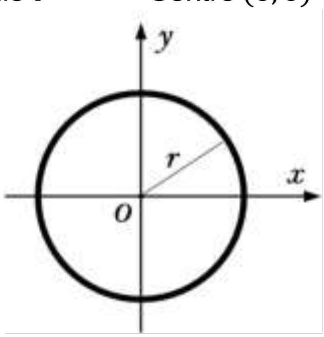
TRABAJO PRACTICO N° 8: Cónicas Planas

TRABAJO PRÁCTICO: CIRCUSFERENCIA

Repaso de conceptos importantes:

"Se denomina Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro"

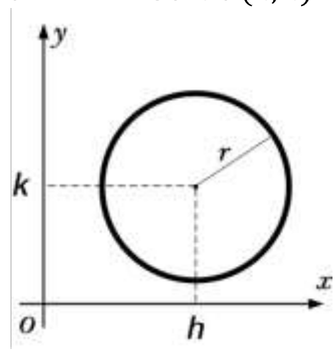
Radio $\boldsymbol{r}$ Centro $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$



Ecuación Reducida:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Radio $\boldsymbol{r}$ Centro $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$



Ecuación Canónica:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación General de la Circunferencia

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + D\,x + E\,y + F = 0}$, con $\boldsymbol{B = 0 \; y \; A = C = 1}$

$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ constantes reales, $\boldsymbol{h = -\frac{D}{2}}$ $\boldsymbol{k = -\frac{E}{2}}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Si $\boldsymbol{D^2 + E^2 - 4F > 0}$, se tiene una circunferencia real.

Para toda circunferencia, la excentricidad es: $\boldsymbol{e = 0}$

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos cualesquiera del plano, $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$, su distancia $|AB|$, está dada por la expresión: $|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Coordenadas del punto medio

Dados dos puntos cualesquiera del plano, $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$, las coordenadas de $\boldsymbol{M}$ punto medio del segmento $|\boldsymbol{AB}|$ son: $\boldsymbol{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Distancia de un punto a una recta

Dada una recta r: $Ax + By + C = 0$ y un punto que no pertenece a la recta $\boldsymbol{A}(x_0, y_0)$,

la distancia de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{r}$: viene dada por: $\boldsymbol{d(A, r)} = \frac{|\mathbf{A}x_0 + \mathbf{B}y_0 + \mathbf{C}|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Ejercitación

1. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumple que:
   a) La distancia al punto fijo $A(2, -1)$ sea igual a 5.
   b) La distancia al punto $A(4,2)$ es siempre igual al doble de su distancia al punto $B(-1,3)$.

2. Determinar las ecuaciones canónica y general de las siguientes circunferencias, graficando en cada caso:
   a) Centro en $C(-2, 3)$ y radio 4.
   b) Pasa por el origen y tiene su centro en el punto común a las rectas: $x + 3y - 6 = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$.
   c) Es tangente al eje de ordenadas y el centro es el punto de intersección de las rectas r_1: $x - y + 1 = 0$ y r_2: $y = 2x$
   d) El centro es el punto medio entre $A(-4, 2)$ y $B(6, -3)$ y su diámetro es 6.
   e) Es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es $C(1,2)$.
   f) El centro es $(-1, 3)$ y contiene al punto $(-2,1)$.
   g) El centro es el punto $(3, 5)$ y es tangente a la recta $y - 1 = 0$.
   h) Contiene a los puntos $(2,3)$, $(0, -1)$, y $(-1,0)$.

3. Encontrar una ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ en el punto $(5,1)$.

4. Encontrar la ecuación y grafica de la circunferencia cuyo centro pertenece a la recta de la ecuación $y = 2x$ y contiene a los puntos $(-1, 2)$ y $(3,1)$. Indicar todos sus elementos.

5. Determinar si las siguientes ecuaciones cumplen con la condición necesaria para ser una circunferencia. En caso afirmativo, obtenga la ecuación ordinaria, graficando e indicando sus elementos.
   a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y - 2 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$
   d) $3\,x^2 + 3\,y^2 - 6x - 18y + 18 = 0$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.
   (Utiliza el GeoGebra para trazar la gráfica)

7. Dadas las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
   a) Obtener los puntos de intersección entre ellas y sus gráficas.
   b) Determinar la ecuación de la recta por esos dos puntos.

8. Hallar, si es que existe, los puntos de intersección de:
   a) La recta de ecuación $x - y + 1 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$
   b) La recta de ecuación $y + x = -2$ y la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

9. Hallar la longitud y el área de la circunferencia cuya ecuación es:
   $25\,x^2 + 25\,y^2 + 30\,x - 20\,y - 62 = 0$

10. Calcular la longitud de la cuerda que determina la recta $x = 3$, al cortar a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$. Graficar.

11. Una laguna de forma circular tiene una superficie de 806 m^2 , tomando como origen el centro de la laguna, obtén la medida de su radio.

12. Un puente carretero tiene forma semicircular, siendo la luz de 8m. Hacer un gráfico cartesiano, situando el perfil del puente convenientemente. a) Determinar si un camión de 3,8m de altura y 3m de ancho podrá pasar por el puente sin desviarse de su carril.
b) ¿Podrá pasar si circula por el medio de la carretera?

13. El arco de un túnel semicircular tiene una altura máxima de 16 metros. Graficar y calcular: a) La altura del túnel a 2 metros del centro. b) La altura del túnel a 2 metros de los extremos.

14. María compró un nuevo aspersor que cubre parte del total de un área circular. Considerando como origen el centro del aspersor, este lanza agua lo suficientemente lejos como para alcanzar un punto ubicado en $(12, 16)$, cuya unidad de medida es en metros.
    a) Encontrar una ecuación que represente los puntos más lejanos a los que el aspersor puede llegar.
    b) El jardín de María mide 40 m de ancho por 50 m de largo. Si María riega su jardín sin mover el aspersor, ¿qué porcentaje del jardín no se mojará directamente?

15. ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por la trayectoria de un avión que se mantiene sobrevolando la ciudad de Tucumán a una distancia constante de 4 km. De la torre del aeropuerto, esperando autorización para aterrizar?

