UNIDAD 7 – INTEGRAL DEFINIDA

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Alemania, 1826 ; Italia, 1866

Realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general.

*La integral definida para el cálculo de áreas planas es la generalización y formalización de un método de cálculo muy antiguo, atribuido a **Euxodo** de Cnido (390-337 a.C.), quien fue discípulo de Platón. Posteriormente Arquímedes (287-212 a.C.), fue quien le dio el nombre de Método Exhaustivo (o de agotamiento).*

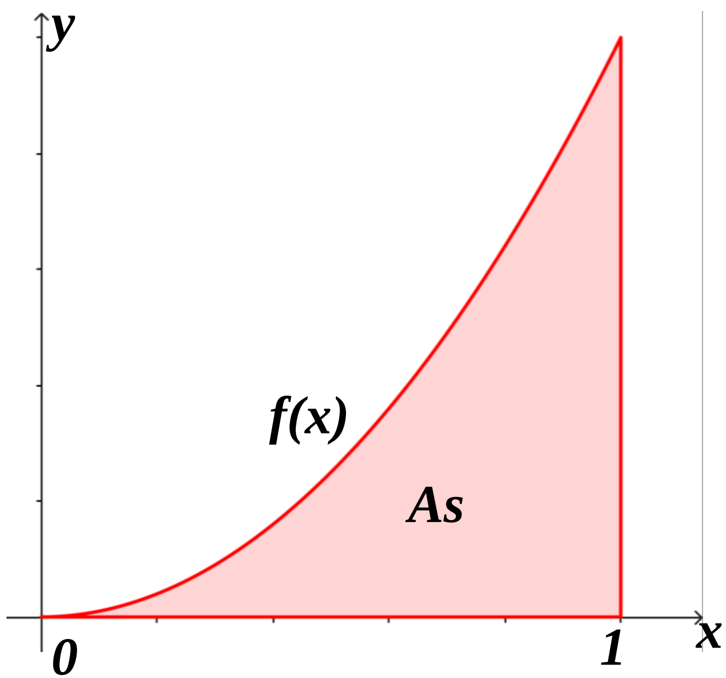
*Ya en el siglo XVII, Newton y Leibniz unificaron el cálculo diferencial con el integral, y en el siglo XIX, después de las definiciones de Bolzano, Cauchy y Weierstrass, entre otros, **Riemann** expresa la **Suma de Riemann** y la **Integral Definida**, que permite calcular áreas de figuras planas e innumerables aplicaciones más.*

El problema del Área

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

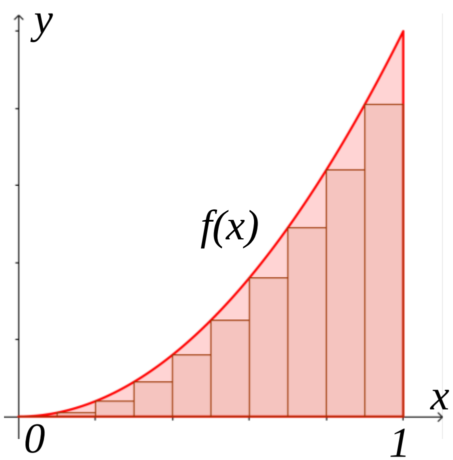
El problema de encontrar el área de una superficie irregular fue una obsesión de la humanidad por milenios, dada utilidad de ésta.

Si consideramos una superficie plana ***As***, que está limitada superiormente por una curva de ecuación ***y=f(x)***, inferiormente por el eje ***OX*** y lateralmente por los segmentos verticales ***x=a*** y ***x=b***.

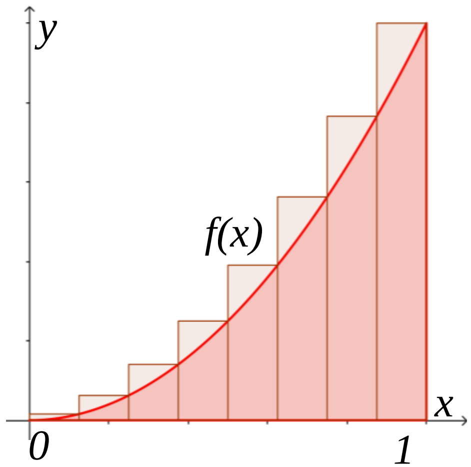


En el ejemplo de la figura, la función es $f: f(x) = x^2$ y los límites laterales son: $x = 0$ y $x = 1$

