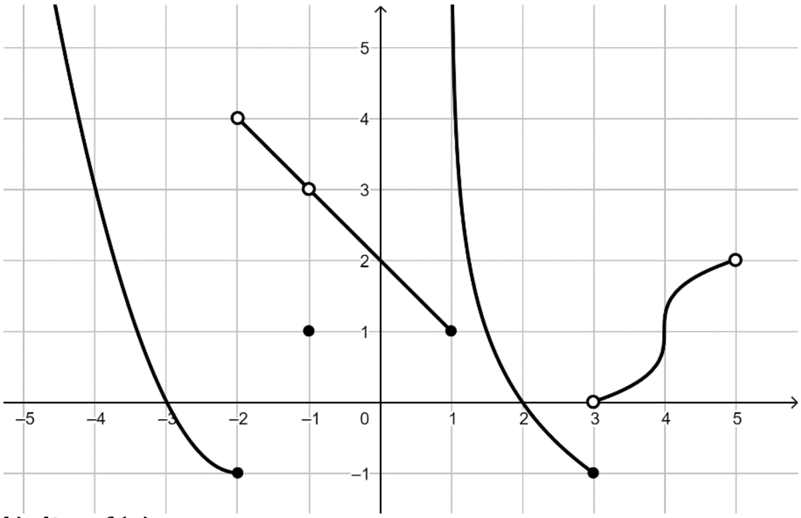
TRABAJO PRÁCTICO N° 2 - LÍMITE

Ejercicio 1. La figura muestra la gráfica de una función. Analizar las consignas expuestas y concluir si existe o no el $\lim_{x \to a} f(x)$. Justificar las respuestas



$a)\ f(-4)$ $\quad b)\ \lim_{x \to -4} f(x)$

$c)\ f(-2)$ $\quad d)\ \lim_{x \to -2^-} f(x)$ $\quad e)\ \lim_{x \to -2^+} f(x)$ $\quad f)\ \lim_{x \to -2} f(x)$

$g)\ f(-1)$ $\quad h)\ \lim_{x \to -1^-} f(x)$ $\quad i)\ \lim_{x \to -1^+} f(x)$ $\quad i)\ \lim_{x \to -1} f(x)$

$j)\ f(1)$ $\quad k)\ \lim_{x \to 1^-} f(x)$ $\quad l)\ \lim_{x \to 1^+} f(x)$ $\quad m)\ \lim_{x \to 1} f(x)$

$n)\ f(3)$ $\quad 0)\ \lim_{x \to 3^-} f(x)$ $\quad p)\ \lim_{x \to 3^+} f(x)$ $\quad d)\ \lim_{x \to 3} f(x)$

$0)\ f(5)$ $\quad 0)\ \lim_{x \to 5^-} f(x)$ $\quad p)\ \lim_{x \to 5^+} f(x)$ $\quad d)\ \lim_{x \to 5} f(x)$

Ejercicio 2. Dadas las siguientes funciones (ya estudiadas en el capítulo anterior), si existe el $\lim_{x \to a} f(x)$. Justificar las respuestas.

Luego compara con la gráfica realizada.

1) $f(x) = x^2 - x + 1$, $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) $g(x) = (x-1)^3 + 1$; $\lim_{x \to 1} g(x)$

3) $h(x) = -\frac{3}{2}x + 2$; $\lim_{x \to 2} h(x)$

4) $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$; $\lim_{x \to 4} f(x)$

5) $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$; $\lim_{x \to -\frac{2}{5}} f(x)$

6) $\omega(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $\lim_{x \to 2} f(x)$

Ejercicio 3. Identifica e o los valores de ***a*** para los cuales existe el $\lim_{x \to a} f(x)$. Justificar:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x; & x < 0 \\ x^2; & x \geq 0 \end{cases}$ $en \ \ a = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} sen\, x \ \ si \ -2\pi < x < 0 \\ cos\, x \ \ si \ \ 0 \leq x \end{cases}$ $en \ \ a = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} sen\,(\pi + x) \ \ si \ \ x \leq 0 \\ \cos(-x) - 1 \ \ si \ \ 0 < x \end{cases}$ $en \ \ a = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} tg\, x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ cotg\, x \ \ si \ \ 0 \leq x \end{cases}$ $en \ \ a = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); & -\pi \leq x < \frac{\pi}{2} \\ tg(x); & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $en\ \ a = \frac{\pi}{2}$

FORMAS INDETERMINADAS

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad \mathbf{0} \cdot \infty \qquad \mathbf{0^0} \qquad \infty^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{1}^{\infty}$$

Ejercicio 4. Investiga la existencia de los límites dados. En cada caso verificar si existe *f(a)*.

