Función Racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)};P(x)\ y\ Q(x)\ son\ Polinomios\ Reales\ y\ Q(x)\neq 0$$

$$domf=\{x\in\Re/Q(x)\neq 0\}$$

Criterio para determinar Asíntota Horizontal en una función Racional fraccionaria

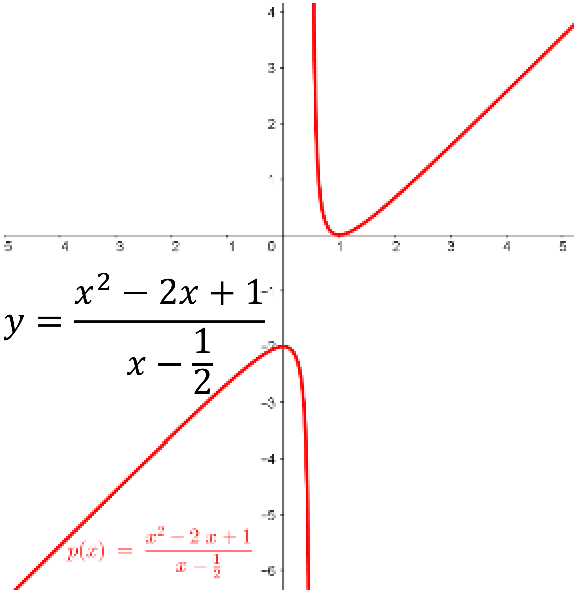
Si el grado del polinomio P es $\mathbf{n}$ *y el grado del polinomio Q es* $\mathbf{m}$

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Se verifica que:

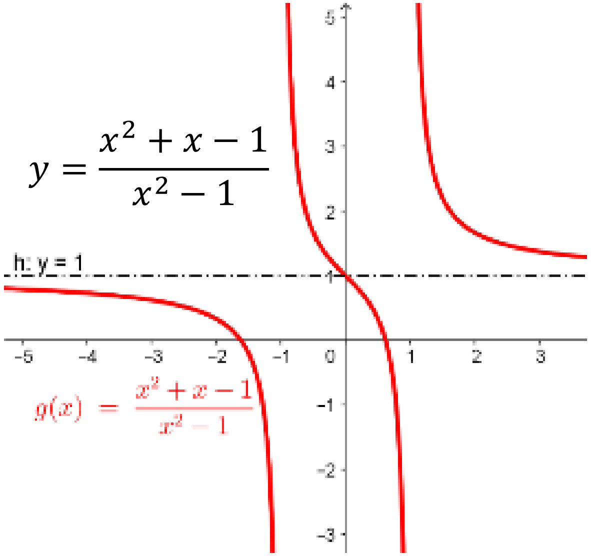
i) Si $\mathbf{n>m}$ *la gráfica No tiene A.H.*

$$y=\frac{x^2-2x+1}{x-\frac{1}{2}}$$



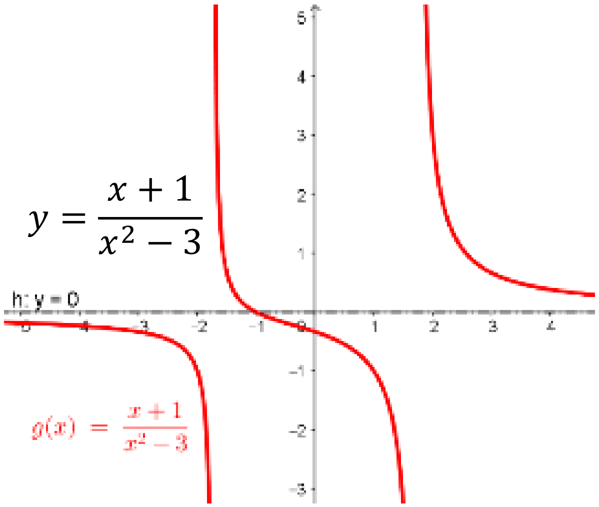
ii) Si $\mathbf{n=m}$ *la gráfica tiene A.H. en:* $y=\frac{a_0}{b_0}$

$$y=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$$



iii) Si $\mathbf{n<m}$ *la gráfica tiene A.H. en el eje OX:* $y=0$

$$y=\frac{x+1}{x^2-3}$$



Funciones Racionales Particulares: Hipérbola

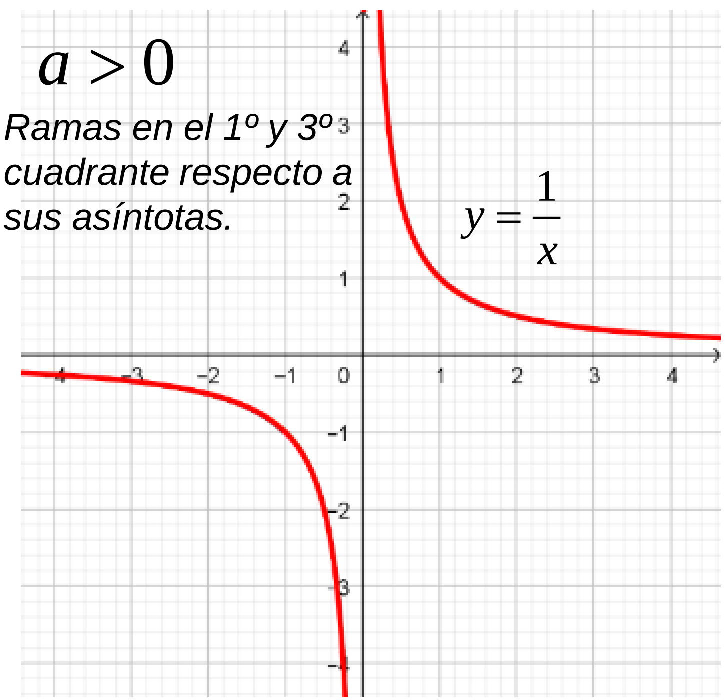
$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k; con\ a; h\ y\ k \in \Re\ y\ a \neq 0$$

$$domf = \{x \in \Re / x \neq h\};\ rgof = (-\infty; h) \cup (h; \infty)$$

Los valores que toma el coeficiente $\boldsymbol{a}$, *indican cuanto más abierta o cerrada es la curva y si sus ramas se ubican en el 1º y 3º cuadrante o el 2º y el 4º, respecto a sus Asíntotas.*

$a > 0$

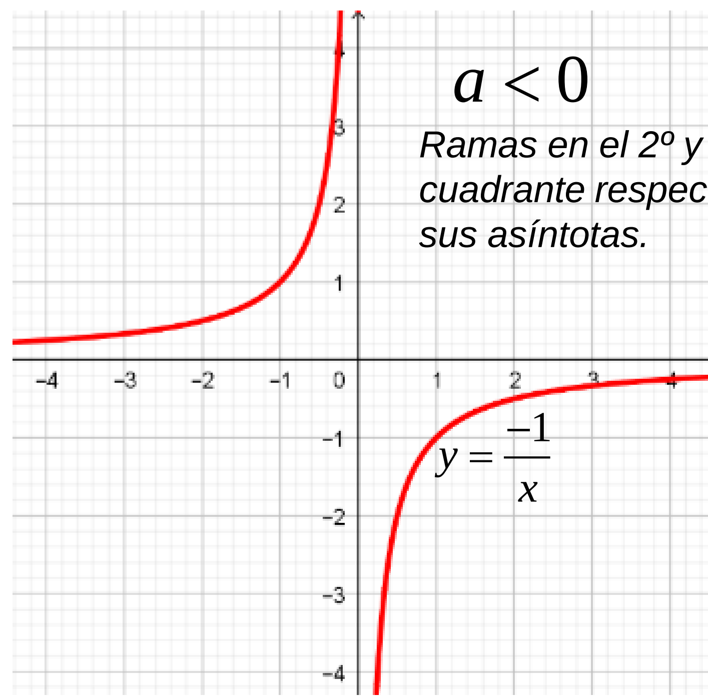
Ramas en el 1º y 3º cuadrante respecto a sus asíntotas.



f *Decrece en todo su dominio*

$a < 0$

Ramas en el 2º y 4º cuadrante respecto a sus asíntotas.



f *Crece en todo su dominio*

EJEMPLO:

$$y = \frac{2}{x+2} + 1$$

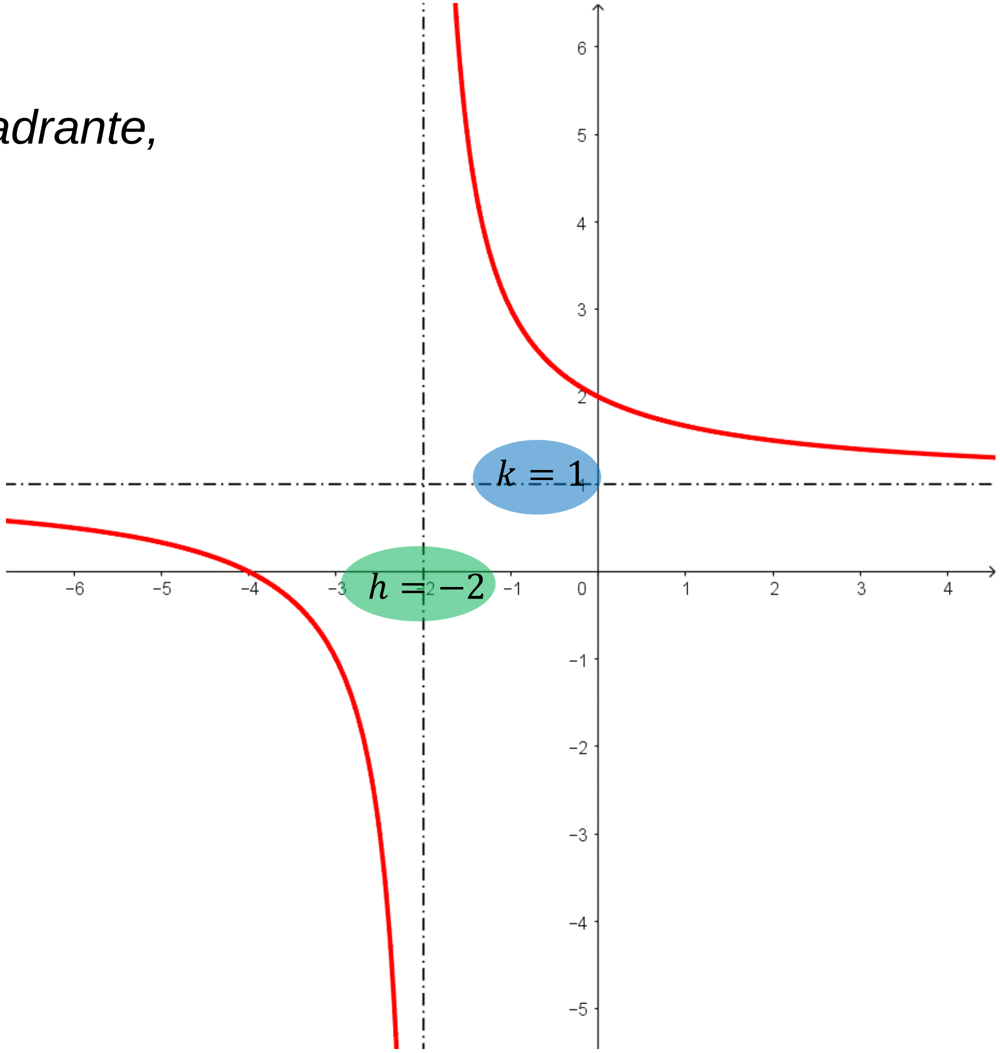
$$domf = \Re - \{-2\}$$

$a = 2$ ***a*>0** *Ramas en 1er y 3er cuadrante, respecto de sus asíntotas.*

$h = -2$ ***f*** *tiene* **A.V.** *en* ***x*= -2**

$k = 1$ ***f*** *tiene* **A.H.** *en* ***y*= 1**

$$rgof = \Re - \{1\}$$



f es Biunívoca

f *estrictamente decreciente*

PROBLEMA:

El nivel de carga C de la batería de un teléfono celular (expresado en %), está dado en función del tiempo de uso (expresado en hs.) y responde a $C = \frac{220}{t+2} - 10$. Graficar la función interpretando el fenómeno que representa. Dar su dominio y rango; indicar el sentido de crecimiento. ¿Es biunívoca?

