

## ÁLGEBRA VECTORIAL

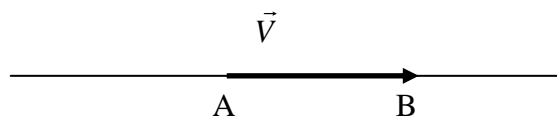
### VECTORES

En esta unidad de trabajo definiremos un nuevo concepto matemático, que se denomina *vector*. Estableceremos las leyes y las propiedades que nos permitirán realizar operaciones entre vectores. Para una mejor comprensión, se estudiarán primero en forma absoluta y luego utilizando sistemas de referencia.

Previamente, vemos el concepto de *segmento orientado*. Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos, pero cuando estos puntos están dados en cierto orden, se dice que el segmento está orientado.

#### Definición

Un *vector* es todo segmento orientado. Un vector  $\vec{V}$  queda determinado por dos puntos, el primero se llama *origen* (A) y el segundo *extremo* (B), que se lee “vector V”, y lo representamos mediante una flecha.



En consecuencia, un vector es un ente matemático que posee magnitud, dirección y sentido.

La *magnitud* del vector está representada por la longitud del segmento orientado que lo define, medida con una determinada unidad desde su origen A hasta su extremo B. También, se le denomina *módulo* del vector y es un número positivo. La notación para el módulo es  $\text{mód } \vec{V}$  ó  $|\vec{V}|$  ó bien  $V$ .

La recta que contiene al vector indica su *dirección* y su *sentido* está determinado por el extremo del vector (punta de la flecha).

Todos los vectores situados sobre una misma recta o rectas paralelas tienen la misma dirección. Mientras que, sobre cada recta hay dos sentidos opuestos.

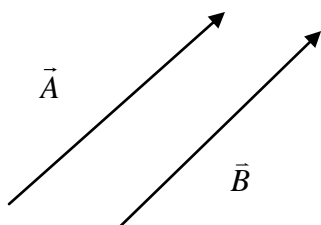
*Observación 1:* Cada vector queda perfectamente definido por los tres elementos que lo caracterizan, módulo, dirección y sentido y no contiene otra información acerca de cantidad física alguna que eventualmente pudiera describir.

**Observación 2:** Cuando el módulo de un vector es nulo, desaparece como vector ya que su dirección y sentido quedan indefinidos, y su gráfico se reduce a un punto. Por convención se lo denomina *vector nulo* y se lo indica con  $\vec{0}$ .

## LEYES OPERATIVAS

Son las leyes que reglan las operaciones entre vectores.

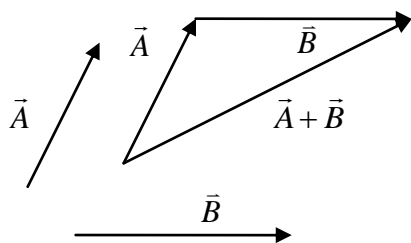
**Igualdad de Vectores:**  $\vec{A} = \vec{B}$  significa que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.



Como todas las rectas paralelas entre sí tienen la misma dirección, entonces un vector no se modifica si se lo traslada, paralelamente a sí mismo, a cualquier punto del espacio. Con este criterio, todos los vectores pueden ser trasladados de manera que tengan un mismo origen  $O$ . La definición de igualdad dada, corresponde a los llamados *vectores libres*, que son los que interesan en el cálculo vectorial.

## Adición y Sustracción de Vectores

❖  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{S}$  La suma de dos vectores es otro vector que se obtiene colocando el extremo del primero ( $\vec{A}$ ) como origen del segundo ( $\vec{B}$ ) y luego  $\vec{S}$  se obtiene uniéndolo el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$ .



Al mismo resultado se llega tomando los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con el mismo origen  $O$  y definiendo la suma como la diagonal, que pasa por  $O$ , del paralelogramo construido sobre los vectores dados.

Sean  $|\vec{A}|$ ,  $|\vec{B}|$  y  $|\vec{A} + \vec{B}|$  los respectivos módulos de los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{A} + \vec{B}$ , entonces  $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$  siendo  $\alpha$  el ángulo entre los dos vectores.

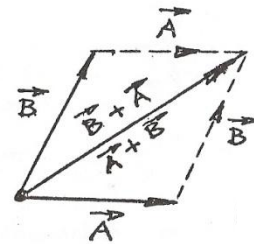
Además, se cumple la desigualdad  $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$  donde vale la igualdad únicamente cuando  $\alpha = 0$ .

Por lo tanto, el *módulo de la suma* de dos vectores es menor o igual que la suma de los módulos de los sumandos, siendo igual únicamente en el caso de tener los vectores la misma dirección.

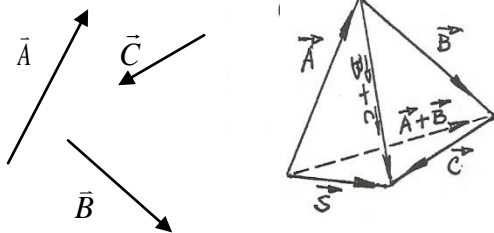
La adición goza de las siguientes propiedades:

- Propiedad Conmutativa  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

Gráficamente se observa que  $\vec{A} + \vec{B}$  y  $\vec{B} + \vec{A}$  quedan representados por la misma diagonal del paralelogramo.