$a)\ \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+x}{|x|}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^2\, x}{sen\, x}$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$ $\quad e)\ \lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{5x^2-36}-3}{x^2-9}$

$f)\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)\ \ si\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-1}; & si\ \ x < 1 \\ \frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}; & si\ \ x > 1 \end{cases}$ $\qquad g)\ \lim\limits_{x \to 1} \left[\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right]^{(x^2+x)} \right]$

$h)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$ $\qquad i)\ \lim\limits_{x \to 4} \frac{1-\sqrt{5-x}}{x-4}$ $\qquad j)\ \lim\limits_{x \to 2} \frac{|2-x|}{2x-4}$

Ejercicio 5. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|}, x < 0 \\ \ln x\,,\ \ x > 0 \end{cases}$ analiza si existe el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Verificar si existe *f(a)*.

Ejercicio 6. Dados los siguientes límites $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -8;$ $\quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x \to a} h(x) = 4,$ calcular:

$a)\ \lim\limits_{x \to a} [g(x) - f(x)]\,;$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)};$ $\quad c)\ \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)};$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to a} [h(x)]^2\,;$ $\quad e)\ \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)-g(x)}$

Ejercicio 7. Dadas las siguientes funciones, determina si poseen asíntotas verticales y horizontales. Luego verifica gráficamente utilizando el software GEOGEBRA.

$a)\ \ f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ $\qquad b)\ \ h(x) = \frac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2-4x+3}$ $\qquad c) g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

$d)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2}; & x \leq 1 \\ ln(x-1); & x > 1 \end{cases}$

Ejercicio 8. Bosqueja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

Bosqueja la gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 4;\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0; f(-1) = 4;$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2;\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2; f(0) = 0;$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty; f(2)\nexists;$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4;\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4; f(4) = 4;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ejercicio 9. Bosqueje la gráfica de una función tal que:

a) Domf = $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2, \infty)$; f(0) = 3 ; el único punto de intersección con el eje x es (5,0) ; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

b) Domf = $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1, \infty)$; f(0) = 3 ; el único punto de intersección con el eje x es (-5,0) ; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 4$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 5$

Cuestionario 1

¿Cuántas y cuáles son las Formas Indeterminadas?

¿Cuánto vale $f(a)$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty - \infty$?

¿Por qué se puede reducir el siguiente límite? $\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x-2)}{\cancel{x-1}}$

Si el resultado de un límite da $-\infty$ ¿Existe el límite?

¿Qué propiedad se aplica en: $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, ¿significa que hay una asíntota vertical en $x = a$?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, ¿significa que hay una asíntota vertical en $x = a$?

¿La gráfica de una función puede tener más de una asíntota horizontal?, ¿cuántes?

¿La gráfica de una función puede tener más de una asíntota vertical?, ¿cuántes?

PROBLEMA 1:

El peso de un cultivo de bacterias crece siguiendo la ley $y = \frac{1{,}25}{1+0{,}25e^{-0{,}4t}}$, donde el tiempo $t > 0$ se mide en horas y el peso del cultivo en gramos.

a) Determine el peso del cultivo transcurridos 60 minutos.

b) ¿Cuál será el peso de este cuando el número de horas crece indefinidamente?

Ejercicio 10. Resuelve analíticamente, los siguientes límites.

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{sen5x} =$ $\quad b)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-sen^2x} =$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{1-\sqrt{1-senx}} =$

$d)\ \lim_{x\to\infty} s\,en\left(\frac{5}{x-3}\right) =$

Ejercicio 11. Identifica e o los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales existe el $\lim_{x\to a} f(x)$. Justifica.

$$a)\ \lim_{x\to 0} f\,(x); si f(x) = \begin{cases} \frac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{x} si x < 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x-2} si x \geq 0 \end{cases}$$

Cuestionario 2

1. Escriba una breve descripción de lo que significa la notación: $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$
2. Identifique tres tipos de comportamiento relacionados con la no existencia de un límite. Ejemplifique cada tipo con una gráfica de una función.
3. Si sabe que f(2)=4 ¿se puede concluir algo acerca del límite de f cuando x tiende a 2? Justifique.
4. Complete:
   a) Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = M$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = M$ entonces ….
   b) Si $\lim_{x\to \infty} f(x) = 6$ entonces la recta …. es una asíntota ….. de la gráfica de y = f(x)

