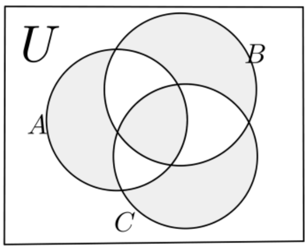


Fig.2.19. $A \oplus B \oplus C$

Observaciones

- Existe una estrecha vinculación entre el concepto de diferencia simétrica y la operación lógica de disyunción excluyente.
- De la definición se desprende que $A \oplus B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$.

Ejemplos

Sean los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$

$A = \left\{ n - n < 9 \right\}$, $B = \left\{ n - n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16 \right\}$ y $C = \left\{ n - n \text{ } es \text{ } impar \wedge n < 15 \right\}$,

Los resultados de algunas de las operaciones que podemos realizar con ellos se muestran a continuación:

$$A \cup B = \left\{ n \text{—} n < 9 \vee (n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \right\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

$$A \cup B \cup C = \left\{ n \text{—} n < 9 \vee (n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \vee (n \text{ } es \text{ } impar \wedge n < 15) \right\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 9, 11, 13\}$$

$$A \cap B = \left\{ n \text{—} n < 9 \wedge (n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \right\} = \{ 2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cap B \cap C = \left\{ n \text{—} n < 9 \wedge (n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \wedge (n \text{ } es \text{ } impar \wedge n < 15) \right\} = \varnothing$$

$$A - B = \left\{ n \text{—} n < 9 \wedge \sim(n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \right\} =$$

$$= \left\{ n \text{—} n < 9 \wedge (n \text{ } es \text{ } impar \vee n > 16) \right\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$A - B - C = (A - B) - C = \{1, 3, 5, 7\} - \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \varnothing$$

$$A' = \left\{ n \text{—} n \geq 9 \right\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, \dots\}$$

$$B' = \left\{ n \text{—} \sim (n \text{ } es \text{ } par \wedge n \leq 16) \right\} = \left\{ n \text{—} n \text{ } es \text{ } impar \vee n > 16 \right\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, \dots\}$$

$A' \cap B' = \{9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, \ldots\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{10, 12, 14, 16\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16\}$

$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C = \{1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16\} \oplus \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} =$

$= \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$

Actividad 2.6

a) Observar el diagrama de Venn y responder Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

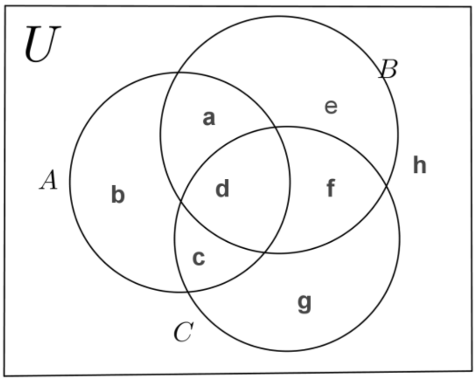


Fig.2.20. Actividad 2.6.

i) b ∈ $(A \cap B' \cap C')$

ii) a ∈ $(A \cup B) - C$

iii) B = {e}

iv) d ∉ $(A \cup B \cup C)$

v) h ∈ $(A' \cap B' \cap C')$

vii) f ∈ $(A - B)$

b) Sin expresar por extensión, realizar las siguientes operaciones y sombrear en la Fig. 2.20 la zona correspondiente a cada apartado

i) $A \cap B' \cap C'$ ii) $(A \cap B) \cup C$ iii) $(C \cup B) - A$

2.9 Leyes del Álgebra de Conjuntos

Las operaciones entre conjuntos cumplen las siguientes propiedades:

$(A')' = A$		Ley de involución
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Leyes de Idempotencia

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Leyes asociativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leyes distributivas
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de Absorción
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$	Leyes de los complementos
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Leyes de De Morgan
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mathrm{U} = A$	Leyes de los Neutros
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup U = U$	Leyes de Dominación

Tabla 2.1. Principales Leyes del Algebra

Observe que en el álgebra de conjuntos también existe dualidad entre las leyes de la intersección y la unión, así como las que tienen que ver con el vacío y el universal.

Ley de Involución

Sea $A \subseteq U$, se verifica que:

$$(A')' = A$$

Demostración

Por definición de complemento se tiene que: $A' = \{x \in U \ / \ \sim (x \in A)\}$

Luego $(A')' = \{x \in U \ / \ \sim (\sim (x \in A))\} = \{x \in U \ / \ x \in A\} = A$.

En consecuencia $(A')' = A$

Leyes de Idempotencia

Sea $A \subseteq U$, entonces:

i) $A \cup A = A$ ii) $A \cap A = A$

Demostración

i) Sea x un elemento arbitrario de U.

Entonces, $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A$ (Definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in A$ (Idempotencia de $\vee$)

Por la arbitrariedad de x se sigue que $\forall x \, [x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A]$ por la Regla de la G.U. De aquí que $A \cup A = A$

ii) $A \cap A = A$, se cumple por ser dual de $A \cup A = A$.

Leyes Conmutativas

Sean A, $B \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup B = B \cup A$ ii) $A \cap B = B \cap A$

Demostración

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (Definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$ (Conmutatividad de $\vee$)

$\Leftrightarrow x \in (B \cup A)$ (Definición de unión)

Como x es cualquiera de U, por la regla de Generalización universal se sigue que:

$\forall x\ [x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in B \cup A]$. Por lo tanto, $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$ se cumple por ser dual de $A \cup B = B \cup A$.

