Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Tucumán
Ingeniería en Sistemas de Información
ARQUITECTURA DE COMPUTADORES

TRABAJO PRÀCTICO Nº 3

ALGEBRA DE BOOLE. FUNCIONES. COMPUERTAS Y CIRCUITOS LÓGICOS. SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES (MAPAS DE KARNAUGH).

ÁLGEBRA
DE
BOOLE

ALGEBRA DE BOOLE

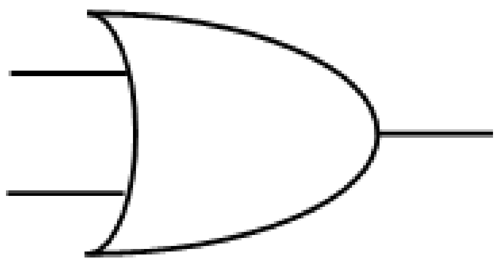
- Representa información digital.
- Expresa algebraicamente operaciones lógicas que realizan los circuitos digitales y determina su respuesta.
- Tiene un conjunto de postulados que se aceptan como base.

ALGEBRA DE BOOLE

- Variables lógicas, booleanas o binarias: asumen valor 0 o 1 únicamente.
- Función lógica: variables lógicas relacionadas entre si por compuertas lógicas.
- Compuertas lógicas: dispositivos electrónicos que permiten, o no, que el nivel alto o bajo de tensión de su entrada se repita en su salida.

COMPUERTAS LÓGICAS BÁSICAS

OR → SUMA LÓGICA

<table>
<tr><th>Símbolo gráfico</th><th>Tabla de verdad o funcionamiento</th><th>Función lógica</th></tr>
<tr><td></td><td>

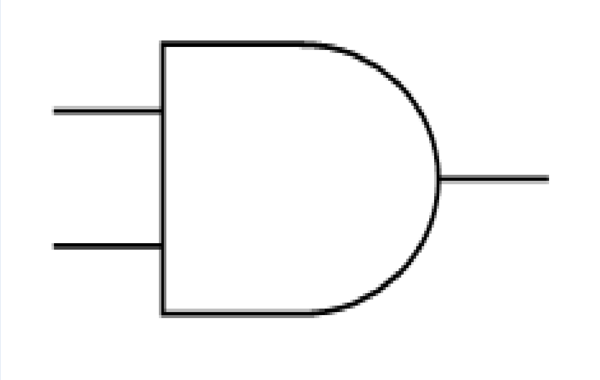
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

</td><td>$X = A + B$</td></tr>
</table>

¿Cómo generalizaríamos el enunciado para “n” variables?

COMPUERTAS LÓGICAS BÁSICAS

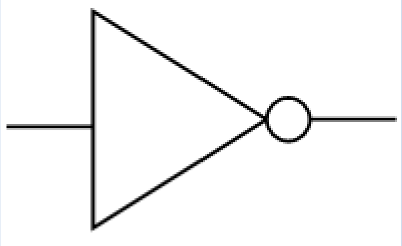
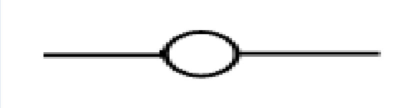
AND → PRODUCTO LÓGICO

<table>
<tr><th>Símbolo gráfico</th><th>Tabla de verdad o funcionamiento</th><th>Función lógica</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>$Y = A \bullet B$</td></tr>
</table>

¿Cómo generalizaríamos el enunciado para “n” variables?

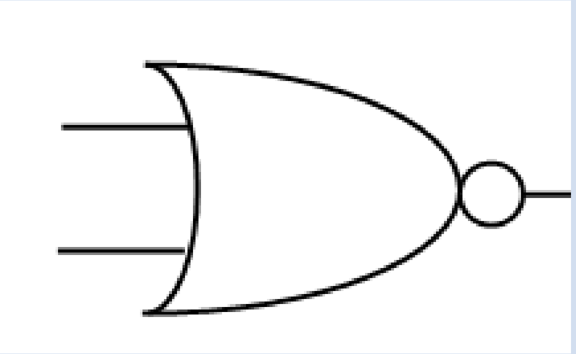
COMPUERTAS LÓGICAS BÁSICAS

NOT → NEGACIÓN O INVERSOR

<table>
<tr><th>Símbolo gráfico</th><th>Tabla de verdad o funcionamiento</th><th>Función lógica</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>X</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>$X = \overline{A}$</td>
</tr>
</table>

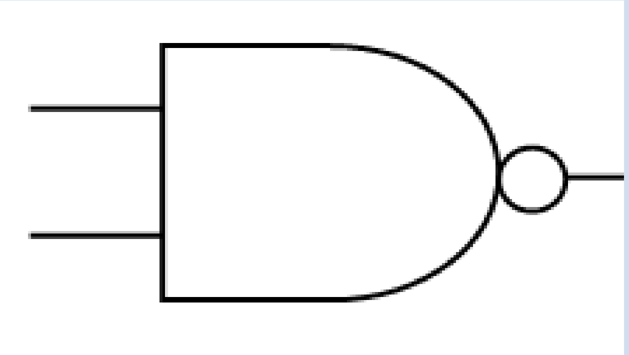
COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS

NOR → NEGACIÓN DE OR

Símbolo gráfico	Tabla de verdad o funcionamiento	Función lógica
	$\begin{array}{cc\|c} A & B & X \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$X = \overline{A + B}$

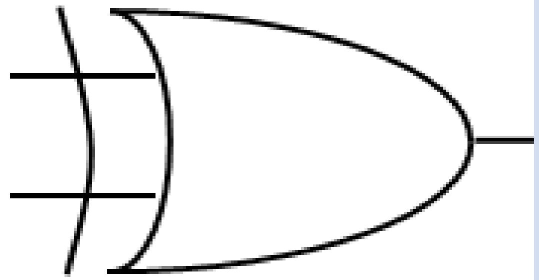
COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS

NAND → NEGACIÓN DE AND

<table>
<tr><th>Símbolo gráfico</th><th>Tabla de verdad o funcionamiento</th><th>Función lógica</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>X</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>$X = \overline{A \cdot B}$</td>
</tr>
</table>

COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS

XOR → OR EXCLUSIVO

Símbolo gráfico	Tabla de verdad o funcionamiento	Función lógica
	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>X</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$X = A \oplus B$ $X = \overline{A}.B + A.\overline{B}$

¿Cómo generalizaríamos el enunciado para “n” variables?

COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS

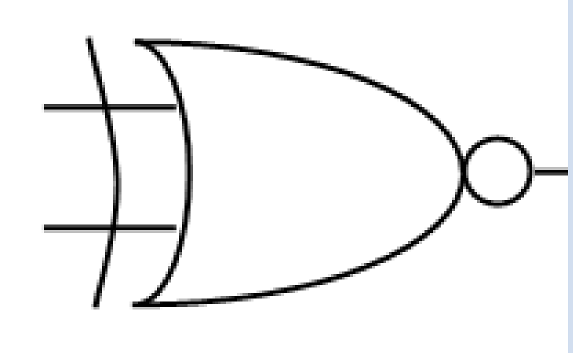
XOR → OR EXCLUSIVO

A	B	C	F
…	…	…	…
0	1	0	1
…	…	…	…
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	D	F
…	…	…	…	…
1	0	1	0	0
…	…	…	…	…
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS

XNOR → NOR EXCLUSIVO

<table>
<tr><th>Símbolo gráfico</th><th>Tabla de verdad o funcionamiento</th><th>Función lógica</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>X</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>

$$X = \overline{A \oplus B}$$

$$X = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

</td></tr>
</table>

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$A+B=B+A$
$A \bullet B=B \bullet A$

Propiedad conmutativa de la suma y el producto.

$A \bullet (B+C) = A \bullet B + A \bullet C$
$A + (B \bullet C) = (A+B) \bullet (A+C)$

Propiedad distributiva de la suma y el producto.

$A+(B+C) = (A+B) + C$
$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$

Leyes Asociativas.

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$A+0=A$

$A \bullet 1=A$

La suma lógica es invariable respecto del 0 y el producto del 1.

INVARIANCIA

A	A + 0
0	0
1	1

A	A . 1
0	0
1	1

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$$\left.\begin{aligned} A + \overline{A} &= 1 \\ A \bullet \overline{A} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

RESPECTO A SU NEGACIÓN

A	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$
0	1	**1**
1	0	**1**

A	$\overline{A}$	$A \bullet \overline{A}$
0	1	**0**
1	0	**0**

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$$A+1=1$$
$$A \bullet 0=0$$

ACOTAMIENTO O ANULACIÓN

A	A + 1
0	**1**
1	**1**

A	A . 0
0	**0**
1	**0**

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$$A+A=A$$
$$A \bullet A=A$$

IDEMPOTENCIA

A	A + A
0	**0**
1	**1**

A	A . A
0	**0**
1	**1**

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$$

NEGACIONES

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	**0**
1	0	**1**

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$	$\overline{\overline{\overline{A}}}$
0	1	0	**1**
1	0	1	**0**

