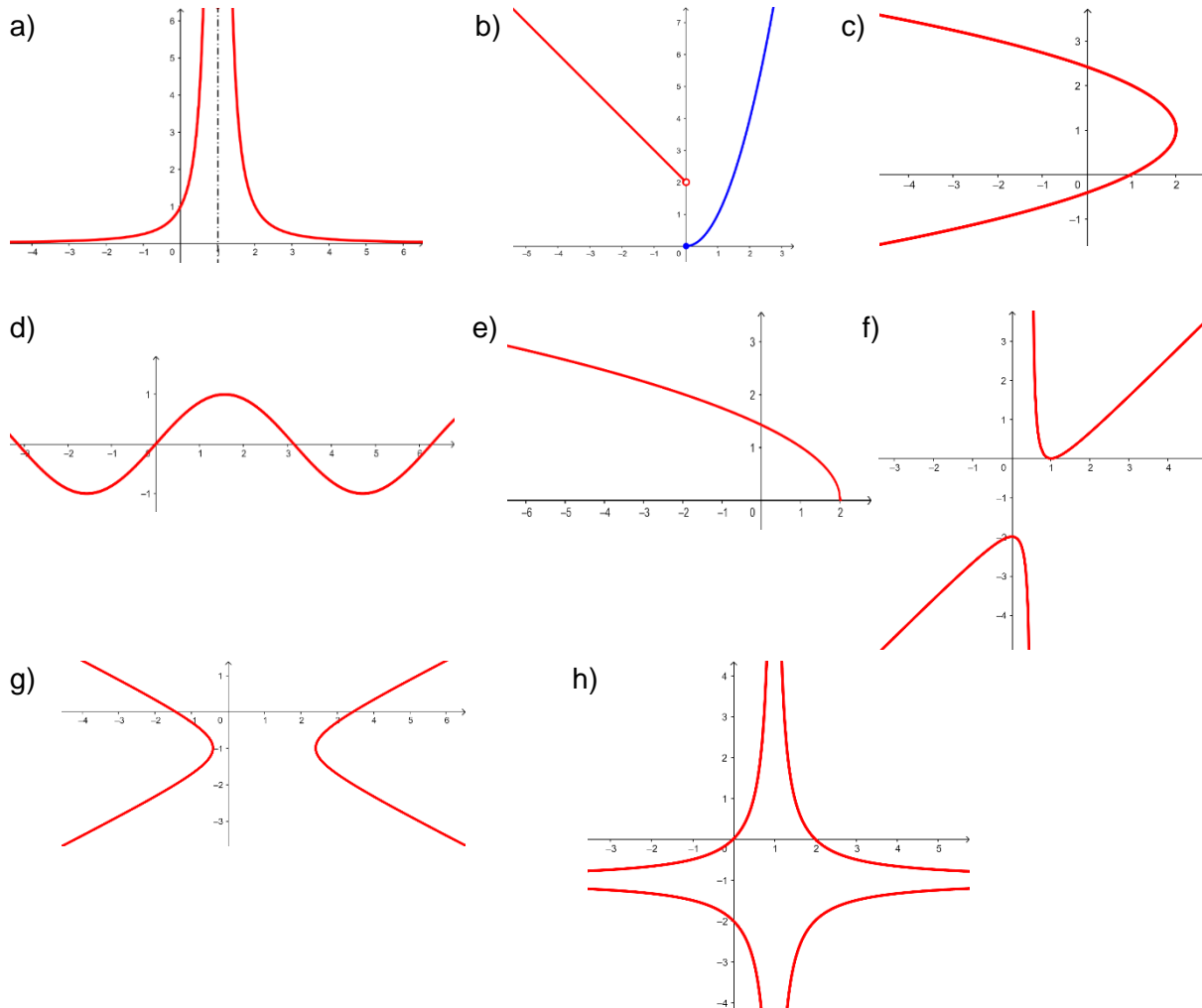


**GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS****UNIDAD 1: FUNCIONES EN UNA VARIABLE REAL****EJERCICIO N° 1:**

Dadas las siguientes gráficas determina cuáles de ellas responde a funciones y cuáles no.