- Propiedad Asociativa  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$  Para sumar tres o más vectores se construye, según la definición, el polígono formado por los vectores dados.

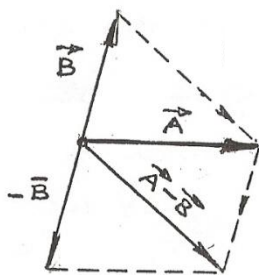


Los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  forman una poligonal y la suma  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$  se denomina resultante de la poligonal. Si  $\vec{S} \neq 0$  la poligonal se dice abierta, sus puntos inicial y final no coinciden, pero si  $\vec{S} = 0$  esta coincidencia ocurre y la poligonal se denomina cerrada.

- Si a un vector cualquiera  $\vec{A}$  se le suma el vector nulo se obtiene el vector  $\vec{A}$   
 $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$  Por ello el vector nulo es el elemento neutro de la suma de vectores.
- Para todo vector  $\vec{A}$  existe el vector  $\vec{B} = -\vec{A}$  que tienen igual módulo y dirección y sentido distinto. Por esta razón  $\vec{B}$  se denomina vector opuesto de  $\vec{A}$ .

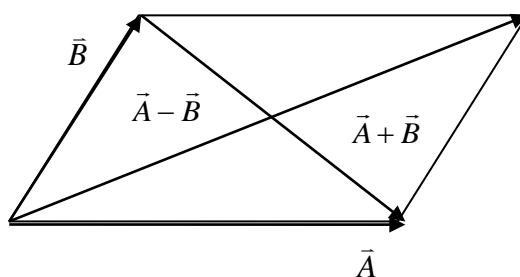
$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$

- ❖  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{D}$  La diferencia entre dos vectores es otro vector que se obtiene sumando al vector  $\vec{A}$  el opuesto de  $\vec{B}$ , es decir  $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{D}$



Si  $\vec{A} = \vec{B}$  resulta  $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$

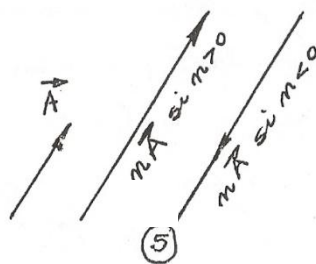
**Observación:** Las diagonales del paralelogramo construido sobre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son los vectores  $\vec{A} + \vec{B}$  y  $\vec{A} - \vec{B}$



### Producto de un Vector por un Escalar

$n \vec{A} = \vec{M}$  El producto de un escalar  $n$  por un vector  $\vec{A}$  es otro vector  $\vec{M}$  que tiene la misma dirección que  $\vec{A}$ , su módulo es  $|n|A$  y su sentido coincide o es opuesto con el de  $\vec{A}$  según sea  $n > 0$  ó  $n < 0$ .

Si  $n = -1$ ,  $\vec{M}$  es el opuesto de  $\vec{A}$



Si  $0 < |n| < 1$  se produce compresión de  $\vec{A}$  y si  $|n| > 1$  hay dilatación de  $\vec{A}$ .

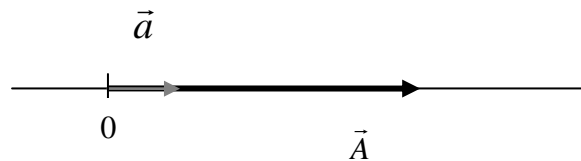
Este producto goza de las siguientes propiedades

- El producto del escalar 0 por cualquier vector es el vector nulo.  $0 \vec{A} = \vec{0}$
- El producto de cualquier escalar por el vector nulo es igual al vector nulo.  $n \vec{0} = \vec{0}$
- Asociativa  $(n_1 n_2) \vec{A} = n_1 (n_2 \vec{A})$

- Distributiva respecto de la suma de vectores.  $n(\vec{A} + \vec{B}) = n\vec{A} + n\vec{B}$
- Distributiva respecto de la suma de escalares.  $(n_1 + n_2)\vec{A} = n_1\vec{A} + n_2\vec{A}$
- $1\vec{A} = \vec{A}$

*Observación:* Si en la definición anterior  $n = \frac{1}{|\vec{A}|}$  entonces  $n\vec{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \vec{a}$  que es

un vector de modulo 1 con la misma dirección y sentido que  $\vec{A}$ , llamado *vector unidad* o *vector unitario*. Estos vectores reciben el nombre de *versor* y se los utiliza para individualizar una dirección y sentido.



## Productos entre Vectores

**Producto Escalar:** Se llama *producto escalar* o *interno* de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  al escalar que se obtiene multiplicando el modulo de  $\vec{A}$  por el modulo de  $\vec{B}$  y por el coseno del ángulo que ellos forman.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Como consecuencias de la definición se tiene:

- El *producto escalar es conmutativo*  $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$ . Esto se prueba fácilmente recordando que  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \cos(\vec{B}, \vec{A})$ .

- El *producto escalar es distributivo con respecto a la suma*

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$$

- $(n\vec{A}) \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet (n\vec{B}) = n(\vec{A} \bullet \vec{B})$ .

