UNIDAD 1: *FUNCIONES EN UNA VARIABLE REAL*

Las funciones matemáticas sirven para describir fenómenos de la naturaleza o de las ciencias. En ellas, siempre una cantidad depende de otra.

Desde la antigüedad (los babilonios y los egipcios), manejaban el concepto de relacionar variables para describir fenómenos: el régimen de lluvias se relaciona con las cosechas, etc.

Ya en el siglo XVII, Galileo hace un importante acercamiento al concepto de función, mediante relaciones matemáticas explícitas. Luego, con los avances de Leibnitz, Bernoullí, Euler, D´alembert y Lgrange, entre otros, se formaliza la expresión analítica de funciones.

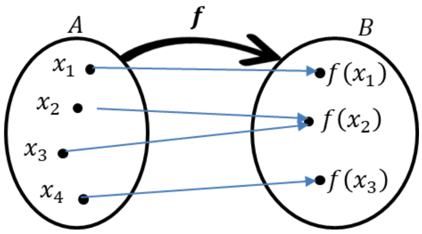
A nosotros nos interesa particularmente los aportes de René Descartes, con la Geometría Analítica, que permitió representar gráficas de funciones.

En esta asignatura trabajaremos con funciones en una variable real y veremos los principales tipos de funciones que aparecen en el Cálculo, describiendo cómo se utilizan para modelar matemáticamente fenómenos en la ingeniería y en el mundo real.

Interpretaciones de funciones de una variable real:

*Una función, que podemos llamar **f**, es una regla que asigna a cada elemento **x** de un conjunto **A** uno y sólo un elemento, llamado **y=f(x)** de otro conjunto **B**.*

A este tipo de representación se les suele llamar diagrama de flechas o diagrama de Venn.



*Al conjunto **A** se lo denomina **Dominio** y al conjunto **B**, se lo denomina **Rango** o **Imagen** de la función.*

También se la puede interpretar como una máquina:

*Nosotros, en general, trabajaremos con funciones de reales en reales; vale decir que tanto los elementos del conjunto **A** como los de **B** son **números Reales**.*

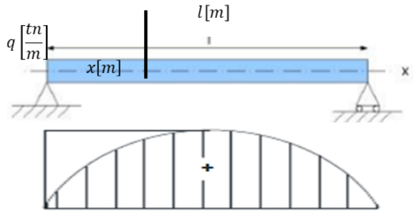
Existen distintas formas de representar funciones, veamos algunas de las más utilizadas:

Distintas formas de representar funciones de una variable real:

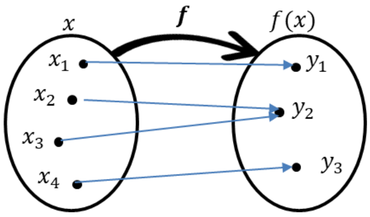
Verbalmente: *El perímetro L de una circunferencia depende de su radio r. El perímetro de la circunferencia es igual la doble de su radio multiplicado por π.*

Algebraicamente:

$$Mf_i = -qx^2 + q \cdot \frac{l}{2} \cdot x$$



Visualmente mediante ***Diagrama de Venn***. Sirven para representar funciones de variable discreta y otras.

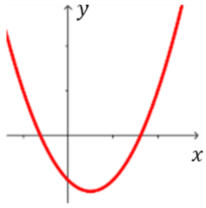


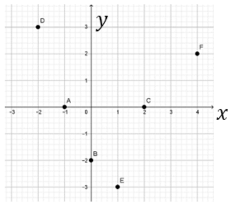
Numéricamente: El crecimiento en Argentina de los contagiados ***C***, en miles, por ***COVID 19***, en marzo del 2.020, dependió del tiempo ***t [semanas]***, según se muestra en la siguiente tabla.

Por ejemplo: $C(3) \approx 4.000$

$semana$	$Contagios$ $en\ miles$
0	0
1	1
2	2
3	4
4	8

Visualmente en el ***Sistema Cartesiano***. Sirve para representar funciones de variable continua y discreta.





Este tipo de representación de funciones nos interesa particularmente.

Antes de abordar el estudio de funciones, es conveniente definir algunos conceptos fundamentales que nos serán útiles en este camino.

En primer lugar, veremos la forma más utilizada en esta asignatura de representaciones gráficas de funciones, que es el sistema cartesiano.

*René Descartes (1596-1650). La Haye, Francia. Estudió en el colegio jesuita La Flèche, luego Derecho en la Universidad de Poitiers. Según la propia confesión de Descartes, las enseñanzas del colegio le decepcionaron, debido a las numerosas lagunas que presentaban los saberes recibidos, a excepción de las matemáticas, en donde veía la posibilidad de encontrar un verdadero saber. Esto lo lleva a poner en duda todo el conocimiento adquirido hasta entonces, definiendo su Primera verdad: "**pienso, luego existo**" ("cogito, sum"), "incluso nuestros propios sentidos no engañan"; y para ello desarrolló.*

*El **Método Cartesiano**, que puede aplicarse a diferentes temas o cuestiones, y solo posee cuatro reglas importantes, que son:*

*1. **Regla de la evidencia**, no se admite nada como verdadero a menos que sea evidente.*
*2. **Regla del análisis**, dividir en diferentes partes el problema, para resolver más fácilmente aquello que se está estudiando*
*3. **Regla de la síntesis**, una vez que se estudian todas las partes, se hace una síntesis, una puesta en común de todo lo que hemos obtenido estudiando las diferentes partes.*
*4. **Regla de las comprobaciones**, al terminar la síntesis, enumerar todo y revisarlo por si se omite algo.*

Nosotros conocemos el conjunto de los números reales y su representación gráfica en la recta real.

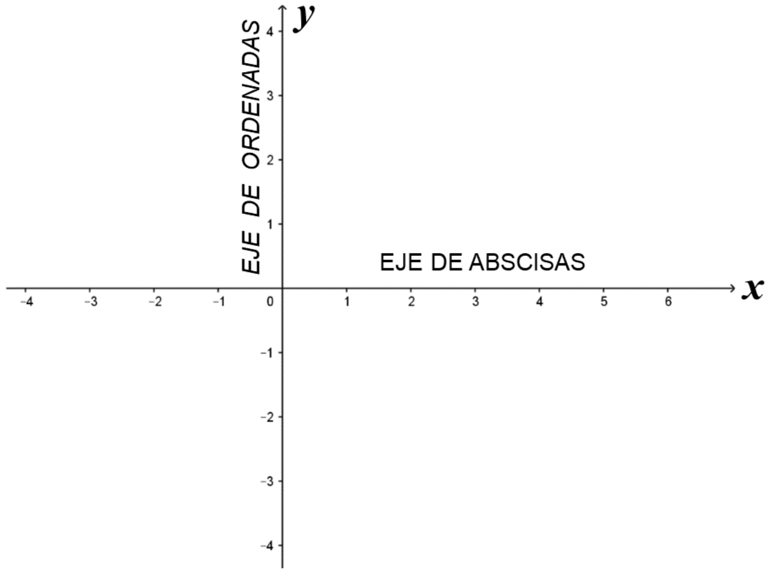
El gran avance que planteó Descartes (en la parte que nos atañe), fue disponer dos ejes reales en forma ortogonal; esto significa que son perpendiculares y que coinciden ambos en sus orígenes. Tal disposición genera un plano real.

EL PLANO REAL

Es el sistema de representación gráficas de relaciones y funciones en $\Re^2$

Sistema de Ejes Coordenados Cartesianos:

Conjunto	2 Ejes Reales: x e y	siguen un orden 1º: x y 2º: y	lo definió René Descartes



En este sistema, ***cada punto del plano*** se puede representar por ***un único Par Ordenado de Números Reales*** y viceversa.

Par Ordenado de Números Reales: (x, y)

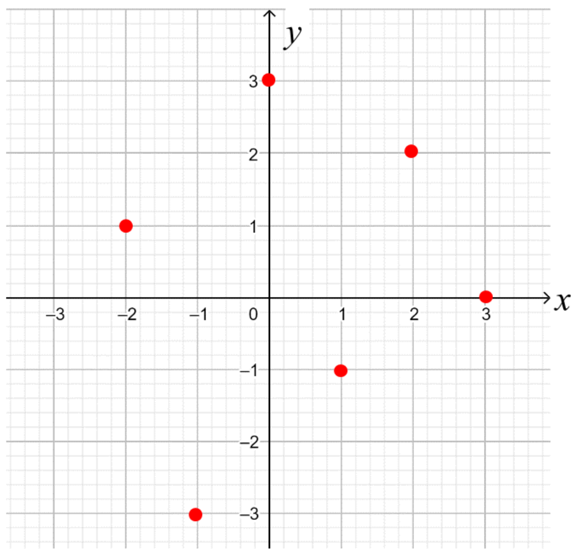
Dos elementos	Siguen un orden	Tanto x como y son R

$(x, y) \Longleftrightarrow$ ***PUNTO EN EL PLANO REAL***

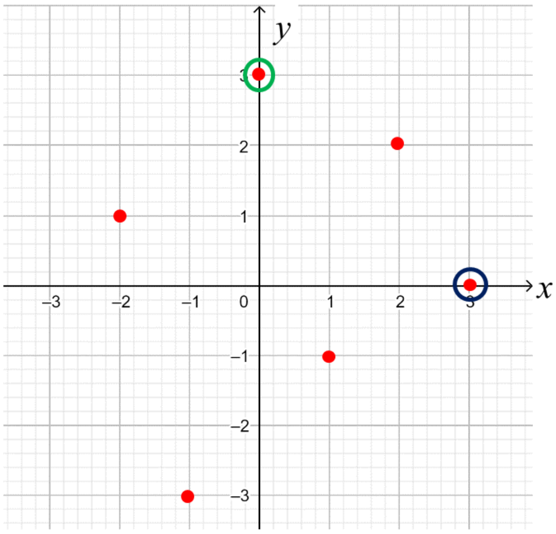
En general: $(x, y) \neq (y, x)$

EJEMPLO:

Representar en el Sistema cartesiano los siguientes Pares Ordenados: $(1, -1); (0, 3); (2, 2); (-1, -3); (3, 0); (-2, 1)$.

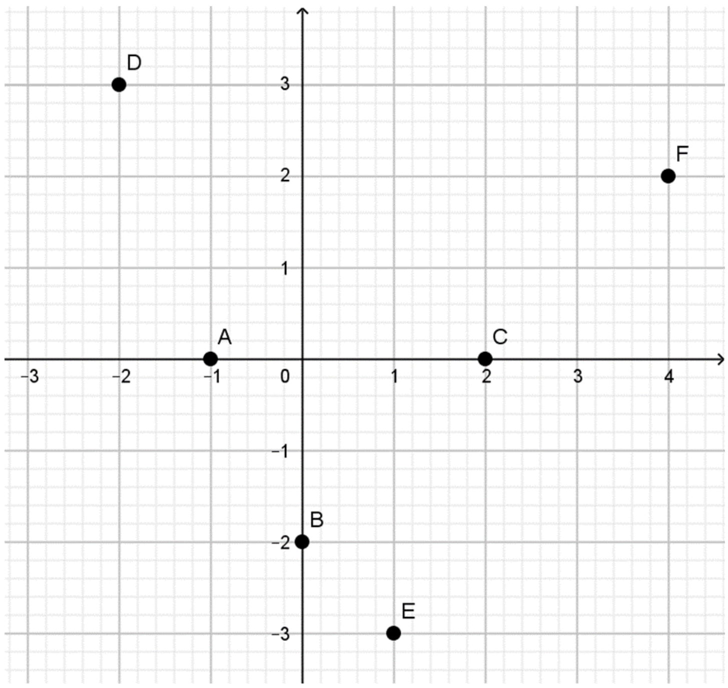


Ahora nos preguntemos: ¿el par $(0, 3)$ es igual al par $(3, 0)$?



Evidentemente no. Esto ratifica la consideración que, en general: ***(x, y)≠(y, x)***

A continuación, traten de anotar los pares ordenados que se correspondan con cada punto del plano de la siguiente figura:



Ecuaciones e Inecuaciones en dos variables reales

Son igualdades o desigualdades (respectivamente), entre expresiones algebraicas.

$x + +2y \cdot x^2 = -7y^3$; $y \leq 3x - 2$; $\frac{y-2}{x^3+3} = 2x - 1$; $y > sen\ x$; $y = \ln\frac{x}{4}$; etc.

Las inecuaciones fueron desarrolladas en el nivel medio de enseñanza y en el curso introductorio de Matemática.

Aunque las funciones también las estudiaron en el nivel secundario, consideramos necesario hacer una revisión de las más aplicadas en nuestra asignatura y en ingeniería.

RELACIONES EN UNA VARIABLE REAL

Definición: ***relación es todo conjunto de pares ordenados de números reales:***

$$f = \{(x,\ y)\}$$

El Dominio de una función es el conjunto de valores reales que puede tomar la variable independiente "x" para que la variable dependiente "y" (el resultado o valor numérico de la función), sea un número real.

El Rango o Imagen de una función es el conjunto de valores reales que toma la variable dependiente "y" cuando la variable independiente "x" pertenece al dominio de f.

Sin embargo, no todas las relaciones representan funciones.

A nosotros nos interesa un cierto tipo de relación que se denomina función:

FUNCIÓN EN UNA VARIABLE REAL

Definición: *es todo conjunto, no vacío, de pares ordenados de números reales tal que a* ***cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango o imagen:***

$$f = \{(x, y) / \forall x \in dom f, \exists\ solo\ un\ y \in rgo\ f\ \}$$

De manera que no todas las relaciones de reales en reales son funciones.

Notaciones:

Existen muchas notaciones de funciones de una variable real, entre las que enunciamos acá las más usadas en ingeniería:

$$f = \{(x, y)/y = f(x)\};\ \ f = \{(x, f(x))\};\ \ y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

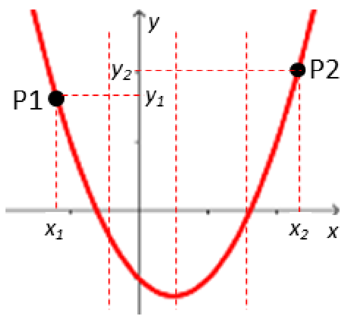
x: *variable independiente*

y: *variable dependiente; (depende de x)*

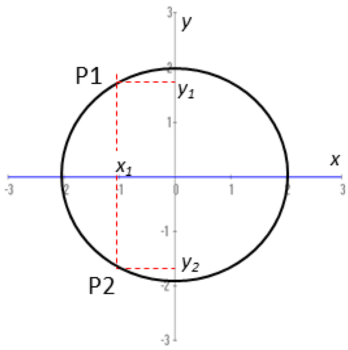
Criterio de la regla vertical:

Dada una representación gráfica en el sistema cartesiano, si desplazamos sobre ella una ***regla vertical*** y ésta la ***corta en no más de un punto***; entonces la gráfica representa una ***función***; mientras que si la corta en más de un punto representa una relación.

EJEMPLOS:



Es función



NO es función

Dominio de una función: es el conjunto de valores reales que puede tomar la variable independiente "$\boldsymbol{x}$" para que la variable dependiente "$\boldsymbol{y}$" (el resultado o valor numérico de la función) sea un número real.

Rango o Imagen de una función: es el conjunto de valores reales que toma la variable dependiente "$\boldsymbol{y}$" cundo "$\boldsymbol{x}$" pertenece al dominio de la función.

EJEMPLO:

Determinar el dominio de la siguiente función: $f = \left\{(x,\ y)/y = \dfrac{1}{x}\right\}$

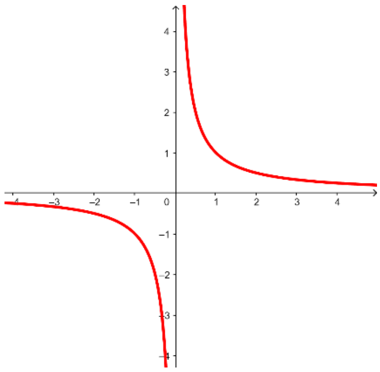
Solución:

Evidentemente, x No puede tomar el valor 0, porque no se puede dividir en 0; entonces:

$dom\, f$

$dom\, f = (-\infty,\ 0)$

La representación gráfica de esta función es:



¿Cuá será su rango o imagen?

$$rgo\, f = R - \{0\}$$

Esta función recibe el nombre de Hipérbola y es una función racional que estudiaremos más adelante.

Existen muchos tipos de funciones de una variable real, de las cuales veremos a continuación las que más usaremos en esta asignatura, en las asignaturas de aplicación en las carreras y en la profesión de ingeniero.

Seguidamente se presenta un cuadro resumen de estas funciones y continuación, se darán las definiciones y los elementos más importantes de cada una.

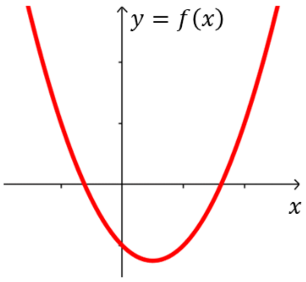
CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Funciones de variable continua

Funciones de variable discreta

Funciones Explícitas

EJEMPLO:
$y = 3x^2 - 2x + 5$



Funciones Implícitas
y
Ecuaciones Implícitas

EJEMPLO:
$x - 2y = sen(x + y)$

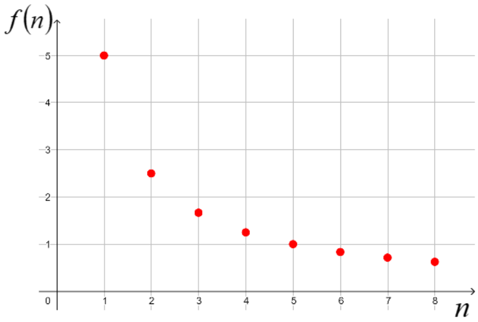
No siempre son funciones.

$f = \{(-1,3); (0,0); (1,0); (3,3)\}$

Entre ellas:

Sucesiones

EJEMPLO:
$f(n) = \{a_n\}; n \in N$



ESTUDIO DE FUNCIONES

En esta asignatura trabajaremos con funciones en una variable real: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se hace necesario determinar ciertas propiedades que ayudan a bosquejar sus gráficas y realizar aplicaciones o adecuaciones a los fenómenos físicos, químicos, etc. del cual trate el estudio modelizado por estas.

