

Trabajo práctico 4 - derivadas

Punto 1. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones por definición. Compara hacerlo de este modo con aplicar la regla que corresponda en cada caso.

1. $f(x) = x^3$

2. $g(x) = \sqrt{x}$

Punto 2. Grafica las siguientes funciones y encuentra los puntos en los que la pendiente de la recta tangente tiene el mínimo valor absoluto. ¿Encuentras alguna relación interesante?

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

2. $g(x) = x^3 - 3x$

3. $h(x) = \cos x$

Punto 3. Considerando la interpretación de la derivada como una ratio de variación instantánea, ¿qué podrías decir sobre los fenómenos: a) periódicos, b) de crecimiento exponencial, c) de decaimiento exponencial, d) de crecimiento logarítmico? *Sugerencia:* estudia la relación entre las funciones seno (o coseno, si prefieres), exponencial natural, exponencial natural de exponente negativo (es decir, e^{-x}) y logaritmo natural, y sus respectivas funciones derivadas.

Punto 4. Grafica las siguientes funciones y explica si presentan puntos en los que no existe la derivada. En tal caso, clasifícalos según lo visto en teoría. ¿Alguna de las funciones tiene tangentes verticales? En tal caso, escribe su ecuación.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. $h(x) = e^{|x^2-1|}$

4. $f(x) = \sqrt[5]{x+1} + 2$

5. $g(x) = -\sqrt[3]{|x-3|} + 3$

Punto 5. Encuentra las derivadas de las funciones del punto anterior en el dominio más amplio que sea posible en cada caso. ¿Qué teoremas usas para las funciones definidas por tramos? Compara los dominios de las funciones y de sus respectivas derivadas.

Punto 6. Encuentra la derivada de $f(x) = \ln(-x)$. ¿Cuál es el dominio de la derivada. Mismas consignas para $g(x) = \ln|x|$.

Punto 7. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones. En cada paso del desarrollo escribe qué reglas de derivación usas.

1. $q(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4 + 13x^2 + 2x - 2}$

2. $f(t) = \sec(t^4 - 7t^2 + 13)$

3. $g(x) = \exp(\tan x^2)$

4. $h(x) = (x^3 - x + 8)^{17}$

5. $f(x) = 4^{3x} + \cos(x^2 - 3x e^x)$

6. $g(x) = \log_2 \sqrt{x^4 + 1}$

7. $h(x) = \sec^{-1}(x^2 - 1)$

Punto 8. En la teoría se ha mencionado que en la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se pueden definir dos funciones explícitas de la forma $y = f(x)$. Encuentra y' : a) por derivación implícita, b) derivando cada una de las funciones explícitas por separado. ¿La expresión hallada en (a) es válida para solamente una de las funciones explícitas, o para ambas? Cualquiera que sea tu respuesta, explica por qué.

Punto 9. En la teoría se ha señalado que en el folio de descartes podrían definirse tres funciones explícitas de la forma $y = f(x)$, ¿cuáles? No es necesario que encuentres las expresiones analíticas; basta con que las señales en la gráfica. Halla la derivada implícita para el folio de Descartes de ecuación $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Nota: a no es una variable, sino un parámetro; en el ejemplo dado en teoría, $a = 3$. ¿Qué sucede con las rectas tangentes en el origen?

Punto 10. Encuentra la derivada implícita para la lemniscata de Bernoulli de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$. Comprueba que los puntos de coordenadas $(0, 0)$ y $(2, 0)$ pertenecen a la gráfica de la función. ¿Qué puedes decir sobre la pendiente de las respectivas rectas tangentes en esos puntos?

Punto 11. Para las siguientes funciones potenciales-exponenciales: a) escribe su dominio de definición, b) encuentra las respectivas derivadas.

1. $f(x) = x^x$

2. $g(x) = (\tan x)^{\cos x}$

3. $h(x) = (\sin \sqrt{x})^{x^3 - x}$

4. $f(x) = (x^2 + 1)^{\ln(\sin x)}$

5. $g(x) = (\arctan 2x)^{\exp(x)}$

Punto 12. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones definidas por tramos en el dominio más amplio que sea posible en cada caso. ¿Qué teoremas usas para facilitar el cálculo? ¿O es imprescindible encontrar la derivada por definición en algunos puntos?

1. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ -\sin x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & \text{si } x \leq 1 \\ e(3x - 2), & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Punto 13. Dada la función f definida por tramos, encuentra los valores de los parámetros para que sea diferenciable en el dominio más amplio posible e indica cuál es entonces ese dominio.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Punto 14. Encuentra las derivadas de orden superior que se indican en cada caso.

1. $f'''(x)$, para $f(x) = x^4 - 3x^2 + \sin x + 8$

2. $\frac{d^2 y}{dx^2}$, si $y = x^3 \csc x - 7e^{2x}$

3. $D_x^4 f(x)$, para $f(x) = x \cos x^2$

4. \ddot{u} , si $u(t) = \ln \cos t$