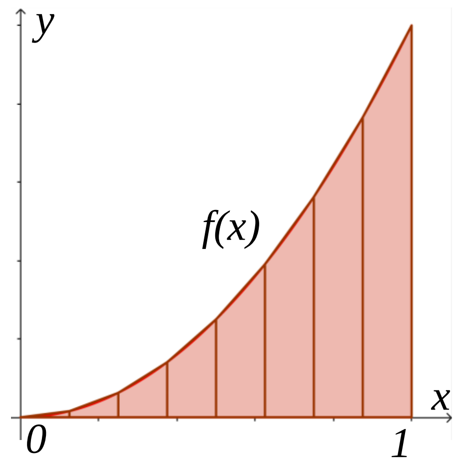
Podemos usar varios caminos. Uno es dividir el área en rectángulos y luego sumar las áreas parciales. O dividirla en trapecios y sumar las áreas parciales, etc.



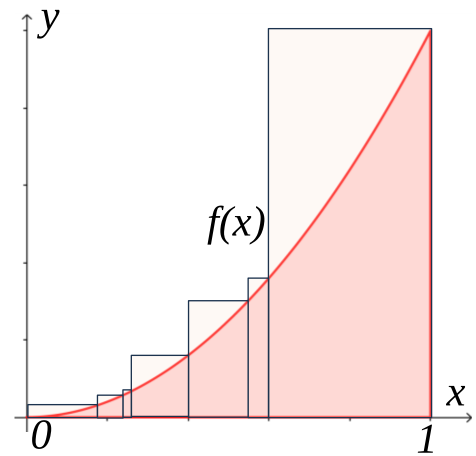
Cálculo por defecto



Cálculo por exceso



Cálculo con trapecios



Rectángulos con distintos anchos de base

Evidentemente la suma de las áreas parciales en cada caso nos dará un valor distinto, aunque ninguno coincidirá exactamente con el área buscada.

Por cuestiones de simplicidad de cálculos vamos a elegir una:

Partición regular.

Se logra dividiendo un intervalo genérico $[a, b]$ en n subinervalos iguales:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{En nuestro ejemplo:} \quad \Delta x = \frac{1}{n}$$

Suma de Riemann

Es necesario hacer algunas aclaraciones.

1. El intervalo de interés no tiene por qué ser [0, 1], sino en general, $[a, b]$.
2. La función no tiene por qué ser monótona en el intervalo considerado.
3. La función podría tomar tanto valores positivos como negativos (y ceros también, claro). Esto plantea la cuestión de que ya no podría seguir hablándose propiamente de un área, porque al multiplicar la base por la “altura” de los rectángulos el producto sería negativo.
4. El intervalo $[a, b]$ no tiene necesariamente que subdividirse en subintervalos de igual amplitud. Esto puede ser conveniente desde el punto de vista práctico para facilitar los cálculos, pero no es obligatorio desde el punto de vista teórico.
5. El punto en que se evalúa la función (es decir, el que determina la “altura” del rectángulo) no tiene necesariamente que ser uno de los puntos de frontera, ni el punto medio, sino que puede ser cualquier punto del subintervalo.

Proceso de construcción de la suma de Riemann.

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos delimitados por:

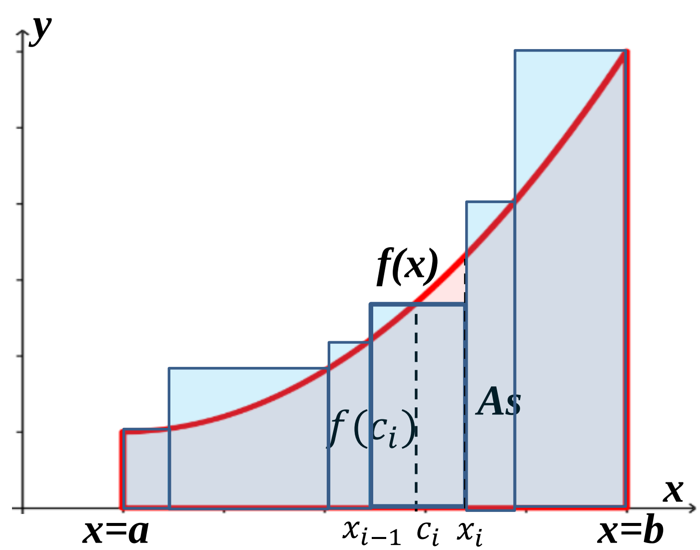
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

La amplitud de cada subintervalo se puede denotar como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para i = 1, 2, …, n. Esto se conoce como una **partición** del intervalo $[a, b]$.