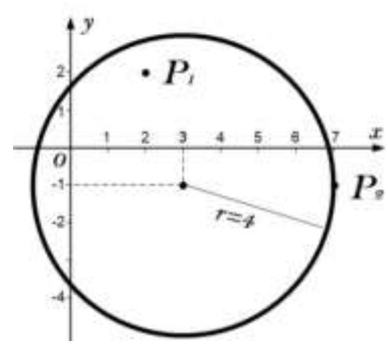
EJERCICIOS RESUELTOS: CIRCUNFERENCIA

1. Dada la circunferencia $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$. Determinar centro y radio. Graficar. Averiguar si los siguientes puntos pertenecen a las mismas: $P_1(2,2)$, $P_2(7,-1)$

El centro es $C(3,-1)$, y el radio es $r = 4$. Si los puntos pertenecen a la circunferencia, deben verificar su ecuación.

¿$P_1(2,2) \in C_c$? $(2-3)^2 + (2+1)^2 = 10 \neq 16$; $\Rightarrow$ $P_1 \notin C_c$

¿$P_2(7,-1) \in C_c$? $(7-3)^2 + (-1+1)^2 = 16$; $\Rightarrow$ $P_2 \in C_c$



2. Dada la siguiente circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0$ representarla gráficamente. Determinar el centro y el radio.

Esta es la ecuación general de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0$

Para encontrar centro y radio hay dos formas de hacerlo:

a) completando cuadrados: $(x^2 + 10x + 25) - 25 + (y^2 - 2y + 1) - 1 - 23 = 0$

$(x+5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 24 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 + (y-1)^2 = 49$

Luego, el centro es $C(-5,1)$ y el radio es 7.

b) Trabajando con las expresiones: , $\boldsymbol{h} = -\frac{D}{2}$, $\boldsymbol{k} = -\frac{E}{2}$, $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ $D = 10$, $E = -2$, $F = -23$;

$\boldsymbol{h} = -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \boldsymbol{h} = -\mathbf{5}$; $\boldsymbol{k} = -\frac{(-2)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{1}$; $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{10^2} + (-\mathbf{2})^2 - \mathbf{4}(-\mathbf{23})}$

$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{196}}$ $\boldsymbol{r} = \mathbf{7}$. La ecuación canónica es **:** $\boxed{(\boldsymbol{x}+\mathbf{5})^2 + (\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^2 = \mathbf{49}}$

3. Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, que es perpendicular a la recta $5x+2y-13=0$

La pendiente de la recta $5x+2y-13=0$ es $m = -\frac{5}{2}$. Por lo tanto la pendiente del diámetro es $m_d = \frac{2}{5}$ y como el diámetro pasa por el centro de la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, tenemos que determinar el centro. Completamos cuadrados

$(x^2+4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9-17=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=30$,

el centro es $(-2{,}3)$

Si la pendiente es $m_d = \frac{2}{5}$ y el centro es $(-2{,}3)$, la ecuación del diámetro es:

$\boldsymbol{y} - \mathbf{3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{5}}}$

4. Determinar el valor de k, para que el lugar geométrico representado por la ecuación $3x^2+3y^2+6x-4y+k=0$; sea una circunferencia de radio $r=3$.

Dividimos la ecuación por 3, y nos queda $x^2+y^2+2x-\frac{4}{3}y+\frac{k}{3}=0$;

$(x^2+2x+1)-1+\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}+\frac{k}{3}=0 \Rightarrow (x+1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = 1+\frac{4}{9}-\frac{k}{3}=0$

Por lo tanto $\frac{13}{9}-\frac{k}{3}=9 \Rightarrow k=\left(\frac{13}{9}-9\right)3 \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{k} = -\frac{\mathbf{68}}{\mathbf{3}}}$

RESPUESTAS

1.- a) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ b) $\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{104}{9}$

2.- a) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ b) $x^2+y^2-6x-2y=0$

c) $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ d) $x^2+y^2-2x+y-34{,}75=0$

e) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ f) $x^2+y^2+2x-6y+5=0$

g) $x^2+y^2-6x-10y+18=0$ h) $x^2+y^2-2x-2y-3=0$

3.- $3x+4y-19=0$ 4.- $x^2+y^2-2{,}5x-5y+2{,}5=0$

5.- a) si es una circunferencia real b) es un punto

c) no es una circunferencia real d) si es una circunferencia real

6.- $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 7.- a) $A(0{,}2)$ $B(2{,}0)$ b) $x+y-2=0$

8.- a) $A(-4,-3)$ $B(3{,}4)$ b) $A(-5{,}44;3{,}44)$ $B(-1{,}56;-0{,}44)$

9.- $A=3\pi\,u^2$ $L=2\sqrt{3}\,\pi=10{,}88\,u$ 10.- $Cuerda=4$ 11.- $r=16m$

12.- $P(3;3{,}8)$ NO y NO 13.- a) $h=7{,}75m$ b) $h=15{,}87m$

14.- a) $x^2+y^2=400$ b) $R(\%\,regado)=37{,}16\%$ 15.- $x^2+y^2=(16^2-h^2)$

TRABAJO PRÁCTICO: ELIPSE

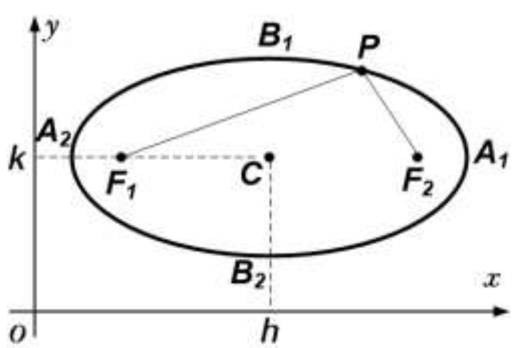
Repaso de conceptos importantes:

"Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante y mayor que la distancia entre estos dos puntos. Estos dos puntos fijos se llaman FOCOS de la elipse".