Leyes Asociativas

Si A, B, $C \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demostración

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in A \cup (B \cup C)$	$\Leftrightarrow x \in A \vee [x \in (B \cup C)]$	(Definición de unión)
	$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$	(Definición de unión)
	$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$	(Asociatividad de $\vee$)
	$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$	(Definición de unión)
	$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$	(Definición de unión)

De la arbitrariedad de x se sigue que (Generalización universal)

$$\forall x, [x \in (A \cup (B \cup C)) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)]$$

De aquí que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ se cumple por ser dual de $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Leyes Distributivas

Sean $A, B, C \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración:

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee [x \in (B \cap C)]$	(Definición de unión)
$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$	(Definición de intersección)
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$	(Distributivita)
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$	(Definición de unión)
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Definición de intersección)
Al ser x cualquier elemento de U, se sigue que	(Generalización universal)

$\forall x, [x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Queda probado entonces que: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ se cumple por dualidad

Leyes de Absorción

Sean $A, B \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup (A \cap B) = A$ ii) $A \cap (A \cup B) = A$

Demostración:

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee [x \in (A \cap B)]$	(Definición de unión)
$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$	(Definición de intersección)
$\Leftrightarrow x \in A$	(Absorción)
Al ser x cualquier elemento de U, se sigue que	(Generalización universal)

$\forall x, [x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A]$, consecuentemente: $A \cup (A \cap B) = A$

ii) $A \cap (A \cup B) = A$ se cumple por dualidad

Leyes del Complemento

Sea $A \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup A' = U$ ii) $A \cap A' = \emptyset$

Demostración

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in (A \cup A') \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A'$ (Definición de unión)

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$ (Complementario)

$\Leftrightarrow x \in U$ (Tautología)

Luego, $\forall x, [x \in (A \cup A') \Leftrightarrow x \in U]$ y por lo tanto $A \cup A' = U$

ii) $A \cap A' = \emptyset$ se cumple por ser dual de $A \cup A' = U$.

Leyes de De Morgan

Sean $A, B \subseteq U$, se verifica que:

i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración:

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$

$\Leftrightarrow \sim[x \in (A \cup B)]$

$\Leftrightarrow \sim[x \in A \vee x \in B]$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow\ x \in A' \wedge x \in B'$

$\Leftrightarrow\ x \in A' \cap B'$

Por lo tanto $\forall x$, [$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$].

Luego $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

(Se deja al estudiante justificar cada paso)

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ se cumple dualidad

Leyes de los Neutros

Sea $A \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cup \emptyset = A$ ii) $A \cap U = A$

Se dice que Ø es el elemento neutro respecto de $\cup$ y U es el elemento neutro respecto de $\cap$.

Demostración:

i) Sea x un elemento arbitrario de U. Entonces,

$x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in \emptyset)$ (unión) $\Leftrightarrow x \in A$ (dado que $x \in \emptyset$ es falso)

Luego, $\forall x$, [$x \in (A \cup \emptyset) \Leftrightarrow x \in A$]. (G. U.) De aquí que $A \cup \emptyset = A$.

ii) $A \cap U = A$ se cumple por ser dual de $A \cup \emptyset = A$.

Leyes de Dominación

Sea $A \subseteq U$, se verifica que:

i) $A \cap \emptyset = \emptyset$

ii) $A \cup U = U$

(Se deja al estudiante la demostración)

❒ **Ejemplos**

Sean A y $B \subseteq U$, se cumple que:

i) $A - B \subseteq A$

ii) $A \subseteq A \cup B$

iii) $A \cap B \subseteq A$

Demostración:

i) Sea $x \in A - B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$

Luego $A - B \subseteq A$

ii) Sea $x \in A$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$

Luego $A \subseteq A \cup B$

iii) Sea $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

Luego $A \cap B \subseteq A$

(Se deja al estudiante la justificación de cada paso)

Actividad 2.7

Demostrar las siguientes propiedades:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

c) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

d) $A \oplus B \oplus C = (A \cap B' \cap C') \cup (B \cap A' \cap C') \cup (C \cap A' \cap B') \cup (A \cap B \cap C)$

2.10 Partición de un conjunto

Definición

Sea A un conjunto cualquiera de un universo U, y sean A_1, A_2, A_3,..., A_k subconjuntos no vacíos de A. Se dice que el conjunto { A_1, A_2, A_3,..., A_k } es una partición de A si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) La unión de todos los subconjuntos da como resultado A. Esto es:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k = A$$

2) Todo par de subconjuntos son disjuntos. Esto es:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \quad \forall\, i \neq j$$

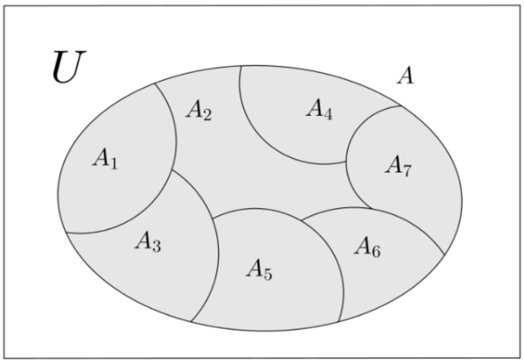


Fig. 2.21. Conjunto A particionado en siete subconjuntos.

Ejemplo

Si $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es par$\}$, $\mathbb{I} = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es impar $\}$ se tiene que $\{ \mathbb{P}, \mathbb{I} \}$ es una partición de $\mathbb{Z}$, pues $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Actividad 2.8

Sea $A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$.

Determinar si los siguientes conjuntos son particiones de A. Graficar en caso afirmativo.

a) { { 0 , 1 , 2 , 3 } , { 3 , 4 , 5 , 6 } , { 6 , 7 , 8 , 9 } }

b) { { 0 , 1 , 2 , 3 } , { 4 , 5 , 6 } , { 7 } , { 8 , 9 } }

c) $\{\{ x \in A \ / x = 2k \ , k \in \mathbb{Z} \} , \{ x \in A \ / x = 3k \ , k \in \mathbb{Z} \} \}$

2.11 Producto Cartesiano

Definición

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B , no vacíos, se define como el conjunto de todos los pares ordenados donde la primera componente es de A y la segunda componente es de B. Simbólicamente:

$$A \times B = \{(x, y) \ / \ x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

Caso particular: Si $A = B$; $A \times A = \{(x, y) \ / \ x \in A \wedge y \in A\} = A^2$.

