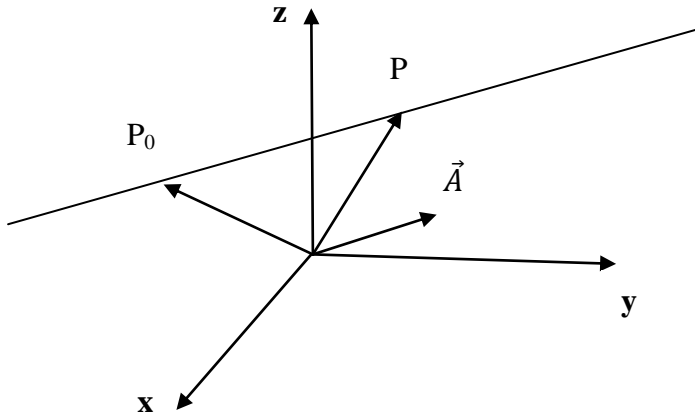


APLICACIONES DE VECTORES

Ecuación vectorial de la Recta en R^3



Consideremos el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un punto genérico $P(x, y, z)$ tracemos una recta cualquiera que tiene la dirección de un vector $\vec{A}(a, b, c)$. Para encontrar la ecuación de la recta, ubicamos los vectores:

$\overrightarrow{OP_0} = P_0$ y $\overrightarrow{OP} = P$. Observamos que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{A} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{A}$.

La Ecuación vectorial de la recta en R^3 , determinada por P_0 y la dirección del vector \vec{A} , es:

(1) $\vec{P} = \vec{P_0} + \lambda \vec{A}$, donde λ es el parámetro de la recta. Cuando el parámetro varía desde $-\infty$ a ∞ , el punto P describe a la recta.

Si escribimos la ecuación (1) en términos de sus componentes, obtenemos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c).$$

Igualando las componentes homólogas, se tiene:

$$(2) \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Que son las ecuaciones paramétricas de la recta en } R^3. \\ \text{Si en (2) eliminamos el parámetro } \lambda, \text{ de cada ecuación obtenemos:} \end{array}$$

$\frac{x - x_0}{a} = \lambda$; $\frac{y - y_0}{b} = \lambda$; $\frac{z - z_0}{c} = \lambda$. Igualando las tres expresiones, se tiene:

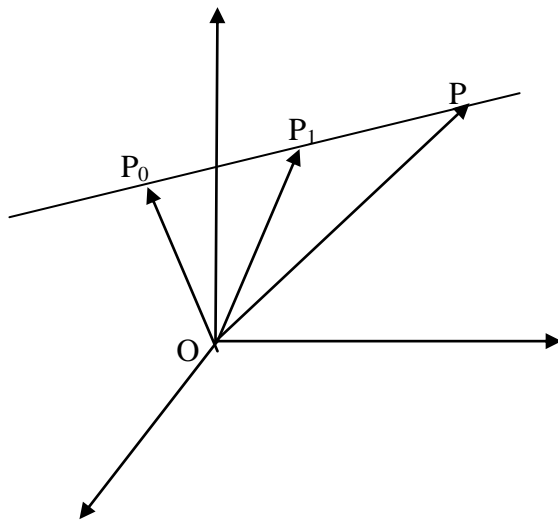
$$(3) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{Ecuaciones cartesianas de la recta en } R^3$$

Observación: los números a, b, c , se llaman números directores de la recta. Y si llamamos α, β y γ los ángulos que forman el vector \vec{A} , con los ejes coordenados. Los cósenos directores de las rectas serían $\cos \alpha, \cos \beta$ y $\cos \gamma$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

Los cósenos directores tienen la propiedad que: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Recta determinada por 2 puntos



Consideramos 2 puntos sobre la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ para encontrar la ecuación de la recta necesitamos conocer el vector dirección de la misma.

