Análisis Matemático I Recuperatorio del 1°P 05-12-22

K1091

7

Apellido y Nombre: MARCOLIN FRANCO

En ningún ejercicio se puede aplicar L'Hopital

1) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinar los valores de a y b para que f sea derivable en $x_0 = 0$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln(1+x) & si\ x \geq 0 \\ a.\text{sen}(2x) + b & si\ x < 0 \end{cases}$$

2) Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y la función "g" derivable en $x_0 = 3$, siendo la recta tangente al gráfico de "g" en $x_0 = 3$ la de ecuación $\frac{1}{3}y - x = 2$

Se pide:

2A) Traducción de datos correspondiente a "g".

R++

2B) Hallar los valores de "b" y "d" para que f sea derivable en $x_0 = 3$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \geq 3 \\ 2bx + d & si\ x < 3 \end{cases}$$

3) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2} + 1$ Se pide: a) Dominio, Extremos relativos aplicando el criterio del signo de f' b) Asíntotas. c) Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento d) Esbozar el gráfico de f

4a) Halle todos los valores de $k \neq 0$ para que la ecuación: $kx^3 + x^2 + \text{sen}(\pi.x) = 0$ tenga al menos una raíz real en el intervalo $(-2, 2)$

4b) Dato $|f(x) - 9| \leq 3(x-5)^2$ Con $x \neq 5$ Calcular $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

5) Sea $y = f(x)$ definida por $(3y^5 - 3x)^3 + 2 = 2x.y^2 + \ln y$

Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva gráfica de f en $(1, y_0)$

1) Primero pedimos que f sea CONT en $x_0=0$

$f(0)=l_i=l_d$ $\quad f(0)=0+\ln(1+0)=0$

$l_i=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot sen(2x)+b)=b$

$l_d=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim(x+\ln(1+x))=0$

$f(0)=l_i=l_d$

$0=b=0$

Si $b=0$ f es continua en $x_0=0$ $\therefore f(x)=\begin{cases} x+\ln(1+x) & si\ x\geq 0 \\ a\cdot sen(2x) & si\ x<0 \end{cases}$

Ahora pediremos:

$f'(0^+)=f'(0^-)$

$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=1+\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=1+\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}\right)=$

$1+\ln e=\boxed{2}$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\,sen(2x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\cdot 2\,sen(2x)}{2x}=2a$ $\quad \to 1$ (inf equiv)

pedimos: $f'(0^+)=f'(0^-)$ $\therefore 2=2a$ $\therefore \underline{a=1}$

---

2 a) TRADUCCIÓN $\qquad \frac{1}{3}y=x+2 \qquad y=3x+6$

$g(3)=15 \quad g'(3)=3$

g es derivable en $x_0=3 \Rightarrow g$ es CONT en $x_0=3$ $\begin{cases} \text{Existe } g(3)=15 \\ \text{Existe } \lim_{x\to 3} g(x)=g(3)=15 \end{cases}$

$g'(3)=\lim \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

estrict. crec en $x=3$

g es derivable en $x_0=3 \Rightarrow g$ es CONT en $x_0=3$ $\begin{cases} \text{Existe } g(3)=15 \\ \text{Existe } \lim_{x\to 3} g(x) = g(3) = 15 \end{cases}$

$$g'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$g'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-15}{x-3} = \boxed{3} > 0 \Rightarrow g \text{ es estrict. crec en } x_0=3$$

2b) $f(3) = g(3) = 15$ $\quad l_i = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2bx+d) = 6b+d$

$$l_d = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (g(x)) = g(3) = 15$$

Pedimos: $f(3) = l_i = l_d$ $\quad 15 = 6b+d = 15$ $\quad 6b+d=15$ $\quad -6b+15=d$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 3 \\ 2bx+15-6b & \text{si } x<3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{g(x)-15}{x-3} = g'(3^+) = \boxed{3}$$

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2bx+\cancel{15}-6b-\cancel{15}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2b\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 2b$$

pedimos: $f'(3^+) = f'(3^-)$

$3 = 2b \quad b = \frac{3}{2}$

3) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ AV: $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2}{x-2} + 1 \right) = \infty$ Existe AV de ecuación $x = 2$

A. oblicua: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{x} = 1$

$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{0})} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \right) =$

$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} + 1 - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + x - 2 - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x} \to 0}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x} \to 0} = 3$ $\boxed{y = x + 3}$

