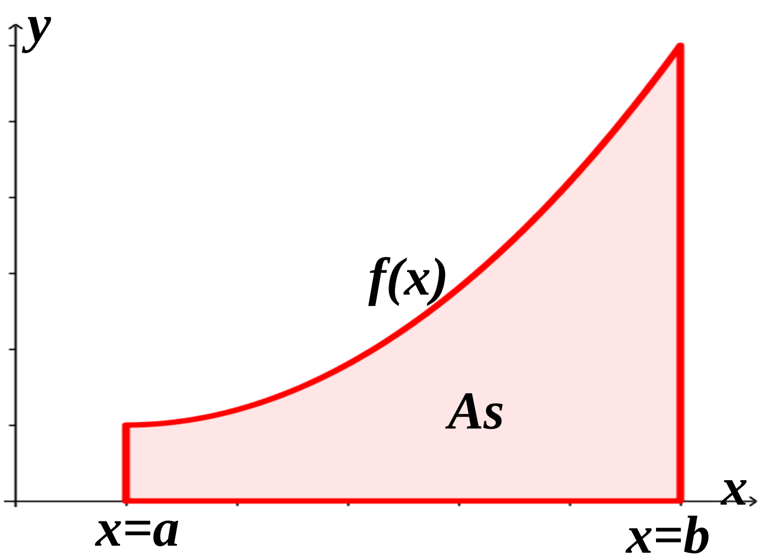
CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Como vimos, la $\int_a^b f(x)\cdot dx$, donde ***f*** es una función ***continua***, si existe, nos da como resultado un número real, se puede relacionar este concepto con el de ***ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA***, cuando ***f*** es ***Positiva*** en el intervalo ***[a, b]***.

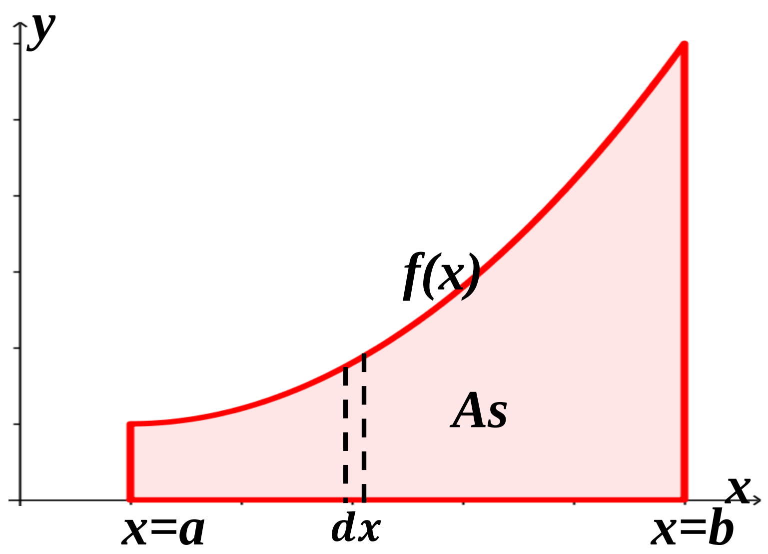


Pero no siempre ***f*** es ***Positiva*** en el intervalo ***[a, b]***. Sin embargo, puede encontrarse el ***ÁREA*** adecuando las ecuaciones, según veremos en los siguientes ***CASOS***:

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

CASO 1: Si ***f*** es una función ***continua*** y ***Positiva*** en el intervalo ***[a, b]***, entonces el ***ÁREA*** limitada superiormente por la curva ***f(x)***, inferiormente por el eje ***OX*** y lateralmente por los segmentos verticales ***x=a*** y ***x=b***, es:

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$



EJEMPLO 1:

Calcular el área de la región limitada superiormente por la función dada y los parámetros ***x*= *-1*** y ***x*=*3***.

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)^3}$$

La función integrando es continua en el intervalo [1, 3]; además, al observar la gráfica, apreciamos que es positiva en el intervalo.

El área de la región está dada por: $A=\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x+2)^3}$

Resolvamos primero al integral indefinida: $\int\frac{dx}{(x+2)^3}=I$

$t=x+2;\quad dt=dx$

$$I=\int t^{-3}\cdot dt=$$

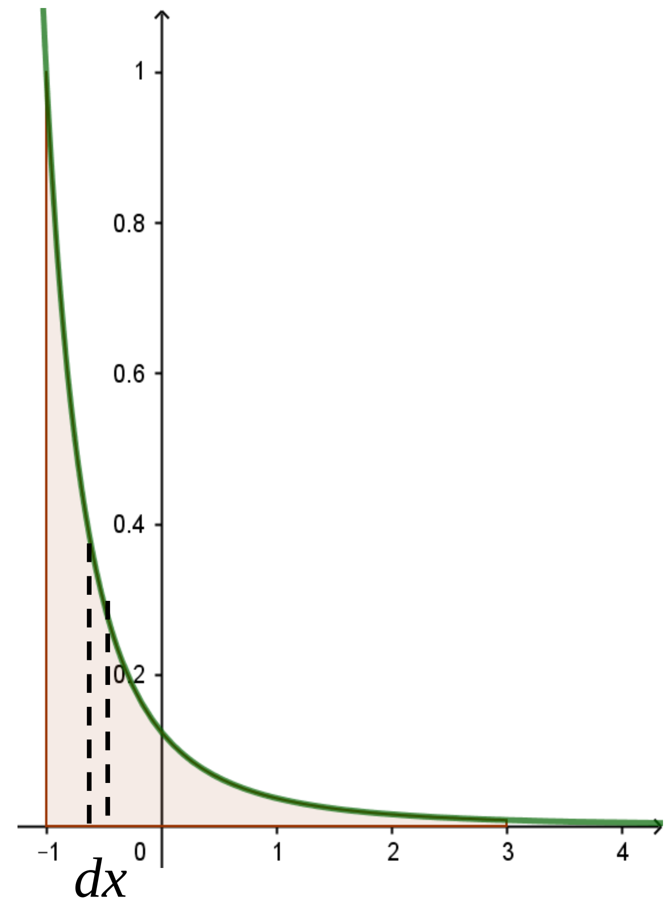
$$=-\frac{1}{2t^2}+C$$

$$A=[\frac{-1}{2(x+2)^2}]_{-1}^{3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(3+2)^2}-\frac{1}{(-1+2)^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{25}-1\right]=$$

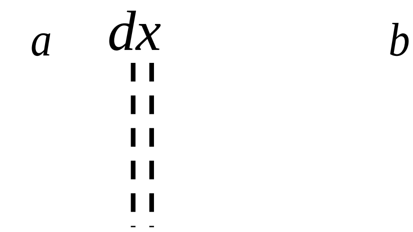
$$=\frac{24}{50}=0{,}48$$



$A=0{,}48\ U.A.$

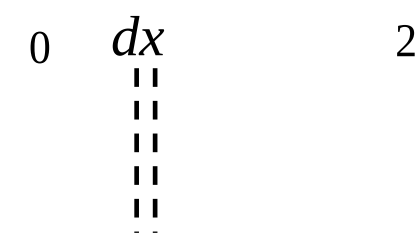
CASO 2: ***f*** es una función ***continua*** y ***Negativa*** sobre el intervalo ***[a, b]***, entonces el área limitada por la curva, el eje ***OX*** y los parámetros ***x=a*** y ***x=b***, es:

$$A = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$$



EJEMPLO 2:

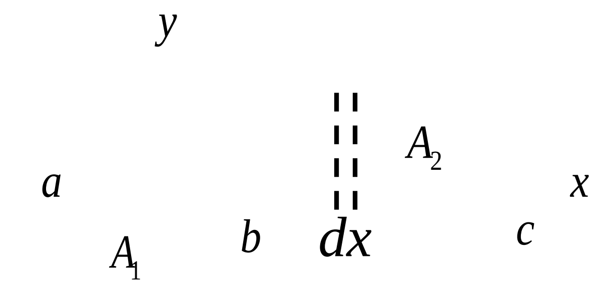
Calcular el área de la región limitada superiormente por la función $f(x) = x^2 - 2x$ inferiormente por el eje ***OX*** y lateralmente por los parámetros ***x=0*** y ***x=2***.