Podemos considerar como vector dirección al vector que une P_0 con P_1 , es decir :

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{P_1} - \vec{P_0}$$

La ecuación de la recta será:

$$\vec{P} = \vec{P_0} + \lambda(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \quad \text{Ecuación vectorial de la recta que pasa por 2 puntos.}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por 2} \\ \text{puntos en } \mathbb{R}^3. \end{matrix} \quad (5)$$

Si de las ecuaciones (5) eliminamos el parámetro λ , se obtiene

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad \text{Ec. cartesiana de la recta que pasa por 2 puntos en } \mathbb{R}^3.$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene la dirección de $\vec{A} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 2, -7) \rightarrow \vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{A} \rightarrow (x, y, z) = (1, 2, -7) + \lambda(2, -1, 4)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -7 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{Ecuación paramétrica}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{4} \quad \text{Ecuación cartesiana}$$

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 5)$ y $(3, 2, 2)$.

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)$$

$$(x, y, z) = (2, -1, 5) + \lambda(3 - 2, 2 + 1, 2 - 5)$$

$$(x, y, z) = (2, -1, 5) + \lambda(1, 3, -3)$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-3}$$

Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos.

Observación:

Si estamos en \mathbb{R}^2 o sea que el punto P_0 y el vector A pertenecen al plano XY , la expresión 1 sigue siendo válida y la ecuación 2 se reduce a solo 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad \text{Ecuación paramétrica de la recta en } \mathbb{R}^2$$

Si eliminamos λ queda $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ ecuación cartesiana

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$$

$$bx - ay + (bx_0 + ay_0) = 0$$

Que tiene la forma $Ax + By + C = 0$: Ecuación general o implícita de la recta en \mathbb{R}^2

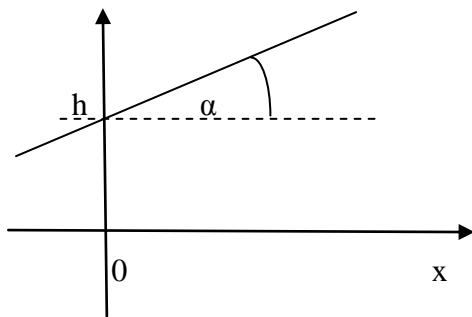
De la ecuación (a) podemos escribir:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0$$

$$y = mx + h$$

Donde $m = \frac{b}{a}$: pendiente de la recta, que se define como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta. Es decir: $m = \operatorname{tg} \alpha$, y α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo x .



h se llama ordenada al

$$\text{origen : } h = -\frac{b}{a}x_0 + y_0$$

Si conocemos 2 puntos $P_0(x_0, y_0)$; $P_1(x_1, y_1)$ en R^2 la ecuación 4 sigue siendo válida:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Eliminando λ tenemos:

$$\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ecuación cartesiana de la recta que pasa por 2 puntos

Ejemplo: Encontrar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por $P_0(1,2)$ y es paralela al

vector $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$$P = P_0 + \lambda A \rightarrow (x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 1)$$

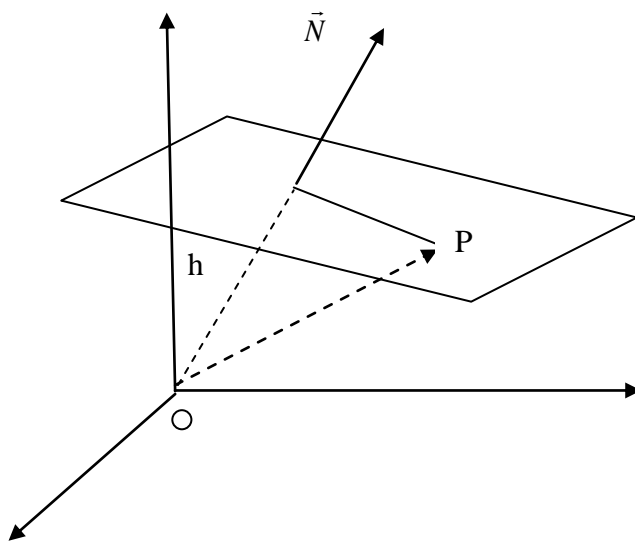
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \text{ eliminando el parámetro se tiene } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow 2(y-2) = (x-1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{Ecuación explícita.}$$

Ecuación vectorial del plano

Dado un plano, consideramos un vector normal $\vec{N} = (A, B, C)$ al mismo. Para encontrar la ecuación del plano, consideramos un punto genérico $P(x, y, z)$ del plano.

Formamos el vector \vec{P} , uniendo el origen con el punto P y hacemos el producto escalar de los vectores \vec{N} y \vec{P} .