Solución:

Desde la matemática pura, la ecuación responde a una función racional (hipérbola), cuyos elementos son:

$a = 220$ ***a*>0** *Ramas en 1er y 3er cuadrante, respecto de sus asíntotas.*

$h = -2$ ***f** tiene **A.V.** en **x= -2***

$domf = \Re - \{-2\}$

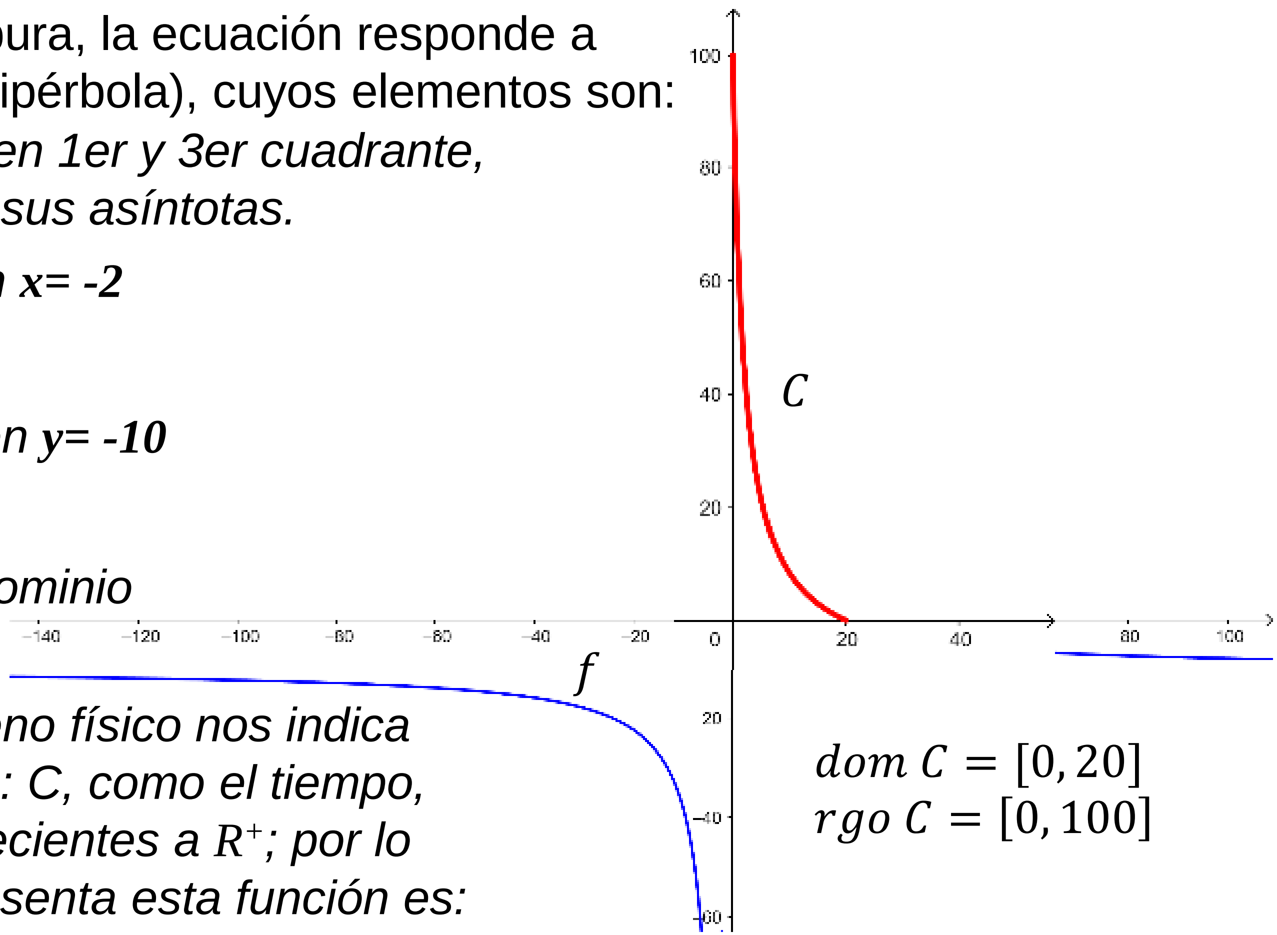
$k = -10$ ***f** tiene **A.H.** en **y= -10***

$rgof = \Re - \{-10\}$

f *Decrece en todo su dominio*

f es Biunívoca

Sin embargo, el fenómeno físico nos indica que tanto el % de carga: C, como el tiempo, son magnitudes pertenecientes a R^+*; por lo que la gráfica que representa esta función es:*



$dom\ C = [0, 20]$

$rgo\ C = [0, 100]$

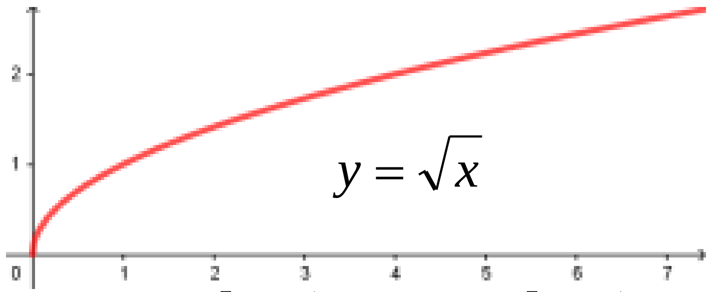
Funciones Algebraicas Irracionales

Son de la forma: $f / f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in \mathrm{N}, n > 1$

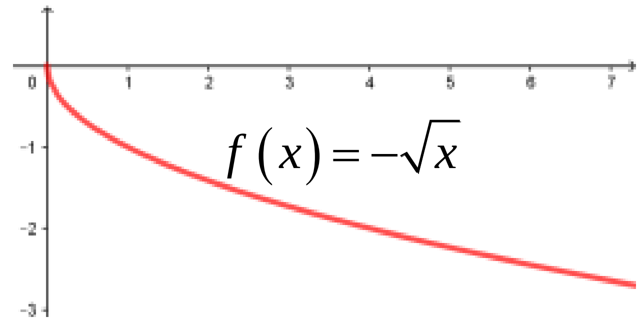
A continuación, veremos las que más se utilizan y en cada caso definiremos sus dominio y rango.

Función Raíz Cuadrada

Es de la forma: $f(x) = \sqrt{x}$

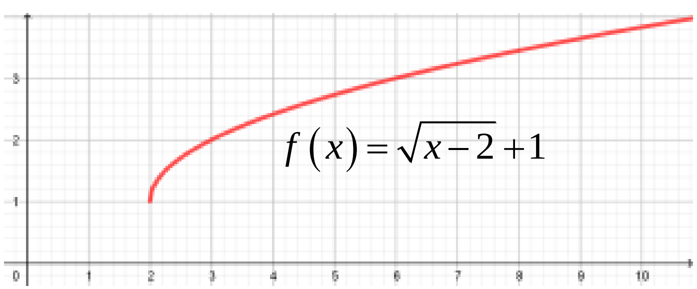


$dom\ f = [0, \infty);\ rgo\ f = [0, \infty)$

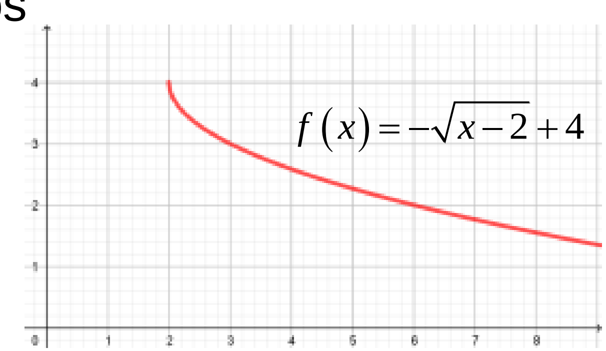


$dom f = [0, \infty); rgo f = (-\infty, 0]$

Como en todos los casos, si sumamos o restamos un número en el argumento de la raíz, ésta se desplaza horizontalmente; y si sumamos o restamos un número a la función, se desplaza verticalmente, como veremos



$dom\ f = [2, \infty);\quad rgo\ f = [1, \infty)$



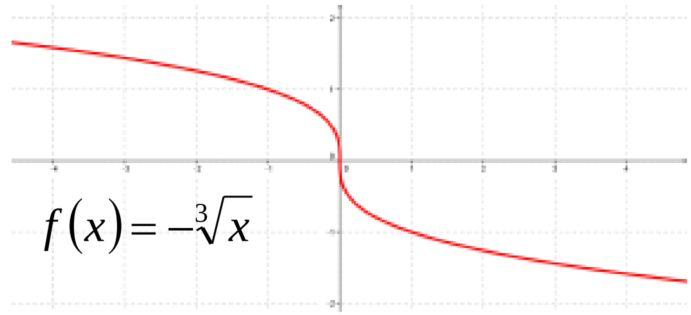
$dom\ f = [2, \infty);\quad rgo\ f = (-\infty, 4]$

Función Raíz Cubica

Es de la forma: $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$

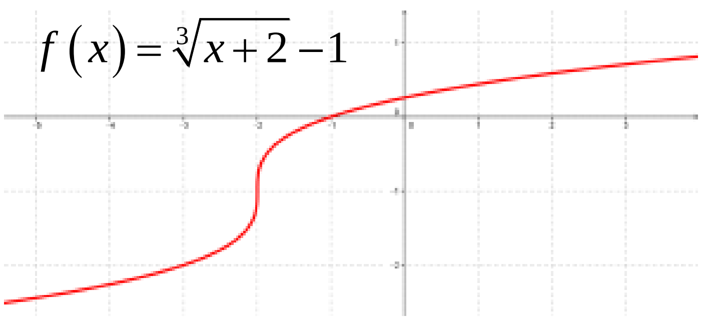
$$dom\ f=R; \qquad rgo\ f=R$$

$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$

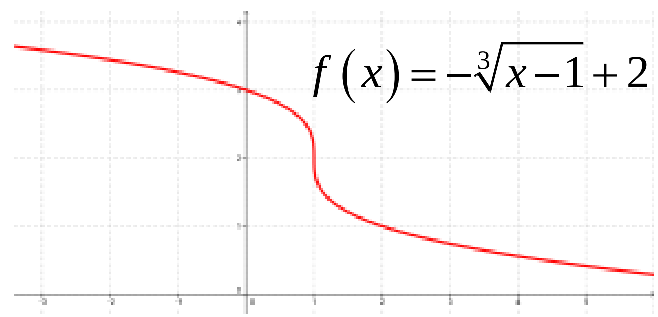


$f\left(x\right)=-\sqrt[3]{x}$

Generalizando



$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x+2}-1$



$f\left(x\right)=-\sqrt[3]{x-1}+2$

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

Funciones dadas en ramas.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & si\ x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1, & si\ x > 2 \end{cases}$$

Significa que ***f*** toma definiciones distintas para distintos intervalos de dominio.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} si\ x \in (-\infty, 2];\ f(x) = x^2 - 3 \\ \\ si\ x \in (2, \infty); f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \end{array}\right\} dom\ f = \mathbb{R}$$

$$\bigcap c/OX : y = 0 \therefore \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3, \quad |x| = \sqrt{3} \begin{cases} P(-\sqrt{3}, 0) \\ P(\sqrt{3}, 0) \end{cases} \\ \\ \sqrt{x-2} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = -1; \quad No\ existe\ intersección \end{cases}$$

Ambos valores: $-\sqrt{3}\ y\ \sqrt{3}$ pertenecen al dominio de f.

$$\bigcap c/OY : x = 0$$

¿A qué rama pertenece el dominio 0?