El concepto de par ordenado es fundamental en Matemática. Se usan pares ordenados de números reales para definir números complejos, para indicar las componentes de un vector en el plano, al escribir la solución de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, etc.

Ejemplo

Sea $\mathbb{R}$: conjunto de los números reales, el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales se representa como:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ / \ x , y \in \mathbb{R} \}$$

Cada punto del plano está representado por un par ordenado (x, y) de números reales y viceversa. A $\mathbb{R}^2$ se le llama usualmente el Plano Cartesiano.

Teorema

Sean A y B conjuntos finitos

Si $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces $|A \times B| = n\,.\,m$

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, 4 < x < 9 \}$ y $B = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -8 < x \leq -6 \}$, entonces

$|A \times B| = |A|.|B| = 8$ y definido por extensión se tiene:

$A \times B = \{(5,-7);\ (5,-6);\ (6,-7);\ (6,-6);\ (7,-7);\ (7,-6);\ (8,-7);\ (8,-6)\}$

Actividad 2.9

Sean $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $B = \{a, b\}$. Contestar Verdadero o Falso justificando la respuesta:

i) $A \subseteq (A \times B)$

ii) $(A \times B) - A = B$

iii) $(1, a) \in A \times B \ \wedge\ (a, 1) \in A \times B$

iv) $(a, b) \in B \times B$

2.12 Cálculo del cardinal de la unión entre conjuntos y otras operaciones

Vimos que la cardinalidad de un conjunto es un concepto que se refiere al número de elementos que tiene dicho conjunto.

Sean A y B dos conjuntos finitos.

Si A y B son disjuntos, entonces $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$

En particular si $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición del conjunto A, entonces:

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Caso general

Si A y B son dos conjuntos finitos no disjuntos, se tiene que : .

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|$$

A esta igualdad se le llama Principio de Inclusión-Exclusión

La razón intuitiva por la que se da esta igualdad es que cuando calculamos $|A|$ y $|B|$ se están contando dos veces los elementos de $A \cap B$, por lo que debemos restar una vez el valor de $|A \cap B|$.

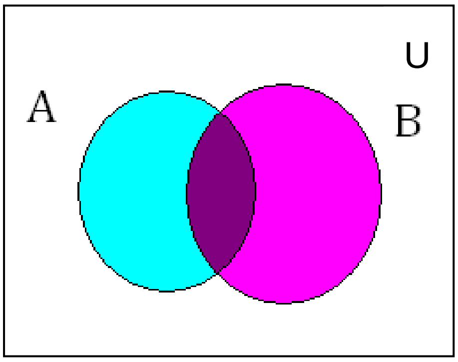


Fig. 2.22. Unión de dos conjuntos

Propiedades básicas para el cálculo de cardinales

i) $|\emptyset| = 0$

ii) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Dado que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ entonces

$|A| = |(A - B) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |A \cap B|$ por ser conjuntos

disjuntos, luego $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

iv) A ▯ $= |U| - |A'|$

Dado que $U = A \cup A'$ tenemos que: $|U| = |A \cup A'| = |A| + |A'|$, por ser A y $A´$ conjuntos disjuntos, luego $|A| = |U| - |A'|$

Ejemplos

1. Con los conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{u, v, w, x\, y, z\}$, se tiene que

$A \cap B = \{u\}$, entonces: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 6 - 1 = 10.$

2. Suponga que en un aula hay 40 alumnos, que 30 de ellos practican fútbol, 25 practican básquet y 2 alumnos no practican deportes.

Sean F y B los conjuntos de alumnos que practican futbol y básquet, respectivamente.

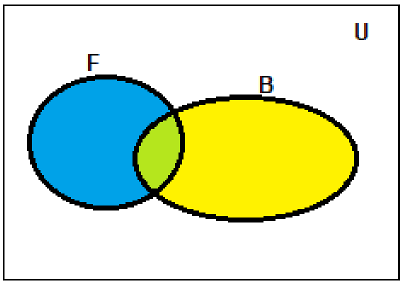


Fig. 2.23. Situación problemática.

Si se quiere encontrar el número de alumnos que practican al menos (como mínimo) un deporte y el número que practican ambos deportes, entonces debemos determinar: $|F \cup B|$ y $|F \cap B|$

Como $U = (F \cup B) \cup (F \cup B)' \rightarrow |U| = |F \cup B| + |(F \cup B)'|$, luego

$|F \cup B| = |U| - |(F \cup B)'| = 40 - 2 = 38$

De este cálculo se concluye que hay 38 alumnos que practican uno o dos deportes.

Además $|F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B|$ (por el Principio de Inclusión-Exclusión), luego

$|F \cap B| = |F| + |B| - |F \cup B| = 30 + 25 - 38 = 17$

Por lo tanto 17 alumnos practican ambos deportes.

El **principio de inclusión-exclusión** puede generalizarse a un número finito de conjuntos. Para el caso de tres, tendremos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

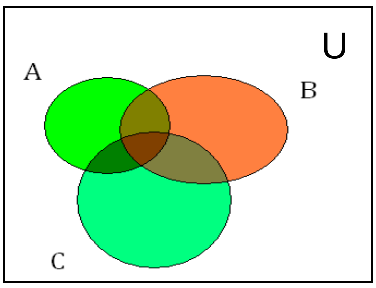


Fig.2.24 Unión de tres conjuntos

Ejemplo

En una encuesta realizada por una empresa de Turismo se preguntó a 110 personas sobre cuáles eran los destinos preferidos por cada una, pudiendo elegir uno o más lugares, o ninguno. Los resultados fueron que Bariloche fue uno de los más preferidos, 72 personas así lo manifestaron. Luego 60 personas dijeron preferir Tafí del Valle y 52 personas manifestaron gustar de Ushuaia. Gustaron de Bariloche y Tafí del Valle, 30 personas; de Tafí del Valle y Ushuaia, 36; y de Bariloche y Ushuaia, 28 personas. Además 16 personas gustaron de los tres destinos.

