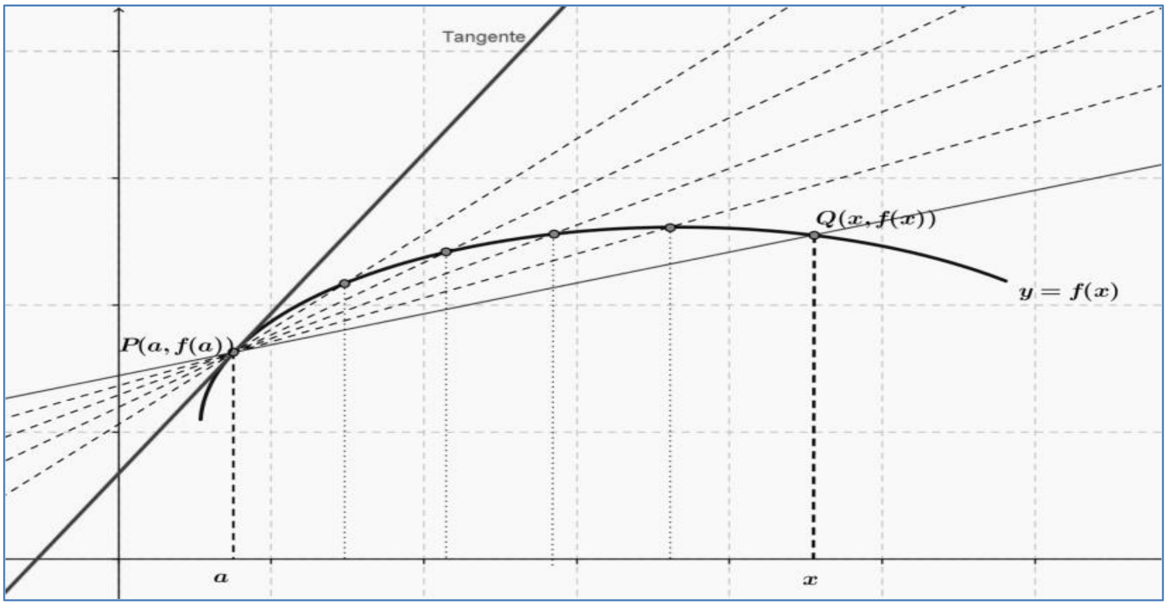
Recta Tangente

Definición de Recta Tangente

Recta tangente a la gráfica de una función en el punto P [a, f(a)]

Con a ∈ dom f, es la recta posición límite, si existe y es única, de la recta secante PQ



Pasos para encontrar la Ecuación de la recta Tangente en un punto determinado de la función

1.- **Encuentra la derivada de la función:** La derivada de una función, denotada como f′(x) o dy/dx , proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la función.

2.- **Evalúa la derivada en el punto de interés:** Si deseas encontrar la recta tangente en el punto x=a, calcula f′(a), que será la pendiente de la recta tangente en ese punto.

3.- **Encuentra el valor de la función en el punto de interés:** Calcula f(a), que te dará el valor de la función en x=a. Este valor es el punto en la gráfica donde la recta tangente toca la función.

4.- **Usa la fórmula de la recta:** La ecuación de la recta tangente en el punto [a, f(a)], con pendiente f′(a), se puede escribir como:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

Despejando "y", se puede escribir la ecuación de la recta tangente en la forma:

$$(1) \quad y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

La pendiente de la recta tangente t, denotada por m_t, es: $m_t = \operatorname{tg} \varphi = f'(a)$.

Reemplazando en (1) se obtiene la ecuación de la **RECTA TANGENTE** a la gráfica de f en el punto P [a, f(a)]

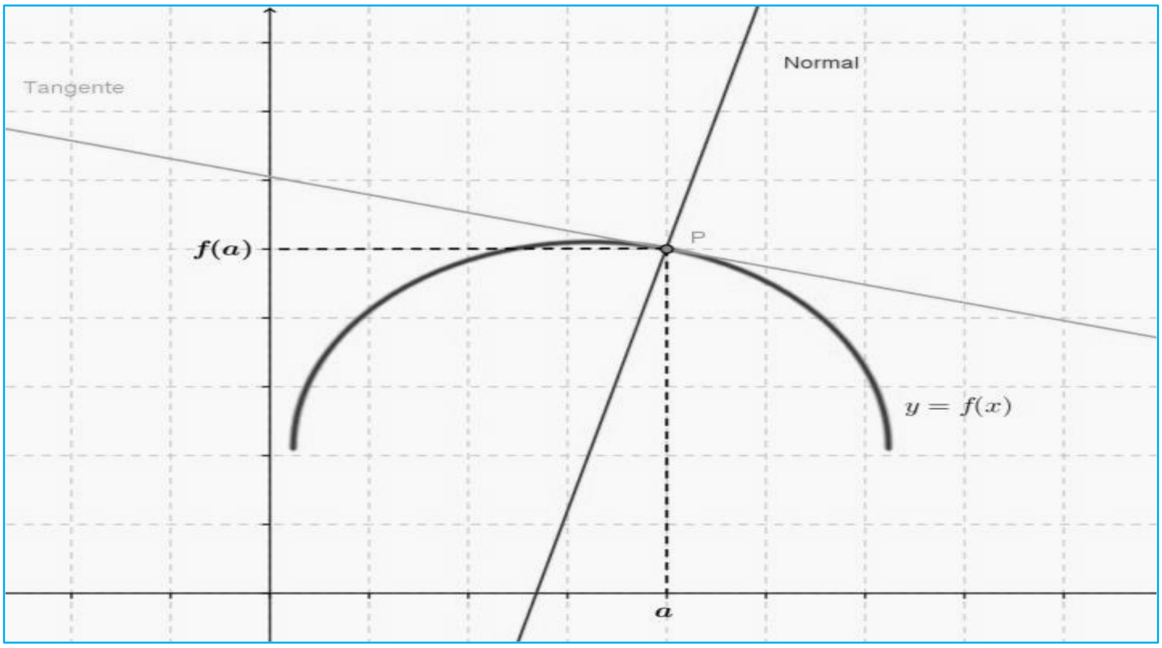
$$y = m_t\,(x - a) + f(a)$$

Recta Normal

La recta perpendicular a t en el punto P se llama **RECTA NORMAL** y su ecuación es:

$$y = m_n\,(x - a) + f(a)$$

con $m_n = \dfrac{-1}{m_T}$ con $m_T \neq 0$ Si $m_T = 0$ la recta normal es vertical



Ejemplo 1 *(Conozco la ecuación de la curva y el punto o una de sus coordenadas donde quiero encontrar la RT y/o la RN)*

Considera la función $f(x) = x^2$

Queremos encontrar la recta tangente y la recta normal en el punto x=2.

1. **Encuentro la derivada:**

La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

2. **Evalúo la derivada en x=2:**

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Así, la pendiente de la recta tangente en x = 2 es 4.

3. **Encuentro el valor de la función en x=2:**

$f(2) = 2^2 = 4$. Así, el punto en la gráfica es (2,4).

4. **Escribo la ecuación de la recta tangente:**

$y - 4 = 4\ (x-2)$

$y = 4\ (x-2) + 4$

$y = 4\ x - 8 + 4$

$y = 4\ x - 4$

5. **Escribe la ecuación de la recta normal:**

$m_n = -\ 1/4$

$y - 4 = -1/4\ (x-2)$

$y = -1/4\ x + 1/2 + 4$

$y = -1/4\ x + 9/2$

Ejemplo 2 *(Conozco la ecuación de la curva y una relación de la pendiente de la RT con otra recta)*

Determine las ecuaciones de, la o las rectas tangentes a la curva

$y = x^2$ que son perpendiculares a la recta $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

1.- **Encuentro la pendiente m_T de la R_T**

$m_T = -\frac{1}{m_n} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$

2.- **Encuentro la derivada de la función**

La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$ por lo que $m_T = 2.x_0$

3.- **Igualo las expresiones obtenidas en 1 y 2**

$2.x_0 = 4 \qquad x_0 = 2$

4.- **Reemplazo x_0 en la función para obtener y_0**

$f\ (2) = 2^2 = 4 \qquad y_0 = 4$

5.- **Escribo la ecuación de la recta tangente:**

$y - 4 = 4\ (x-2)$

$y = 4\ (x-2) + 4$

$y = 4\ x - 8 + 4$

$y = 4\ x - 4$

Ejemplo 3 *(Conozco la ecuación de la curva y un punto de paso que pertenece a la RT o RN pero no a la curva)*

