UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Segundo Parcial T1 16/12/2022

[redacted] *ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.*
No está permitido el uso de calculadoras graficadoras. No resolver el examen en lápiz.
Duración del examen: 2 horas
Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto.
Condición mínima de aprobación por promoción (8 puntos): 70% del examen correctamente resuelto.

1) Indicar si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas, justificando la respuesta:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^3-8}\,dx$ es divergente.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{3n+n^3}{2n^3+1} \leq 4\cdot a_n \leq \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}$ entonces $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$ es convergente.

2) Hallar el valor de $a>1$ para que el área limitada por el eje x, la recta $y=x$, y la gráfica de $f\colon D_f \to \mathbb{R}/f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[0;a]$ sea igual a 1

3) Hallar una función $y=f(x)$ que pasa por el punto $(0;1)$ y verifica que

$$(1-2x)\cdot y' = (x-1)\cdot y$$

4) Determinar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+1}(2x+1)^n$

5) Si la ecuación de la recta tangente asociada a una función f en $x=0$ es $y=5x+2$ probar que $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}(2t-1)\cdot f(t)\,dt$ tiene un máximo relativo de abscisa $x=0$

EN TODOS LOS CÁLCULOS DE LAS INTEGRALES, INDICAR EL PROCEDIMIENTO O EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN UTILIZADO

$\boxed{1}$ a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^3-8}\,dx = \lim_{\varphi\to 2^-}\int_1^{\varphi}\frac{x^2dx}{x^3-8} = \lim_{\varphi\to 2^-}\int_1^{\varphi}\frac{1/3\, d(x^3-8)}{(x^3-8)} = \frac{1}{3}\lim_{\varphi\to 2^-}\int_1^{\varphi}\frac{d(x^3-8)}{x^3-8} =$

impropia 2° especie $\quad d(x^3-8) = 3x^2dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\cdot\left[\lim_{\varphi\to 2^-}\log|x^3-8|\right]_1^{\varphi} = \frac{1}{3}\left[\lim_{\varphi\to 2^-}\log|x^3-8| - \log|1^3-8|\right] = \frac{1}{3}\left[-\infty - \log 7\right] = -\infty$

a) — Verdadero : Divergente

b) Dado la Serie $\displaystyle\sum_{n_0}^{+\infty} a_n$ sera convergente si: $\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0 & \text{cond. necesaria}\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L \wedge L<1\end{cases}$

Dado $\displaystyle\frac{3}{2} - \frac{3n+n^3}{2n^3+1} \le 4\cdot a_n \le \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}$ Dividimos m.a m por 4 la desigualdad. y Hacemos $\lim_{n\to\infty}$ la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{3n+n^3}{2n^3+1}\right) \le a_n \le \frac{1}{4}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}\right] = \text{(por prop. de Limites.)}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{3n+n^3}{2n^3+1}\right) \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}+1}{2+\frac{1}{n^3}}\right) \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\sqrt{n}\cdot\frac{n+2}{n+2}}$$

1

Truco

$$\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}_{1}\Big) \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{4}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n+2\to\infty}}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{\sqrt{n}}{n+2}}$$

por prop. de limites

$$\frac{1}{4} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{4}\left(\lim_{n+2\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}} = \frac{1}{4}e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}}$$

$\to 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{1}{4}e^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$ No cumplimos con la condicion necesaria

por la Ley del "Sanguche" $\quad \sum a_n$ el Sumatorio es Divergente

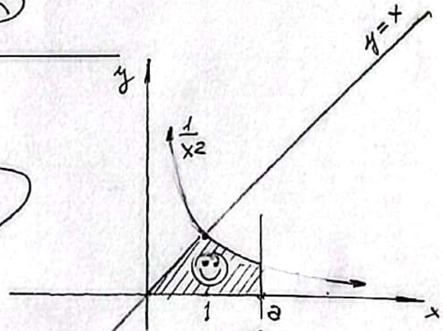
b) — Falso $\sum a_n$ no es convergente

$\boxed{2}$ Muy facil: (Regalado)

$\displaystyle A(a) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^a \frac{dx}{x^2} = 1$ (imposición)