- El ángulo que forman dos vectores se determina a través de  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$

- La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean *perpendiculares* es que su producto escalar sea nulo.

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \bullet \vec{B} = 0$$

$\vec{A}$  es perpendicular a  $\vec{B} \Rightarrow \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 90^\circ$  y  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$  Por lo tanto  $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$

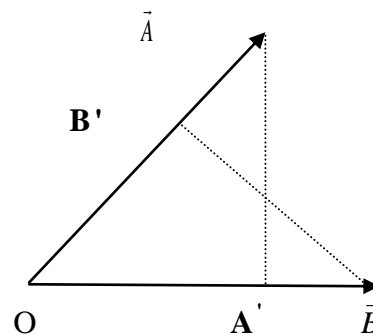
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \Rightarrow |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

## Interpretación Geométrica del Producto Escalar

El producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

El  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$  se puede escribir

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \{B \cos(\vec{A}, \vec{B})\} = B \{A \cos(\vec{A}, \vec{B})\}$  donde los factores  $\{A \cos(\vec{A}, \vec{B})\}$  y  $\{B \cos(\vec{A}, \vec{B})\}$  son las *proyecciones escalares* de  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$  y  $\vec{B}$  sobre  $\vec{A}$  respectivamente.



$$\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \overline{OA'} \quad \text{y} \quad \text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = \overline{OB'}$$

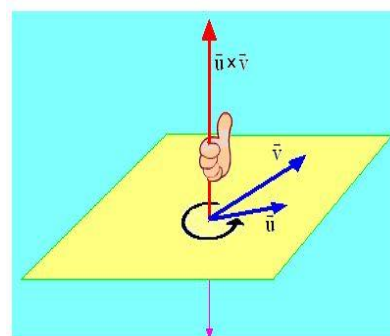
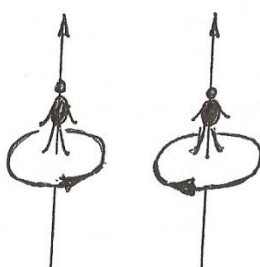
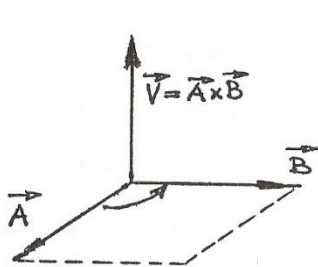
La *proyección vectorial* se obtiene multiplicando la proyección escalar por el versor en la dirección del vector sobre el que se proyecta. Entonces:

$$\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A}} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

Escriba la proyección vectorial de  $\vec{B}$  sobre  $\vec{A}$ : .....

**Producto Vectorial:** El *producto vectorial* o *externo* de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es otro vector  $\vec{V}$  cuyo módulo es  $V = A B \sin(\vec{A}, \vec{B})$ , la dirección es perpendicular al plano determinado por los vectores dados y su sentido queda determinado por la regla de la mano derecha.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{V}$$



Las propiedades fundamentales del producto vectorial son:

1. El *producto vectorial no es conmutativo*. Aplicando la definición en  $\vec{A} \times \vec{B}$  y  $\vec{B} \times \vec{A}$  resultan con los mismos módulos e igual dirección pero con sentidos opuestos.

Por lo tanto  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2. El *producto vectorial es distributivo con respecto a la suma*.

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

3.  $n \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times n \vec{B} = n (\vec{A} \times \vec{B}) \quad \forall n \in \mathbb{R}$

4. La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean *paralelos* es que su producto vectorial sea nulo.

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 0^\circ \text{ ó } 180^\circ \text{ y } \text{sen}(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = 0 \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = 0 \Rightarrow |\vec{A}| |\vec{B}| \text{sen}(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 0^\circ \text{ ó } 180^\circ \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$$

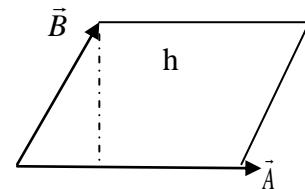
### Interpretación Geométrica del Módulo del Producto Vectorial

El módulo del producto vectorial da el área del paralelogramo construido sobre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$

En el paralelogramo construido sobre los vectores se tiene que el área es  $A = b \cdot h$

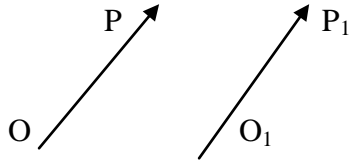
Donde  $b = |\vec{B}|$  y  $h = |\vec{A}| \text{sen}(\vec{A}, \vec{B})$

Entonces  $A = |\vec{B}| |\vec{A}| \text{sen}(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|$



### Aplicaciones:

1.- Demostrar que si  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{O_1P_1}$  son dos vectores iguales, pero no coincidentes, entonces los vectores  $\overrightarrow{OO_1}$  y  $\overrightarrow{PP_1}$  son también iguales.