Sean B, T y U los conjuntos de personas que prefieren como destino viajar a Bariloche, Tafí del Valle y Ushuaia, respectivamente.

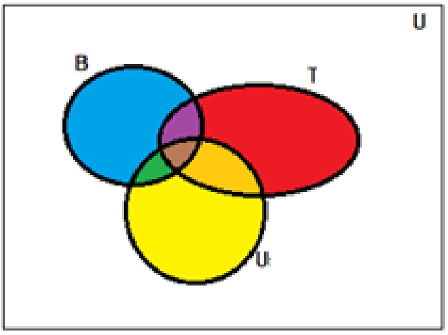


Fig.2.25. Gráfica de la situación problemática planteada

Si se quiere encontrar el número de personas que eligieron al menos uno de estos destinos y las que no eligieron ninguno, debemos calcular los siguientes cardinales: $| B \cup T \cup U |$ y $| (B \cup T \cup U)' |$

Por lo visto anteriormente tenemos que:

$$| B \cup T \cup U | = | B | + | T | + | U | - | B \cap T | - | B \cap U | - | T \cap U | + | B \cap T \cap U | =$$

$$= 72 + 60 + 52 - 30 - 28 - 36 + 16 = 106 \quad \therefore$$

Se concluye que 106 personas eligieron al menos uno de los destinos.

Como U = (B ∪ T ∪ U) ∪ (B ∪ T ∪ U)´ y ambos términos de esta unión son conjuntos disjuntos, entonces

| U | = | B ∪ T ∪ U | + | (B ∪ T ∪ U)´|

Por lo tanto | (B ∪ T ∪ U)´ | = | U | - | B ∪ T ∪ U | = 110 – 106 = 4 , de lo cual se concluye que 4 personas no eligieron ningún destino.

Actividad 2.10

1. Responde Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

a) $A = |A|$

b) $A \cup B = |A \cup B|$

c) $A \cup B = A + B$

d) $|A \cup B| = |A| \cup |B|$

e) $|A \cup B| = |A| + |B|$

f) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. En la Universidad se realizó una encuesta a 900 alumnos y se obtuvo como resultado la siguiente información: 320 alumnos hablan inglés, 225 diseñan páginas web, 520 usan Microsoft Office con solvencia, 80 conversan en inglés y diseñan páginas web, 45 diseñan páginas Web y son expertos en el paquete Office y 157 hablan en inglés y son expertos en Office, 35 conversan en inglés, diseñan pág. Web y son expertos en office.

a) ¿Cuántos alumnos conversan en inglés **o** diseñan páginas Web **o** son expertos en Office

b) ¿Cuántas alumnos conversan en inglés, **pero no** diseñan páginas Web **ni** son expertos en Office?

c) ¿Cuántas alumnos conversan en inglés **y** diseñan páginas Web **pero no** son expertos en Office?

d) ¿Cuántos alumnos contestaron que **no** conversan en inglés **ni** son expertos en páginas Web **ni** manejan Office?

2.13 Principios Fundamentales de conteo

A partir de esta sección aprenderemos a contar los elementos de conjuntos especiales, aquellos formados por maneras de realizar una operación, tarea o actividad, sin necesidad de enumerar los objetos que se desea contar.

En informática, los principios de conteo son fundamentales para el diseño de algoritmos y la resolución de problemas relacionados con la combinatoria y la probabilidad. Estos principios permiten calcular el número de formas en que pueden combinarse diferentes elementos o eventos, lo cual es esencial en áreas como la criptografía, la optimización de algoritmos y la teoría de la información.

Por ejemplo, si un algoritmo necesita generar todas las posibles combinaciones de contraseñas basadas en un conjunto dado de caracteres, los principios de conteo ayudarán a determinar cuántas combinaciones únicas son posibles. Esto es crucial para entender la complejidad computacional y la viabilidad de ciertas operaciones.

En el contexto de la programación, estos principios también se aplican para iterar sobre estructuras de datos, como arreglos o listas, donde se necesita contar o enumerar elementos de manera eficiente. Además, son utilizados para analizar la eficiencia de los algoritmos y para desarrollar soluciones a problemas de conteo complejos.

Matemáticamente, los principios fundamentales de conteo son un conjunto de reglas que se utilizan para contar el número de resultados posibles en un problema específico.

✓ Principio de Multiplicación

Si una operación (tarea, actividad o evento) se puede hacer de "m" maneras diferentes y otra de "n" maneras distintas, y si ambas no son excluyentes, sino que se pueden llevar a cabo juntas o en secuencia, entonces el número total de formas o maneras en que pueden realizarse ambas operaciones es "$m.n$".

🗒 Ejemplos

i) Se lanzan dos dados de distintos colores. ¿Cuántos resultados son posibles?

Si bien los dados caen simultáneamente, como el resultado de uno no influye en el otro, las operaciones o tareas serían:

O_1: lanzo el primer dado,

O_2: lanzo el segundo dado.

Así definidas las tareas, las maneras de realizarlas serian: $m_1 = 6$; $m_2 = 6$.

Por lo tanto, la cantidad de resultados posibles de lanzar dos dados es: 6.6 = 36.

ii) Se lanza un dado y se tira una moneda. ¿Cuántos resultados son posibles?