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

$$\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

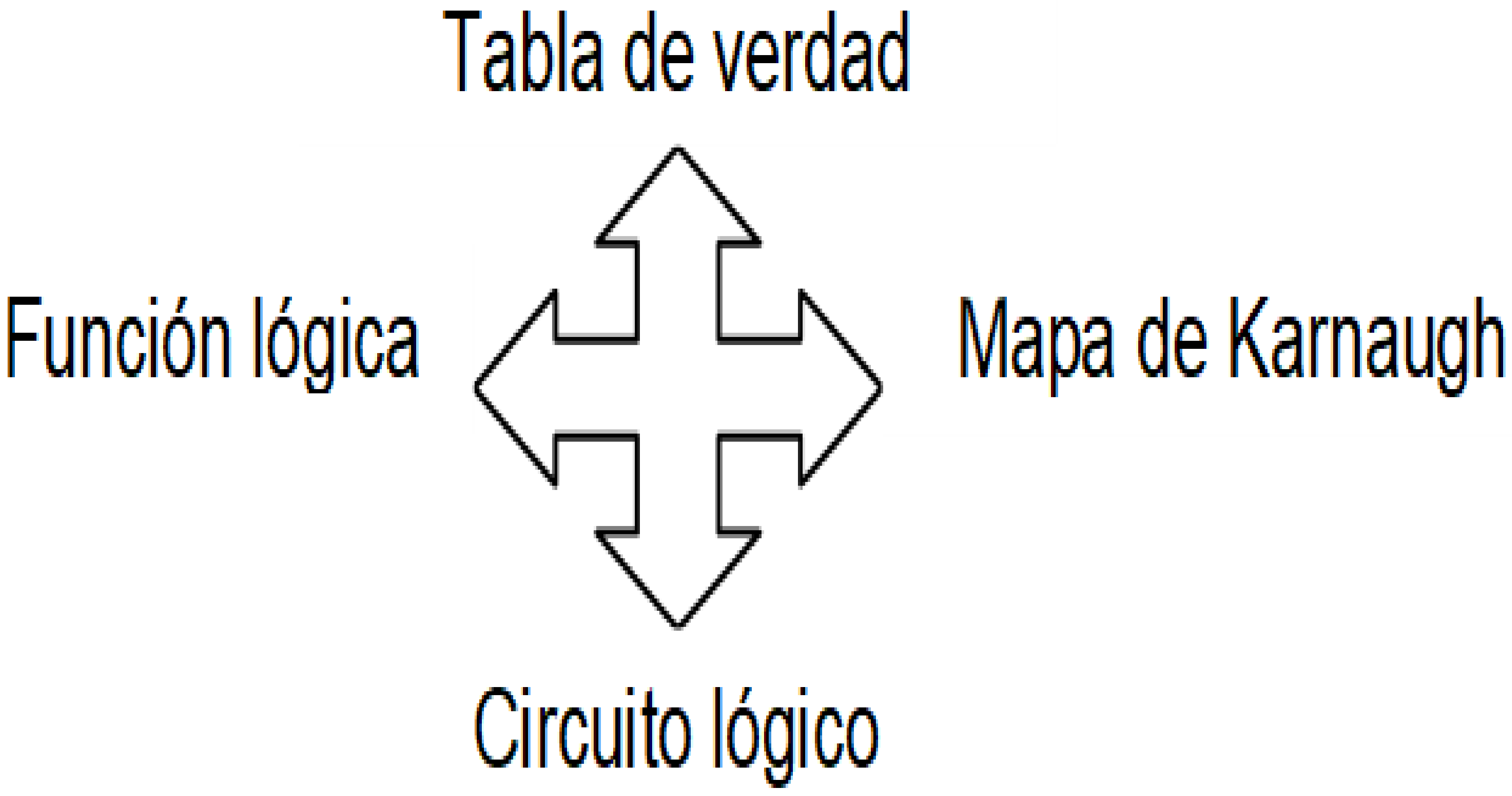
TEOREMAS DE De MORGAN

$$\overline{A+B} \neq \overline{A} + \overline{B}$$

Verificaremos la validez del primero mediante tabla de verdad:

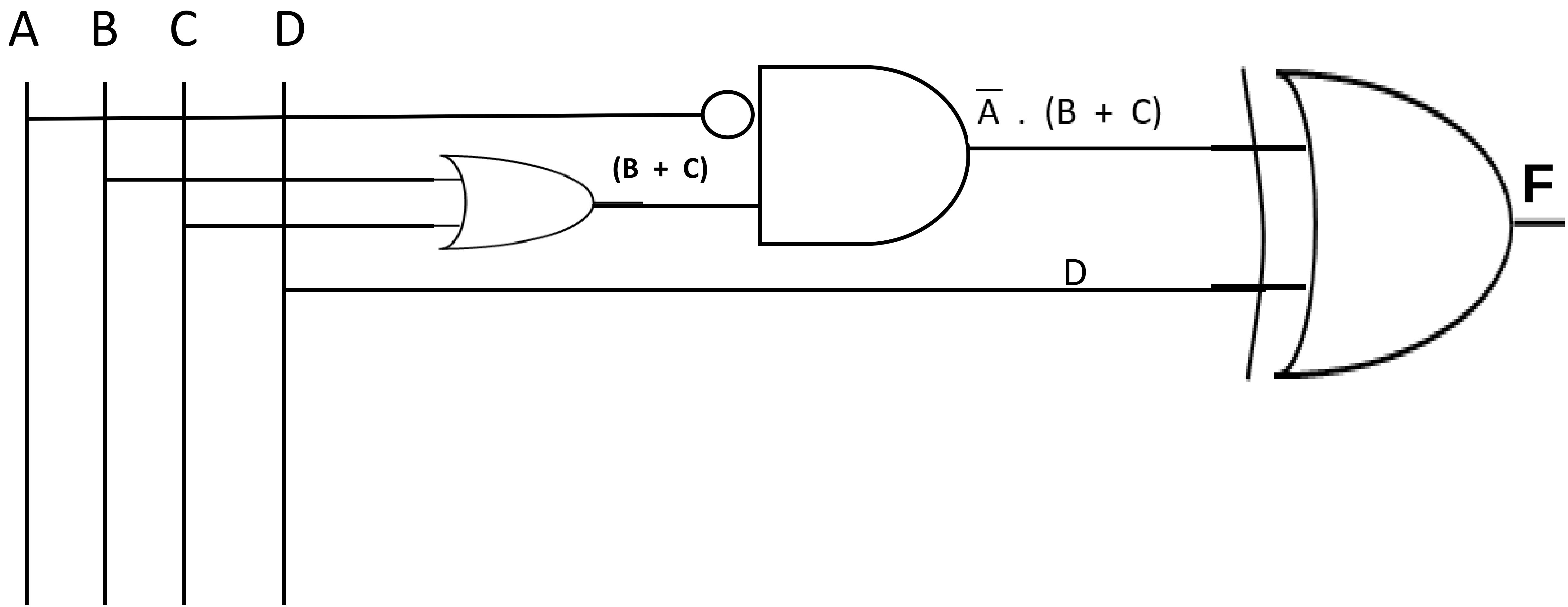
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \bullet \overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$
0	**0**	1	1	**1**	0	**1**
0	**1**	1	0	**0**	1	**0**
1	**0**	0	1	**0**	1	**0**
1	**1**	0	0	**0**	1	**0**