Recordemos que, el producto escalar se puede escribir:

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = |\vec{N}| \cdot \text{proyección}_{\vec{N}} \vec{P}$$

Si llamamos $h = \text{proyección}_{\vec{N}} \vec{P}$

$h =$ distancia desde el origen al plano.

$$\therefore \vec{N} \cdot \vec{P} = |\vec{N}| \cdot h$$

Como módulo de \vec{N} y h son constantes independientes de \vec{P} ,

$$|\vec{N}| \cdot h = \text{cte}, \text{ que llamamos } |\vec{N}| \cdot h = D,$$

Se llega a la ecuación $\boxed{\vec{N} \cdot \vec{P} = D}$ que es la ecuación vectorial del plano, donde \vec{N} es un vector de módulo cualquiera perpendicular al plano y \vec{P} es un punto genérico.

Si $D = 0 \Rightarrow h = 0$ entonces el plano pasa por el origen y la ecuación es $\vec{N} \cdot \vec{P} = 0$.

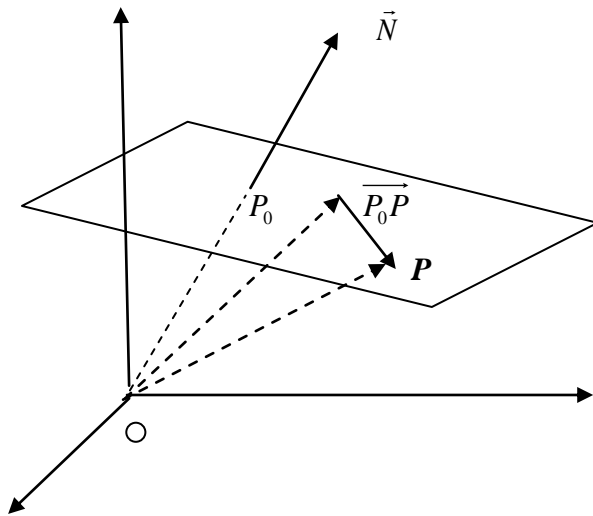
Si $D \neq 0$; su signo depende del sentido del vector \vec{N} ; pues tomando $-\vec{N}$ en vez de \vec{N} ; D cambia de signo. Se adopta criterio siguiente. Consideramos \vec{N} dirigido siempre desde el origen hacia el plano, de manera que D resulte positivo.

Por componentes la ecuación 1 queda:

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) = D$$

$$\boxed{Ax + By + Cz = D} \text{ Ecuación cartesiana del plano.}$$

Ecuación general de los planos que pasan por un punto



Para encontrar la ecuación de los planos que pasan por un punto, consideramos un vector normal al plano $\vec{N} = (A, B, C)$, un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un punto genérico $P(x, y, z)$ contenidos en el plano. Uniendo el origen con cada punto obtenemos los vectores \vec{P}_0 y \vec{P} y formamos el vector $\vec{P_0P} = \vec{P} - \vec{P}_0$.

Por lo tanto el vector $\vec{P_0P}$ es perpendicular a \vec{N} o sea $\vec{N} \perp (\vec{P} - \vec{P}_0)$ y esto significa que el producto escalar es cero. Se obtiene:

$$\boxed{\vec{N} \cdot (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0} \quad \text{Ecuación general de los planos que pasan por un punto.}$$

Por componentes tenemos:

$$\begin{cases} (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \\ Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0 \end{cases}$$

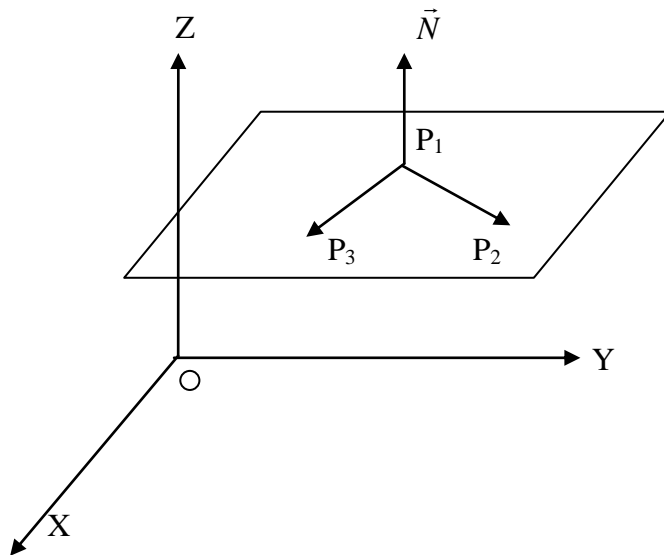
Llamamos $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