$\displaystyle A(a) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \frac{1}{2} - 0 + \left[\frac{1}{x}\right]_a^1 = 1$

$\frac{1}{2} + \cancel{1} - \frac{1}{a} = \cancel{1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$



$\boxed{a = 2}$

(Mas fácil no se consigue)

3

$y = f(x): \ f(0)=1 \ \wedge \ (1-2x)\cdot f'(x) = (x-1)\cdot f(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x-1}{1-2x}$

además $\dfrac{d}{dx}(\log f(x)) = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \Rightarrow \dfrac{d[\log f(x)]}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ☺ en →:

$d[\log f(x)] = -\dfrac{x-1}{2x-1}\,dx \Rightarrow \int d[\log f(x)] = -\int \dfrac{x-1}{2x-1}\,dx$ como en secundaria.

$$\begin{array}{r|l} x-1 & 2x-1 \\ -x+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 \ \ -\frac{1}{2} & \end{array} \Rightarrow \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1} \Rightarrow \int \frac{x-1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{2x-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\log(2x-1)\right] \Rightarrow -\int \frac{x-1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log|2x-1| - x\right] + C$$

$$\Rightarrow \log[f(x)] = \frac{1}{4}\log|2x-1| - \frac{x}{2} + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{4}\log|2x-1| - \frac{x}{2}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{K}$$

$f(x) = K e^{\frac{1}{4}\log|2x-1| - \frac{x}{2}}$ pero $f(0)=1 \Rightarrow 1 = e^{\frac{1}{4}\log 1 - 0}\cdot K \Rightarrow \boxed{1 = K}$ ☺

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{1}{4}\log(|2x-1|) - \frac{x}{2}}}$$

4

$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{3^n+1}(2x+1)^n}_{\varphi_n}$ Como vimos en ej. 1 b $\sum_{n_0}^{+\infty} \varphi_n$ si $\begin{cases} \varphi_n \to 0 \\ y \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right| < 1 \text{ (criterio del Cociente)} \end{cases} \Rightarrow$ Sumatorio Convergente

Aplicamos: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\right| |2x+1|^{n+1}}{\left|\frac{2^n}{3^n+1}\right| |2x+1|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overset{2}{2^{n+1}}}{3^{n+1}+1}\cdot\dfrac{3^n+1}{2^n}\ \underbrace{|2x+1|}_{\text{es constante}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right| = |2x+1|\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2.(3^n+1)}{3.3^n+1} < 1$ ← imposición para la convergencia   Resp. 4

$\Rightarrow |2x+1| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\,3^n+2}{3\,3^n+1} < 1 \Rightarrow |2x+1|\cdot\dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow |2x+1| < 3/2 = R$ ☺ el radio de Converg.

$\Rightarrow -3/2 < 2x+1 < 3/2 \to -\dfrac{3}{4} < x + \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} \quad -\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{1}{4} \to$ Intérvalo converg.

5

5 $\ y - f(0) = f'(0)(x-0)$ Es la recta tangente en $(0, f(0))$ (Punto de Tangencia)

entonces $y = 5x+2 \to y-2 = 5(x-0)$ nos indica $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 5 \end{cases}$ ☺ re-fácil

$G(x) = \int_0^{x^2} (2t-1) f(t)\,dt$ y dicen que tiene max rel en $x=0 \Rightarrow G'(0) = 0$ y $G''(0) > 0$

Por Leibniz $G'(x) = 2.x(2x-1)f(x) - 0 \Rightarrow G''(x) = 2(2x-1)f(x) + 4x f(x) + (4x^2-2x) f'(x)$

$G'(0) = 2.0(0-1)f(0) = 0.2 = 0 \to x=0$ es punto Crítico $G'(0) = 0$

$G''(0) = 2(0-1)f(0) + 4.0 f(0) + 0 f'(0) = 2.2 + 0 + 0 = 4 \quad G''(0) = 4$

Efectivamente $G(x)$ tiene Máximo relativo en $(0, G(0))$

$G(0) = \int_0^0 \varphi(t)\,dt = 0$ por prop. de Integrales $(0,0)$ es max relativo de $G(x)$

☺

Un Examen para que todos aprueben!