FORMAS DE REPRESENTAR LO MISMO

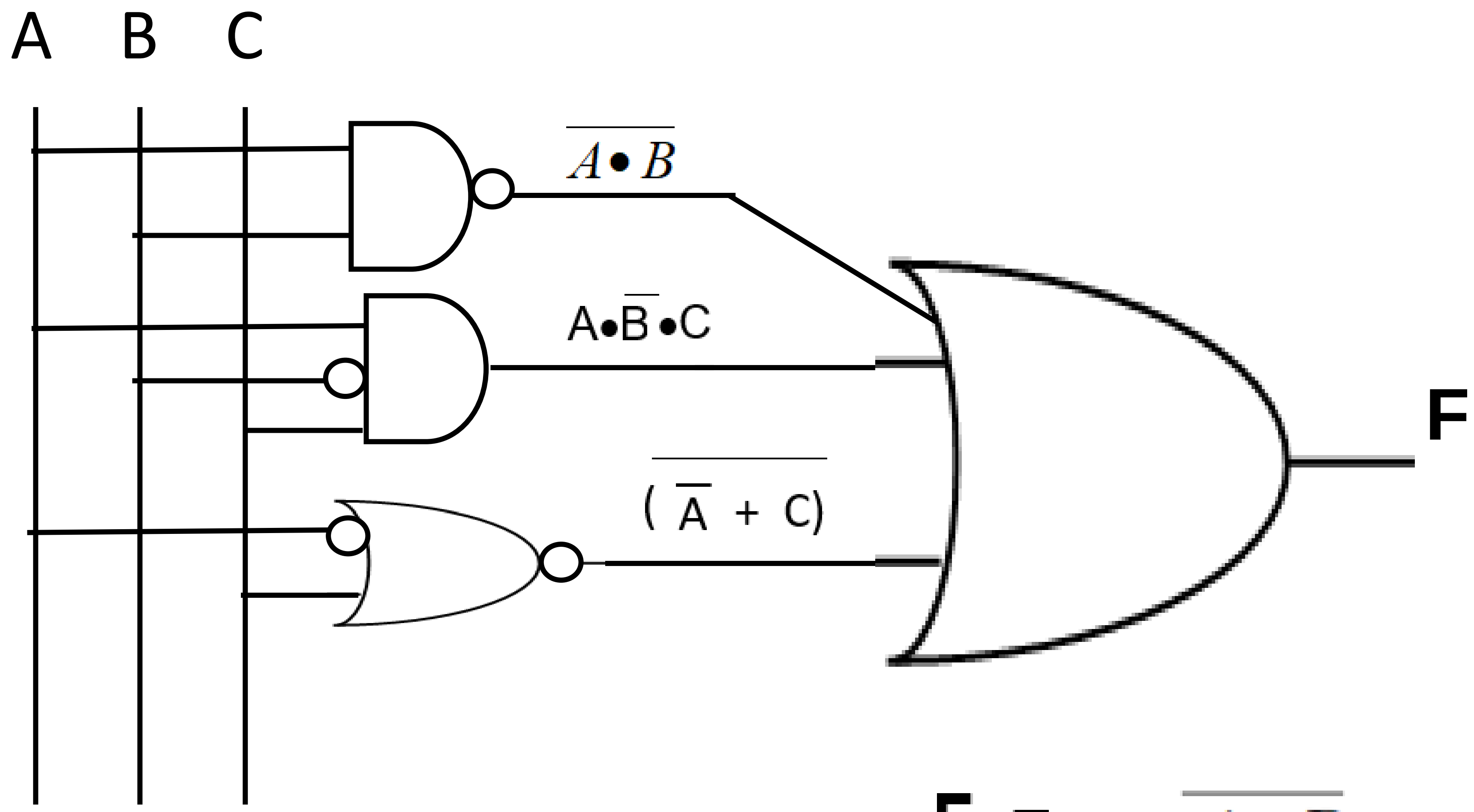


DE FUNCIÓN LÓGICA → A CIRCUITO LÓGICO

$$F = (\overline{A} \cdot (B + C)) \oplus D$$



DE CIRCUITO LÓGICO → A FUNCIÓN LÓGICA



$$F = \overline{A \bullet B} + A \bullet \overline{B} \bullet C + \overline{(\overline{A} + C)}$$

DE FUNCIÓN LÓGICA → A TABLA DE VERDAD

$F = \overline{A} \cdot (B + C)$

3 variables de entrada → $2^3 = 8$ combinaciones posibles

Escribir del 0 al 7 con tres dígitos binarios.

A	B	C	$\overline{A}$	$(B + C)$	$F = \overline{A} \cdot (B + C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

DE TABLA DE VERDAD → A FUNCIÓN LÓGICA

A partir de una tabla de verdad se pueden obtener dos tipos de funciones, llamadas FORMAS CANÒNICAS, equivalentes entre sí:

1- FUNCIÒN CANÒNICA COMO SUMA DE PRODUCTOS: a partir de los **1** del resultado de la tabla escribimos los MINITÈRMINOS.

2- FUNCIÒN CANÒNICA COMO PRODUCTO DE SUMAS: a partir de los **0** del resultado de la tabla escribimos los MAXITÈRMINOS.

CADA MINITERMINO O MAXITERMINO LLEVA TODAS LAS VARIABLES.

DE TABLA DE VERDAD → A FUNCIÓN LÓGICA

FUNCIÒN CANÒNICA COMO SUMA DE PRODUCTOS:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

MINITERMINOS:

- Vemos los 1 del resultado de la tabla.
- Variables con 0 van negadas, con 1 sin negar.
- Van en compuertas AND (producto lógico).

→ $\overline{A}.\overline{B}.C$

→ $\overline{A}.B.C$

→ $A.B.C$

Se suman los minitèrminos (productos), obteniéndose la función:

$$FC_{SP} = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.B.C$$

DE TABLA DE VERDAD → A FUNCIÓN LÓGICA

FUNCIÒN CANÒNICA COMO PRODUCTO DE SUMAS:

MAXITERMINOS:

- Vemos los 0 del resultado de la tabla.
- Variables con 0 van sin negar, con 1 negadas.
- Van en compuertas OR (suma lógica).

