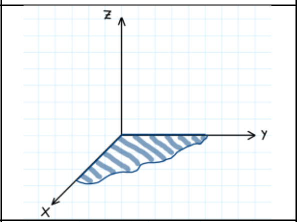
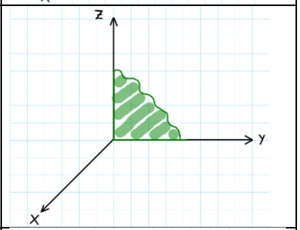
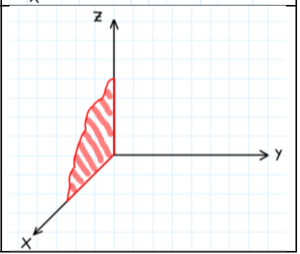
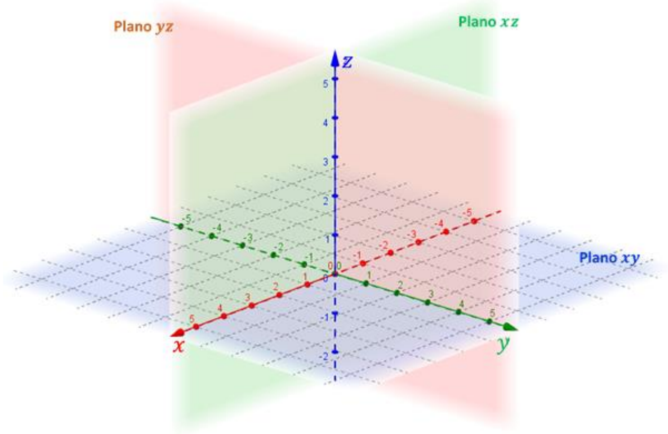
Apuntes para la representación gráfica de planos en $\mathbb{R}^3$

Una de las partes más importantes de la Geometría analítica es la construcción de figuras a partir de sus ecuaciones. La construcción de una superficie se facilita considerablemente por la determinación de sus intersecciones con los ejes coordenados y de sus trazas sobre los planos coordenados.
El objetivo de enseñar a graficar a mano es promover el desarrollo de una noción geométrica del espacio, la cual se complementa con el uso de herramientas tecnológicas que permiten obtener gráficos con precisión milimétrica. Lo esencial es comprender que cualquier plano puede visualizarse como una superficie infinita que se extiende en el espacio, y que, con sólo tres o cuatro puntos no alineados (como las intersecciones con los planos cartesianos o con los ejes coordenados), ya se puede definir un plano.
Recordemos que la ecuación general del plano es $\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$, siendo su vector normal $\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$

Las ecuaciones de los planos coordenados son:

Plano	Ecuación General	Gráfica
XY	*z = 0*	
YZ	*x = 0*	
XZ	*y = 0*	

En GeoGebra los planos coordenados tienen ésta representación gráfica:



Los ejes coordenados tienen de ecuación:

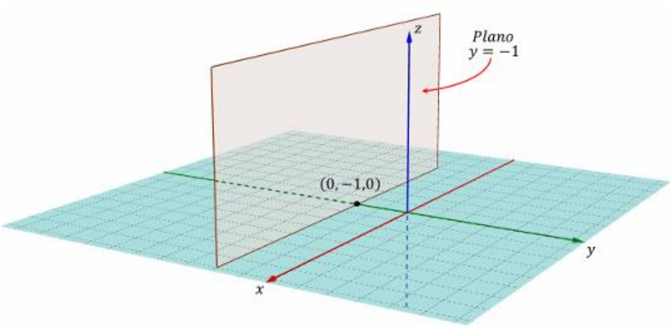
Ejes	**Vector director**	**Ecuaciones implícitas**
X	$\vec{i} = (1,\ 0,\ 0)$	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
Y	$\vec{j} = (0,\ 1,\ 0)$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
Z	$\vec{k} = (0,\ 0,\ 1)$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

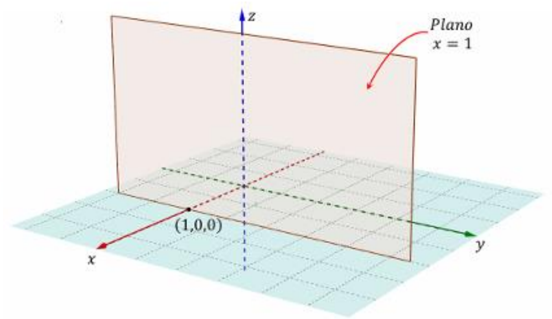
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ indica que el eje **X** es una recta espacial que está formada por la intersección de los planos coordenados de ecuaciones $y = 0 \quad \wedge \quad z = 0$. La intersección está indicada por la llave.