Si todos los subintervalos tienen la misma amplitud, se la denomina **partición regular**, como en nuestro caso.

En caso contrario, la amplitud del mayor subintervalo (es decir, el mayor Δx_i) se denomina norma de la partición y se denota $\|\mathcal{P}\|$.

Elección de los puntos en los subintervalos: En cada subintervalo $[x_{i-1} - x_i]$, se selecciona un punto c_i. Este punto puede ser cualquiera dentro del subintervalo y es donde se evaluará la función.



Suma de Riemann: Es la suma de los productos de las amplitudes de los subintervalos por la ordenada del correspondiente punto en que se evalúa la función.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

INTEGRAL DEFINIDA

Definición:

La integral definida de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$ es el límite de la correspondiente suma de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero, si ese límite existe.

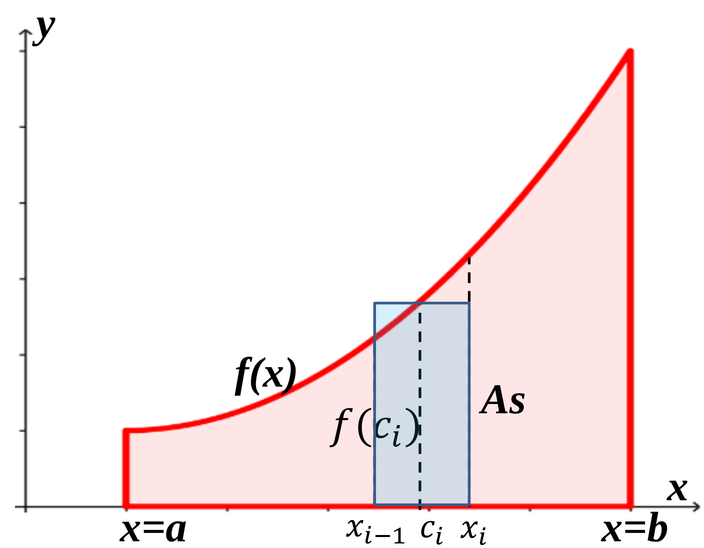
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$ si ese límite existe.

El símbolo $\int$ lo definió Leibniz y es una deformación de la letra S, asociada a la suma de infinitos términos, cada uno dado por: $f\left(c_i\right) \cdot \Delta x_i$

A ***f(x)*** se lo denomina ***función integrando***

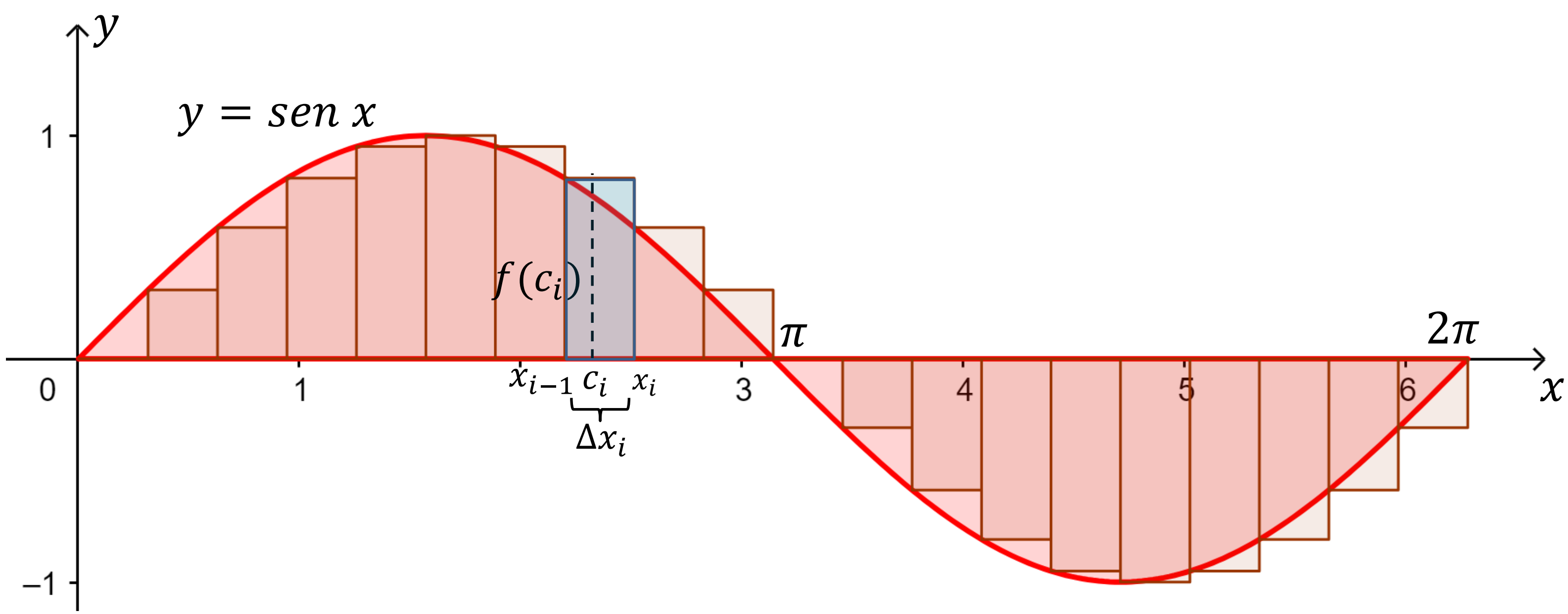
El símbolo ***dx*** es la ***diferencial de la variable x***, representa la base de cada rectángulo