La ecuación cartesiana del plano que pasa por un punto es:

$$\boxed{Ax + By + Cz = D}$$

Ecuación de un plano determinado por tres puntos

Si conocemos tres puntos del plano $P_1(x_1, y_1, z_1); P_2(x_2, y_2, z_2); P_3(x_3, y_3, z_3)$, para encontrar la ecuación del plano necesitamos determinar un vector normal al plano.



Si unimos el punto P_1 con los puntos P_2 y P_3 formamos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ y podemos conocer un vector normal del plano haciendo el producto vectorial de los dos vectores contenidos en el plano.

Es decir:

$$\vec{N} = (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3})$$

$$\vec{N} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_1)$$

Entonces usando la ecuación $\boxed{\vec{N} \cdot (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0}$ tenemos:

$\vec{N} \cdot (\vec{P} - \vec{P}_1) = 0$ y reemplazando el vector normal se obtiene:

$$\boxed{[(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_1)] \cdot (\vec{P} - \vec{P}_1) = 0} \quad \text{Ecuación del plano determinado por tres puntos.}$$

Se puede comprobar que esta expresión se puede escribir, mediante el determinante de tercer orden siguiente:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Ecuación cartesiana del plano que pasa por tres puntos.}$$

Ejemplos:

1.- Encontrar la ecuación del plano, perpendicular al vector $(2, -1, 2)$ y cuya distancia al origen es 6.

La ecuación del plano es:

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = D \quad \text{como } h = 6 \quad \text{y} \quad D = |\vec{N}| \cdot h$$

$$(2, -1, 2) \cdot (x, y, z) = D$$

Calculamos D

$$D = \sqrt{4 + 1 + 4} \cdot 6$$

$D = 18$, la ecuación del plano es:

$$2x - y + 2z = 18$$

2.- Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 3)$; $(-2, -4, 5)$ y $(2, -1, 3)$.

Elegimos un punto como punto de paso. $P_1 (1, 0, 3)$ y formamos los vectores $\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{P_1 P_3}$.

Para encontrar la ecuación cartesiana, calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ -2-1 & -4-0 & 5-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante, desarrollando por los elementos de la primera fila, se llega a la ecuación:

$$2(x-1) + 2y + 7(z-3) = 0 \quad \text{con} \quad \vec{N} = (2, 2, 7),$$

$$2x + 2y + 7z = 23$$

3.- Determinar la ecuación del plano que pasa por $(-1, 0, 4)$ y es \perp al vector $(5, 3, -2)$

$$5(x+1) + 3y - 2(z-4) = 0$$

La ecuación queda: $5x + 3y - 2z + 13 = 0$

Ecuaciones de los planos coordenados

Sea el plano de ecuación $Ax + By + Cz = D$ (1) veamos los siguientes casos:

1. Si $C = 0$; $A = 0$; $B \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación (1) queda

$BY = D \Rightarrow Y = \frac{D}{B} = cte = h$. La ecuación $Y = h$, es la ecuación de un plano \parallel al plano XZ . Si $h = 0$ ó $D = 0 \Rightarrow Y = 0$ **Ecuación del plano XZ .**

2. Si $C \neq 0$, $D \neq 0$; $A = 0$ y $B = 0$ la ecuación (1) queda

$CZ = D$; $Z = \frac{D}{C} = k (cte)$; La ecuación $Z = k$, es la ecuación de un plano \parallel al plano XY ; y $Z = 0$ **Ecuación del plano XY .**

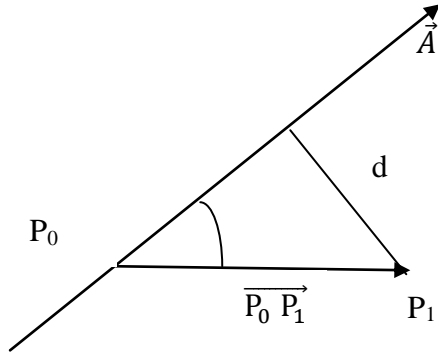
3. Si $A \neq 0$, $B = C = 0$; $D \neq 0$. La ecuación (1) queda $X = \frac{D}{A} = cte = t$; entonces

$X = t$ Ecuación de un plano paralelo al plano YZ .

