DESARROLLO ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 3: "ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS" – REVISADAS POR LA ING. MARISEL BELDRAN - AÑO 2024

Actividad 3.1

Respuestas

a) En $\mathbb{N}$, las operaciones resta y división no son operaciones cerradas.

Sean a y b $\in \mathbb{N}$, $a - b \in \mathbb{N}$, únicamente si $a > b$.

Si $a \leq b$ la operación $a - b$ no tiene solución en $\mathbb{N}$

Sean a y b $\in \mathbb{N}$, $a \div b \in \mathbb{N}$, únicamente si a es múltiplo de b. (b es divisor de a).

Si b no divide a a , la operación $a \div b$ no tiene solución en $\mathbb{N}$

En $\mathbb{Z}$, la operación resta es una operación cerrada dado que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z},\ a - b \in \mathbb{Z}$$

Sin embargo la división no lo es, $a \div b \in \mathbb{Z}$, únicamente si a es múltiplo de b. (b es divisor de a).

En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ la resta es cerrada en ellos dado que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Q},\ a - b \in \mathbb{Q}$$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a - b \in \mathbb{R}$$

En $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ la división no es cerrada

$$\neg \forall\, a, b \in \mathbb{Q},\ a \div b \in \mathbb{Q}$$

Si $b = 0$, no está definida la operación $a \div b$, $\forall a$

$$\neg \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a \div b \in \mathbb{R}$$

Si $b = 0$, no está definida la operación $a \div b$, $\forall a$

Otra forma de resolver: Podemos condensar toda la información precedente en una tabla :

	N	Z	Q	R
Resta (–)	No[1]	si	si	Si
Division (÷)	No[2]	No[3]	No[4]	No[5]

La demostración en los casos en que las operaciones no son cerradas se puede hacer dando contraejemplos:

(1) $2 \in N \wedge 3 \in N$ pero $(2 - 3) \notin N$
(2) $2 \in N \wedge 3 \in N$ pero $(2 \div 3) \notin N$
(3) $2 \in Z \wedge 3 \in Z$ pero $(2 \div 3) \notin Z$
(4) $2 \in Q \wedge 0 \in Q$ pero $(2 \div 0) \notin Q$
(5) $2 \in R \wedge 0 \in R$ pero $(2 \div 0) \notin R$

b) Sea A = { x/ x es un entero impar} ,

Si x_1 , $x_2 \in A \Rightarrow x_1 = 2k_1 - 1$ y $x_2 = 2k_2 - 1$, por los tanto

$x_1 + x_2 = 2k_1 + 2k_2 - 1 - 1 = 2k_1 + 2k_2 - 2 = 2(k_1 + k_2 - 1)$ que es siempre un numero par dado que

$k_1 + k_2 - 1 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la operación suma usual no es cerrada en A

Otra forma de justificar sería dar un contraejemplo:

$1 \in A \wedge 3 \in A$ pero $(1 + 3) \notin A$ y por lo tanto la operación + no es ley de composición interna en A

El producto o multiplicación de dos números impares es :

$x_1 . x_2 = (2k_1 - 1).(2k_2 - 1) = 4k_1k_2 - 2k_1 - 2k_2 + 1 = 2(2k_1k_2 - k_1 - k_2) + 1$ es un número impar , llamando dado que $2k_1k_2 - k_1 - k_2 \in Z$. Por lo tanto la operación producto usual es cerrada en A

c) Se observa en el cuerpo de la tabla que todos los resultados pertenecen al conjunto A, por lo tanto * es una operación cerrada en A