Ejercicio 12. Calcule el valor de la constante m para que exista el $\lim_{x\to -1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - m & x < -1 \\ 3 + \frac{m}{2x^2} & x \geq -1 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Halle el valor de k para que exista el $\lim_{x\to 3} g(x)$ si

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{2(x-3)} & x > 3 \\ k & x \leq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 14. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

a) Si el $\lim_{x\to c} f(x) = m$ entonces f(c) = m.

b) Si existen $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$ entonces existe $\lim_{x\to c} f(x)$.

c) Si existe $\lim_{x\to c} f(x)$ entonces existe $\lim_{x\to c^+} f(x)$ y existe $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

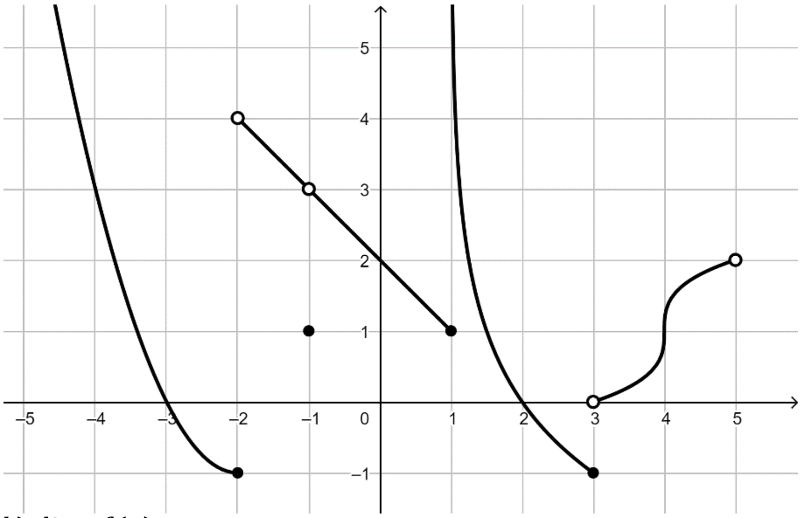
d) Si $\lim_{x\to c} g(x) = k, entonces\ existe\ \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}$.

e) Si no existe f(c) entonces no existe el $\lim_{x\to c} f(x)$.

f) Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ entonces f(c) = 0.

Soluciones TP N° 2 - LÍMITES

Ejercicio 1. La figura muestra la gráfica de una función. Analizar las consignas expuestas y concluir si existe o no el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Justificar las respuestas



$a)\ f(-4)$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to -4} f(x)$

$c)\ f(-2)$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ $\quad e)\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ $\quad f)\ \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$g)\ f(-1)$ $\quad h)\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ $\quad i)\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ $\quad i)\ \lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$j)\ f(1)$ $\quad k)\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ $\quad l)\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ $\quad m)\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$n)\ f(3)$ $\quad 0)\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ $\quad p)\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$0)\ f(5)$ $\quad 0)\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ $\quad p)\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to 5} f(x)$

Solución:

$a)\ f(-4) = 3$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to -4} f(x) = 3$

$c)\ f(-2) = -1$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$ $\quad e)\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4$ $\quad f)\ \lim\limits_{x \to -2} f(x)\ \nexists$

$j)\ f(1) = 1$ $\quad k)\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ $\quad l)\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ $\quad m)\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

$0)\ f(5)\ \nexists$ $\quad 0)\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 2$ $\quad p)\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)\ \nexists$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to 5} f(x)\ \nexists$

Ejercicio 2. Dadas las siguientes funciones (ya estudiadas en el capítulo anterior), si existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Justificar las respuestas.

Luego compara con la gráfica realizada.

1) $f(x) = x^2 - x + 1,\ \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2) $g(x) = (x-1)^3 + 1;\ \lim\limits_{x \to 1} g(x)$

3) $h(x) = -\frac{3}{2}x + 2;\ \lim\limits_{x \to 2} h(x)$

4) $f(x) = \frac{x+4}{x-4};\ \lim\limits_{x \to 4} f(x)$

5) $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2};\ \lim\limits_{x \to -\frac{2}{5}} f(x)$

6) $\omega(x) = \frac{1}{(x-1)^2};\ \lim\limits_{x \to 2} \omega(x)$

Solución:

1). $f(x) = x^2 - x + 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0^2 - 0 + 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

3). $h(x) = -\frac{3}{2}x + 2;\ \lim_{x \to 2} h(x)$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -\frac{3}{2}2 + 2$$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -1$$