Por lo tanto $X = 0$: **Ecuación del plano YZ**

Distancia de un punto a una recta

Dada la recta $\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{A}$ y un punto P_1 la distancia d del punto P_1 a la recta se obtiene de la siguiente manera:



Formamos el triángulo de la figura y vemos que:

$$d = |\vec{P}_0 P_1| \cdot \sin \alpha$$

Como para obtener α , necesitamos conocer el ángulo α , podemos transformar la ecuación multiplicando y dividiendo por $|\vec{A}|$.

$$\therefore d = \frac{|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times \vec{A}|}{|\vec{A}|}$$

Donde \vec{A} , \vec{P}_0 y \vec{P}_1 , es todo conocido.

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P_1 = (-3, 2, 1)$ a la recta $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-1}$

$$P_0 = (-1, 3, 1); \quad \vec{A} = (-2, 4, 1);$$

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_0 = (-3 + 1, 2 - 3, 1 - 1)$$

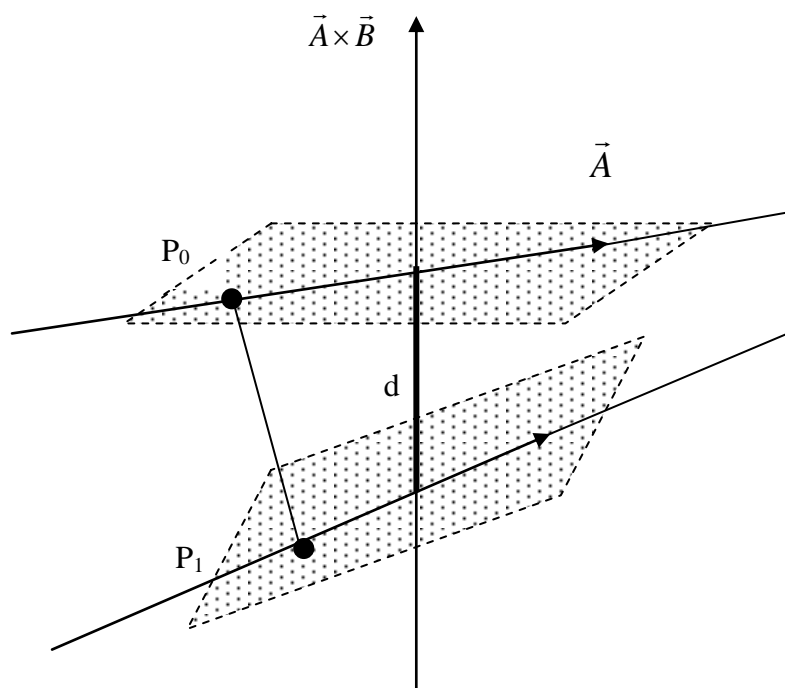
$$\vec{P}_1 - \vec{P}_0 = (-2, -1, 0)$$

$$\begin{aligned} (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 10\vec{k} \\ &= (1, -2, -10) \end{aligned}$$

$$|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times \vec{A}| = \sqrt{1 + 4 + 100} = \sqrt{105}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}, \quad \text{luego } d = \sqrt{\frac{105}{21}} = \sqrt{5}; \quad d = \sqrt{5}$$

Mínima distancia entre dos rectas alabeadas



Sean las rectas $\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{A}$
y $\vec{P} = \vec{P}_1 + \lambda \vec{B}$
La mínima distancia entre las
dos rectas es el segmento d ,
de la perpendicular común a
las dos rectas.
Es por lo tanto la proyección
del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$, sobre la
dirección perpendicular a las
dos rectas, que está dada por
el vector $\vec{A} \times \vec{B}$.