Actividad 3.2

Respuestas

a) En $\mathbb{R}^n$ la operación módulo de un vector no es una operación cerrada ya que el resultado es un número real en lugar de un vector. Si tomamos el vector $v = (v1, v2, \dots, vn)\ que\ \in \mathbb{R}^n$ y calculamos su módulo $|v| = \sqrt{v1^2 + v2^2 + \cdots vn^2}$, esta operación produce un número real no negativo equivalente a la longitud del vector, por lo tanto $\not\ni \mathbb{R}^n$
b) En el conjunto de las matrices M_{2x3} ($\mathbb{R}$) , la trasposición no es una operación cerrada, puesto que la traspuesta de una matriz que pertenece a M_{2x3} ($\mathbb{R}$) es una matriz que no pertenece a este conjunto, sino que pertenece a M_{3x2} ($\mathbb{R}$)

c) En el conjunto de las matrices M_{3x3} ($\mathbb{R}$) , la trasposición es una operación cerrada, puesto que la traspuesta de una matriz que pertenece a M_{3x3}($\mathbb{R}$) es una matriz que también pertenece a dicho conjunto.

Actividad 3.3

Respuestas

a) Sea S = { p/ p es una proposición simple }

Conectivo → **(condicional)**

En la Unidad 1 se analizó que $p \rightarrow q$ no es equivalente a $q \rightarrow p$ por lo tanto se puede decir que no se cumple la conmutatividad para →

Respecto de la Asociatividad, se puede mostrar realizando tabla de verdad que $(p \rightarrow q) \rightarrow r \leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es contingencia, por lo que se puede concluir que $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ y $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ no son equivalentes y por lo tanto la operación → no es asociativa

Conectivo $\underline{\vee}$ **(disyunción excluyente)**

Se puede mostrar, por tabla de verdad, que $(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (q \underline{\vee} p)$ es tautología por lo tanto $p \underline{\vee} q$ es equivalente a $q \underline{\vee} p$ y entonces se puede afirmar que la operación $\underline{\vee}$ es conmutativa

Del mismo modo, por tabla de verdad se puede ver que $[(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r] \leftrightarrow [p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)]$ es tautología por lo que se puede inferir que la operación $\underline{\vee}$ es asociativa ya que $[(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r]$ y $[p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)]$ son equivalentes

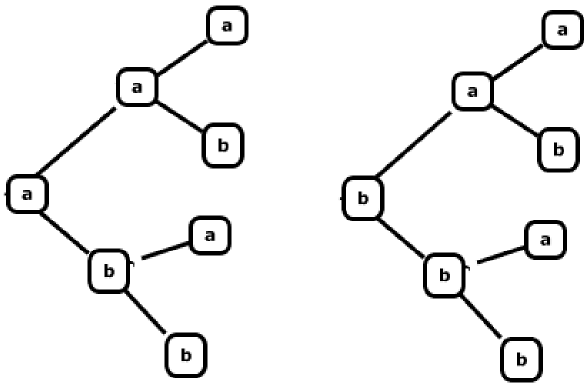
b) En A = {a , b} y la operación * dada por tabla

*	a	b
a	b	b
b	a	b

Se observa que la tabla no es simétrica con respecto a la diagonal principal, por lo que no es conmutatividad. Por ejemplo a*b = b b*a = a

Para la asociatividad hay que tomar todas las ternas posibles (2^3) , y mostrar que cada terna cumple la igualdad según los resultados de la tabla de *

Para ver quiénes son las 8 ternas podemos ayudarnos con diagramas de árbol, como el que figura a continuación:



1) (a * a) * a = a * (a * a) b * a = a * b a ≠ b	2) (b * b) * a = b * (b * a) b * a = b * a a = a
3) (a * a) * b = a * (a * b) b * b = a * a b = b	4) (b * a) * b = b* (a * b) a * b = b * b b = b
5) (a * b) * a = a * (b * a) b * a = a * a a ≠ b	6) (a * b) * b = a * (b * b) a * b = a * b b = b
7) (b * a) * a = b * (a * a) a * a = b * b b = b	8) (b * b) * b = b * (b * b) b * b= b * b b = b

Por lo tanto, luego de analizadas las ocho igualdades, se puede afirmar que * es no es una operación binaria asociativa.

