ANÁLISIS MATEMÁTICO I CURSO: Z 1 0 1 6 **Segundo Parcial** Fecha: 11-07-23 8 (ocho)

Tiempo asignado: 2 hs

APELLIDO y NOMBRE ....

1)Halle $f{:}D \subseteq R \to R \,/ \int_1^{e^x} f'(\ln t)\, dt = x^2 - 2x$ tal que $f(0) = 0$

---

2)Halle el polinomio de Taylor de orden dos en potencias de "(x - $\cancel{6}$ 4)" asociado a

$$F(x) = 2 + 3x + \int_4^{x^2-12} x.f(t)dt$$

si la recta de ecuación: $2y - x - 4 = 0$ es la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0) = (4, y_0)$

3a)Halle la Solución particular de la ecuación $y' = - y \;/\; y(0) = e^2$

3b)Halle el área del recinto plano DEL PRIMER CUADRANTE limitado por la curva que es SP de la ED , la recta tangente a dicha curva en el punto $(0;y_0)$ y la recta $x = 2$

4a)Probar que CV la $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2.(1+e^x)} dx$

4b)Analice si CV y en caso afirmativo a cuánto converge: $\int_e^{\infty} \frac{1}{x.\ln^3(x)} dx$

5a)Halle f si $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ si la recta de ecuación $y = 2x + 5$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0) = (0, y_0)$.

5b)Halle f si $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x + 1)}$ si la recta de ecuación $y = 3x + 4$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0) = (0, y_0)$.

Fecha: 11-07-23

Parcial Fecha: 11-07-23

1) $\int_1^{e^x} f'(\ln t)\, dt = x^2 - 2x \quad , \quad f(0) = 0$

Derivo m.a.m:

Por teorema fundamental:

$f'(\ln e^x) \cdot e^x = 2x - 2$

Por prop. de la logaritmación $\ln a^b = b \cdot \ln a$

$f'(x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}) \cdot e^x = 2x - 2$

$f'(x) = \dfrac{2x-2}{e^x}$ Integro m.a.m

$\int f'(x)\, dx = \int \dfrac{2x-2}{e^x}\, dx$

$f(x) =$ CA

CA: $\int \dfrac{2x-2}{e^x}\, dx = \int \underbrace{(2x-2)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v}\, dx$ ILPET

$u = 2x - 2 \longrightarrow u' = 2\, dx$

$v' = e^{-x}\, dx \longrightarrow v = -e^{-x}$

$\int (2x-2) \cdot e^{-x}\, dx = (2x-2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2\, dx$

$= (2x-2)(-e^{-x}) + 2 \int e^{-x}\, dx$

$= (2x-2)(-e^{-x}) - 2e^{-x} + C$

NOTA

↓

Vuelvo del CA:

$$f(x) = (2x-2)(-e^{-x}) - 2e^{-x} + C$$

Como $f(0) = 0$

$$f(0) = (2\cdot 0 - 2)(-e^{0}) - 2e^{0} + C$$

$$0 = -2\cdot(-1) - 2 + C$$

$$0 = 2 - 2 + C$$

$$\boxed{C = 0}$$

Entonces: $\boxed{f(x) = (2x-2)(-e^{-x}) - 2e^{-x}}$ //

2) orden dos, potencias de "$(x-4)$"

$$F(x) = 2 + 3x + \int_{4}^{x^2-12} x \cdot f(t)\, dt$$

recta ec. $2y - x - 4 = 0$ es tg en $(4, y_0)$

TRADUCCIÓN DE DATOS:

$$2y = x + 4 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

A quién derivo?

Entonces: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ | $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}}$

$f(4) = 4$ | $f(4) = \frac{1}{2}$

Listo.

$$P(x) = F(4) + \frac{F'(4)}{1!}(x-4) + \frac{F''(4)}{2!}(x-4)^2$$

HOJA N

FECHA

$$F(x) = 2 + 3x + x\int_4^{x^2-12} f(t)\,dt$$

$$F(4) = 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot \underbrace{\int_4^{4} f(t)\,dt}_{=0}$$

$$F(4) = 2 + 12 + 0$$

$$\boxed{F(4) = 14}$$

Teorema Fundamental

$$F'(x) = 0 + 3 + 1\cdot\int_4^{x^2-12} f(t)\,dt + \overbrace{x\cdot f(x^2-12)\cdot 2x}$$

$$F'(x) = 3 + \int_4^{x^2-12} f(t)\,dt + 2x^2\cdot f(x^2-12)$$

$$F'(4) = 3 + \cancel{\int_4^{4} f(t)\,dt} + 2\cdot 4^2\cdot f(4)$$

$$F'(4) = 3 + 2\cdot 16\cdot 4$$

$$F'(4) = 3 + 128$$

$$\boxed{F'(4) = 131}$$

$$F''(x) = 0 + f(x^2-12)\cdot 2x + 4x\cdot f(x^2-12) + 2x^2\cdot f'(x^2-12)\cdot 2x$$

$$F''(x) = f(x^2-12)\cdot 2x + 4x\cdot f(x^2-12) + 2x^2\cdot f'(x^2-12)\cdot 2x$$

$$F''(4) = f(4)\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot f(4) + 2\cdot 4^2\cdot f'(4)\cdot 2\cdot 4$$

$$F''(4) = 4\cdot 8 + 16\cdot 4 + 2\cdot 16\cdot \frac{1}{2}\cdot 8$$

$$F''(4) = 32 + 64 + 128$$

$$\boxed{F''(4) = 224}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{P(x) = 14 + \frac{131}{1!}(x-4) + \frac{224}{2!}(x-4)^2}$$

