Ejercicios resueltos.
Tema: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO´s): Problemas de valor Inicial

Muchos problemas de ingeniería no pueden resolverse analíticamente. Se recurre entonces a métodos analíticos aproximados (Frobenius: Solución en series de potencias), métodos gráficos y métodos numéricos.

Estudiaremos en este apunte métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias en problemas de valor Inicial (P.V.I). Es decir, se resolverá un problema que se presenta a través de la siguiente información INICIAL:

1) Una **ecuación diferencial** del tipo:

$$y' = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})) = \frac{dy}{dx}$$

Es una ecuación que varía respecto de “x” y que varía respecto de “y” (que a su vez depende de la variación en “x” también.)

2) Una **condición** inicial que debe satisfacer la solución (o varias condiciones que se refieren al mismo valor de “x” si la ecuación es de orden superior):

$$y(x_0) = y_0$$

Por ejemplo: Si mi condición inicial fuera

$$y(-1) = -2.5$$

Esto quiere decir que:

$$x_0 = -1$$
$$y_0 = -2.5$$

3) Un **dominio de trabajo** en el eje de las “x” de la forma:

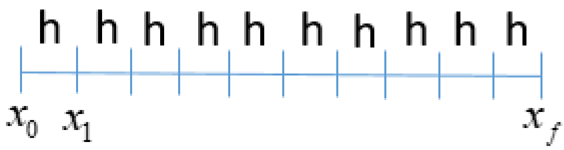
$$x_0 \leq x \leq x_f$$

$$x_0 = Valor\_inicial$$
$$x_f = Valor\_final$$

4) Un **paso “h”** para recorrer el DOMINIO de trabajo de manera que:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$\Rightarrow h = x_{n+1} - x_n$$



$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h$$
$$x_3 = x_2 + h$$

....

Con esas cuatro cosas tenemos un problema de valor inicial.

Analizaremos el caso:

$$y' = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x}) = \frac{dy}{dx} \quad \text{Con} \quad y(x_0) = y_0$$

Suponiendo que " f " es tal que el problema tiene una solución única para calcular valores numéricos de la solución, así entonces dado el P.V.I

$$y' = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x})) = \frac{dy}{dx}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$x_0 \le x \le x_f$$

Se trata de hallar una "Ordenada Genérica" y_{n+1} que nos permita calcular una sucesión de valores aproximados: $y_1, y_2, y_3, \ldots. y_n$ a lo que serían los valores exactos $y(x_1), y(x_2), y(x_3) \ldots. y(x_n)$

Existen dos tipos de algoritmos para calcular la "Ordenada Genérica" y_{n+1}

1) **Algoritmos de un solo paso o paso simple**: Son aquellos algoritmos en los que, para el cálculo de una ordenada genérica y_{n+1} requieren información correspondiente a un solo intervalo $[\mathrm{x}_n ; \mathrm{x}_{n+1}]$, generalmente valores de " y " y de " f " en $x = x_n$ o eventualmente en otros puntos del intervalo. **Ejemplo**: Método de Euler

2) **Algoritmos de paso Múltiple**: Son aquellos algoritmos en los que, para el cálculo de una ordenada genérica y_{n+1} requieren información que provenga de varios intervalos $I_n ; I_{n-1} ; I_{n-2} \cdots\cdots$ generalmente valores numéricos de la solución en más de un punto

$y_n; y_{n-1}; y_{n-2}.....$.Dado que inicialmente solo se conoce el valor de una ordenada y_0 como condición inicial, debemos comenzar siempre el cálculo con un algoritmo de un solo paso hasta lograr juntar la información requerida para iniciar el paso múltiple. **Ejemplo**: Adams-Bashforth

Los métodos que trabajaremos en este apunte son todos métodos de Paso Simple:

1) **Taylor**:

$$y_{n+1} = y_n + h * y_n{}' + \frac{h^2}{2!} y_n{}''$$

$$\text{donde:}$$

$$y_n{}' = f(x_n, y(x_n))$$

$$y_n{}'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * y_n{}'$$

2) **Euler**:

$$y_{n+1} = y_n + h * y_n{}'$$

$$\text{donde:}$$

$$y_n{}' = f(x_n, y(x_n))$$

3) **Euler Mejorado**:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2!}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n´)]$$

$$como:$$

$$\mathrm{y}_n´ = f(x_n, y(x_n))$$

$$\text{entonces}:$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2!}[\mathrm{y}_n´ + f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n´)]$$

4) **Runge-Kutta de grado 2**:

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2})]$$

$$\text{donde}:$$

$$k_1 = h^* f(x_n, y(\mathrm{x}_n)) \rightarrow$$

$$k_1 = h^* y_n´$$

Ejemplos resueltos:

1) **Ejercicio nro 1**: Resolver el siguiente problema de Valor Inicial aplicando el **método de Taylor de grado 2**.

$$f(x, y(x)) = y' = 2xy$$
$$h = 0.1$$
$$y(1) = 1$$

Hallar $y(1.3)$

Analicemos el problema, tenemos una ecuación diferencial, con un paso h y una condición inicial $y(1) = 1$

Esta condición sabiendo que las condiciones iniciales en P.V.I tienen la forma $y(x_0) = y_0$, nos quiere decir entonces que:

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$

Nuestro dominio o intervalo de trabajo si $x_0 = 1$ y queremos hallar $y(1.3)$ que sería el valor de "y" en el punto final $x_f = 1.3$ quedaría entonces como:

$$1 \leq x \leq 1.3$$

Cómo el paso $h = 0.1$, tendremos que realizar entonces **3 iteraciones**.

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = x_0 + h = 1.1$$
$$x_2 = x_1 + h = 1.2$$
$$x_3 = x_2 + h = 1.3$$

Por Taylor de grado 2 vamos a definir la Ordenada Genérica y_{n+1} para nuestro problema para poder realizar las iteraciones.

$$y_{n+1} = y_n + h * y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n''$$

donde:

$$y_n' = f(x_n, y(x_n))$$

$$y_n'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * y_n'$$

Entonces reemplazando por los datos de nuestro problema en las ecuaciones de Taylor, nos quedará que:

$$y_{n+1} = y_n + h * [2x_n y_n] + \frac{h^2}{2!} y_n''$$ (Reemplacé y_n' del enunciado)

Pero:

$$y_n'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * y_n'$$

$$y_n'' = 2y_n + (2x_n)(2x_n y_n)$$

$$y_n'' = 2y_n + 4x_n^2 y_n$$

Por lo tanto:

$$y_{n+1} = y_n + h * [2x_n y_n] + \frac{h^2}{2!}[2y_n + 4x_n^2 y_n]$$ **Ordenada Genérica**

Esa será nuestra ordenada genérica y con ella empezamos a recorrer el dominio de trabajo haciendo iteraciones.

Hacemos todo en los puntos “n-ésimos” para recorrer luego el dominio y simplemente ir reemplazando los valores de acuerdo a la iteración en la que estamos parados.-

- **Primer iteración**: n=0

Si n=0 entonces:

$$y_1 = y_0 + h*[2x_0y_0] + \frac{h^2}{2!}[2y_0 + 4x_0{}^2 y_0]$$

Reemplazando cada valor:

$$y_1 = 1 + 0.1*[2*1*1] + \frac{(0.1)^2}{2!}[2*1 + 4*(1)^2*1]$$

$$y_1 = 1.23 = y(x_1) = y(1.1)$$

Esto se lee así: el valor de y_1 es igual al valor de y evaluado en el punto x_1 y como $x_1 = x_0 + h$ entonces $x_1 = 1 + 0.1 = 1.1$. Si debemos llegar hasta 1.3 que nos pide el enunciado, aun nos faltan dos iteraciones más.

- **Segunda iteración**: n=1

Si n=1 entonces:

$$y_2 = y_1 + h*[2x_1y_1] + \frac{h^2}{2!}[2y_1 + 4x_1{}^2 y_1]$$

Reemplazando cada valor:

$$y_2 = 1.23 + 0.1*[2*1.1*1.23] + \frac{(0.1)^2}{2!}[2*1.23 + 4*(1.1)^2*1.23]$$

$$y_2 = 1.5426 = y(x_2) = y(1.2)$$

- **Tercer iteración**: n=2

Si n=2 entonces:

$$y_3 = y_2 + h*[2x_2 y_2] + \frac{h^2}{2!}[2y_2 + 4{x_2}^2 y_2]$$

Reemplazando cada valor:

$$y_3 = 1.5426 + 0.1*[2*1.2*1.5426] + \frac{(0.1)^2}{2!}[2*1.5426 + 4*(1.2)^2 *1.5426]$$

$$y_3 = 1.9727 = y(x_3) = y(1.3)$$

Hallamos el valor que nos pedía el enunciado, por lo tanto el ejercicio termina aquí.

2) **Ejercicio nro 2:** Resolver el siguiente problema de Valor Inicial aplicando el **método de Euler**.

$$y' = sen(t) + e^{-t}$$

$$0 \le t \le 1$$

$$h = 0.5$$

$$y(t_0) = 0$$

En este caso la variable es “t” pero es lo mismo que “x”, no deben perder de vista que es una variable y puede tomar cualquier nombre, pero el método se aplica igual.