Actividad 3.4

Desarrollo:

a) En $M_{nxn}(\mathbb{R})$, la matriz nula es el elemento neutro respecto de la suma. Si denotamos con N a la matriz nula, se tiene que A + N = N + A = A , $\forall A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$
A su vez, $\forall A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, $\exists$ -A $\in M_{nxn}(\mathbb{R})$ tal que A + (-A) = N .
Entonces se cumplen las propiedades de : Existencia del elemento neutro respecto de + (N, matriz nula) y de existencia del inverso respecto de + para cualquier matriz A.

b) En A = { a , 0 , b } y la operación ⊗ dada por tabla

⊗	a	0	b
a	a	0	b
0	0	0	a
b	b	a	b

Se observa que a es el elemento neutro respecto de ⊗ ya que operando por izquierda (observar fila de a) y operando por derecha (columna de a) reproduce los encabezados de columna y fila respectivamente.

1° fila : a*a = a , a*0= 0 , a * b = b

1° columna: a*a = a , 0*a= 0 , b * a = b

⊗	a	0	b
a	a	0	b
0	0	0	a
b	b	a	b

Para determinar si cada elemento tiene inverso, observar en el cuerpo de la tabla aquellas celdas donde el resultado fue el neutro (a) .

De lo observado se desprende que a' = a , 0' = b y b' = 0 . Por lo tanto, todos los elementos poseen inverso respecto de ⊗.

c) En A = { a , b , c } y la operación dada por tabla

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Se observa que b es el neutro ya que :

2° fila : b*a = a , b*b= b , b * c = c

2° columna: a*b = a , b*b= b , c * b = c

Para determinar si cada
celdas donde el resultado

De lo observado se
elementos poseen inverso

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

elemento tiene inverso, observar en el cuerpo de la tabla aquellas fue el neutro (b) .

desprende que a' = c , b' = b y c' = a . Por lo tanto, todos los respecto de *

Actividad 3.5

Desarrollo:

i) Conmutatividad de ∘
a ∘ b = a + b + a.b y b ∘ a = b + a + b.a ; y como vale conmutatividad de la suma y el producto usuales en $\mathbb{Z}$ entonces a ∘ b = b ∘ a . Por lo tanto la operación ∘ es conmutativa

Asociatividad de $\circ$

$(a \circ b) \circ c = (a + b + a.b) \circ c = a + b + a.b + c + (a + b + a.b)c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$

$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c + b.c) = a + b + c + b.c + a.(b + c + b.c)= a + b + c + bc + ab + ac+ abc$

Comparando ambos resultados y considerando que la suma usual es conmutativa y asociativa se llega a la conclusión de que $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, esto es, la operación $\circ$ es asociativa

Conmutatividad de $*$

$a * b = a + b + 1$ y $b * a = b + a + 1$, por lo tanto, gracias a la conmutatividad de la suma usual se puede decir que $a * b = b * a$, la operación $*$ es conmutativa.

Asociatividad de $*$

$(a * b) * c = (a + b + 1) * c = a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$

$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + b + c + 1 + 1 = a + b + c + 2$

Llegamos al mismo resultado asociando de distinta manera por lo tanto la operación $*$ es asociativa.

ii) Determinación de Neutro respecto de $\circ$

Llamando $e_\circ$ al neutro, si es que existe, debe cumplir que:

$a \circ e_\circ = a$, $\forall a$ (Como ya probamos la conmutatividad, también se cumplirá $e_\circ \circ a = a$)

$a + e_\circ + a.\, e_\circ = a$

$e_\circ (1+a)=0$

Si $a \neq -1$ entonces $e_\circ = 0$

Conclusión: Podemos afirmar que en el conjunto no existe neutro dado que hay problema para $a = -1$, pero también se puede decir que existe neutro respecto de $\circ$, es 0, pero siempre que $a \neq -1$

Determinación de Neutro respecto de $*$

Llamando e_* al neutro, si es que existe, debe cumplir que:

$a * e_* = a$, $\forall a$

$a + e_* + 1 = a$

$e_* = -1$

Conclusión: Existe neutro respecto de $*$, es -1

Determinación de inversos respecto de $\circ$

Llamando a’ al inverso de a respecto de $\circ$ se tendrá que:

$a \circ a' = e_\circ$ (Como ya probamos la conmutatividad, también se cumplirá que $a' \circ a = e_\circ$)