Si bien el dado y la moneda pueden tirarse simultáneamente, el resultado de uno no influye en el otro, las tareas serían:

O_1: lanzo el dado, luego hay $m_1 = 6$ posibles resultados (uno por cada cara)

O_2: tiro la moneda, luego se tiene $m_2 = 2$ posibles resultados para la moneda (cara o cruz).

Para calcular el número total de resultados posibles, multiplicamos las posibilidades del dado por las de la moneda:

$m_1 . m_2 = 6$ (dado) $\times 2$ (moneda) $=12$

Por lo tanto, hay 12 resultados posibles al lanzar un dado y tirar una moneda.

En general si se tienen k tareas (eventos, actividades u operaciones) que se pueden hacer de $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ maneras distintas, y si se pueden realizar conjuntamente o en secuencia, entonces el número total de maneras en que pueden realizarse las k tareas se calcula como "$m_1 . m_2 . m_3 \; \dots \; m_k$"

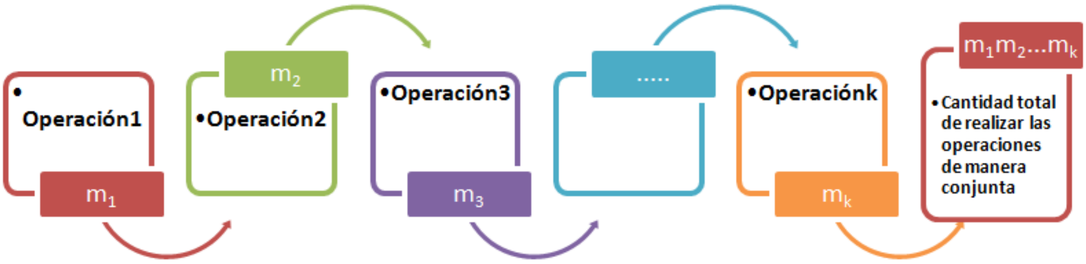


Fig. 2.26. Generalización del Principio de multiplicación

Ejemplos

i) Un identificador de etiqueta para un programa de computadoras consta de una letra seguida de tres dígitos. ¿cuántos identificadores distintos de etiquetas será posible tener

a) si no se permite repetición? y b) si se permite repeticiones?

a) Si no se permiten repeticiones las tareas serian:

O_1: elegir una letra,

O_2: elegir un primer número

O_3: elegir un segundo número, distinto al anterior

O_4: elegir un tercer número, distinto a los anteriores.

Así definidas las tareas, las maneras de realizar cada una serian:

m_1 = 26 (excluida la ñ); m_2 = 10; m_3 = 9 y m_4 = 8.

Por lo tanto, la cantidad de maneras de diseñar identificadores, con la condición de no repetir dígitos es: 26.10.9.8 = 18720

b) En el caso que se permitan repeticiones, las tareas u operaciones serian:

t_1: elegir una letra,

t_2: elegir un primer número,

t_3: elegir un segundo número,

t_4: elegir un tercer número,

Así definidas las tareas, las maneras de realizarlas serian:

m_1 = 26 ; m_2 = 10; m_3 = 10 y m_4 = 10.

Por lo tanto, la cantidad de maneras de diseñar identificadores, con la posibilidad de repetir dígitos es: 26 . 10 . 10. 10 = 26000.

✓ Principio de Adición

Si una operación (tarea, actividad o evento) se puede hacer de “m” maneras diferentes y otra de “n” maneras distintas, y si las dos operaciones en cuestión no pueden hacerse juntas ni en secuencia por tratarse de operaciones excluyentes, entonces el número total de formas en que pueden realizarse ambas operaciones es “$m + n$”.

En general, si se deben realizar k operaciones que se pueden hacer de $m_1, m_2, \ldots, m_k$ maneras distintas, y si ellas son excluyentes, esto es, no se pueden llevar a cabo de manera conjunta ni en secuencia, entonces el número total de formas en que pueden realizarse las k operaciones es $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$

Fig. 2.27. Generalización del Principio de Adición

Ejemplos

i) Un estudiante debe elegir un libro de su biblioteca para leer en las vacaciones. Su biblioteca contiene 10 libros distintos de ficción y 14 novelas distintas. ¿De cuántas maneras puede hacer la elección?

El estudiante que debe elegir un libro de su biblioteca se analiza que tiene dos modos excluyentes de hacer la operación:

O_1: elegir un libro de ficción

O_2: elegir una novela

Luego m_1= 10 y m_2 = 14, entonces la cantidad de maneras de elegir un libro, ficción o novela, es 10 + 14 = 24.

ii) Se tira un dado dos veces y se registra el resultado de la suma de ambas tiradas. ¿En cuántos resultados la suma es 7 o es 11?

Tirar un dado dos veces y sumar las tiradas, se analiza que hay dos modos excluyentes:

O_1: la suma es 7

O_2: la suma es 11

Luego m_1= 6, porque se podrían dar los siguientes casos, que los dados sean: 1 y 6; 2 y 5; 3 y 4; 6 y 1; 5 y 2; 4 y 3; y m_2 = 2, porque se podrían dar los siguientes casos: 5 y 6; 6 y 5

Entones la cantidad de maneras de obtener 7 o 11, es 6 + 2 = 8.

iii) Lenna dispone de un pollo para cocinarlo. En su libro de recetas encuentra tres recetas diferentes para hacerlo al horno, dos para hacerlo frito y cuatro para prepararlo cocido. ¿De cuántas maneras diferentes puede Lenna preparar su pollo?