6). $\omega(x) = \frac{1}{(x-1)^2};\ \lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} \omega(x) = \frac{1}{(2-1)^2}$$

$$\lim_{x \to 2} \omega(x) = 1$$

Ejercicio 3. Identifica e o los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales existe el $\lim_{x \to a} f(x)$. Justificar:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x; & x < 0 \\ x^2; & x \geq 0 \end{cases}\ en\ \ a = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} sen\, x\ \ si\ -2\pi < x < 0 \\ cos\, x\ \ si\ \ 0 \leq x \end{cases}\ en\ \ a = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} sen\ (\pi + x)\ \ si\ \ x \leq 0 \\ \cos(-x) - 1\ \ si\ \ 0 < x \end{cases}\ en\ \ a = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} tg\ x\ \ si\ \ x \leq 0 \\ cotg\ x\ \ si\ \ 0 \leq x \end{cases}\ en\ \ a = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ -\pi \leq x < \frac{\pi}{2} \\ tg(x);\ \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}\ en\ \ a = \frac{\pi}{2}$

Solución:

b). $f(x) = \begin{cases} sen\ x\ \ si\ -2\pi < x < 0 \\ cos\ x\ \ si\ \ 0 \leq x \end{cases}\ en\ \ a = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} cos\, x = 1$$

Entonces: $\lim_{x \to 0^-} sen\, x = 1$

Lo que implica que: $sen\, a = 1 \therefore\ \ a = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$

$$a = -\frac{3\pi}{2}$$

c). $f(x) = \begin{cases} sen\ (\pi + x)\ \ si\ \ x \leq 0 \\ \cos(-x) - 1\ \ si\ \ 0 < x \end{cases}\ en\ \ a = 0$

Solución:

$$\lim_{x \to 0^-} sen\ \ (\pi + x) = -1$$

Entonces: $\lim_{x \to 0^+} \cos(-x) - 1 = -1$

Lo que implica que: $\cos(-x) - 1 = -1$

Operando: $\cos(-x) = 0 \therefore \; a = k\frac{\pi}{2}; \; k \in \mathbb{Z}$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

e) $f(x) = \begin{cases} cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right); & -\pi \le x < \frac{\pi}{2} \\ tg(x); & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \; en \; a = \frac{\pi}{2}$

Solución:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tg(x) = +\infty$$

Lo que implica que: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \nexists$

Ejercicio 4. Investiga la existencia de los límites dados. En cada caso verificar si existe *f(a)*.

$a)\; \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ $\quad b)\; \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{|x|}$ $\quad c)\; \lim_{x\to 0}\frac{tg^2\,x}{sen\,x}$ $\quad d)\; \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$ $\quad e)\; \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x^2-36}-3}{x^2-9}$

$f)\; \lim_{x\to 1} f(x) \;\; si \;\; f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-1}; & si \;\; x<1 \\ \frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}; & si \;\; x>1 \end{cases}$ $\quad g)\; \lim_{x\to 1}\left[\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right]^{(x^2-x)}\right]$

$h)\; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$ $\quad i)\; \lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{5-x}}{x-4}$ $\quad j)\; \lim_{x\to 2}\frac{|2-x|}{2x-4}$

Solución: $a)\; f(2) = \frac{0}{0};\; F.I. \therefore \nexists\, f(2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} = \frac{0}{0};\; F.I.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} = 1;\; \exists. \text{ Pero } f(-1)\nexists$$

$$c)\; f(0) = \frac{0}{0};\; F.I. \therefore \nexists\, f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2\,x}{sen\,x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2\,x}{sen\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen^2\,x}{cos^2\,x}}{sen\,x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{cos^2\,x} = \frac{0}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2\,x}{sen\,x}=0$$

$$f)\ \lim_{x\to 1} f(x)\quad si\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-1};\ \ si\ \ x<1\\ \dfrac{8-\sqrt{64x}}{x-1};\ \ si\ \ x>1\end{cases}$$

$$f(1)\nexists;\ \ 1\ni dom\,f$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+4x-6}{x^2-1}=\frac{0}{0};\ \ F.I.$$

Debemos factorizar el numerador y el denominador.