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, siendo $P(x, y)$ un punto genérico

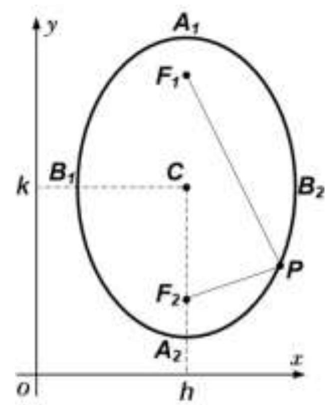
Ecuaciones canónicas

Eje mayor || al eje x



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eje mayor || al eje y



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Elementos

C: centro, $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$: Focos,

$\overline{F_1F_2} = 2c$ distancia focal

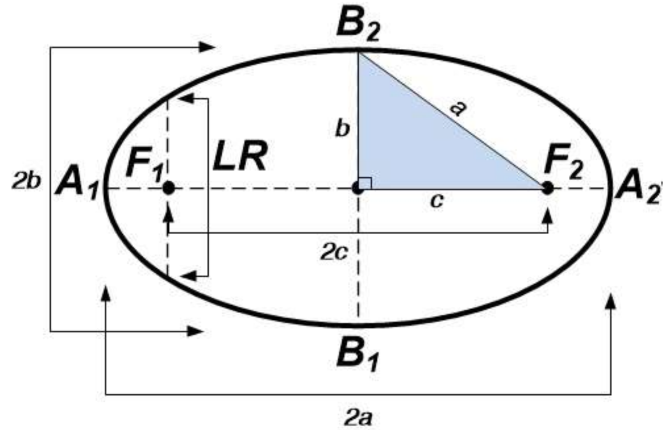
$\overline{A_1A_2} = 2a$ Eje mayor

$\overline{B_1B_2} = 2b$ Eje menor

$a^2 = b^2 + c^2$

$LR = \frac{2b^2}{a}$ Lado recto

$e = \frac{c}{a}$; $0 < e < 1$ Excentricidad



Ejercitación

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico para cada una de las siguientes condiciones:
   a) Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y, es siempre igual al doble de su distancia al punto $(3, 2)$.
   b) El punto $P(x, y)$ se mueve de tal manera que la suma de distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(2, -3)$, es igual a 8.

2. Hallar la ecuaciones canónica y general de la elipse, graficando en cada caso:
   a) Centro es el punto $(-1, -1)$, uno de sus focos es $(-1, 2)$ y uno de sus vértices es $(-1,4)$.
   b) El eje mayor es igual a 26 y los focos son $F1\ (-10, 0)$, $F2\ (14, 0)$.
   c) Centro en (1, -1) y es tangente a la recta y = 3 y a la recta $x = -1$.
   d) El centro es el origen de coordenadas; $A1(-5, 0)$; $B1(0, -3)$
   e) $C(0, 0)$; LR es paralelo al eje x; $c = 2$; $b = 1$
   f) $C\ (0, 0)$; $B1\ (0, 3)$; la curva pasa por $P\ (4, 1)$.

3. Las siguientes ecuaciones representan elipse. En cada caso hallar: a) Centro, b) focos c) vértices d) longitud del LR f) Excentricidad y g) Grafica. (Utiliza GeoGebra para comprobar gráficamente tus resultados)
   a) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
   b) $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$
   c) $\dfrac{(y+4)^2}{25} + \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$
   d) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{(y-1)^2}{144} = 1$
   e) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$

4. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determinan una elipse, hallar sus elementos y graficar.
   a) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$
   b) $x^2 + 2y^2 + x - 4y + \frac{1}{4} = 0$
   c) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y = -9$
   d) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y = 284$
   e) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

5. Determinar los puntos de intersección, si existen, entre la cónica $\boldsymbol{\frac{(y-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1}$ y cada una de las rectas: $r1: 4x + y + 1 = 0$ y $r2: x - y - 2 = 0$, graficar.

6. Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro coincide con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ y es tangente a la recta $y = 3$ y a la recta $x = -1$

7. Hallar la ecuación de la elipse, sabiendo que tiene excentricidad $\boldsymbol{e = 0,2}$; y vértices en $\boldsymbol{A_1(-1, -3)}$ y $\boldsymbol{A_2\ (-1, 2)}$.

8. Encontrar la ecuación canónica de la elipse centrada en el origen de coordenadas y que pasa por los puntos: $P_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $P_2\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están sobre el eje de las ordenadas y son simétricos respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:
   a) Los semiejes son iguales respectivamente a 7 y 2.
   b) El eje mayor es igual a 10 y la distancia entre los focos es 8.
   c) La distancia entre los focos es 24 y la excentricidad es $e = \frac{12}{13}$.
   d) El eje menor es igual a 16 y la excentricidad es $e = \frac{3}{5}$.

10. El cometa de Halley tiene una órbita elíptica de excentricidad $e = 0.967$. La distancia mínima de ese cometa al Sol es 0.587 UA. Calcular la distancia máxima del cometa al astro central, aproximando al décimo de UA más cercano. UA=Unidades Astronómicas.
    1 UA=149.597.871 Km

11. Un arco de 80 metros de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro.

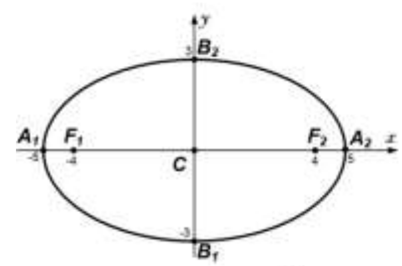
12. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale $e = 0{,}017$, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

EJERCICIOS RESUELTOS: ELIPSE

1. Encontrar los elementos de las siguientes elipses y graficar:

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **b.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

RESOLUCIÓN



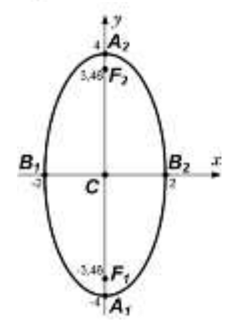
a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Centro $(0,0)$, el eje mayor está sobre el eje $\boldsymbol{x}$. $a = 5$; $b = 3$

$A_1(-5,0)$; $A_2(5,0)$; $B_1(0,-3)$; $B_2(0,3)$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \quad \Rightarrow \quad c = 4$

$\Rightarrow \quad F_1(-4,0)$; $F_2(4,0)$; $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$



b. $\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1}$

Centro $(0,0)$, el eje mayor está sobre el eje $\boldsymbol{y}$. $a = 4$; $b = 2$

$A_1(0,-4)$; $A_2(0,4)$; $B_1(-2,0)$; $B_2(2,0)$

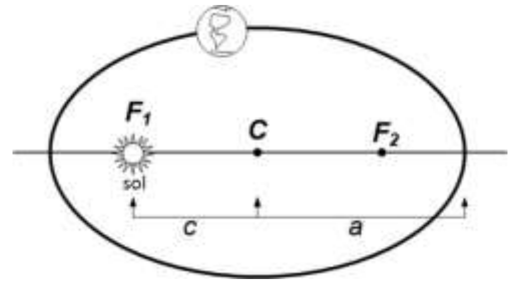
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad c = 3{,}46$

$\Rightarrow \quad F_1\left(0, -\sqrt{12}\right)$; $F_2\left(0, \sqrt{12}\right)$; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} < 1$

2. La primera ley de Kepler afirma: "Las órbitas de los planetas son elipses que tienen al sol en uno de sus focos". Calcular la distancia del sol al centro de la elipse, sabiendo que la excentricidad de la órbita terrestre es $\boldsymbol{e = 0,017}$ y que $\boldsymbol{a}$ **= 153.493.000 Km**.