$$A = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x)dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} \right|_0^2 = \left| \frac{2^3}{3} - 2^2 - 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{8}{3} - 4 \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \;\; \therefore \; A = \frac{4}{3} \; UA$$

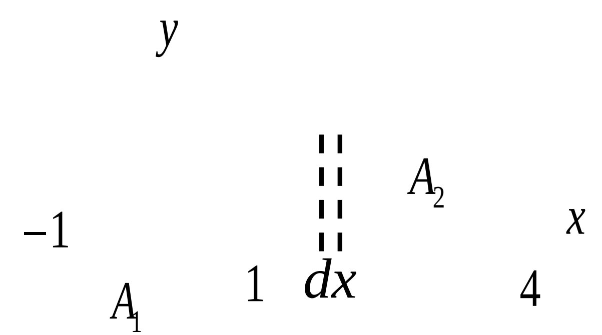
CASO 3: ***f*** es una función ***continua*** y tiene una parte ***Negativa*** y otra ***Positiva*** sobre el intervalo ***[a, b]***, entonces el área limitada por la curva, el eje ***OX*** y los parámetros ***x=a*** y ***x=b***, está compuesta por la suma de dos sub-áreas, que se calculan por separado y luego se suman:



$$A_1 = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \qquad A_2 = \int_b^c f(x) \cdot dx$$

$$A = A_1 + A_2$$

EJEMPLO 3:
Calcular el área de la región definida por: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
el eje OX y los parámetros $x=-1$ y $x=4$



Primero grafiquemos. Luego encontremos la intersección de f con el eje OX: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$$I = \int \sqrt[3]{x-1} \cdot dx = \int t^{1/3} \cdot dx = \frac{3}{4} t^{4/3} + C$$

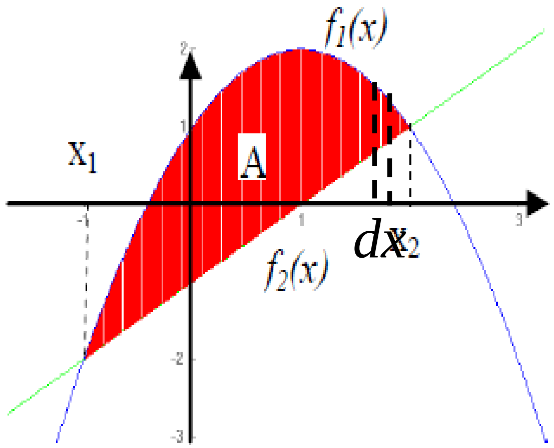
$$t = x - 1;\ \ dt = dx \quad \therefore\ I = \frac{3}{4}(x-1)^{4/3} + C$$

$$A_1 = \left| \left[\frac{3}{4}(x-1)^{4/3} \right]_{-1}^{1} \right| \cong 1{,}89 \qquad A_2 = \left[\frac{3}{4}(x-1)^{4/3} \right]_{1}^{4} \cong 3{,}25 \qquad A = A_1 + A_2 \cong 5{,}13\,U.A.$$

REGIÓN LIMITADA POR DOS CURVAS:

También podemos calcular el área de la región plana limitada por dos curvas. Se presentan los siguientes casos:

1) Una de las funciones está siempre por encima de la otra en el intervalo considerado.



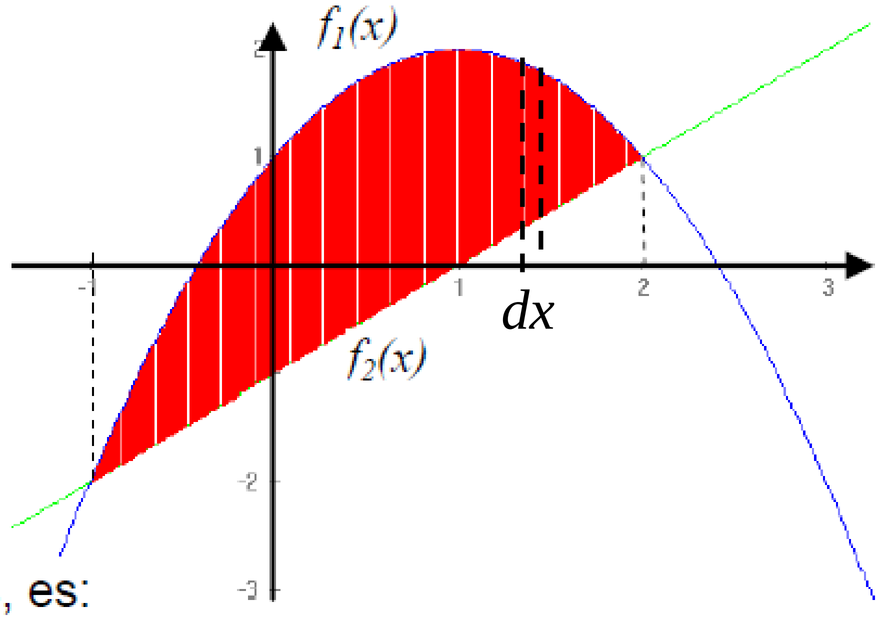
Es necesario encontrar los puntos de corte de ambas curvas; para ello igualamos en *y* y determinamos los valores de *x*. Luego, el área es:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$$

Nótese que no importa que parte de la región esté por debajo del eje *OX*.

Ejemplo 1:

Calcular el área de la región limitada por:



$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$x - 1 = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Entonces el área limitada por las dos curvas, es:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 2x + 1 \right) - \left(x - 1 \right) \right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) = \frac{10}{3} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} \;\therefore\; A = \frac{9}{2} UA$$

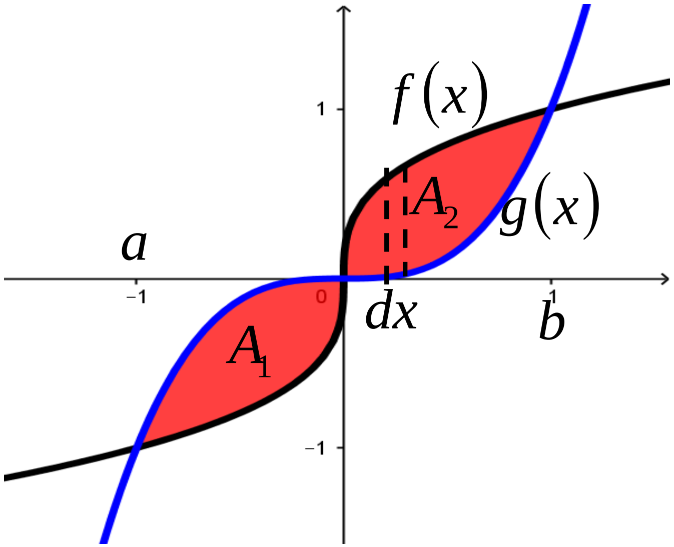
2) Las funciones están parte por encima y parte por abajo una de la otra en el intervalo considerado.

Se determinan los puntos de corte y se divide la región en tantas sub-regiones como queden definidas por éstos; calculando cada área y luego sumándolas.