A continuación, veremos los conceptos más relevantes del análisis de funciones continuas de una variable real.

DOMINIO:

Ya lo definimos. Es, tal vez, el concepto fundamental del estudio de funciones.

INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS

Intersección con el eje OX:

La gráfica de una función puede tener infinitas, algunas, una o ninguna intersección con el eje x, según sea su característica.

Analíticamente se pueden determinar estos valore ya que responden a la ecuación: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Se simboliza de la siguiente manera:

$$\cap \; con \; eje \; x \; / \; f(x) = 0$$

Intersección con el eje OY:

A diferencia de las intersecciones con el eje x, la gráfica de una función puede tener a lo sumo una intersección con el eje y.

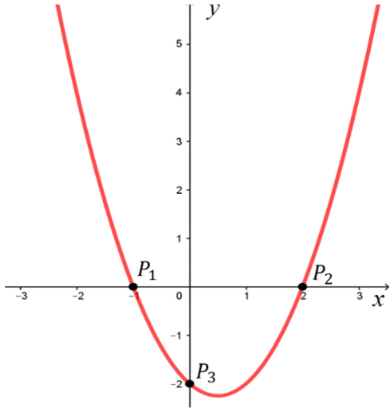
Determinamos este valor (si lo tiene), mediante la ecuación: $\boldsymbol{x = 0}$

Se simboliza de la siguiente manera:

$$\cap\ con\ eje\ y\ /\ x = 0$$

EJEMPLO:

Analicemos la gráfica de la siguiente función:



La gráfica de f tiene 2 intersecciones con el eje x:

$P_1(-1,\ 0)$ y $P_2(2,\ 0)$

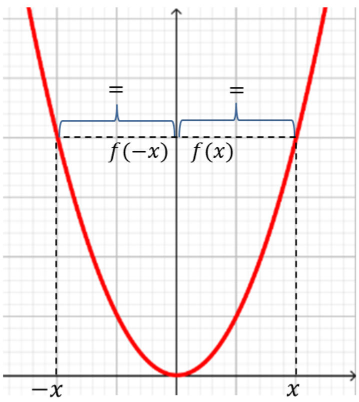
Y tiene 1 intersección con el eje y: $P_3(0,\ -2)$

PARIDAD (simetría):

Algunas funciones presentan simetrías, que facilitan la realización de su gráfica. En este apartado veremos dos tipos de paridad o simetría que pueden presentarse:

Una función es **PAR**, si:

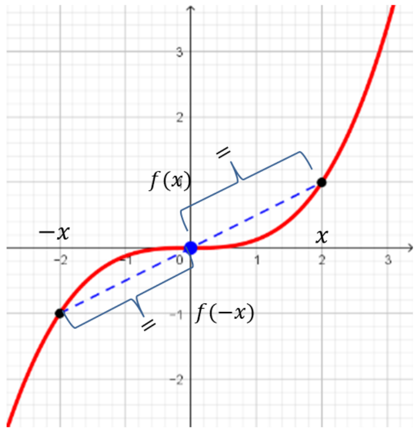
$\forall x \in dom\ f;\ \boldsymbol{f(x) = f(-x)}$



Si f es ***PAR***, su gráfica es ***simétrica*** respecto al eje ***OY***

Una función es **IMPAR**, si:

$\forall x \in dom\ f;\ \boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$



Si f es ***IMPAR***, su gráfica es ***simétrica*** respecto al origen de Coordenadas ***P(0, 0)***

Si una función no cumple ninguna de estas propiedades, se dice que No tiene simetría.

Es obvio que, si una función presenta simetría par, no puede ser impar y viceversa.

FUNCIÓN UNO A UNO O BIUNÍVOCA

También llamada función Inyectiva o Uno a uno.

Definición:

Una función ***f*** es uno a uno ***si y sólo si*** a dos elementos distintos cualesquiera de su dominio, le corresponde dos imágenes distintas.

O bien; no existen dos pares ordenados con igual imagen.

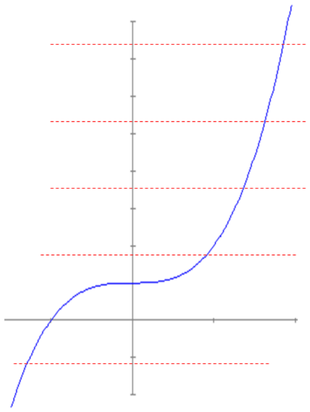
Esto se verifica cuando: $\forall x_1, x_2 \in dom\ f, con\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Existe un método para determinar si la gráfica de una función es o no uno a uno, llamado:

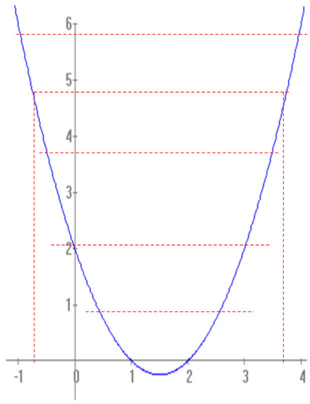
Criterio de la regla horizontal

Se trata de desplazar verticalmente una regla horizontal a lo largo de la gráfica, si la regla intersecta a la gráfica en NO más de un punto, responde a una función biunívoca. Mientras que si la regla corta en más de un punto a la gráfica, esa función no es inyectiva.

Criterio de la regla horizontal



Es uno a uno o Biunívoca

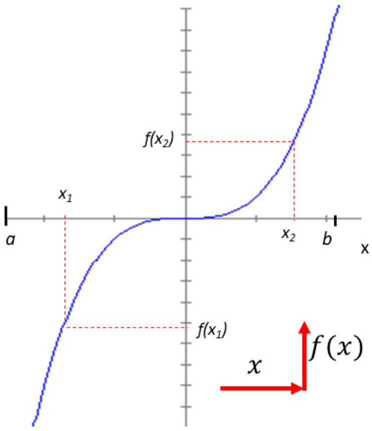


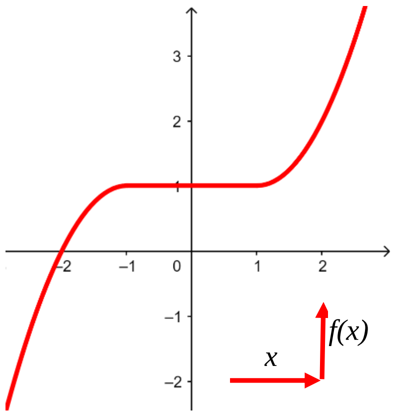
No es uno a uno

FUNCIONES MONÓTONAS: CRECIENTE Y DECRECIENTE

Definición: **Función monótona creciente**

Una función ***f*** es ***monótona creciente*** en un intervalo abierto ***(a, b)***, incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores ***x₁*** y ***x₂*** ∈ a ese intervalo se verifica que si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



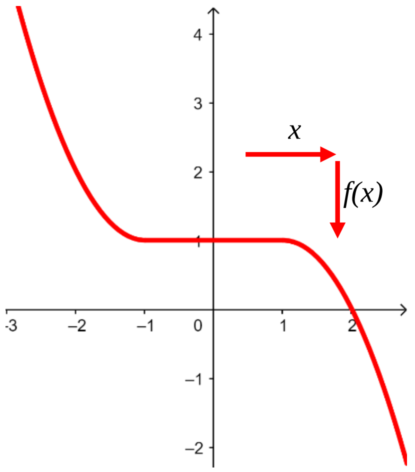


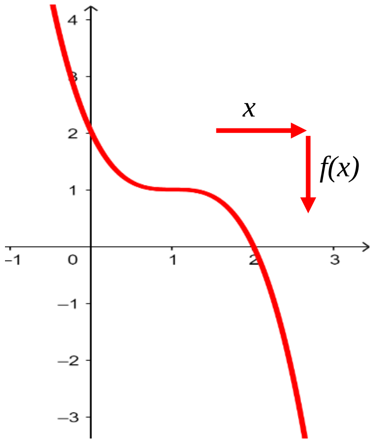
Es decir, una función es monótona creciente cuando no decrece en el intervalo estudiado.

Definición: **Función monótona decreciente**

Una función ***f*** es ***monótona decreciente*** en un intervalo abierto ***(a, b)***, incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores x_1 y $x_2 \in$ a ese intervalo se verifica que si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$





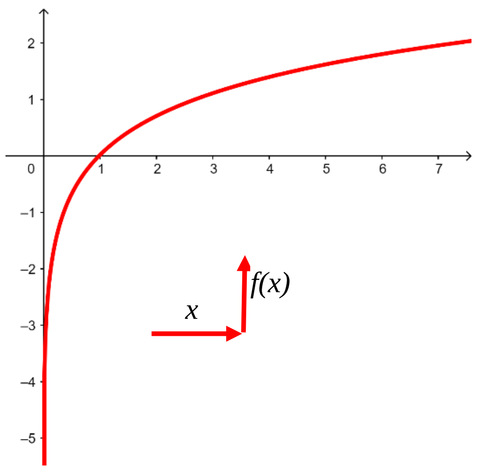
Es decir, una función es monótona decreciente cuando no crece en el intervalo estudiado.

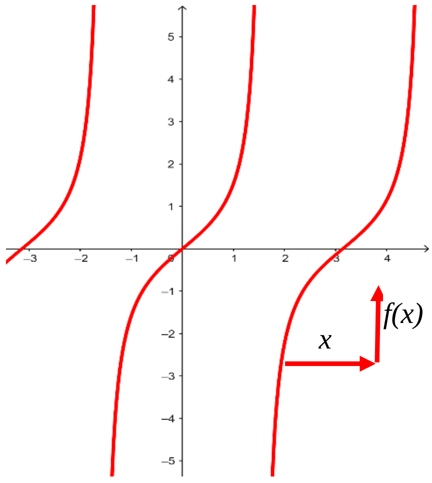
FUNCIONES ESTRICTAMENTE: CRECIENTES Y DECRECIENTES

Definición: **Función estrictamente creciente**

Una función ***f*** es ***estrictamente creciente*** en un intervalo abierto ***(a, b)***, incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores x_1 y $x_2 \in$ a ese intervalo se verifica que si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



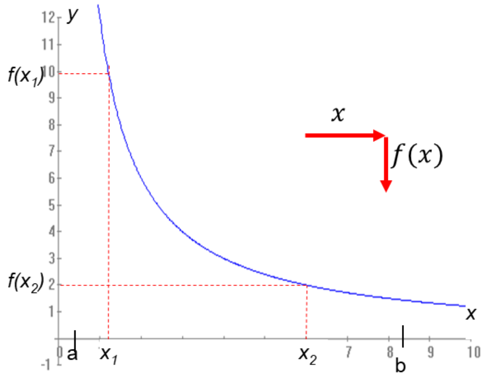


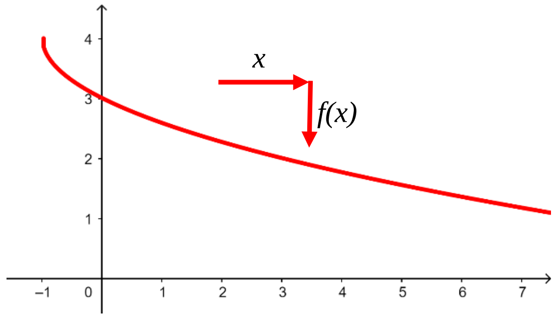
Es decir, una función es estrictamente creciente cuando crece en el intervalo estudiado.

Definición: **Función estrictamente decreciente**

Una función ***f*** es ***estrictamente creciente*** en un intervalo abierto ***(a, b)***, incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores x_1 y x_2 $\in$ a ese intervalo se verifica que si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



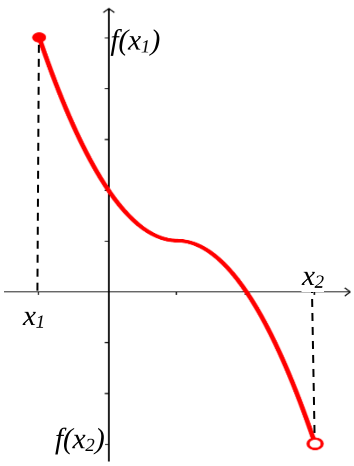


Es decir, una función es estrictamente decreciente cuando decrece en el intervalo estudiado.

De manera similar se define función monótona creciente o decreciente en un intervalo cerrado ***[a, b]***; en un intervalo semiabierto a izquierda ***(a, b]*** y en un intervalo semiabierto a derecha ***[a, b)***, incluidos en el ***dom f***.

Por ejemplo: Una función ***f*** es ***monótona decreciente*** en un intervalo semiabierto a izquierda ***[a, b)*** incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores x_1 y x_2 pertenecientes a ese intervalo se verifica que si:

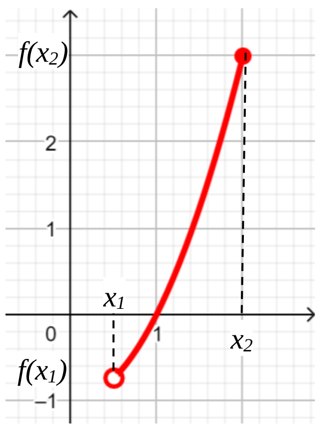
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Y también se define función estrictamente creciente o decreciente en un intervalo cerrado ***[a, b]***; en un intervalo semiabierto a izquierda ***(a, b]*** y en un intervalo semiabierto a derecha ***[a, b)***, incluidos en el ***dom f***.

Por ejemplo: Una función ***f*** es ***estrictamente creciente*** en un intervalo semiabierto a izquierda ***(a, b]*** incluido en el ***dom f***, si para todo par de valores x_1 y x_2 pertenecientes a ese intervalo se verifica que si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



ASÍNTOTAS:

Una asíntota es una recta (aunque las hay curvilíneas), a la cual la curva, gráfica de una función, se le acerca indefinidamente sin cortarla ni hacerse tangente. Ya que las asíntotas son rectas, pueden tener cualquier posición; nosotros nos interesaremos por:

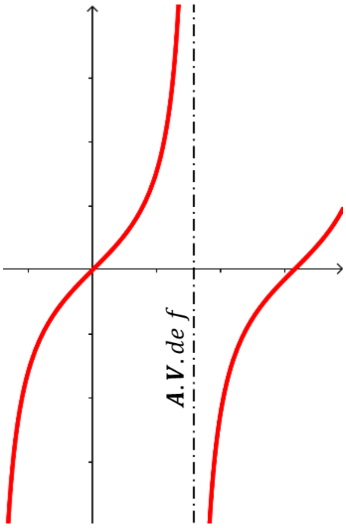
Asíntota Vertical (AV):

$Si\ cuando\ x \to a, con\ a \in \Re,\ f$

$\boldsymbol{Significa\ que\ x = a\ es\ A.V.de\ f}$

Obviamente: $\boldsymbol{a} \notin dom\ \boldsymbol{f}$

Una función puede tener infinitas, algunas, una o ninguna asíntota vertical, según sea su característica.



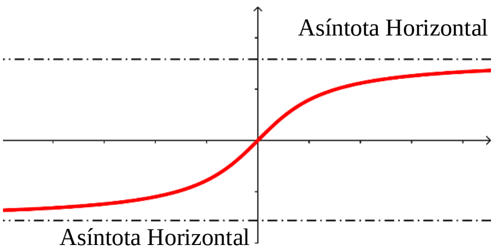
Asíntota Horizontal (AH):

$Si\ cuando\ x \to \pm\infty,\ f \to k con\ a \in \Re$

$\boldsymbol{Significa\ que\ y = k\ es\ A.H.de\ f}$

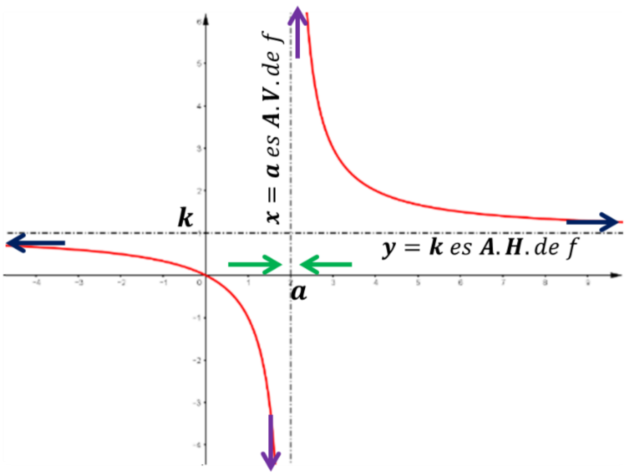
Como se observa en este gráfico, una función puede

tener hasta dos A.H., lo que no es muy frecuente.



Estas propiedades serán mejor justificadas cuando abordemos el estudio de límites de funciones.

Sintetizando:



Luego de calcular estas propiedades, para graficar la función con cierta precisión, a veces es necesario confeccionar una tabla de valores. La tabla de valores no debe ser muy extensa, salvo que la precisión del problema lo requiera; a lo sumo debe tener 3 o 4 valores adicionales a lo ya encontrados en estos cálculos.

Existen muchos softwares que grafican funciones; entre estos, elegimos el GEOGEBRA, ya que es un programa gratuito para educación, de fácil manejo y gran versatilidad.

Entre las ventajas de usar este u otro software, es que nos permite comparar la gráfica dibujada en base a nuestros cálculos con la del sistema y verificar el trabajo. Para ello, hay que suministrarle correctamente los datos al programa para conseguir una gráfica correcta.

En un ANEXO del aula virtual, encontrarán un instructivo sencillo en formato PP.

Con la gráfica dibujada, es más sencillo determinar el rango, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y si es o no biunívoca, de manera visual.

Si bien a estas tres últimas propiedades se las puede determinar analíticamente, no nos parece necesario.

EJEMPLO:

Dada la función: $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ se pide calcular: el domino, las intersecciones con los ejes coordenados, simetría, asíntotas.

Con los datos obtenidos, graficar la función en un sistema cartesiano y determinar: su rango, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y si es o no inyectiva.