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{4}$

$=\frac{-4\pm 8}{4}\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=1\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=$$

Como estamos trabajando con límite cuando x tiende a 1; lo que implica que $x\neq 1\forall x$*; entonces:*

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x+1}=$$

Entonces: $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+4x-6}{x^2-1}=3$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}=\frac{0}{0};\ \ F.I.$$

Operando: $\lim_{x\to 1^+}\frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}\cdot\frac{8+\sqrt{64x}}{8+\sqrt{64x}}=$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-64\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{8-\sqrt{64x}}{x-1}=-64$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)\ \therefore\ \nexists\ \lim_{x\to 1}f(x)$$

$$g)\ \lim_{x\to 1}\left[\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right]^{(x^2+x)}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]^{(2)};\ \ \frac{0}{0}\ F.I.$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right]^{(x^2+x)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x-1}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)}=[1]^2$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right]^{(x^2+x)}\right]=1$$

$h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{4(x+4)}}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4(x+4)}=-\frac{1}{16}$

$i)\ \lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{5-x}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{5-x}}{x-4}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(1+\sqrt{5-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{1+\sqrt{5-x}}=\frac{1}{2}$

$j)\ \lim_{x\to 2}\frac{|2-x|}{2x-4}$ ver limites laterales

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2x-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2x-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2(x-2)}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|2-x|}{2x-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-2+x}{2x-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{2(x-2)}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, no existe $\lim_{x\to 2}\frac{|2-x|}{2x-4}$

Ejercicio 5. Si $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{|x|}, x<0\\ \ln x,\ x>0\end{cases}$ analiza si existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$. Verificar si existe *f(a)*.

Solución:

$$f(0)\nexists;\ \ 0\ni dom\, f$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)\nexists$$

Ejercicio 6. Dados los siguientes límites $\lim_{x\to a}f(x)=-8$; $\lim_{x\to a}g(x)=0$; $\lim_{x\to a}h(x)=4$, calcular:

$a)\ \lim_{x\to a}[g(x)-f(x)]$; $b)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$; $c)\ \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$; $d)\ \lim_{x\to a}[h(x)]^2$; $e)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)-g(x)}$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to a}[g(x)-f(x)]=0-(-8)$$

$$\lim_{x\to a}[g(x)-f(x)]=8$$

$$c)\ \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\nexists$$

$$e)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)-g(x)}=\frac{-8}{4-0}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x) - g(x)} = -2$$

Ejercicio 7. Dadas las siguientes funciones, determina si poseen asíntotas verticales y horizontales. Luego verifica gráficamente utilizando el software GEOGEBRA.

$a)\ f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ $\quad$ $b)\ h(x) = \frac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2-4x+3}$ $\quad$ $c) g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2}; & x \leq 1 \\ ln(x-1); & x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$a)\ f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$dom\, f = \Re \neq \{-2; 2\}$$

Asíntotas Verticales y Horizontales.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -2\ es\ AV\ de\ f$$

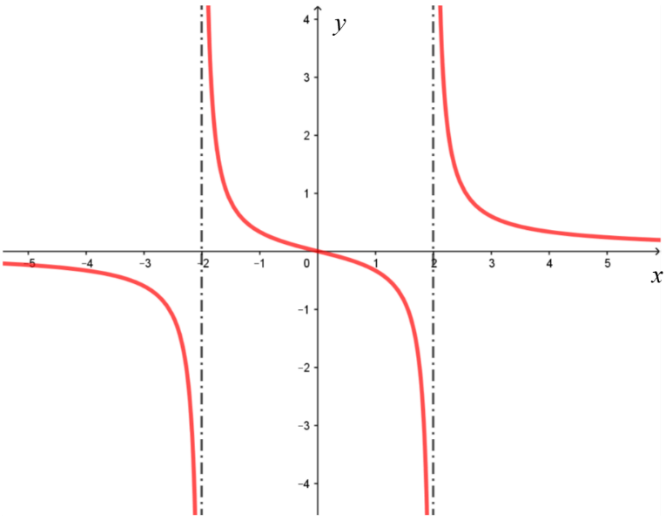
$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = 2\ es\ AV\ de\ f$$

$A.H:$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y = 0\ es\ AH\ de\ f$$



b) $h(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3}$

$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \therefore x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$dom f = \Re - \{1; 3\}$

AV :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \quad \therefore x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)\cdot(x^2 - x + 2)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x^2 - x + 2)}{(x-1)\cdot(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 2}{x-3} = \frac{2}{-2} = -1 \;\therefore\; x = 1 \; NO \; es \; AV$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \notin \Re \Rightarrow x^2 - x + 2 \;\; No\,tiene\,Raíces \;\; reales$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x^2 - x + 2)}{(x-1)\cdot(x-3)} =$$