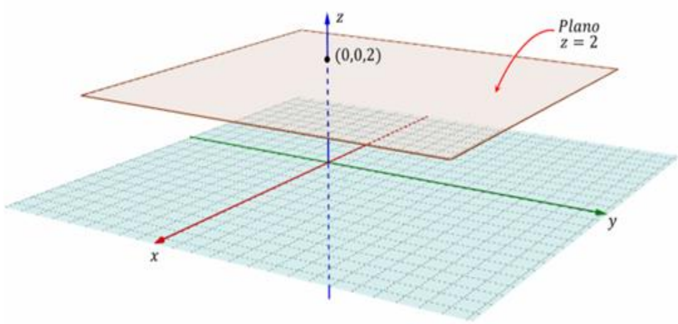
Cualquier plano paralelo a los Planos Coordenados, está representado por su respectiva ecuación igualada una constante real.

Plano	**Ecuación General**	**Plano Paralelo** $\forall\ k \in \mathbb{R}$
XY	$z = 0$	$z = k$
YZ	$x = 0$	$x = k$
XZ	$y = 0$	$y = k$

Ejemplos de planos paralelos a los planos coordenados son:
$z = 2 \qquad\qquad x = 1 \qquad\qquad y = -1$
Y sus respectivas representaciones gráficas:







Caso 1: Graficar el plano $\boldsymbol{2x + 4y + 3z - 12 = 0}$
Podemos observar que esta ecuación está completa, siendo $D \neq 0$, lo que indica que el plano no pasa por el origen de coordenadas.

Para representar a mano el plano en el espacio tridimensional, lo más práctico es determinar sus intersecciones con los ejes coordenados (**X**, **Y** y **Z**). Esto permite obtener tres puntos no alineados, que al ser unidos definen una porción del plano en $\mathbb{R}^3$. Esta sección, ubicada en el primer octante del sistema de coordenadas, brinda una visualización clara de la orientación y posición del plano en el espacio.
Para encontrar las intersecciones, hacemos cero las otras dos variables y despejamos la que queda.

Intersección con el eje **X** $(y = 0,\ z = 0)$:
$2x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 4(0) + 3(0) - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6$
Por lo tanto, el punto $P(6, 0, 0)$ pertenece al plano a graficar

Intersección con el eje **Y** $(x = 0,\ z = 0)$:
$2x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(0) + 4y + 3(0) - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 3$
Por lo tanto, el punto $Q(0, 3, 0)$ pertenece al plano a graficar.

Intersección con el eje **Z** $(x = 0,\ y = 0)$:
$2x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(0) + 4(0) + 3z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3z = 12 \quad \Rightarrow \quad z = 4$
Por lo tanto, el punto. $R\ (0, 0, 4)$ también pertenece al plano a graficar.

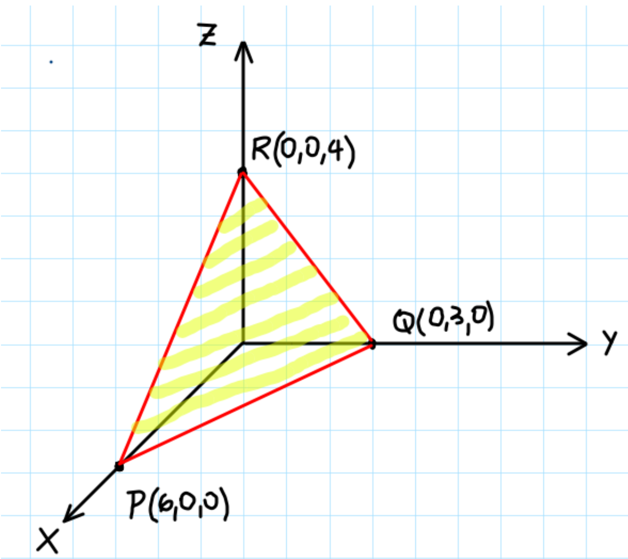
Representación en el espacio
Dibuja un sistema de coordenadas tridimensional con los ejes **X**, **Y** y **Z**. Recuerda:

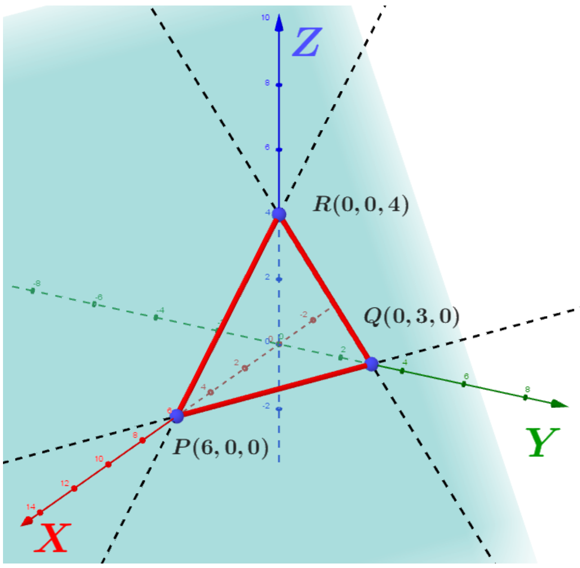
- El eje **Z** se dibuja en vertical.
- El eje **Y** hacia la derecha (horizontal).
- El eje **X** en diagonal a 45° hacia la izquierda (simulando profundidad y perspectiva).

Marca los tres puntos:

- $P(6, 0, 0)$ sobre **X** ,
- $Q(0, 3, 0)$ sobre **Y**,
- $R(0, 0, 4)$ sobre **Z**.

Une esos tres puntos formando un triángulo. Ese triángulo está contenido dentro del plano y representa la "cara visible" del plano en la región del primer octante donde corta los ejes.
Se sombrea ligeramente ese triángulo o se traza líneas punteadas extendiendo el plano, para dar una idea de prolongación.





En las figuras observamos un gráfico a mano del plano y su representación en GeoGebra (considerando la parte positiva de los ejes cartesianos es donde aparecen las etiquetas de cada uno de ellos)

Caso 2: Graficar el plano: $\boldsymbol{2x + 4y - 12 = 0}$ **(Plano Portante)**

Si analizamos la ecuación podemos observar que le falta el término con la variable "z", lo que aparenta representar una recta en $\mathbb{R}^2$, pero estamos trabajando en el espacio $\mathbb{R}^3$, por eso veremos que la recta se replica verticalmente, como si fuera una pared paralela al Eje **Z**. Cuando una variable falta en la ecuación, indica que son permitidos todos los valores posibles de esa variable.

Reescribimos la ecuación. Vamos a despejar "y" para ver mejor la relación:

$2x + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12-2x}{4} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$

Esto nos dice que, para cualquier valor de x, hay un valor correspondiente de y, sin restricciones sobre z, lo que significa que el plano se extiende infinitamente en la dirección del eje **Z**. Entonces, el plano es vertical, paralelo al eje **Z**, y se puede ver como la extensión en dirección del eje **Z**, de la recta que la ecuación forma en el plano **XY**.

Encontrar los puntos de corte

Como no aparece la variable z, el plano cruza infinitamente todos los valores de z, entonces buscamos puntos en el plano **XY**: $2x + 4y = 12$

Si $\boldsymbol{x = 0}$ **:** $2(0) + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad (0, 3, z)\,;\ \forall\ z \in \mathbb{R}$

Si $\boldsymbol{y = 0}$ **:** $2x + 4(0) = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad (6, 0, z)\,;\ \forall\ z \in \mathbb{R}$

Ya tenemos dos puntos importantes en **XY**: $(0, 3, z)\,;\ \forall\ z \in \mathbb{R}$ y $(6, 0, z)\,;\ \forall\ z \in \mathbb{R}$

Con esos dos puntos, vamos a trazar una recta en el plano **XY**. Luego, al extender esa recta hacia arriba y abajo (valores positivos y negativos de z), obtendremos el plano completo.