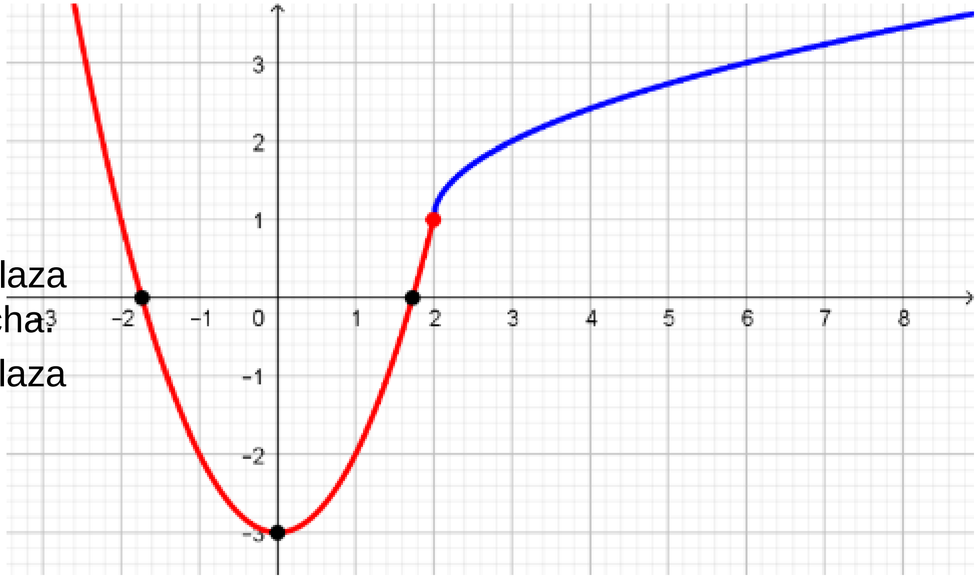
$$f(0) = 0^2 - 3 = -3;\ \ P(0, -3)$$

No corresponde estudiar simetría ni asíntotas. ¿Por qué?

Para graficar la otra rama recordemos:

$\sqrt{x-2} + 1$ Indica que la gráfica se desplaza horizontalmente 2 unidades a la derecha.

$\sqrt{x-2} + 1$ Indica que la gráfica se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.



$$Rgo\ f = [-3, \infty)$$

No en Biunívoca.

FUNCIONES TRASCENDENTES

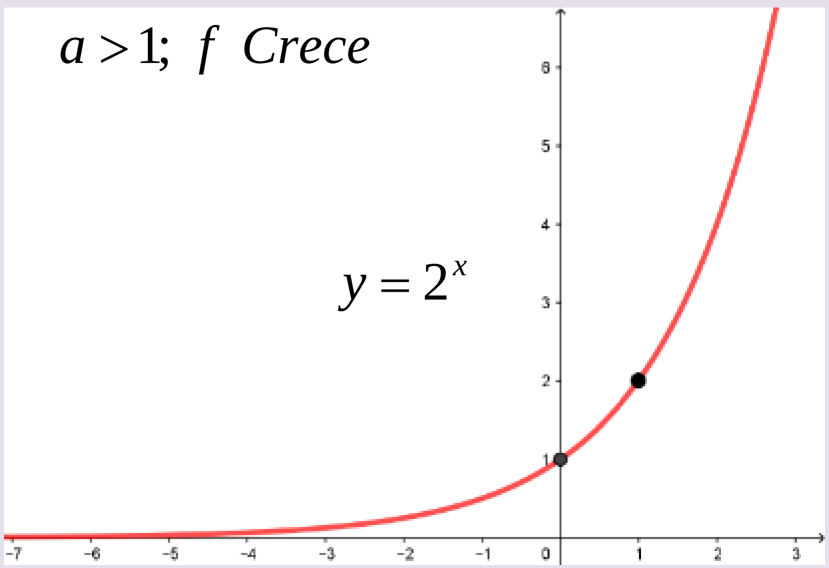
Función Exponencial:

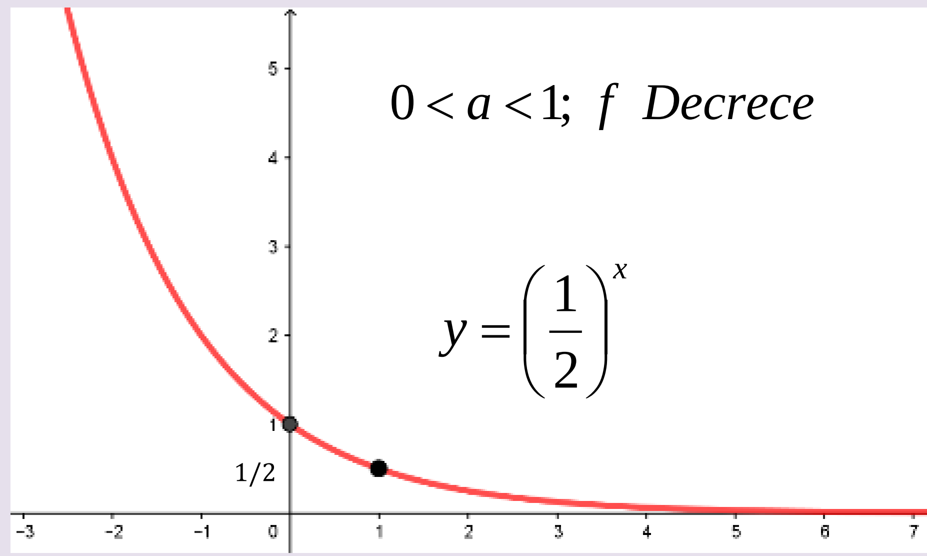
$$y = a^x \ \ con\ a \epsilon\ \Re;\ a > 0\ y\ a \neq 1$$

$$dom\ a^x = \Re;\ \ rgo\ a^x = (0, \infty)$$

$$Si\ x = 0 \Rightarrow a^0 = 1; P(0;1) \in f$$

$$Si\ x = 1 \Rightarrow a^1 = a; P(1;a) \in f$$





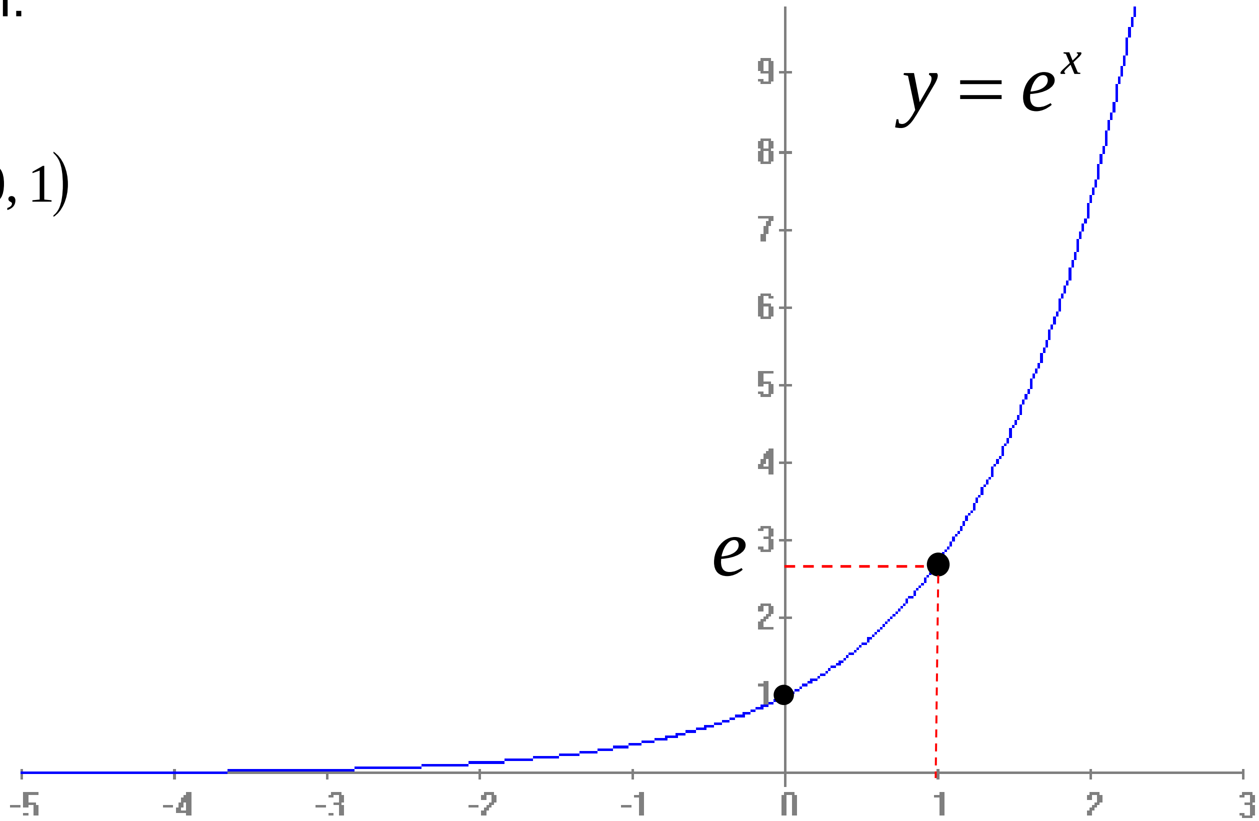
Una función exponencial característica es: $y = e^x$

$$dom\ e^x = \Re; \qquad rgo\ e^x = (0, \infty)$$

El número ***e*** es la base de los logaritmos naturales (o neperianos), es un número irracional: ***e=2,71828182…***

Como analizamos recién:

x	y	
0	$e^0 = 1$	$\therefore \cap\, c/OY : (0, 1)$
1	$e^1 = e$	$\therefore P(1, e)$



Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

Función Logarítmica

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

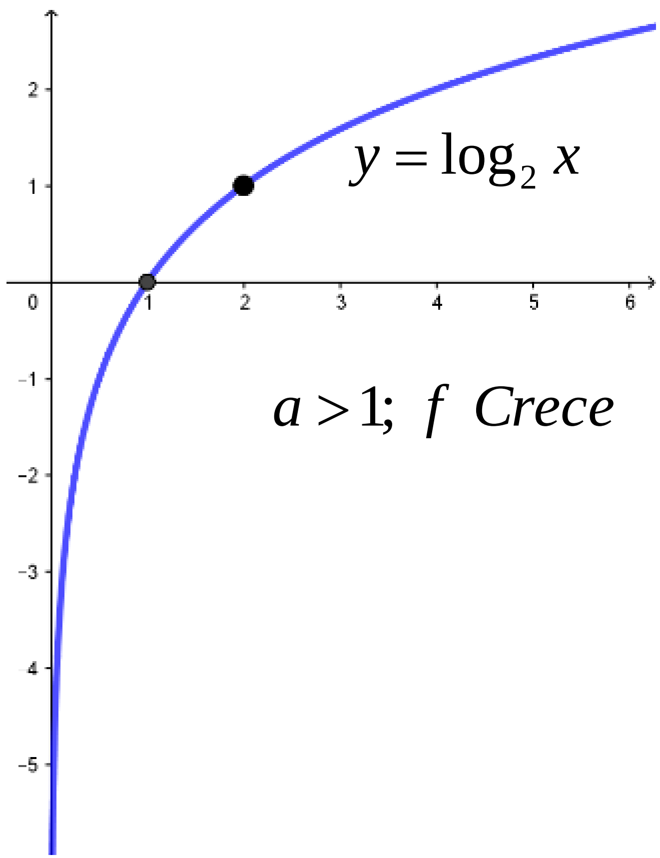
$$y = \log_a x; \;\; con \;\; a \in \Re; \; a > 0 \wedge a \neq 1$$

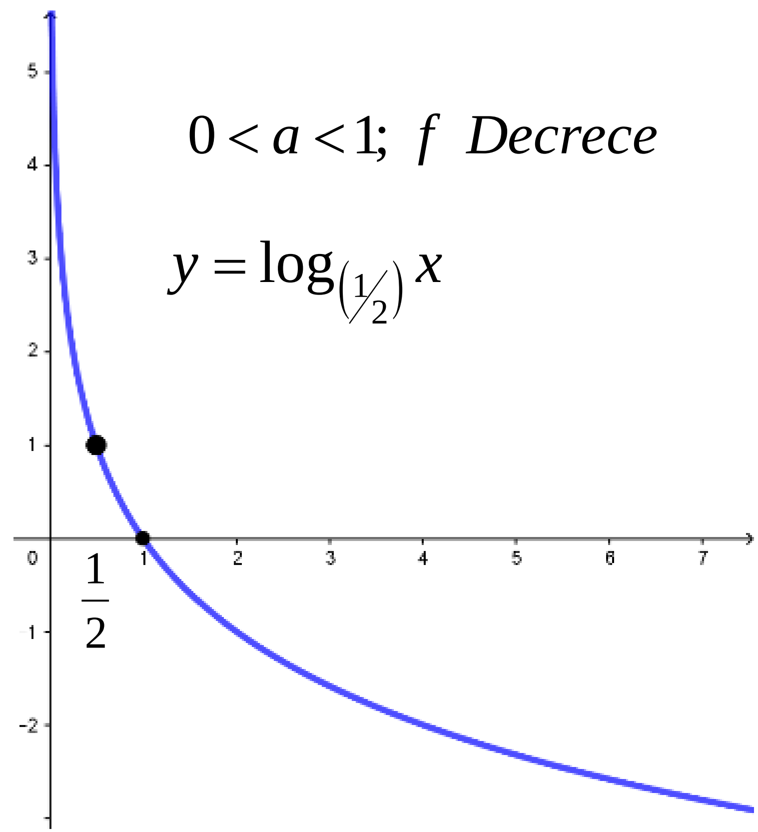
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

$$dom \log_a x = (0; \infty); \;\; rgo \log_a x = \Re$$

$$Si \;\; x = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0; \; P(1;\, 0) \in f$$

$$Si \;\; x = a \Rightarrow \log_a a = 1; \; P(a;\, 1) \in f$$





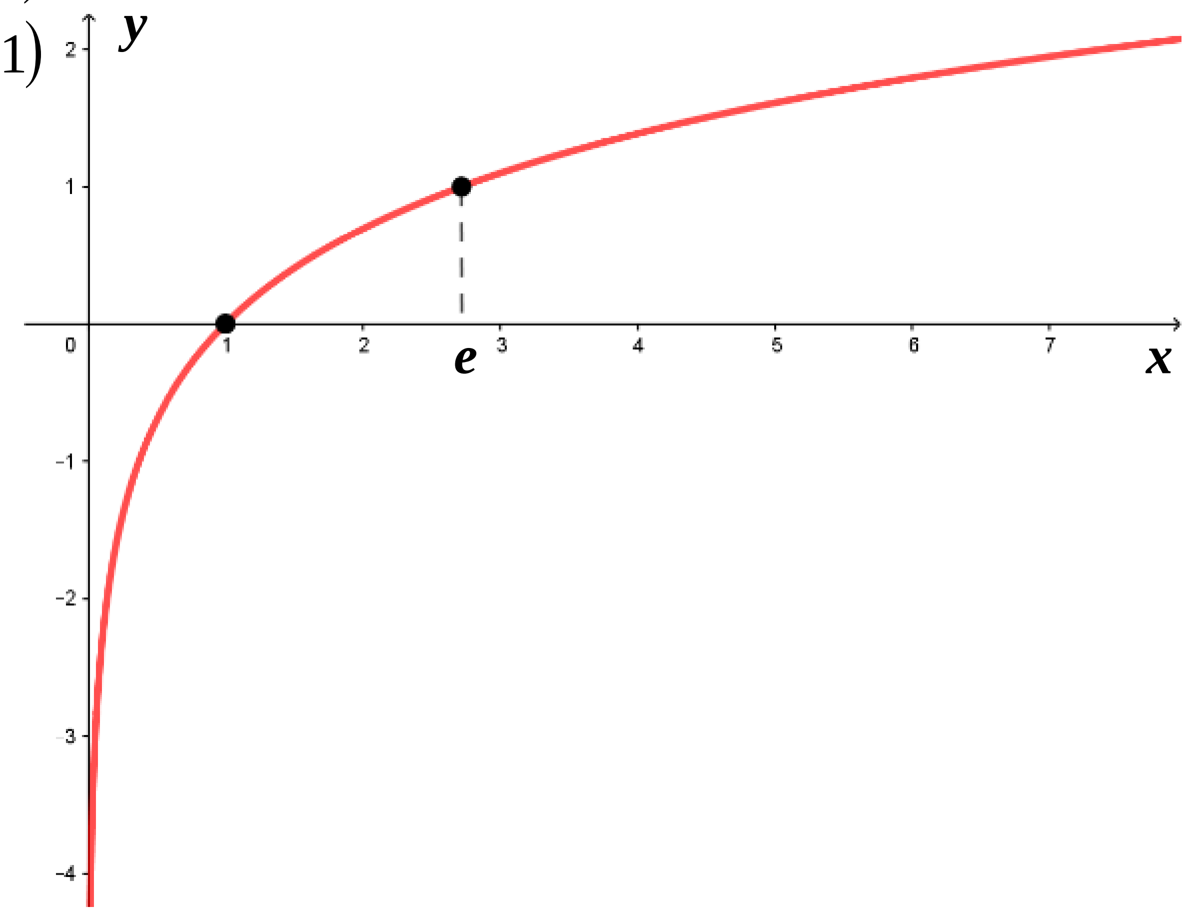
Una función logarítmica característica es: $y = \ln x$

El logaritmo neperiano es de base ***e***

$$dom \ln x = (0;\ \infty);\quad rgo \ln x = \Re$$

$$Si\ \ x = 1 \Rightarrow \ln 1 = 0;\ P(1,\ 0)$$

$$Si\ \ x = e \Rightarrow \ln e = 1;\ P(e,\ 1)$$



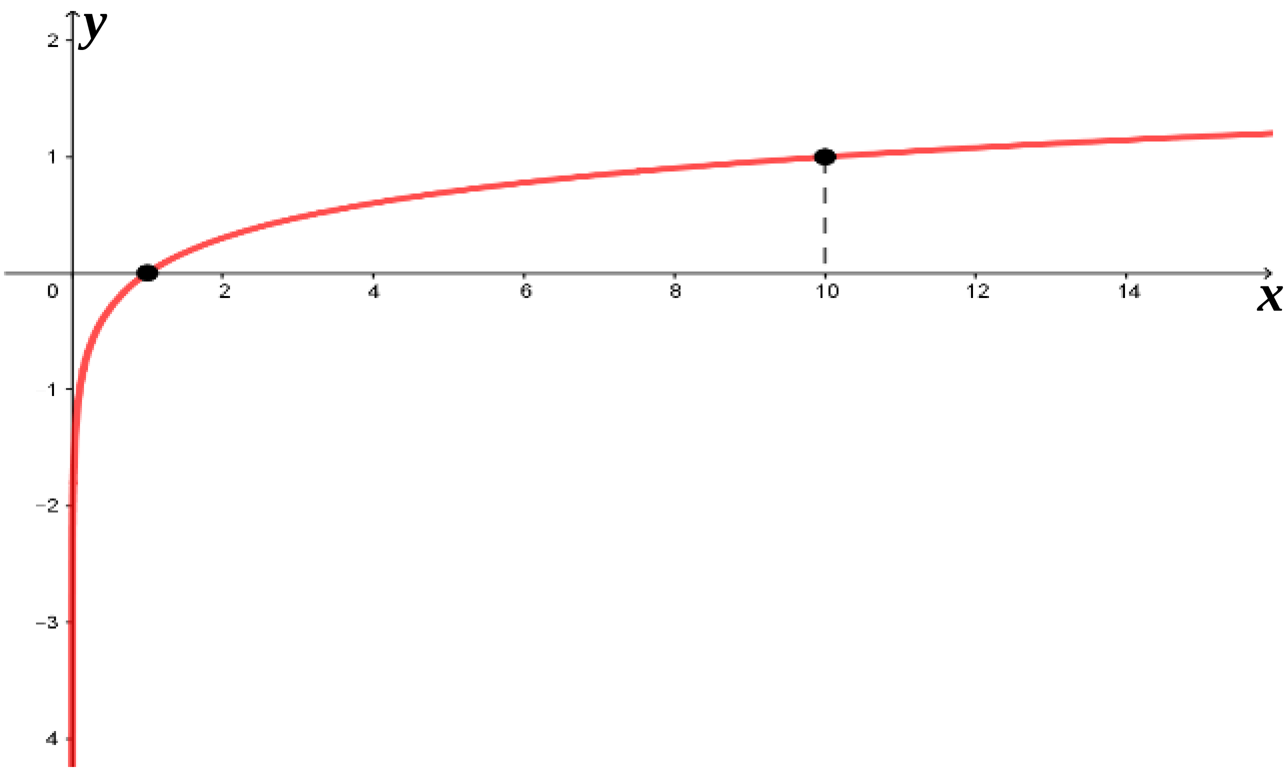
Otra función logarítmica característica es: $y = \log_{10} x$