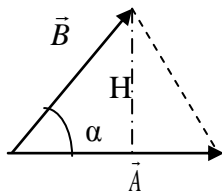
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P_1} &\Rightarrow \vec{P} - \vec{O} = \vec{P_1} - \vec{O_1} \\ &\Rightarrow \vec{O_1} - \vec{O} = \vec{P_1} - \vec{P} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{PP_1}\end{aligned}$$

2.- Muestre que un vector  $\vec{A}$  no nulo siempre puede descomponerse, de manera única, según dos direcciones distintas.

3.- Del producto  $\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2$  surge que  $\vec{A}^2 = A^2$  ¿Puede simplificar los exponentes en ambos miembros? Explique.

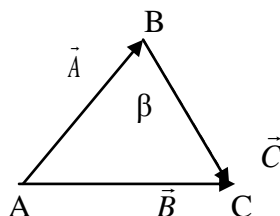
4.- Si  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{C}$  a) ¿Es cierto que  $\vec{B} = \vec{C}$  ?  
b) ¿Es  $\vec{A}$  perpendicular a  $\vec{B} - \vec{C}$  ?

5.- Expresar vectorialmente el área de un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido.



$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ \text{Área} &= \frac{|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha}{2} \\ \text{Área} &= \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}\end{aligned}$$

6.- Establezca vectorialmente el teorema del coseno para triángulos planos y deduzca el teorema de Pitágoras, como un caso particular.



Sea el triángulo ABC donde:  $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B}$   
 $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B}$

multiplicando m a m  $(\vec{A} + \vec{C}) \cdot (\vec{A} + \vec{C}) = \vec{B} \cdot \vec{B}$   
 $\vec{A}^2 + 2 \vec{A} \vec{C} + \vec{C}^2 = \vec{B}^2$

$$\Rightarrow B^2 = A^2 + C^2 + 2 A C \cos(\vec{A}, \vec{C})$$

donde  $\cos(\vec{A}, \vec{C}) = -\cos \beta$  por ser suplementarios

Entonces  $B^2 = A^2 + C^2 - 2 A C \cos \beta$

Caso Particular:  $\beta = 90^\circ \Rightarrow B^2 = A^2 + C^2$



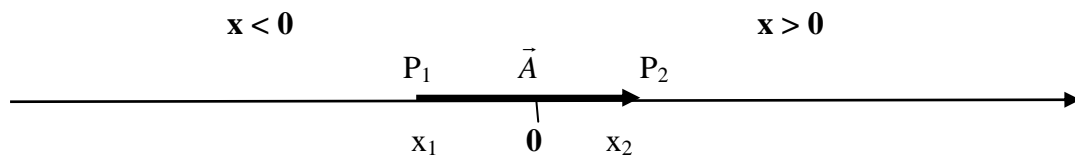
Hasta aquí se trataron los vectores desde el punto de vista gráfico, mediante flechas. De ahora en adelante los estudiaremos considerándolos en sistemas de referencia.

## VECTORES EN SISTEMAS DE REFERENCIA

Primero consideraremos los sistemas de referencia que se pueden visualizar gráficamente:

### Sistema Coordenado Unidimensional o Sistema Lineal: $\mathbb{R}$

Sabemos que los números reales se pueden representar gráficamente por los puntos de una línea recta, que recibe el nombre de “recta real”.



A cada número real le corresponde *uno y solamente* un punto sobre el eje, y a cada punto del eje le corresponde *uno y solamente* un número real.

Un vector en la recta real con origen en  $P_1$  y extremo en  $P_2$  se indica con  $\vec{A}$

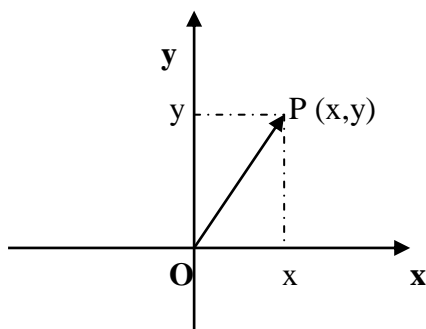
En este sistema, el módulo se obtiene restando a la coordenada del extremo la coordenada del origen.

Ejemplo:  $P_2(5)$  es el extremo y  $P_1(-3)$  es el origen de un vector  $\vec{A}$ .

$$\text{Luego} \quad |\vec{A}| = 5 - (-3) = 8$$

### Sistema Coordenado Bidimensional o Plano: $\mathbb{R}^2$

En este sistema se consideran dos rectas reales perpendiculares entre sí que se intersectan en un punto  $O$ , llamado origen de coordenadas. Estas rectas reciben los nombres de eje de abscisas (recta horizontal) y de eje de ordenadas (recta vertical).



A cada par ordenado de números reales  $(x, y)$  le corresponde *uno y solamente* un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde *uno y solamente* un par de coordenadas  $(x, y)$ .