RESOLUCIÓN

$e = 0{,}017 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = 0{,}017.$



La distancia del sol al centro de la elipse es la distancia focal $\boldsymbol{c}$, de modo que: $\boldsymbol{c = e * a} \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{c = 153493000 * 0,017 \quad \therefore \quad c = 260938\ km}$

RESPUESTAS

1.- a) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ b) $\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

2.- a $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ b) $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{69} = 1$

c) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

e) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ f) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.- a) $C(0,0)$ $F_1(-4{,}9;0)$ $F_2(4{,}9;0)$ $A_1(-7;0)$ $A_2(7;0)$ $B_1(0;-5)$ $B_2(0;5)$ $LR = 7{,}14$ $e = 0{,}7$

b) $C(-2,1)$ $F_1(-6;1)$ $F_2(2;1)$ $A_1(-7;1)$ $A_2(2;1)$ $B_1(-2;4)$ $B_2(-2;-2)$ $LR = 3{,}6$ $e = 0{,}8$

c) $C(-4,2)$ $F_1(-8;2)$ $F_2(0;2)$ $A_1(-9;2)$ $A_2(1;2)$ $B_1(-4;5)$ $B_2(-4;-1)$ $LR = 3{,}6$ $e = 0{,}8$

d) $C(0,1)$ $F_1(-5;1)$ $F_2(5;1)$ $A_1(-12;1)$ $A_2(12;1)$ $B_1(0;13)$ $B_2(0;-11)$ $LR = 22{,}15$ $e = 0{,}38$

e) $C(3,0)$ $F_1(3;-2{,}23)$ $F_2(3;2{,}23)$ $A_1(3;3)$ $A_2(3;-3)$ $B_1(1;0)$ $B_2(5;0)$ $LR = 2{,}6$ $e = 0{,}74$

4.- a) $Es\ una\ elipse\ \ C(2,-1) \quad a = 2 \quad b = \sqrt{3} \quad c = 1$

b) $Es\ una\ elipse\ \ C(-0{,}5,1) \quad a = \sqrt{2} \quad b = 1 \quad c = 1$

c) $Es\ una\ elipse\ \ C(3,-1) \quad a = 3 \quad b = \sqrt{5} \quad c = 2$

d) $Es\ una\ elipse\ \ C(-1,2) \quad a = 5 \quad b = 4 \quad c = 3$

e) $Es\ una\ elipse\ \ C(1,-2) \quad a = 4 \quad b = 2\sqrt{3} \quad c = 2$

5.- $A(-2,7)$ $B(-1,3)$ 6.- $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

7.- $\frac{(x+1)^2}{6} + \frac{(y+0{,}5)^2}{6{,}25} = 1$ 8.- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

9.- a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

10.- $D = 35\ UA$ 11.- $H = 25{,}78m$

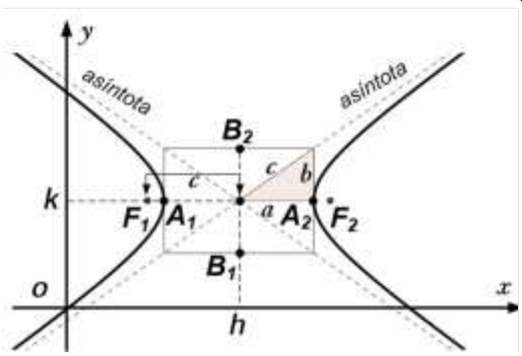
12.- $d = 145{,}97\ MKm \quad D = 151{,}02\ MKm$

TRABAJO PRÁCTICO: HIPERBOLA

Repaso de conceptos importantes:

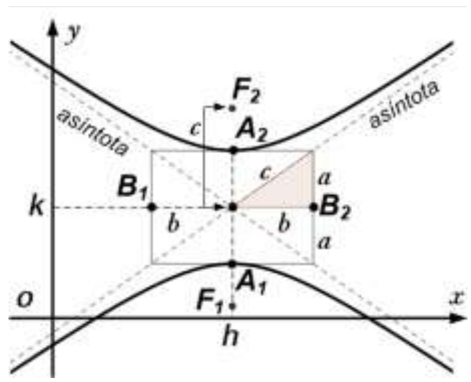
"Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante y menor que la distancia entre estos dos puntos. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola". *En Símbolos* $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$

ECUACIONES CANÓNICAS



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si $C(0,0)$: Ec. Reducida: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Si $C(0,0)$: Ec. Reducida: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Elementos

C : centro ; F_1 y F_2 : Focos,

$\overline{F_1F_2} = 2c$ distancia focal

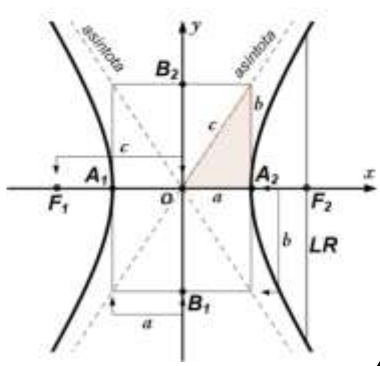
$\overline{A_1A_2} = 2a$ Eje Real

$\overline{B_1B_2} = 2b$ Eje Imaginario

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} \ ; \ 1 < e < \infty$$

$LR = \frac{2b^2}{a}$ Lado Recto



Existen dos rectas, llamadas **asíntotas** de la hipérbola. Son las diagonales del rectángulo de base $2a$ y altura $2b$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, asíntotas $y = \pm\frac{a}{b}$

Ejercitación

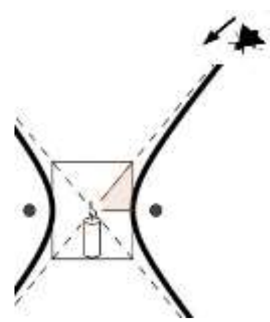
1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen que:
   a) La diferencia de distancias a los puntos fijos $(3, 2)$ y $(-5, 2)$ sea igual a 6.
   b) La distancia a la recta $y + 4 = 0$ sea igual a los dos tercios de su distancia al punto $(3, 2)$.