Este logaritmo se lo llama decimal porque es de base ***10*** $y = log\, x$

$$dom \log_{10} x = (0;\ \infty);\quad rgo \log_{10} x = \Re$$

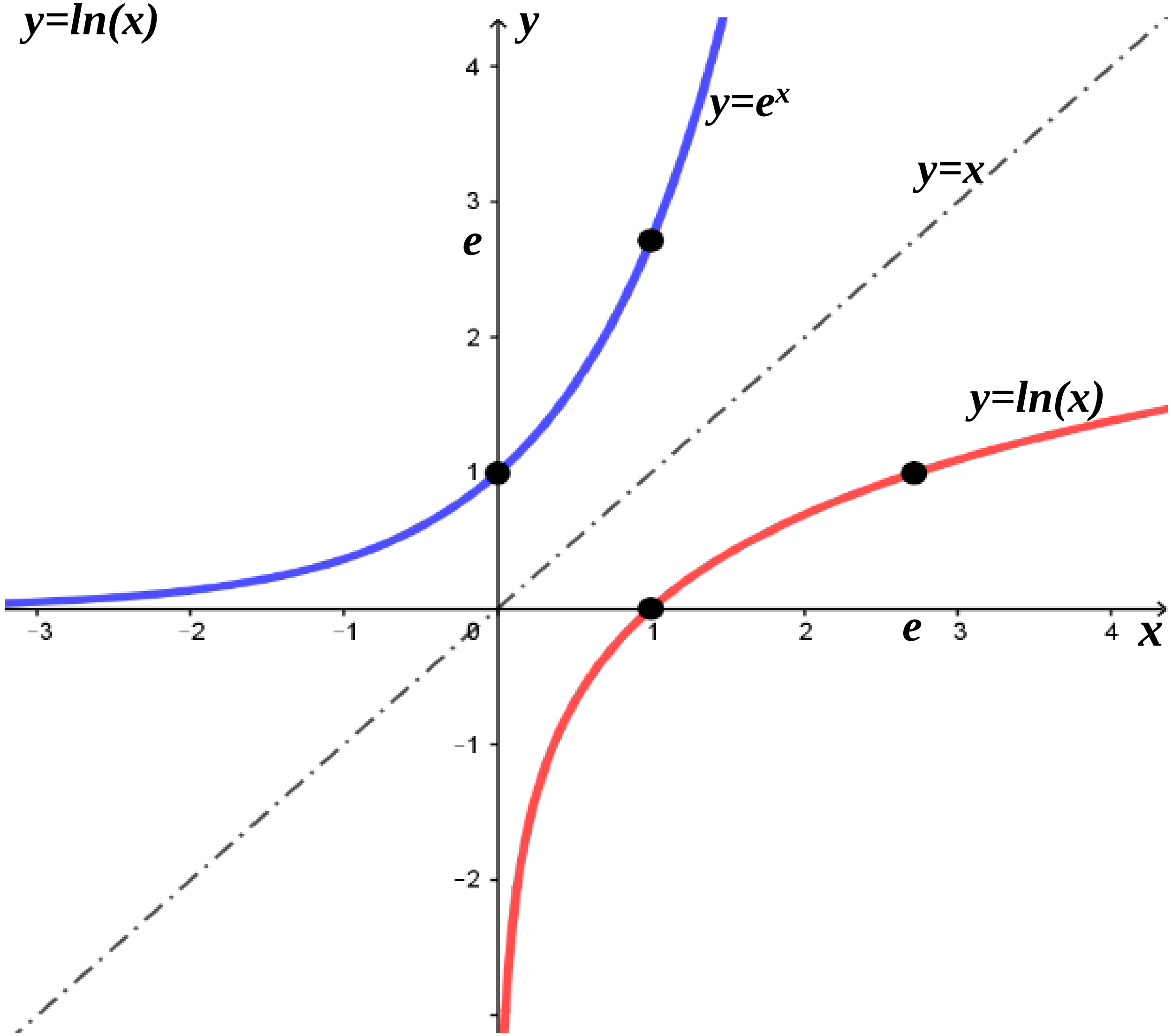
$$Si\ \ x = 1 \Rightarrow \log_{10} 1 = 0;\ P(1;\ 0)$$

$$Si\ \ x = a \Rightarrow \log_{10} 10 = 1;\ P(10;\ 1)$$



La gráfica de la función exponencial es simétrica con la gráfica de la función logarítmica, respecto de la primera bisectriz (la recta *y=x).*
Esta es una propiedad de las funciones inversas, que veremos luego.

Por ejemplo: $y=e^x$ con $y=ln(x)$



Recordemos las propiedades más importantes de los logaritmos, que nos serán útiles.

PROPIEDADES DE LOGARITMO		**Ejemplos**
$\ln e = 1$	$\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
$\ln 1 = 0$	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4 = 3$
$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_3\left(\dfrac{27}{3}\right) = \log_3 27 - \log_3 3 = 3 - 1 = 2$
$\ln a^b = b \cdot \ln a$	$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_5 25 = 2 \cdot \log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$
$\ln a = \ln b,\ sii\ \ a = b$	$\log_a x = \log_a y,\ sii\ \ x = y$	$\log_3 x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 9$
$Si\ \ a > b \Rightarrow \ln a > \ln b$	$Si\ \ x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$	$Si\ \ 4 > 2 \Rightarrow \log_2 4 > \log_2 2 \therefore 2 > 1$

Función Valor Absoluto:

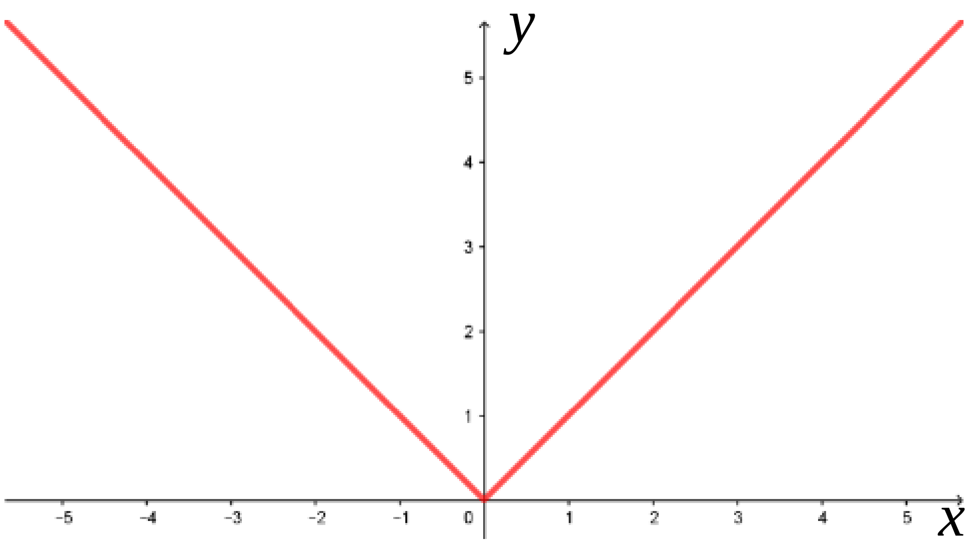
Por definición se sabe que: $|x| = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$

La función Valor Absoluto se defina como:

$$f(x) = |x|$$
$$f(x) = \{(x, y)/y = |x|; \;\; x \in R\}$$

$$dom\, f = R$$
$$rgo\, f = [0, \infty)$$

Su representación gráfica es:

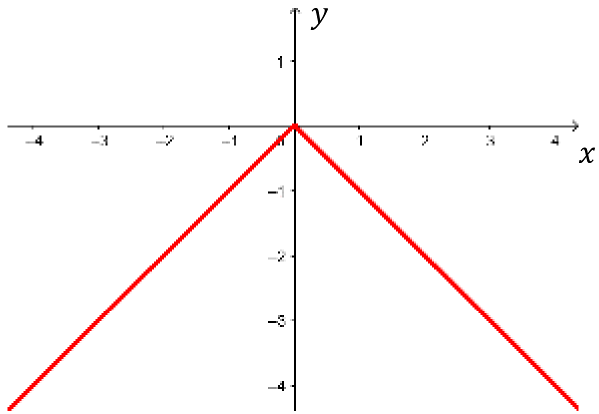


De manera similar que, con las demás funciones, se pueden variar los parámetros.