En el sistema coordenado bidimensional se establece una *correspondencia biunívoca* entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

Al unir el origen de coordenadas con el punto  $P$ , se obtiene el vector posición  $\overrightarrow{OP}$  que se representa simplemente con  $\vec{P}$

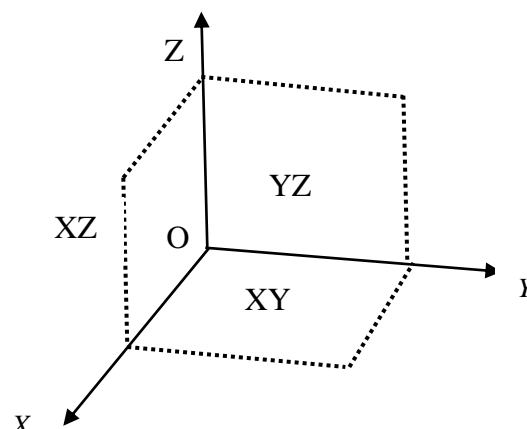
### Sistema Coordenado Tridimensional o Espacio: $\mathfrak{R}^3$

Se consideran tres ejes mutuamente perpendiculares que se intersectan en un origen común  $O$  y determinan tres planos coordenados  $XY$ ,  $YZ$ ,  $ZX$  que dividen al espacio en ocho regiones planas llamadas *octantes*.

A cada punto  $P$  del espacio le corresponde *una y solamente una* terna ordenada de números reales  $(x, y, z)$  y a cada terna ordenada de números reales le corresponde *uno y solamente un* punto del espacio.

En el sistema coordenado tridimensional o espacio ordinario se establece una *correspondencia biunívoca* entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas de números reales.

Octantes	
1	$x > 0, y > 0, z > 0$
2	$x < 0, y > 0, z > 0$
3	$x > 0, y < 0, z > 0$
4	$x < 0, y < 0, z > 0$
5	$x > 0, y > 0, z < 0$
6	$x < 0, y > 0, z < 0$
7	$x > 0, y < 0, z < 0$
8	$x < 0, y < 0, z < 0$



Al unir el origen de coordenadas con el punto  $P$ , se obtiene el vector posición  $\overrightarrow{OP}$  que se representa simplemente con  $\vec{P}$

*Observación:* Se puede ampliar a  $n$  la dimensión del espacio:  $\mathfrak{R}^n$ . Un punto en este espacio queda perfectamente identificado por una  $n$ -upla ordenada de números reales  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### COMPONENTES DE UN VECTOR

Vimos que la posición de un punto cualquiera de la recta, del plano o del espacio ordinario queda determinada por un número real, un par de números reales o una terna de números

reales, respectivamente, llamadas coordenadas del punto. También, puede determinarse la posición de dicho punto mediante un vector, cuyo extremo sea el punto considerado.

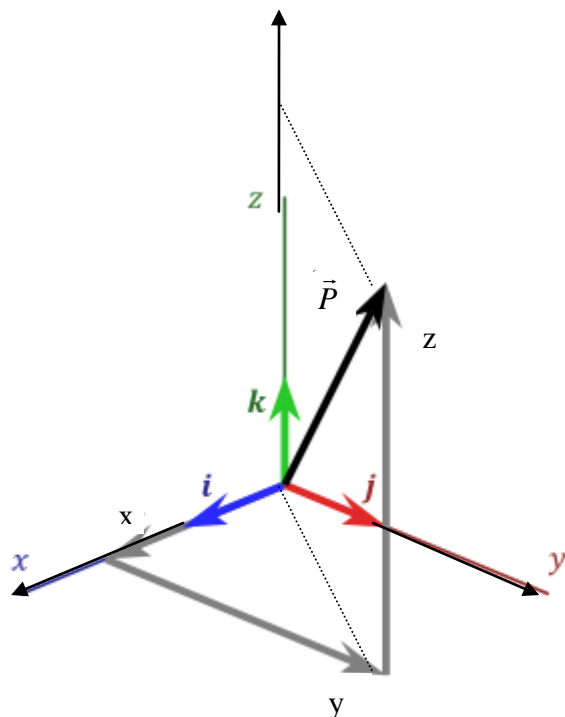
El vector con origen en  $O$  y extremo en el punto se llama *vector asociado* al punto o *vector posición* del punto.

Para nuestro estudio se considerarán vectores en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  cuyos conceptos pueden adaptarse a espacios de otras dimensiones.

Consideremos el vector  $\vec{P}$  que une el origen  $O$  con un punto dado  $P(x, y, z)$ . La simple indicación de  $P(x, y, z)$  es suficiente para que el vector  $\vec{P}$  quede completamente caracterizado.

Se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del espacio y el conjunto de todos los vectores que parten del origen. En virtud de esta correspondencia se puede escribir  $\vec{P} = (x, y, z)$ .

Esta correspondencia resulta muy útil cuando es necesario realizar cálculos vectoriales y es de gran importancia para la extensión del concepto de vector a espacios de más dimensiones.



**Definición:** Se llaman *componentes* de un vector  $\vec{P}$  respecto del sistema de referencia  $\mathbb{R}^3$  a las proyecciones del vector sobre los ejes, o sea a los números  $x, y, z$ .

Se puede calcular el módulo del vector en función de sus componentes como  $P = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , que siempre es una cantidad positiva.

Sobre cada uno de los ejes, coincidentes con sus sentidos positivos, se consideran los versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , llamados *versores fundamentales*, cuyas componentes son  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Sobre cada uno de los ejes se obtienen vectores, que surgen del producto de un escalar por un vector, y resultan  $x\vec{i} = x(1,0,0) = (x,0,0)$ ;  $y\vec{j} = y(0,1,0) = (0,y,0)$  y  $z\vec{k} = z(0,0,1) = (0,0,z)$ .