Solución:

Determinación del dominio:

La única condición que debe cumplir la variable independiente x para que $f(x)$ exista, es que el denominador sea distinto de ***0***, entonces, se plantea la siguiente inecuación:

$$x^2 - 9 \neq 0$$

Despejando: $$x^2 \neq 9$$

Operando: $$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{9}$$

$$|x| \neq 3; \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Entonces el dominio de la función es:

$$Dom\, f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

También puede ser expresado de la siguiente manera:

$$Dom\, f = R - \{-3, 3\}$$

Intersecciones con ejes:

$$\cap\, OX: \frac{x}{x^2 - 9} = 0$$

Esta ecuación se satisface para: $x = 0$; como $0 \in dom\, f$; P$(0,\ 0)$ es el único punto de intersección con el eje de las abscisas que tiene esta función.

$$\cap\, OY: x = 0$$

Se repite el valor anterior: P$(0,\ 0)$ es el punto de intersección con el eje de las ordenadas.

Simetría:

Si *f* es Par, se verifica: $f(x) = f(-x) \forall x \in dom\, f$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 9}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 - 9}$$

$$f(-x) \neq f(x);\ \ \textbf{f}\text{ No es Par}$$

Si *f* es impar, se verifica: $f(x) = -f(-x) \forall x \in dom\, f$

$$-f(-x) = \cancel{-}\frac{\cancel{-}x}{x^2 - 9}$$

$$-f(-x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

$f(x) = -f(-x)$; ***f es IMPAR****. Tiene simetría respecto del (0, 0).*

Asíntotas:

La función podría tener asíntotas verticales en los valores que no pertenecen al dominio y que se ubican en los "bordes abiertos" de los intervalos de dominio.

Asíntotas Verticales A.V.:

Debemos estudiar en x=-*3* y en x=*3*, puesto que no pertenecen al dominio de la función y además, se encuentran al "borde" de los intervalos de dominio.

Estudiemos primero si x=*3* es asíntota vertical de *f* . Esto se verifica si cuando *x se acerca a 3*, *f* se "*dispara*" hacia $-\infty$, hacia $+\infty$ o hacia $\pm\infty$

Ahora bien, x puede acercarse a *3* con valores menores que *3*: $x \to 3^{(-)}$ o con valores mayores que *3*: $x \to 3^{(+)}$

Hagamos un ejercicio de aproximación al valor *3*, con *valores menores que 3* (esto se interpreta como: *x se tiende a 3 por la izquierda:* $x \to 3^{(-)}$).

Si le asignamos un valor próximo, pero *menor que 3*, por ejemplo: $x = 2{,}99$:

$$f(2{,}99) = \frac{2{,}99}{(2{,}99)^2 - 9}$$

$$= \frac{+2{,}99}{-0{,}0599}$$

$$\cong -49{,}92$$

Podemos repetir, asignando a x valores cada vez más cercanos a *3*, *por la izquierda*.

Cuando $x \to 3^{(-)}$, la función toma valores cada vez más grandes pero negativos, lo que indica que $x \to 3^{(-)}$; $f \to -\infty$

De manera similar, cuando *x se tiende a 3 por la derecha*, la función toma valores cada vez más grandes positivos, lo que indica que $x \to 3^{(+)}$; $f \to +\infty$

Sintetizando:

$$\left.\begin{array}{l} x \to 3^{(-)},\ f \to -\infty \\ x \to 3^{(+)},\ f \to +\infty \end{array}\right\} \boldsymbol{x=3} \text{ es } \boldsymbol{A.V.} \text{ de } \boldsymbol{f}$$

Recordemos que f tiene simetría Impar, entonces: ***x=-3*** es ***A.V.*** de ***f***

Asíntota Horizontal A.H.:

Si realizamos un ejercicio de aproximación similar al anterior:

$$f(1.000) = \frac{1.000}{(1.000)^2 - 1.000}$$

$$= \frac{1.000}{999.000} \cong 0, \text{ pero } (+)$$

$$f(-1.000) = \frac{-1.000}{(-1.000)^2(-1.000)}$$

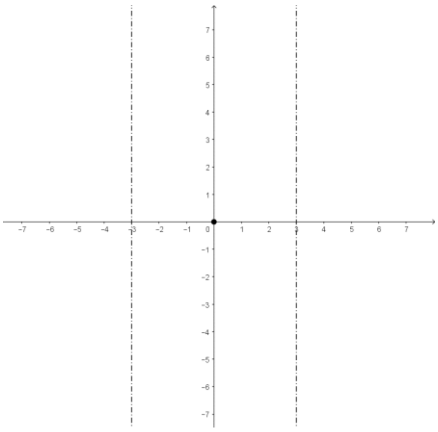
$$= \frac{-1.000}{999.000} \cong 0, \text{ pero } (-)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x \to -\infty, & f \to 0 \\ x \to +\infty, & f \to 0 \end{array}\right\} \boldsymbol{y=0} \text{ es } \boldsymbol{A.H.} \text{ de } \boldsymbol{f}$$

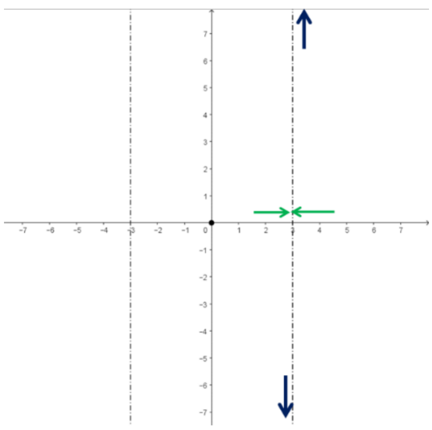
Con todos estos elementos calculados, no es necesario confeccionar una tabla de valores para graficar la función. Es más, si hacemos una tabla de valores con muchos “renglones”, corremos el riesgo de equivocarnos en algunos cálculos y esto nos plantea grandes dificultades para graficar correctamente *f*.

Conviene operar de la siguiente manera:

Trazamos un sistema cartesiano y ubicamos en este los punto y asíntotas calculados.



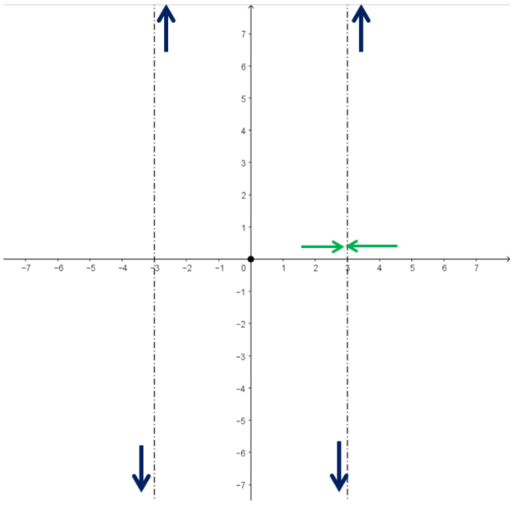
Ahora traslademos a la gráfica el razonamiento que hicimos para hallar la primera asíntota vertical:



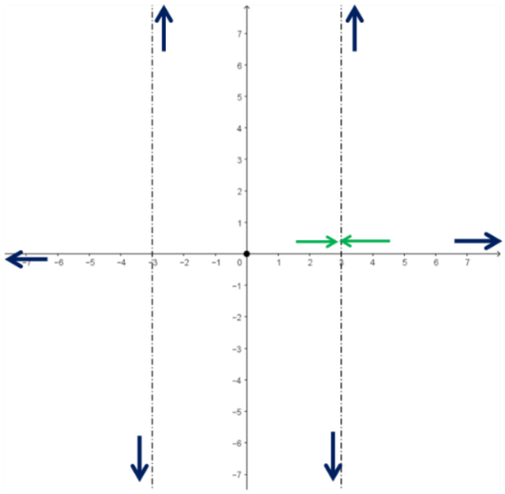
Por simetría Impar (simétrica respecto del origen de coordenadas), se cumple que;

si $-x \to -3^{(-)}$; $f \to -\infty$

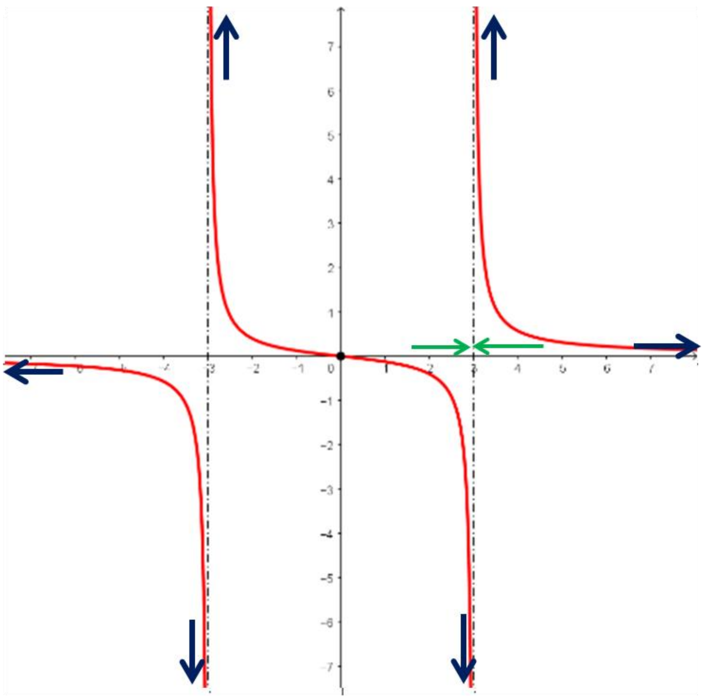
y que si $-x \to -3^{(-)}$; $f \to -\infty$



Traslademos el razonamiento que hicimos para hallar la asíntota horizontal:



Ya estamos en condiciones de bosquejar la gráfica de la función:



Observando la gráfica determinamos:

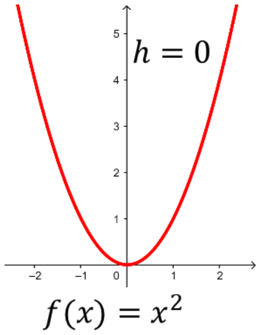
$$Rgo\, f = \Re$$

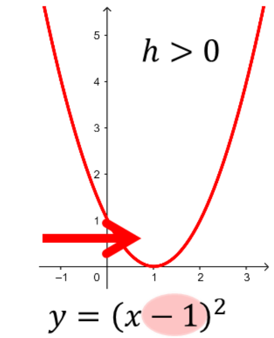
f No es Biunívoca

f Decrece en todo su dominio.

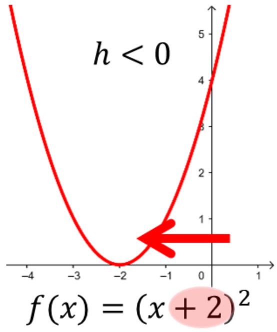
CRITERIO GENERAL PARA GRAFICAR FUNCIONES:

Cuando en el argumento de una función se suma (o resta) un número $h \neq 0$, su gráfica se desplazará horizontalmente, respecto de la original. $y = f(x - h)$



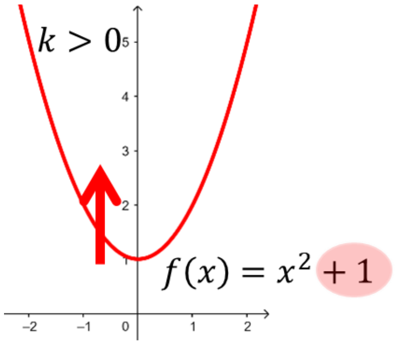


La curva se desplaza horizontalmente hacia la derecha

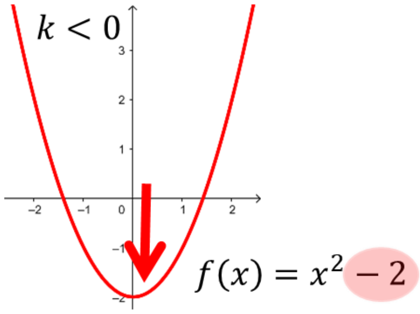


La curva se desplaza horizontalmente hacia la izquierda

Cuando a una función se le suma (o resta) un número $k \neq 0$, su gráfica se desplazará verticalmente, respecto de la original. $y = f(x) + k$

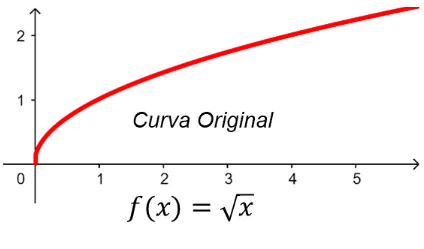


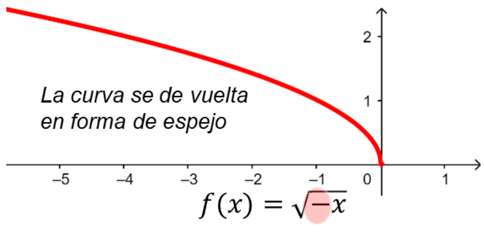
La curva se desplaza verticalmente hacia la derecha



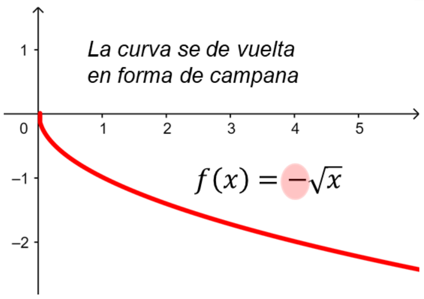
La curva se desplaza verticalmente hacia la izquierda

Cuando el argumento de una función cambia de signo, su gráfica se da vuelta en forma de espejo, respecto de la original. $y = f(-x)$

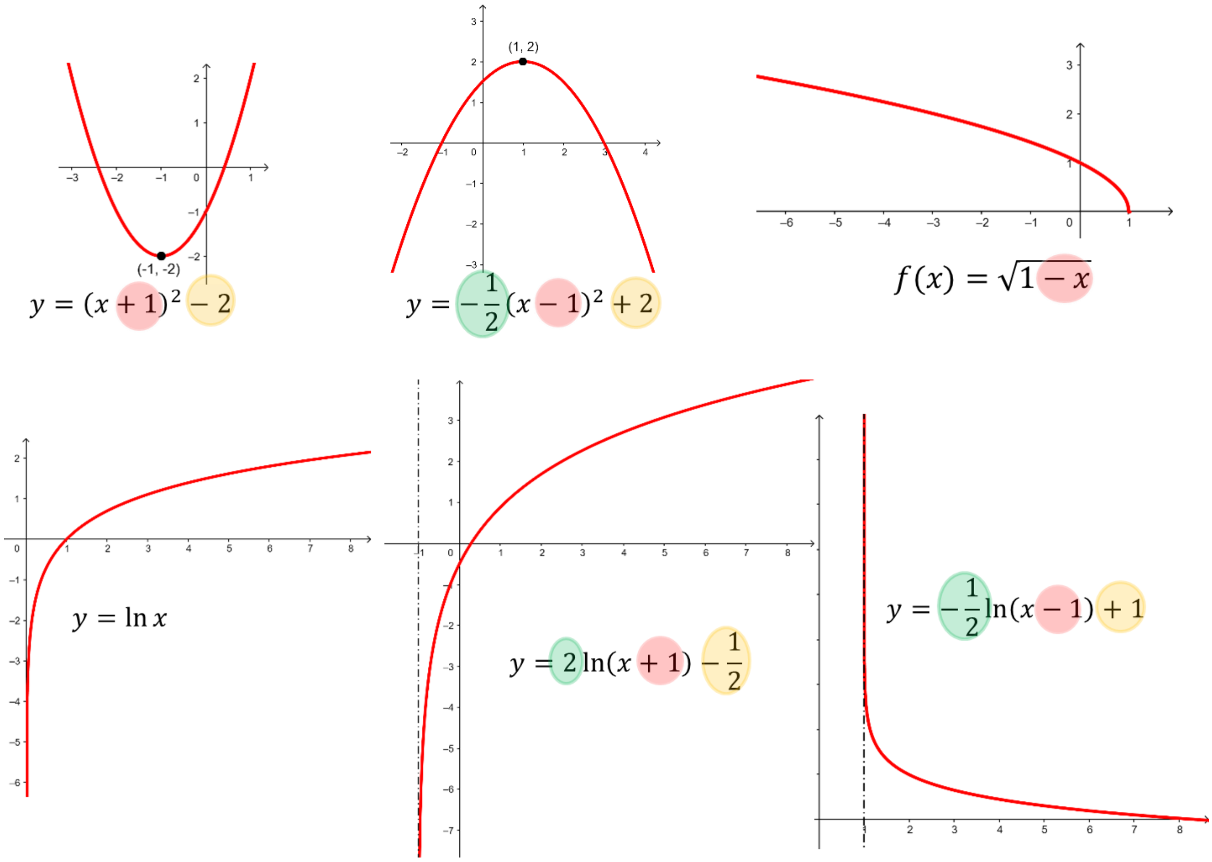




Cuando la función cambia de signo, su gráfica se da vuelta en forma de campana, respecto de la original. $y = -f(x)$



Generalizando:



A continuación, estudiaremos las funciones de mayor aplicación en nuestra asignatura, sin pretender agotar la colección.

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES EXPLÍCITAS

FUNCIONES ALGEBRAICAS

f={(x, f(x)} donde *f(x)* puede ser expresada mediante un número finito de una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación para ***"x"***, y constantes. Se clasifican en

- *Funciones Polinomiales*
- *Funciones Racionales*
- *Funciones Irracionales*

FUNCIONES TRASCENDENTES

- Función Exponencial
- Función Logarítmica
- Funciones Trigonométricas
- Funciones Trigonométricas Inversas

FUNCIONES ESPECIALES

- Función Valor Absoluto

Funciones POLINOMIALES:

Están definida por ***f/ f(x)=P(x)*** donde ***P(x)*** es un polinomio real en ***x***.

$$P(x) = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

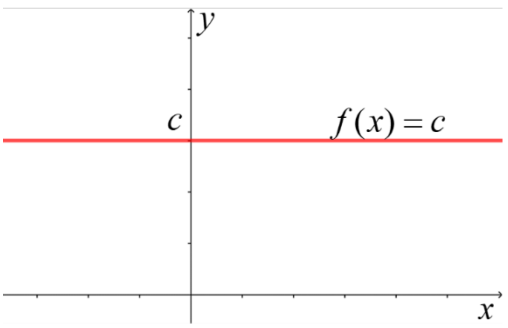
$$a \in \Re;\ con\ \ a_0 \neq 0\ y\ \ n \in N$$

Se denomina función polinomial de grado ***n***.

