Análisis Matemático I - Año 2024

Trabajo Práctico - Integral definida

Ejercicio 1

Encuentra el área bajo la curva de ecuación $y = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ planteando la suma de Riemman y siguiendo los pasos explicados en teoría.

La suma de los cubos de los primeros n números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Ejercicio 2

Evalúa las siguientes integrales definidas, siempre que las funciones sean integrables en el intervalo correspondiente. Si puedes, utiliza la regla de Barrow y luego verifica con GeoGebra. En caso de que no puedas usar la regla de Barrow, ya sea porque la función no tiene primitiva elemental o porque necesitarías aplicar técnicas de integración no estudiadas aún, utiliza directamente GeoGebra. Y en caso de que la función no sea integrable en el intervalo indicado, explica por qué.

1. $\displaystyle\int_{1}^{4} (x^3 + 1)\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{3} e^{-x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x}\, dx$
6. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$
7. $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x|\, dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln\left(1 + x^2\right) dx$
9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x^2\, dx$
10. $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$ con $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Ejercicio 3

En teoría se ha presentado la definición de la inversión de los límites de integración:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Justifica esta igualdad de dos maneras:

- Geométricamente, con el signo de dx.
- Algebraicamente, con la forma integral del TFC.

¿Qué explicación te parece más convincente?

Ejercicio 4

En la teoría se ha presentado el teorema de la linealidad de la integral definida, que también puede expresarse por medio de dos igualdades. Para el producto de una constante real por una función:

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

Y para la suma de funciones:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Justifica estas propiedades de dos maneras:

- Geométricamente, con las áreas bajo las curvas en cada caso.
- Algebraicamente, con las sumas de Riemann.

Ejercicio 5

1. Se toma un punto al azar de la región limitada por los ejes coordenados, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta vertical $x = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la subregión que se encuentra entre las rectas $x = 0.7$ y $x = 1$?
2. Mismo enunciado del punto anterior, salvo que la curva tiene ecuación $y = e^{-x^2}$.

Ejercicio 6

Una partícula se mueve en línea recta por 5 segundos con aceleración variable t^2, donde t es el tiempo en segundos. La partícula se encontraba inicialmente en reposo. ¿Cuál fue su velocidad media durante ese intervalo y en qué momento alcanzó una velocidad instantánea de ese mismo valor? ¿Cuál fue su velocidad instantánea al final del movimiento? ¿Y cuál su desplazamiento durante los 5 segundos?

Ejercicio 7

Un objeto se cuelga de un resorte y hace que se estire 20 cm. El resorte tiene una constante k de 200 N/m (newton por metro). ¿Qué trabajo realiza el peso para estirar el resorte?

Recuerda que trabajo de una fuerza es igual al producto de la fuerza por el desplazamiento. Pero en esta situación la fuerza no es constante, sino que, según la ley de Hooke, es proporcional al desplazamiento Δx respecto de la posición de equilibrio del resorte, es decir, $F = k\,\Delta x$. ¿Cómo deberías proceder?

Ejercicio 8

La tensión v en un condensador de capacitancia C está dada por la expresión:

$$v = \frac{1}{C} \int_0^T i(t)\, dt + v_0$$

En un determinado circuito, con una funte de tensión de valor V_ε y un resistor de resistencia R, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ i(t) &= \frac{V_\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned}$$

1. ¿Es v una constante o una variable? De ser una variable, ¿de qué depende su valor?
2. ¿Qué pasa si el tiempo T es muy grande, es decir, si $T \to \infty$?

Ejercicio 9

Un tanque de petróleo sufre una rotura y empieza a perder su contenido a una tasa (en litros por hora) de:

$$L'(t) = 80 \frac{\ln(t+1)}{t+1},$$

donde t es el tiempo en horas transcurrido desde que se produjo la rotura.

1. Encuentra cuántos litros se perderían el primer día completo si no se reparase la rotura.
2. Encuentra cuántos litros se perderían el segundo día.
3. ¿Qué pasaría a largo plazo con la pérdida de petróleo por día?

Pista: Plantea la integra definida que necesitas para resolver el problema y observa con atención la función integrando. ¿Reconoces a la función logaritmo y a su derivada? ¿Te sugiere eso una idea acerca de cómo podrías aplicar la regla de Barrow para evaluar la integral?

Ejercicio 10

La potencia eléctrica consumida en un circuito resistivo puro es $P(t) = i^2(t)\,R$, donde $i(t)$ es la intensidad de corriente medida y R es la resistencia equivalente de los resistores del circuito, según sea su configuración. Si la corriente se ha generado al aplicar una fuente de tensión alterna, como sería el caso al conectar, por ejemplo, una plancha o una tostadora a la red de suministro domiciliario de energía eléctrica, entonces la corriente será una onda sinusoidal de ecuación:

$$i(t) = I\,\sin\left(\omega\,t + \theta\right),$$

donde I es la amplitud de la onda sinusoidal (es decir, su valor máximo), ω es la fracuencia angular medida en radianes por segundo y θ es el ángulo de fase inicial, que a los fines de este ejercicio no importa, por lo que puede suponerse $\theta = 0$.

La frecuencia angular, a su vez, se relaciona con la frecuencia cíclica f por la expresión $\omega = 2\pi\,f$. En Argentina, la frecuencia f es de 50 Hz, es decir, 50 ciclos por segundo, por lo que $\omega = 100\pi$.

Considera una corriente $i(t) = 4\,\sin(100\pi\,t)$. ¿Cuál es el período de esta función? ¿Cuál es el valor medio de la potencia en un período?

Pista: Comprueba que $F(x) = x - \sin x\,\cos x$ es una antiderivada de $f(x) = \sin^2 x$, salvo por una constante multiplicativa. Encuentra el valor de esa constante y utiliza esos resultados para resolver el ejercicio.

Ejercicio 11

En la teoría se han dado tres interpretaciones de la integral definida. Tomando en cuenta los ejercicios anteriores, expresa interpretaciones físicas de la integral definida.

Ejercicio 12

La población de un país aumenta constantemente a una tasa anual de $(1+t)\%$, donde t es el número de años que han transcurrido desde un determinado momento.

1. Encuentra la expresión para $P'(t)/P(t)$.
2. Encuentra $\displaystyle\int_a^b \frac{P'(t)}{P(t)}\,dt$ en términos de $P(a)$ y $P(b)$.

3. ¿Cuántas veces mayor será la población del país dentro de 6 años?

Pista: En el segundo punto, observa que el integrando es la derivada de una función logarítmica.

Ejercicio 13

Evalúa los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\displaystyle\int_1^x (z^3 + z^2 - 5z + 3)\,dz}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \ln(1 + u) \sin u \, du}{x^3}$

Ejercicio 14

Analiza los intervalos de monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de las siguientes funciones y esboza sus gráficas:

1. $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$
2. $g(x) = \displaystyle\int_0^x \cos u^2\,du$