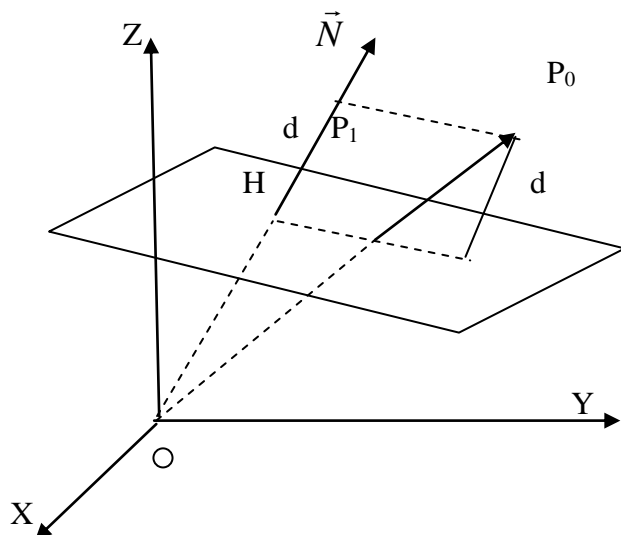
Entonces: $d = \text{proyec}_{\vec{A} \times \vec{B}}(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)$ y recordando que $\text{proyec}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, se llega a :

$$d = \frac{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_0)}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \text{ Mínima distancia entre las dos rectas}$$

Distancia de un punto al plano

Dado un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un plano de ecuación $\vec{N} \cdot \vec{X} - D = 0$.

La distancia de un punto P_0 ; a un plano $\vec{N} \cdot \vec{P} - D = 0$ es igual al valor que toma la ecuación del plano particularizada para el punto P_0 , dividido por el modulo del vector normal. Es decir



$$d = \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}_0 - D}{|\vec{N}|} \quad (1)$$

Para hallar la distancia d :
distancia del punto P_0 al plano,
proyectamos el vector \vec{P}_0 , sobre
el vector \vec{N} .

La distancia d buscada es la
diferencia entre $\overrightarrow{OP_1}$ y $OH = h$
que es la distancia del origen al
plano.

Vimos que $|\vec{N}| \cdot h = D \Rightarrow h = \frac{D}{|\vec{N}|} = OH$ y que $proy_{\vec{N}} \vec{P}_0 = \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}_0}{|\vec{N}|}$.

Como además $Proy_{\vec{N}} \vec{P}_0 = h + d \Rightarrow d = proy_{\vec{N}} \vec{P}_0 - h$. Remplazando se tiene:

$$d = \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}_0}{|\vec{N}|} - \frac{D}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}_0 - D}{|\vec{N}|}, \text{ que es la expresión (1)}$$

Para fijar un signo a esta distancia siempre se mide desde el plano al punto, en el dibujo desde H a P_1 , y se considera signo positivo, cuando este sentido coincida con el del vector \vec{N} y negativo en caso contrario.

Paralelismo, perpendicularidad y ángulo

Consideremos las rectas $R_1) \vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{A}_1$ y $R_2) \vec{P} = \vec{P}_1 + \lambda \vec{A}_2$ y los planos $\pi_1)$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{P} = D_1 \text{ y } \pi_2) \vec{N}_2 \cdot \vec{P} = D_2$$

De acuerdo a lo que vimos en la condición de paralelismo y perpendicularidad entre vectores, se tiene que:

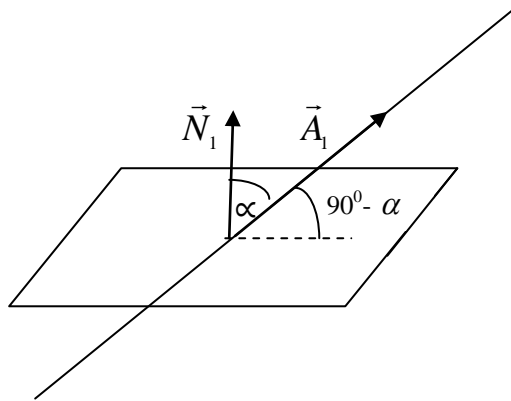
El ángulo entre las rectas es el ángulo entre los vectores dirección de las rectas:

- $R_1 // R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{A}_2$
- $R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$

El ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales a ambos planos:

- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 // \vec{N}_2$
- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$

El ángulo entre la recta R_1 y el plano π_1 es el ángulo complementario del que forman el vector dirección de la recta y el vector normal al plano.