El dominio de toda función polinomial es: $dom\ f = \Re$

Función Constante

$f(x) = c;\ \ con\ c \in \Re; \begin{cases} domf = \Re \\ rgof = \{c\} \end{cases}$



Función Lineal

$$f(x) = mx + b;\ m \in \Re; m \neq 0 \begin{cases} domf = \Re \\ rgof = \Re \end{cases}$$

Su representación gráfica es una recta oblicua.

*La **pendiente de la recta** está dada por **m***

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x}$$

EJEMPLO 1:

$f(x) = 2x + 1$

$m = 2$

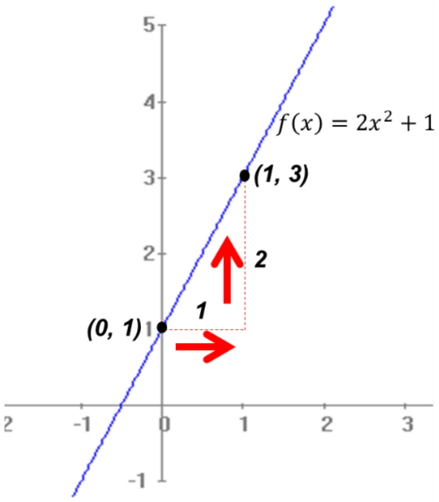
$m = \frac{2}{1} \therefore \begin{cases} \Delta y = 2 \\ \Delta x = 1 \end{cases}$

*El término independiente: **b**, representa la **ordenada al origen**; es el punto en el que la recta corta al eje OY:*

$b = 1$

$$rgof = \Re$$

f *Es Creciente en todo su dominio*



EJEMPLO 2:

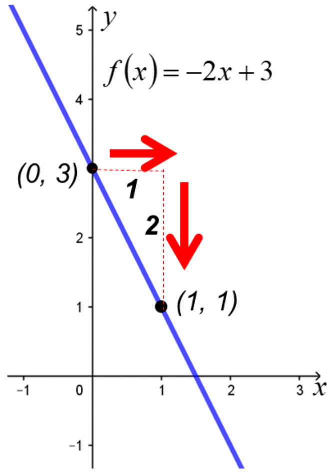
$$f(x) = -2x + 3$$

$$m = -2 \quad m = \frac{-2}{1} \therefore \begin{cases} \Delta y = -2 \\ \Delta x = 1 \end{cases}$$

El término independiente es: $b = 3$

$$rgo\ f = \Re$$

f *Es Decreciente en todo su dominio*



EJEMPLO 3:

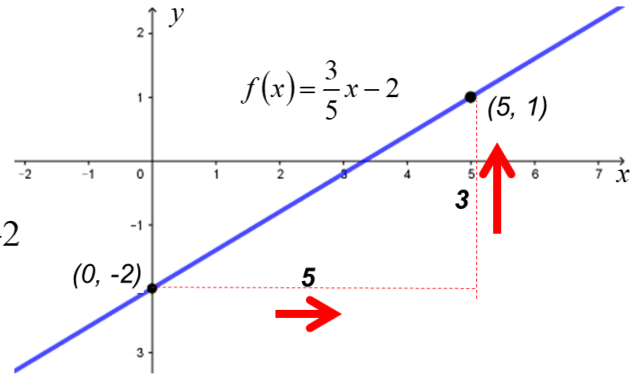
$$f(x) = \frac{3}{5}x - 2$$

$$m = \frac{3}{5} \qquad m = \frac{3}{5} \therefore \begin{cases} \Delta y = 3 \\ \Delta x = 5 \end{cases}$$

El término independiente es: $b = -2$

$$rgo\ f = \Re$$

f *Es Creciente en todo su dominio*



Función Cuadrática

Es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

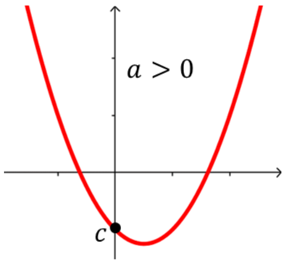
$$a; b\ y\ c \in \Re; a \neq 0$$

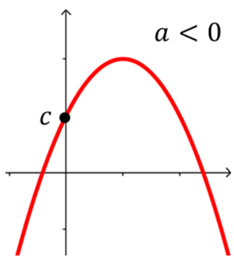
$$\begin{cases} domf = \Re \\ rgof = \begin{cases} (-\infty; k]; si\ a < 0 \\ [k; \infty); si\ a > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Su representación gráfica es una parábola de eje vertical.

a: Coeficiente del término cuadrático: Indica la apertura de la parábola y además:

La orientación de las ramas: hacia arriba o hacia abajo y además, la apertura de estas.





b: Coeficiente del término lineal: Indica que la gráfica se desplaza Horizontalmente respecto del eje OY.

c: Término independiente: Indica la ordenada del punto de intersección con el eje OY.

EJEMPLOS:

1) $y = x^2 - 3x + 2$ $\qquad dom\, f = \Re$

$a = 1 \Rightarrow a > 0$ $\qquad$ *Ramas ascendentes*

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$$

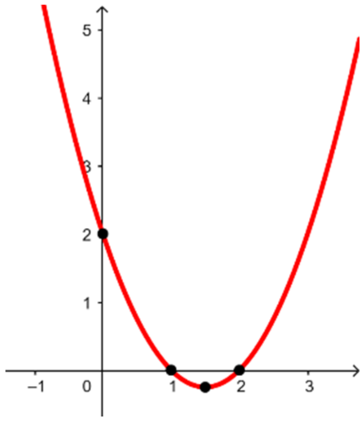
$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

f intersecta al eje OX en: (1, 0) y (2, 0)

C=2; f intersecta al eje OY en: (0, 2)

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \\ k &= \frac{-(-3)^2}{4 \cdot 1} + 2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$rgo\, f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$$



2) $y = -x^2 + 2x - 2$

$dom\, f = \Re$

$a = -1 \Rightarrow a < 0$ $\qquad$ *Ramas descendentes*

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} =$$

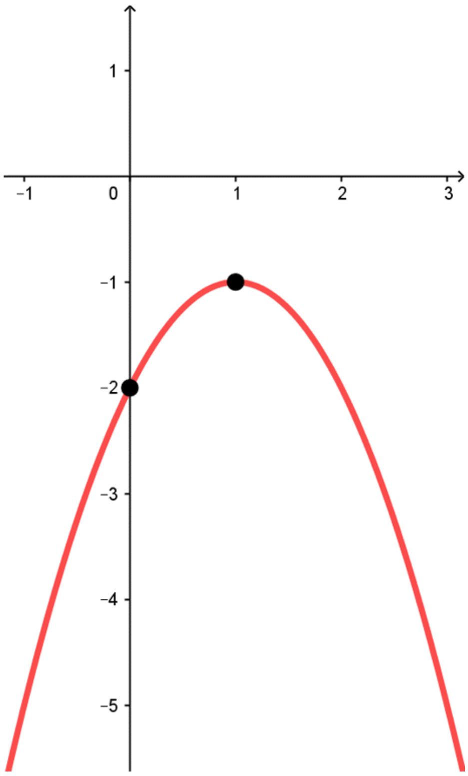
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{-2} \therefore$$

$x_{1,2} \notin \Re$ $\qquad$ *f no tiene intersección con el eje OX*

C=-2; f intersecta al eje OY en: (0, -2)

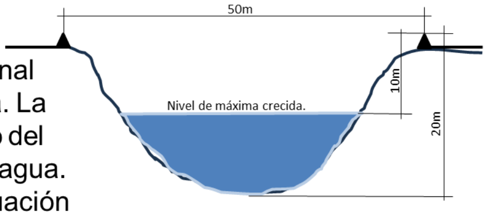
$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ k &= \frac{-2^2}{4 \cdot (-1)} - 2 = -1 \end{aligned}\right\} V = (1, -1)$$

$$rgo\, f = (-\infty, -1]$$

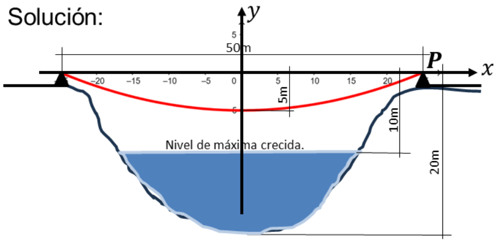


PROBLEMA:

Se desea construir un puente colgante peatonal para atravesar un río, como muestra la figura. La luz entre apoyos es de 50m y el nivel mínimo del puente debe estar 5m por arriba del nivel de agua. Si el desarrollo es parabólico: ¿cuál es la ecuación que lo describe? Grafique la situación.



Solución:



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = c; \quad c = -5$$

La parábola es de ramas ascendentes y su vértice está sobre el eje OY

$$a > 0 \text{ y } b = 0$$

$$f(x) = ax^2 - 5$$

El apoyo derecho es el punto $P(25, 0)$

$$f(25) = a(25)^2 - 5 = 0$$

$$a = \frac{5}{(25)^2}; \quad a = \frac{1}{125} \qquad a = 0{,}008 \qquad a = 8 \cdot 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{125}x^2 - 5}$$

CUESTIONARIO 1:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

a). ¿Una función cuadrática, es uno a uno? ¿tiene inversa?

b). Si una función tiene asíntota vertical *x=2*, ¿significa que: $dom\, f = R \neq 2$?

c). Si una función es estrictamente creciente en todo su dominio, ¿entonces es biunívoca?

d). Si una función tiene una asíntota vertical *x=1* y es función Impar; ¿tiene o no otra asíntota vertical? Si es que la tiene: ¿cuál es su ecuación?

e). ¿Qué se determina con el criterio de la regla vertical?

f). Dada la función: $y = ax^2 + c$, ¿Qué indican en la gráfica los coeficientes a y c? ¿La gráfica tiene desplazamientos respecto de $y = x^2$?

g). Si la gráfica de una función es simétrica respecto al eje OY, ¿es uno a uno?

h). Si *f* es una función y $(0,\ 2) \in f$, ¿puede suceder que $(0,\ 0) \in f$?

Función Racional

Es de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; P(x)\ y\ Q(x)\ son\ Polinomios\ Reales\ y\ Q(x) \neq 0$

$$domf = \{x \in \Re / Q(x) \neq 0\}$$

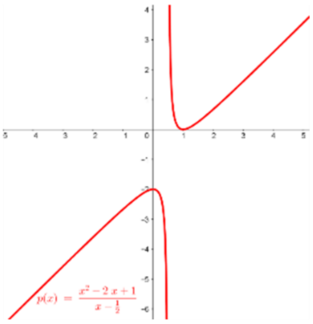
Estas funciones pueden o no, tener asíntotas, por lo que consideramos conveniente, antes de abordarlas, definir una regla nemotécnica, que nos permite determinar las asíntotas horizontales en funciones racionales, si es que las tiene.

Criterio para determinar Asíntota Horizontal en una función Racional fraccionaria

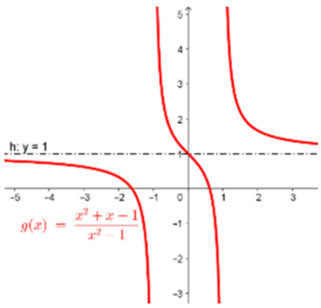
Consideremos una función racional de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$, siendo $\boldsymbol{n}$ el grado del polinomio numerador $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{m}$ el grado del polinomio denominador $\boldsymbol{Q}$.

Se verifica:

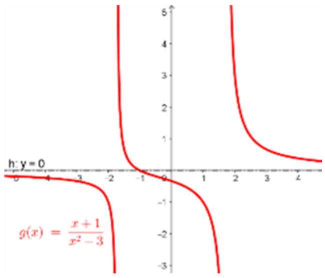
i) Si $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{m}$ la gráfica No tiene A.H.



ii) Si $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}$ la gráfica tiene A.H. en: $y = \frac{a_0}{b_0}$



iii) Si $\boldsymbol{n}<\boldsymbol{m}$ la gráfica tiene A.H. en el eje OX: $y = 0$



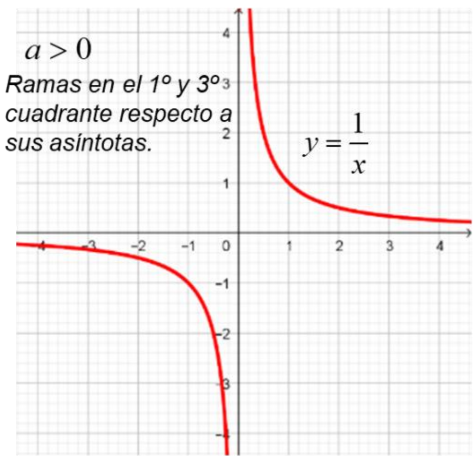
De todo en grupo, nos interesa:

Funciones Racionales Particulares**: **Hipérbola

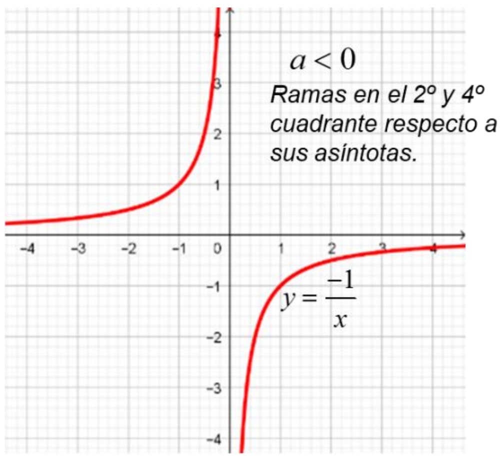
So de la forma: $f(x) = \frac{a}{x-h} + k; con\ a; h\ y\ k \in \Re\ y\ a \neq 0$

$$domf = \{x \in \Re / x \neq h\};\ rgof = (-\infty; h) \cup (h; \infty)$$

Los valores que toma el coeficiente **a**, indican cuanto más abierta o cerrada es la curva y si sus ramas se ubican en el 1º y 3º cuadrante o el 2º y el 4º, respecto a sus Asíntotas.



f Decrece en todo su dominio



f Crece en todo su dominio

EJEMPLO: $y = \frac{2}{x+2} + 1$

$$domf = \Re - \{-2\}$$

$a = 2$ ***a>0*** *Ramas en 1er y 3er cuadrante, respecto de sus asíntotas.*

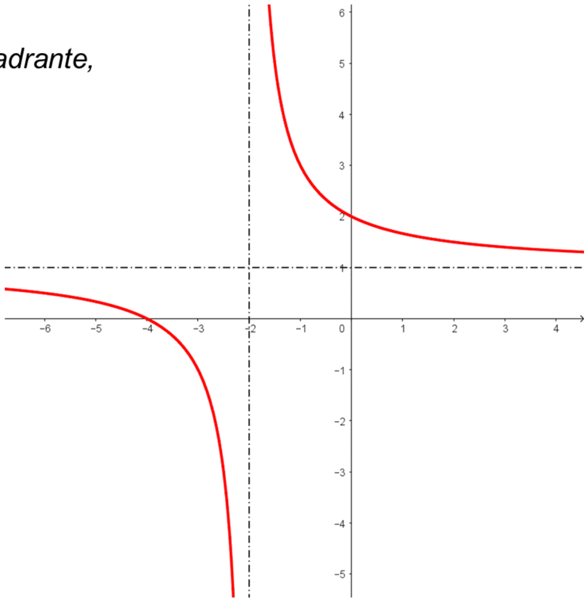
$h = -2$ ***f*** *tiene* ***A.V.*** *en* ***x= -2***

$k = 1$ ***f*** *tiene* ***A.H.*** *en* ***y= 1***

$rgof = \Re - \{1\}$

f es Biunívoca

f *Decrece en todo su dominio*



EJEMPLOS de aplicación:

PROBLEMA 1:

El nivel de carga C de la batería de un teléfono celular (expresado en %), está dado en función del tiempo de uso (expresado en hs.) y responde a $C = \frac{220}{t+2} - 10$. Graficar la función interpretando el fenómeno que representa. Dar su dominio y rango; indicar el sentido de crecimiento. ¿Es biunívoca?

Solución:

Desde la matemática pura, la ecuación responde a una función racional (hipérbola), cuyos elementos son:

$a = 220$ ***a>0*** *Ramas en 1er y 3er cuadrante, respecto de sus asíntotas.*

$h = -2$ ***f*** *tiene* ***A.V.*** *en* ***x= -2***

$domf = \Re - \{-2\}$

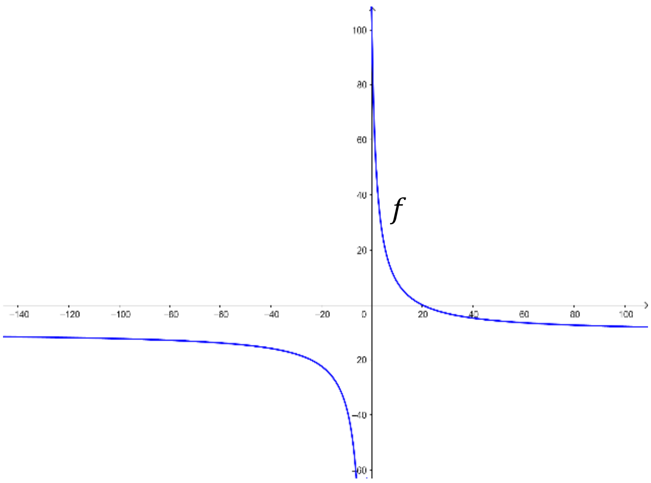
$k = -10$ ***f*** *tiene* ***A.H.*** *en* ***y= -10***

$rgof = \Re - \{-10\}$

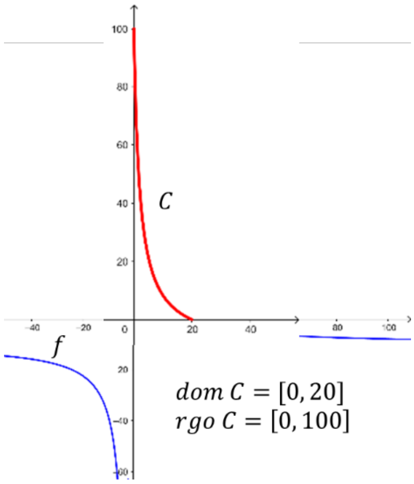
f *Decrece en todo su dominio*

f es Biunívoca

Su representación gráfica es:



Sin embargo, el fenómeno físico nos indica que tanto el % de carga: C, como el tiempo, son magnitudes pertenecientes a R^+; por lo que la gráfica que representa esta función es la curva graficada en rojo*:*

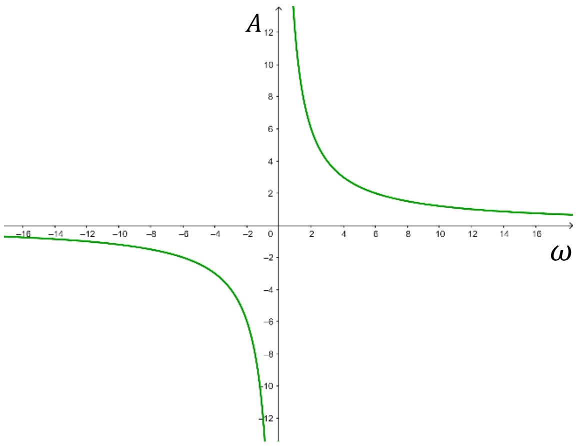


PROBLEMA 2:

La ley de Ohm relaciona el voltaje $\boldsymbol{V}$ (que, en las baterías de los autos, por ejemplo, suele ser de 12 **V**oltios), con la intensidad de la corriente $\boldsymbol{I}$ (**A**mpere) y la resistencia $\boldsymbol{R}$ (Ohm). Dicha ley afirma que: $V{=}I\ .\ R$ o bien: $I = \dfrac{V}{R}$. Determinar la función que la representa y encontrar su dominio, rango y gráfica.