Por adición de vectores resulta  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Esta descomposición de un vector, como suma de tres vectores en la dirección de los ejes coordenados, se llama *descomposición canónica de un vector*.

Por lo tanto, todo vector  $\vec{P} = (x, y, z)$  se puede escribir como  $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

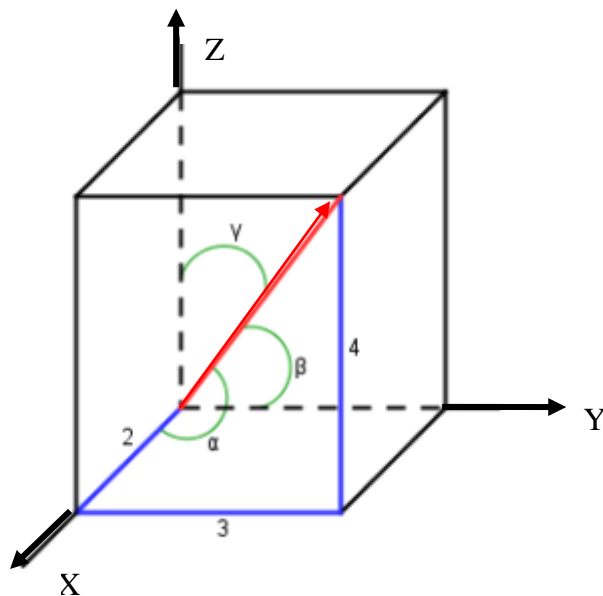
También se puede escribir matricialmente como el vector columna  $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

*Observación:* El vector nulo se corresponde con el punto O, origen del sistema, por eso  $\vec{O} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$  al que escribimos  $\vec{O} = (0,0,0)$ .

Ejemplo: Determine el vector  $\vec{P}$  correspondiente al punto P (2, 3, 4)

$$P = (2,3,4) \rightarrow \vec{P} = (2,3,4) \rightarrow \vec{P} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

### Cosemos Directores de un Vector



Se llaman Cosenos Directores del vector  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  a los cosenos de los ángulos que forma el vector con el sentido positivo de los ejes coordenados.

Si llamamos  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  a los ángulos determinados por el vector con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|A|} \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|A|} \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

Si elevamos estas igualdades al cuadrado y las sumamos miembro a miembro, resulta:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$  que es la relación fundamental que liga los cosenos directores de un vector.

Ejemplo1: Encuentre los cosenos directores del vector  $\vec{P}$  correspondiente al punto P (2, 3, 4)

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{29}} \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Ejemplo 2:

Expresar en forma cartesiana o canónica:

- El vector con origen en (0, 0, 0) y extremo en (3, -5, 2)
- El vector con origen en (-1, 2, 4) y extremo en (2, -3, 7)
- El vector unitario del vector  $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

a.  $\vec{P} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

b.  $\vec{A} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$

c.  $|\vec{B}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \rightarrow \vec{B}_u = \left( \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}} \right)$

### Expresiones Cartesianas de las Operaciones entre Vectores

A continuación, se darán las expresiones cartesianas de las leyes y propiedades que se vieron en forma independiente de un sistema de referencia. Nos referiremos a vectores en el espacio  $\mathcal{R}^3$ , dejando por cuenta del alumno la traducción simplificada al espacio  $\mathcal{R}^2$ .

1)  $\vec{A} = \vec{B}$  implica  $A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$  de donde  $(A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} = 0$  y como  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  son vectores no nulos, esta igualdad sólo es posible si se verifica que  $A_x - B_x = 0$ ;  $A_y - B_y = 0$  y  $A_z - B_z = 0$  y así surge que  $A_x = B_x$ ,  $A_y = B_y$  y  $A_z = B_z$ .

La ecuación vectorial única  $\vec{A} = \vec{B}$  da lugar a tres ecuaciones escalares que nos dicen: dos vectores son iguales cuando sus coordenadas homólogas son también iguales.

2)  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{S} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) + (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$  y la suma de vectores de igual dirección resulta  $\vec{S} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$

La suma de dos vectores es otro vector, que tiene por coordenadas las sumas de las coordenadas homologas de los vectores sumandos.

En el caso general, cuando  $\vec{S} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n = \sum_{r=1}^n \vec{A}_r$ , se tiene

$$\vec{S} = (A_{1x} + A_{2x} + \dots + A_{nx}) \vec{i} + (A_{1y} + A_{2y} + \dots + A_{ny}) \vec{j} + (A_{1z} + A_{2z} + \dots + A_{nz}) \vec{k}$$

que en forma abreviada es  $\vec{S} = (\sum_{r=1}^n A_{rx}) \vec{i} + (\sum_{r=1}^n A_{ry}) \vec{j} + (\sum_{r=1}^n A_{rz}) \vec{k}$

3)  $\vec{B} = -\vec{A}$  El vector  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$  es el vector opuesto de  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  por lo tanto  $B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} = -(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$  o bien  $(A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k} = 0$  y como  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  son vectores no nulos esta igualdad es cierta sí y sólo sí  $A_x + B_x = 0$ ,  $A_y + B_y = 0$  y  $A_z + B_z = 0$  que equivale a  $B_x = -A_x$ ,  $B_y = -A_y$  y  $B_z = -A_z$ .