Determine las ecuaciones de, la o las rectas tangentes a la curva

$y = x^2$ que pasan por el punto (1, 0)

1.- **Encuentro la pendiente m_T de la R_T**

$$m_T = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 1} = \frac{y_0}{x_0 - 1}$$

2.- **Encuentro la derivada de la función y la evalúo en x_0**

La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$ por lo que $m_T = 2.x_0$

3.- **Igualo las expresiones obtenidas en 1 y 2**

$$2\,x_0 = \frac{y_0}{x_0 - 1}$$

$$y_0 = 2\,x_0^2 - 2\,x_0$$

4.- **Como el punto (x_0, y_0) también pertenece a la función**

$$y_0 = x_0^2$$

5.- **Reemplazo 4 en 3**

$$x_0^2 = 2\,x_0^2 - 2\,x_0$$

$$x_0^2 - 2\,x_0 = 0$$

$x_0\,(x_0 - 2) = 0$ $\quad$ $x_0 = 0$ entonces $y_0 = 0$

$\quad$ $x_0 = 2$ entonces $y_0 = 4$

6.- **Escribo las ecuaciones de las rectas tangentes**

En el primer caso $m_T = 0$ o sea que es una recta horizontal de ecuación $y = 0$

En el segundo caso $m_T = \frac{4}{2-1} = 4$

$$y - 4 = 4\,(x - 2)$$

$$y = 4\,(x - 2) + 4$$

$$y = 4\,x - 8 + 4$$

$$y = 4\,x - 4$$

Preguntas para repaso

¿Cuál es la relación entre la pendiente de la recta tangente y la derivada de la función en ese punto?

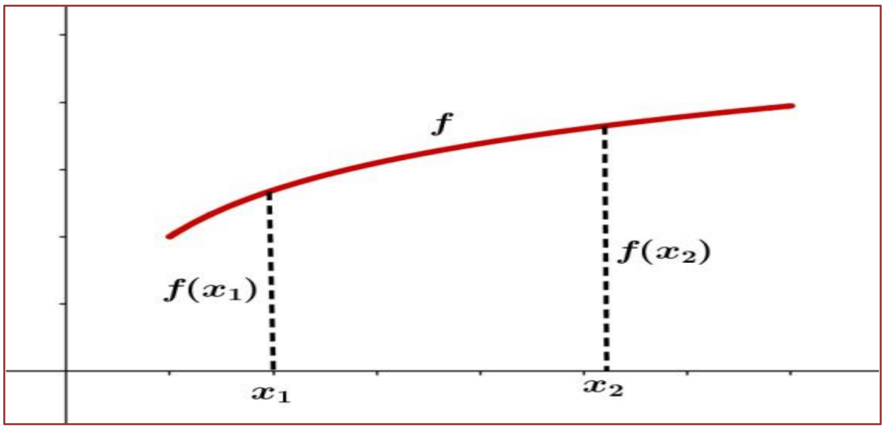
¿Qué diferencia hay entre la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto?

¿Cómo puedes interpretar la relación entre la recta tangente y la forma de la curva en ese punto?

Función Creciente

Una función f definida en un intervalo abierto (a,b) se dice que es **CRECIENTE** en dicho intervalo si y solo sí

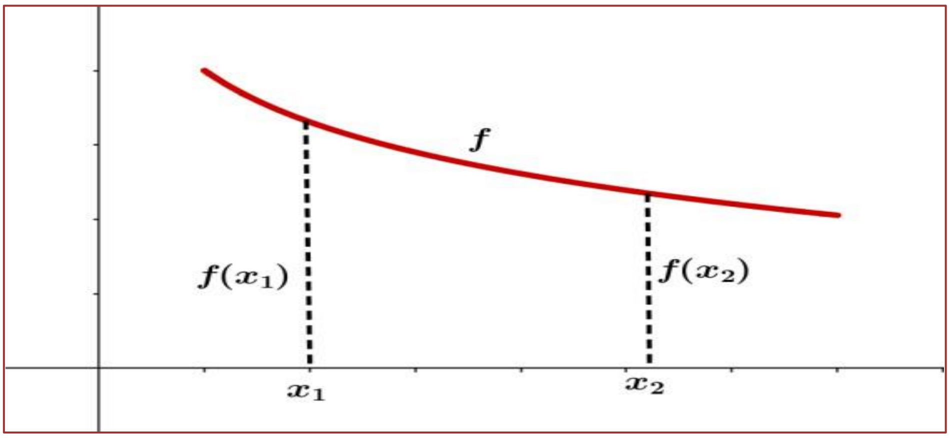
$$f(x_1) <= f(x_2) \quad \text{si} \quad x_1 < x_2$$



Función Decreciente

Una función f definida en un intervalo abierto (a,b) se dice que es **DECRECIENTE** en dicho intervalo si y solo sí

$$f(x_1) >= f(x_2) \quad \text{si} \quad x_1 < x_2$$



También se puede determinar si una función es creciente o decreciente teniendo en cuenta el signo de la primera derivada por medio del siguiente teorema

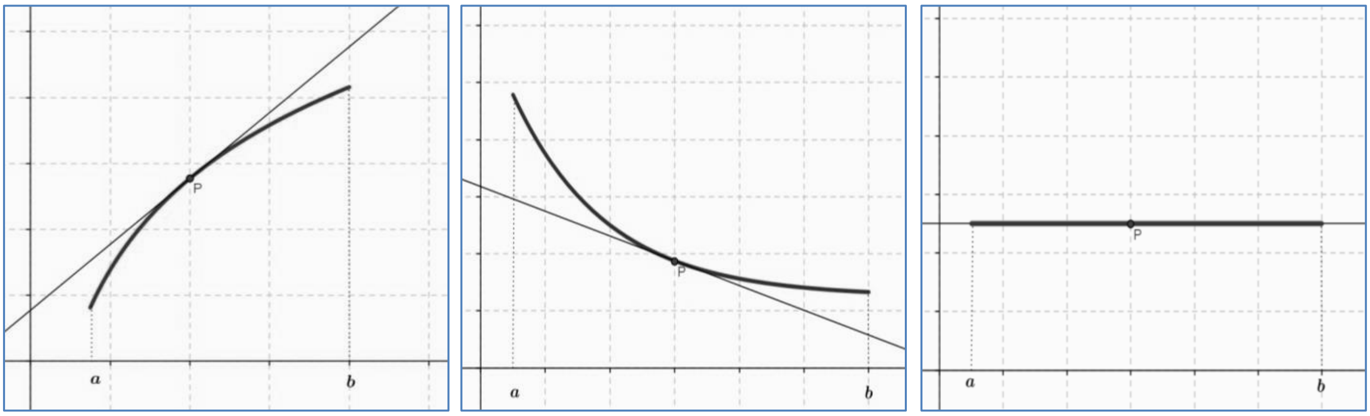
***Teorema*:**

Sea una función f continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b)

i) Si $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ $\rightarrow$ f es CRECIENTE en (a, b)

ii) Si $\forall\, x \in (a, b)$ $f'(x) < 0 \rightarrow$ f es DECRECIENTE en (a, b)

iii) Si $\forall\, x \in (a, b)$ $f'(x) = 0 \rightarrow$ f es CONSTANTE en (a, b)



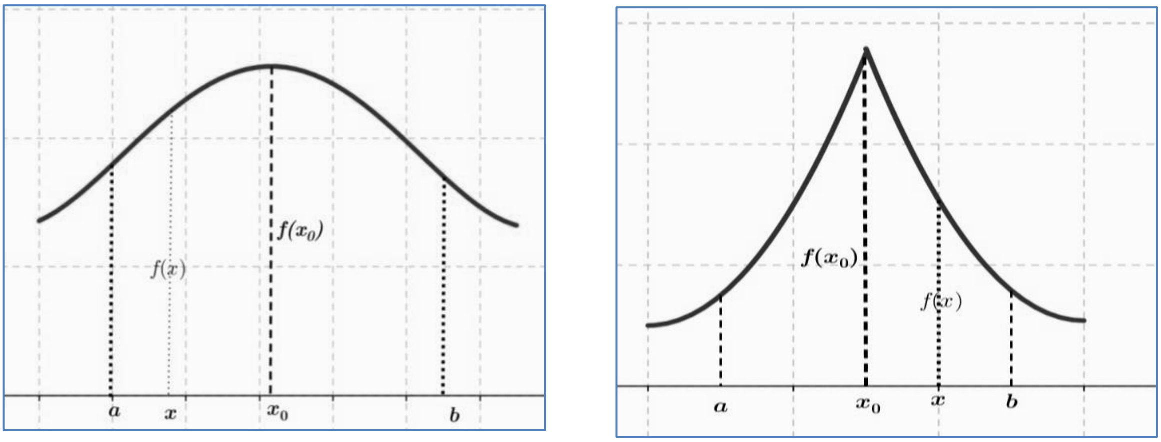
I ii iii

Extremos Relativos de una Función

Definición de Máximo Relativo

Sea una función f y un punto $x_0 \in$ dom f, se dice que $f(x_0)$ es un MÁXIMO RELATIVO de f si existe un intervalo (a, b) que contiene a x_0 tal que:

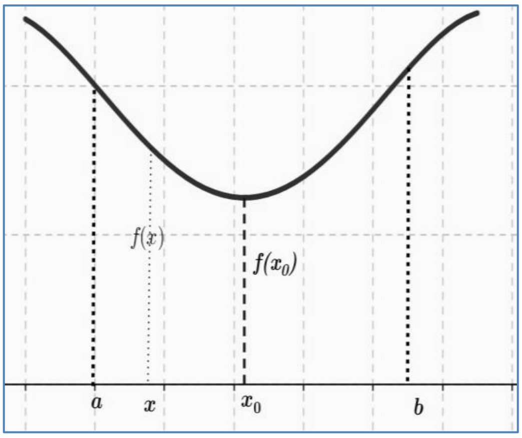
$f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$ incluido en el dom f.

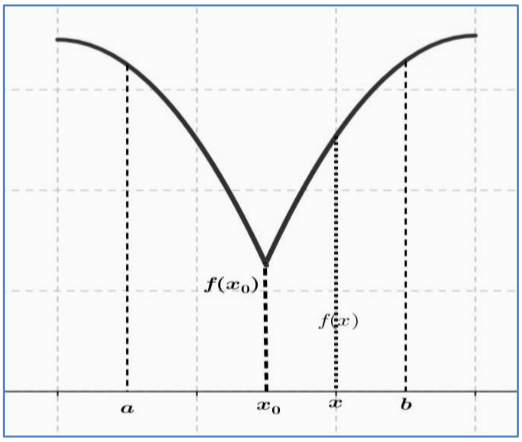


Definición de Mínimo Relativo

Sea una función f y un punto $x_0 \in$ dom f, se dice que $f(x_0)$ es un MÍNIMO RELATIVO de f si existe un intervalo (a, b) que contiene a x_0 tal que:

$f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$ incluido en el dom f.





Definición de Punto Crítico:

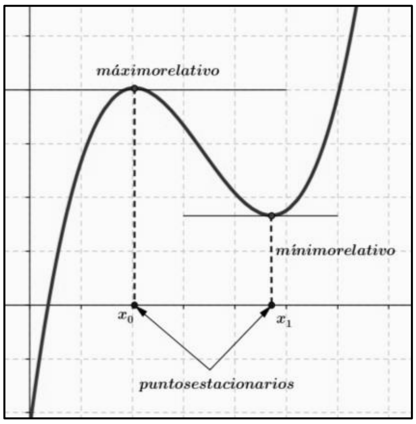
Si x0 es un número del dominio de la función f, y si
$f'(x_0) = 0$ o si: $f'(x_0)$ no existe

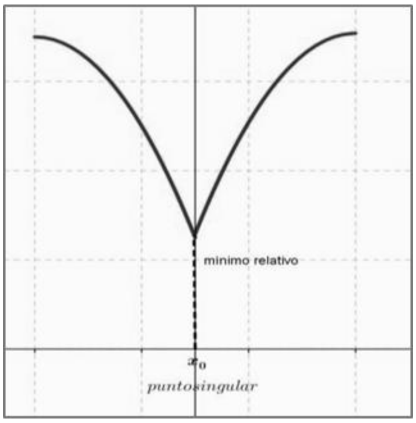
entonces x0 es un PUNTO CRÍTICO de f.

Los Puntos Críticos se clasifican en:

Punto Estacionario: es el valor de x_0 en el que f '(x_0) = 0

Punto Singular: es el valor de x_0 en el que f '(x_0) no existe





Pasos para Encontrar Puntos Críticos

1. **Encuentra la derivada de la función:**

   La derivada de la función f(x) es f′(x). La derivada te da la tasa de cambio de la función y es esencial para encontrar los puntos críticos.

2. **Encuentra los valores de x donde la derivada es cero:**

Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$. Los valores de x que satisfacen esta ecuación son puntos críticos.

3. **Encuentra los valores de x donde la derivada no está definida:**

Estos valores también deben considerarse, ya que pueden ser puntos críticos si $f'(x)$ no está definida en ciertos puntos (por ejemplo, en puntos de discontinuidad o puntos donde la derivada tiene una forma indefinida).

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

1. **Encontramos la derivada:**

   $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

2. **Encontramos los valores de x donde la derivada es cero:**

   Resuelve la ecuación $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

   $X= [6 \pm \sqrt{(-6)2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}\ ] / 2.3$

   Por lo tanto, los puntos críticos son:

   $X_1 = (1+ \sqrt{3}\ ) / 3$ $X_2 = (1 - \sqrt{3}\ ) / 3$

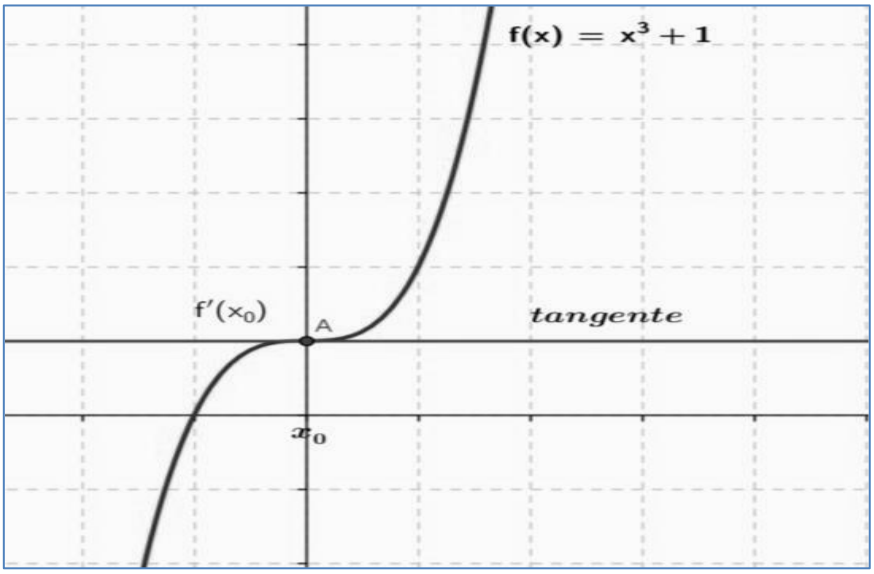
3. **Encontramos los valores de x donde la derivada no está definida:**

   En este caso, la derivada $3x^2 - 6x + 2$ es una función polinómica y está definida para todos los valores de x. Por lo tanto, no hay puntos adicionales donde la derivada no esté definida.

Puntos de Ensilladura

La anulación o la no existencia de la derivada de f en un punto de su dominio no son suficientes para garantizar la existencia de Extremos Relativos en el punto.

El punto $x=0$ es Punto de Ensilladura en la función $f(x)= x^3 + 1$ ya que en él la tangente es horizontal, $f'(x_0) =0$ pero no hay ni máximos ni mínimos.



Criterio de la Primera Derivada

El criterio de la primera derivada es una herramienta utilizada en cálculo diferencial para determinar los puntos críticos de una función y analizar su comportamiento (crecimiento o decrecimiento) alrededor de estos puntos. Este criterio es útil para encontrar máximos y mínimos relativos de la función.