A	B	C	F	
0	0	0	0	→ $(A+B+C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	→ $(A+\overline{B}+C)$
0	1	1	1	
1	0	0	0	→ $(\overline{A}+B+C)$
1	0	1	0	→ $(\overline{A}+B+\overline{C})$
1	1	0	0	→ $(\overline{A}+\overline{B}+C)$
1	1	1	1	

Se multiplican los maxitèrminos (sumas), obteniéndose la función:

$$FC_{PS} = (A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

OBTENCIÒN DE UNA FUNCIÒN SIMPLIFICADA (MAS SENCILLA) USANDO LOS

POSTULADOS Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

EJERCICIO: Dada la función, obtener una mas sencilla usando propiedades.

$$\mathbf{F} = (\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}})\,(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}})$$

De Morgan

$$\mathbf{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,(\overline{A} + \overline{B})$$

distributiva

$$\mathbf{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{B}$$

Idempotencia

$$\mathbf{F} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}$$

Idempotencia

$$\mathbf{F} = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$$

EJERCICIO: Dada la función, obtener una mas sencilla usando propiedades.

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + A.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D}$$

Sacamos lo común que hay en las expresiones

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.(\overline{D} + D) + \overline{A}.B.\overline{C}.(\overline{D} + D) + A.C.\overline{D}.(B + \overline{B})$$

Respecto a su negación

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.1 + \overline{A}.B.\overline{C}.1 + A.C.\overline{D}.1$$

Invariancia

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.C.\overline{D}$$

Sacamos lo común que hay en las expresiones

$$F = \overline{A}.\overline{C}(B + \overline{B}) + A.C.\overline{D}$$

Respecto a su negación

$$F = \overline{A}.\overline{C}.1 + A.C.\overline{D}$$

Invariancia

$$F = \overline{A}.\overline{C} + A.C.\overline{D}$$

OBTENCIÒN DE UNA FUNCIÒN SIMPLIFICADA (MAS SENCILLA) USANDO

MAPAS DE KARNAUGH

MAPAS DE KARNAUGH

Son otra forma de representar una función.

2^n combinaciones de variables de entrada → 2^n celdas en el mapa → cada una tendrá un 0 o un 1.

Objetivo: obtener una función sencilla (mínima o simple).

¿Cómo?: maximizando los agrupamientos de 1 adyacentes (se obtiene una función mínima como suma de productos) o de 0 adyacentes (se obtiene una función mínima como productos de sumas).

MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → $2^4 = 16$ CELDAS

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

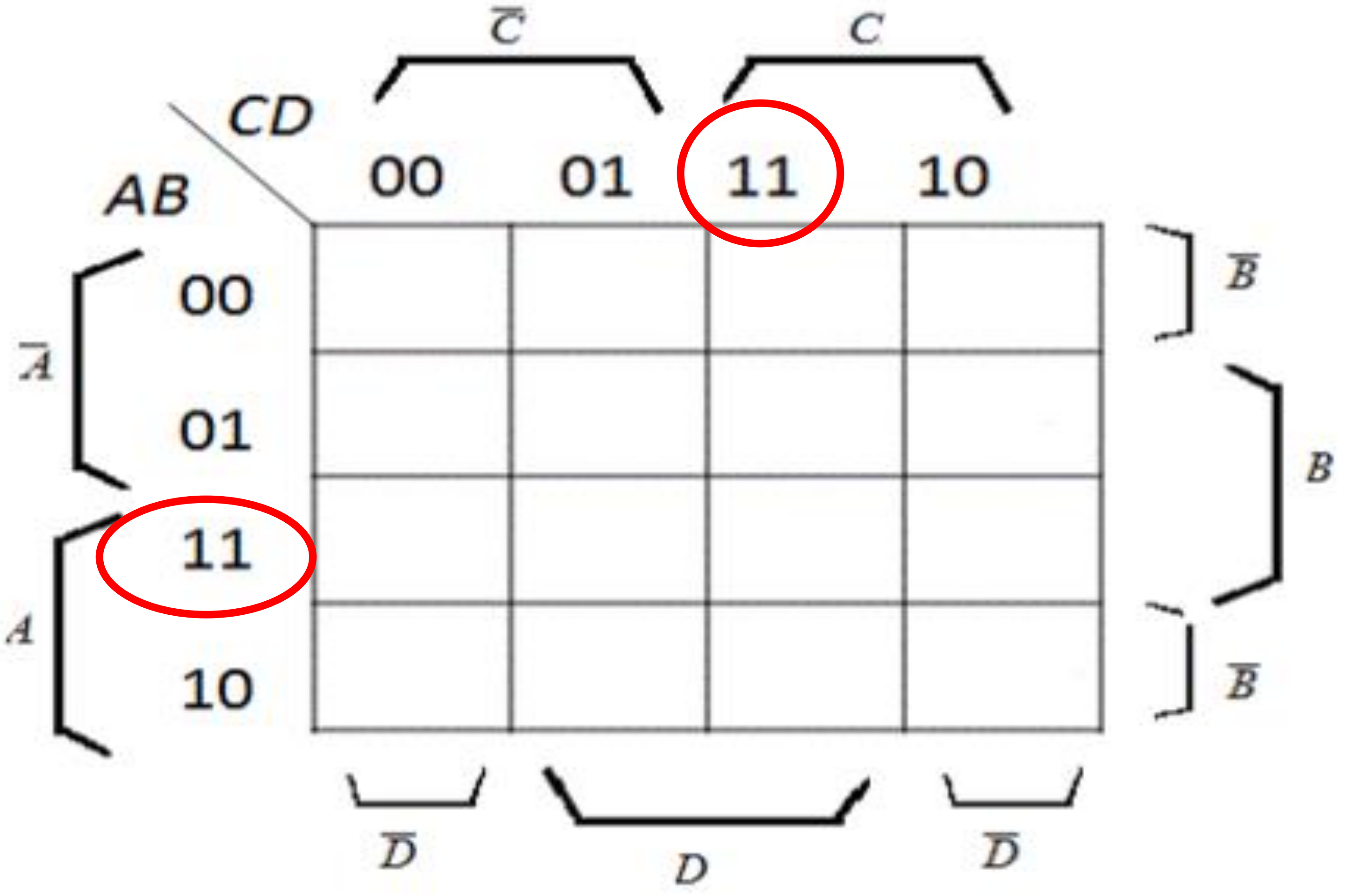
MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → $2^4 = 16$ CELDAS