Los valores ***x=a*** y ***x=b*** se llaman ***límites de integración: inferior y superior, respectivamente***, e indican el intervalo en que se calcula la integral.



La ***Integral Definida***, si existe, es un número real, que no necesariamente representa el resultado de un área.

EJEMPLO:



En este ejemplo hay parte de la función que es positiva y otra parte negativa.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} sen(x) \cdot dx$$

Veremos más adelante que el resultado de esta integral es igual a cero, lo que evidentemente no representa el área sombreada.

TEOREMAS DEL CÁLCULO INTEGRAL

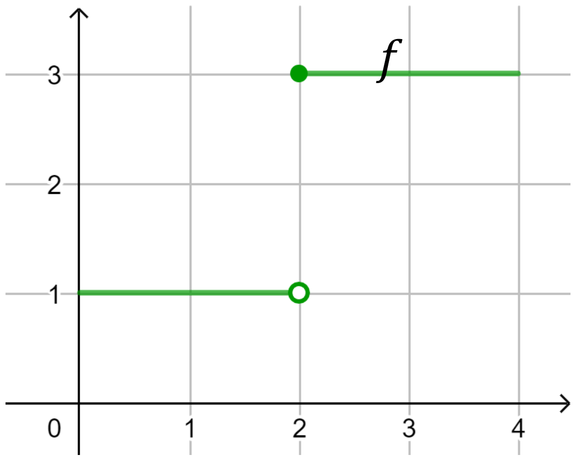
Teoremas sobre la existencia de la integral definida

Continuidad implica integrabilidad

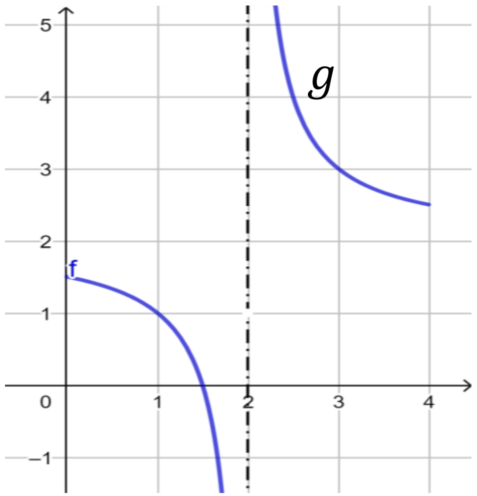
Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en ese intervalo.

Condición suficiente para la integrabilidad

Si f es una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en ese intervalo, entonces f es integrable en $[a, b]$.



La función f es discontinua en $x=2$, pero está acotada en $[0, 4]$; por lo que es integrable en $[0, 4]$.



La función g presenta una asíntota vertical en $x=2$; por lo tanto, No es integrable en $[0, 4]$.

Linealidad de la integral definida

Si ***f*** y ***g*** son integrables en ***[a, b]*** y ***C***, ***K*** son dos constantes reales, entonces:

$$\int_a^b [C \cdot f(x) + K \cdot g(x)]dx = C \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx + K \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx$$

La integral definida de una constante por una función es igual a la constante por la integral definida de la función.

La integral definida de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas de cada una de ellas.