Las condiciones **suficientes** para la existencia de Extremos relativos están contenidas en el siguiente teorema:

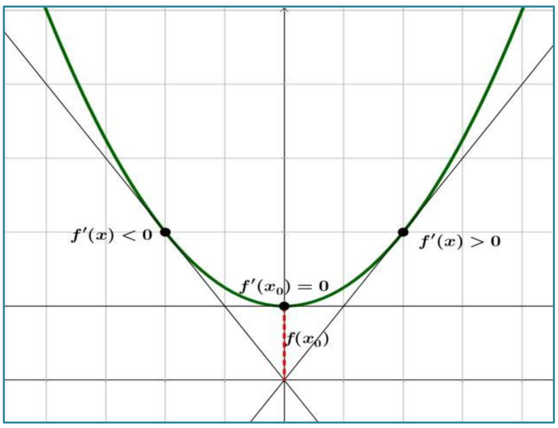
Teorema:

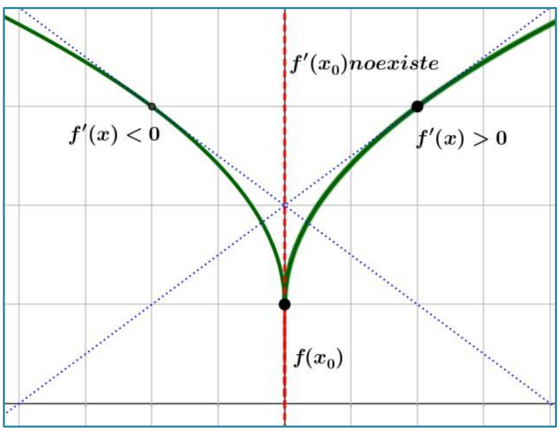
Sea f continua en (a, b) que contiene al punto x_0 y f ‘(x) existe para todo $x \in$ (a, b) excepto posiblemente en x_0, si:

1) $\forall\ x \in (a,\ x_0)$ $\quad f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ f (x_0) es un ***mínimo relativo*** de f

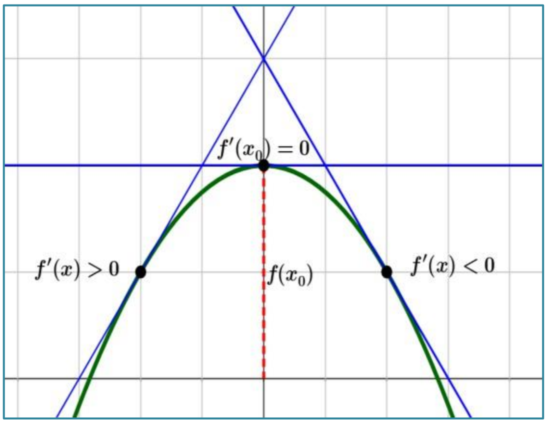
$\forall\ x \in (x_0,\ b)$ $\quad f'(x) > 0$

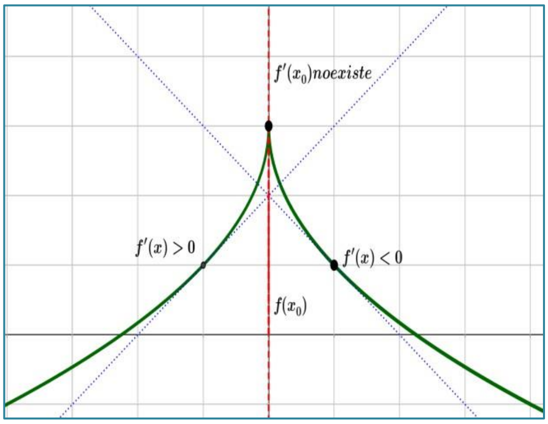




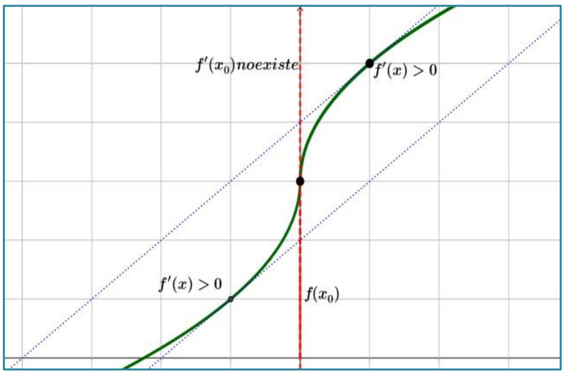
2) $\forall\ x \in (a,\ x_0)$ $\quad f'(x) > 0$

$\forall \; x \in (x_0, b) \qquad f'(x) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_0)$ es un ***máximo relativo*** de f





3) Si f (x) tiene el mismo signo $\forall \, x \in (a, x_0) \cup (x_0, b) \Rightarrow$ f(x) NO ES EXTREMO RELATIVO de f



Pasos para aplicar el criterio de la primera derivada

1. **Encontrar la derivada de la función**:

   Dada una función f(x) se calcula su derivada f′(x).

2. **Determinar los puntos críticos**:

   Los puntos críticos se encuentran resolviendo la ecuación f′(x) = 0 y también considerando los puntos donde la derivada no existe.

3. **Analizar el signo de la derivada**:

   Se analiza el signo de f′(x) en los intervalos alrededor de los puntos críticos para determinar si la función está creciendo o decreciendo.

   - Si f′(x) > 0 en un intervalo, la función f(x) es creciente en ese intervalo.

- Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, la función $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

4. **Clasificar los puntos críticos**: Dependiendo del cambio de signo de $f'(x)$ en los puntos críticos:

   - Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en un punto crítico $x = c$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
   - Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en un punto crítico $x = c$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
   - Si $f'(x)$ no cambia de signo, entonces $x = c$ no es un extremo relativo.

Ejemplo

Supongamos que tenemos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. **Encuentro la derivada**:

   $f'(x) = 3x^2 - 6x$

2. **Determino los puntos críticos**:

   Resolviendo $3x^2 - 6x = 0$:

   $3x.(x-2) = 0 \implies x=0$ o $x=2$.

3. **Analizo el signo de la derivada**:

   Para $x<0$, o sea el intervalo **$(-\infty, 0)$** elegimos un valor testigo por ej $x=-1$

   $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)$ = **9 es positivo (la función es creciente).**

   Para $0 < x < 2$, o sea el intervalo **$(0, 2)$** elegimos un valor testigo por ej $x = 1$

   $f'(1)=3.1^2-6.1$= **-3 es negativo (la función es decreciente).**

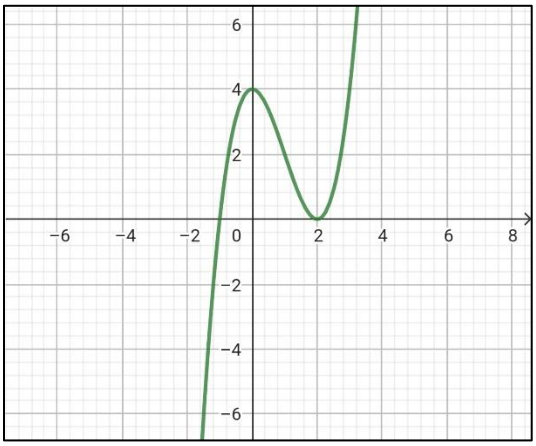
   Para $x>2$, o sea el intervalo **$(2, \infty)$** elegimos un valor testigo por ej $x = 3$

   $f'(3)=3.3^2 - 6.3$= **9 es positivo (la función es creciente).**

4. **Clasifico los puntos críticos**:

   En $x=0$, $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, por lo tanto, **f (0) = 4 f es un máximo relativo.**

   En $x=2$, $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, por lo tanto, **f (2) = 0 f es un mínimo relativo.**



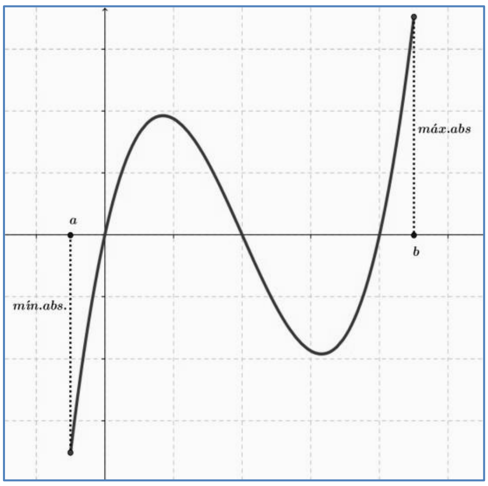
Extremos Absolutos de una Función

Definición de Máximo Absoluto

Se dice que una función "f " tiene un **MÁXIMO ABSOLUTO** en un punto x ∈ dom f tal que f(x) < = f(x_0) para todo x ∈ dom f. El número f (x_0) es el valor máximo absoluto de la función.

