FACULTAD REGIONAL TUCUMAN
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

GEOMETRIA ANALITICA: DISTANCIAS

$\mathbb{R}^2$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

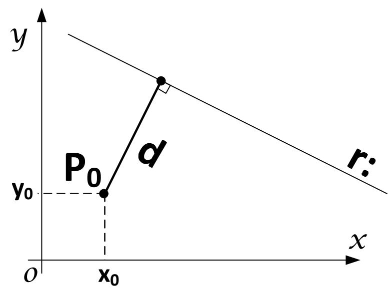
La recta debe estar expresada en su forma general:

$r\colon\ Ax + By + C = 0$

Donde los coeficientes A, B y $C \in \mathbb{R}$

El punto $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y es exterior a la recta r:

$$d(P_0, r) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

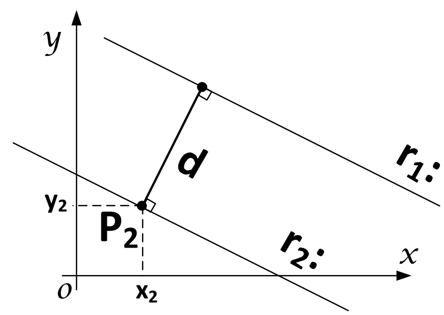
Las rectas deben estar expresadas en su forma general:

$r_1\colon\ Ax + By + C_1 = 0$ $\qquad$ $r_2\colon\ Ax + By + C_2 = 0$

Los coeficientes reales A y B son iguales en las dos rectas porque las rectas son paralelas. Si no son iguales, son proporcionales. Para aplicar la fórmula, deben ser iguales. Para eso se debe multiplicar una de las rectas por el valor adecuado para que A y B sean iguales en ambas rectas.

Se busca un punto $P_2(x_2, y_2) \in r_2$: y se aplica la fórmula anterior como distancia entre el punto P_2 y la recta r_1: .

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\,Ax_2 + By_2 + C_1\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\,C_1 - C_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



$\mathbb{R}^3$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

La recta debe estar expresada en su forma vectorial paramétrica:

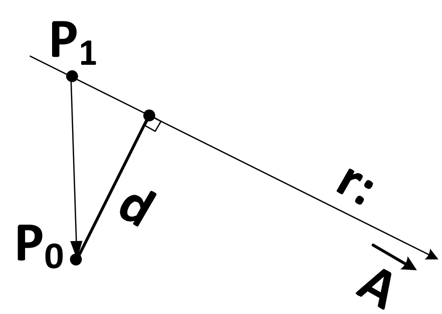
r: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + \lambda\,\overrightarrow{A}$

Donde los vectores $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{P_1}$ y $\overrightarrow{A} \in \mathbb{R}^3$ y el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

El punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y es exterior a la recta r:

El punto $P_1(x_1, y_1, z_1) \in$ a la recta r:

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{P_0P_1}\,|}{|\overrightarrow{A}|}$$



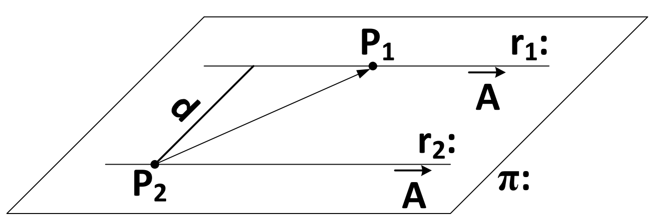
DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Las rectas deben estar expresadas en su forma vectorial paramétrica:

$r_1\colon\ \overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + \lambda\,\overrightarrow{A}$ $\qquad$ $r_2\colon\ \overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_2} + \lambda\,\overrightarrow{A}$

Si las rectas son paralelas, su vector dirección $\overrightarrow{A}$ es el mismo o son proporcionales.

Para aplicar la fórmula, se debe elegir uno de



ellos indistintamente.
El punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\in$ a la recta r_1: El punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $\in$ a la recta r_2:
Tanto las dos rectas como la distancia d pertenecen al mismo plano π:

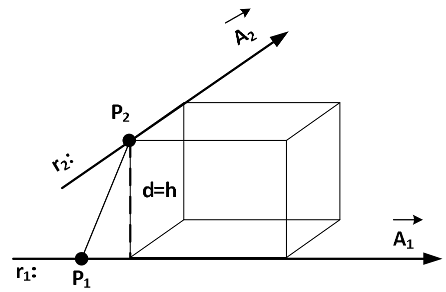
$$d(r_1, r_2) = d(r_1, P_2) = \frac{\left|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\overrightarrow{A}\right|}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$
Las rectas deben estar expresadas en su forma vectorial paramétrica:

r_1: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + \lambda\,\overrightarrow{A_1}$ $\qquad$ r_2: $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_2} + \lambda\,\overrightarrow{A_2}$

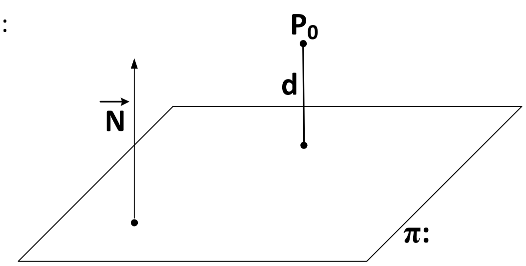
Como se ve en la figura, los dos vectores dirección definen dos aristas de un paralelepípedo. La arista que une esas dos aristas anteriores, define la distancia mínima entre las dos rectas espaciales. O sea, es la altura del paralelepípedo.
El volumen del paralelepípedo se define como $V = A_b \times h$
(área de la base por altura)

$$\Rightarrow \quad d(r_1, r_2) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left(\left(\overrightarrow{A_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_2}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1} \times \overrightarrow{A_2}\right|}$$

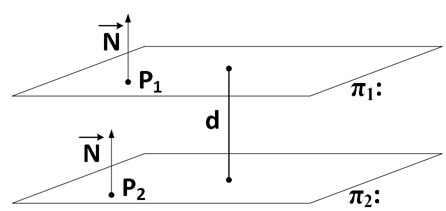


DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO
El plano debe estar expresado en su forma cartesiana general:
π: $Ax + By + Cz + D = 0$
Donde los coeficientes A, B, C y D $\in$ $\mathbb{R}$
El punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\in$ $\mathbb{R}^3$ y es exterior al plano π:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



DISTANCIA ENTRE DOS PLAN0S PARALELOS
Los planos deben estar expresados en su forma cartesiana general:
π_1: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ $\qquad$ π_2: $Ax + By + Cz + D_2 = 0$
Si los planos son paralelos, sus vectores dirección $\overrightarrow{A}$ son iguales o son proporcionales.
Para aplicar la fórmula, los coeficientes de las 3 variables deben ser iguales para cada variable.
El punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\in$ al plano π_1:
El punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $\in$ al plano π_2:
La distancia d es perpendicular a los dos planos π_1: y π_2:



$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\,D_2 - D_1\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$