Justifica tu respuesta e indica que método usaste para la determinación.



En las que son funciones, determina: dominio, rango, intersección con los ejes, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y si es biunívoca. Justifica matemáticamente tu razonamiento.

**EJERCICIO N° 2:**

Dadas las siguientes funciones indica que tipo de función es y determina: a) dominio, b) intersección con los ejes coordenados, c) simetría, d) asíntotas verticales y horizontales, e) gráfica, f) rango, g) intervalos de crecimiento/decrecimiento, h) ¿es biunívoca?

Luego grafica con GEOGEBRA y compara los resultados.

1)  $f(x) = x^2 - x + 1$

2)  $g(x) = (x - 1)^3 + 1$

3)  $h(x) = -\frac{3}{2}x + 2$

4)  $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$

5)  $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$

6)  $\omega(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

## PROBLEMA 1:

Se quiere cercar un lote rectangular por los tres lados que no dan al camino. Si la superficie del lote es de  $300\text{m}^2$ , expresa la longitud de la cerca en función del lado contrafrente.

Grafica la situación y determina el dominio de la función.

## EJERCICIO 3.

Considerando el siguiente gráfico, responde, justificando matemáticamente tu razonamiento:

a) Intervalos de crecimiento y

decrecimiento ¿en donde permanece constante la función?

b) ¿hay intersección con el eje  $x$ ? y con el eje  $y$ ?, ¿dónde?

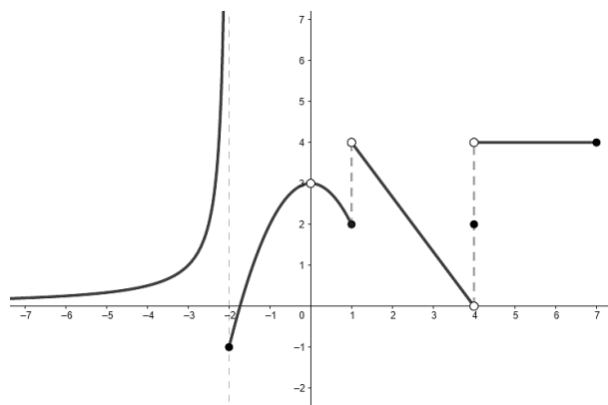
c) ¿existe  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(4)$ ? d) ¿la función presenta paridad?

e) ¿posee asíntotas horizontales? En caso afirmativo indica su ecuación.

f) ¿posee asíntotas verticales? En caso afirmativo indica sus ecuaciones.

g) ¿Existe un valor  $c$  tal que  $f(c) = 2$ ?

h) Con los datos gráficos determina el rango de la función.



## PROBLEMA 2:

Las playas de estacionamiento del centro de San Miguel de Tucumán cobran, para un auto: \$1.000 la primera hora y \$800, cada hora adicional. Expresa la función que interpreta esta transacción.

¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

¿Cuáles son el dominio y el rango de esa función?

¿Cuánto debe pagar un cliente que dejó su auto 2:30hs.?

Grafica en un sistema cartesiano.

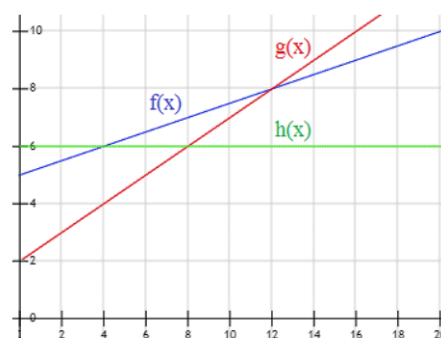
## PROBLEMA 3:

Observando el siguiente gráfico, determina:

a). ¿Para qué valor/es  $f(x) = g(x)$ ?

¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

¿Cuánto valen:  $f(0)$ ;  $g(12)$  y  $h(16)$ ?



¿Existe un valor  $c$  tal que  $f(c)=6$ ?

¿Existe un valor  $c$  tal que  $h(c)=6$ ?