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_a^0 [g(x) - f(x)] \cdot dx$$

$$A_2 = \int_0^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

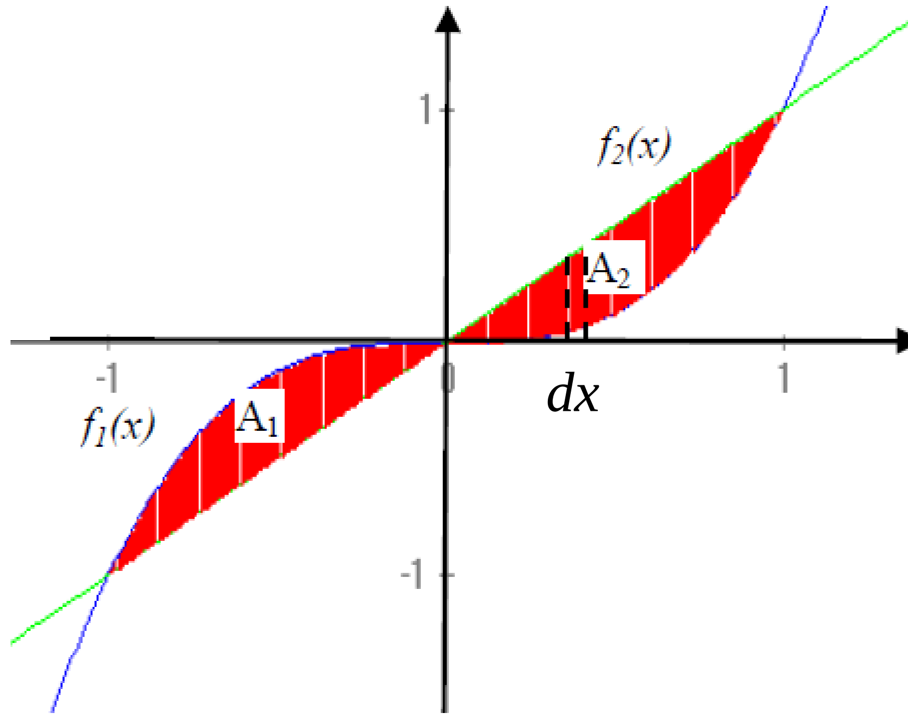


$$A = \int_a^0 [g(x) - f(x)] \cdot dx + \int_0^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

Ejemplo 2:

Calcular el área de la región limitada por:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases} \; ; \text{ luego: } x^3 = x \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



Por lo tanto el área es: $A=A_1+A_2$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right] = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

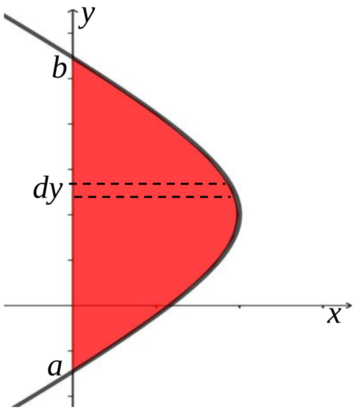
$$A_2 = \int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0\right] = \frac{1}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \;\; \therefore \;\; A = \frac{1}{2} UA$$

CÁLCULO DE ÁREAS UTILIZANDO *dy*.

El estudio puede utilizarse para calcular el área limitada por una función ***f(y)***, el eje ***OY*** y los parámetros ***y=a*** y ***y=b*** , como veremos a continuación.

CASO 1: ***f*** es una función ***continua*** y ***Positiva*** (***el gráfico está a la derecha del eje OY***) sobre el intervalo ***[a, b]***, entonces el área limitada por la curva, el eje ***OY*** y los parámetros ***y=a*** y ***y=b***, es:



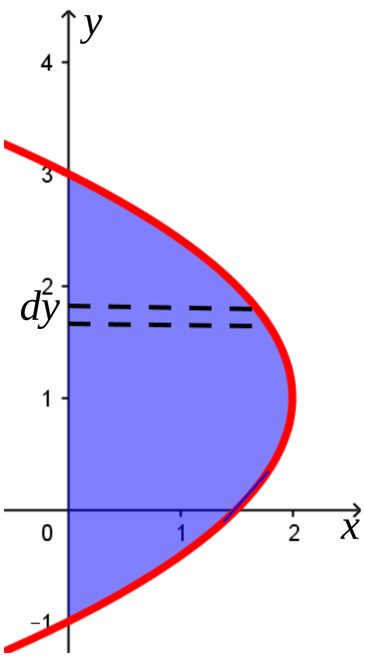
$$A=\int_a^b f(y)\cdot dy$$

EJEMPLO 1:

Calcular el área de la región limitada por la función

$x=-\frac{1}{2}y^2+y+\frac{3}{2}$ y el eje ***OY***.

En este caso, en el intervalo de análisis la función está a la ***derecha*** del eje ***OX*** (***es positiva***), entonces procedemos:



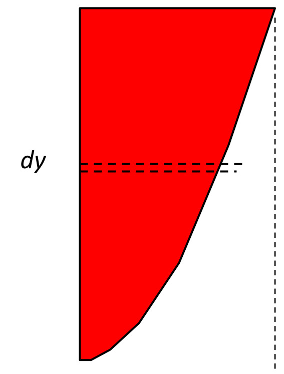
$$A=\int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{2}y^2+y+\frac{3}{2}\right)\cdot dy=$$

$$=\left[-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}y\right]_{-1}^{3}=-\frac{1}{6}3^3+\frac{1}{2}3^2+\frac{3}{2}\cdot 3-\left(-\frac{1}{6}(-1)^3+\frac{1}{2}(-1)^2+\frac{3}{2}(-1)\right)$$

$$A=\frac{16}{3};\qquad A=5{,}33\,U.A.$$

EJEMPLO 2:

Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$, el eje ***OY*** y los parámetros ***y=0*** e ***y=4***.



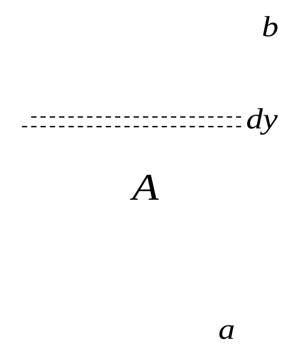
La función está dada en la variable ***x***; hay que expresarla como ***f(y)***: $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = f(y) = \sqrt{y}$

En este caso, en el intervalo de análisis la función está a la ***derecha*** del eje ***OX*** (***es positiva***), entonces procedemos:

$$A = \int_0^4 \sqrt{y} \cdot dy = \int_0^4 y^{1/2} \cdot dy = \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$A = \frac{16}{3} = 5,33 \text{ U.A.}(Unidades\ de\ Área)$$

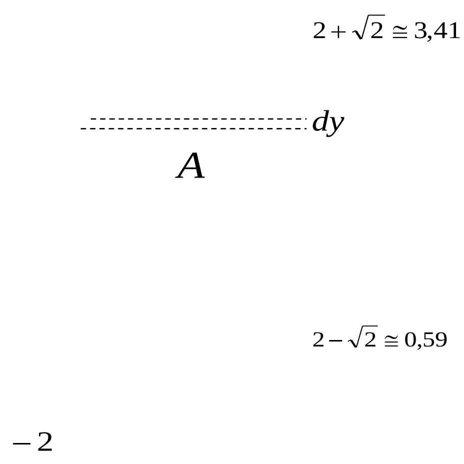
CASO 2: *f* es una función ***continua*** y ***Negativa (a la izquierda del eje OY)*** sobre el intervalo ***[a, b]***, entonces el área limitada por la curva, el eje ***OY*** y los parámetros ***y=a*** y ***y=b***, es:



$$A = \left| \int_a^b f(y) \cdot dy \right|$$

EJEMPLO 3:
Calcular el área de la región definida por:

$f(y) = y^2 - 4y + 2$ y el eje OY.



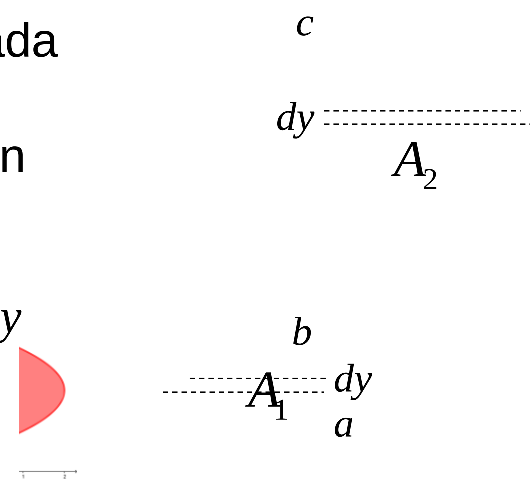
Como en el intervalo de análisis la función está a la izquierda del eje *OX* (es negativa), procedemos:

$$A = \left| \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \left(y^2 - 4y + 2\right) \cdot dy \right| = \left| \left[\frac{1}{3} y^3 - 2y^2 + 2y \right]_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} \right| = \left| -3{,}77 \right|$$

$$A = 3{,}77\ U.A.$$

CASO 3: *f* es una función ***continua*** y tiene una parte ***Negativa (a la izquierda del eje OY)*** y otra ***Positiva (a la derecha del eje OY)*** sobre el intervalo ***[a, b]***, entonces el área limitada por la curva, el eje ***OY*** y los parámetros ***x=a*** y ***x=b***, está compuesta por la suma de dos sub-áreas, que se calculan por separado y luego se suman:

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 = \left| \int_a^b f(y) \cdot dy \right| \qquad A_2 = \int_b^c f(y) \cdot dy$$



EJEMPLO 4:

Calcular el área de la región definida por: $x = -y^2 + 4y - 2$ en el intervalo $y = 0;\ \ y = 2 + \sqrt{2}$

Las intersecciones de la función con el eje ***OY*** son: $-y^2 + 4y - 2 = 0; \begin{cases} y_1 = 2 - \sqrt{2} \\ y_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

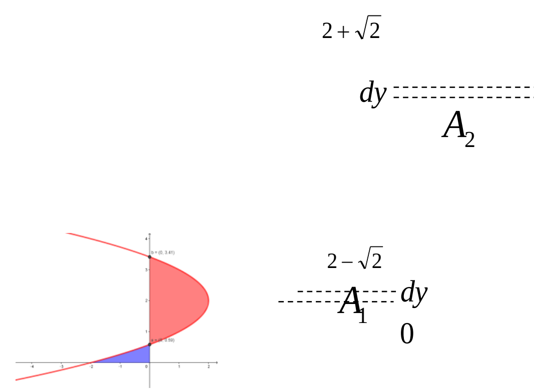
Se debe dividir la región en dos: $A = A_1 + A_2$

Procederemos primero a resolver la integral indefinida:

$$I = \int \left(-y^2 + 4y - 2\right) \cdot dy = -\frac{1}{3} y^3 + 2y^2 - 2y + C$$

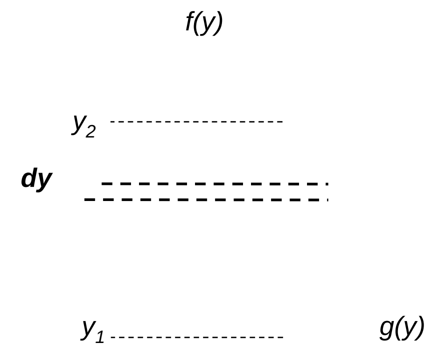
$$A_1 = \left| \left[-\frac{1}{3} y^3 + 2y^2 - 2y \right]_0^{2-\sqrt{2}} \right| = \left| -0{,}5523 \right| \therefore A_1 = 0{,}5523\ U.A.$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{3} y^3 + 2y^2 - 2y \right]_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} = \therefore A_2 = 3{,}77\ U.A.$$



$$A = 4{,}32\ U.A.$$

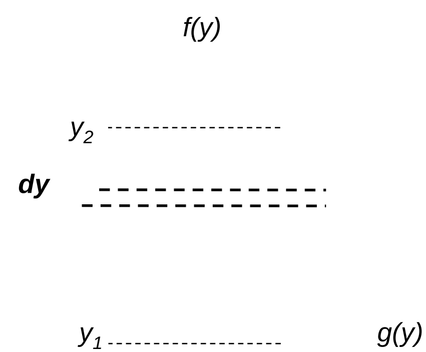
Área limitada por dos Curvas:
Si queremos calcular el área limitada por dos funciones ***f(y)*** y ***g(y)***, debemos integrar en función de ***y***:
En todos los casos es preciso graficar y además, encontrar la o las intersecciones de las curvas.



La función que está a la ***derecha***, ***f(y)*** es la que se ubica en el minuendo; y la que se encuentra a la ***izquierda***, ***g(y)***, en el sustraendo del integrando.

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \left[\mathrm{f(y)} - g(\mathrm{y}) \right] dy$$

EJEMPLO 5:
Calcular el área de la región limitada por:



$$\begin{cases} y^2 = 32(8-x) \\ y^2 = 8(x+2) \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 32(8-x) \Rightarrow \mathrm{x} = 8 - \dfrac{y^2}{32} \\ y^2 = 8(x+2) \Rightarrow \ \mathrm{x} = \dfrac{y^2}{8} - 2 \end{cases}$$

$$8(x+2) = 32(8-x) \Rightarrow 8x + 16 = 256 - 32x \Rightarrow x = 6$$

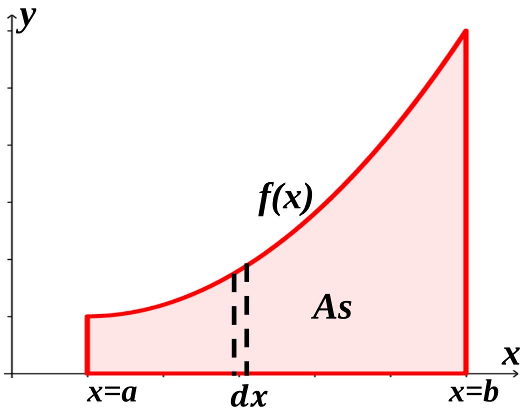
$$y^2 = 32(8-6) \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -8 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

$$A = \int_{-8}^{8} \left[\left(8 - \frac{y^2}{32} \right) - \left(\frac{y^2}{8} - 2 \right) \right] dy = \int_{-8}^{8} \left[10 - \frac{5y^2}{32} \right] dy = \left[10y - \frac{5y^3}{96} \right]_{-8}^{8} =$$

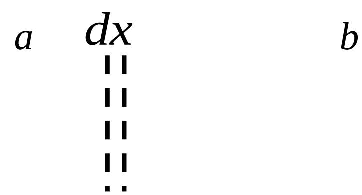
$$= 80 - \frac{80}{3} - \left(-80 + \frac{80}{3} \right) = 160 - \frac{160}{3} = \frac{320}{3} = \therefore \ A = 106,7 \ U.A.$$

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

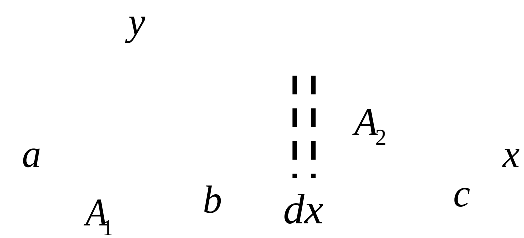
CUADRO RESUMEN de CÁLCULO de ÁREAS PLANAS
Usando elemento dx



$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

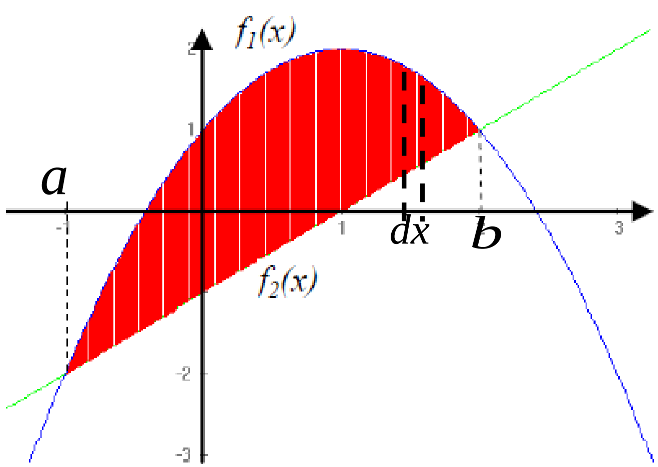


$$A = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$$

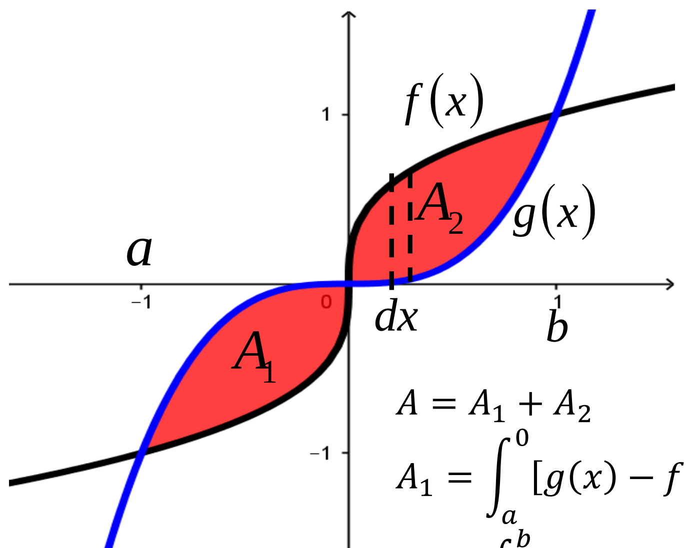


$$A_1 = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \qquad A_2 = \int_b^c f(x) \cdot dx$$