Definiciones y teoremas sobre los límites de integración

Igualdad de límites:

Si ***a*** es un punto del dominio de ***f***, entonces:

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

Evidentemente si los límites de integración coinciden, el rectángulo tiene base ***cero.***

Inversión de límites:

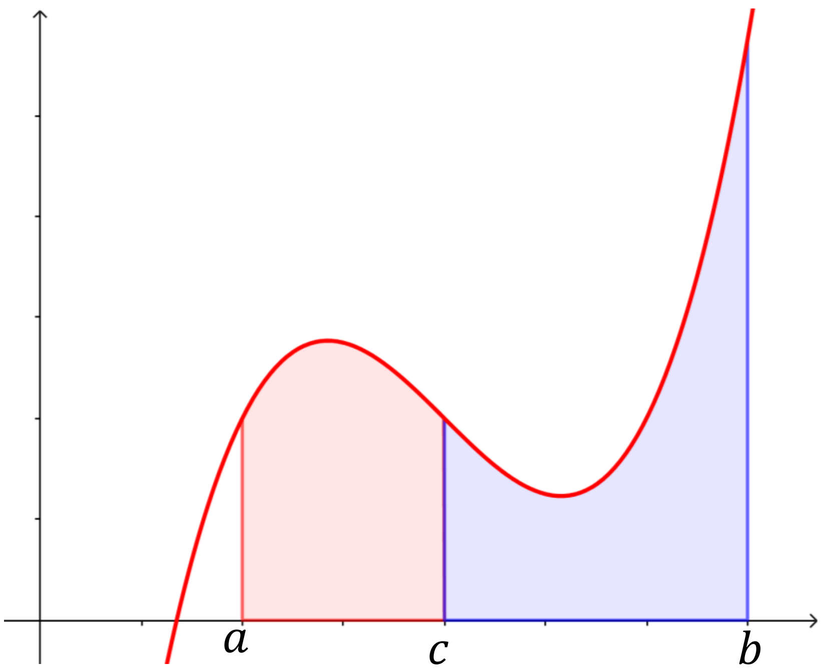
Si ***f*** es integrable en ***[a, b]***, entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx$$

Propiedad aditiva del intervalo de integración:

Si ***f*** es integrable en ***[a, b]*** que contiene a los números ***a, b*** y ***c***, siendo $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \equiv \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$



Integral definida constante:

Para cualquier $k \in \mathbb{R}$, se cumple:

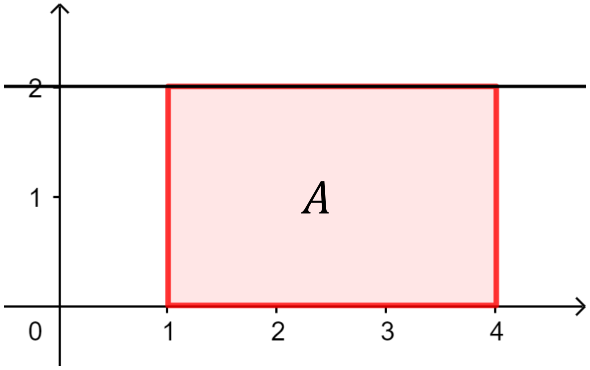
$$\int_a^b k \cdot dx = k \cdot \int_a^b dx = k \cdot (b - a)$$

Si $k > 0$, el valor de la integral definida coincide con el área encerrada entre la recta horizontal $y = k; el\ eje\ OX\ y\ los\ parámetros\ x = a\ y\ x = b.$

EJEMLO:

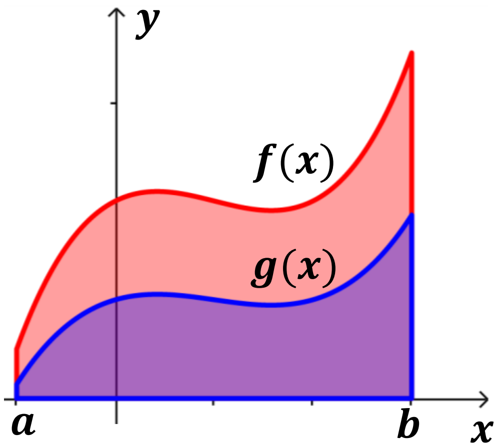
$$\int_1^4 2 \cdot dx = 2 \cdot \int_1^4 dx = 2 \cdot (4 - 1)$$

$$\boldsymbol{\int_1^4 2 \cdot dx = 6 = A}$$



Propiedades de comparación:

Si f y g son dos funciones integrables en $[a, b]$, se cumple:



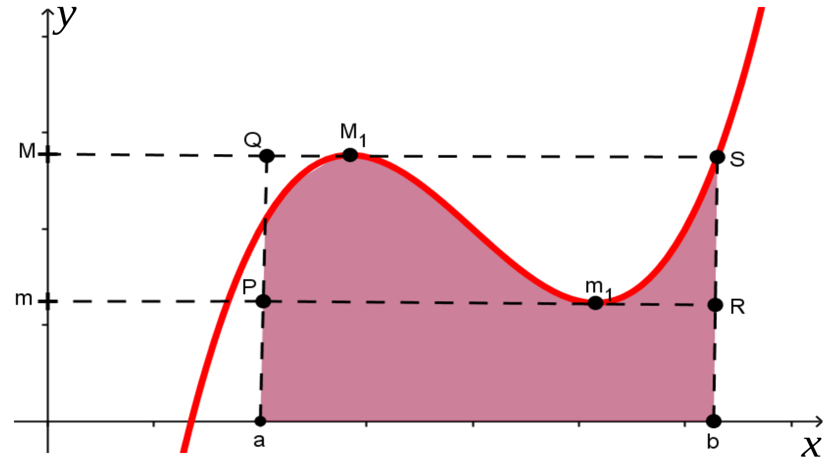
1). Si $\forall x \in [a, b]$ se cumple que $f(x) \geq g(x)$,

entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \geq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2). Si $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [a, b]$ se cumple que $m \leq f(x) \leq M$, entonces:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \cdot (b-a)$$



Esta propiedad nos indica que el ***área*** del ***rectángulo aPRb*** es menor o a lo sumo igual que el ***área*** limitada superiormente por la curva, inferiormente por el eje ***OX*** y lateralmente por los segmentos ***x=a*** y ***x=b*** (***rectanguloide***) y esta a su vez, es menor o a lo sumo igual que el ***área*** del ***rectángulo aQSb***.

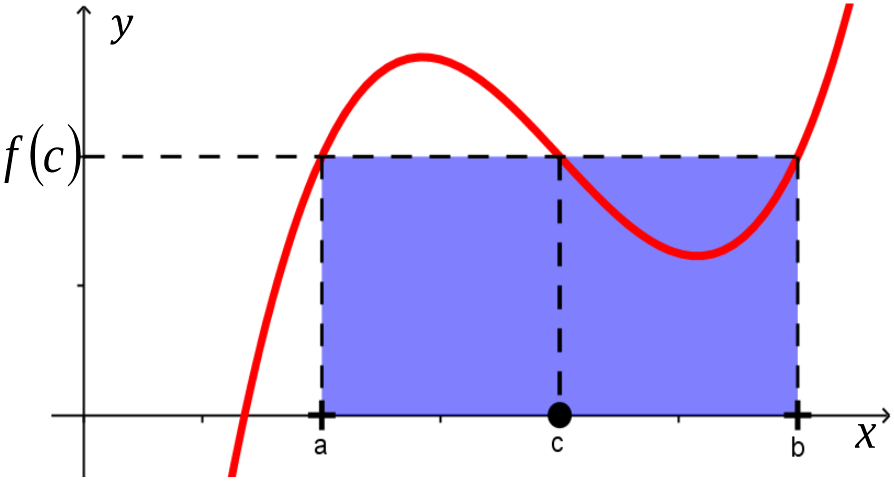
Teorema del valor medio del cálculo integral (TVM)

Si una ***f*** es continua en el intervalo ***[a, b]***, entonces existe al menos un número ***c*** en el intervalo ***[a, b]***, tal que:

$$\boldsymbol{f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) \cdot dx}$$

Interpretación geométrica

El teorema indica que existe un rectángulo de base ***b-a*** y altura ***f(c)***, con ***c*** perteneciente a ***[a, b]***, cuya área es equivalente a la superficie limitada superiormente por la gráfica de ***f***, el eje ***OX*** y las rectas ***x=a*** y ***x=b***



Importante:

La función ***f*** debe ser continua en el intervalo ***[a, b]***, no solo integrable.

Primitiva o antiderivada de una función

Se dice que F es una primitiva o antiderivada de una función f en un intervalo I *si y sólo sí*:

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I};\ \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

EJEMPLO:

Si recordamos la función analizada al principio de esta unidad: $f(x) = x^2$ veremos que:

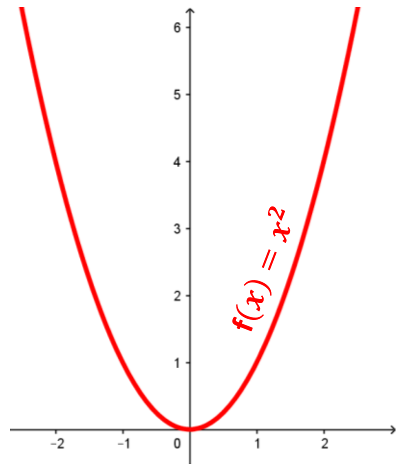
$F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de f ya que: $F'(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{3}$