NOTA

3-a) SP de $y' = -y \;/\; f(0) = e^2$

$$\frac{dy}{dx} = -y \rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -dx$$

$$\ln|y| = -x + c$$

$$|y| = e^{-x+c}$$

Abro el módulo:

$$y = e^{-x+c} \quad \vee \quad y = -e^{-x+c}$$

$$e^2 = e^{-0+c} \quad \vee \quad e^2 = -e^{-0+c}$$

$c = 2$ | $c = 2$

Entonces: | entonces:

$e^2 = e^2$ | $e^2 = -e^2$

verifica ✓ | no verifica

$$\therefore \boxed{SP: \; y = e^{-x+2}} \; //$$

CURS

HOJA N°

FECHA

3-b) $C_1: y = e^{-x+2}$, tg de C_1 en $(0, y_0)$, $x=2$

r.tg: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

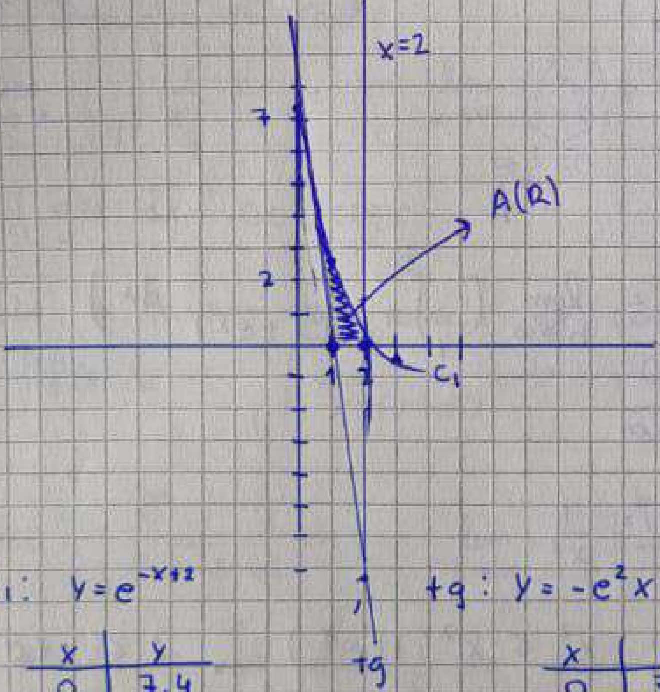
$f(0) = e^{0+2} = \boxed{e^2}$

$f'(x) = e^{-x+2} \cdot (-1) = -e^{-x+2}$

$f'(0) = \boxed{-e^2}$

Entonces: $y = -e^2(x-0) + e^2$

$$\boxed{y = -e^2 x + e^2}$$



C_1: $y = e^{-x+2}$

x	y
0	7,4
1	2,7
2	0
3	0,4

tg: $y = -e^2 x + e^2$

x	y
0	7,4
1	0
2	-7,4

$$\int_0^2 e^{-x+2} - (-e^2 x + e^2)\,dx = \int_0^2 e^{-x+2} + e^2 x - e^2 \,dx$$

NOTA

ANÁLISIS MATEMÁTI

6

$$\int_0^2 e^{-x+2} + e^2 x - e^2 \, dx$$

$$\int e^{-x+2}\,dx + \int e^2 x\,dx - \int e^2\,dx$$

$$-e^{-x+2} + e^2\frac{x^2}{2} - e^2 x$$

Entonces:

$$\int_0^2 e^{-x+2} + e^2 x - e^2 \, dx = \left[-e^{-x+2} + e^2\frac{x^2}{2} - e^2 x\right]\Big|_0^2$$

$$A(R) = -e^{-2+2} + e^2\cdot\frac{2^2}{2} - e^2\cdot 2 - \left[e^{0+2}\cdot \cancel{e^2\frac{0^2}{2}} - \cancel{e^2\cdot 0}\right]$$

$$A(R) = -e^0 + e^2\cdot 2 - e^2\cdot 2 - e^2$$

$$A(R) = -1 + \cancel{2e^2} - \cancel{2e^2} - e^2$$

$$\boxed{A(R) = e^2} \,//$$

4a) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx\right)$$

Por teorema de comparación

$$f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} \checkmark \rightarrow \quad x^2 \leq x^2(1+e^x) \rightarrow \quad 1 \leq 1+e^x$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq e^x \qquad \text{Verifica } \forall x \in a \ [1;+\infty)$$

↓

NOTA

EMÁTICO I CUP
do: 2 hs

OMBRE: $\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx\right)$

HOJA N°

FECHA

I) Resuelvo la integral

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1}+c = \boxed{\frac{-1}{x}+c}$$