$$A = A_1 + A_2$$



$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \cdot dx$$



$$A = A_1 + A_2$$

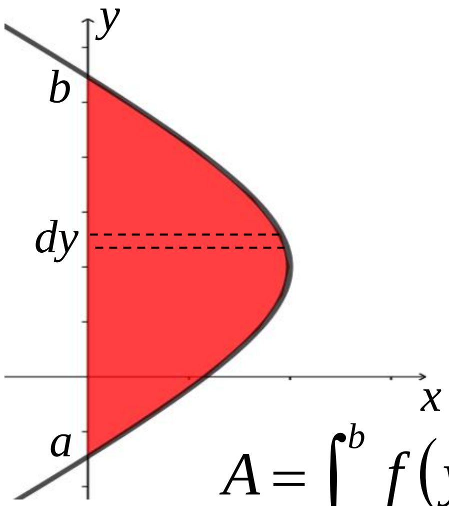
$$A_1 = \int_a^0 [g(x) - f(x)] \cdot dx$$

$$A_2 = \int_0^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

S.G

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

CUADRO RESUMEN de CÁLCULO de ÁREAS PLANAS
Usando elemento *dx*



$$A = \int_a^b f(y) \cdot dy$$

b

dy

A

$$A = \left| \int_a^b f(y) \cdot dy \right|$$

a

c

dy

A_2

f(y)

y_2

dy

y_1

g(y)

b

A_1 dy

a

$$A_1 = \left| \int_a^b f(y) \cdot dy \right| \qquad A_2 = \int_b^c f(y) \cdot dy$$

$$A = A_1 + A_2$$

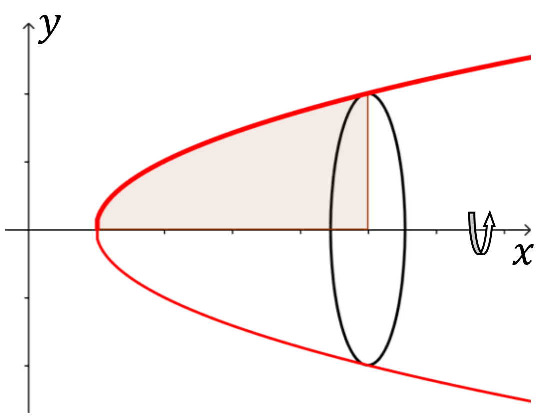
$$A = \int_{y_1}^{y_2} \left[\mathrm{f(y)} - g(\mathrm{y}) \right] dy$$

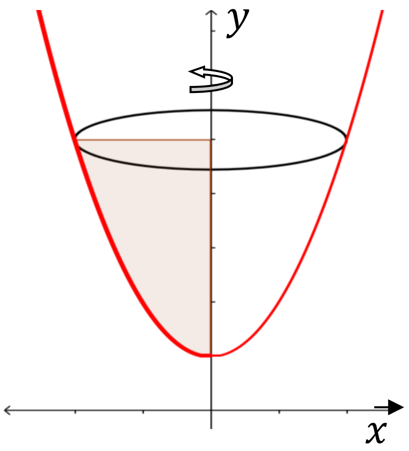
CÁLCULO DEL VOLÚMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Un sólido de revolución es un cuerpo tridimensional que se genera por la *rotación de un área plana alrededor de* una recta llamada *eje de revolución*.

El área plana puede estar limitada por funciones continuas.

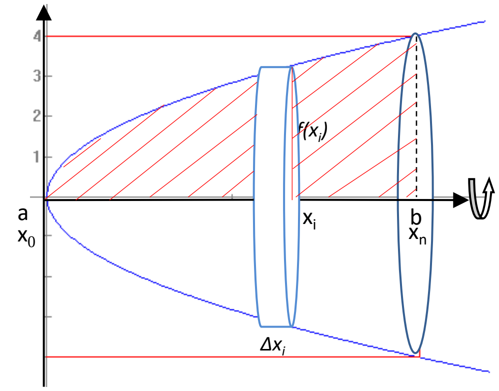
El *volumen de un sólido de revolución* se puede hallar aplicando integral definida.





MÉTODO del DISCO

Si hacemos girar una región de plano limitada por la función *f* (continua) y los segmentos *x=a* y *x=b*, alrededor del eje *OX*, obtenemos un ***sólido de revolución***.



El volumen de ese cuerpo se puede calcular mediante integral definida. Lo dividimos *n discos* (perpendiculares al eje de rotación), de radio *r=f(x)* y de ancho *Δx*, como se muestra en la figura, cuyo volumen es:

$$Vd_i = \pi \cdot (r_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$Vd_i = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

Por lo tanto el volumen del sólido se obtendrá sumando todos los volúmenes elementales y pasando al límite: $V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$

$$V = \int_{x_0}^{x_n} \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$$

Entonces, cuando el eje de rotación es OX, el volumen del sólido de revolución es:

$$\boxed{V = \int_{a}^{b} \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx}$$

EJEMPLO 1:

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación del área de la región limitada por $y = \sqrt{8x}$ y la ordenada $x=2$ que gira alrededor del eje OX, Aplicando el Método del Disco.

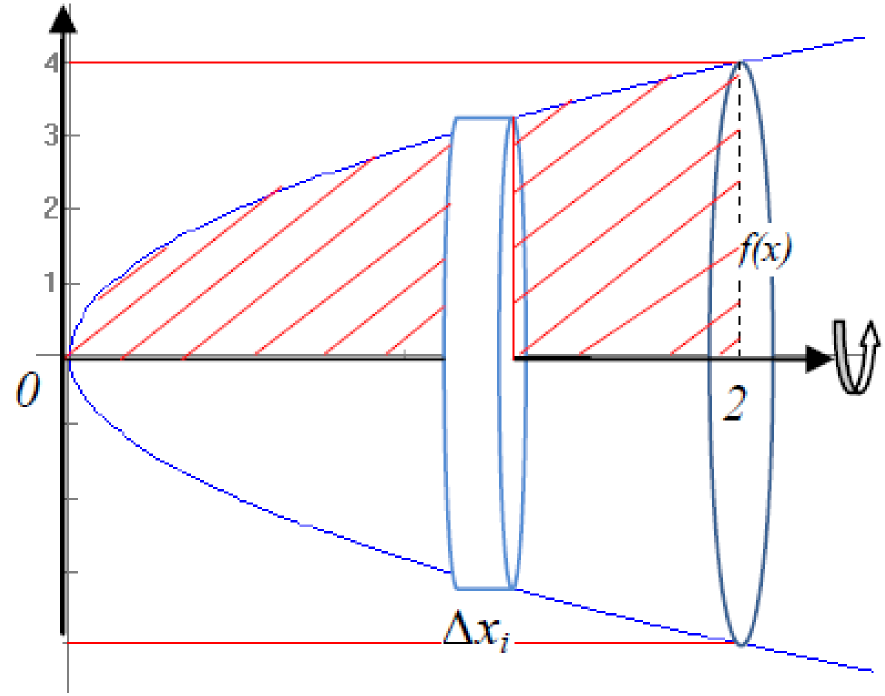
Solución:

$$V = \int_0^2 \pi \cdot \left[\sqrt{8x}\right]^2 \cdot dx$$

$$V = 8\pi \cdot \int_0^2 x \cdot dx$$

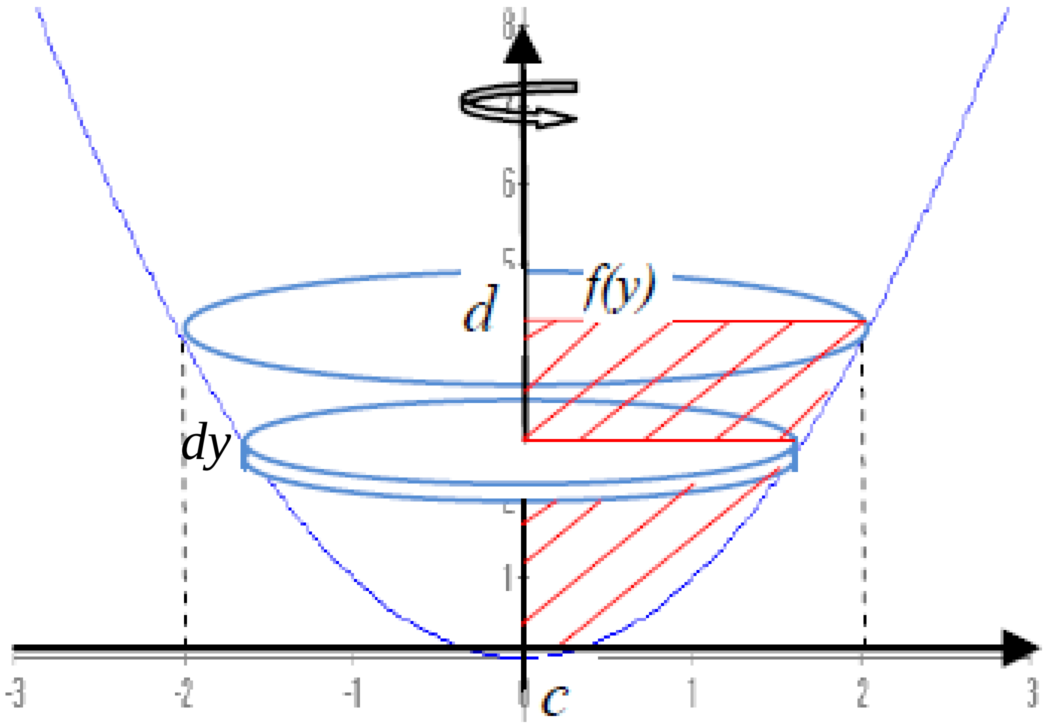
$$V = 4\pi \cdot \left[x^2\right]_0^2$$

$$V = 16\pi \cong 50{,}26\, UV$$



Y cuando el eje de rotación es el eje OY, el volumen es:

$$V = \int_c^d \pi.\left(f(\text{y})\right)^2.\text{dy}$$



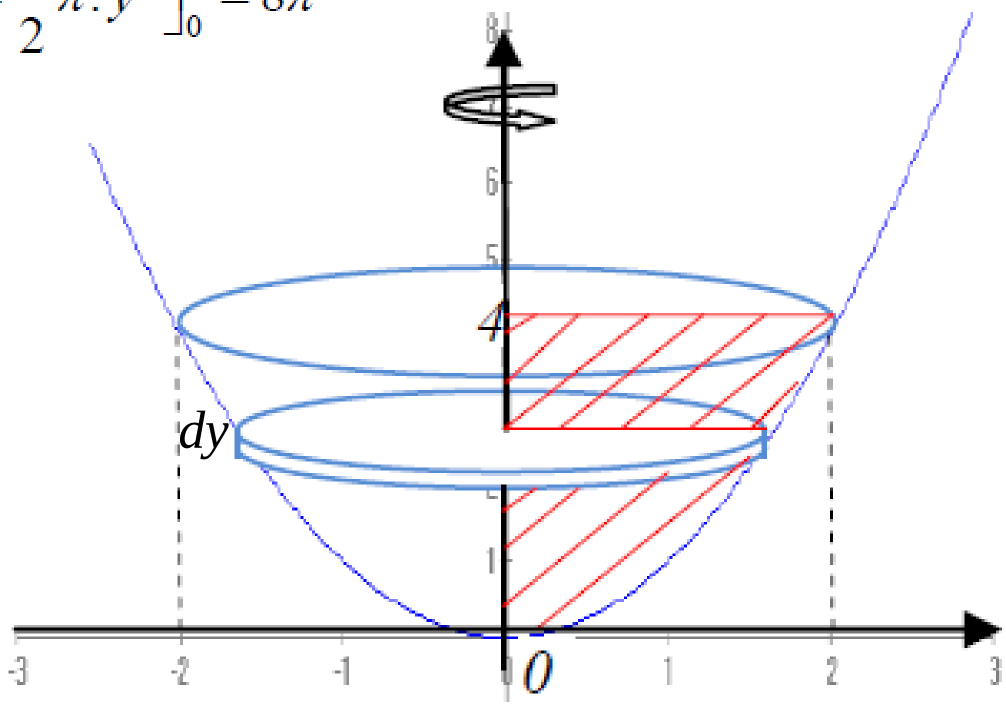
Ejemplo 2:

Calcular el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por la función $f(x)=x^2$, alrededor del eje OY, entre $x=0$ y $x=2$, aplicando el método del disco.

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f(y) = x = \sqrt{y}$$

$$V = \int_0^4 \pi.(f(y))^2\,.\mathrm{dy} = \pi.\int_0^4 y.\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\pi.y^2\Big]_0^4 = 8\pi$$