Definición de Mínimo Absoluto

Se dice que una función "f " tiene un **MÍNIMO ABSOLUTO** en un punto x ∈ dom f tal que f(x) >= f(x_0) para todo x ∈ dom f. El número f (x_0) es el valor mínimo absoluto de la función.



Preguntas para repaso

¿Qué diferencia existe entre un máximo relativo y un mínimo relativo?

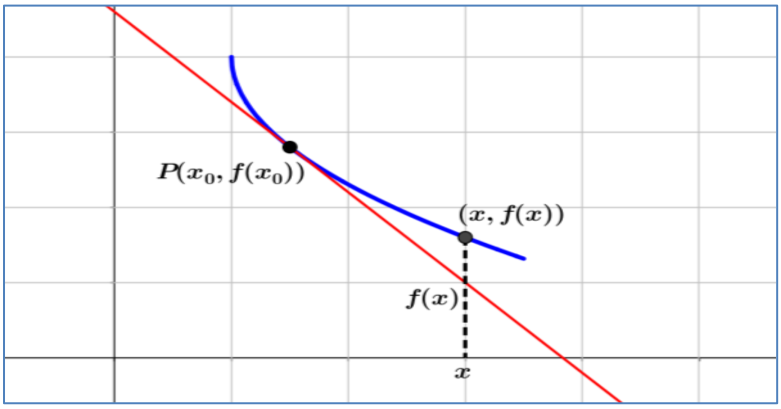
¿Cuál es la condición necesaria para que un punto x=a sea un extremo relativo de una función f(x)?

¿Qué pasos se siguen para determinar si un punto crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo, o un punto de inflexión?

Concavidad de una Función

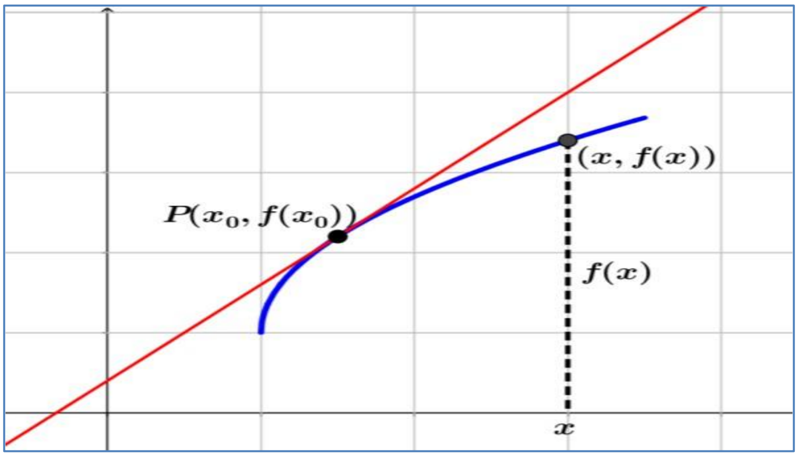
Función Cóncava hacia Arriba

Se dice que la gráfica de f es **CÓNCAVA HACIA ARRIBA**, en el punto P [x_0, f(x_0)] si existe f´(x_0) y si existe un intervalo (a,b) que contiene a $\mathbf{x_0}$ tal que para todo x ≠ $\mathbf{x_0}$ y x ∈ (a,b), el punto (x, f(x)) en la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica en (x0, f(x0)).



Función Cóncava hacia abajo

Se dice que la gráfica de f es **CÓNCAVA HACIA ABAJO**, en el punto P [x_0, f(x_0)] si existe f´(x_0) y si existe un intervalo (a,b) que contiene a $\mathbf{x_0}$ tal que para todo x ≠ $\mathbf{x_0}$ y x ∈ (a,b), el punto (x, f(x)) en la gráfica está abajo de la recta tangente a la gráfica en (x0, f(x0)).



Concavidad de una función

El estudio de la concavidad de una función está vinculado con el signo de la segunda derivada, como lo establece el siguiente teorema:

Teorema

Sea f una función cuya derivada segunda existe en algún intervalo abierto (a, b)

a) Si $f''(x) > 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces la gráfica de f es CONCAVA HACIA ARRIBA en (a, b)

b) Si $f''(x) < 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces la gráfica de f es CONCAVA HACIA ABAJO en (a, b)

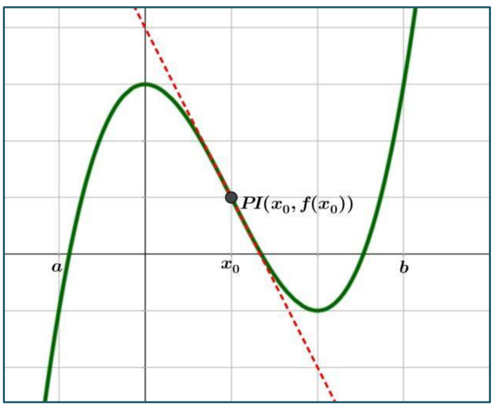
Punto de inflexión

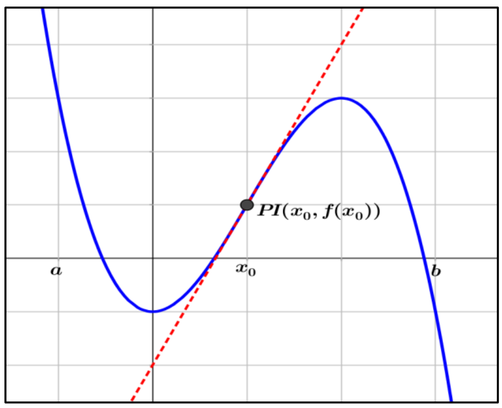
Se dice que la gráfica de una función continua en $\mathbf{x_0}$, tiene punto de Inflexión en [$\mathbf{x_0}$, f($\mathbf{x_0}$)], si la curva cambia de concavidad al pasar por el punto $\mathbf{x_0}$.

Definición de Punto de Inflexión

Sea una función f continua en $\mathbf{x_0}$. Un punto. ($\mathbf{x_0}$, f($\mathbf{x_0}$)) es **PUNTO DE INFLEXIÓN** de la gráfica de f, si la curva tiene allí recta tangente y si existe un intervalo (a, b) que contiene a $\mathbf{x_0}$ tal que para todo $x \in (a, b)$

$f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (a, x_0)$ y $f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (x_0, b)$ $\qquad$ $f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (a, x_0)$ y $f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (x_0, b)$