2. Hallar la ecuación canónica y general de las siguientes hipérbolas, dar sus elementos y graficar.
   a) El centro es $C(0,0)$; b=5, está sobre el eje y; pasa por $(2, 5)$.
   b) El centro es el origen de coordenadas, $F(6,0)$; el eje transverso o real mide 8.
   c) El centro en el origen de coordenadas, un vértice imaginario en el punto $Q(6,0)$ y una de sus asíntotas es la recta de ecuación $4x - 3\,y = 0$.
   d) Los vértices son los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$ y pasa por el punto $\left(5, \frac{8}{3}\right)$.
   e) El centro tiene coordenadas $C(-2, -1)$; un vértice real es $A(1, -1)$ y excentricidad $e = 4/3$.
   f) El centro es el origen de coordenadas, el eje transverso horizontal; pasa por $P(3, -2)$ y $Q(7,6)$.
   g) El centro es $(2,1)$, el eje transverso o real es paralelo al eje y, uno de sus vértices es $(2,5)$ y una de sus asíntotas es la recta $2x - y - 3 = 0$
   h) El centro tiene coordenadas $C(-2,3)$; $A_1(-2,7)$; $F_1(-2,10)$

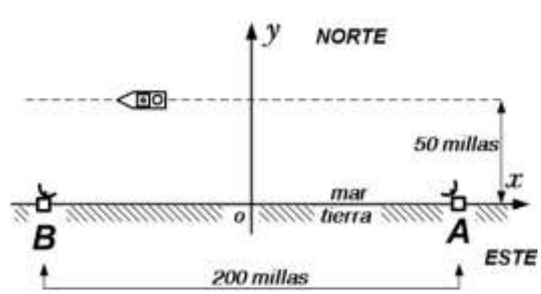
3. Hallar los elementos de las siguientes hipérbolas y graficarlas:
   a) $9x^2 - 4y^2 = 36$
   b) $y^2 - 4x^2 - 4 = 0$
   c) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$
   d) $9x^2 - 18y^2 - 9 = 0$
   e) $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$

4. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una hipérbola y hallar las coordenadas del centro, semiejes, excentricidad, ecuaciones de las asíntotas y la gráfica.
   a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
   b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$
   c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$
   d) $x^2 - 25y^2 + 54x + 150y - 369 = 0$
   e) $4x^2 - y^2 - 2y + 3 = 0$

5. Una mosca vuela en un plano vertical, directamente hacia la llama de una vela siguiendo asintóticamente la dirección de una recta de pendiente $m = 6/5$ respecto de la horizontal. Por el calor de la flama de la vela su trayectoria se desvía sobre la curva de una rama de hipérbola y se aleja nuevamente. Si en un instante de su trayectoria la posición tiene un ancho de 20 cm y 10 cm de altura, encontrar el valor de su excentricidad.



6. La estación A de guardacostas está a 200 millas directamente al este de otra estación B. Un barco está navegando en una línea paralela y a 50 millas al Norte de la recta que pasa por A y B. Se transmiten señales de radio de A y B a una velocidad de 980 pies/µs (microsegundo). Si a la 1:00 p.m., la señal de B llega al barco 400 microsegundos después de la señal desde A,

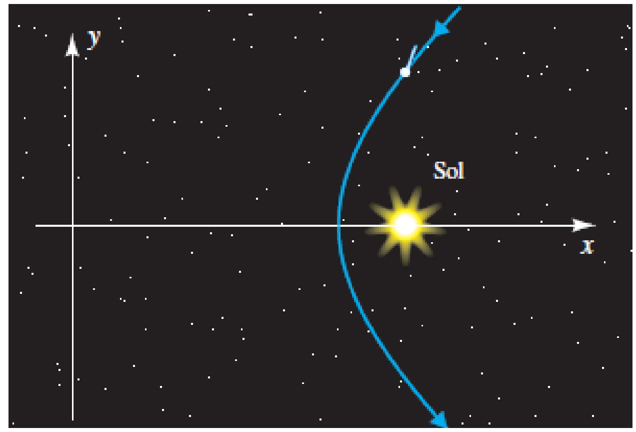


localizar la posición del barco en ese momento.
1 milla náutica= 6076 pies

7. Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresa. Suponga que las coordenadas de un cometa, en millas, se pueden describir con la ecuación

$$\frac{x^2}{26 \cdot 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \cdot 10^{14}} = 1, \qquad x > 0$$

donde el Sol está ubicado en un foco, como se ve en la figura.



Calcule las coordenadas del sol
1 milla= 1609,34m

EJERCICIOS RESUELTOS: HIPÉRBOLA

1. Encontrar los elementos de la hipérbola:

a. $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$ **b.** $\boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$

a. $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

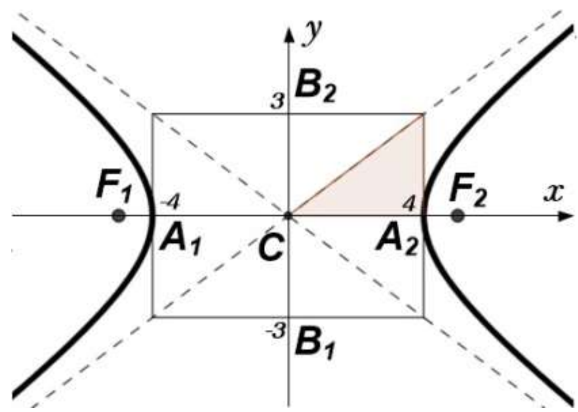
Observamos de la ecuación que el centro es $(0,0)$; que $\boldsymbol{a = 4}$; $\boldsymbol{b = 3}$ y el eje real: $\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{A_1(-4,0)}$; $\boldsymbol{A_2(4,0)}$; $\boldsymbol{B_1(0,-3)}$; $\boldsymbol{B_2(0,3)}$

$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad c = 5}$

$\boldsymbol{F_1(-5,0)}$; $\boldsymbol{F_2(5,0)}$ $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1}$