$$V = 8\pi \cong 25{,}13\ U^3$$

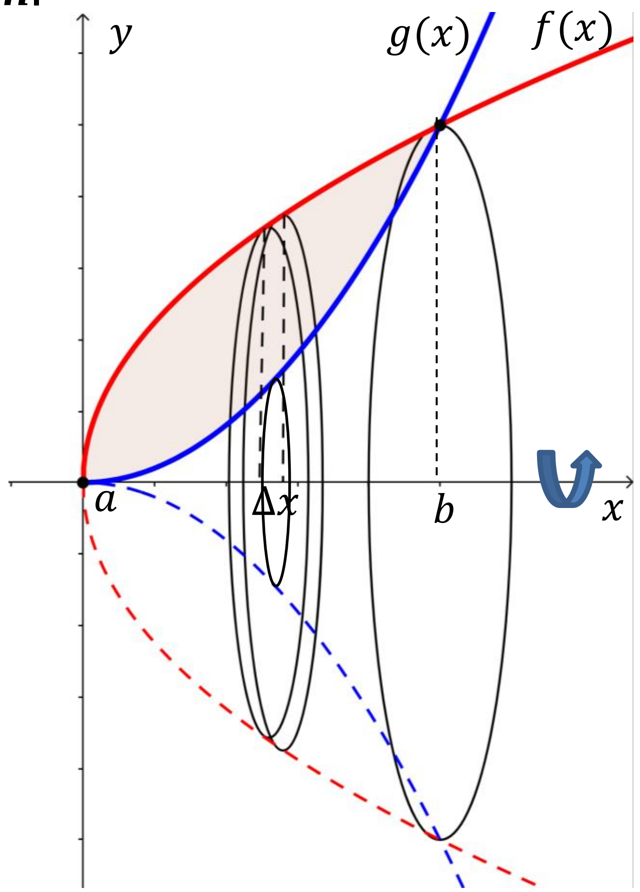


MÉTODO de la ARANDELA

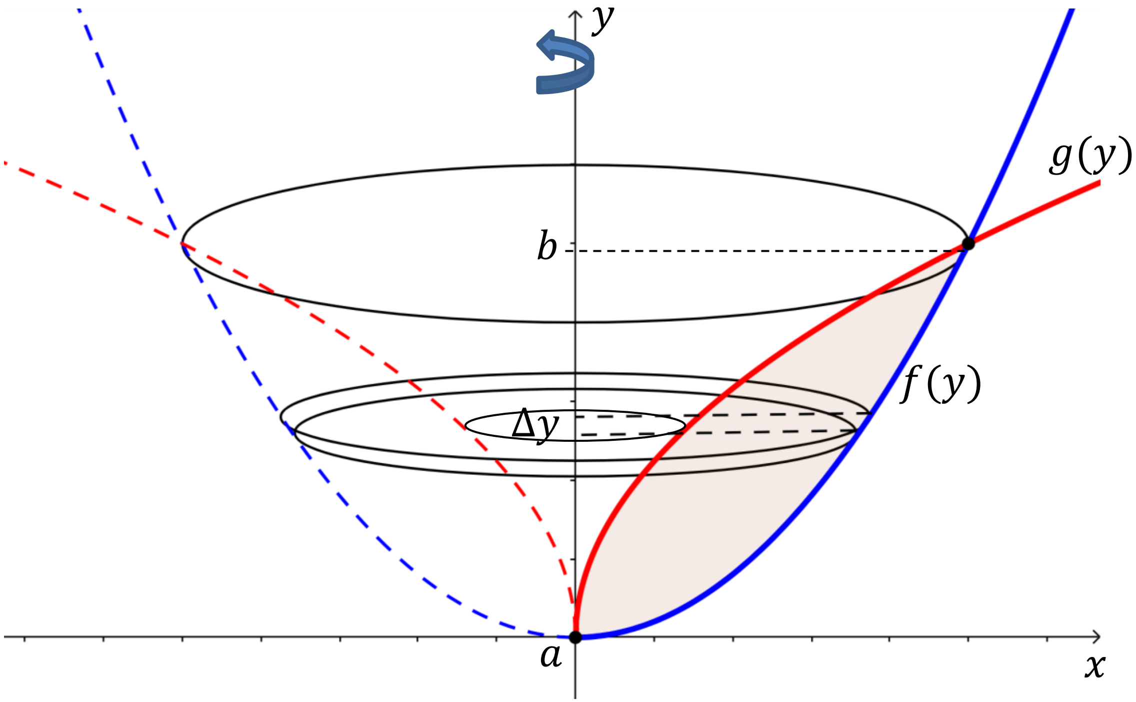
Si hacemos girar una región de plano limitada por dos funciones f y g (continuas), alrededor del eje OX, obtenemos un ***sólido de revolución***.

La región que gira es la sombreada, por lo que el elemento diferencial es una arandela, ancho Δx, como se muestra en la figura. El volumen del sólido es:

$$\boxed{\boldsymbol{V = \int_a^b \pi \cdot \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] \cdot dx}}$$



Si hacemos girar una región de plano limitada por dos funciones f y g (continuas), alrededor del eje OY, obtenemos un ***sólido de revolución***.



La región que gira es la sombreada, por lo que el elemento diferencial es una arandela, ancho Δy, como se muestra en la figura. El volumen del sólido es:

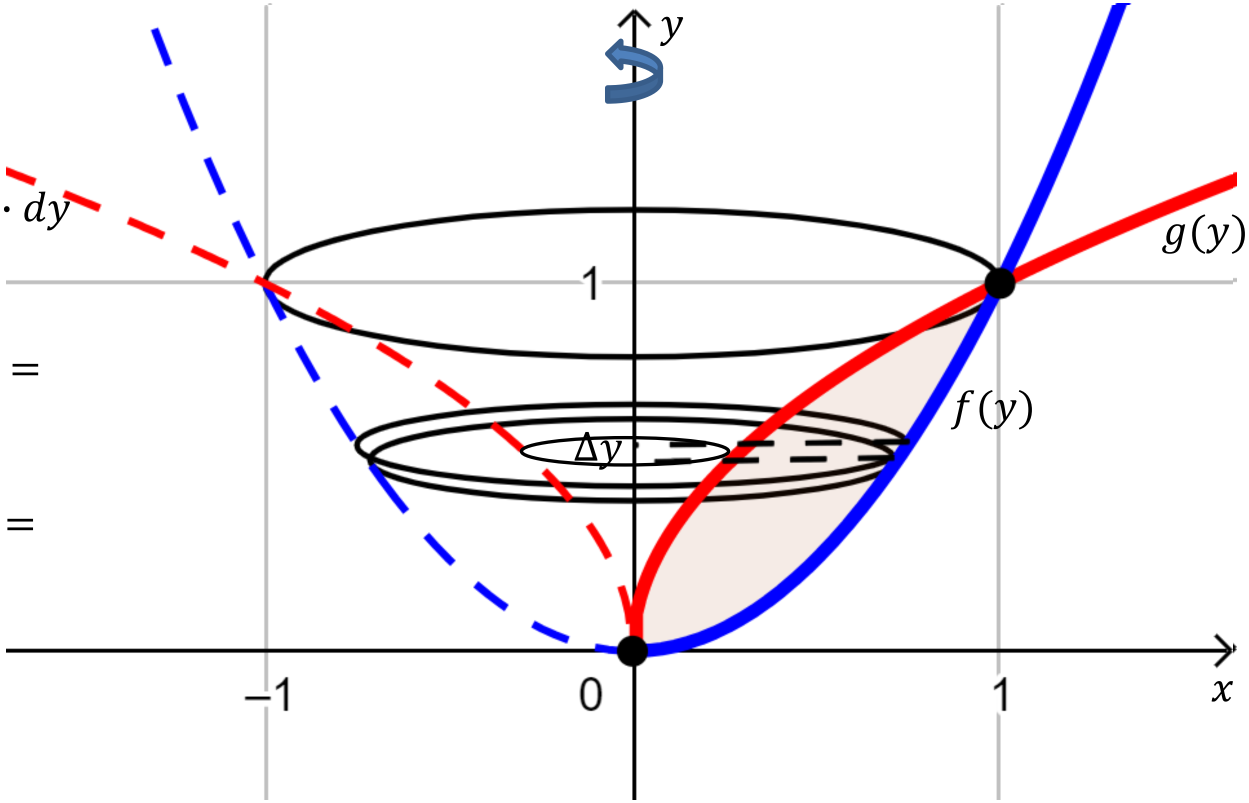
$$\boxed{\boldsymbol{V = \int_a^b \pi \cdot \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] \cdot dy}}$$

EJEMPLO:

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región de plano limitada por las funciones f y g, girando alrededor del eje OY. Grafique.

$$f(y) = \sqrt{y} \qquad g(y) = y^2$$

Solución:



$$V = \int_0^1 \pi \cdot [(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2] \cdot dy$$

$$V = \pi \cdot \int_0^1 (y - y^4) \cdot dy =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5\right]_0^1 =$$

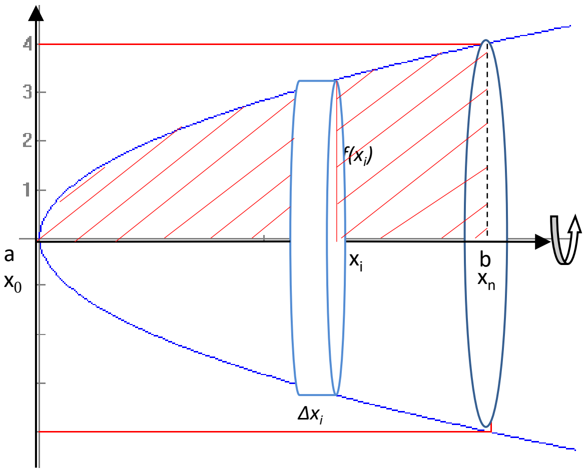
$$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$V = \frac{3}{5} \cong 1{,}88\ U.V.$$

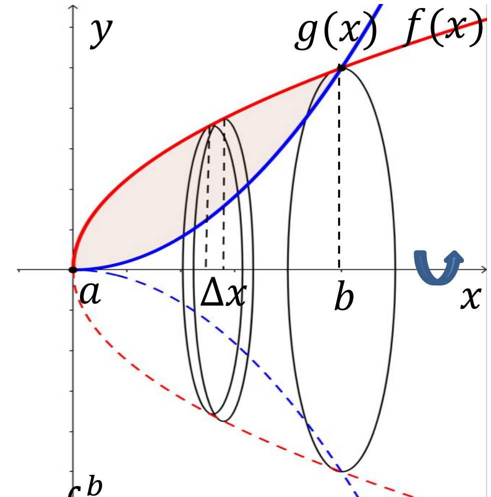
Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

