ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Primer Parcial – Ejemplo 3

APELLIDO: .... NOMBRE: .... CURSO: ....

<table>
<tr><th colspan="2">1</th><th>2</th><th>3</th><th colspan="2">4</th><th>5</th><th>NOTA</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No está permitido el uso de calculadoras graficadoras. No resolver el examen en lápiz.
Duración del examen: 2 horas
Condición mínima de aprobación, 6 puntos: 50% del examen correctamente resuelto.
Condición mínima de aprobación por promoción, 8 puntos: 70% del examen correctamente resuelto.

---

1) Indicar si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas, justificando la respuesta:

   a) $f: D_f \to R \,/\, f(x) = 3x^2 + \ln x$ tiene al menos una raíz en su dominio.

   b) $\exists a, b \in R$ tal que $y = \dfrac{x}{3} + 2$ es la ecuación de la asíntota oblicua al gráfico de $f: D_f \to R \,/\, f(x) = \dfrac{3x^2 - 10}{a \cdot x + b}$

2) Demostrar que, de todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, el equilátero es el de mayor área.

3) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f: R \to R \,/\, f(x) = x^3 - x$ que pasan por el punto $(-2\,;2)$

4) Dada $f: D_f \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] -\dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   a) Analizar si es posible definir $f(0)$ tal que la función sea continua en ese punto.

   b) Considerando lo realizado en el ítem anterior, analizar si f es derivable en $x = 0$.

5) Indicar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad positiva y negativa de $f: D_f \to R \,/\, f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$

Respuestas

1)

a) Verdadero. Puede demostrarse utilizando el teorema de Bolzano, por ejemplo, en el intervalo

$\left[\frac{1}{e^2};1\right]$

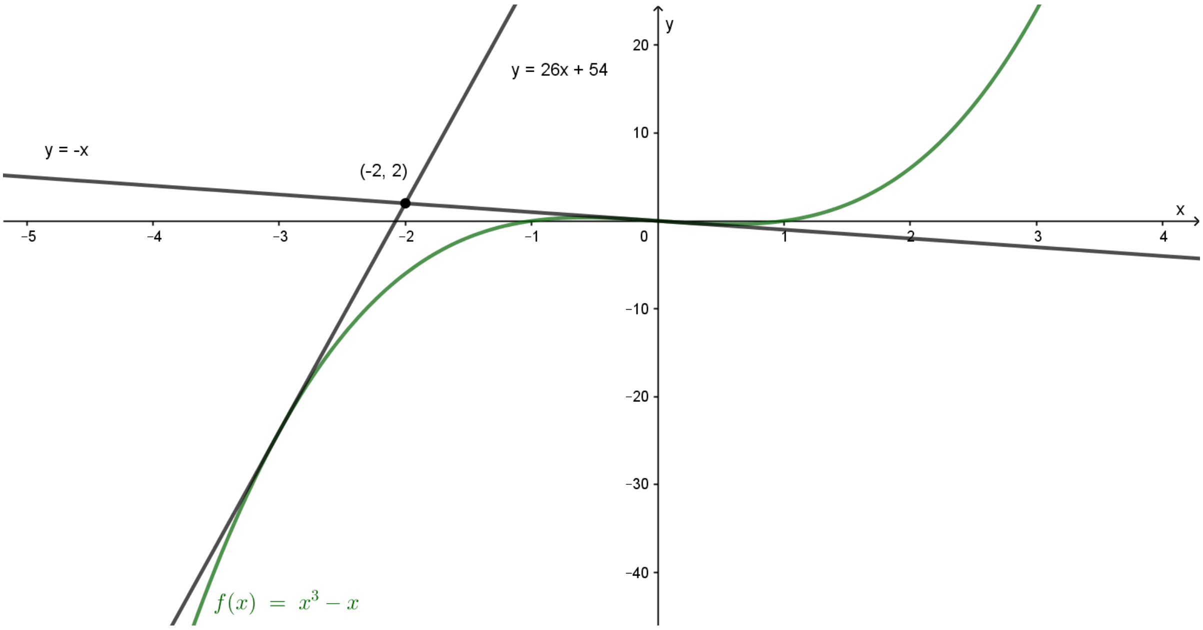
b) Verdadero: *a* = 9; *b* = -54

2) Puede demostrarse encontrando la función que representa el área de un triángulo isósceles con un perímetro de 30 cm y luego probar que, de todos ellos, el de mayor área es de 10 cm de lado, por lo que es equilátero.

3) Las rectas tangentes en *x* = 0 y en *x* = -3 pasan por el punto $(-2;2)$. Sus ecuaciones son:

$y=-x$; $y=26x+54$

Verificación con un software:



4)

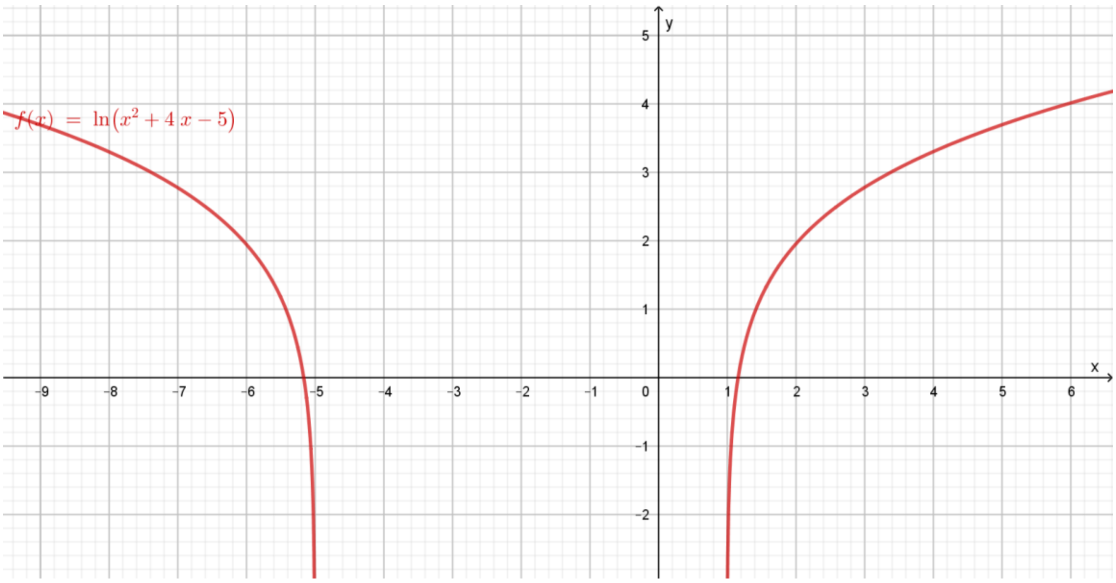
a) Es posible redefinir la función porque hay una discontinuidad evitable en *x* = 0. Si se define *f*(0) = 1 la función resulta continua en ese punto.

b) Si se redefine la función en *x* = 0 de acuerdo con lo indicado en el ítem anterior, resulta además derivable en ese punto: *f* '(0)=0

5) Dominio = $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$. Intervalo de decrecimiento = $(-\infty;-5)$. Intervalo de crecimiento = $(1;+\infty)$. Intervalo de concavidad negativa = $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$.

Intervalo de concavidad positiva = $\varnothing$.

Verificación con un software:



$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$
y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6