II) Resuelvo Barrow

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^b = \frac{-1}{b}+\frac{1}{1} = \boxed{\frac{-1}{b}+1}$$

III) Resuelvo el límite

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{-1}{b}\right)}_{\to\frac{1}{\infty}=0}+1\right) = \boxed{1}$$

$\int g(x)\,dx$ converge

Por lo tanto, por teorema de comparación

$\int f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx$ Converge tambien //

4b) $\int_e^\infty \frac{1}{x\,Ln^3(x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_e^b \frac{1}{x\cdot Ln^3(x)}\,dx\right)$

$z = \ln(x) \rightarrow dz = \frac{1}{x}\,dx$

Entonces: $\lim_{b\to\infty}\left(\int_e^b \frac{1}{z^3}\,dz\right)$

I) Resuelvo la integral:

$$\int z^{-3}\,dz = -\frac{z^{-2}}{2}+c = \frac{-1}{2\cdot z^2}+c = \boxed{\frac{-1}{2\cdot Ln^2(x)}+c}$$

NOTA

II) Resuelvo Barrow

$$\int_e^b \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)}\, dx = \left[\frac{-1}{2 \cdot \ln^2(x)} \right] \Big|_e^b$$

$$= \frac{-1}{2 \cdot \ln^2(b)} + \frac{1}{2 \cdot \underbrace{\ln^2(e)}_{=1}} = \boxed{\frac{-1}{2 \cdot \ln^2(b)} + \frac{1}{2}}$$

III) Resuelvo el límite

$$\lim_{b \to \infty} \left(\int_e^b \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)}\, dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-1}{2 \cdot \ln^2(b)} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

La serie converge a $\frac{1}{2}$

5a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$, r. $y = 2x+5$ en $(0, y_0)$

TRADUCCIÓN DE DATOS:

a quién derivó?

$f(x) = 2x+5$	$f'(x) = 2$
$\boxed{f(0) = 5}$	$\boxed{f'(0) = 2}$

Integro m.a.m:

$$\int f'(x)\, dx = \int \frac{e^x}{e^x + e^{x}}\, dx$$

$$f(x) = CA$$

NOTA

ANÁLISIS
tiempo

HOJA N°
FECHA

CA: $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}\,dx$

$= \int \frac{e^x \cdot e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $\quad z = e^{2x} \rightarrow dz = 2\cdot e^{2x}\,dx$

$\frac{dz}{2} = e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz$ $\quad t = z+1 \rightarrow dt = dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot \ln|t| + c = \frac{1}{2}\cdot \ln|z+1| + c$

$= \frac{1}{2}\cdot \ln|e^{2x}+1| + c$

Vuelvo del CA:

$f(x) = \frac{1}{2}\cdot \ln|e^{2x}+1| + c$

Como $f(0) = 5$:

$f(0) = \frac{1}{2}\cdot \ln|e^0+1| + c$

$5 = \frac{1}{2}\cdot \ln|2| + c$

$5 - \frac{1}{2}\ln|2| = c$

Entonces: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + 5 - \frac{1}{2}\ln|2|}$ //

NOTA

5b) $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-2)(e^x+1)}$, r. $y = 3x+4$ en $(0, y_0)$

TRADUCCIÓN DE DATOS:

$f(x) = 3x+4$ | $f'(x) = 3$

$f(0) = 4$ | $f'(0) = 3$

Listo.

Integro m.a.m

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x+1)}\,dx$$

$$f(x) = CA.$$

CA: $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x+1)}\,dx$ $\quad t = e^x \rightarrow dt = e^x\,dx$

$$= \int \frac{1}{(t-2)(t+1)}\,dt = \int \frac{A}{(t-2)}\,dt + \int \frac{B}{(t+1)}\,dt$$

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t+1)}$$

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A(t+1)+B(t-2)}{(t-2)(t+1)}$$

$$1 = A(t+1) + B(t-2)$$

con $t=-1$: $1 = -3B \rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{3}}$

con $t=2$: $1 = 3A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}}$

Por lo tanto

$$\int \frac{1}{(t-2)(t+1)}\,dt = \int \frac{1/3}{(t-2)}\,dt + \int \frac{-1/3}{(t+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t-2)}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)}\,dt$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$= \frac{1}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{3}\ln|t+1| + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln|e^{x}-2| - \frac{1}{3}\ln|e^{x}+1| + C$$

Como $f(0) = 4$

$$f(0) = \frac{1}{3}\ln|e^{0}-2| - \frac{1}{3}\ln|e^{0}+1| + C$$

$$4 = \frac{1}{3}\ln|-1| - \frac{1}{3}\ln|2| + C$$

$$4 = \cancel{\frac{1}{3}\ln(1)} - \frac{1}{3}\ln|2| + C$$

$$4 + \frac{1}{3}\ln|2| = C$$

Por lo tanto: $\boxed{f(x) = \frac{1}{3}\ln|e^{x}-2| - \frac{1}{3}\ln|e^{x}+1| + 4 + \frac{1}{3}\ln|2|}$

//

NOTA