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \pm\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4}x}$



b. $\boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$

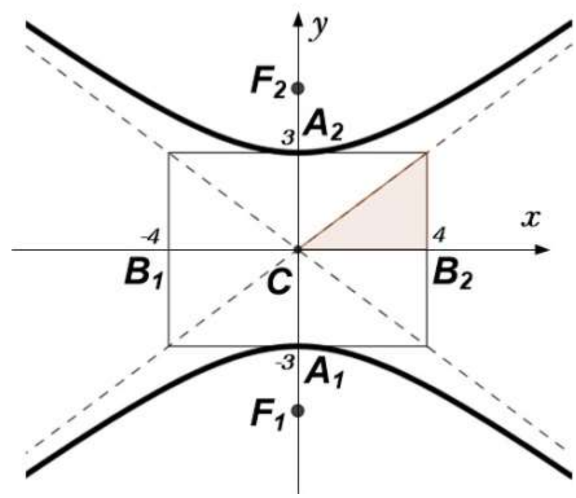
$\mathrm{C}(0,0)$; $\mathrm{a} = 3$; $\mathrm{b} = 4$; Eje Real: $\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{A_1(0,-3)}$; $\boldsymbol{A_2(0,3)}$; $\boldsymbol{B_1(-4,0)}$; $\boldsymbol{B_2(4,0}$

$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad c = 5}$

$\boldsymbol{F_1(0,-5)}$; $\boldsymbol{F_2(0,5)}$ $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1}$

Asíntotas: $\boldsymbol{y = \pm\frac{a}{b}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4}x}$



2. Determinar la ecuación de la hipérbola sabiendo que $a = 8$, $b = 3$ y que:
   a. El centro es el origen y los focos están sobre el eje X .
   b. Centro $C(1,4)$ y eje real paralelo al eje y .

a. Centro $C(0,0)$, $a = 8$; $b = 3$. Los focos están sobre el eje x , el eje real es x. La ecuación es: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{9} = 1$

b. $C(1,4)$, eje real paralelo al eje y , la ecuación es $\frac{(y-4)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

RESPUESTAS

1.- a) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$ b) $\frac{(y-5,6)^2}{5,76} - \frac{(x-3)^2}{7,2} = 1$

2.- a) $\frac{y^2}{21,55} - \frac{x^2}{25} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ c) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

e) $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{7} = 1$ f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3,2} = 1$ g) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ h) $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{33} = 1$

3.- a) $C(0,0)$ $F_1(-3,6;0)$ $F_2(3,6;0)$ $A_1(-2;0)$ $A_2(2;0)$ $B_1(0;-3)$ $B_2(0;3)$ $LR = 9$ $e = 1,8$

b) $C(0,0)$ $F_1(-\sqrt{5};0)$ $F_2(\sqrt{5};0)$ $A_1(-2;0)$ $A_2(2;0)$ $B_1(0;-1)$ $B_2(0;1)$ $LR = 1$ $e = 1,11$

c) $C(2,-2)$ $F_1(-1,6;-2)$ $F_2(5,6;-2)$ $A_1(-1;-2)$ $A_2(5;-2)$ $B_1(2;0)$ $B_2(2;-4)$ $LR = 2,66$ $e = 1,2$

d) $C(0,0)$ $F_1\left(-\sqrt{1,5};0\right)$ $F_2\left(\sqrt{1,5};0\right)$ $A_1(-1;0)$ $A_2(1;0)$ $B_1(0;-0,7)$ $B_2(0;0,7)$ $LR = 1$ $e = 1,22$

e) $C(0,0)$ $F_1(-6,4;0)$ $F_2(6,4;0)$ $A_1(-2;0)$ $A_2(2;0)$ $B_1(0;-5)$ $B_2(0;5)$ $LR = 12,5$ $e = 1,6$

4.- a) $Es\ una\ hiperbola$ $C(2,-3)$ $a = 3$ $b = 4$ $c = 5$ $LR = 10,67$ $e = 1,66$ $3y - 4x = -17$ $3y + 4x = -1$

b) $Es\ una\ hiperbola$ $C(-5,1)$ $a = 8$ $b = 6$ $c = 10$ $LR = 9$ $e = 1,25$ $4y - 3x = 19$ $4y + 3x = -11$

c) $Es\ una\ hiperbola$ $C(2,-1)$ $a = 4$ $b = 3$ $c = 5$ $LR = 4,5$ $e = 1,25$ $3y + 4x = 5$ $3y - 4x = -11$

d) $Es\ una\ hiperbola$ $C(-27,3)$ $a = 29,54$ $b = 5,9$ $c = 30,13$ $LR = 2,36$ $e = 1,02$

e) $Es\ una\ hiperbola$ $C(0,-1)$ $a = 2$ $b = 1$ $c = \sqrt{5}$ $LR = 1$ $e = 1,11$ $y + 2x + 1 = 0$ $y - 2x + 1 = 0$

5.- $e = 1,56$ 6.- $Coordenadas\ del\ barco$ $P(36,48\ millas, 50\ millas)$

7.- $Distancia\ del\ centro\ de\ la\ hipérbola\ al\ sol\ = 66332495,8\ millas$

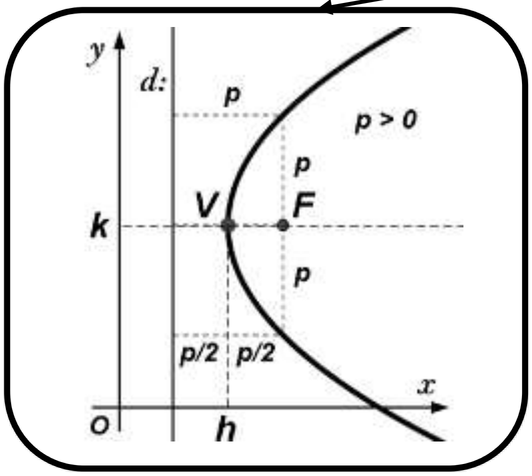
TRABAJO PRÁCTICO: PARÁBOLA

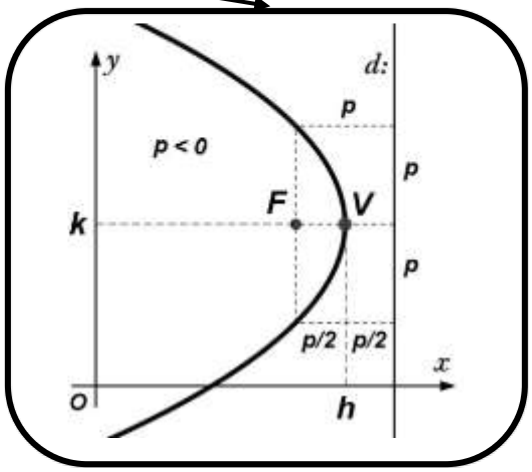
Repaso de conceptos importantes:

"Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco (F) y de una recta fija llamada directriz (d:) ".