En este caso los métodos para prepararlo son excluyentes, por tanto, se puede preparar de: 3 + 2 + 4 = 9 maneras diferentes; donde $m_1 = 3$ (recetas diferentes para hacerlo al horno); $m_2 = 2$ (recetas diferentes para hacerlo frito) y $m_3 = 4$ (recetas diferentes para prepararlo cocido).

iv) Cuántas cadenas de 8 bits inician con 11 y terminan con 00?
Podemos imaginar que la tarea se puede construir en tres pasos:
t_1: Elegir los dos primeros bits que deben ser 11 → 1 posibilidad
t_2: Elegir los 4 siguientes bits (que por el mismo principio de la multiplicación se tendrá 2^4) → 16 posibilidades,
t_3: Elegir los 2 últimos bits que deben ser 00 → 1posibilidad.
Luego el número de posibles cadenas es: $1 \cdot 16 \cdot 1 = 16$.

Actividad 2.11

1. Se tienen diez libros de programación y once de matemática discreta, todos ellos diferentes, ¿cuántos arreglos de dos libros, que contengan un libro de cada tema, se pueden formar con todos los libros si primero van los de programación, seguidos por los de matemática discreta?

2. Viggo quiere comprar un automóvil, puedo elegir entre distintas marcas y modelos. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De cuántas maneras posibles puedo elegir un automóvil?

3. ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los primeros 6 números naturales?

2.14 Combinatoria

Los Principios Fundamentales de Conteo vistos anteriormente constituyen la base del Análisis Combinatorio y es lo primero a plantear dada una situación problemática. Habrá casos donde se aplicarán los dos principios: el de la multiplicación y el de la suma, en otros casos solo uno de ellos.

Pero específicamente cuando hablamos de Combinatoria nos referimos a la rama de la matemática que estudia las formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto finito. Estas agrupaciones las podemos realizar de distintas formas, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no y si influye o no el orden de colocación de los elementos.

Presentamos a continuación las definiciones de Permutación y Combinación, las cuales parten de un conjunto con n objetos, y nos preguntamos cuál es el número de arreglos de r objetos tomados del conjunto dado? La respuesta depende de tres factores:

- ¿Importa el orden en el que acomodamos los m objetos?
- ¿Puede haber elementos repetidos en la selección de los m objetos?
- ¿Hay entre los elementos algunos indistinguibles?

Permutaciones

Definición

Una permutación es un arreglo (o disposición) ordenado de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos ($r \leq n$)

A las permutaciones se les dice también arreglos de tamaño r, o permutación de n objetos tomados r a la vez. Se designa por; $P(n,r)$, $P_{n,r}$, P_n^r o nPr

Considere el conjunto de letras {a,b,c,d} entonces:

i) bad, adb, cbd y bca son permutaciones de las cuatro letras tomadas tres a la vez,

ii) ad, cb, da, y bd son permutaciones de las cuatro letras tomadas dos a la vez,

iii) bdca, dcba y acdb son permutaciones de las cuatro letras (tomadas todas a la vez).

Dependiendo del tipo de selección que realicemos, se pueden presentar las siguientes posibilidades:

1. **Permutación sin repetición**

2. **Permutación con repetición**

Permutación sin repetición

📚 **Definición**
Es una disposición (o arreglo), donde los n objetos son distintos y no se permite la repetición al seleccionar r de ellos. Usaremos la notación $P(n, r)$.

Para encontrar una expresión para $P(n, r)$ observemos que el primer elemento de una permutación de n objetos tomando r a la vez puede ser escogido de n maneras diferentes, después de esto, el segundo elemento de la permutación puede ser escogido de $n - 1$ maneras, el tercer elemento de la permutación puede ser escogido de $n - 2$ maneras; y así sucesivamente hasta elegir el elemento de orden r (el último) de la permutación puede ser escogido de
$n - (r - 1) = n - r + 1$ maneras, Así por el principio de multiplicación:

$$P(n, r) = n.(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

🗒 **Ejemplos**

i) Se necesitan crear claves bancarias alfabéticas con la condición de que sean tres letras distintas. Una clave posible es AXW pero también WXA ya que si intercambiamos el orden se forma otra clave.

Para obtener el número total de claves bancarias, pensemos que tenemos la tarea de cubrir tres lugares por tres letras. Podemos escoger para el primer lugar, cualquiera de las 26 letras del abecedario; pero como no se puede repetir letra tenemos 25 posibilidades para el segundo lugar y 24 para el tercero.

La cantidad total de claves a formar con tres letras distintas es:

$$P(26,3) = 26 \,.\, 25 \,.\, 24 = 15600.$$

ii) Ocho caballos compiten en una carrera hípica. Si se sabe que los caballos nunca cruzan iguales la meta, ¿de cuántas maneras distintas pueden estos

ocho caballos ocupar el primer, segundo y tercer lugar?

Para este problema elegimos 3 caballos entre 8 y los disponemos en orden. En el arreglo ordenado no se repiten elementos (nos dicen que no se presentan empates) y por tanto se trata de una permutación sin repetición. Para contar el número de dichos arreglos debemos realizar tres selecciones (una para cada uno de los tres primeros puestos de llegada). La primera selección requiere elegir entre 8 caballos. Puesto que el caballo que llegó de primero no puede llegar de

segundo, la segunda selección requiere elegir entre 7 caballos y así la tercera selección requiere elegir entre 6 caballos. Por el principio multiplicativo, tenemos

$P(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ diferentes maneras en las cuales los ocho caballos pueden llegar en primer, segundo y y tercer lugar.

Permutación con repetición

Definición:

Es una disposición donde los n objetos son distintos y se permite repetición al seleccionar r de ellos.

Usaremos la notación $P'(n,r)$.

La cantidad de permutaciones con repetición de tamaño r seleccionados
de un grupo de n objetos distintos, con $r \leq n$, está dado por:

$$\boldsymbol{P'(n,r) = \underbrace{n.n\ldots.n}_{r} = n^r}$$

🗒 **Ejemplos**

i) Si en el ejemplo anterior se hubiera permitido que las letras que componen las claves se repitan, tanto AXW como AAW son resultados posibles y por lo tanto se deduce que la cantidad total de posibles claves a formar con tres letras es:

$\boldsymbol{P'(26,3)} =$ 26 . 26 . 26 = 26^3 = 17576.

ii) ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si se permiten dígitos repetidos?