$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0$ $x = 0$, $x = 4$

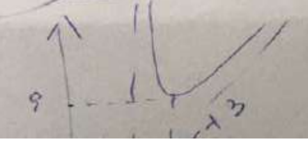
x		0		2		4	
f'	+	0	−		−	0	+

f alcanza valor máx Relat en $x = 0$. El valor del máx es $f(0) = 1$

f alcanza valor mín Relat en $x = 4$. El valor del mín es $f(4) = 9$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

f decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$

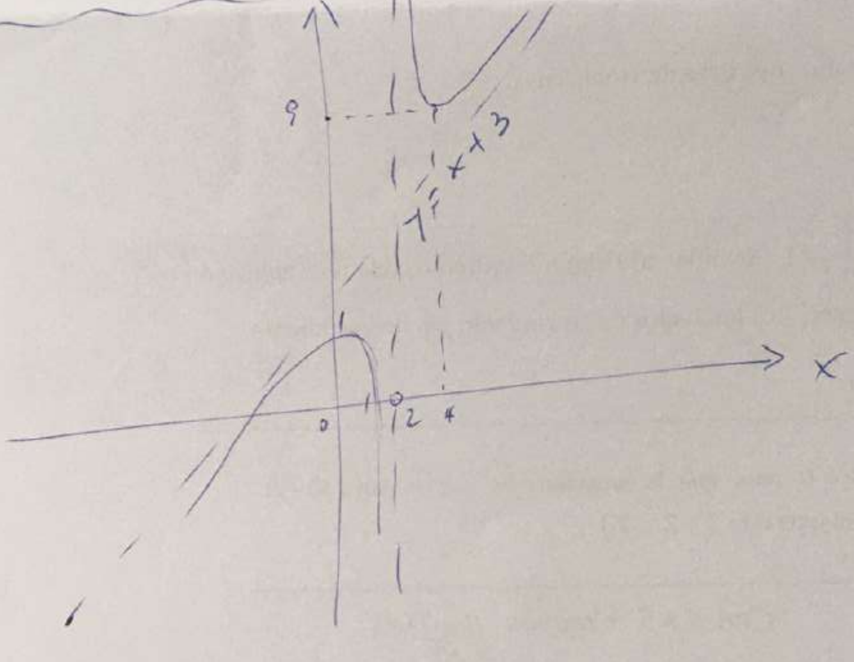


x		0		2				
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

en $x = 0$.
$f(0) = 1$

Relat en $x = 4$
f alcanza valor min
El valor del min es $f(4) = 9$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
f decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$



4a) Construimos una función

$f:[-2,2] \to \mathbb{R} / f(x) = kx^3 + x^2 + \operatorname{sen}(\pi x)$

f es continua en $[-2,2]$ por ser suma de func. continuas.

Por otro lado: $f(-2) = -8k + 4 + \operatorname{sen}(-2\pi) = 4 - 8k$

$f(2) = 8k + 4 + \operatorname{sen}(2\pi) = 4 + 8k$

pedimos: $f(-2) \cdot f(2) < 0$

$(4-8k) \cdot (4+8k) < 0$

$16 - 64k^2 < 0$ $\quad 16 < 64k^2 \quad \frac{\cancel{16}^{1}}{\cancel{64}_{4}} < k^2$

$k^2 > \frac{1}{4} \quad |k| > \frac{1}{2} \quad k > \frac{1}{2} \vee k < -\frac{1}{2}$

4b) $-3(x-5)^2 \leq f(x) - 9 \leq 3(x-5)^2$

$\underbrace{9 - 3(x-5)^2}_{g(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{3(x-5)^2 + 9}_{h(x)}$

$\lim_{x \to 5} g(x) = 9 \quad \lim_{x\to 5} h(x) = 9 \quad \lim_{x \to 5} g(x) = h(x) = 9$

$\Rightarrow \lim_{x \to 5} f(x) = 9$

5) $3(3y^5 - 3x)^2 \cdot (15y^4 \cdot y' - 3) + 0 = 2 \cdot y^2 + 4xy \cdot y' + \frac{y'}{y}$

$(x, y) = (1, 1)$ ... $4y' + y'$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{g(x)}$

$\lim_{x \to 5} g(x) = 9$ $\quad \lim_{x \to 5} h(x) = 9$ $\quad h(x),\ \lim_{x \to 5} g(x) = h(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 5} f(x) = 9$

5) $3(3y^5 - 3x)^2 \cdot (15y^4 \cdot y' - 3) + 0 = 2 \cdot y^2 + 4x y \cdot y' + \frac{y'}{y}$

$(x_0, y_0) = (1,1)$

$\underbrace{3 \cdot (3-3) \cdot (15y' - 3)}_{0} = 2 + 4y' + y'$

$-2 = 5y' \qquad -\frac{2}{5} = y'$

RT: $y - 1 = -\frac{2}{5}(x-1)$

RN: $y - 1 = \frac{5}{2}(x-1)$