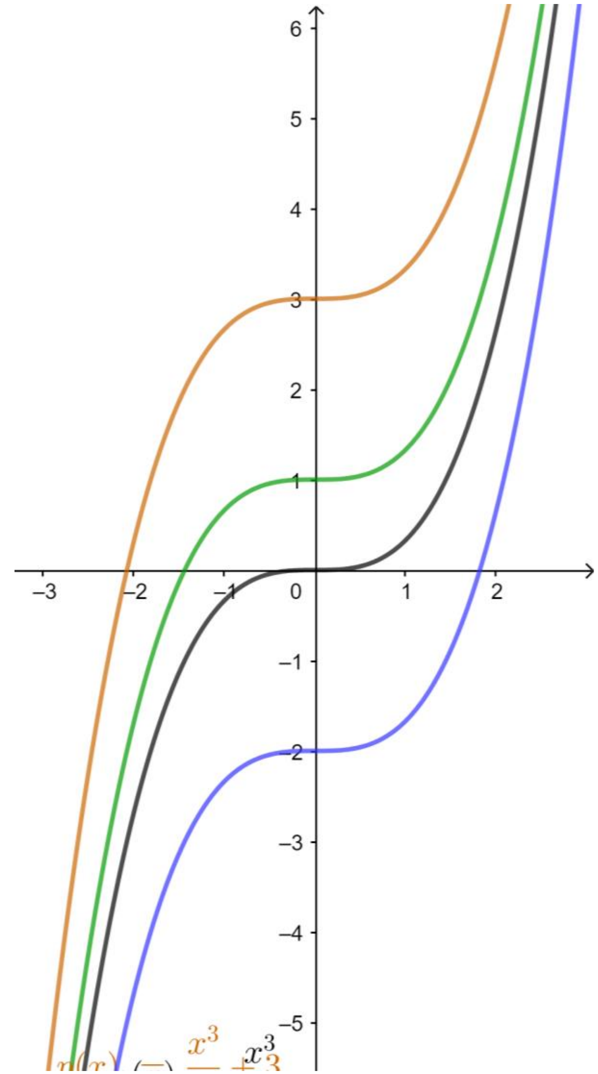
$\boldsymbol{F'(x) = x^2 = f(x)}$

$G(x) = \frac{x^3}{3} - 2 \qquad G'(x) = x^2$

$H(x) = \frac{x^3}{3} + 1 \qquad H'(x) = x^2$

$J(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \qquad J'(x) = x^2$





Y así sucesivamente.

Primitiva General de una función

$Si: F(x)$ Es primitiva de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\boldsymbol{G(x) = F(x) + C}}$ Es la ***Primitiva General*** de $\boldsymbol{f}$

Teorema de la antiderivada de la función nula

Si $F'(x) = 0$, entonces $F(x) = K; \; K \in \mathbb{R}$

Familia de antiderivadas de una función

Si: $F(x)$ y $\mathrm{G(x)}$ son dos antiderivadas de f en un intervalo I, entonces en ese intervalo se cumple: $F(x) - G(x) = C$

Mg. Ing. Gustavo MENOCAL

TABLA DE INTEGRALES

Para facilitar los cálculos se construyó una Tabla de funciones integrales:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, con\; n \neq -1$

3) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$

4) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

5) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, con a > 0 y a \neq 1$

6) $\int senx \cdot dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x \cdot dx = senx + C$

8) $\int \sec^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = tgx + C$

9) $\int co\sec^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{sen^2 x} \cdot dx = -cotgx + C$

10) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = arctgx + C$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = arcsenx + C$

12) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arccos x + C$

13) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \mathrm{arcsec}\, x + C$

14) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \mathrm{arc}\, c\, o \sec x + C$

15) $\int tgx \cdot \sec x \cdot dx = \sec x + C$

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea ***f(x)*** una función continua en ***[a, b]***, y sea ***F*** la función definida para valores $x \in [a, b]$ por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt\,; \quad a \leq x \leq b}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

Atención:

A diferencia de lo tratado hasta ahora; en esta integral el límite superior de integración es **variable**. Como usamos x para el límite superior de integración, debemos utilizar otro nombre para la variable de integración. En este caso usamos ***t***

El teorema establece la relación inversa entre la derivada y la integral. En términos simples, nos dice que la derivada de una función integral es igual a la función original.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (Regla de Barrow)