Para este problema elegimos 3 dígitos entre 10 opciones y los disponemos en orden. En el arreglo ordenado se pueden repetir elementos y por tanto se trata de una permutación con repetición. Cada selección requiere elegir 1 dígito de 10 opciones disponibles. Por el principio multiplicativo, tenemos 10 · 10 · 10 = 1000 posibilidades: $\boldsymbol{P'(10,3) = 10^3}$

Notación Factorial

Se usa la notación $n!$, léase “ n factorial”, para denotar el producto decreciente de los enteros positivos de n a 1.

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$$

📚 **Propiedades del Factorial de un número**

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que: $n! = n.(n-1)!$ y $0! = 1$.

Observación

En $P(n,r) = n.(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ si $r = n$ se tendrán las permutaciones sin repetición de tamaño n, el más grande de los tamaños a tomar, y el cálculo de la cantidad de permutaciones de n elementos tomados de a n es:

$$P(n,n) = P(n) = n.(n-1).(n-2) \dots 1 = n!$$

El número de permutaciones de n elementos está dada por

$$n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

En otras palabras, existen $n!$ maneras distintas para ordenar n elementos, de un con junto de n elementos.

Ejemplos

i) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 libros distintos sobre una repisa?

Como los 5 libros son distintos, una vez elijamos uno, ´este no se repetirá en el arreglo.

Utilizando el principio multiplicativo y la notación de la definición de P(n,r), tenemos n = 5, r = 5 y P(5, 5) = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 maneras.

ii) Del conjunto de letras {a,b,c,d} se tiene:

- P(4,3) = 4.3.2 = 24 permutaciones de las cuatro letras tomadas tres a la vez. Estas son; abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cad, cab, cbd, cba, cdb, cda, dac, dab, dbc, dba, dca, y dcb.
- P(4,2) = 4.3 = 12 permutaciones de las cuatro letras tomadas dos a la vez. Estas son; ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, y dc.
- P(4) = 4! = 4.3.2.1 = 24 permutaciones de las cuatro letras (tomadas todas a

la vez). Estas son; abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cadb, cabd, cbda, cbad, cdba, cdab, dacb, dabc, dbca, dbac, dcab, y dcba.

Observaciones

- Un diagrama de árbol es una representación gráfica que ilustra las formas en las que se llevan a cabo las agrupaciones de elementos.

Veamos un ejemplo.

Una ONG quiere escoger una nueva junta directiva. Al cargo de presidente optan 3 personas: María, Julia y Pedro; al de secretario, 2: Belén y Luis, y al de tesorero, otras 2: Vanesa y Carlos. Representa en un diagrama en árbol todas las posibilidades de elección.

El número de elecciones posibles es 3· 2· 2 =12 , según se puede comprobar en el diagrama de árbol

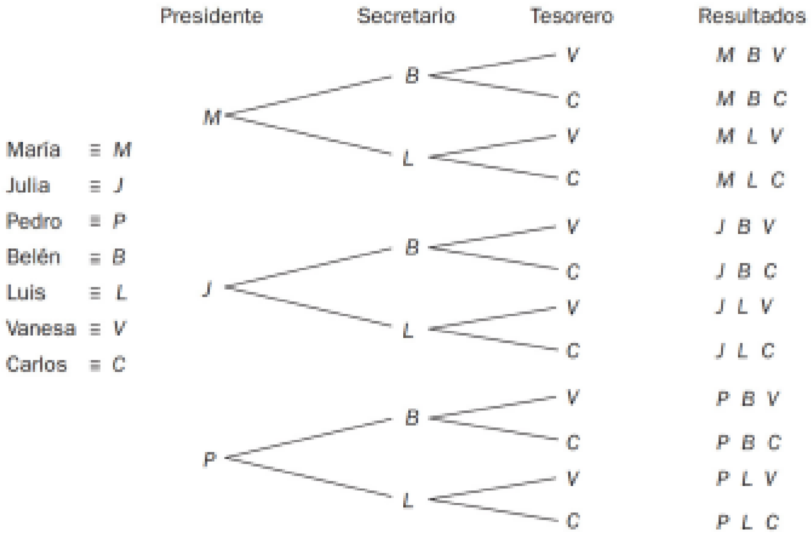


Fig. 2.28. Diagrama de árbol

- De la fórmula $P(n,r) = n.(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,.\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$

  Es decir que: El número de arreglos de n objetos utilizando $r \leq n$ de ellos donde:

  1. los n objetos son distintos,

2. una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo, y
3. el orden importa

está dado por $P(n, r) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$

Veamos un ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden dos personas cumplir años en fechas distintas? Suponga que en todos los años hay 365 días.

Debemos elegir fechas de cumpleaños entre 365 posibles sin permitir repeticiones. Se trata de una permutación sin repetición donde n = 365 y r = 2

$$P(365{,}2) = \frac{365!}{(365-2)!} = \frac{365!}{363!} = \frac{365.\ 364.\ 363!}{363!} = 365 \,.\, 364 = 132860$$

- No se verá en este curso la permutación con objetos indistinguibles (similares), ni permutaciones circulares.

Actividad 2.12

1. Realizar los siguientes cálculos, si es posible:

a) P(10,3) b) P(10,-3) c) P(3,3) d) 10!

e) 10! / 8! f) 10! / (5!.5!) g) 10! / (5!.5) h) 10! / (2!.5!).

2. De cuantas maneras se pueden formar códigos alfanuméricos de longitud 8 si:

a) No se permiten repeticiones, b) Se permiten repeticiones

3. ¿Cuál es el número de permutaciones de las letras de la palabra COMPUTER?

4. De cuantas maneras se pueden acomodar 5 libros distintos en una repisa?

5. ¿De cuántas formas pueden organizarse un grupo de 7 personas en una fila de 7 asientos?