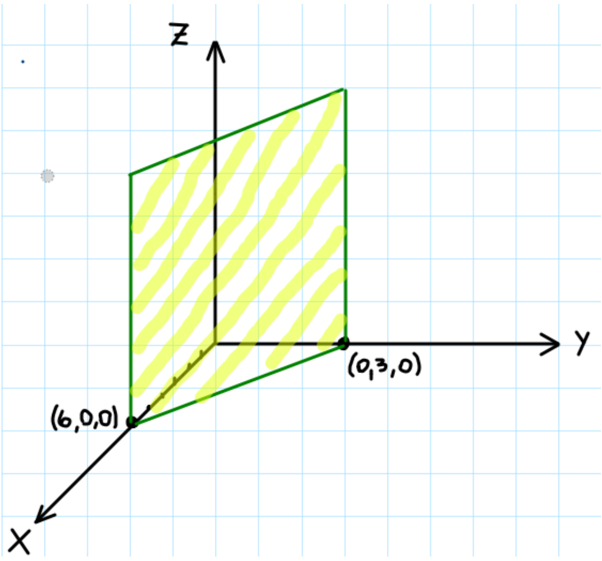
Representación en el espacio

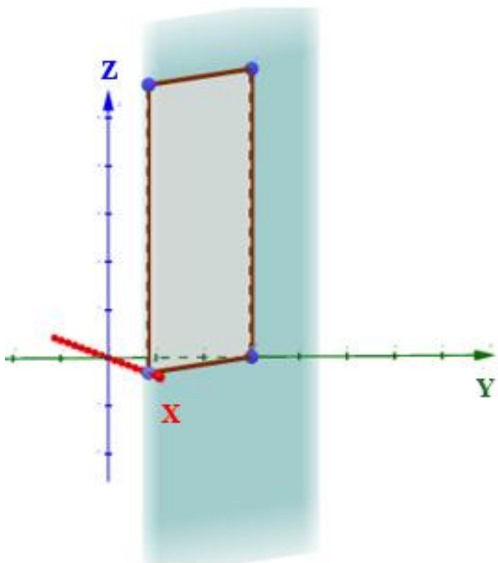
- Dibujamos a mano el sistema cartesiano de $\mathbb{R}^3$ con el mismo criterio que se presentó anteriormente, asignamos un valor arbitrario para z, por ejemplo, $z = 0$, marcamos los puntos $(0, 3, 0)$ y $(6, 0, 0)$.
- Unimos esos dos puntos con una recta en el plano **XY**.
- Desde esa recta, trazamos líneas verticales (paralelas al eje **Z**).
  Esto da la sensación de que esa recta se "eleva" y forma un plano vertical paralelo al eje **Z**.

Interpretación geométrica. Este plano:

- Es paralelo al eje **Z**
- No depende de z, por eso se "extiende" verticalmente
- Corta el plano **XY** en la recta $2x + 4y = 12$
- Representa una "pared infinita" levantada sobre esa recta

En las figuras observamos un gráfico a mano y la representación del plano con vista rotada en GeoGebra (considerando la parte positiva de los ejes cartesianos donde aparecen las etiquetas de cada uno de ellos)





Caso 3: Graficar el plano: $\mathbf{2x + 3z - 12 = 0}$ (Plano Portante)
Si analizamos la ecuación, como en el caso anterior, podemos observar que le falta el término con la variable "y", como estamos trabajando en el espacio veremos que la recta se replica horizontalmente formando un plano paralelo al Eje **Y**.

Encontrar los puntos de corte

Como no aparece la variable y, el plano cruza infinitamente todos los valores de y, así que buscamos puntos en el plano **XZ**: $2x + 3z = 12$
Si $x = 0$: $2(0) + 3z = 12 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow (0, y, 4)\ ;\ \forall\ y \in \mathbb{R}$
Si $z = 0$: $2x + 3(0) = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, y, 0)\ ;\ \forall\ y \in \mathbb{R}$
Ya tenemos dos puntos importantes en **XZ**: $(0, y, 4)\ ;\ \forall\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}$ y $(6, y, 0)\ ;\ \forall\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}$
Con esos dos puntos, vamos a trazar una recta en el plano **XZ**. Luego, al extender esa recta con los valores positivos y negativos de y, obtendremos el plano completo.