Sea ***f(x)*** una función continua en ***[a, b]***, entonces: $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)}$

Donde F es cualquier función tal que: $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$

Demostración:

Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo: $G(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt\,;\quad G'(x) = f(x)$

$G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $F(x)+C$, es la primitiva general de $f(x)$; por lo tanto:

$$F(x) - G(x) = C \quad en\ [a, b]$$

$F(x) - \int_a^x f(t) \cdot dt = C$ De donde: $\int_a^x f(t) \cdot dt = F(x) - C$ (1)

Las primitivas F y G son continuas en $[a, b]$

Particularizando (1) en a, tenemos: $\int_a^a f(t) \cdot dt = F(a) - C = 0 \quad \therefore F(a) = C$

Particularizando (1) en b, tenemos: $\int_a^b f(t) \cdot dt = F(b) - C \therefore \int_a^b f(t) \cdot dt = F(b) - \overbrace{F(a)}^{C}$

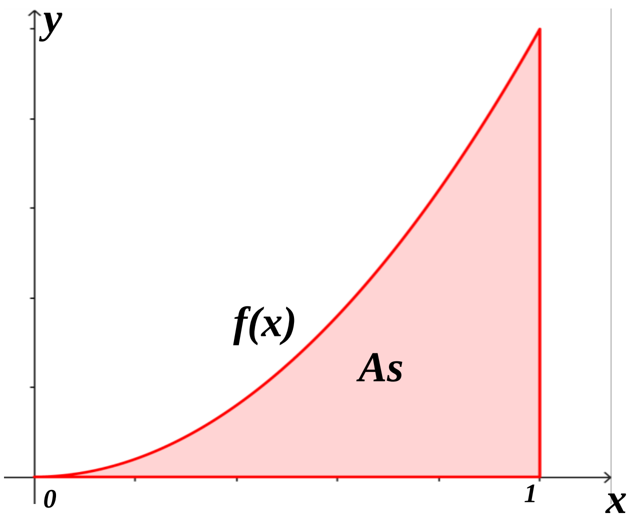
Y particularizando (1) en t=x: $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$ Queda demostrado.

EJEMPLOS: Hallar el valor de las siguientes integrales definidas

$$a)\ \int_0^1 x^2 \cdot dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^2 \cdot dx = \frac{1}{3}}$$



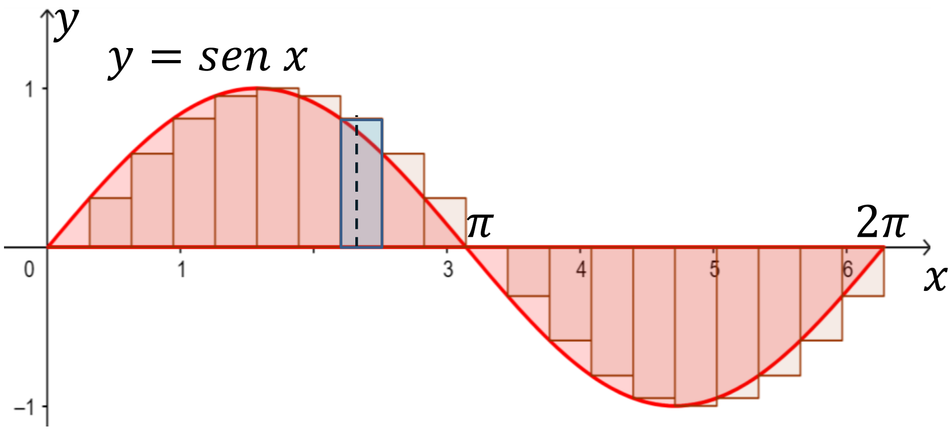
Es la función del primer ejemplo; como f es positiva en el intervalo de integración, el valor de la integral definida coincide con el área limitada superiormente por la curva de ecuación $f(x) = x^2$, inferiormente por el eje x y lateralmente por los segmentos $x = 0$ y $x = 1$.

$$b)\int_0^{2\pi} sen\ x \cdot dx =$$

$$\int \operatorname{sen} x \cdot dx = -cos\ x + C$$

$$\int_0^{2\pi} sen\ x \cdot dx = [-cos\ x]_0^{2\pi} =$$

$$= -cos\ 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1$$



$$\boldsymbol{\int_0^{2\pi} sen\ x \cdot dx = 0}$$

Recordemos que la función $f(x) = sen\ x$, tiene una parte positiva y otra negativa, en el intervalo de integración; por lo que el valor de la integral definida No coincide con el área encerrada por la curva.