Combinaciones

A diferencia de lo que ocurre con las permutaciones, en las combinaciones el orden de aparición de los objetos es irrelevante (no importa). En un juego de póquer por ejemplo, no importa el orden en que uno reciba las cartas sino la *combinación* de las cartas.

Combinaciones ordinarias (sin repetición)

📚 **Definición**

Una combinación es un arreglo de r objetos seleccionados de n objetos distintos sin repetir, en el que el orden no importa.

Las notaciones: $C(n,r)$; C_n^r , nCr o $\binom{n}{r}$ representan el número de combinaciones de n objetos distintos utilizando r de ellos.

En particular al número $\binom{n}{r}$ se denomina número combinatorio y se lee "n sobre r".

Consideremos el conjunto {a, b, c, d} y enumeremos todas las combinaciones de dos objetos (r = 2) de los 4 objetos disponibles (n = 4).

Como el orden de aparición no importa, tener ab es lo mismo que tener ba y por tanto el total de parejas que podemos formar es ab, ac, ad, bc, bd, cd y C(4, 2) = 6.

En este ejemplo fue posible hallar C(4,2) porque enumeramos todas las combinaciones posibles, pero en general, ¿cómo hallamos $C(n,r)$ cuando no podemos enumerar todas las combinaciones?

Observemos de la definición de factorial, que $r!$ es el número de combinaciones de r objetos distintos y por lo tanto, si al número total de combinaciones $C(n,r)$ lo multiplicamos por $r!$, obtenemos el número total de permutaciones $P(n,r)$ Por consiguiente:

$$r!\,C(n,r) = P(n,r) \Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!.(n-r)!} \quad , \quad 0 \le r \le n$$

Es decir: El número de arreglos de n objetos utilizando r ≤ n de ellos donde:

1. los n objetos son distintos,
2. una vez utilizado un objeto no se puede usar de nuevo, y
3. el orden no importa está dado por

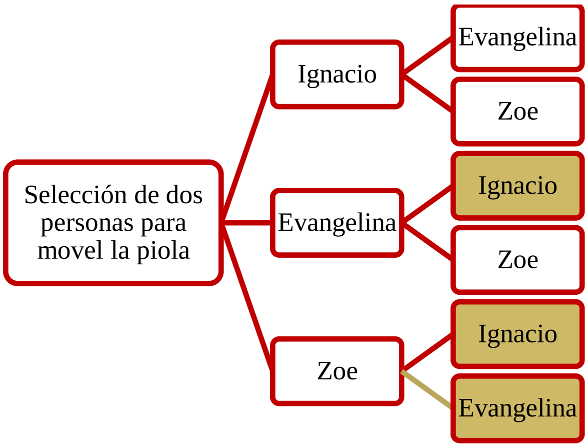
$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!.(n-r)!} \quad \text{con} \quad 0 \le r \le n$$

Ejemplos

i) Ignacio, Evangelina y Zoe están jugando a saltar la piola y deben decidir quiénes la mueven. ¿De cuantas maneras pueden hacerlo?

Fig. 2.29. Salto de la piola

Observemos que cuando elegimos a las personas que moverán la piola no importa el orden en que la nombremos, da lo mismo elegir el par (Ignacio, Evangelina) que (Evangelina, Ignacio) y por lo tanto en un esquema de diagrama de árbol hay que eliminar aquellas selecciones que no impliquen una opción distinta. En el siguiente diagrama se representó a las opciones eliminadas con un color oscuro.



Entonces, las selecciones de las personas para mover la piola son 3:

(Ignacio, Evangelina), (Ignacio, Zoe) y (Evangelina, Zoe)

A cada selección de estas personas (arreglo) se le llama Combinación de tamaño 2 de un conjunto de 3 elementos.

Observemos que el cálculo de la cantidad de combinaciones se dedujo a partir de todas las permutaciones posibles descartando aquellas que solo diferían en el orden.

$$C(3,2) = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{3.2}{2} = 3$$

ii) ¿Cuántos grupos de 3 estudiantes (A, B y C) se pueden armar con un total de 10 estudiantes?

Aquí no importa el orden, porque da lo mismo ABC o BAC, por lo tanto, el cálculo de la cantidad de grupos posibles es:

$$C(10,3) = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10.9.8.\cancel{7}!}{\cancel{7}!\cdot 3.2.1} = 120$$

iii) En un parcial de MD, un estudiante debe responder a siete preguntas cualesquiera de un cuestionario de diez. Como no importa el orden, el estudiante puede responder el examen de:

$$C(10,7) = \frac{10!}{(10-7)!\cdot 7!} = \frac{10.9.8.7!}{3!\cdot 7!} = \text{ 280 maneras}$$

Nota:

Las combinaciones con repetición, no se verán en este curso.

Actividad 2.13

1. Diez niños juegan a saltar la piola. De cuantas maneras se pueden elegir a 2 niños para que muevan la piola si: a) Todos los niños quieren mover la piola, b) Hay un niño que no puede saltar y por lo tanto siempre quiere mover la piola, c) Hay tres niños que no quieren mover la piola, solo quieren saltar.

2. Se quiere elegir una mano de cinco cartas tomándola de una baraja de 52 cartas. De cuantas maneras puede hacerse si: a) No hay restricciones, b) En la mano de cinco cartas debe haber exactamente 2 cartas de corazones, c) En la mano de cinco cartas debe haber al menos 2 cartas de corazones, d) Debe haber cuatro cartas de la misma denominación (con el mismo número o letra).

3. Considerando arreglos de bits de tamaño ocho ¿Cuántos se pueden conformar de tal modo que:

a) contengan exactamente tres ceros?, b) ¿contengan exactamente tres ceros seguidos?, c) contengan tres o más ceros seguidos?