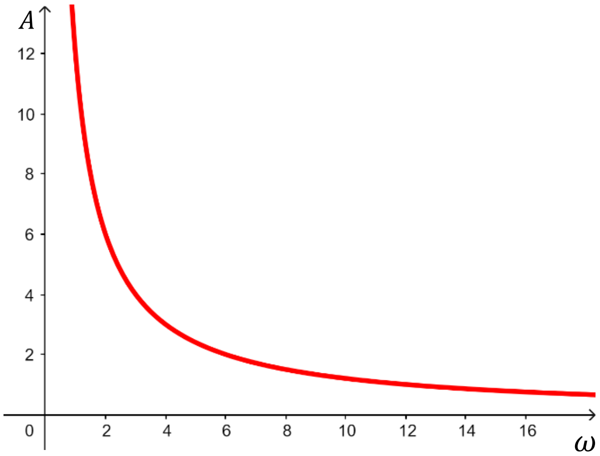
Solución:

Si tomamos la expresión $I = \frac{V}{R}$ y en esta consideramos el voltaje (V=12), constante y la resistencia (R), variable, tenemos una *función racional*, cuya gráfica es:



Si embargo, las leyes de la física nos indican que No hay Voltaje ni Resistencias negativas, así que la ecuación que representa esta función es: $I = \frac{V}{R};\ \begin{cases} dom\ I = (0, \infty) \\ rgo\ I = (0, \infty) \end{cases}$

La gráfica que representa el fenómeno físico es:



Este tipo de funciones reciben el nombre de ***función racional*** o ***función de proporcionalidad inversa,*** porque la variable independiente se encuentra en el denominador de esta.

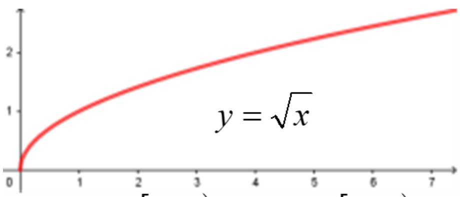
Funciones algebraicas irracionales

Son de la forma: $f/f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in N, n > 1$

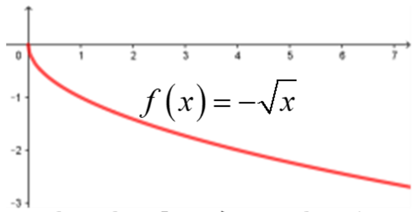
A continuación, veremos las que más se utilizan y en cada caso definiremos sus dominio y rango.

Función raíz cuadrada

Es de la forma: $y = \sqrt{x}$

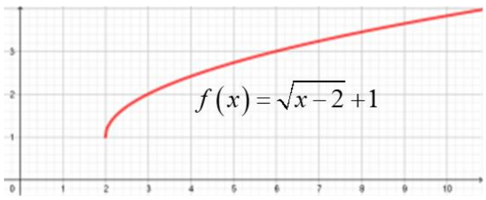


$dom\, f = [0, \infty);\ rgo\, f = [0, \infty)$

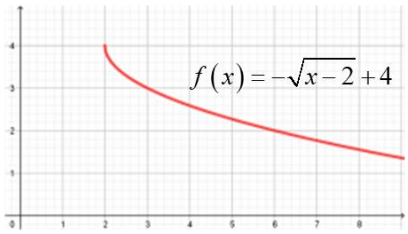


$dom f = [0, \infty); rgo f = (-\infty, 0]$

Como en todos los casos, si sumamos o restamos un número en el argumento de la raíz, ésta se desplaza horizontalmente; y si sumamos o restamos un número a la función, se desplaza verticalmente, como veremos



$dom\, f = [2, \infty);\quad rgo\, f = [1, \infty)$

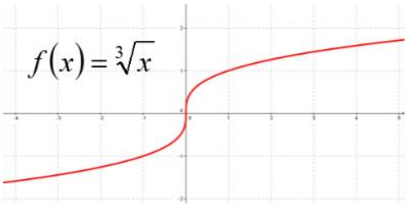


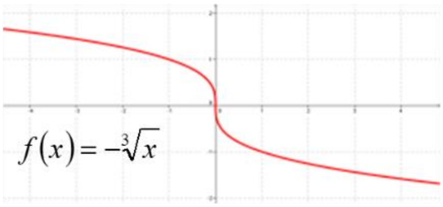
$dom\, f = [2, \infty);\quad rgo\, f = (-\infty, 4]$

Función raíz cubica

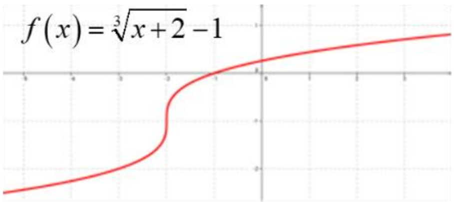
Es de la forma: $y = \sqrt[3]{x}$

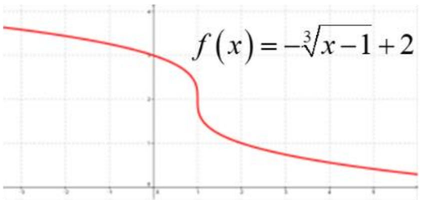
$dom\ f = R$





Generalizando





Funciones dadas en ramas.

Si una función está dada en ramas significa que ***f*** toma definiciones distintas para distintos intervalos de dominio.

EJEMPLO: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & si x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1, & si x > 2 \end{cases}$

Para analizarla y poder graficar, debemos estudiar por separado cada una de las expresiones constitutivos, de las ramas. Veamos:

Estudio de dominio:

$$\left.\begin{array}{l} si\ x \in (-\infty, 2];\ f(x) = x^2 - 3 \\ \\ si\ x \in (2, \infty); f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \end{array}\right\} dom\ f = \mathbb{R}$$

Intersección con ejes:

$$\cap c/OX : y = 0 \ \therefore \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3, \quad |x| = \sqrt{3} \begin{cases} P(-\sqrt{3}, 0) \\ P(\sqrt{3}, 0) \end{cases} \\ \\ \sqrt{x-2} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = -1; \quad No\ existe\ intersección \end{cases}$$

Ambos valores: $-\sqrt{3}\ y\ \sqrt{3}$, pertenecen al dominio de f.

$\cap\ c/OY: x = 0$

¿A qué rama pertenece el dominio 0?

$f(0) = 0^2 - 3 = -3;\ \ P(0,\ -3)$

No corresponde estudiar simetría ni asíntotas. ¿por qué?

Para graficar consideremos el desarrollo de cada curva, en su intervalo de dominio.

La rama de la izquierda: $f(x) = x^2 - 3,\ \ si\ x \leq 2$, corresponde a un arco de parábola de eje vertical, con ramas ascendentes, cuyo vértice es $P(0, -3)$ y se extiende en el intervalo $(-\infty, 2]$

La rama derecha: $f(x) = \sqrt{x-2} + 1,\ si\ x > 2$, corresponde a un arco de parábola de eje horizontal (función cuadrática), que comienza en el punto de coordenadas: $(2, 1)$.

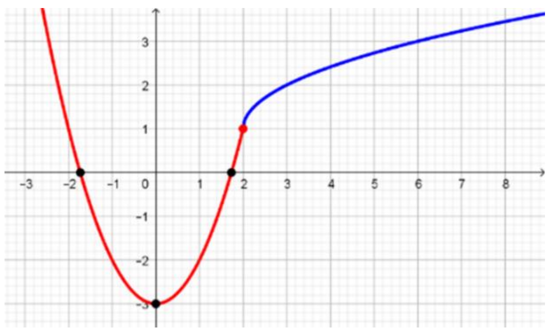
Esta curva está desplazada respecto de la original:

$\sqrt{x-2}$ Indica que la gráfica se desplaza horizontalmente 2 unidades a la derecha.

$\sqrt{x-2}+1$ Indica que la gráfica se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.

$Rgo\ f\ = [-3,\ \infty)$

No es biunívoca.



FUNCIONES TRASCENDENTES

Función Exponencial:

Es de la forma: $y = a^x\ \ con\ a\epsilon\mathfrak{R}; a > 0\ y\ a \neq 1$

$$dom\ a^x = \mathfrak{R};\ \ rgo\ a^x = (0,\ \infty)$$

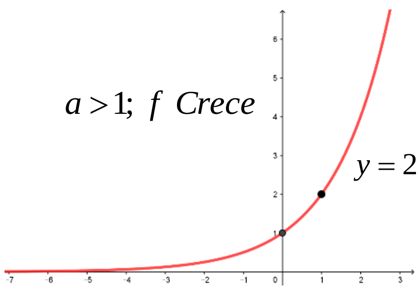
Esta función tiene dos puntos característicos, lo que simplifican su gráfica.

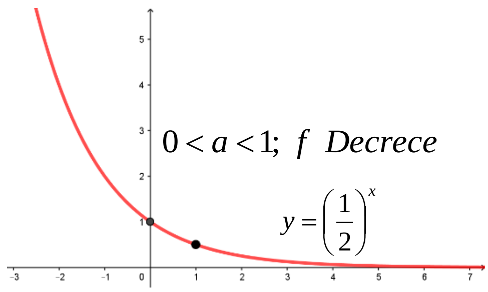
$$Si\ x = 0 \Rightarrow a^0 = 1; P(0; 1) \in f$$

$$Si\ x = 1 \Rightarrow a^1 = a; P(1; a) \in f$$

Según el valor de la base ***a***, que debe ser un ***número positivo*** y ***distinto de 1***, la curva tiene distintas características.

EJEMPLOS:

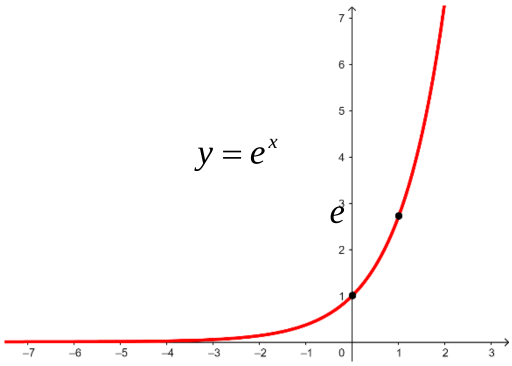




Hay una función exponencial muy importante por su utilidad en aplicaciones Matemáticas, es la función exponencial de base ***"e"***. $y = e^x$

La gráfica de esta función es:

dom f= Re; ***rgo f= (0, ∞)***



El número **e,** la base de los logaritmos naturales (o neperianos), es un número irracional: ***e=2,71828182…***

Función Logaritmo

Esta es la función inversa de la función exponencial. Se expresa:

$$f(x) = log_a x, con\ a > 0\ y\ a \neq 1$$

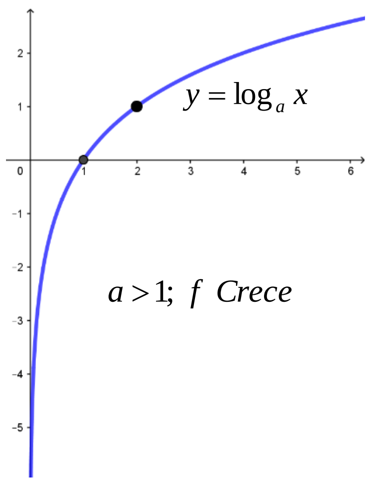
$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

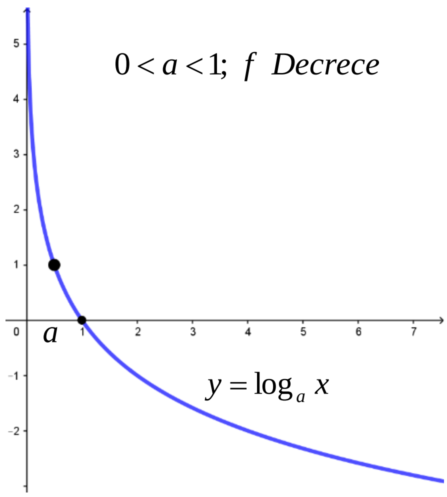
$$dom\ log_a x = (0, \infty), \qquad rgo\ log_a x = R$$

La función logaritmo también tiene dos puntos característicos, lo que simplifican su gráfica.

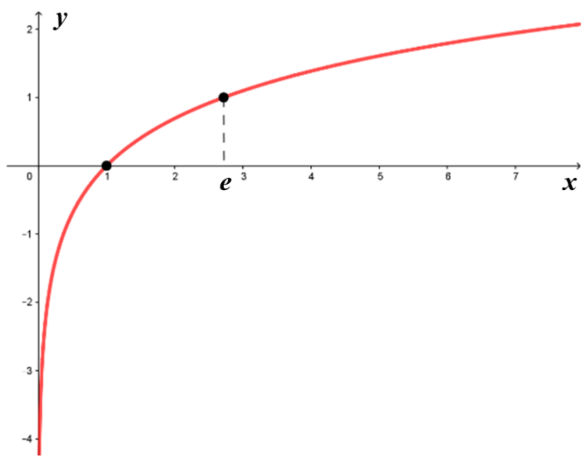
$$Si\ x = 1;\ log_a 1 = 0 \therefore P(1,0) \in f$$

$$Si\ x = a;\ log_a a = 1 \therefore P(a,1) \in f$$

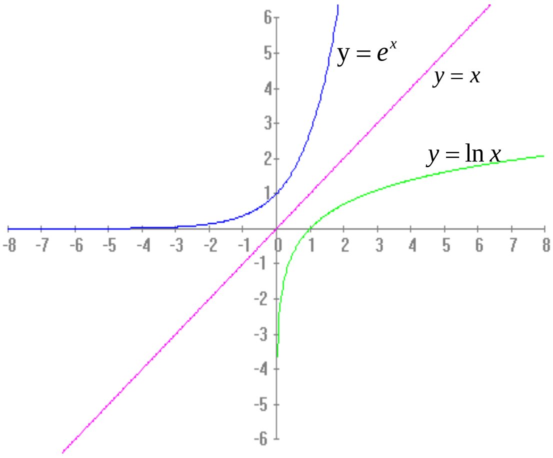




Una función logarítmica característica es: $y = \ln x\ , o\ y = log_e x$ llamada logaritmo neperiano.



La gráfica de la función exponencial es simétrica con la gráfica de la función logarítmica, respecto de la primera bisectriz (la recta *y=x).* Esta es una propiedad de las funciones inversas. Esta función figura en las calculadoras científicas.



Cambio de base logarítmica:

Un recurso útil es el cambio de base del logaritmo. Ya que las calculadoras científicas solo tienen las funciones ***ln x*** y ***log x***; cuando se presenta un logaritmo en una base distinta de esta, se la puede transformar a una que se pueda calcular con la calculadora, utilizando la siguiente fórmula:

$$log_2 x = \frac{ln\, x}{ln\, 2} \quad \therefore \quad log_b x = \frac{log_c x}{log_c b}$$

Recordemos las propiedades más importantes de los logaritmos, que nos serán útiles.

PROPIEDADES DE LOGARITMO		Ejemplos
$\ln e = 1$	$\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
$\ln 1 = 0$	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4 = 3$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_3\left(\frac{27}{3}\right) = \log_3 27 - \log_3 3 = 3 - 1 = 2$
$\ln a^b = b \cdot \ln a$	$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_5 25 = 2 \cdot \log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$
$\ln a = \ln b,\ sii\ \ a = b$	$\log_a x = \log_a y,\ sii\ \ x = y$	$\log_3 x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 9$
$Si\ a > b \Rightarrow \ln a > \ln b$	$Si\ x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$	$Si\ 4 > 2 \Rightarrow \log_2 4 > \log_2 2 \therefore 2 > 1$

FUNCIONES ESPECIALES:

De estas, nos detendremos en la función valor absoluto, aunque existen otras, que analizaremos cuando se presenten.

Ya conocemos la propiedad de valor absoluto de los números reales:

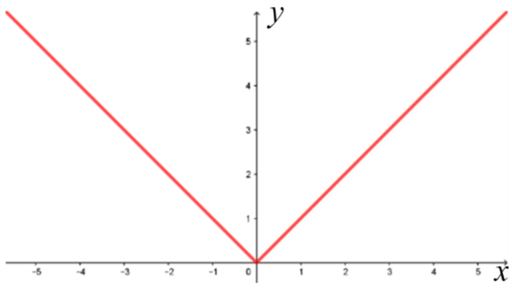
$$\forall x \in \Re; |x| = \begin{cases} x, six \geq 0 \\ -x, six < 0 \end{cases}$$

Función valor absoluto:

Es de la forma: $f(x) = |x|$

$$dom\ |x| = R;\ \ rgo\ |x| = [0, \infty)$$

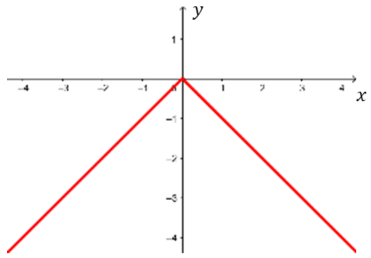
Su representación gráfica es:



De manera similar que, con las demás funciones, se pueden variar los parámetros.