$AB \backslash CD$	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				

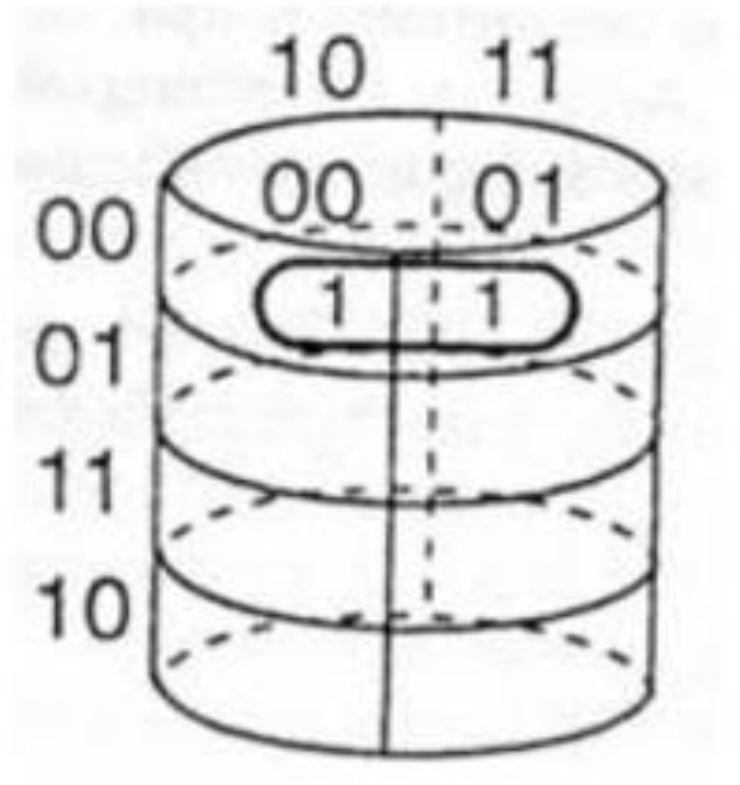
MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → $2^4 = 16$ CELDAS