### CUESTIONARIO 1:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

- Una función que tiene por dominio el conjunto  $R$ , ¿Puede tener asíntotas verticales?
- Si una función tiene asíntota horizontal en  $y=3$ , ¿significa que:  $\text{dom } f = R \neq 3$ ?
- Si una función es creciente en todo su dominio, ¿puede tener asíntotas verticales y horizontales?
- Si una función tiene una asíntota vertical en  $x=2$  y es función Par; ¿tiene o no otra asíntota vertical? Si es que la tiene: ¿cuál es su ecuación?
- Si una función que tiene simetría Impar y se sabe que  $f(-3) = 1$ , ¿qué otro punto conozco de  $f$ ?
- ¿Qué modificación experimenta la gráfica  $h(x) = x^2 - 4$  si se la multiplica por  $-2$  y se le resta  $3$ ? Grafica ambas en un mismo sistema cartesiano e indica el dominio y rango de cada una.
- Si  $g(x) = 2x - \frac{3}{2}$ , ¿Cuál es la función  $f(x) = -\frac{1}{2}g + 2$ ?
- Si una función  $f$  tiene simetría Par, ¿ $g = -f$ , tiene simetría?, si la tiene: ¿cuál es?
- Si una función  $f$  tiene simetría Impar, ¿ $h = 2f$ , tiene simetría?, si la tiene: ¿cuál es?
- Si  $f$  es una función y  $(1, -2) \in f$ , ¿puede suceder que  $(1, 0) \in f$ ?

### EJERCICIO N° 4:

Dadas las siguientes funciones indica que tipo de función es y determina: a) dominio, b) intersección con los ejes coordenados, c) simetría, d) asíntotas verticales y horizontales, e) gráfica, f) rango, g) intervalos de crecimiento/decrecimiento, h) ¿es biunívoca?

Luego grafica con GEOGEBRA y compara los resultados.

- |   |  |
|---|--|
| 1) $f(x) = x^{2/3}$   | 2) $g(x) = \sqrt[4]{x+3}$  |
| 3) $h(x) = \frac{2x+2}{x^2-x-2}$                                      | 4) $\varphi(x) = 2 +  x-1 $  |
| 5) $f(x) = \frac{3x-1}{ x+2 }$  | 6) $\omega(x) = \ln \sqrt{2-x}$  |
| 7) $f(x) = \begin{cases} 2-x; & x < 0 \\ x^2; & x \geq 0 \end{cases}$ | 8) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \text{cos } x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ |
| 9) $f(x) = 2^{ x }$   | 10) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$  |

EJERCICIO N° 5:

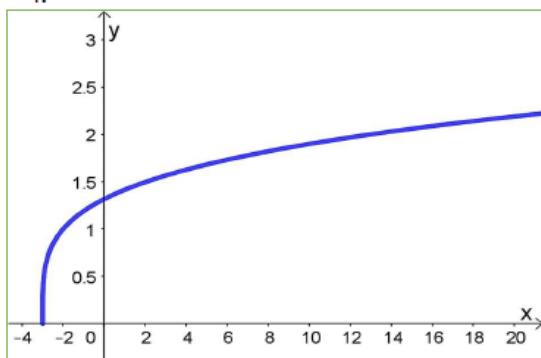
Haz corresponder las funciones con sus gráficas. Justifica matemáticamente tu razonamiento. No utilices recursos tecnológicos.

a)  $g(x) = \sqrt[4]{x+3}$     b)  $f(x) = -\frac{1}{x}$

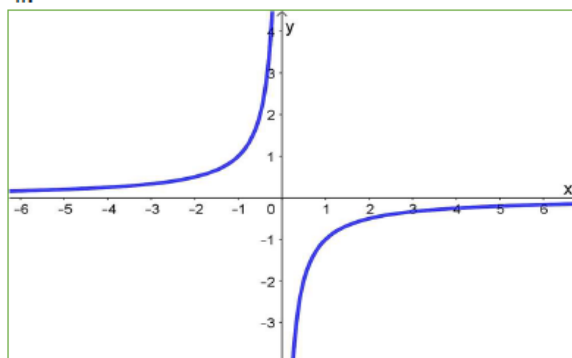
c)  $h(x) = x^5$

d)  $t(x) = 7^x$

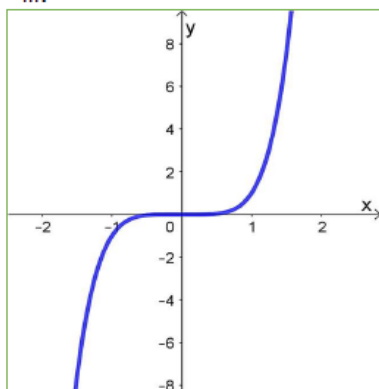
i.