$f(x) = -|x|$

$dom\ f = R$

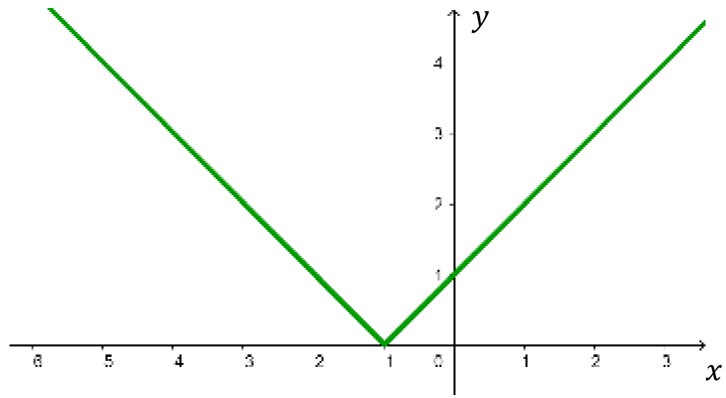
$rgo\ f = (-\infty;\ 0]$



$f(x) = |x + 1|$

$dom\ f = R$

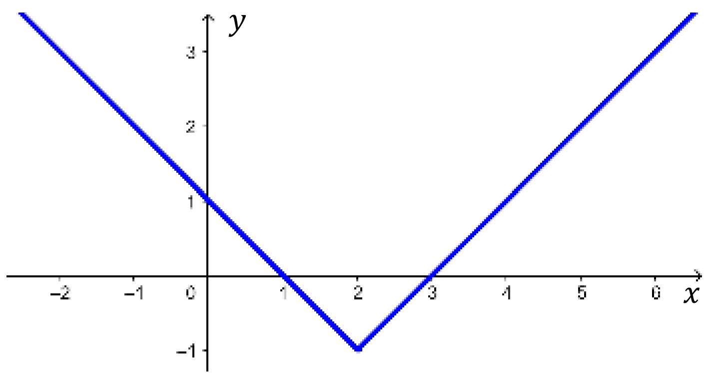
$rgo\ f = [0, \infty)$



$f(x) = |x - 2| - 1$

$dom\ f = R$

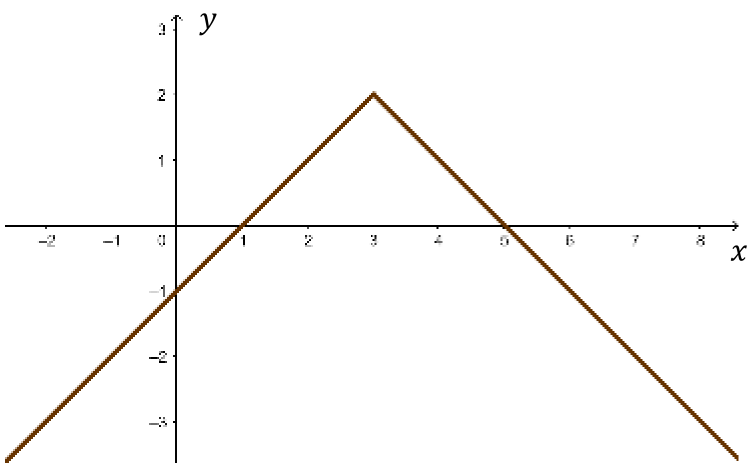
$rgo\ f = [-1, \infty)$



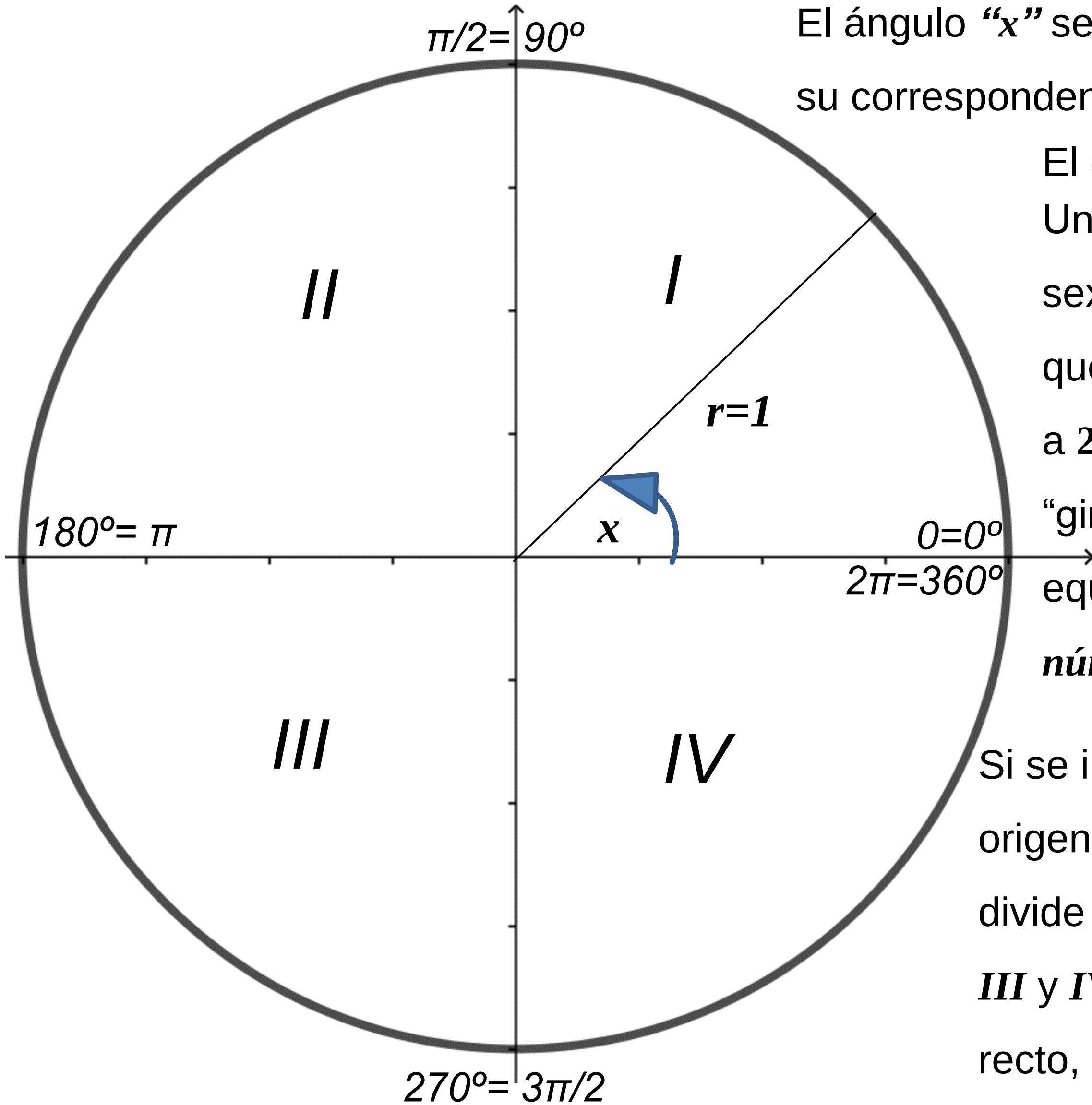
$f(x) = -|x - 3| + 2$

$dom\ f = R$

$rgo\ f = (-\infty;\ 2]$



EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

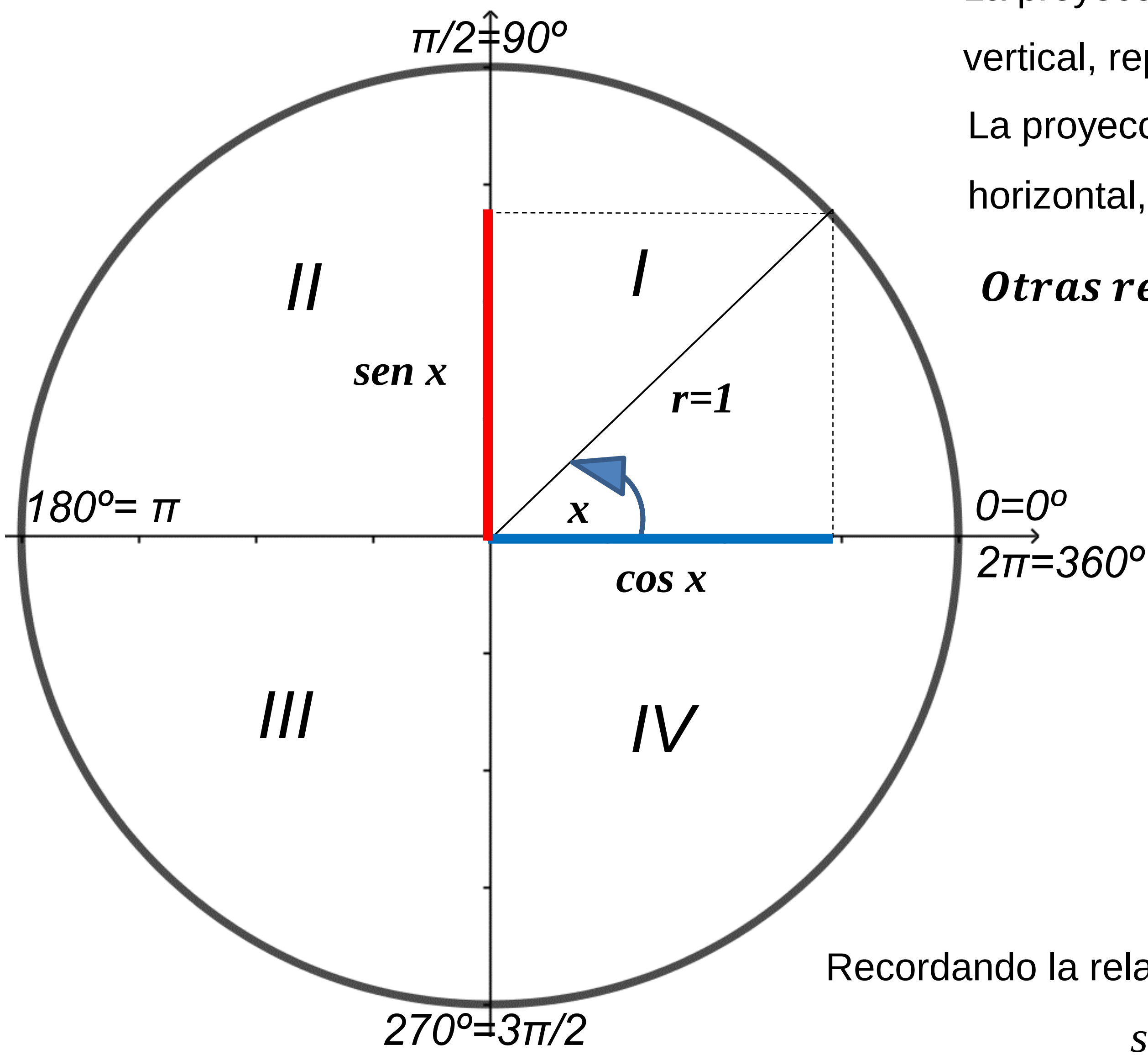


El ángulo ***"x"*** se mide en el ***Sistema Radián***, que tiene su correspondencia con el Sistema Sexagesimal.

El giro positivo es ANTIHORARIO.

Un "giro completo" en el sistema sexagesimal, equivale a 360º; mientras que en el sistema Radián equivale a $\mathbf{2\,\pi\,.\,r}$, como el radio es igual a 1, un "giro completo" en el ***sistema Radián*** equivale a $\mathbf{2\,\pi}$. Además, los ***ángulos*** son ***números Reales.***

Si se interpone un sistema cartesiano, cuyo origen coincide con el centro del círculo. Este divide al círculo en cuatro Cuadrantes: ***I***, ***II***, ***III*** y ***IV***, definiendo cada uno, un ángulo recto, como se muestra en la figura.



La proyección del radio vector sobre el eje vertical, representa el ***sen x***.

La proyección del radio vector sobre el horizontal, el ***cos x***.

Otras relacione trigonométricas

$$tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x}$$

$$cotg\, x = \frac{\cos x}{sen\, x}$$

$$sec\, x = \frac{1}{\cos x}$$

$$cosec\, x = \frac{1}{sen\, x}$$

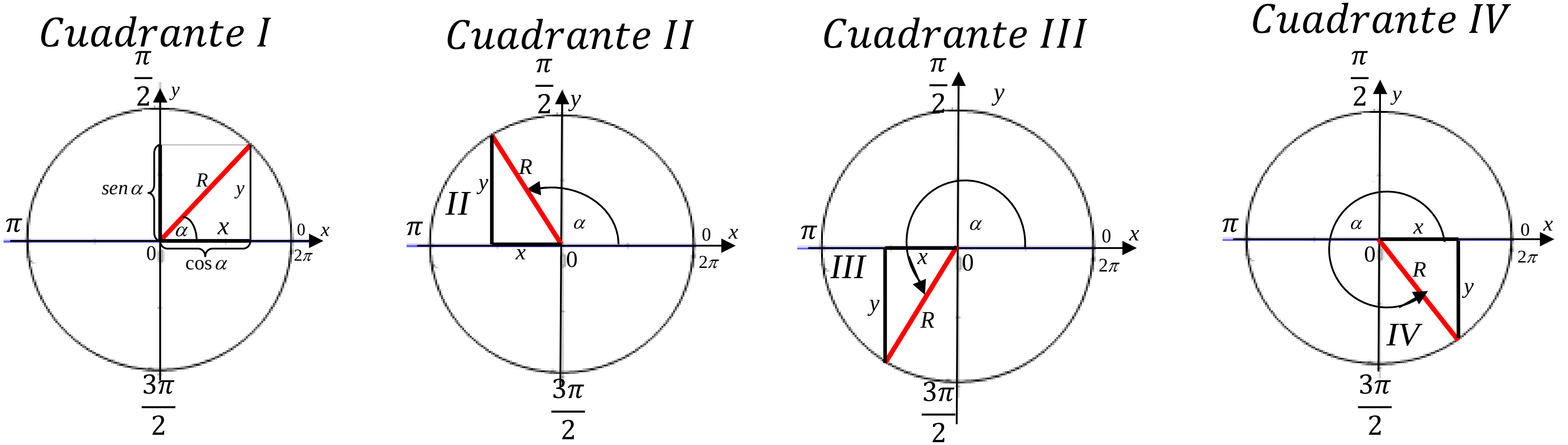
Recordando la relación trigonométrica fundamental

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

Se pueden despejar relaciones que serán útiles: $sen\, x = \sqrt{1-\cos^2 x}$; $\cos x = \sqrt{1-sen^2 x}$

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

Signos de las funciones trigonométricas



Cuad	*Ángulo*	***sen*** ∝	***cos*** ∝	***tg*** ∝	***cotg*** ∝	***sec*** ∝	***cosec*** ∝
I	$0 < \propto < \frac{\pi}{2}$ $0 < \propto < 90°$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
II	$\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$ $90° < \propto < 180°$	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
III	$\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$ $180° < \propto < 270°$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
IV	$\frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$ $270° < \propto < 360°$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$