$a + a' + a.a' = 0$, esto para $a \neq -1$

$a'(1+a)=-a$

$a'= -a / (1+a)$ pero este resultado en general no es entero. Sólo es entero para $a = 0$

Conclusión: a’ no existe, salvo $0'=0$

Determinación de inversos respecto de $*$

Llamando a’’ al inverso de a respecto de $*$ se tendrá que:

$a * a'' = e_*$ (Como ya probamos la conmutatividad, también se cumplirá que $a'' \circ a = e_*$)

$a + a'' + 1 = -1$, $\forall a$

$a''= - 2 - a$

Conclusión: a’’ existe $\forall a$ y su valor se calcula mediante $a''= - 2 - a$

Actividad 3.6

Desarrollo:

a) Distributividad de $\circ$ respecto de $*$

$(a*b)\circ c = (a + b + 1)\circ c = a + b + 1 + c + (a + b + 1)c = a + b + 1 + c + ac + bc + c$

$(a\circ c) * (b\circ c) = (a+c+ac) * (b+c+bc) = a+c+ac + b+c+bc + 1$

Vale la igualdad de ambos resultados gracias a la conmutatividad de la suma, por lo tanto queda demostrado que vale la distributividad por derecha de $\circ$ respecto de $*$, esto es

$(a*b)\circ c = (a\circ c) * (b\circ c)$

Ahora, también vale la distributividad por izquierda de $\circ$ respecto de $*$ dado que como $\circ$ es conmutativa se cumplirá que

$(a*b)\circ c = c\circ (a*b)$ y $(a\circ c) * (b\circ c) = (c\circ a) * (c\circ b)$ y como los primeros miembros son iguales, los segundos también lo serán.

Distributividad de $*$ respecto de $\circ$

$(a\circ b) * c = (a + b + a.b) * c = a + b + a.b + c + 1$

$(a*c) \circ (b*c) = (a+c+1) \circ (b+c+1) = (a+c+1) + (b+c+1) + (a+c+1)(b+c+1) = a+c+1 + b+c+1+ab+cb+b+ac+c\ c + c + a + c + 1$

Es evidente que no vale la igualdad entre $(a\circ b) * c$ y $(a*c) \circ (b*c)$. Por lo tanto la operación $*$ no es distributiva respecto de $\circ$ por derecha. Se deja para el estudiante probar que tampoco es distributiva por izquierda.

b) Las operaciones + y . definidas por las tablas dadas se comportan como las operaciones lógicas $\vee$ y $\wedge$. Sabemos de ellas que son distributivas mutuamente, por lo tanto las operaciones + y . también lo son.

Actividad 3.7

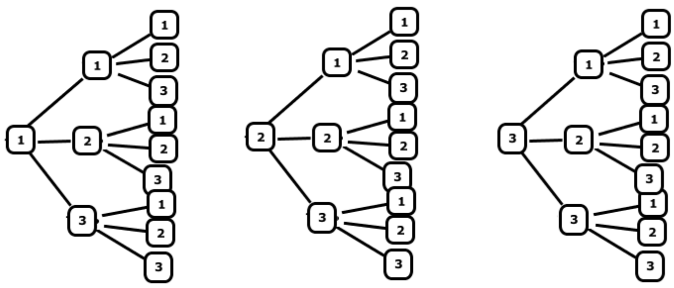
Desarrollo

a) (P_n, +) es un monoide dado que la operación + de polinomios de grado menor o igual a n da como resultado otro polinomio de grado menor o igual a n

También (P_n, +) es un semigrupo pues la operación + de polinomios es asociativa

b) (A , $*$) es un monoide dado que en el cuerpo de la tabla se observa que todos los resultados posibles son valores que pertenecen al conjunto A

Para ver la Asociatividad hay que tomar todas las ternas posibles (en este caso 27, se las puede ver ayudados por los siguientes arboles)