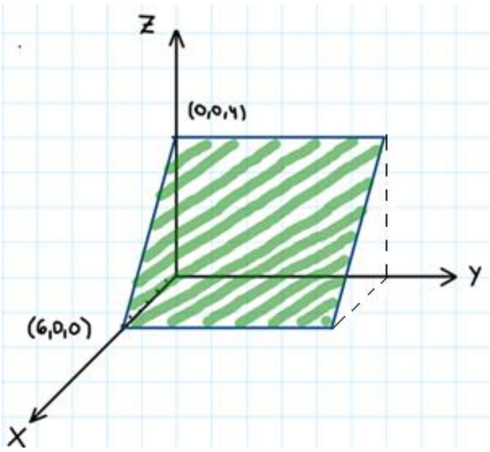
Representación en el espacio

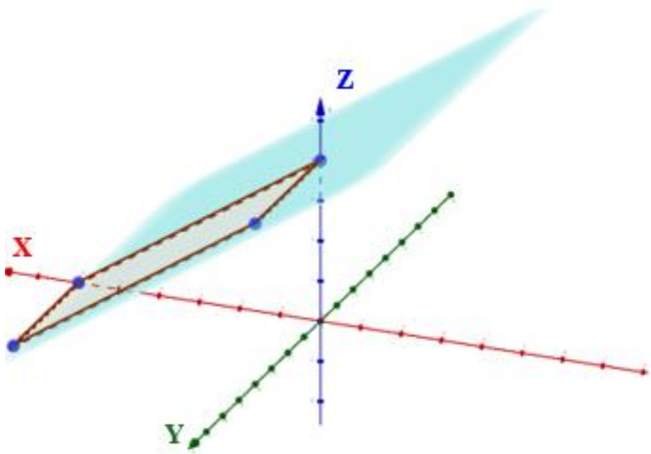
- Dibujamos a mano el sistema cartesiano de $\mathbb{R}^3$ con el mismo criterio que se presentó anteriormente, asignamos un valor arbitrario para y, por ejemplo $y = 0$, marcamos los puntos $(6, 0, 0)$ y $(0, 0, 4)$.
- Unimos esos dos puntos con una recta en el plano **XZ**.
- Desde esa recta, trazamos líneas horizontales (paralelas al eje **Y**).
  Esto da la sensación de que esa recta se extiende y forma un plano horizontal paralelo al Eje **Y**.

Interpretación geométrica. Este plano:

- Es paralelo al eje **Y**
- No depende de y, por eso se "extiende" horizontalmente
- Corta el plano **XZ** en la recta $2x + 3z = 12$
- Representa una "pared infinita" horizontal sobre esa recta
-

En las figuras observamos un gráfico a mano y la representación del plano con vista rotada en GeoGebra (considerando la parte positiva de los ejes cartesianos donde aparecen las etiquetas de cada uno de ellos)





Caso 4: Graficar el plano: $\mathbf{4y + 3z - 12 = 0}$ (Plano Portante)
En la ecuación falta el término con la variable "x", como estamos trabajando en el espacio veremos que la recta se replica horizontalmente formando un plano paralelo al Eje **X**.

Encontrar los puntos de corte

El plano cruza infinitamente todos los valores de x, así que buscamos puntos en el plano **YZ**:
Si $\mathbf{y = 0}$: $4(0) + 3z = 12 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow (x, 0, 4)\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
Si $\mathbf{z = 0}$: $4y + 3(0) = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (x, 3, 0)\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
Ya tenemos dos puntos importantes en **XZ**: $(x, 0, 4)\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ y $(x, 3, 0)\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
Con esos dos puntos, vamos a trazar una recta en el plano **YZ**. Luego, al extender esa recta con los valores positivos y negativos de x, obtendremos el plano completo.

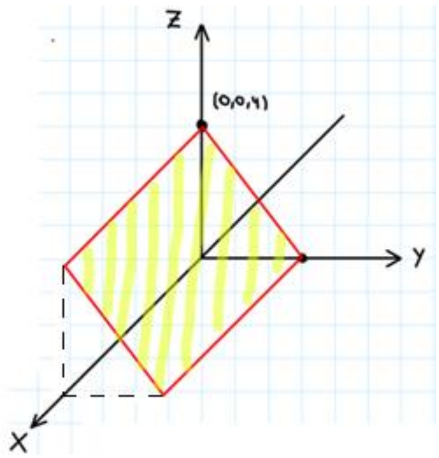
Representar en el espacio

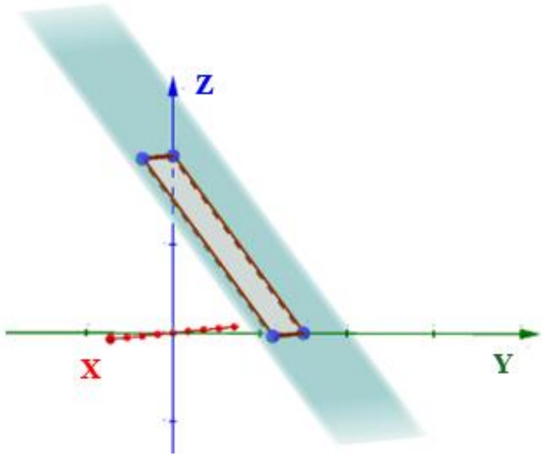
- Dibujamos a mano el sistema cartesiano de $\mathbb{R}^3$ con el mismo criterio de los casos anteriores, asignamos un valor arbitrario para "x", por ejemplo, $x = 0$, marcamos los puntos $(0, 0, 4)$ y $(0, 3, 0)$.
- Unimos esos dos puntos con una recta en el plano **YZ**.
- Desde esa recta, trazamos líneas horizontales (paralelas al eje **X**).
  Esto da la sensación de que esa recta se extiende y forma un plano horizontal paralelo al Eje **X**.