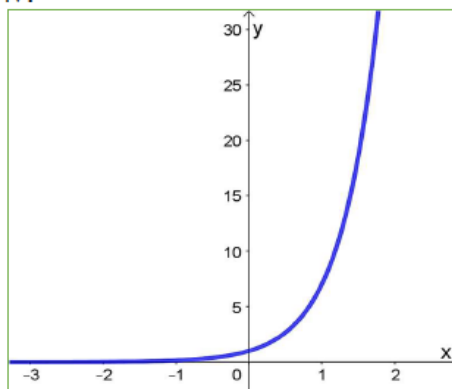
ii.



iii.



iv.



EJERCICIO N° 6:

Dadas las siguientes funciones indica que tipo de función es y determina: a) dominio, b) intersección con los ejes coordenados, c) simetría, d) asíntotas verticales y horizontales, e) gráfica utilizando el GEOGEBRA la función dada y la original (sin variación de parámetros), y compara los resultados. Determina: f) rango y, si es posible: g) período, h) amplitud, i) frecuencia.

1)  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

2)  $g(x) = -2\cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$

3)  $h(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

4)  $\varphi(x) = \sin|x|$

5)  $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6)  $\omega(x) = -\sec(x + \pi)$

7)  $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi + x) & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ \cos(-x) - 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

8)  $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \cot g x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

9)  $f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); & -\pi \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \tan(x); & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

## PROBLEMA 4:

Una colonia de bacterias se comporta en un organismo según se describe en la siguiente

función: 
$$v(t) = \begin{cases} 2^t; & 0 < t \leq 4 \\ -\frac{8}{t-3} + 24; & t > 4 \end{cases}$$

Siendo  $v$ : la cantidad de bacterias en miles, y  $t$ : el tiempo en días.

Determina: a) dominio, b) intersección con los ejes coordenados, c) asíntotas verticales y horizontales (si posee), d) gráfica, asistido por GEOGEBRA, e) rango, f) intervalos de crecimiento/decrecimiento, h) ¿es biunívoca?

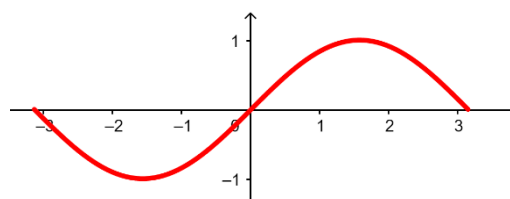
¿A partir de qué día empieza a disminuir la propagación de bacterias?

¿Qué sucede cuándo pasa mucho tiempo?

## EJERCICIO 7:

Analizando la función graficada, determina:

- Intervalos en la que crece y decrece
- ¿es biunívoca?
- Si es necesario restringe su dominio
- Grafica en un mismo sistema cartesiano  $f$  y  $f^{-1}$
- Indica dominio y rango de ambas.



## EJERCICIO 8:

Dadas las siguientes funciones, determina si tienen función inversa. Si no la tienen, restringe convenientemente el dominio para que la tengan y calcula analíticamente  $f^{-1}$ . Determina dominio rango de  $f$  y  $f^{-1}$  y gráficalas en un mismo sistema cartesiano.