$1*(1*1)= 1*3 = 1$

$(1*1)*1=3*1 =1$

Por lo tanto

$1*(1*1)= (1*1)*1$

1*(1*2)= 1*2 = 2
(1*1)*2=3*2 =1
Por lo tanto
$1*(1*2) \neq (1*1)*2$

En la segunda terna tomada vemos que no se cumple la igualdad, por lo tanto la operación * no es asociativa

Entonces (A , ∗) no es semigrupo

Actividad 3.8

Desarrollo

a) ($M_{2x3}(\mathbb{R})$, +) es grupo abeliano dado que se cumplen las siguientes propiedades:
   i) + es operación cerrada en $M_{2x3}(\mathbb{R})$, la suma de matrices del mismo orden da como resultado otra matriz del mismo orden
   ii)+ de matrices es asociativa (propiedad demostrada en la asignatura Algebra)
   iii) Existe elemento neutro. La matriz nula N cuyos elementos son todos 0 es tal que A + N = A , para toda matriz A de $M_{2x3}(\mathbb{R})$
   iv) Existe elemento inverso respecto de la +. Toda matriz A tiene su opuesta (-A) , es tal que sumadas ambas dan por resultado la matriz nula, A + (-A) = (-A) + A = N, para toda matriz A de $M_{2x3}(\mathbb{R})$
   v) + es conmutativa (propiedad demostrada en la asignatura Algebra)

Actividad 3.9

a) Demostrar que ($\mathbb{Z}$, ∗) es grupo abeliano, donde ∗ es la operación definida como a ∗ b = a + b + 3
b) Sea A = { a , b , c } y las operaciones $*_1$ y $*_2$ dadas por las tablas 6.14 y 6.15

∗	a	b	c
a			
b			
c			

Tabla 3.14

∗	a	b	c
a			
b			
c			

Tabla 3.15

i) Completar la tabla 6.14 de tal modo que A tenga estructura de Grupo respecto de ∗ con elemento neutro b y a' = c .

ii) Completar la tabla 6.15 de tal modo que A tenga estructura de Grupo Abeliano respecto de ∗ y además las ecuaciones a $*_1$ x = b y c $*_2$ x = a se satisfacen para x = a

Desarrollo

a) ($\mathbb{Z}$, ∗) es grupo abeliano donde ∗ está definicia como a ∗ b = a + b + 3

i) ∗ es operación binaria cerrada pues si a,b ∈ $\mathbb{Z}$, se cumple que a + b + 3 ∈ $\mathbb{Z}$

ii) ∗ es asociativa pues:
(a ∗ b) ∗ c = (a + b + 3) ∗ c = (a + b + 3) + c + 3 = a + b + c + 6 (por la Asociatividad y conmutatividad de la + en $\mathbb{Z}$
a ∗ (b ∗ c) = a ∗ (b + c + 3) = a + (b + c + 3) + 3 = a + b + c + 6 (por la Asociatividad y conmutatividad de la + en $\mathbb{Z}$
Por lo tanto queda probado que (a ∗ b) ∗ c = a ∗ (b ∗ c)

iii) ∗ es conmutativa pues:

$a * b = a + b + 3$
$b * a = b + a + 3$
Por lo tanto queda probado que $a * b = b * a$ gracias a la conmutatividad de + en $\mathbb{Z}$

iv) $\mathbb{Z}$ posee neutro respecto de $*$ ya que:
$a * e = a + e + 3 = a \Rightarrow e = -3$
(y como vale la conmutatividad se cumple que $a * e = e * a$)

v) Existe a' para cada $a \in \mathbb{Z}$ respecto de $*$ y es tal que $a' = -6 - a$ ya que
$a * a' = -3 \Rightarrow a + a' + 3 = -3 \Rightarrow a' = -6 - a \in \mathbb{Z}$
(y como vale la conmutatividad se cumple que $a * a' = a' * a$)

Por lo tanto ($\mathbb{Z}$, $*$) es Grupo abeliano

b) i)

$*_1$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

ii)

$*_1$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Actividad 3.10

Desarrollo

a) B = { a , b , c } no es subgrupo de A ya que **$b*c=d \notin B$**

b) B = { a , b } es subgrupo de A ya que todos los resultados pertenecen a B

Se muestra en la siguiente tabla

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

Actividad 3.11

Sea X = { a , b } y sea A = $\wp(X)$ = { $\varnothing$, {a} , {b} , {a,b} } .