Los vectores opuestos tienen sus coordenadas homologas iguales pero de signos contrarios.

$$4) \quad \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{D} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) + (-B_x \vec{i} - B_y \vec{j} - B_z \vec{k})$$

$$\text{luego} \quad \vec{D} = (A_x - B_x) \vec{i} + (A_y - B_y) \vec{j} + (A_z - B_z) \vec{k}.$$

Las componentes del vector diferencia son las diferencias de las componentes homólogas de los vectores dados.

En el caso de ser  $\vec{A} = \vec{B}$  entonces  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

5)  $\vec{M} = n \vec{A}$  implica  $M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = n (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$  y por propiedad distributiva del producto de un escalar por la suma de vectores se cumple que  $M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = n A_x \vec{i} + n A_y \vec{j} + n A_z \vec{k}$  y de la igualdad entre vectores surge  $M_x = n A_x$ ,  $M_y = n A_y$  y  $M_z = n A_z$ .

Multiplicar un vector por un escalar equivale a multiplicar sus componentes por dicho escalar.

6)  $\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \bullet (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$  y como vale la propiedad distributiva con respecto a la suma de vectores, obtenemos nueve productos parciales al efectuar operaciones en el segundo miembro.

De los nueve productos, seis se anulan en virtud de que  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ ,  $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$  quedando los tres restantes  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$  de manera que

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

El producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes homólogas.

*Observación:* El producto escalar entre dos vectores es útil para determinar el *ángulo entre*

*dos vectores*. Se sabe que  $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \Rightarrow \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$

fórmula que permite calcular el ángulo entre dos vectores conociendo sus componentes.

$$\text{Teorema: } \vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

7)  $\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$  y por la validez de la propiedad distributiva del producto vectorial con respecto a la suma de vectores, y cuidando el orden en las operaciones, obtenemos nueve productos parciales, tres de los cuales son nulos en virtud de que:  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$  y los seis restantes son  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ;  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ;  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ ;  $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ ;  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$  e  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

Finalmente, resulta  $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$

Las componentes del vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  son los coeficientes de los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Se suele recordar mejor esta expresión escribiéndola como determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Como se trata de un producto vectorial es preciso cuidar el orden de los factores por eso, en la primera fila se ubican los versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ; en la segunda las componentes de  $\vec{A}$  que es el primer vector del producto y por último las componentes de  $\vec{B}$  que es el segundo vector del producto.

Cuando se desarrolla este determinante se obtiene la expresión dada anteriormente.

*Observación:* Se sabe que dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son paralelos sí y sólo sí  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ . Además, el valor de un determinante es nulo cuando tiene dos filas proporcionales,

entonces 
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

*Teorema:* 
$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

Con los productos entre dos vectores ya estudiados, escalar y vectorial, se puede definir un nuevo producto:

**Producto Mixto:** El *producto mixto* de tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es un escalar que se obtiene del producto escalar entre  $\vec{A} \times \vec{B}$  y  $\vec{C}$

$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  son distintas formas de expresar el producto mixto de los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ .

La expresión cartesiana del producto mixto se obtiene multiplicando escalarmente las componentes del vector  $(\vec{A} \times \vec{B})$  por las componentes del vector  $\vec{C}$ .

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) C_x + (A_z B_x - A_x B_z) C_y + (A_x B_y - A_y B_x) C_z$$

Esta expresión difiere de la que se obtuvo para el producto vectorial de  $\vec{A} \times \vec{B}$ , sólo en que los vectores unitarios  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  han sido sustituidos por las coordenadas del vector  $\vec{C}$ , resultado que es precisamente el desarrollo del determinante formado por las componentes de los tres vectores:



$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Las propiedades fundamentales del producto mixto son:

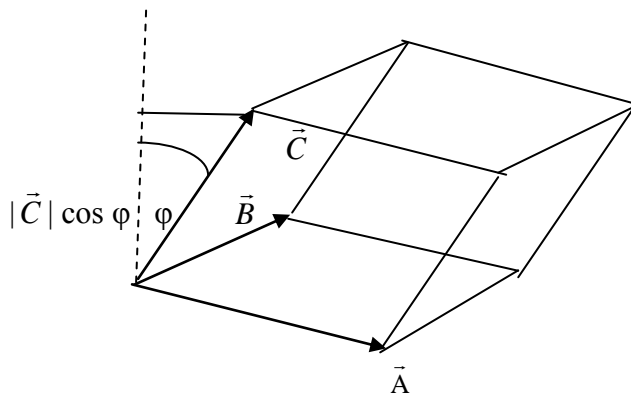
- a) El producto mixto no varía si se permutan los tres vectores simultáneamente.

$$(\vec{A} \vec{B} \vec{C}) = (\vec{B} \vec{C} \vec{A}) = (\vec{C} \vec{A} \vec{B})$$

- b) El producto mixto cambia de signo si se permutan sólo dos vectores.

$$(\vec{A} \vec{B} \vec{C}) = - (\vec{B} \vec{A} \vec{C}) = - (\vec{C} \vec{B} \vec{A}) = - (\vec{A} \vec{C} \vec{B})$$

- c) *Interpretación Geométrica:* El producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los mismos llevados a un origen común



El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de la base por su altura:

$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura}$$

El área de la base es  $|\vec{A} \times \vec{B}|$

Llamamos  $\phi$  al ángulo que forma  $\vec{C}$  con  $\vec{A} \times \vec{B}$ , ya que  $\vec{A} \times \vec{B}$  es perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

Entonces la altura es  $|\vec{C}| \cos \phi$ .