MAPAS DE KARNAUGH

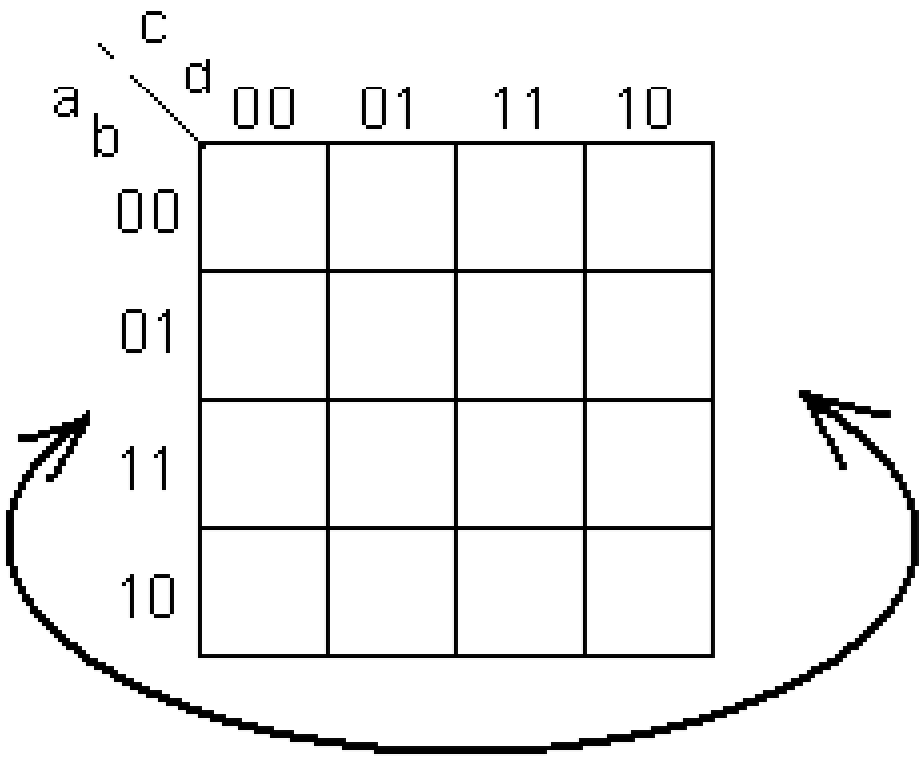
DE 4 VARIABLES → 2^4 = 16 CELDAS

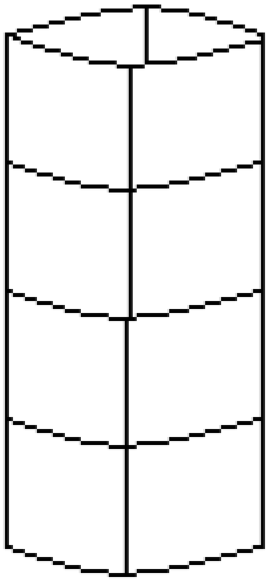


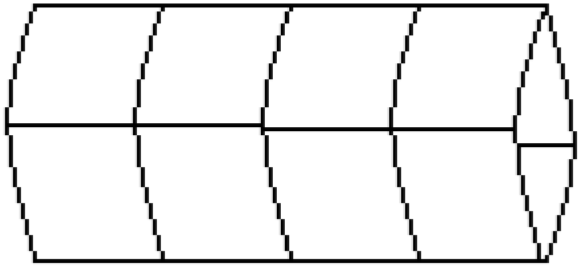
Al ser mapa se puede doblar formando un cilindro.

MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → 2^4 = 16 CELDAS







Al ser mapa se puede doblar formando un cilindro.

MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → $2^4 = 16$ CELDAS

Cada celda tiene un 1 o un 0.

En este mapa vemos los minitérminos.

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

MAPAS DE KARNAUGH

DE 4 VARIABLES → 2^4 = 16 CELDAS

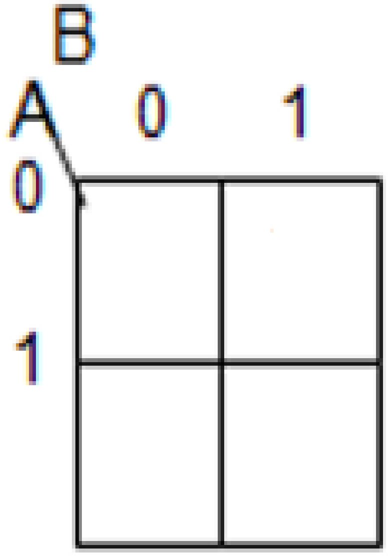
MAPA DE 4 VARIABLES		
Expresiones de 4 variables	⟷	1 celda
Expresiones de 3 variables	⟷	2 celda
Expresiones de 2 variables	⟷	4 celda
Expresiones de 1 variables	⟷	8 celda