- |                       |                                   |                        |
|-----------------------|-----------------------------------|------------------------|
| a). $g(x) = x^2 - 6x$ | b) $f(x) = 3 x^2 - 1 $            | c) $y =  \ln x $       |
| d) $h(x) = \sin(2x)$  | e) $q(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1$ | f) $f(x) = \arcsen(x)$ |

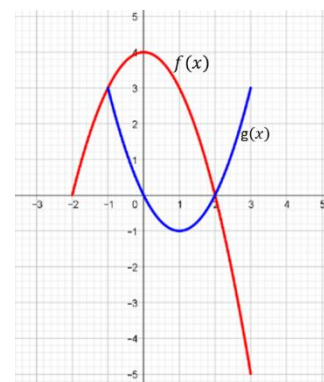
## EJERCICIO 9:

Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , determine si existen las funciones  $(f+g)(x)$ ;  $(f-g)(x)$ ;  $(f \cdot g)(x)$ ;  $(f/g)(x)$  y  $(g/f)(x)$ ; determine sus dominios y calcule, si es posible:  $(f+g)(0)$ ;  $(f - g)(3)$ ;  $(f \cdot g)(1)$ ;  $(f/g)(0)$  y  $(g/f)(-1)$

$$f/g(x) = \sqrt{1-x}; \quad g/g(x) = \sqrt{x+1}$$

## EJERCICIO 10:

Dadas las gráficas de  $f$  y  $g$ , determine si existen las funciones que se indican en cada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible:  $(f+g)(0)$ ;  $(f-g)(3)$ ;  $(f \cdot g)(1)$ ;  $(f/g)(0)$  y  $(g/f)(1)$



## EJERCICIO 11:

Dadas  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  y  $g(x) = -x^2 - x + 1$ , determina, si existe, las funciones que se indican:

$$f + g; f \times g \text{ y } \frac{f}{g}$$

Grafica en el mismo sistema cartesiano

## EJERCICIO 12:

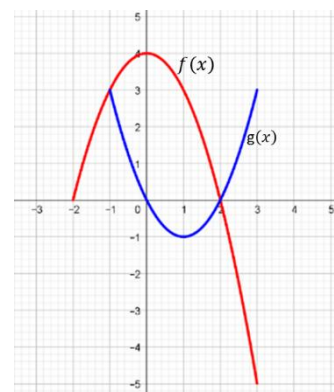
Dadas las funciones  $f = \{(-1, 3); (0, 0); (1, 0); (3, 3)\}$  y  $g = \{(-2, 0); (0, 4); (1, 2); (2, -1); (3, 5)\}$ , determine si existen las funciones que se indican en cada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible:  $(f+g)(0)$ ;  $(f-g)(3)$ ;  $(f \cdot g)(1)$ ;  $(f/g)(0)$  y  $(g/f)(1)$

## EJERCICIO 13:

Dadas  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ;  $g(x) = \sin(x + 1)$ , determine si existen las funciones compuestas  $f[g(x)]$  y  $g[f(x)]$ ; en caso afirmativo determine sus dominios, defínalas y encuentre, si es posible:  $f[g(-1)]$ ,  $f[g(-2)]$ ,  $g[f(0)]$  y  $g[f(\pi)]$ .

## EJERCICIO 14:

Dadas las gráficas de  $g$  y  $f$ , determine si existen las funciones que se indican en cada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible:  $f[g(1)]$ ;  $f[g(-1)]$ ;  $g[f(1)]$ ; y  $g[f(4)]$



## EJERCICIO 15:

Dadas las funciones  $g$  y  $f$ , determine si existen las funciones compuestas  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$  y calcule, si es posible:  $f[g(1)]$ ;  $f[g(-2)]$ ;  $g[f(1)]$ ;  $g[f(4)]$ ;  $f[f(0)]$ ; y  $g[g(2)]$

$$f(x) = \{(-2, 0), (-1, 3), (0, 4), (1, 3), (2, 0), (3, -5)\}$$

$$g(x) = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$$

## CUESTIONARIO 2:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados, respóndelo y justifica matemáticamente tu razonamiento.