Por lo tanto el volumen del paralelepípedo es  $V = |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot |\vec{C}| \cdot \cos \phi = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

- d) La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanares es que se anule su producto mixto.

Es una consecuencia inmediata de la propiedad anterior.

### Aplicaciones

- 1.- Sean  $\vec{A} = (-1, 2)$  y  $\vec{B} = (3, -1)$ , calcular el vector  $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -3)$$

2.- Calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  sean iguales, siendo:

$$\vec{A} = (3a - b, 1) \text{ y } \vec{B} = (4, a + 3b)$$

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 4 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - b = 4 \\ a + 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{10} \\ b = -\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = (4, 1)$$

3.- Dados los vectores  $\vec{A} = (-1, 2, -2)$  y  $\vec{B} = (4, 0, -2)$ . Hallar:

- El producto escalar de los mismos.
- La proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el vector  $\vec{B}$
- La proyección del vector  $\vec{B}$  sobre el vector  $\vec{A}$ .
- Un vector  $\vec{C}$  perpendicular a  $\vec{A}$  y a  $\vec{B}$
- Mostrar que  $\vec{C}$  es perpendicular a  $\vec{A}$  y a  $\vec{B}$

$$a- \quad \vec{A} \bullet \vec{B} = (-1)4 + 2 \cdot 0 + (-2)(-2) = -4 + 4 = 0$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{5} \quad |\vec{B}| = \sqrt{20}$$

$$b- \text{ y } c- \quad \text{Proy}_{\vec{B}} \vec{A} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{0}{\sqrt{20}} \quad \text{y} \quad \text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}|} = 0$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

$$d- \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 10\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$e- \quad \begin{cases} \vec{A} \bullet \vec{C} = (-1)(-4) + 2(-10) + (-2)(-8) = 0 \\ \vec{B} \bullet \vec{C} = 4(-4) + 0(-10) + (-2)(-8) = 0 \end{cases}$$

4.- Sean los puntos de coordenadas  $O(1, 0, 2)$ ,  $A(3, 2, 4)$ ,  $B(2, 6, 8)$  y  $C(2, -3, 1)$ .

Determine el volumen del paralelepípedo definido por los vectores  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  y  $\vec{OC}$ .

El volumen de un paralelepípedo se calcula como el producto mixto (sin signo) de los tres vectores que definen el paralelepípedo.

En nuestro caso los vectores los obtenemos hallando las diferencias entre las coordenadas de cada par de puntos:

$$\overrightarrow{OA} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m}, \quad \overrightarrow{OB} = (\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k})\text{m}, \quad \overrightarrow{OC} = (\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})\text{m}$$

El producto mixto está dado por el determinante  $V = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})$

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 20 \text{ m}^3 \Rightarrow \text{Volumen del paralelepípedo es } 20 \text{ m}^3$$

**5.-** Determinar si los vectores  $\vec{A} = (7, 4, 6)$ ,  $\vec{B} = (2, 1, 1)$  y  $\vec{C} = (19, 11, 17)$ , son coplanares.

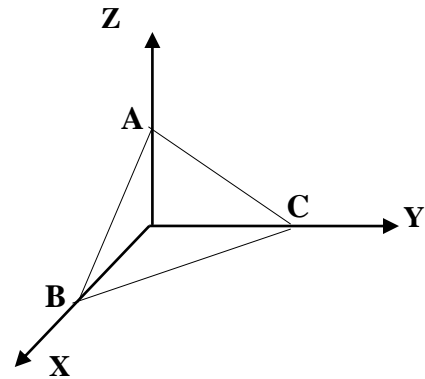
Para que  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  sean coplanares se debe cumplir que  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 119 + 76 + 132 - 114 - 77 - 136 = 0$$

Entonces  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , son coplanares.

**6.-** Sabiendo que los puntos A, B, C intersecan a los ejes coordenados x, y, z en los segmentos de longitudes 2, 4, 6 respectivamente. Encontrar

- El área de la cara AOB
- El volumen de la pirámide de la figura.



$$\vec{A} = (0, 0, 2), \quad \vec{B} = (0, 4, 0), \quad \vec{C} = (6, 0, 0)$$

$$a) \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8\vec{i} \therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = 8$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo

$$\text{Área del triángulo} = \text{área de cara AOB} = \frac{8}{2} = 4 \text{ u}^2$$

b) Volumen de la pirámide =  $\frac{1}{6}$  del volumen del paralelepípedo

$$\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48 \Rightarrow \text{Vol. Pirámide} = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8 \text{ u}^3$$