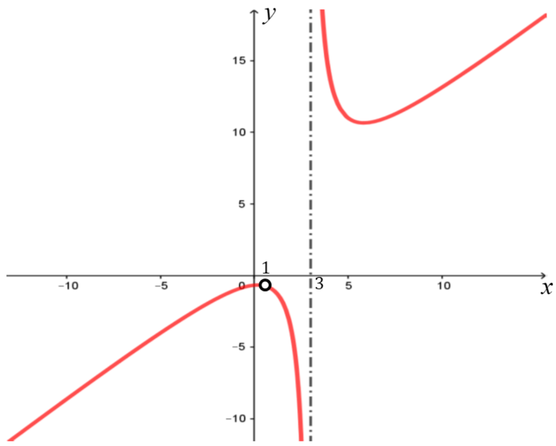
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x + 2}{x-3} = \frac{9 - 3 + 2}{3-3} = \frac{8}{0} = \pm\infty \;\;\therefore\; x = 3 \; es \; AV$$

AH

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\therefore\; f \;\; NO \;\; tiene \;\; AH$



c) $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow |x| > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$

$\therefore dom\, f = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

AV : $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-6}{0} = -\infty \Rightarrow x = -3 \; es \; AV \; de \; f$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{0}{0}$$

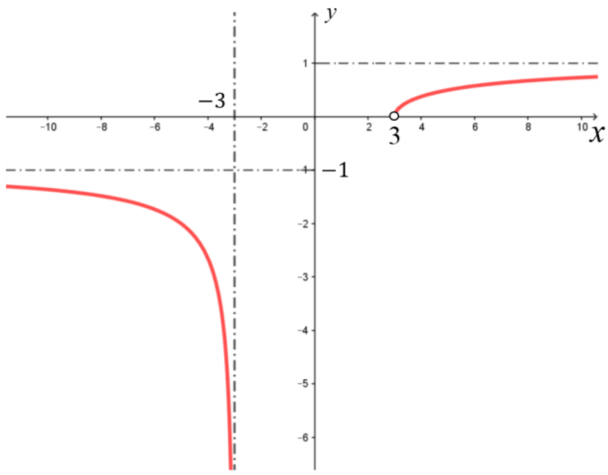
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow x = 3 \; NO \; es \; AV \; de \; f$$

AH : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-\infty}{\infty}$ Resultado NEGATIVO

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = -1 \therefore \;\; y = -1 \; es \; AH \; de \; f$$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{\infty}{\infty}$ Resultado POSITIVO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = 1 \therefore \;\; y = 1 \; es \; AH \; de \; f$$



d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} \; x \leq 1 \\ \ln(x-1) \; x > 1 \end{cases}$

$dom\, f = (-\infty; -2) \cup (-2; 1] \cup (1; \infty)$

$AV:$

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow x = -2 \; es \; AV \; de \; f$

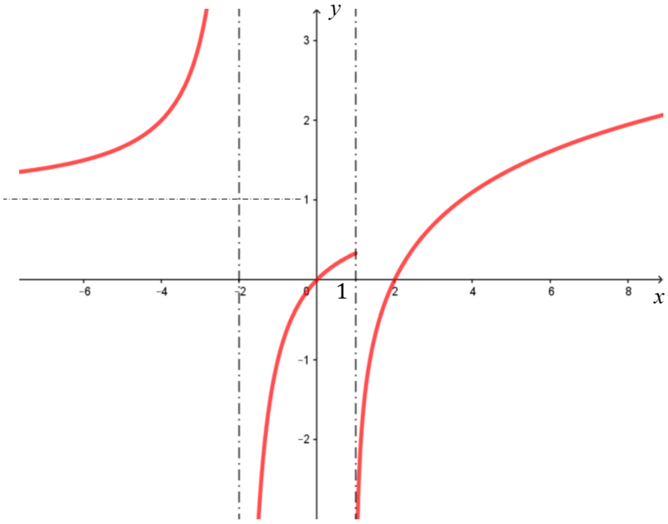
$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = \ln(0) = -\infty \Rightarrow x = 1 \; es \; AV \; de \; f$

$AH:$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow y = 1 \; es \; AH \; de \; f$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = \ln(\infty) = \infty \Rightarrow \nexists \; AH$



Ejercicio 8. Bosqueja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

Bosqueja la gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$; $f(-1) = 4$;