CUADRO RESUMEN

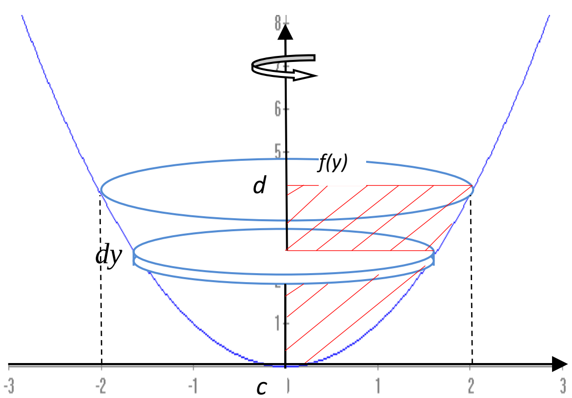
CÁLCULO DEL VOLÚMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN



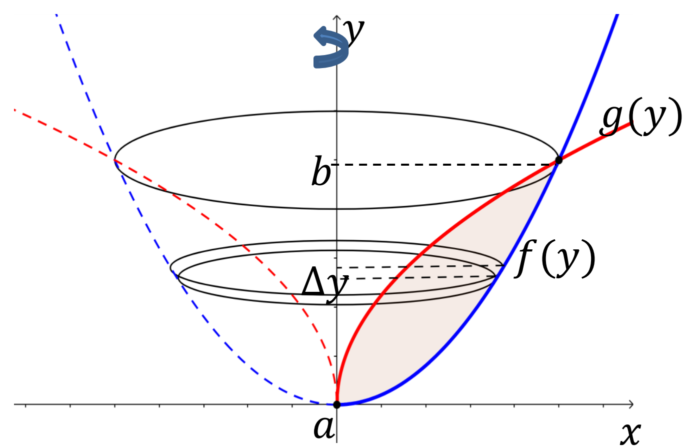
$$V = \int_a^b \pi . \left(f(x) \right)^2 . \mathrm{dx}$$



$$V = \int_a^b \pi \cdot [(f(x))^2 - (g(x))^2] \cdot dx$$

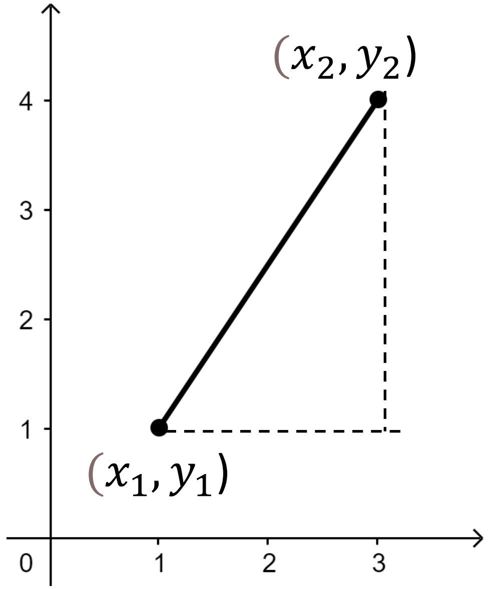


$$V = \int_c^d \pi . \left(f(\mathrm{y}) \right)^2 . \mathrm{dy}$$



$$V = \int_a^b \pi \cdot [(f(y))^2 - (g(y))^2] \cdot dy$$

LONGITUD DE ARCOS DE CURVAS



Nosotros conocemos, por lo estudiado en Geometría Analítica, la ecuación que define la distancia entre dos puntos del plano:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Que representa la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que muestra la figura.

Nos valdremos de este concepto para calcular la longitud de una curva plana, mediante la suma de las longitudes de las sucesivas hipotenusas de los triángulos rectángulos que se formen al realizar la partición del intervalo en el cual se desarrolla dicha curva. Para poder realizar esto, la curva debe ser rectificable.

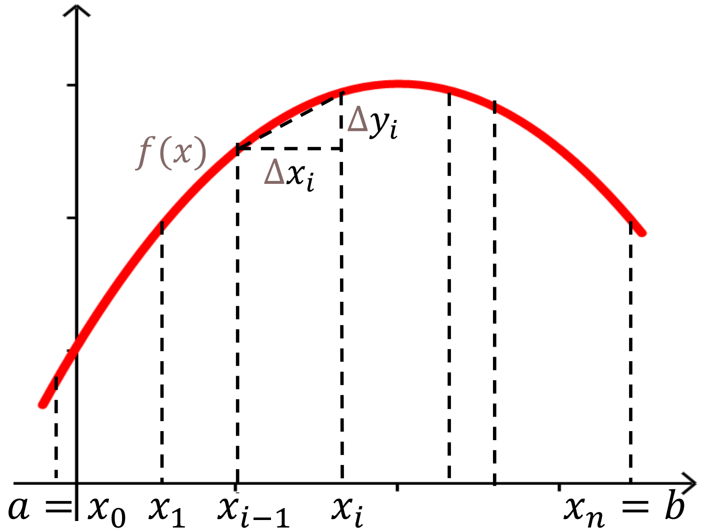
Diremos que una **curva es rectificable** si tiene una **longitud de arco finita**.

Diremos también que, la condición suficiente para que la gráfica de una función sea rectificable entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es que $f'(x)$ sea continua en $\forall\in [a, b]$.

Una función es continuamente diferenciable en $[a, b]$ y su gráfica en ese intervalo es una curva suave.

Vamos a considerar una función $y = f(x)$ que es continuamente diferenciable en el intervalo $[a, b]$. Podemos rectificar la gráfica de f por n segmentos de recta cuyos puntos finales son determinados por la partición establecida por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$



Los catetos adyacentes de los triángulos son: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Los catetos opuestos de los triángulos son: $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

La suma de las longitudes de las hipotenusas de cada triángulo será aproximadamente la longitud del arco buscado:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Que la podemos expresar como: $s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i)^2}$

Para agilizar los cálculos, consideraremos una partición regular, es decir: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Si extraemos (Δx_i) de la raíz:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right](\Delta x_i)^2}$$

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}$$

$$\Delta x_i = \Delta x$$

Que equivale a: $$s \approx \Delta x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Si aplicamos el límite, cuando Δx tiende a cero, es decir, cuando $n \to \infty$:

$$s = \lim_{\|\Delta\|} \Delta x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Sabemos que $f'(x)\exists\forall x \in [a,b]$, por lo que también existe para todos los subintervalos Δx_i, entonces, conforme al teorema del valor medio, nos garantiza que existe un valor $c_i \in \Delta x_i$ tal que:

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad \Longrightarrow \quad f'(c_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Como f es derivable en $[a,b]$, también es continua en $[a,b]$; por lo que es notable que $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$, también será continua en $[a,b]$, lo que implica:

$$s = \lim_{\|\Delta\|} \Delta x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

O su equivalente:
$$\boldsymbol{s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx}$$

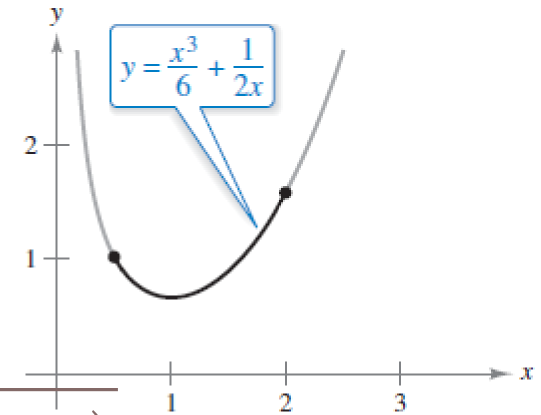
$$\boldsymbol{s\ es\ la\ longitud\ del\ arco\ de\ f, entre\ a\ y\ b}$$

De igual manera tendremos para una función del tipo $x = g(y)$, la longitud de arco de $g(y)$ entre c y d.

$$\boldsymbol{s = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}. dy}$$

EJEMPLO:

Calcular la longitud del arco descripto por la función de ecuación $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ en el intervalo $[{}^1/_2\,,\ 2]$



Solución:

La función f es continua y derivable en el intervalo $[{}^1/_2\,,\ 2]$

$$f'(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

$$s=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right]^2}\,.dx=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\left(1+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}\right)}\,.dx$$

$$=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}\right)}\,.dx$$

El radicando es un t.c.p.

$$s=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,.dx=\int_{1/2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right).dx$$

$$s=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right]_{1/2}^{2}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{48}-1\right)\qquad \boldsymbol{s=\frac{33}{16}U}$$