Dado que $\alpha = \angle (\vec{N}_1, \vec{A}_1)$, entonces el ángulo que forma la recta con el plano es $90^\circ - \alpha$.

$$\text{Como } \cos \alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{A}_1}{|\vec{N}_1| |\vec{A}_1|} = \sin (90^\circ - \alpha).$$

$$\text{Entonces: } R_1 // \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{N}_1$$

$$R_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{N}_1$$

Ejemplos:

1. Hallar la distancia del punto $(6, 3, -2)$ al plano $2x - 4y + z = 2$

$$\vec{N} = (2, -4, 1)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1$$

$$d = \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}_0 - D}{|\vec{N}|} ; \quad |\vec{N}| = \sqrt{4 + 16 + 1}$$

$$d = \frac{2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 - 2 - 2}{\sqrt{21}} \rightarrow d = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$

El signo de d es positivo cuando al medirla desde el plano al punto, este sentido coincida con el del vector normal

2. Hallar la mínima distancia entre las rectas.

$$r_1) \vec{P} = (1, 2, -3) + \lambda(2, 1, -1)$$

$$r_2) \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}$$

$$\vec{P} = (2, 2, -1) + \lambda(3, 3, 4)$$

$$d = \frac{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_0)}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_0 = (2, 2, -1) - (1, 2, -3) = (1, 0, 2)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) = (7, -11, 3) \cdot (1, 0, 2) \\ = 7 + 6 = 13$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{7^2 + 11^2 + 9}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{49 + 121 + 9} = \sqrt{179}$$

$$d = \frac{13}{\sqrt{179}}$$

3. Encontrar la ecuación del plano \perp al vector $(2, -1, 2)$ y cuya distancia al origen es 6

$$2x - y + 2z = D$$

$$D = |\vec{N}| \cdot 6$$

$$D = \sqrt{4 + 1 + 4} \cdot 6$$

$$D = 18$$

4. Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 0, 3)$; $(-2, -4, 5)$ y $(2, -1, 3)$

$$\text{Remplazamos en la ecuación cartesiana del plano } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+2 \\ -2-1 & -4-0 & 5-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 3z - 9 + 4z + 11 + 2x - 2 = 0$$

La ecuación es: $2x + 2y + 7z - 23 = 0$

5. Determinar la ecuación del plano que pasa por $(-1, 0, 4)$ y es \perp al vector $(5, 3, -2)$

$$5(x + 1) + 3(y - 0) + 4(z - 4) = 0$$

$$5x + 3y + 4z = 11$$

6. Encontrar la ecuación de la recta intersección de los planos π_1) $2x + y - z = 3$ y π_2) $3x + 2y + 2z = 0$.

Para encontrar la ecuación formamos el sistema con las dos ecuaciones de los planos

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y lo resolvemos:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim (1) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right) \sim (2) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \end{array} \right) \sim (3) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 7 & -9 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \end{array} \right)$$

$$(1) F_2 - F_1(-2), (2) F_2(-1), (3) F_1 - F_2(-2)$$

$$\text{Escribimos el sistema equivalente: } \begin{cases} y + 7z = -9 \\ x - 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -9 - 7z \\ x = 6 + 4z \end{cases}$$

Llamamos $z = \lambda$ y obtenemos:

$$\begin{cases} x = 6 + 4\lambda \\ y = -9 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de la recta, con}$$

$$\vec{P}_0 = (6, 9, 0) \quad \text{y} \quad \vec{A} = (4, -7, 1)$$

$$7. \text{ Encontrar el punto de intersección de la recta } \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}, \text{ con el plano}$$

$$2x - 3y + 5z = 2.$$

Para encontrar el punto despejamos x e y de la recta en función de z y remplazamos en la ecuación del plano:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow x-2 = \frac{4}{3}z \Rightarrow x = \frac{4}{3}z + 2$$

$$\frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}z - 1$$

$$2\left(\frac{4}{3}z + 2\right) - 3\left(-\frac{2}{3}z - 1\right) + 5z = 2, \text{ de donde se obtiene:}$$

$$z = 6/29, \text{ remplazando en } x \text{ e } y, \text{ se tiene:}$$

$$x = 8/29, y = -41/29. \text{ El punto de intersección es } (8/29, -41/29, 6/29)$$