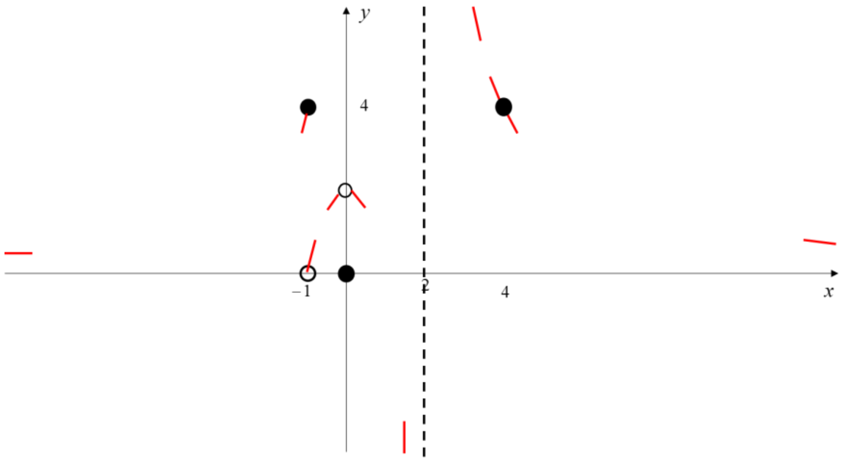
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$; $f(0) = 0$;

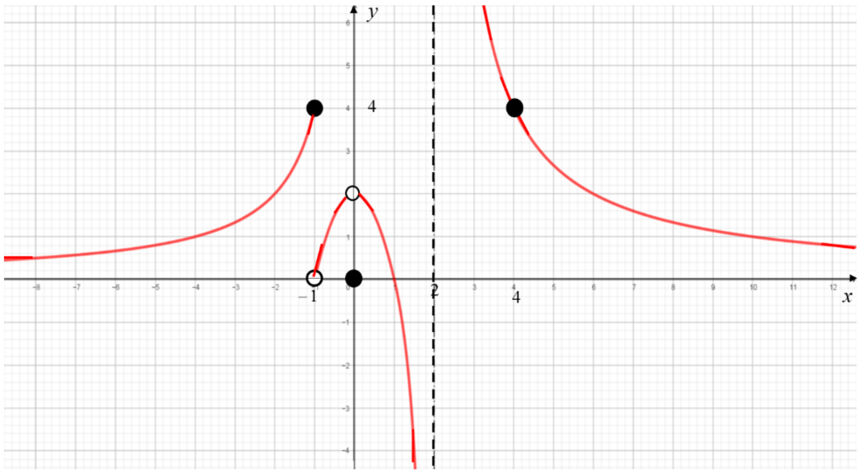
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $f(2) \nexists$;

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4$; $f(4) = 4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Solución:

Tracemos un sistema cartesiano y en él vamos plasmando cada una de las condiciones dadas.





PROBLEMA 1:

El peso de un cultivo de bacterias crece siguiendo la ley $y = \frac{1{,}25}{1+0{,}25e^{-0{,}4t}}$, donde el tiempo $t > 0$ se mide en horas y el peso del cultivo en gramos.

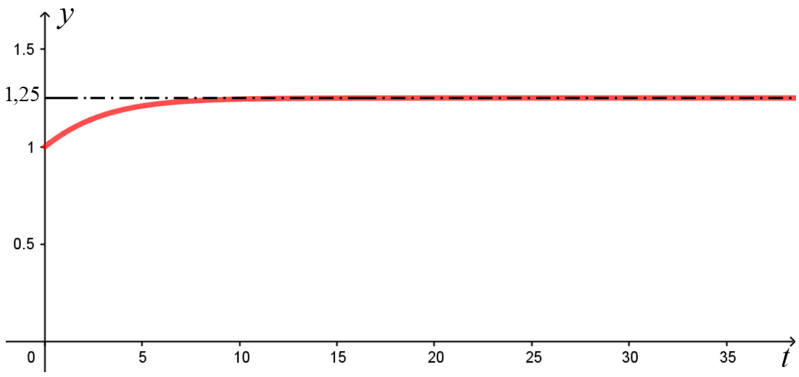
a) Determine el peso del cultivo transcurridos 60 minutos.

b) ¿Cuál será el peso de este cuando el número de horas crece indefinidamente?