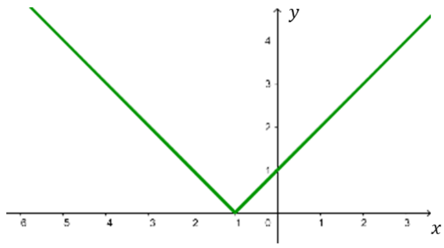
$f(x) = -|x|$

$dom\ f = R$
$rgo\ f = (-\infty;\ \ 0]$



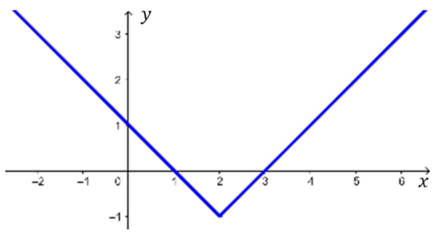
$f(x) = |x + 1|$

$dom\ f = R$
$rgo\ f = [0, \infty)$



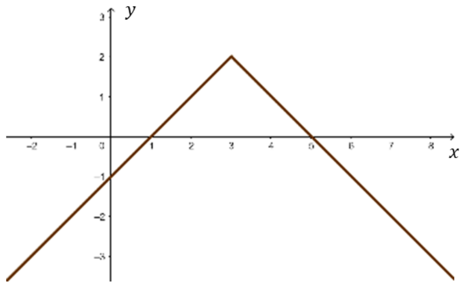
$f(x) = |x - 2| - 1$

$dom\ f = R$
$rgo\ f = [-1, \infty)$



$f(x) = -|x - 3| + 2$

$dom\ f = R$
$rgo\ f = (-\infty;\ \ 2]$

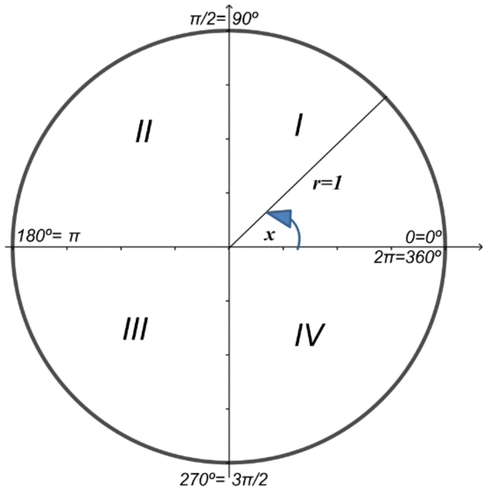


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

El círculo trigonométrico:

Es un círculo de **radio unitario** (***r=1***), llamado ***radio vector***, que cuando ***gira en sentido anti horario***, ***barre ángulos "x" (+)***. El círculo tiene centro en el origen de coordenadas (0, 0).

El ángulo ***"x"*** se mide en el **Sistema Radián**, que tiene su correspondencia con el Sistema Sexagesimal, como indica la figura.

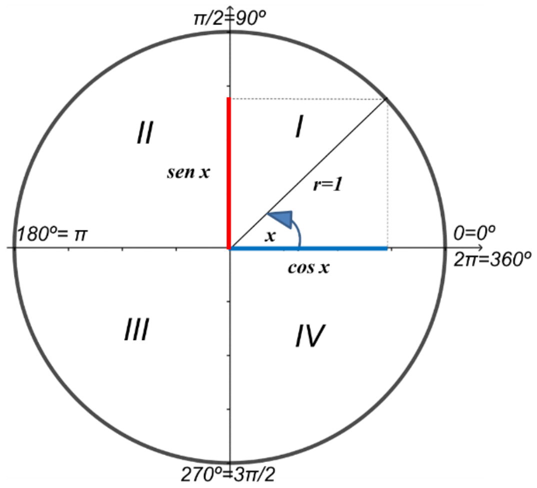


El círculo está dividido en cuatro ***cuadrantes: I, II, III*** y ***IV***, cada uno cubre un ángulo recto, o sea: ($\pi/2$=90º).

Si observamos, un "giro completo" en el sistema sexagesimal de medición de ángulos, equivale a 360º; mientras que en el sistema Radián equivale a $2\pi \cdot r$; pero como el radio es igual a 1, un "giro completo" en el sistema Radián equivale a 2π.

En el sistema Radián los ángulos son ***números Reales***.

La proyección del radio vector sobre el eje vertical representa el ***sen x***; mientras que la proyección del radio vector sobre el eje horizontal representa el ***cos x***



Las funciones trigonométricas son ***PERIÓDICAS***; significa que se repiten cada un determinado giro del radio vector, llamado ***Período.***

A continuación, se muestran los signos que asumen estas funciones en los distintos cuadrantes:

Cuadrante	*Ángulo*	***sen x***	***cos x***	***tg x***
I	$0<x<\pi/2$	(+)	(+)	(+)
II	$\pi/2<x<\pi$	(+)	(-)	(-)
III	$\pi<x<3\pi/2$	(-)	(-)	(+)
IV	$3\pi/2<x<2\pi$	(-)	(+)	(-)

Existe una relación fundamental de las funciones trigonométricas, equivalente al Teorema de Pitágoras: $sen^2x + cos^2x = 1$; de esta se pueden despejar, entre otras:

$$sen\ x = \sqrt{1 - cos^2x} \quad y \quad cos\ x = \sqrt{1 - sen^2x}$$

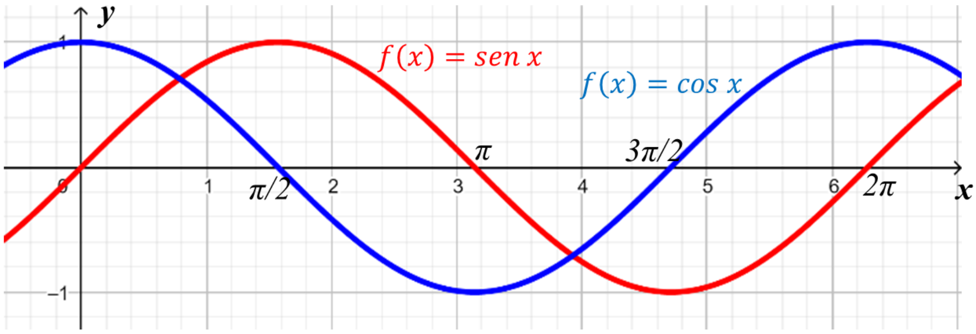
Las funciones *seno* y *coseno*

La función seno se define: $f(x) = sen\ x$ $\quad Dom\ sen = R$

$Rgo\ sen = [-1, 1]$

La función coseno se define: $f(x) = cos\ x$ $\quad Dom\ cos = R$

$Rgo\ cos = [-1, 1]$



El período de las funciones seno y coseno es 2π; aunque debemos recordar que el dominio de ambas es el conjunto R.

Estudio de funciones trigonométricas seno y coseno:

Es interesante analizar algunas propiedades de las funciones seno y coseno, de gran utilidad en varias de las carreas de ingeniería dictadas en la FRT-UTN.

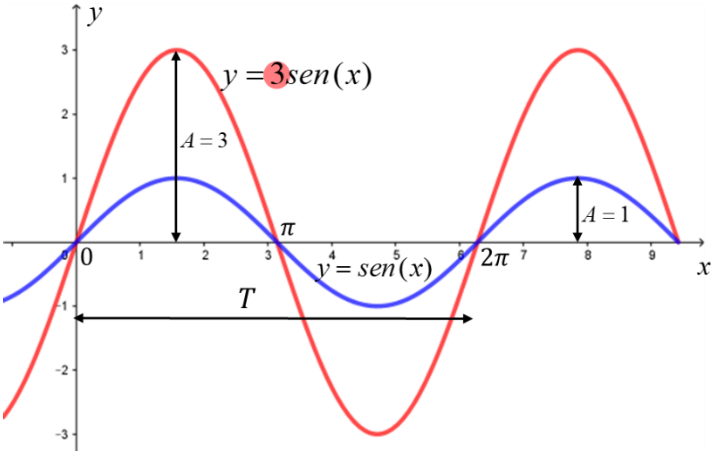
La forma general de estas funciones es:

$$f(x) = A \cdot sen(Bx + C)$$

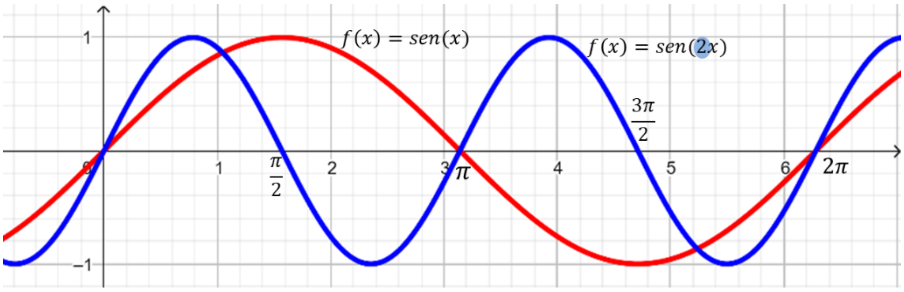
$$f(x) = A \cdot cos(Bx + C)$$

Amplitud A: Representa ***la mitad de la distancia entre los valores máximo y mínimo*** de la función. La amplitud se determina por la expresión ***Amplitud*** = |***A***|.

Periodo T: Representa la ***medida del ángulo en el cual la gráfica completa un ciclo***. Se expresa en radianes. El ***periodo*** se determina por la expresión ***T*** = *2/*|***B***|. El ***periodo*** de las funciones ***f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x) es 2 π***.

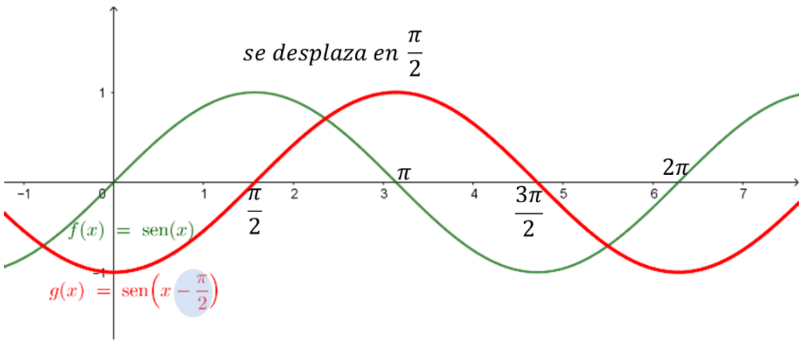


Frecuencia B: Representa la ***cantidad de ciclos o el número de veces que la gráfica se repite en un ángulo de 2π radianes.***



$$f(x) = sen(2x); \;\; Frecuencia: B = 2$$

Fase F: Representa la ***medida del ángulo en que la gráfica se desplaza horizontalmente***. Se expresa en radianes.



Las funciones *tangente* y *cotangente*

La función tangente se define:

$$tg\ x = \left\{(x, y)/y = \frac{sen\ x}{\cos x};\ \cos x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ tg = R - (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$$

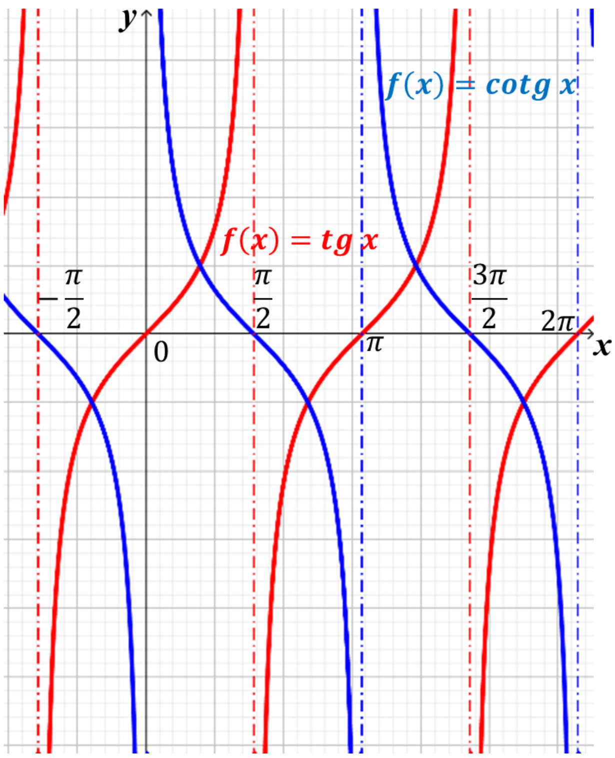
$$Rgo\ tg = R$$

La función cotangente se define:

$$cotg\ x = \left\{(x, y)/y = \frac{cos\ x}{sen\ x}; sen\ x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ cotg = R - k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Rgo\ cotg = R$$



Las funciones *secante* y *cosecante*

La función secante se define:

$$sec\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{1}{\cos x};\ \cos x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ sec = R - (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k \in \mathbb{Z}$$

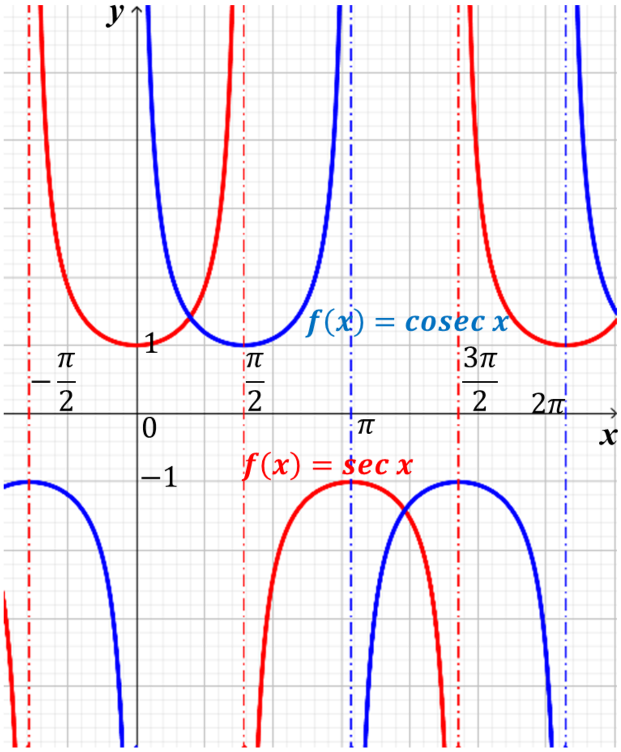
$$Rgo\ sec = R - (-1,1)$$

La función cosecante se define:

$$cosec\ x = \left\{(x,y)/y = \frac{1}{sen\ x}; sen\ x \neq 0\right\}$$

$$Dom\ cosec = R - k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Rgo\ cosec = R - (-1,1)$$



Algunas relaciones entre funciones trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + tg^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + cotg^2 x = co\sec^2 x$$

$$sen\,x.\csc x = 1 \qquad \cos x.\sec x = 1 \qquad tg\,x \cot g\,x = 1$$

$$sen(u+v) = sen\,u.\cos v + \cos u.sen\,v \qquad sen(u-v) = sen\,u.\cos v - \cos u.sen\,v$$

$$\cos(u+v) = \cos u.\cos v - sen\,u.sen\,v \qquad \cos(u-v) = \cos u.\cos v + sen\,u.sen\,v$$

$$tg(u+v) = \frac{tg\,u + tg\,v}{1 - tgu.tg\,v} \qquad tg(u-v) = \frac{tg\,u - tg\,v}{1 + tgu.tg\,v}$$

$$sen2x = 2\,sen\,x.\cos x \qquad sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{sen\,x}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \qquad tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \qquad tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\,x}{1+\cos x}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}$$

$$sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\,\alpha - \cos\,\beta = -2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen u}.\cos \text{v} = \frac{1}{2}\left[sen(u+v) + sen(u-v)\right] \qquad \cos \text{u}.\cos \text{v} = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$$

$$\cos \text{u}.sen\,\text{v} = \frac{1}{2}\left[sen(u+v) - sen(u-v)\right] \qquad \text{sen u}.sen\,\text{v} = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$

CUESTIONARIO 2:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

a). ¿La función Valor absoluto, es uno a uno? ¿y la función seno lo es?

b). Una función racional de la forma: $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$, tiene asíntotas?

c). La función $y = \sqrt{x-1} + 2$, tiene asíntotas? ¿cuál es su dominio y su rango?

c). Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\,x; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ¿cuál es su dominio y su rango? ¿cómo es su gráfica?

d). La función $y = \operatorname{tg} x$ ¿es uno a uno?, ¿en qué condiciones lo es?

e). La función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ¿cómo es su crecimiento? ¿$f(0)$; $f(1)$?

f). La función: $y = 2^{x-1}$, ¿cómo es su crecimiento? ¿$f(0)$; $x/f(x) = 1$?

g). Dada la función: $y = \frac{1}{2}\cos x$, ¿Su gráfica tiene diferencias con la de $y = \cos x$?. Grafica ambas en un sistema cartesiano y compara.

h). La función $f(x) = 2\,sen\,x; con\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ¿tiene inversa? Si es así: ¿cuál es?

FUNCIÓN INVERSA

Si *f* es una *función biunívoca*, entonces tiene función inversa y el conjunto obtenido de intercambiar las componentes de cada uno de los pares ordenados de la función *f,* se llama ***función inversa de f*** y se la denota por $\boldsymbol{f^{-1}}$

De esta definición se deduce claramente que:

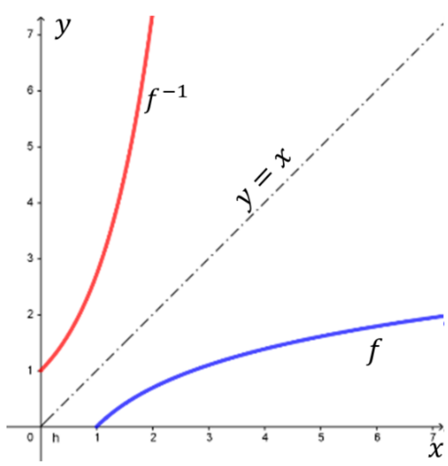
i) $\forall (x;\ y) \in f \Leftrightarrow (y;\ x) \in f^{-1}$

ii) $f\begin{cases} dom\,f & dom\,f^{-1} \\ rgo\,f & rgo\,f^{-1} \end{cases} f^{-1}$

Para obtener la ecuación de f^{-1}, se procede a despejar x en función de y en la función f y finalmente se realiza un cambio de variables.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la primera bisectriz, o sea de la recta $y=x$

Se debe tratar de graficar con igual escala en ambos ejes, para que la gráfica no salga deformada.