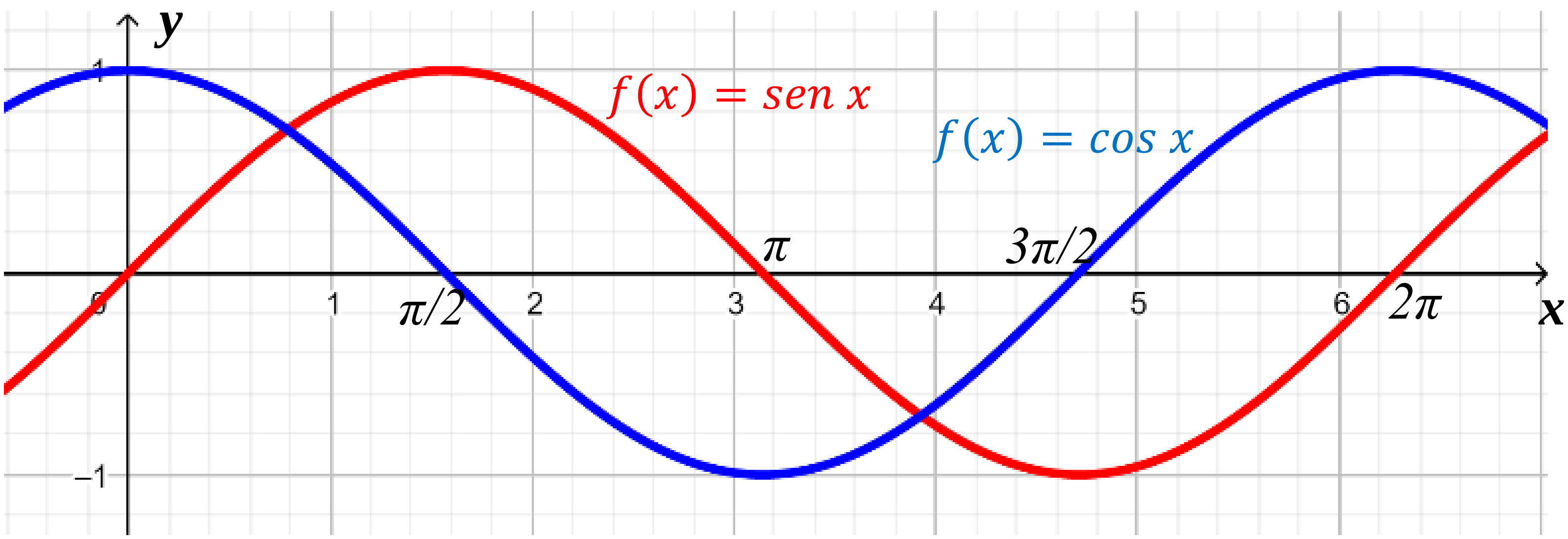
Las Funciones Seno y Coseno

La función seno se define: $f(x) = sen\ x$ $\quad$ $Dom\ sen = R$

$Rgo\ sen = [-1, 1]$

La función coseno se define: $f(x) = cos\ x$ $\quad$ $Dom\ cos = R$

$Rgo\ cos = [-1, 1]$



El período de las funciones seno y coseno es $\boldsymbol{2\pi}$; aunque debemos recordar que el dominio de ambas es el conjunto $\boldsymbol{R}$.

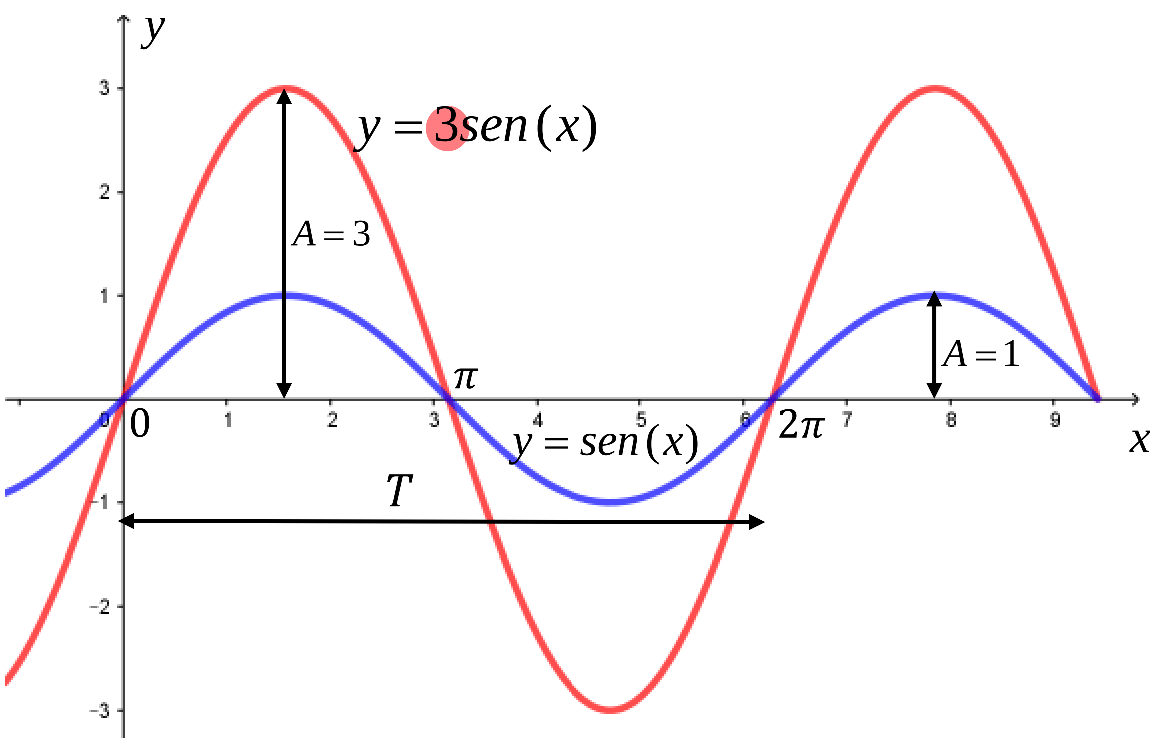
Estudio de funciones trigonométricas

$$f(x) = A \cdot sen(Bx + C)$$

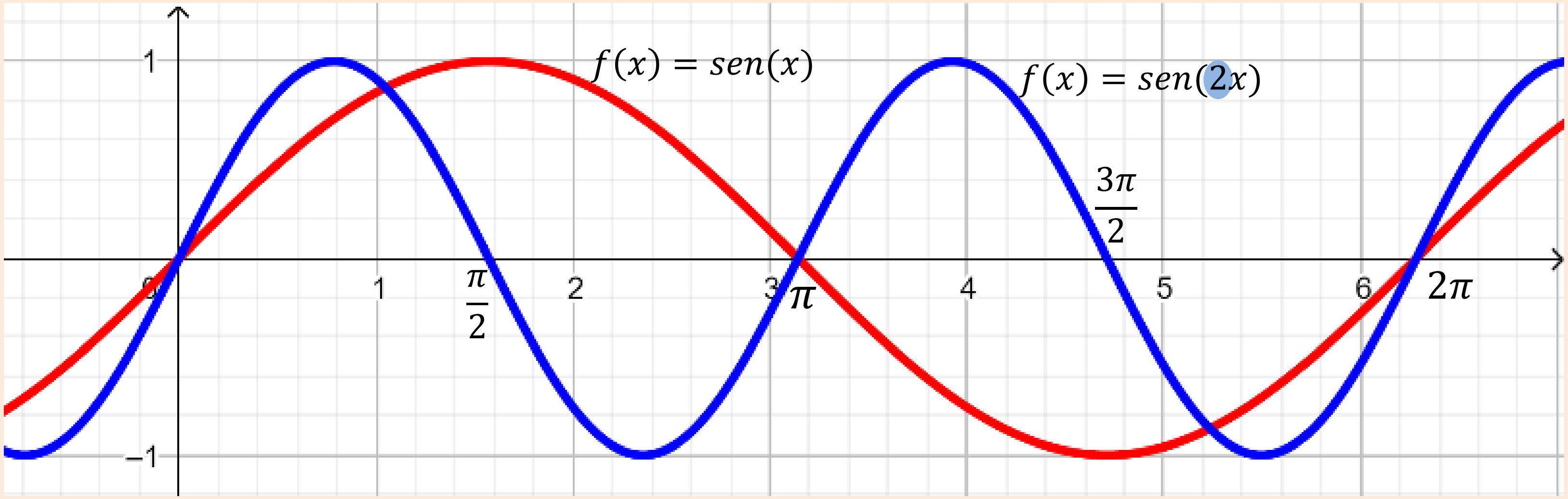
$$f(x) = A \cdot cos(Bx + C)$$

Amplitud A: Representa **la mitad de la distancia entre los valores máximo y mínimo** de la función. La amplitud se determina por la expresión ***Amplitud*** = |***A***|.

Periodo T: Representa la **medida del ángulo en el cual la gráfica completa un ciclo**. Se expresa en radianes. El **periodo** se determina por la expresión ***T*** = ***2/***|***B***|. El **periodo** de las funciones ***f(x) = sen(x)*** y ***g(x) = cos(x)*** es ***2 π***.

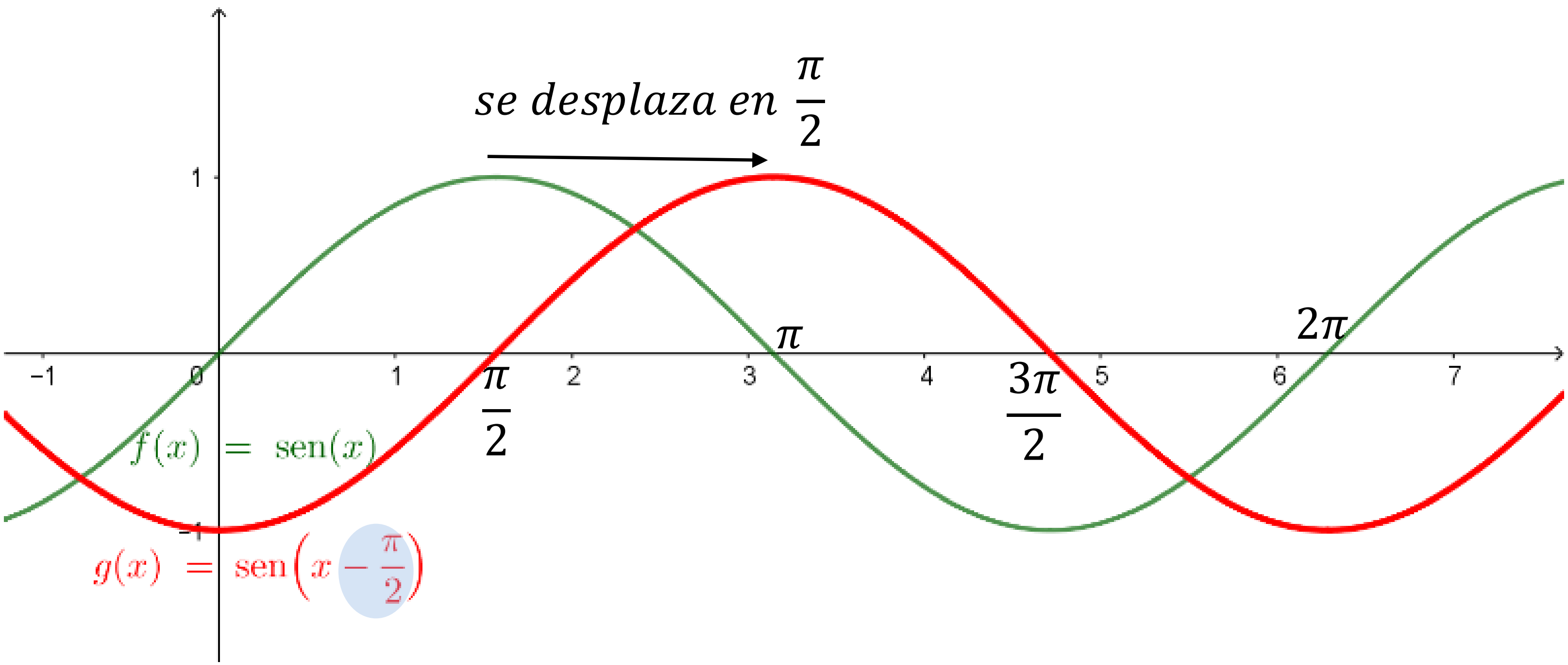


Frecuencia B: Representa la **cantidad de ciclos o el número de veces que la gráfica se repite en un ángulo de 2π radianes.**



$f(x) = sen(2x)$ $\qquad$ $Frecuencia: B = 2$

Fase F: Representa la **medida del ángulo en que la gráfica se desplaza horizontalmente**. Se expresa en radianes.



Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

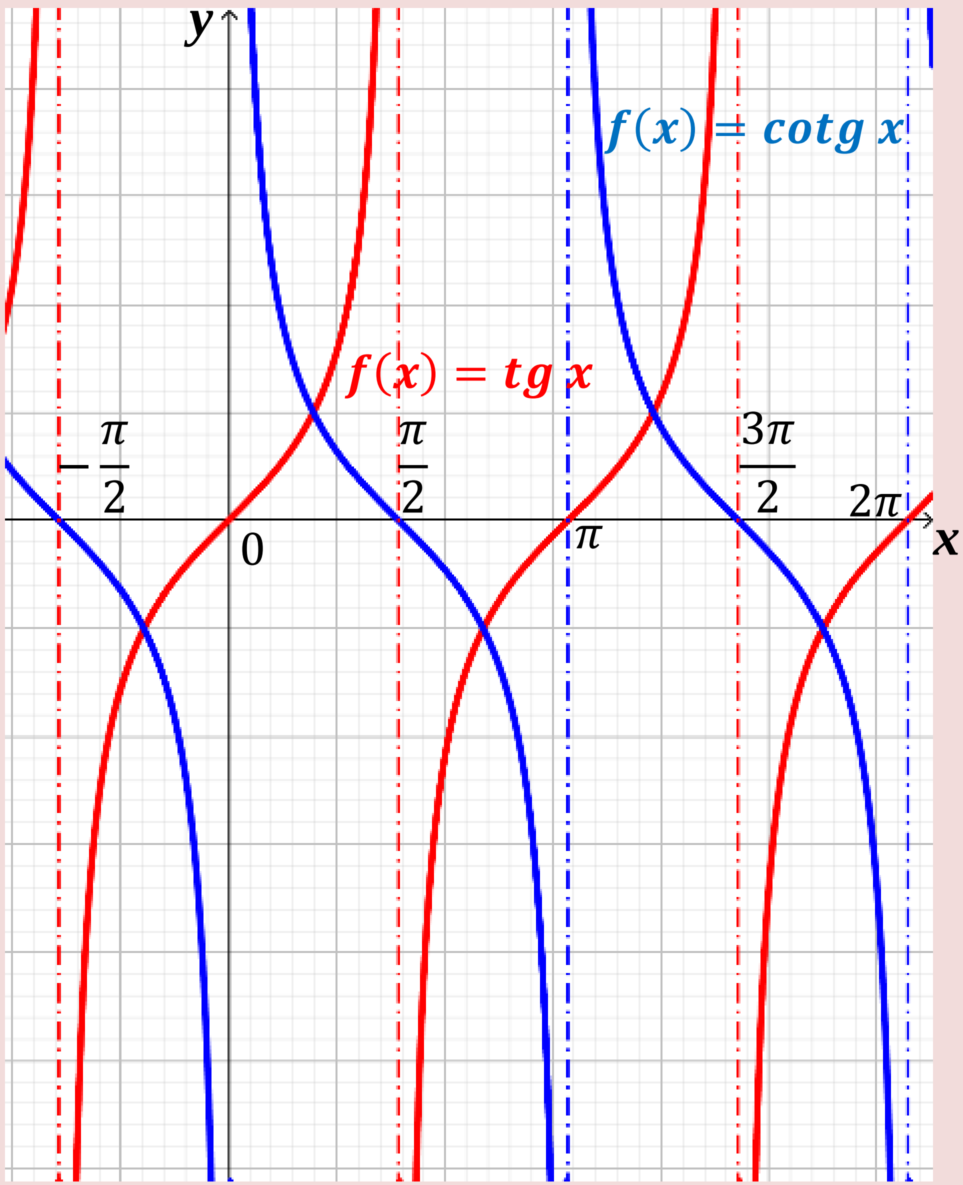
Las Funciones Tangente y Cotangente

La función tangente se define:

$$tg\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{sen\ x}{\cos x};\ \cos x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ tg = R - (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Rgo\ tg = R$$



La función cotangente se define:

$$cotg\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{cos\ x}{sen\ x}; sen\ x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ cotg = R - k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Rgo\ cotg = R$$

Las Funciones Secante y Cosecante

La función secante se define:

$$sec\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{1}{\cos x};\ \cos x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ sec = R - (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$$

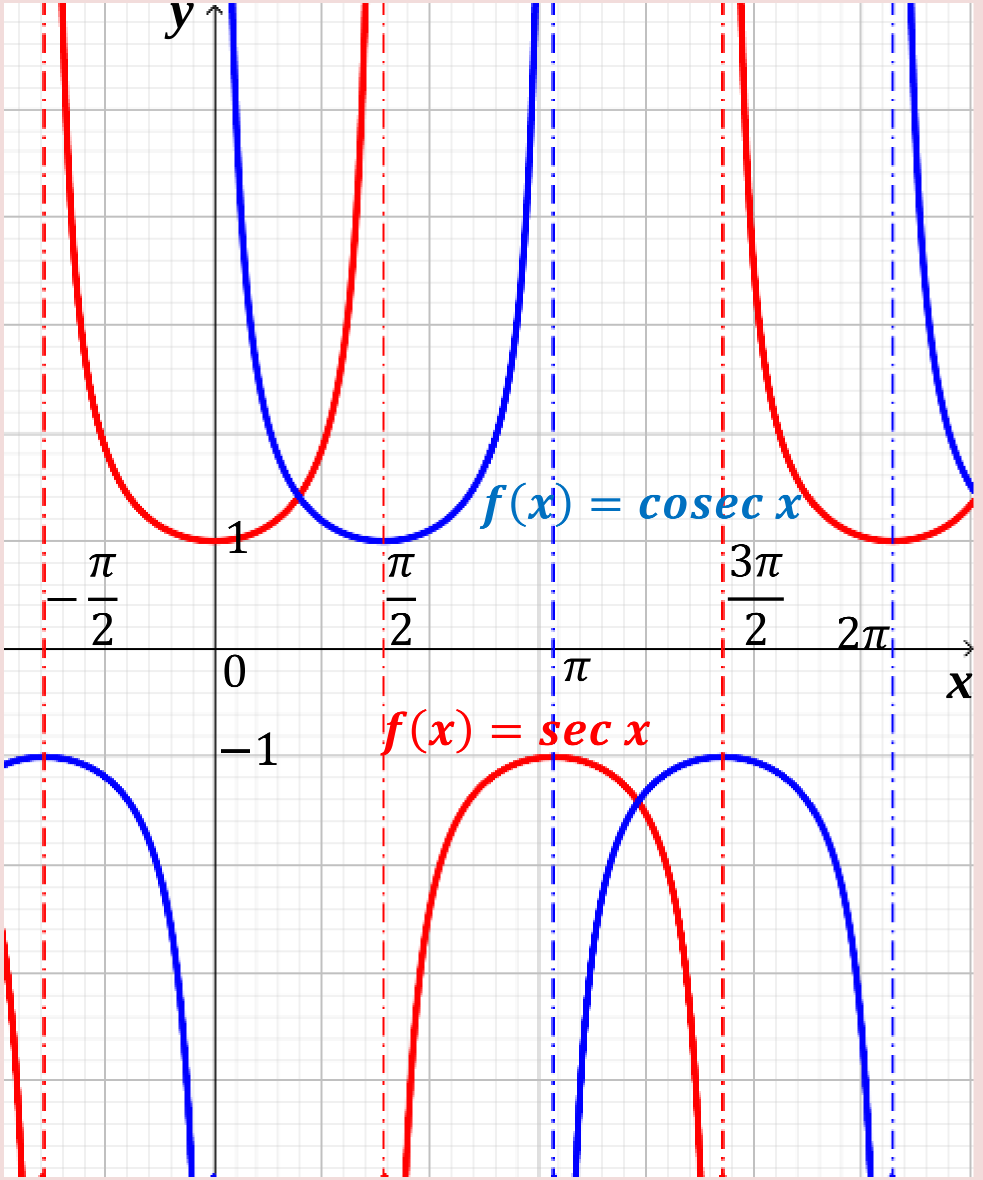
$$Rgo\ sec = R - (-1,1)$$

La función cosecante se define:

$$cosec\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{1}{sen\ x}; sen\ x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ cosec = R - k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Rgo\ cosec = R - (-1,1)$$



CUESTIONARIO 2:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

a). ¿La función Valor absoluto, es uno a uno? ¿y la función seno lo es?

b). Una función racional de la forma: $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$, tiene asíntotas? Si las tiene, ¿cuáles son sus ecuaciones?

c). La función $y = \sqrt{x-1} + 2$, tiene asíntotas? ¿cuál es su dominio y su rango?

d). Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\,x; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ¿cuál es su dominio y su rango? ¿cómo es su gráfica?

e). La función $y = \operatorname{tg} x$ ¿es uno a uno?, ¿en qué condiciones lo es?

f). La función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ¿cómo es su crecimiento? ¿cuál es su ordenada al origen? ¿cuánto valen: $f(0)$ y $f(1)$?

g). La función: $y = 2^{x-1}$, ¿cómo es su crecimiento? ¿$f(0)$; $x/f(x) = 1$?

h). Dada la función: $y = \frac{1}{2}\cos x$, ¿Su gráfica tiene diferencias con la de $y = \cos x$?. Grafica ambas en un sistema cartesiano y compara.

i). La función $f(x) = 2\,sen\,x; con\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ¿es uno a uno?

$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \qquad 1+tg^2 x=\sec^2 x \qquad 1+cotg^2 x=co\sec^2 x$

$sen\, x.\csc x=1 \qquad \cos x.\sec x=1 \qquad tg\, x\cot g\, x=1$

$sen(u+v)=sen\, u.\cos v+\cos u.sen\, v \qquad sen(u-v)=sen\, u.\cos v-\cos u.sen\, v$

$\cos(u+v)=\cos u.\cos v-sen\, u.sen\, v \qquad \cos(u-v)=\cos u.\cos v+sen\, u.sen\, v$

$$tg(u+v)=\frac{tg\, u+tg\, v}{1-tgu.tg\, v} \qquad tg(u-v)=\frac{tg\, u-tg\, v}{1+tgu.tg\, v}$$

$$sen2x=2\, sen\, x.\cos x \qquad sen^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x \qquad cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \qquad tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{sen\, x}$$

$$\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2 x \qquad tg^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \qquad tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{sen\, x}{1+\cos x}$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \qquad sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{2} \qquad tg\, 2x=\frac{2\, tg\, x}{1-tg^2 x}$$

$$sen\,\alpha-sen\,\beta=2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\,\alpha-\cos\,\beta=-2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u.\cos v=\frac{1}{2}\left[sen(u+v)+sen(u-v)\right] \qquad \cos u.\cos v=\frac{1}{2}\left[\cos(u+v)+\cos(u-v)\right]$$

$$\cos u.sen\, v=\frac{1}{2}\left[sen(u+v)-sen(u-v)\right] \qquad \operatorname{sen} u.sen\, v=\frac{1}{2}\left[\cos(u-v)-\cos(u+v)\right]$$