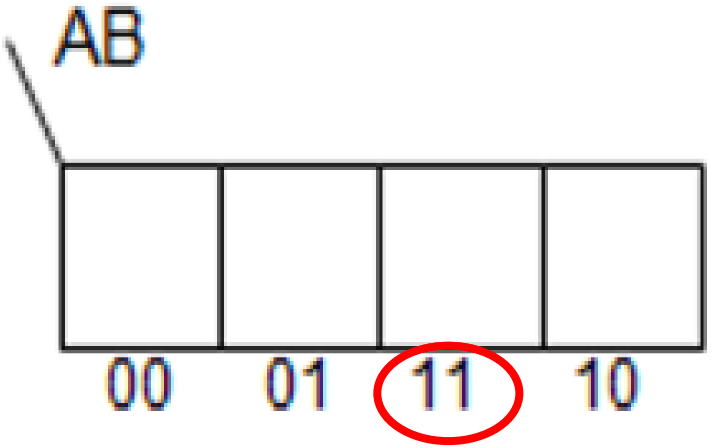
Me fijo en la función

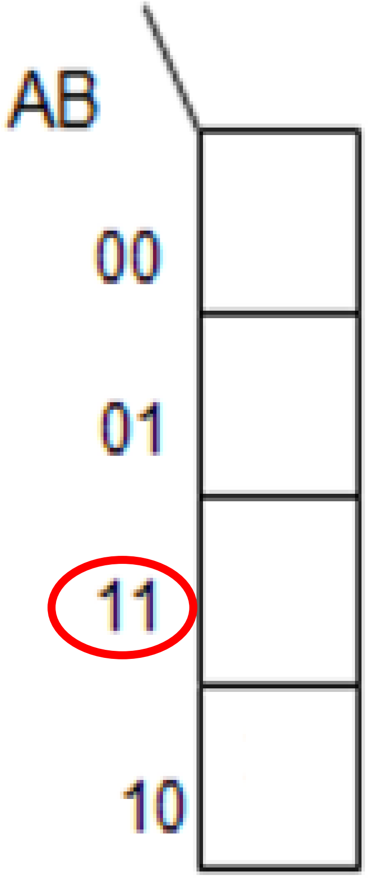
Me fijo en el mapa

MAPAS DE KARNAUGH

DE 2 VARIABLES → 2^2 = 4 CELDAS

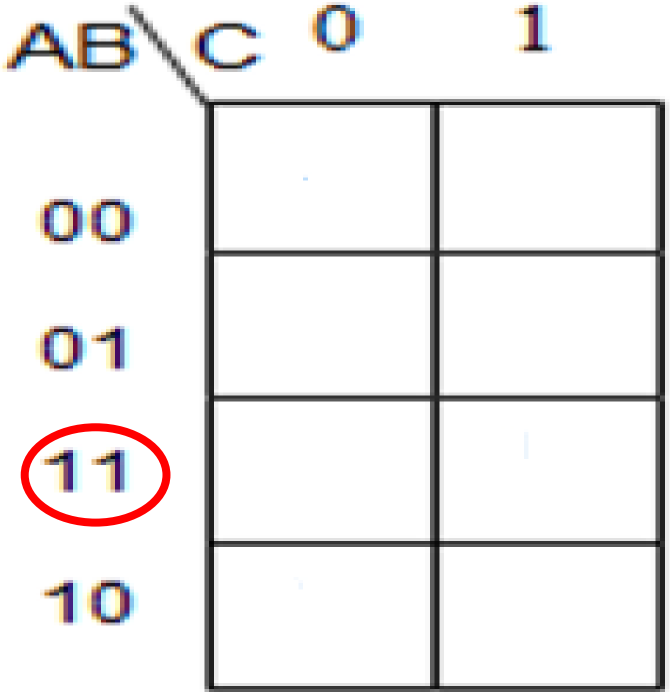


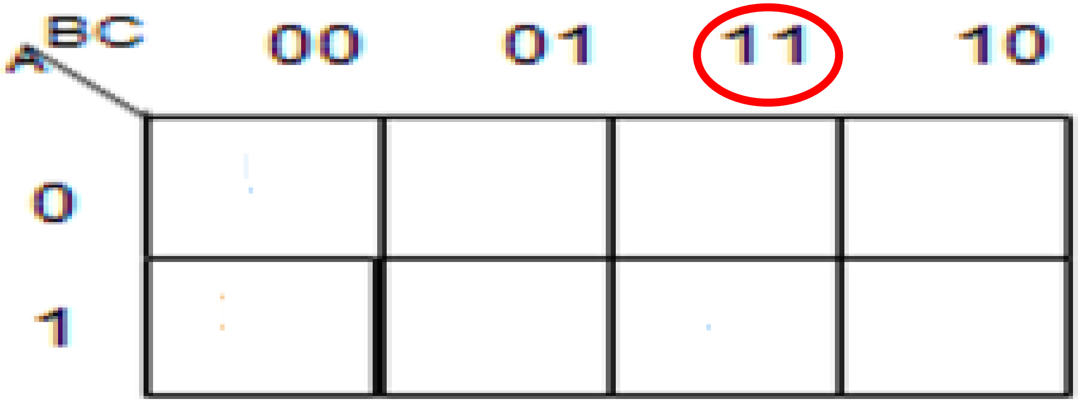




MAPAS DE KARNAUGH

DE 3 VARIABLES → $2^3 = 8$ CELDAS





MAPAS DE KARNAUGH

DE 3 VARIABLES → $2^3 = 8$ CELDAS

MAPA DE 3 VARIABLES		
Expresiones de 3 variables	↔	1 celda
Expresiones de 2 variables	↔	2 celda
Expresiones de 1 variables	↔	4 celda

Me fijo en la función

Me fijo en el mapa

MAPAS DE KARNAUGH

EJERCICIO: Dada la función, obtener una mas sencilla usando mapa de Karnaugh.

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + A.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D}$$

Existen dos formas de trabajar:

1 – DE FUNCION → TABLA DE VERDAD → MINITÉRMINOS → MAPA DE KARNAUGH

2 – DE FUNCION → MAPA DE KARNAUGH

Vamos a utilizar la segunda opción.

EN ÉSTE EJEMPLO SON TODOS MINITERMINOS, REPRESENTAN UN 1 EN EL MAPA.

MAPAS DE KARNAUGH

DE FUNCIÒN → A MAPA DE KARNAUGH

EJERCICIO: Dada la función, obtener una mas sencilla usando <u>mapa de Karnaugh</u>.

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.D + A.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D}$$

0 0 0 0   0 0 0 1   0 1 0 0   0 1 0 1   1 1 1 0   1 0 1 0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11				1
10				1

$$\overline{A}.\cancel{\overline{B}}.\overline{C}.\cancel{\overline{D}}$$
$$\overline{A}.\cancel{\overline{B}}.\overline{C}.\cancel{D}$$
$$\overline{A}.\cancel{B}.\overline{C}.\cancel{\overline{D}}$$
$$\overline{A}.\cancel{B}.\overline{C}.\cancel{D}$$

Nos quedamos con las variables que NO CAMBIAN

$$\mathbf{Fmin_{SP}} = \overline{A}.\overline{C} + A.C.\overline{D}$$

MAPAS DE KARNAUGH

DE TABLA DE VERDAD → A MAPA DE KARNAUGH

EJERCICIO: Dada la tabla, obtener una mas sencilla usando <u>mapa de Karnaugh</u>.

	A	B	C	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

También se puede expresar como:

$F(A,B,C) = \sum (0, 1, 3, 4, 5, 6, 7)$ INDICA POSICIÒN DE LOS 1

$F(A,B,C) = \pi(2)$ INDICA POSICIÒN DE LOS 0

AB\C	0	1
00	1	1
01		1
11	1	1
10	1	1

$$Fmin_{SP} = A + C + \bar{B}$$

MAPAS DE KARNAUGH

DE MAPA DE KARNAUGH → A FUNCIÒN

Desde el mapa se pueden obtener 4 tipos de funciones:

1 – Función Canónica como Suma de Productos (FC_{SP})

2 – Función Canónica como Productos de Sumas (FC_{PS})

3 – Función Mínima como Suma de Productos ($Fmin_{SP}$)

4 – Función Mínima como Productos de Suma ($Fmin_{PS}$)

MAPAS DE KARNAUGH

DE MAPA DE KARNAUGH → A FUNCIÒN

EJERCICIO: Dado el mapa de Karnaug obtener las $Fmin_{SP}$ y $Fmin_{PS}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

$$Fmin_{SP} = \overline{C} + B.D + \overline{B}.\overline{D}$$

LAS CELDAS VACÌAS SON LAS POSICIONES DE LOS CEROS.

$Fmin_{PS}$ ES AL REVÈS: 0 SIN NEGAR, 1 NEGADOS.

$$Fmin_{PS} = (\overline{B} + \overline{C} + D) \;.\; (B + \overline{C} + \overline{D})$$