EJEMPLO 1:

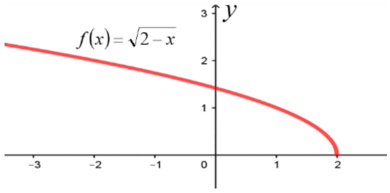
Determinar si la función dada es biunívoca; en tal caso determinar su función inversa.

$f(x) = \sqrt{2-x}$

$domf = (-\infty, 2]; rgof = [0, \infty)$

$fesBiunívoca$

$y = \sqrt{2-x} \Rightarrow y^2 = |2-x|$

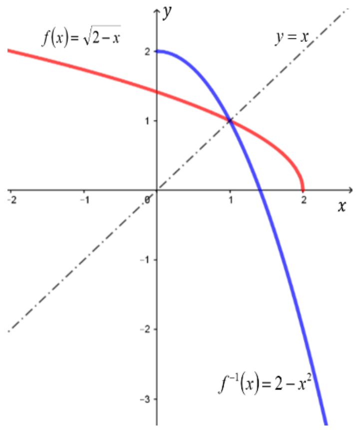


$|2-x| = 2-x \; \forall x \in (-\infty, 2]$

$y^2 = 2-x \Rightarrow x = 2-y^2 \therefore$

$f^{-1}(x) = 2-x^2$

$\begin{cases} domf^{-1} = [0, \infty) \\ rgof^{-1} = (-\infty, 2] \end{cases}$



Hay casos en que la función dada no es uno a uno; entonces, se puede restringir convenientemente el dominio, de manera que abarque todo, o la mayor parte del rango, y esa porción de ***f*** (llamada rama principal de la función), sea uno a uno.

EJEMPLO 2:

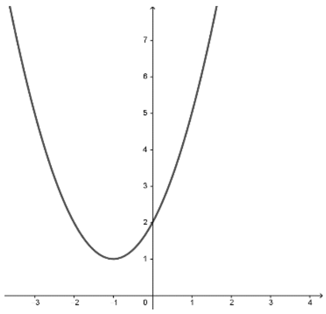
Dada la siguiente función $f(x) = x^2 + 2x + 2$, determine: dominio y grafíquela; diga si es biunívoca, si no es, restrinja el dominio para que admita inversa. Defina f^{-1} grafique en el mismo sistema cartesiano f y f^{-1}; dé dominio y rango de f y f^{-1}.

Solución:

$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 \qquad dom\ f = \Re$

$h = \dfrac{-2}{2} = -1 \qquad k = f(-1) = (-1)^2 - 2 + 2 = 1$

$V(-1; 1); \quad rgo\ f = [1; \infty)$



f No es Inyectiva. Luego:

$dom^* f = [-1; \infty)$

Se debe completar cuadrados en ***x*** para poder despejar ***y***

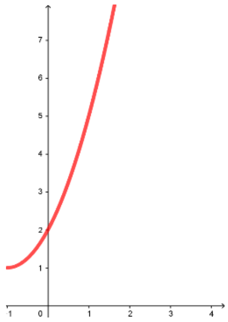
$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 + 1 - 1 = (x+1)^2 + 1$

$y - 1 = (x+1)^2 \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y-1}$

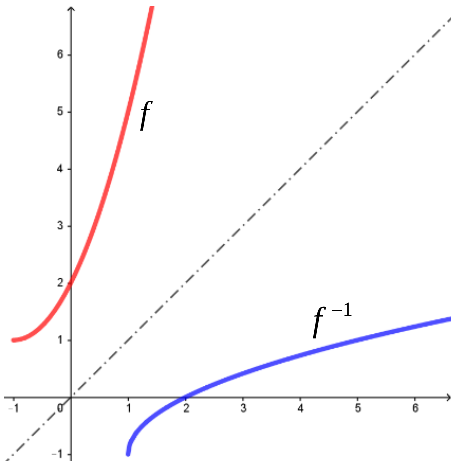
$\forall x \geq -1;\ x + 1 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} - 1$

$\begin{cases} dom\ f = [1; \infty) \\ rgo\ f = \Re \end{cases}$

Intercambiamos las variables x, y para poder graficar en el mismo sistema cartesiano.
$y^{-1} = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 1$



Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la primera bisectriz, la recta: $y = x$

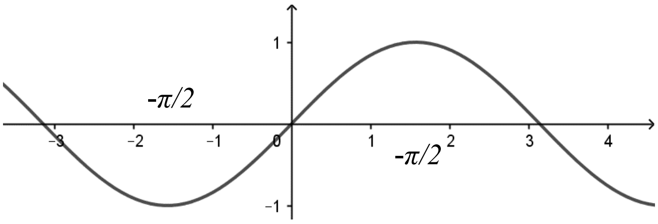


Funciones trigonométricas inversas

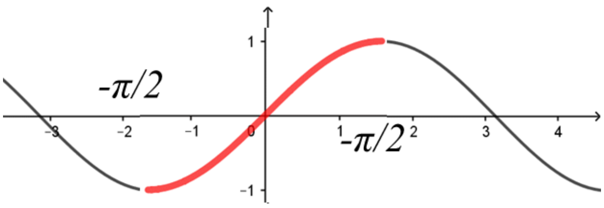
Con el conocimiento adquirido más arriba, estamos en condiciones de definir estas funciones que son de gran aplicación en ingeniería.

La función seno inverso (arcsen)

Antes que nada, recordemos la gráfica de la Función Seno:



Evidentemente no es uno a uno, para que lo sea, debemos restringir el dominio; pero manteniendo su $rgo\ f = [-1, 1]$. Esto se logra: $dom^{*}\ f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



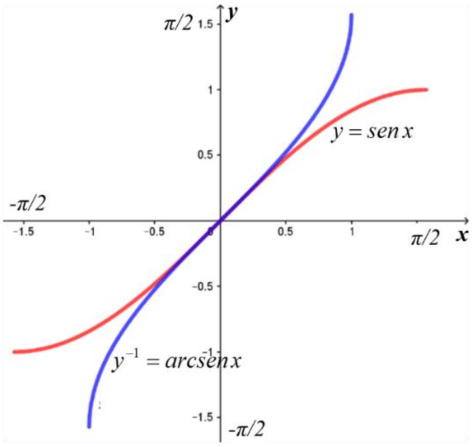
A esta se la llama: *Rama principal de la función seno.*

Entonces, la Función Seno inverso (arcsen) se define como:

$$f^{-1}(x) = arcsen\ x$$

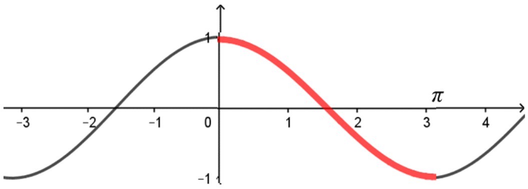
$$dom\ sen^{-1} = [-1, 1];\ \ rgo\ sen^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Su gráfica es simétrica respecto de la primera bisectriz con la de $sen\ x$.



La Función coseno inverso (arcos)

Recordemos la gráfica de la función coseno:



No es uno a uno.

Si reducimos el dominio al intervalo $[0, \pi]$, lo será

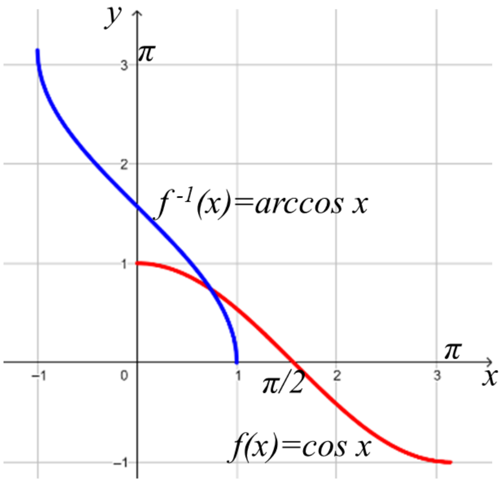
La función $y = \cos x \ \ con\ x \in [0, \pi]$, se la denomina rama principal de la función coseno.

Luego:

$$f^{-1}(x) = cos^{-1}x$$

$$dom\ cos^{-1} = [-1, 1]$$

$$rgo\ cos^{-1} = [0, \pi]$$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES:

Así como definimos operaciones entre números reales, definiremos en esta sección operaciones entre funciones.

Definición:

Dadas dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ para las cuales existe por lo menos un número real que pertenece a ambos dominios, esto es: $domf \cap domg \neq \emptyset$, las funciones simbolizadas por:

$$\boldsymbol{f + g}; \quad \boldsymbol{f - g}; \quad \boldsymbol{f \times g}; \quad \boldsymbol{\frac{f}{g}} \ \ \boldsymbol{y} \ \ \boldsymbol{\frac{g}{f}}$$

Las dos últimas: $\boldsymbol{\frac{f}{g}} \ \ \boldsymbol{y} \ \ \boldsymbol{\frac{g}{f}}$, tienen una condición adicional; sus denominadores deben ser distintos de 0.

Se definen:

Función Suma de f y g	
Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Suma $f+g$ y se define por:	$f+g=\{(x,y)/y=f(x)+g(x)\}$
	$dom(f+g)=dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f+g), (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Función Resta de f y g	
Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Diferencia $f-g$ y se define por:	$f-g=\{(x,y)/y=f(x)-g(x)\}$
	$dom(f-g)=dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f-g), (f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Función Producto de f y g	
Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$, existe la función Producto f x g y se define por:	$f \cdot g=\{(x,y)/y=f(x)\cdot g(x)\}$
	$dom(f \cdot g)=dom\ f \cap dom\ g$
	$\forall\ x \in dom(f \cdot g), (f \cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Función Cociente de f y g	
Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $dom\ f \cap dom\ g \neq \theta$ con $g(x) \neq 0$, existe la función Cociente f/g y se define por:	$\frac{f}{g}=\left\{(x,y)/y=\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$
	$dom(f\ /\ g)=dom\ f \cap dom\ g, \qquad con\ g(x)\neq 0$
	$\forall\ x \in dom\left(\frac{f}{g}\right);\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Función Cociente de g y f	
Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $dom\ g \cap dom\ f \neq \theta$ con $f(x) \neq 0$, existe la función Cociente g/f y se define por:	$\frac{g}{f}=\left\{(x,y)/y=\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$
	$dom(g\ /\ f)=dom\ g \cap dom\ f, \qquad con\ f(x)\neq 0$
	$\forall\ x \in dom\left(\frac{g}{f}\right);\ \left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$

Distintas representaciones de operaciones entre funciones

Son muy útiles en nuestro estudio las representaciones heurísticas. A continuación, veremos las más usadas:

EJEMPLO 1:

Dadas las funciones ***g*** y ***f***, determine si existen las funciones *(f+g)(x)*; *(f-g)(x); (f . g)(x); (f/g)(x) y (g/f)(x)*; determine sus dominios y calcule, si es posible: *(f+g)(0); (f - g)(3); (f . g)(1); (f/g)(0) y (g/f)(-1)*

Solución:

Cálculo de *(f+g)(x)*:

$$dom\, f\, = (-\infty,\, 1]; \quad dom\, g\, = [-1,\, \infty)$$

$$dom\, f \cap dom\, g = (-\infty,\, 1] \cap [-1,\, \infty)$$

$$dom\, f \cap dom\, g = \, [-1,\, 1]; \quad \neq \emptyset$$

Podemos afirmar que: $\exists\, \boldsymbol{f + g};\ \boldsymbol{f - g\ y\ f \cdot g}$

$$dom\,(f+g) = \, [-1,\, 1]$$

$$\boldsymbol{(f+\ g)(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}}$$

$$(f+\ g)(0) = f(0) + g(0) =$$

$$= 1 + 1$$

Finalmente: $\boldsymbol{(f+\ g)(0) = 2}$

Cálculo de *(f-g)(x)*:

$$dom\,(f-g) = \, [-1,\, 1]$$

$$\boldsymbol{(f-\ g)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$$

$$(f-\ g)(3) = \nexists;\ porque\ \ -3 \nexists\ dom\,(f-g)$$

Cálculo de $(f \times g)(x),\ o\ \ (f \cdot g)(x)$:

$$dom\,(f \cdot g) = \, [-1,\, 1]$$

$$\boldsymbol{(f\cdot\ g)(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$(f\cdot\ g)(1) = f(1) \cdot g(1) =$$

$$= 0 \cdot \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{(f\cdot\ g)(1) = 0}$$

Cálculo de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$:

$$(f/g)\exists, si\colon dom\, f \cap dom\, g \neq \emptyset\ \ y\ además\ g(0) \neq 0$$

$$dom\,(f/g) = [-1,\, 1] / g(0) \neq 0$$

$$dom\,(f/g) = (-1{,}1]$$

$$\boldsymbol{(f\ /\ g)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}}$$

$$(f\ /\ g)(0) = \frac{1}{1}$$

$$\boldsymbol{(f\ /\ g)(0) = 1}$$

Cálculo de $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$:

$$(g/f)\exists, si: dom\ f \cap dom\ g \neq \emptyset\ \ y\ además\ g(0) \neq 0$$

$$dom\ (g/f) = [-1,\ 1]/f(x) \neq 0$$

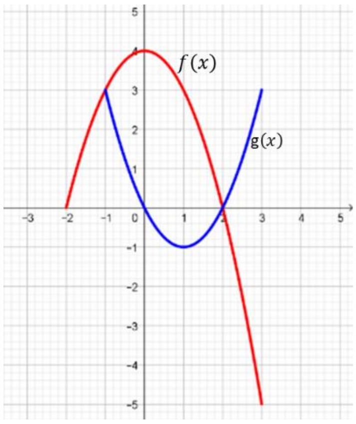
$$dom\ (g/f) = [-1,1)$$

$$\boldsymbol{(g\ /\ f)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}}$$

$$\boldsymbol{(g\ /\ f)(-1) = 0}$$

EJEMPLO 2:

Dadas las gráficas de $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f}$, determine si existen las funciones que se indican en cada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible: *(f+g)(0); (f - g)(3)]; (f . g)(1)]; (f/g)(0)] y (g/f)(1)]*



Solución:

$dom\ f = [-2,3]$ $\qquad$ $dom\ g = [-1,3]$

$dom\ f \cap dom\ g = [-2,3] \cap\ [-1,3]$

$dom\ f \cap dom\ g =\ [-1,3];\ \neq \emptyset \qquad \exists\ f +\ g;\ \ f - g\ y\ f \cdot g$

$dom\ (f + g) =\ [-1,3]$

$(f + g)(0) = f(0) + g(0) =$

$= 4 + 0 \qquad (f +\ g)(0) = 4$

$dom\ (f - g) =\ [-1,3]$

$(f -\ g)(3) = f(3) - g(3) =$

$= -5 - 3 \qquad (f -\ g)(3) = -8$

$dom\ (f \cdot g) =\ [-1,3]$

$(f \cdot\ g)(1) = f(1) \cdot g(1) =$

$= 3 \cdot (-1) \qquad (f \cdot\ g)(1) = -3$

$dom\ (f\ /\ g) =\ [-1,3]/g \neq 0$

$dom\ (f\ /\ g) =\ [-1,0) \cup (0,2) \cup (2,3]$

$(f\ /\ g)(0) = \nexists \qquad 0 \ni dom\ f$

$dom\ (g\ /\ f) =\ [-1,3]/f \neq 0$

$dom\ (g\ /\ f) =\ [-1,2) \cup (2,3]$

$(g\ /\ f)(1) = \frac{-1}{3} \qquad (g\ /\ f)(1) = -\frac{1}{3}$

EJEMPLO 3:

Dadas las funciones ***f*** y ***g***, determine si existen las funciones que se indican en cada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible: *(f+g)(0); (f - g)(3)]; (f . g)(1)]; (f/g)(0)] y (g/f)(1)]*

$$f = \{(-1,3);(0,0);(1,0);(3,3)\}; \quad g = \{(-2,0);(0,4);(1,2);(2,-1);(3,5)\}$$

Solución:

$$dom\, f = \{-1,\ 0,\ 1,\ 3\} \qquad dom\, g = \{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

$$dom\, f \cap dom\, g = \{0,\ 1,\ 3\}$$

$$\exists\, f + g;\ f - g\ y\ f \cdot g$$

$$dom\,(f+g) = \{0,\ 1,\ 3\}$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) =$$

$$= 0 + 4$$

$$\boldsymbol{(f+g)(0) = 4}$$

$$dom\,(f-g) = \{0,\ 1,\ 3\}$$

$$(f-g)(3) = f(3) - g(3)$$

$$= 3 - 5$$

$$\boldsymbol{(f-g)(3) = -2}$$

$$dom\,(f \cdot g) = \{0,\ 1,\ 3\}$$

$$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) =$$

$$= 0 \cdot 2$$

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(1)}$$

$$dom\,(f\,/\,g) = \{0,\ 1,\ 3\}/g \neq 0$$

$$dom\,(f\,/\,g) = \{0,\ 1,\ 3\}$$

$$(f\,/\,g)(0) = \frac{0}{4}$$

$$\boldsymbol{(f\,/\,g)(0) = 0}$$

$$dom\,(g\,/\,f) = \{0,\ 1,\ 3\}/f \neq 0$$

$$dom\,(g\,/\,f) = \{3\}$$

$$\boldsymbol{(g\,/\,f)(1) = \nexists}$$

EJEMPLO 4: *Sean las funciones* $h(x) = x^2 - 2x + 1$; $g(x) = \sqrt{x-1}$; *calcular, si existe, la función* $f(x) = h - 2g$; *determinar su dominio y graficar.*