Demostrar que ($\wp(X)$, $\oplus$, $\cap$) es un anillo, donde $\oplus$, la operación diferencia simétrica y $\cap$, la operación intersección están dadas por las tablas 3.16 y 3.17

$\oplus$	$\varnothing$	{a}	{b}	{a,b}
$\varnothing$	$\varnothing$	{a}	{b}	{a,b}
{a}	{a}	$\varnothing$	{a,b}	{b}
{b}	{b}	{a,b}	$\varnothing$	{a}
{a,b}	{a,b}	{b}	{a}	$\varnothing$

Tabla 3.16

$\cap$	$\varnothing$	{a}	{b}	{a,b}
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
{a}	$\varnothing$	{a}	$\varnothing$	{a}
{b}	$\varnothing$	$\varnothing$	{b}	{b}
{a,b}	$\varnothing$	{a}	{b}	{a,b}

Tabla 3.17

Desarrollo:

i) $(\wp(X), \oplus)$ es grupo abeliano ya que
- $\oplus$ es ley de composición interna en $\wp(X)$ (se observa en la tabla)
- $\oplus$ es asociativa, esto es: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$, $\forall A, B, C \in \wp(X)$
  Y está demostrado en la Unidad 2 de la asignatura
- $\oplus$ es conmutativa, esto es: $A \oplus B = B \oplus A$, $\forall A, B \in \wp(X)$
  Y está demostrado en la unidad 2 de la asignatura
- Existe elemento neutro respecto de $\oplus$ y es $\varnothing$ (se observa en la tabla)
- Todo elemento tiene inverso respecto de $\oplus$ y ellos son:

ii) $\varnothing' = \varnothing$, $\{a\}' = \{a\}$, $\{b\}' = \{b\}$, $\{a,b\}' = \{a,b\}$

iii) $(\wp(X), \cap)$ es semigrupo ya que
- $\cap$ es ley de composición interna en $\wp(X)$ (se observa en la tabla)
- $\cap$ es asociativa, esto es: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\forall A, B, C \in \wp(X)$
  Y está demostrado en la Unidad 2 de la asignatura

iv) $\cap$ es distributiva respecto de $\oplus$, esto es:
$(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$ y
$C \cap (A \oplus B) = (C \cap A) \oplus (C \cap B)$

Por todo ello $(\wp(X), \oplus, \cap)$ tienen estructura algebraica de Anillo,

Actividad 3.12

Desarrollo:

a) $(A, +, *)$ donde $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par}\}$ con $+$ y $*$, suma y producto usuales
- $+$ es ley de composición interna en A ya que la suma de números pares es siempre otro número par
- $+$ es asociativa en A, esto es $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in A$
- $+$ es conmutativa en A, esto es $a + b = b + a$, $\forall a, b \in A$
- Existe neutro respecto de $+$, es 0 el cual pertenece a A pues es par
- Todo elemento de A, posee inverso respecto de A. Específicamente, si x es par, -x también es par
  Entonces $(A, +)$ es grupo abeliano

- $*$ es ley de composición interna en A, el producto de números pares es siempre otro par
- $*$ es asociativa, esto es $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in A$
- $*$ es conmutativa, esto es $a * b = b * a$, $\forall a, b \in A$
- El neutro respecto del producto en Z es 1 pero $1 \notin A$
- $(A - \{0\}, *)$ no es grupo abeliano

  Conclusión: $(A, +, *)$ no tiene estructura de cuerpo

b) Las operaciones '+' y '.' Dadas por las tablas se comportan como la disyunción excluyente y la conjunción lógica, esto es, como $\veebar$ y $\wedge$. Entonces, por analogía con dichas operaciones podemos decir que:

(A,+) es grupo abeliano ya que:
+ es ley de composición interna
+ es asociativa
+ es conmutativa
Existe el neutro y es 0
Cada elemento posee inverso los cuales son: 0'=0 y 1'=1

(A – {0}, .) es grupo abeliano ya que
. es ley de composición interna en A
. es asociativa
.es conmutativa
Existe neutro respecto de . , es 1
Considerando que A – {0} = {1} , se tiene que el único elemento que posee este conjunto tiene inverso, y es 1'=1

Como además es distributiva respecto de + se tiene que (A , + , .) tiene estructura algebraica de cuerpo.