Solución:

$a)\quad f(1) = \dfrac{1{,}25}{1+0{,}25e^{-0{,}4\cdot 1}} = 1{,}07\ gr.$

$b)\quad \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1{,}25}{1+0{,}25e^{-0{,}4\cdot t}} = 1{,}25\ gr.$



Ejercicio 10. Resuelve analíticamente, los siguientes límites.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen2x}{sen5x} =$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-sen^2x} =$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos x}{1-\sqrt{1-senx}} =$

$d)\ \lim\limits_{x\to\infty} s\,en\left(\dfrac{5}{x-3}\right) =$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen5x}=\frac{0}{0}\ F.I.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,2x}{sen\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\dfrac{sen\,2x}{2x}}{5x\cdot\dfrac{sen\,5x}{5x}}=$$

$$=\frac{2}{5}\frac{\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{sen\,2x}{2x}}{\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{sen\,5x}{5x}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,2x}{sen\,5x}=\frac{2}{5}$$

$$b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-sen^2x}=\frac{0}{0}$$

$$z=x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=z+\frac{\pi}{2}\begin{cases}x\to\dfrac{\pi}{2}\\ z\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{1-sen^2\,x}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-sen^2\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)}=$$

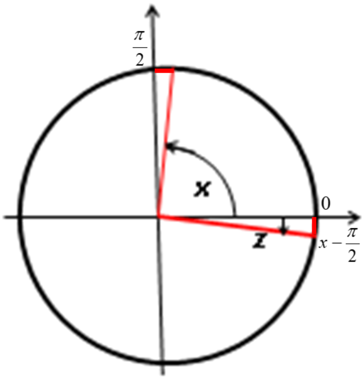
$$sen^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=1-sen^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\cos^2\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)}=$$

Cuando $z\to 0$

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\,z$$



$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\cos^2\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{[-sen\,z]^2}=$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{z^2}{1}}{\dfrac{[-sen\,z]^2}{1}}=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{[-sen\,z]^2}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{\left[-\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{sen\,z}{z}\right]^2}=1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{1-sen^2\,x}=1$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{1-\sqrt{1-senx}}=\frac{0\cdot 1}{1-\sqrt{1-0}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{1-\sqrt{1-sen\,x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-sen\,x}}{1+\sqrt{1-sen\,x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{1-1+sen\,x}\cdot\left(1+\sqrt{1-sen\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x\cdot\cos x}{sen\,x}\cdot\left(1+\sqrt{1-sen\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\dfrac{sen\,x}{x}}\cdot\left(1+\sqrt{1-sen\,x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\cos x\cdot\left(1+\sqrt{1-sen\,x}\right)\right]=$$

$$=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{1-\sqrt{1-sen\,x}}=0$$

Ejercicio 11. Identifica e o los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Justifica.

$$a)\ \lim_{x\to 0} f\,(x); si f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{x} six < 0 \\ \dfrac{x^2-x+1}{x-2} six \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0} f\,(x); si f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{x} six < 0 \\ \dfrac{x^2-x+1}{x-2} six \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{x} = \dfrac{0}{0} & (1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-x+1}{x-2} = -\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Por los resultados de la sustitución directa en (1) y en (2), se deduce que para que el límite exista, ambos resultados deben ser iguales.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a}\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a}\cdot \lim_{\frac{x}{a}\to 0^-} \frac{sen\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$a = -2$$

Verificación:

$$(1)\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \frac{sen\left(-\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$sen\left(-\frac{x}{2}\right) = -sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Verifica

Ejercicio 12. Calcule el valor de la constante m para que exista el $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - m & x < -1 \\ 3 + \frac{m}{2x^2} & x \geq -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x\to -1^-} (x^2 - m) = 1 - m \quad ; \quad \lim_{x\to -1^+} \left(3 + \frac{m}{2x^2}\right) = 3 + \frac{m}{2}$$

Si queremos que el límite exista, entonces $1 - m = 3 + \frac{m}{2}$ entonces $m = -4/3$

Ejercicio 13. Halle el valor de k para que exista el $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ si

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{2(x-3)} & x > 3 \\ k & x \leq 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x\to -3^-} k = k \quad ; \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+2x-15}{2(x-3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+5)}{2(x-3)} = 1$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 3} g(x)$ existe si y sólo si k = 1

Cuestionario 3

¿Dada la función $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $\exists\ f(0)$?

¿Existe le $\lim_{x\to 0} \frac{\sec x}{x}$?

¿Existe le $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cosec} x}{x}$?

¿Existe le $\lim_{x\to \infty} \frac{cos\ x}{x}$?

¿Existe el $\lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x}$?, si es así, ¿cuánto es su valor?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, ¿significa que $\exists\ f(a)$?

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\ \ y\ \ f(a)\nexists$, ¿significa que $\nexists\ \lim_{x\to a} f(x)$?