Teorema

Si P $[x_0, f(x_0)]$ es un Punto de Inflexión de la gráfica de f, entonces

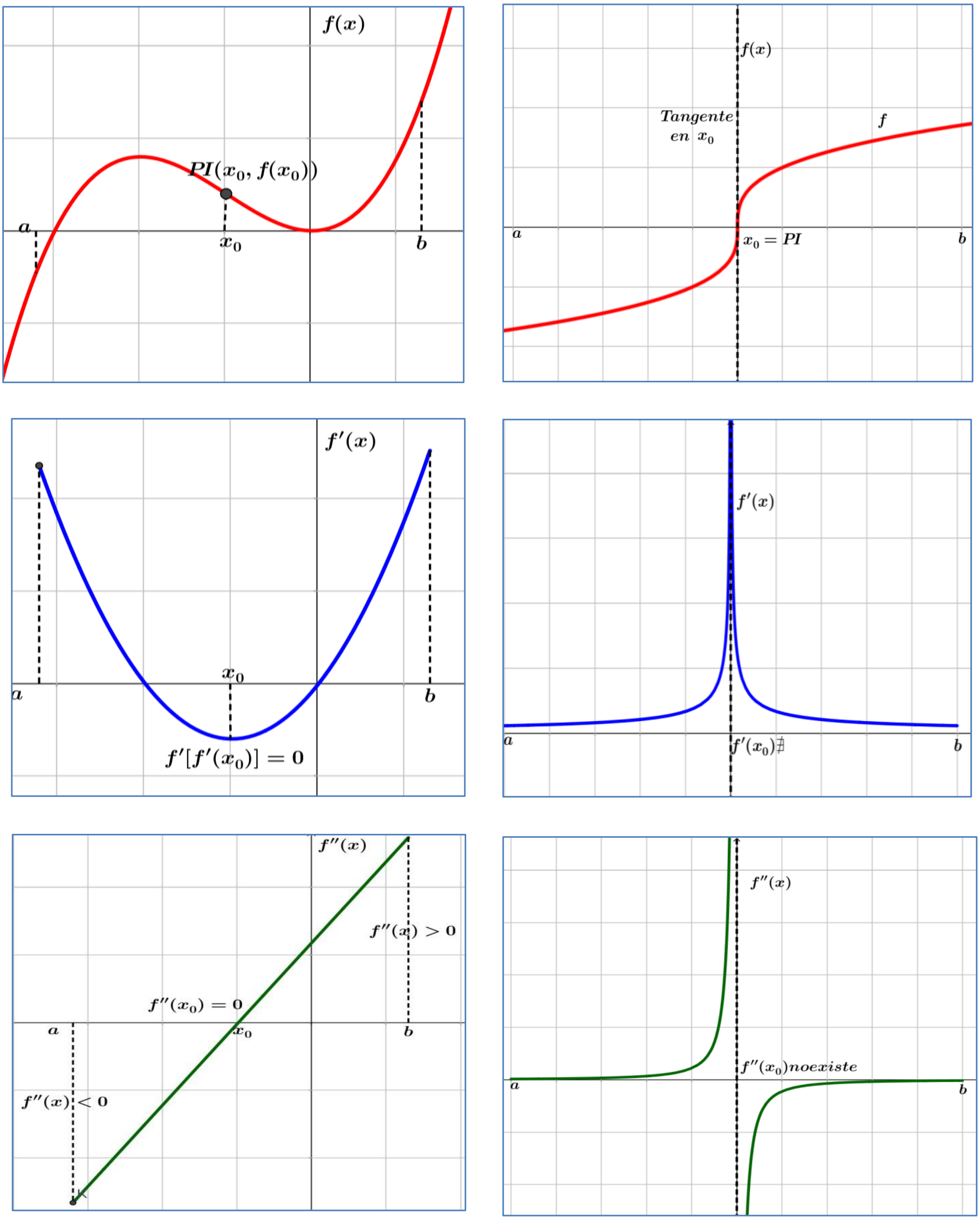
$f''(x_0) = 0 \quad ó \quad f''(x_0)$ *no existe*

Teorema

Si la función f es derivable en algún intervalo (a, b) que contiene a x_0 y si [x_0, f(x_0)] es Punto de Inflexión de la gráfica de f en el cuál existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) = 0$

Derivación Gráfica

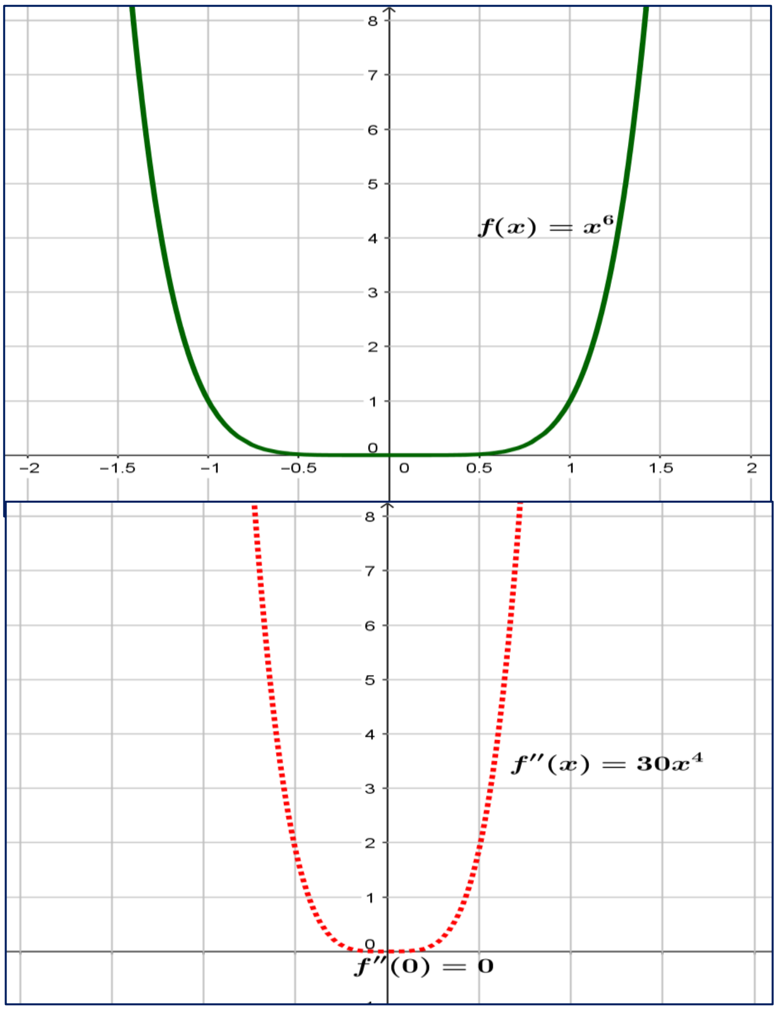
Se pueden verificar las definiciones y teoremas enunciados, en la siguiente derivación gráfica:



Reciproco del Teorema anterior

La anulación de la segunda derivada de f en un punto de su dominio $f''(x_0) = 0$ no es suficiente para garantizar la existencia de Puntos de Inflexión en el punto, tal como se ejemplifica

Considere la función $f(x) = x^6$ cuya gráfica se muestra



Se observa que $f''(0)=0$ pero como la función es:

- cóncava hacia arriba ($f''(x)>0$) para todo $x<0$ y es
- cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) para todo $x > 0$

El origen de coordenadas **no es Punto de Inflexión de f.**

Pasos para encontrar la concavidad y los puntos de inflexión de una función

1. **Encontrar la segunda derivada**:

   Dada una función f(x), se calcula su segunda derivada f ″(x).

2. **Determinar los posibles puntos de inflexión**:

   Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0$ y se considera donde $f''(x)$ no existe.

3. **Analizar el signo de la segunda derivada**:

   Se analiza el signo de $f''(x)$ en los intervalos alrededor de los puntos encontrados en el paso anterior para determinar la concavidad de la función y determinar si existe un punto de inflexión.

Ejemplo

Sea la función $f(x)=x^3 - 3x^2 + 4$.

1. **Encontrar la primera derivada**:

   $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2. **Encontrar la segunda derivada**:

   $f''(x) = 6x - 6$.

3. **Determinar los posibles puntos de inflexión (PPI)**:

   Resolviendo $6x-6=0$:

   $6x = 6 \quad \Longrightarrow \quad x=1$

   Este es un posible punto de inflexión.

4. **Analizar el signo de la segunda derivada**:

   - Para $x < 1$, o sea el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x= 0$ como valor representativo

     $f''(0) = 6.(0) - 6 = -6$ es negativo (la función es cóncava hacia abajo).

   - Para $x > 1$, o sea el intervalo $(1, \infty)$ tomamos $x=2$ como valor representativo

     $f''(2) = 6.2 - 6 = 6$ es positivo (la función es cóncava hacia arriba).

Conclusión

- **Concavidad**:
  - La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo para $x<1$.
  - La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x>1$.

- **Punto de inflexión**:

    - La función f(x) tiene un punto de inflexión en x=1.

En el punto x=1, la concavidad de la función cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, lo que confirma que es un punto de inflexión.

Criterio de la Segunda Derivada

El siguiente Teorema permite determinar la existencia, o no, de extremos relativos de f.