Actividad 3.13

a) Sea B = { 0, 1} y las operaciones "+" y " · " definidas por las tablas 3.23 y 3.24
Demostrar que (B,+ , ·) tiene estructura de Algebra de Boole.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 3.23

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 3.24

Para determinar si (B,+ , ·) tiene estructura de Algebra de Boole demostraremos las siguientes leyes

1°) Leyes asociativas

ASOCIATIVIDAD EN LA OPERACIÓN "+"		ASOCIATIVIDAD EN LA OPERACIÓN "• "	
0+(0+1) = (0+0)+1 0+ 1 = 0+1 1 = 1	1+(0+1) = (1+0)+1 1+ 1 = 1+1 1 = 1	0•(0•1) = (0•0) •1 0• 0 = 0•0 0 = 0	1• (0•1) = (1•0) •1 1• 0 = 0•1 0 = 0
0+(1+0) = (0+1)+0 0+ 1 = 1+0 1 = 1	1+(1+0) = (1+1)+0 1+ 1 = 1+0 1 = 1	0• (1•0) = (0•1) •0 0• 0 = 0•0 0 = 0	1• (1•0) = (1•1) •0 1• 0 = 1•0 0 = 0
1+(0+0) = (1+0)+0 1+ 0 = 1+0 1 = 1	1+(1+1) = (1+1)+1 1+ 1 = 1+1 1 = 1	1• (0•0) = (1•0) •0 1• 0 = 0•0 0 = 0	1• (1•1) = (1•1) •1 1• 1 = 1•1 1 = 1
0+(1+1) = (0+1)+1 0+ 1 = 1+1 1 = 1	0+(0+0) = (0+0)+0 0+ 0 = 0+1 0 = 0	0• (1•1) = (0•1) •1 0• 1 = 0•1 0 = 0	0• (0•0) = (0•0) •0 0• 0 = 0•0 0 = 0

2°) Leyes de conmutatividad

Se cumple la propiedad conmutativa en ambas tablas ya que son simétricas con respecto a la diagonal principal

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 3.23

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 3.24

3°) Leyes distributivas

- ✓ $0+(0\bullet 1) = (0+0) \bullet (0+1)$
  $0+0 = 0\bullet 1$
  $0 = 0$
- ✓ $0\bullet (0+1) = (0\bullet 0) + (0\bullet 1)$
  $0\bullet 1 = 0+0$
  $0 = 0$

4°) Existencia del elemento neutro

- ✓ Se verifica en la tabla que el neutro para la operación + es el 0
- ✓ Se verifica en la tabla que el neutro para la operación • es el 1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 3.23

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 3.24

5°) Existencia del complemento

$x + x' = x' + x = 1$
$0 + 1 = 1 + 0 = 1$
$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

$x \bullet x' = x' \bullet x = 0$
$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$
$1 \bullet 0 = 0 \bullet 1 = 0$

Por lo tanto (B,+ , ·) tiene estructura de Algebra de Boole

b) Determinar si los siguientes conjuntos son Algebras de Boole: D21 , D25, D40 , D60, D105

D_{21} es Algebra de Boole puesto que $21= 3 \bullet 7$

D_{25} NO es Algebra de Boole puesto que $25= 5 \bullet 5$

D_{40} NO es Algebra de Boole puesto que $40= 2^3 \bullet 5$

D_{60} NO es Algebra de Boole puesto que $60 = 3 \bullet 5 \bullet 2^2$

D_{105} es Algebra de Boole puesto que $105 = 3 \bullet 5 \bullet 7$