- a). ¿Todas las funciones Irracionales tienen por dominio el conjunto  $\mathbf{R}$ ?
- b). La función  $f(x) = x^{2/3}$  ¿es una función exponencial?
- c). Si a una función cualquiera se le suma  $(-3)$ , ¿qué efecto se produce en su gráfica?
- d). Si una función está definida en 3 ramas, ¿significa que su dominio es el conjunto  $\mathbf{R}$ ?
- e). Si tengo una función exponencial de base 2 y cambio su base por el recíproco de ese número ¿qué efecto se produce en su gráfica?
- f). ¿Qué modificación experimenta la gráfica  $h(x) = \log_2 x$  si se la multiplica por -2 y se le suma 3? Grafica ambas en un mismo sistema cartesiano e indica el dominio y rango de cada una.
- g). Si  $g(x) = \left| 2x - \frac{3}{2} \right|$ , ¿Cuál es la función  $f(x) = -g + 2$ ? Grafica ambas en un mismo sistema cartesiano e indica el dominio y rango de cada una.
- h). ¿Qué modificación experimenta la gráfica  $h(x) = \sin x$  si al argumento se le suma  $-\frac{\pi}{2}$ ?  
¿Con la gráfica de qué otra función trigonométrica coincide? Grafica ambas en un mismo sistema cartesiano e indica el dominio y rango de cada una.
- i). Si una función  $f$  tiene simetría Par, ¿es biunívoca?
- j). Si una función  $f$  tiene simetría Impar, ¿es biunívoca?
- k). Si  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que existe  $f - g$ ; ¿cuál es el dominio de  $f - g$ ?
- l). Si  $f$  y  $g$  son dos funciones tales que existe  $f(g)$ ; ¿cuál es el dominio de  $f(g)$ ?
- m). Siempre se verifica que  $f(g) = g(f)$ ?; da un ejemplo en el que sí se verifica lo dicho.

**Algunos ejercicios resueltos:**

EJEMPLO:

Determinar el dominio de la siguiente función:  $f = \left\{ (x, y) / y = \frac{1}{x} \right\}$

Solución:

Evidentemente,  $x$  No puede tomar el valor 0, porque no se puede dividir en 0; entonces:

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

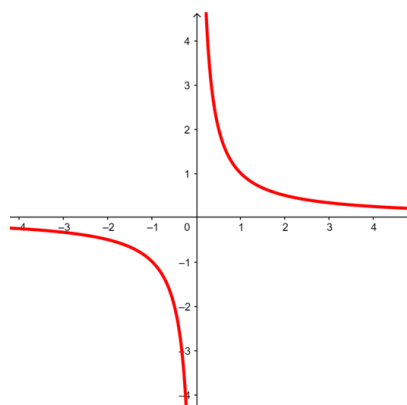
$$\text{dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

La representación gráfica de esta función es:

¿Cuá será su rango o imagen?

$$\text{rgo } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Esta función recibe el nombre de Hipérbola Equilátera y es una función racional que Estudiaremos más adelante.

**PROBLEMA 1:**

El crecimiento de una colonia de bacterias coliformes en un lago responde a  $B(t) = e^{\frac{t}{5}}$ ,

Siendo  $B$ : población de bacterias en millones y  $t$ : tiempo en días.

- Graficar en el sistema cartesiano  $B$
- ¿Es biunívoca? Indica dominio y rango de  $B$
- Determina analíticamente  $B^{-1}$  y expresa dominio y rango.
- ¿Cuántos días deben transcurrir para que la población sea  $B=8$  millones?
- ¿Cuántos días deben transcurrir para que la población sea  $B=1/2$  millón?
- Graficar en el mismo sistema cartesiano  $B$  y  $B^{-1}$ .

Solución:

a)  $B[\text{millones}]$

b).  $\text{dom } B = [0, \infty)$ ;  $\text{rgo } B = [1, \infty)$

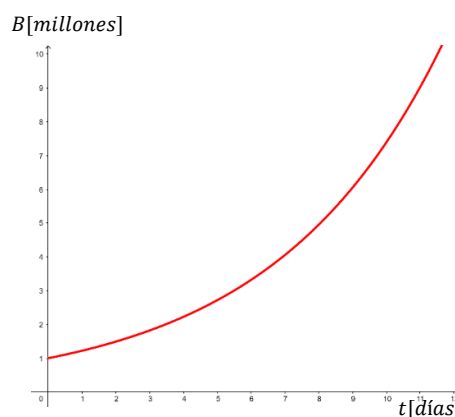
c)  $B(t) = e^{\frac{t}{5}}$ ;  $\frac{t}{5} = \ln B(t)$