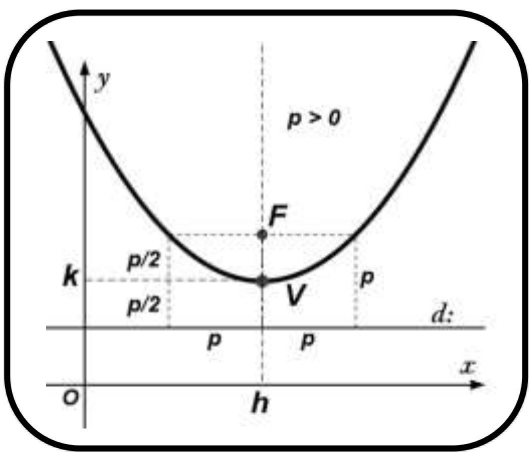
Analíticamente, $d(P,F) = d(P,P')$. $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la parábola y P' un punto que pertenece a la recta d: y a la recta que contiene a P y es perpendicular a d:.

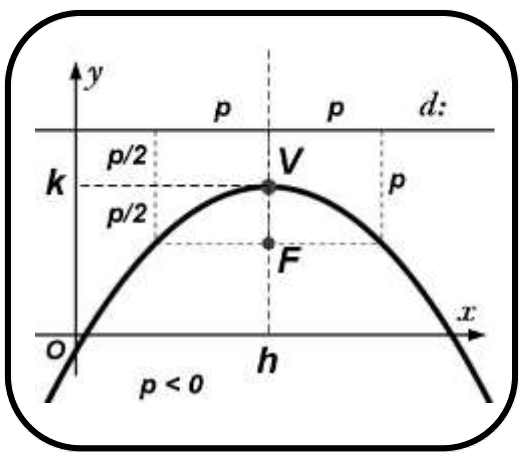
ECUACIONES CANÓNICAS





Ecuación: $(y-k)^2 = 2p(x-h)$; si $V(0,0)$: Ecuación reducida: $y^2 = 2px$





Ecuación: $(x-h)^2 = 2p(y-k)$; si $V(0,0)$: Ecuación reducida: $x^2 = 2py$

Para toda parábola $e = 1$, siempre. $LR = 2p$ siempre

Ejercitación

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico para cada una de las siguientes condiciones:
   a) Los puntos que equidisten del punto $(2{,}3)$ y de la recta $x+2=0$.
   b) Los puntos tales que la suma de su distancia dirigida a la recta $x=8$, más su distancia al punto $(2{,}0)$; sea 10.

2. Encontrar la ecuación general de la parábola que cumple con lo siguiente:
   a) El eje focal paralelo al eje $\overrightarrow{ox}$, distancia del foco a la directriz igual a 2, el vértice es el centro de la elipse de ecuación $4x^2-8x+y^2=0$.
   b) El vértice y el foco tienen coordenadas $V(-3,5)$, $F(0,5)$, respectivamente.
   c) El vértice y el foco tienen coordenadas $V(-1,-3)$; $F(-3,-3)$ respectivamente.
   d) El vértice $V(-1/2{,}3)$ y la ecuación de la directriz $y-5=0$
   e) El vértice $V(2,-1/3)$; Directriz $y+8=0$
   f) Ecuación de la directriz $x+3=0$; Foco $F(1,0)$
   g) Directriz $x+4=0$; Foco $F(2{,}0)$

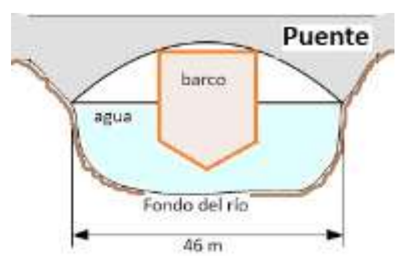
3. Indicar si las siguientes ecuaciones representan una parábola. En caso afirmativo escriba su forma canónica, grafique e indique sus elementos.
   a) $4x^2-4x-20y+61=0$
   b) $-7y^2+4x+-42y+10=2x^2$
   c) $8x+y^2-4=0$
   d) $x^2-y^2=x-(y-1)^2$

4. Las siguientes ecuaciones representan parábolas. En cada caso hallar:
   a) Vértice, b) foco, c) ecuación de la directriz, d) ecuación del eje de simetría, e) longitud del lado recto LR, f) Grafica
   a) $y2-4y+6x-8=0$
   b) $3x2-9x-5y-2=0$
   c) $y2-4y-6x+13=0$
   d) $3x2+6x-36y+39=0$

5. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $F(-2,-1)$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $(-2,2)$ y $(-2,-4)$.

6. Encontrar los puntos intersección de la parábola, $-y2+6x+18=0$, y la circunferencia $x2+y2-9=0$

7. Se construirá un puente a través de un río de 46 metros de ancho. El arco del puente será parabólico y debe construirse de manera que pueda pasar sin peligro por debajo de él un barco de menos de 16 metros de ancho y 9 metros de altura. ¿Cuál deberá ser la altura del puente, a la mitad del mismo?

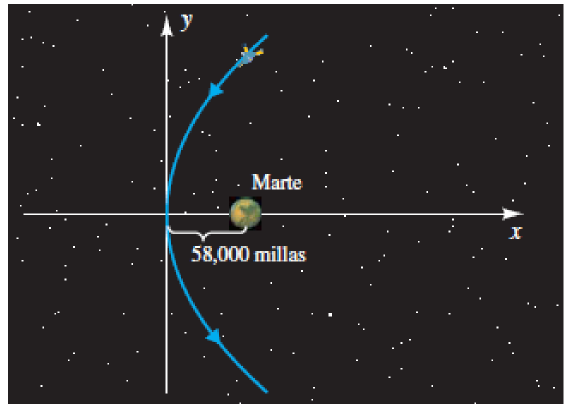


8. Un cable de acero está colgado por los dos extremos; los puntos de suspensión están situados a una misma altura y a una distancia de 20 m. La magnitud de la flexión a la distancia de 2 m de los puntos de suspensión en sentido horizontal, es igual a 14.4 cm. Determina la magnitud de suspensión de este cable en su punto medio (la flecha), suponiendo que el cable tiene una forma de parábola.

9. Un satélite se desplazará en una trayectoria parabólica cercana a un planeta, su velocidad v en metros por segundo satisface la ecuación $v=\sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta y k es una constante positiva. El planeta estará situado en el foco de la parábola y el satélite pasará una vez por el planeta.