Interpretación geométrica. Este plano:

- Es paralelo al eje **X**
- No depende de x, por eso se "extiende" horizontalmente
- Corta el plano **YZ** en la recta $4y + 3z = 12$
- Representa una "pared infinita" horizontal sobre esa recta

En las figuras observamos un gráfico a mano y la representación del plano con vista levemente rotada en GeoGebra (considerando la parte positiva de los ejes cartesianos donde aparecen las etiquetas de cada uno de ellos)





Caso 4: Graficar el plano: $3x + y - z = 0$

En términos generales, cualquier plano que pasa por el origen tiene la forma:

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \text{siendo} \quad D = 0$$

En este caso, sabemos que el plano pasa por el origen $(0, 0, 0)$, porque al reemplazar $x = 0\,;\ y = 0\,;\ z = 0$, la ecuación verifica.

Encontrar las trazas (intersecciones con los planos coordenados)

Las trazas se encuentran cuando interceptamos el plano a dibujar con los planos coordenados.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para resolver cada una de esas intersecciones, se reemplaza la variable igual a cero en el plano a dibujar. Con esto encontramos líneas en los planos cartesianos que nos dan una pista cierta de cómo se grafica el plano que queremos dibujar.

- Traza sobre el plano **YZ** $(x = 0)$: $\quad 3(0) + y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = z$

Esto representa una recta en el plano **YZ** que pasa por el origen y sube en diagonal, pasando por puntos como $(0, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 3, 3),\ \dots$, considerando que la terna ordenada de cada punto tiene las dos últimas coordenadas iguales, tal que $y = z$

- Traza sobre el plano **XZ** $(y = 0)$: $\quad 3x + 0 - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3x$

La Recta en el plano **XZ**: pasa por el origen pasando por puntos como $(1, 0, 3), (2, 0, 6), (-1, 0, -3),\ \dots$. Todos estos puntos verifican la ecuación $z = 3x$.

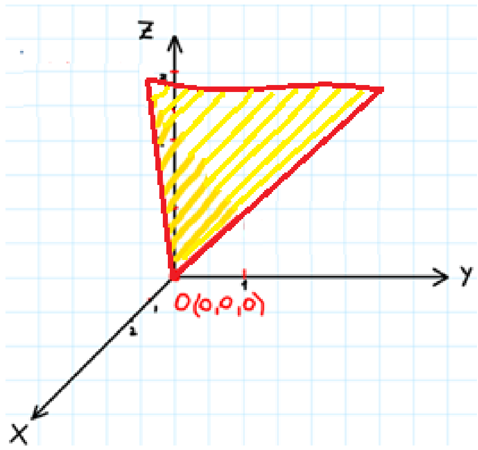
- Traza sobre el plano **XY** $(z = 0)$: $\quad 3x + y - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -3x$

La Recta en el plano **XY** con pendiente negativa, pasando por puntos como $(1, -3, 0), (-1, 3, 0), (0, 0, 0), \dots$ Todos estos puntos verifican la ecuación $y = -3x$.

Representar en el espacio

1. Dibujamos a mano el sistema cartesiano de $\mathbb{R}^3$ con el mismo criterio de los casos anteriores.
2. Dibujamos las tres trazas en los tres planos cartesianos
3. Resaltamos las trazas en el primer octante y podemos observar cómo es el plano a dibujar

En esta figura observamos el gráfico a mano y la representación del plano en el primer octante. Se grafican las dos trazas en los planos **XZ** e **YZ**. El límite superior se representa con una línea curva porque sigue infinitamente hacia arriba. La traza en el plano **XY** (del piso) está en los otros octantes



En GeoGebra podemos ver todos los planos:
el que queremos dibujar en celeste
y los planos coordenados en rosa el **XY**, en verde el **XZ** y en amarillo el **YZ**. Las trazas en cada plano coordenado están resaltadas en los mismos colores