$$t = 5 \ln[B(t)]$$

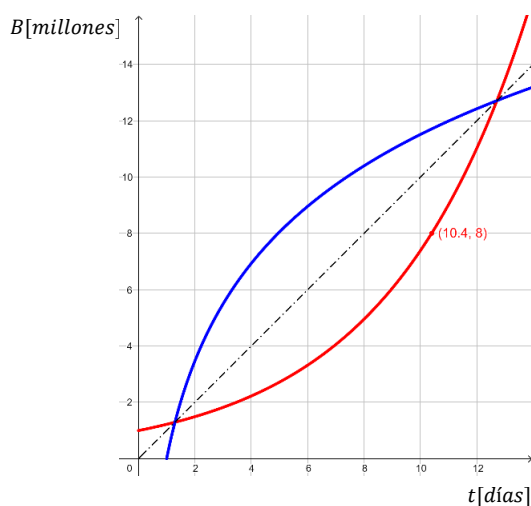
$$B^{-1}(t) = 5 \ln t; \text{ dom } B^{-1} = [1, \infty), \text{rgo } B^{-1} = [0, \infty)$$

d). Si  $B=8$  millones;  $t = 5 \ln(8) = 10,4$  días

e). Si  $B=1/2$  millón; No existe, puesto que  $B \geq 1$  millón





**EJERCICIO:**

Dadas la siguiente función indica que tipo de función es y determina: a) dominio, b) intersección con los ejes coordenados, c) simetría, d) asíntotas verticales y horizontales, e) gráfica, f) rango y, si es posible: g) período, h) amplitud, i) frecuencia

Luego grafica con GEOGEBRA y compara los resultados.

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(\pi + x) & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \text{sen}(-x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

*Solución:*

a). Dominio:

$$\text{dom } f = (-\pi, 0] \cup (0, \infty)$$

$$\text{dom } f = (-\pi, \infty)$$

b). Intersecciones con los ejes coordenados:

$$\cap \text{ con eje } x \Rightarrow y = 0$$

$$\text{sen}(\pi + x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -\pi \end{cases}$$

$$\cap \text{ con eje } x: P(0,0) \text{ y } P(-\pi, 0)$$

$$\text{sen}(-x) = 0 \Rightarrow -x = \begin{cases} 0 \nexists \text{ al dom de } \text{sen}(-x) \\ \pi \\ 2\pi \end{cases}$$

$$\cap \text{ con eje } x: P(\pi, 0); P(2\pi, 0)$$

$$\cap \text{ con eje } y \Rightarrow x = 0$$

$$0 \exists \text{ al dom de } \text{sen}(\pi + x) \therefore P(0, 0)$$

c). Simetría:

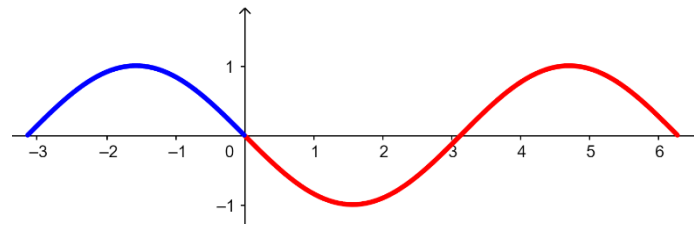
Es evidente que en este caso no existe simetría, porque los dominios parciales de cada rama no son simétricos.

d). Asíntotas:

Ambas ramas corresponden a la función trigonométrica seno, que no tiene asíntotas; por lo que *f* No tiene asíntotas.

e). Gráfica:

Ayudándonos con el GEOGEBRA, tenemos:



f).  $\text{rgo } f = [-1, 1]$

Observando la gráfica:

g). Período:  $T = 2\pi$

h) Amplitud:  $A = 1$

i) Frecuencia: Como las gráficas de ambas ramas se continúan una de otra, vemos que su frecuencia es:  $B = 1$