Sea una función f derivable en el intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 y sea x_0 un PUNTO CRÍTICO de f en el que $f'(x_0) = 0$ (punto estacionario), si existe $f''(x0)$ y:

1) Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x_0)$ es un máximo relativo de $f(x)$
2) Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x_0)$ es un mínimo relativo de $f(x)$

Si $f''(x0) = 0$ este criterio no decide y debe recurrirse al Criterio de la Primera Derivada

Preguntas de repaso

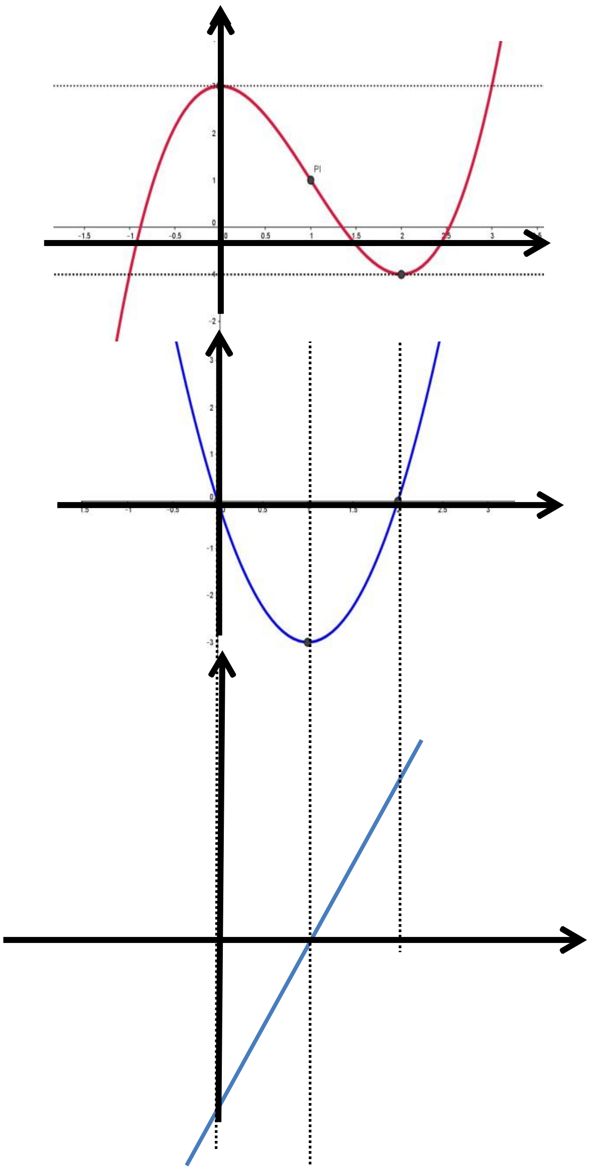
¿Qué condiciones debe cumplir la segunda derivada en un punto crítico para que este punto sea clasificado como máximo relativo o mínimo relativo?

¿Qué indica el cambio en el signo de la segunda derivada en torno a un punto de inflexión?

¿Cómo se relacionan la primera y la segunda derivada en el análisis de extremos relativos?

Derivación Gráfica

Permitirá comprobar gráficamente el Criterio de concavidad, Puntos de Inflexión y Criterio de la Segunda Derivada.



Función

Primera Derivada

Segunda Derivada

Pasos para aplicar el criterio de la segunda derivada

1. **Encontrar la primera derivada**:

   Dada una función f(x), se calcula su primera derivada f ′(x).

2. **Encontrar los puntos críticos**:

Los puntos críticos se encuentran resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$

3. **Encontrar la segunda derivada**:

   Se calcula la segunda derivada de la función, $f''(x)$.

4. **Evaluar la segunda derivada en los puntos críticos**:

   Se evalúa $f''(x)$ en cada uno de los puntos críticos $x = c$.

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. **Encontrar la primera derivada**:

   $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2. **Encontrar los puntos críticos**:

   Resolviendo $3x^2 - 6x = 0$:

   $3x.(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $x = 2$.

   Los puntos críticos son $x=0$ y $x=2$.

3. **Encontrar la segunda derivada**:

   $f''(x) = 6x - 6$.

4. **Evaluar la segunda derivada en los puntos críticos**:

   Para $x=0$: $f''(0) = 6.(0) - 6 = -6 \Longrightarrow$ como $f''(0) < 0$
   , hay un máximo relativo en $x=0$.

   Para $x=2$: $f''(2) = 6.(2) - 6 = 6 \Longrightarrow$ como $f''(2) > 0$
   , hay un mínimo relativo en $x=2$.

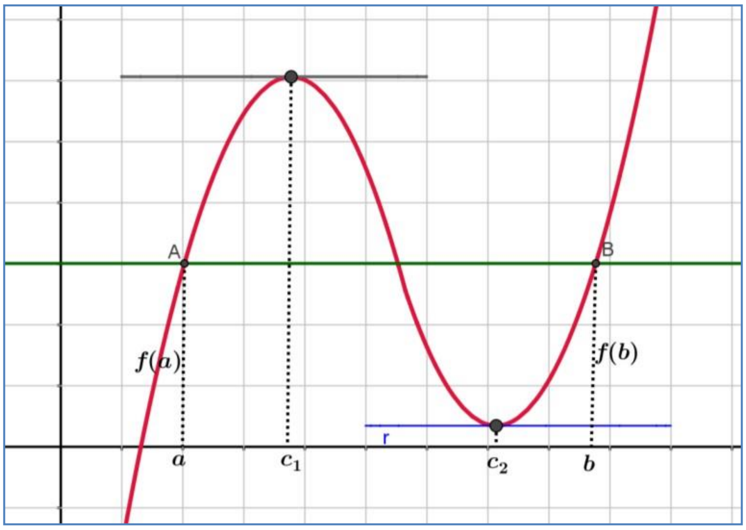
Conclusión

Usando el criterio de la segunda derivada, hemos determinado que:

- $x=0$ es un **máximo relativo** porque $f''(0) < 0$.
- $x=2$ es un **mínimo relativo** porque $f''(2) > 0$.

Teorema de Rolle

Sea una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) con f (a) = f (b) entonces existe al menos un punto x = c en (a, b) tal que: f ' (c) = 0



Geométricamente, el Teorema de Rolle afirma que existe al menos un punto sobre la curva entre A y B, donde la recta tangente es horizontal y por lo tanto paralela a la recta secante AB

Ejemplo:

Vamos a aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en el intervalo [0,4]

1. **Comprobar las condiciones del teorema de Rolle**:

   - **Continuidad en [0,4]**:

   La función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ es un polinomio, por lo que es continua en todo R, incluyendo [o,4].

   - **Derivabilidad en (0,4)**:

   La función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ es derivable en todo R, incluyendo (0,4).

   - **Igualdad en los extremos**:

   $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 4 = 4$

   $f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 4$, se cumple la tercera condición.

2. **Aplicar el teorema de Rolle**:

Según el teorema de Rolle, debe existir al menos un punto c en (0,4) tal que $f'(c)=0$

3. **Encontrar c**:

Primero, encontramos la derivada de f(x):

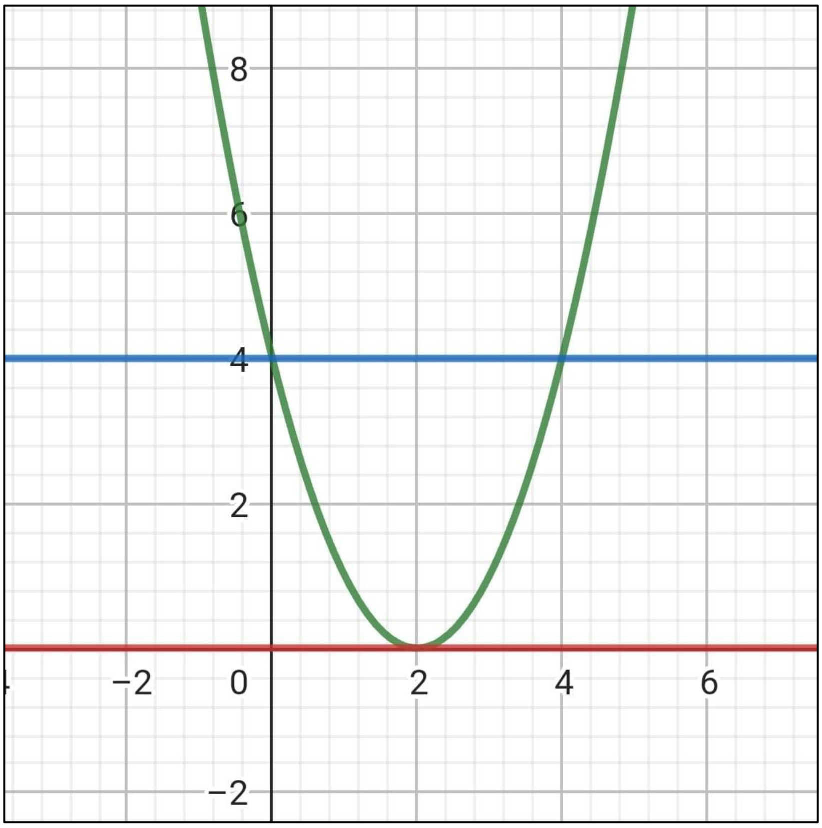
$f'(x) = 2x - 4$

Luego, resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$:

$2c - 4 = 0$

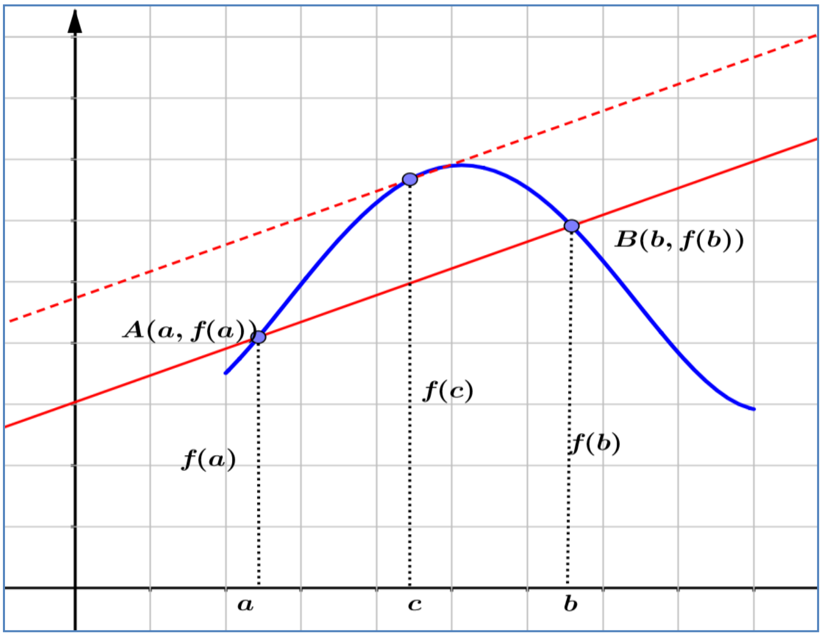
$2c = 4$

$C = 2$



Teorema de Lagrange o Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial

Sea f continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto x = c en (a, b) tal que: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Geométricamente, el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial afirma que existe al menos un punto sobre la curva entre A y B, donde la recta tangente es paralela a la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y B

Ejemplo

Consideremos la función f (x) = x^2 en el intervalo [1,3].

1. **Comprobar las condiciones del teorema de Lagrange**:

   - **Continuidad en [1,3]**:

     La función f (x) = x^2 es un polinomio, por lo que es continua en todo R, incluyendo [1,3] .

   - **Derivabilidad en (1,3)**:

     La función f (x) = x^2 es derivable en todo R, incluyendo (1,3).

2. **Aplicar el teorema de Lagrange**: Según el teorema de Lagrange, debe existir al menos un punto c en (1,3) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

3. **Calcular**

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \qquad f'(c) = \frac{9-1}{3-1} \qquad f'(c) = \frac{8}{2} = 4$$

4. **Encontrar c**:

Primero, encontramos la derivada de f(x):

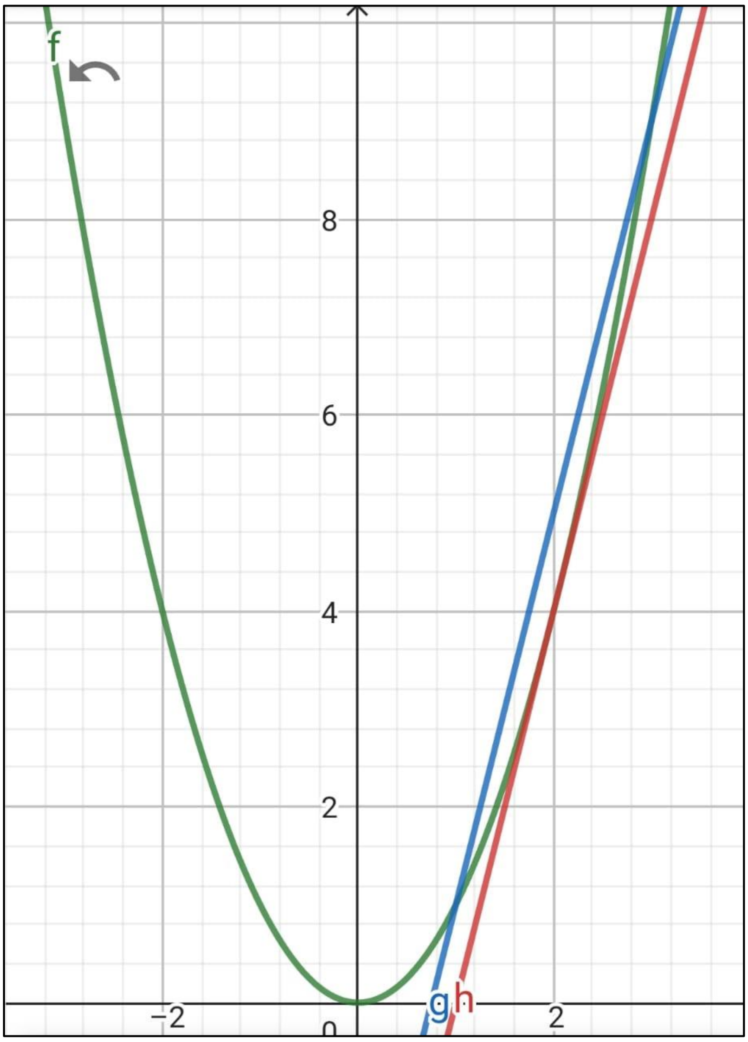
f ′(x) = 2x

Luego, resolvemos la ecuación

f ′(c) = 4

2.c = 4

C = 2



Preguntas de repaso.

¿Cuál es la condición necesaria para que el teorema de Rolle sea aplicable a una función en un intervalo cerrado [a,b]?

¿En qué se parecen y en qué se diferencian los teoremas de Rolle y de Lagrange?

¿Qué condiciones deben cumplirse para que el teorema de Lagrange sea aplicable a una función en un intervalo cerrado [a,b]?

¿Qué representa el punto c en el intervalo [a,b] según el teorema de Lagrange?

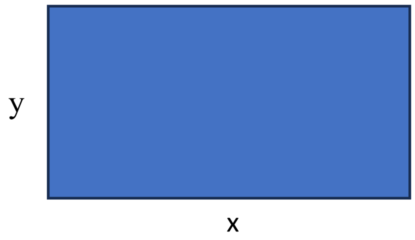
Problemas de optimización

a) Identificar la magnitud que hay que optimizar (máximo o mínimo)
b) Expresar la magnitud en función de variables. Para ello se pueden usar esquemas, gráficos, etc.
c) Expresar la magnitud a optimizar en función de una sola variable desconocida
d) Derivar la función obtenida en b)
e) Encontrar los puntos estacionarios $f'(x) = 0$
f) Obtener la segunda derivada $f''(x)$
g) Aplicar el criterio de la segunda derivada y determinar el valor de la variable que maximiza o minimiza la magnitud a optimizar
h) Determinar el valor de las otras variables.

Ejemplo:

Se dispone de 200 metros de alambre para cercar un terreno rectangular. Determine las dimensiones del terreno de área máxima que se puede delimitar con la cantidad de alambre disponible.

a) Identificar la magnitud a optimizar
De acuerdo al enunciado lo que se quiere es encontrar el rectángulo de área máxima al que llamaremos A.
b) Expresar la magnitud en función de variables.
Para expresar la magnitud a optimizar hacemos un esquema del terreno rectangular y le asignamos nombres a las dimensiones desconocidas,



A = x.y   (1)

c) Expresamos la magnitud a optimizar en función de una sola variable

La expresión (1) depende de dos variables desconocidas. Para que quede en una sola variable hacemos uso de los datos brindados

Datos:

Perímetro = 200 m

P = 2.(x + y) = 200   →   y = 100 – x (2)

Reemplazando (2) en (1)

A = x. (100 – x)

$A(x) = 100.x - x^2$

d) Derivamos la función obtenida

A´(x) = 100 – 2.x

e) Encontramos los puntos estacionarios f´(x) = 0

A´(x) = 100 – 2.x = 0   →   x = 50 m

f) Obtenemos la segunda derivada

A”(x) = - 2

g) Aplicamos el criterio de la segunda derivada

A”(50) = - 2 < 0   →   Para x = 50 m El área es Máxima

h) Determinar el valor de las otras variables
Según (2)
y = 100 – x
y = 100 – 50 = 50   →   y = 50 m