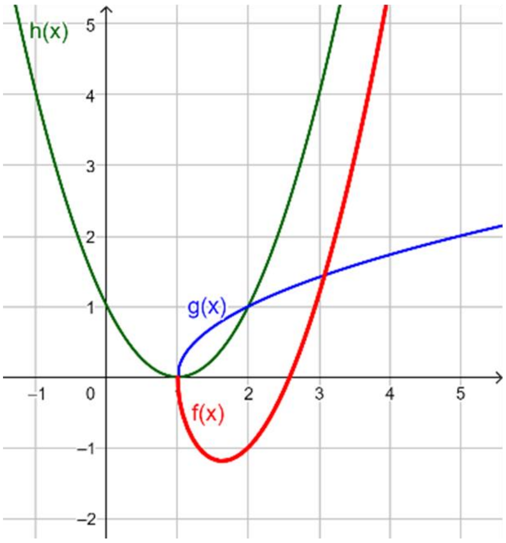
Solución:

$f(x)\exists \;\; si \;\; dom\, h \cap dom\, g \neq \theta$

$$\begin{cases} dom\, h \cap = R \\ dom\, g = [1, \infty) \end{cases} \Longrightarrow dom\, h \cap dom\, g \neq \theta \quad f(x)\exists$$

$dom\, f = [1, \infty)$

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2\sqrt{x-1}}$



Funciones compuestas

Se definen:

Función Compuesta de *f* y *g*	
Definición	Dadas dos funciones f y g tales que $dom\, f \cap rgo\, g \neq \emptyset$, existe la función compuesta ***f(g)*** o bien $f\, o\, g$ y se define por: $f(g)(x) = \{(x, y)/y = f[g(x)]\}$
Dominio	$dom\, f(g) = \{x \in dom\, g \;/\; g(x) \in dom\, f\}$ $dom\, f(g) \subset dom\, g$
Expresión	$\forall x \in dom\, f(g); [f(g)](x) = f[g(x)]$

Función Compuesta de *g* y *f*	
Definición	Dadas dos funciones f y g tales que $dom\, g \cap rgo\, f \neq \emptyset$, existe la función compuesta ***g(f)*** o bien $g\, o\, f$ y se define por: $g(f)(x) = \{(x, y)/y = g[f(x)]\}$
Dominio	$dom\, g(f) = \{x \in dom\, f \;/\; f(x) \in dom\, g\}$ $dom\, g(f) \subset dom\, f$
Expresión	$\forall x \in dom\, g(f); [g(f)](x) = g[f(x)]$

Representaciones de funciones compuestas

Existen distintas representaciones de las operaciones entre funciones:

EJEMPLO1:

Dadas ***f*** y ***g***, determine si existen las funciones compuestas ***f[g(x)]*** y ***g[f(x)]***; en caso afirmativo determine sus dominios, defínalas y encuentre, si es posible:

f[g(-1)], ***f[g(-2)]***, ***g[f(0)]*** y ***g[f(π)]***, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $\quad g(x) = sen\ (x + 1)$

Solución: $f(g)\exists;\ si\ dom f \cap rgo g \neq \emptyset$

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$4 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 4 \geq x^2$

$x^2 \leq 4 \quad \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\begin{cases} dom f = [-2,2] \\ rgo f = [0,2] \end{cases}$

$g(x) = sen\ (x + 1)$

$\begin{cases} dom\, g = \Re \\ rgo\, g = [-1;\, 1] \end{cases}$

$dom\, f \cap rgo\, g = [-2,\, 2] \cap [-1,\, 1] \neq \emptyset \Rightarrow \quad \exists f(g)$

$dom\, f(g) = \{R / \underbrace{sen(x+1) \in [-2,\, 2]}_{[-1,1] \cap [-2,2] = [-1,1]}\} = [-1, 1]$

$dom f(g) = [-1,1]$

$[f(g)](x) = \sqrt{4 - (sen(x+1))^2}$

$[f(g)](-1) = \sqrt{4 - (sen(0))^2} = 2$

$[f(g)](-2)\nexists; -2 \ni dom\ f(g)$

$dom\, g \cap rgo\, f = \Re \cap [0;\, 2] = [0;\, 2] \neq \emptyset \therefore g(f)\exists$

$dom\, g(f) = \{x \in dom\, f \,/\, f(x) \in dom\, g\}$

$dom g(f) = \{[-2; 2] / \underbrace{\sqrt{4 - x^2} \in \Re}_{4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2,\, 2]}\}$

$dom g(f) = [-2; 2]$

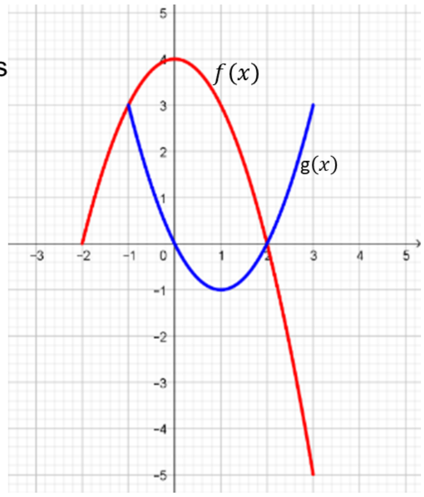
$g[f(x)] = sen\left(\sqrt{4 - x^2} + 1\right)$

$g[f(0)] = sen(\sqrt{4 - 0} + 1) = sen\ (3)$

$g[f(\pi)]\nexists; \pi \ni dom\ g(f)$

EJEMPLO 2:

Dadas las gráficas de ***g*** y ***f***, determine si existen las funciones que se indican encada caso; determine sus dominios y calcule, si es posible: ***f[g(1)]***; ***f[g(-1)]***; ***g[f(1)]***; y ***g[f(4)]***



Solución:

$\begin{cases} dom\ f = [-2, 3] \\ \text{rgo}\ f = [-5, 4] \end{cases} \qquad \begin{cases} dom\ g = [-1, 3] \\ \text{rgo}\ g = [-1, 3] \end{cases}$

$dom f \cap rgo g = [-2, 3] \cap [-1, 3] =$

$= [-1, 3]$

$dom f \cap rgo g \neq \emptyset \Rightarrow \exists f(g)$

$dom f(g) = \{[-1, 3] / \underbrace{[-1, 3] \in [-2, 3]}_{[-1,3]}\}$

$dom f(g) = [-1, 3]$

$[\mathrm{f}(g)](1) = f[\mathrm{g}(1)] =$

$= f(-1) = 3$

$[\mathrm{f}(g)](-1) = f[\mathrm{g}(-1)] =$

$= f(3) = -5$

$dom g \cap rgo f = [-1, 3] \cap [-5, 4] =$

$= [-1, 3]$

$dom g \cap rgo f \neq \emptyset \Rightarrow \exists g(f)$

$dom g(f) = \{[-2, 3] / \underbrace{[-5, 4] \in [-1, 3]\}}_{[-1,3]} =$

$dom g(f) = [-1, 3]$

$[\mathrm{g}(f)](1) = g[f(1)] =$

$= g(3) = 3$

$[\mathrm{g}(f)](4), 4 \notin dom\ g(f)$

$\nexists [\mathrm{g}(f)](4),$

EJEMPLO 3:

Dadas las funciones g y f, determine si existen las funciones compuestas $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y calcule, si es posible: $f[g(1)]$; $f[g(-2)]$; $g[f(1)]$; $g[f(4)]$; $f[f(0)]$; y $g[g(2)]$

$f(x) = \{(-2, 0), (-1, 3), (0, 4), (1, 3), (2, 0), (3\ \ -5)\}$ $g(x) = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$

Solución:

$\begin{cases} dom\ f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ rgo\ f = \{-5, 0, 3, 4\} \end{cases}$ $\begin{cases} dom\ g = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \\ rgo\ g = \{-1, 0, 3\} \end{cases}$

Existencia de $f \circ g$:

$domf \cap rgo\ g = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \cap \{-1, 0, 3\} =$
$= \{-1, 0, 3\}$

$dom\ f \cap rgo\ g \neq \emptyset \Rightarrow \exists f(g)$

$[f(g)](1) = f[g(1)] = f(-1)$

$[\mathrm{f}(g)](1) = 3$

$[f(g)](-2) = f[g(-2)]\ \nexists$

$[\mathrm{f}(g)](-2)\nexists$

Existencia de $g \circ f$:

$dom\ g \cap rgo\ f = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \cap \{-5, 0, 3, 4\} =$
$= \{0, 3\}$

$dom\ g \cap rgo\ f \neq \emptyset \Rightarrow \exists g(f)$

$[g(f)](1) = g[f(1)] = g(3)$

$[g(f)](1) = 3$

$[g(f)](4) = g[f(4)]\ \nexists$

$[g(f)](4)\nexists$

Existencia de $f \circ f$:

$domf \cap rgo\ f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \cap \{-5, 0, 3, 4\} =$
$= \{0, 3\}$

$dom\ f \cap rgo\ f \neq \emptyset \Rightarrow \exists f(f)$

$[f(f)](0) = f[f(0)] = f(4)$

$[f(f)](0)\nexists$

Existencia de $g \circ g$:

$dom\ g \cap rgo\ g = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \cap \{-1, 0, 3\} =$
$= \{-1, 0, 3\}$

$dom\ g \cap rgo\ g \neq \emptyset \Rightarrow \exists g(g)$

$[g(g)](2) = g[g(2)]\ = g(0)$

$[f(g)](0) = 0$

CUESTIONARIO 3:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

a). ¿La función Valor absoluto, es uno a uno? ¿y la función seno lo es?

b). Una función racional de la forma: $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x-h} + k}$, tiene inversa? Si es así: ¿cuál es?

c). Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x-1}}$ y $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x-1}}$ ¿existe la función $\boldsymbol{h(x) = \frac{f}{g-1}}$?. Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

d). Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{tg}\, x}$ ¿existe la función $\boldsymbol{g(x) = f + f^{-1}}$?, Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

e). Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$ ¿existe la función $\boldsymbol{f[f(x)]}$?, Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

BIBLIOGRAFÍA

- AYRES, F. Jr. (1971). *Teoría y Problemas de Cálculo Diferencial e Integral*. Mc. Graw Hill. México.
- CÁTEDRA AMI. FRT-UTN. (2024). *Unidad 1- Funciones reales*. Aula virtual AMI. FRT-UTN.
- ETCHEGOYEN, S. y otros, (2001), *Matemática 1*. Kapelusz editorial S.A., Buenos Aires.

- FONES, A., (2005), *Matemática 2*. Kapelusz editorial S.A., Buenos Aires.
- CÁTEDRA AMI. FRT-UTN. (2024). *Guía de Trabajos Prácticos N° 1. - Funciones*. Aula virtual AMI. FRT-UTN.
- KACZOR, R. y otros, (1999), *Matemática I*. Ediciones Santillana S.A., Bs. As.
- LARSON, HOSTELER y EDWARS, (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Mc Graw Hill, Madrid.
- MENOCAL, G. (2018). *Matemática Preuniversitaria. Teoría y Práctica*. Editorial Académica Española. Madrid.
- PROYECTO EMCI. (1988). *Proyecto de Investigación: "La enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería"*. Universidad nacional de San Juan.
- PURCELL, E. y otros. (2007). *Cálculuo 9e*. Pearson Educación. México D.F.
- SPIVAK, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté. México D.F.
- STEWART, J. (2010) 4ta. Edición. *Cálculo Conceptos y Contextos*. Cengage Learning Editores. México, D.F.
- STEWART, J. (2012) 7ma. Edición. *Cálculo de una variable Trascendentes tempranas*. Cengage Learning Editores. México, D.F.
- TAYLOR, H. y WADE, T. (1971). *Cálculo Diferencial e Integral*. Litografía Ingramex, S.A., México D.F.
- TORANZO, F. (1966). *Enseñanza de la Matemática*. Kapeluz. Buenos Aires. Argentina.

Algunas respuestas del CUESTIONARIO 1:

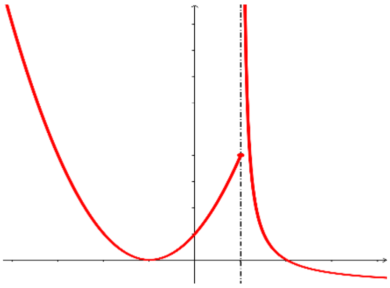
En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

b). Si una función tiene asíntota vertical *x=2*, ¿significa que: $dom\ f = R$?

Solución:

En general es Falso; el domino es: $dom\ f = R - \{2\}$

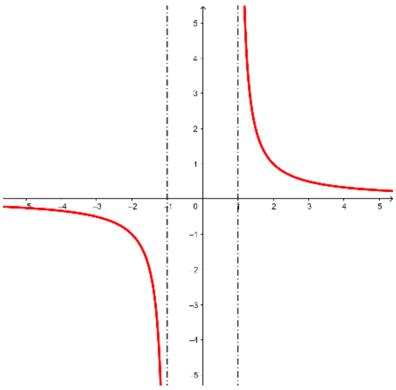
Pero puede suceder:



d). Si una función tiene una asíntota vertical *x=1* y es función Impar; ¿tiene o no otra asíntota vertical? Si es que la tiene: ¿cuál es su ecuación?

Solución:

Si x=1 es A.V. de f y f es Impar; x=-1 es otra A.V. de f.



f). Dada la función: $y = ax^2 + c$, ¿Qué indican en la gráfica los coeficientes a y c? ¿La gráfica tiene desplazamientos respecto de $y = x^2$?

Solución:

Es una función cuadrática, su gráfica es una parábola de eje vertical.

"a" indica la apertura de la parábola y además, si las ramas van hacia arriba o hacia abajo.

Como b=0; indica que no tiene desplazamiento horizontal.

"c" indica la ordenada al origen de la curva; donde la parábola corta al eje OY.

Si $a \neq 1$, *indica que la curva es más cerrada* $a > 1$ *o más abierta* $0 < a < 1$ *que* $y = x^2$

Si $c \neq 0$, *indica en punto de corte con el eje OY*

h). Si *f* es una función y $(0,\ 2) \in f$, ¿puede suceder que $(0,\ 0) \in f$?

Solución:

NO!!!; si eso ocurre, no sería función.

Algunas respuestas del CUESTIONARIO 2:

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

b). Una función racional de la forma: $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$, tiene asíntotas?

Solución:

Si: x=h es A.V. de f y y=k es A.H. de f.

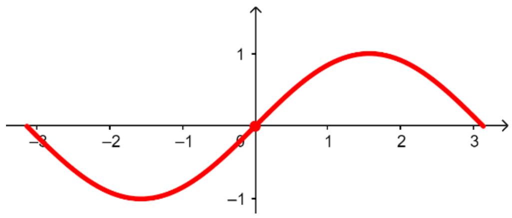
c). Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\ x; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ¿cuál es su dominio y su rango? ¿cómo es su gráfica?

Solución:

Se trata de una función dada en ramas.

$$dom\ f = [-\pi, 0] \cup (0, \pi]$$

$$dom\ f = [-\pi, \pi]$$



Tanto el rango de seno como el de coseno es [-1, 1],

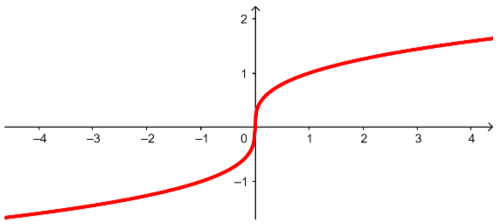
entonces: $rgo\ f = [-1, 1]$

e). La función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ¿cómo es su crecimiento? ¿$f(0)$; $f(1)$?

Solución:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{x}$$

$$dom\ f = R;\ rgo\ f = R$$



f es creciente en todo su dominio

f). La función: $y = 2^{x-1}$, ¿cómo es su crecimiento? ¿$f(0)$; $x/f(x) = 1$?

Solución:

$y = 2^{x-1}$ *es una función exponencial, su dominio es R.*

Como la base: 2>1, es enteramente Creciente

$$f(0) = 2^{0-1}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$x/f(x) = 1;\ \ 2^{x-1} = 1$$

$$x = 0$$

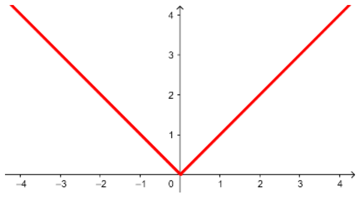
Algunas respuestas del CUESTIONARIO 3

En cada uno de los siguientes apartados aplica los conocimientos estudiados para respóndelo; justifica matemáticamente tu razonamiento. Puedes usar representaciones gráficas.

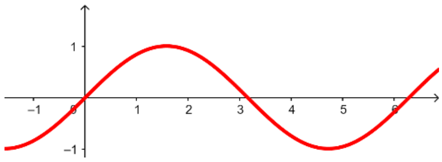
a). ¿La función Valor absoluto, es uno a uno? ¿y la función seno lo es?

Solución:

La función valor absoluto es Par, por lo tanto, no es uno a uno.



La función seno es Impar, pero no es uno a uno porque no cumple el criterio de la regla horizontal.



c). Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x-1}}$ y $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x-1}}$ ¿existe la función $\boldsymbol{h(x) = \frac{f}{g-1}}$?. Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

Solución:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x-1};\ \ dom\, f = R - \{1\}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x-1};\ \ dom\, g = (1, \infty)}$$

$$\boldsymbol{g(x) - 1 = 0;\ \ x = 2}$$

$$\boldsymbol{dom\, f \cap dom\, g - 1 = (1, 2) \cup (2, \infty)}$$

$$\boldsymbol{dom\, f \cap dom\, g - 1 \neq \emptyset;\ \ \exists\, h}$$

$$\boldsymbol{dom\, h = (1, 2) \cup (2, \infty)}$$

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{\frac{2}{x-1}}{\sqrt{x-1} - 1}}$$

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{2}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x-1} - 1\right)}}$$

d). Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{tg}\, x}$ ¿existe la función $\boldsymbol{g(x) = f + f^{-1}}$?, Si es así: ¿cuál es, y qué dominio tiene?

Solución:

$\boldsymbol{f(x) = \mathbf{tg}\, x}$ *No es uno a uno, pero si restringimos el dominio a:* $\boldsymbol{dom^{*} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ *si lo es y su rango es:* $\boldsymbol{rgo\ f = R}$. *Luego:* $\boldsymbol{f^{-1}(x) = arctg\ x}$; $\begin{cases} \boldsymbol{dom\ f^{-1} = R} \\ \boldsymbol{rgo\ f^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}$

$$\boldsymbol{g(x) = tg\ x + arctg\ x;\ \ dom\ g = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$