Suponga que un satélite está diseñado para seguir una trayectoria parabólica y pasará a no más de 58.000 millas de Marte, como se ve en la figura

a) Determine una ecuación de la forma $x = ay^2$ que describa su trayectoria de vuelo.
b) Para Marte, $k = 4{,}28 \cdot 10^{13}$. Calcule la máxima velocidad del satélite.
c) Encuentre la velocidad del satélite cuando su coordenada y sea de 100.000 millas.



EJERCICIOS RESUELTOS: PARABOLA

1. Encontrar los elementos de las siguientes parábolas y graficar:

a. $\boldsymbol{y^2 = 4x}$ **b.** $\boldsymbol{(x-3)^2 = -6(y-1)}$

RESOLUCIÓN

a. $\boldsymbol{y^2 = 4x}$; $\boldsymbol{2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2}$

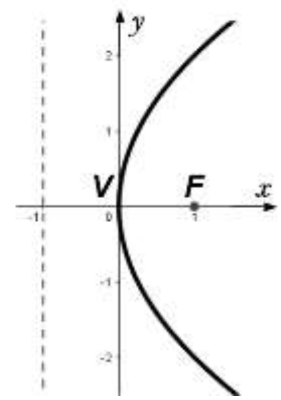
El parámetro $p = 2$, $(p > 0)$, la parábola se abre a la derecha del eje $\boldsymbol{y}$. El vértice es $\boldsymbol{V(0,0)}$.

El foco está sobre el eje $\boldsymbol{x}$ y tiene coordenadas $\boldsymbol{F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 0)}$.

La directriz tiene ecuación $x = -\frac{p}{2} = -1$.

El eje de la parábola es el eje $\boldsymbol{x}$.

Si $\boldsymbol{x = 1}$; $\boldsymbol{y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2}$

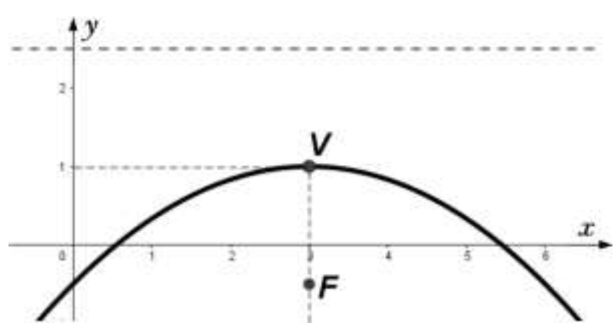


b. $\boldsymbol{(x-3)^2 = -6(y-1)}$

Observamos que el vértice es $\boldsymbol{V(3,1)}$. $2p = -6 \quad \Rightarrow \quad p = -3 < 0$, la parábola se abre hacia la dirección negativa del eje $\boldsymbol{y}$.

El foco tiene coordenadas $\boldsymbol{F\left(h, k + \frac{p}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(3, 1 - \frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(3, -\frac{1}{2}\right)}$.

La directriz tiene ecuación $\boldsymbol{y = k - \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 2{,}5}$



2. Encontrar la ecuación de la parábola, con vértice $(\boldsymbol{4,-1})$, eje paralelo al eje $\boldsymbol{y}$, y que contiene al origen.

RESOLUCIÓN

Si el eje es paralelo al eje $\boldsymbol{y}$, la ecuación es: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2=\boldsymbol{2p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}) \Rightarrow (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^2=\boldsymbol{2p}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{1})$

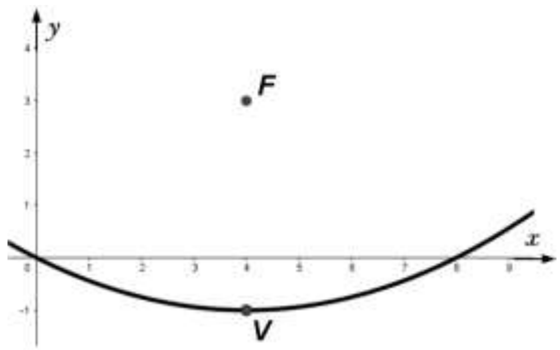
Como contiene al origen, éste verifica la ecuación:

$(\boldsymbol{0}-\boldsymbol{4})^2=\boldsymbol{2p}(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{1}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{16}=\boldsymbol{2p} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{8}$

La ecuación es: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^2=\boldsymbol{16}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{1})$

Verifiquemos si pasa por el origen: $y=0 \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^2=\boldsymbol{16}(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{1}) \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^2=\boldsymbol{16}$:

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4}=\pm\boldsymbol{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{4}\pm\boldsymbol{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{0}\ ; \quad \boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{8}$



RESPUESTAS

1.- a) $(y-3)^2=8x$ b) $y^2=-32(x-10)$

2.- a) $y^2=2(x-1)$ b) $(y-5)^2=12(x+3)$ c) $(x+1)^2=-8(y+3)$

d) $(x+0{,}5)^2=-4(y-3)$ e) $(x-2)^2=\frac{92}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right)$ f) $y^2=8(x+1)$

g) $y^2=12(x+1)$

3.- a) $(y-2)^2=-6(x-2)$ b) Elipse

c) $y^2=8(x-0{,}5)$ d) $(x-0{,}5)^2=2(y-0{,}38)$

4.- a) $V(2{,}2)$ $F(0{,}5;2)$ $p=3$ $d{:}\,x=3{,}5$ $eje{:}\,y=2$ $LR=6$ $e=1$

b) $V(1{,}5;-1{,}75)$ $F(1{,}5;-1{,}33)$ $p=0{,}84$ $d{:}\,y=-2{,}17$ $eje{:}\,x=1{,}5$ $LR=1{,}68$ $e=1$

c) $V(1{,}5;2)$ $F(3;2)$ $p=3$ $d{:}\,x=0$ $eje{:}\,y=2$ $LR=6$ $e=1$

d) $V(-1{,}1)$ $F(-1;10)$ $p=18$ $d{:}\,y=-8$ $eje{:}\,x=-1$ $LR=36$ $e=1$

5.- $(x+3{,}5)^2=6(y+1)$ 6.- $P_1(-3{,}0)$ $P_2(-3{,}0)$

7.- $H=10{,}23m$ 8.- $F=-15\ cm$

9.- a) $y^2=373288000m\ x$ b) $\hat{v}=957{,}73\ \frac{m}{s}$ c) $v_1=725{,}39\frac{m}{s}$