La condición inicial:

$$y(t_0) = 0 \rightarrow\rightarrow y(0) = 0$$
$$entonces$$
$$t_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$

Nuestro dominio o intervalo de trabajo si $t_0 = 0$ y el intervalo es hasta "1" con paso $h = 0.5$, tendremos que realizar entonces **2 iteraciones**.

$$t_0 = 0$$
$$t_1 = t_0 + h = 0.5$$
$$t_2 = t_1 + h = 1$$

Por **Euler** vamos a definir la Ordenada Genérica y_{n+1} para nuestro problema para poder realizar las iteraciones.

$$y_{n+1} = y_n + h * y_n´$$
$$\text{donde:}$$
$$\mathrm{y}_n´ = f(x_n, y(x_n))$$

Entonces reemplazando por los datos de nuestro problema en las ecuaciones de Euler nos quedará que:

$$y_{n+1} = y_n + h*[\mathrm{sen}(\mathrm{t}_n) + e^{-t_n}]$$ **Ordenada Genérica**

Esa será nuestra ordenada genérica y con ella empezamos a recorrer el dominio de trabajo haciendo iteraciones.

- **Primer iteración**: n=0

Si n=0 entonces:

$$y_1 = y_0 + h*[\mathrm{sen}(\mathrm{t}_0) + e^{-t_0}]$$

Reemplazando cada valor:

$$y_1 = 0 + 0.5*[\mathrm{sen}(0) + e^{-0}]$$

$$y_1 = 0.5 = y(t_1) = y(0.5)$$

Esto se lee así, el valor de y_1 es igual al valor de y evaluado en el punto t_1 y como $t_1 = t_0 + h$ entonces $t_1 = 0 + 0.5 = 0.5$. Si debemos llegar hasta un valor de t que sea igual a “1” para llegar al final del intervalo, aún nos falta seguir haciendo iteraciones.

- **Segunda iteración**: n=1

Si n=1 entonces:

$$y_2 = y_1 + h*[\mathrm{sen}(\mathrm{t}_1) + e^{-t_1}]$$

Reemplazando cada valor:

$$y_2 = 0.5 + 0.5*[\mathrm{sen}(0.5) + e^{-0.5}]$$

$$y_2 = 1.4297 = y(t_2) = y(1)$$

Llegamos al valor de “y” correspondiente al final del intervalo, por lo tanto el ejercicio termina en este punto.

3) **Ejercicio nro 3:** Resolver el siguiente problema de Valor Inicial aplicando el **método de Euler Mejorado**.

$$f(\mathrm{x}, y(\mathrm{x})) = y' = -y + x + 1$$
$$0 \leq x \leq 1$$
$$h = 0.5$$
$$y(0) = 1$$

La condición inicial:

$$y(0) = 1 \rightarrow y(x_0) = y_0$$
$$entonces$$
$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 1$$

Nuestro dominio o intervalo de trabajo si $x_0 = 0$ y el intervalo es hasta "1" con paso $h = 0.5$, tendremos que realizar entonces **2 iteraciones**.

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + h = 0.5$$
$$x_2 = x_1 + h = 1$$

Por **Euler Mejorado** vamos a definir la Ordenada Genérica y_{n+1} para nuestro problema para poder realizar las iteraciones.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2!}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h} * \mathrm{y}_n')]$$
$$como:$$
$$\mathrm{y}_n' = f(x_n, y(x_n))$$
$$\text{entonces}:$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2!}[\mathrm{y}_n' + f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h} * \mathrm{y}_n')]$$

Entonces reemplazando por los datos de nuestro problema en las ecuaciones de Euler Mejorado nos quedará que:

$$y_n{'} = (-y_n + x_n + 1)$$
$$f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'}) = (-(y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'}) + (x_{n+1}) + 1)$$

$f(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'})$ es mi ecuación diferencial original del enunciado, pero evaluada en los puntos $(x_{n+1}, y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'})$. Es decir, donde en la ecuación diferencial original $y_n{'}$ yo tenía el valor "x" ahora uso x_{n+1} y en donde tenía el valor "y" ahora uso $y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'}$

Por lo tanto la ordenada genérica quedará como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2!}[(-y_n + x_n + 1) + [-(y_n + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_n{'}) + (x_{n+1}) + 1]]$$

<u>**Ordenada Genérica**</u>

Esa será nuestra ordenada genérica y con ella empezamos a recorrer el dominio de trabajo haciendo iteraciones.

- **Primer iteración**: n=0

Si n=0 entonces:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2!}[(-y_0 + x_0 + 1) + [-(y_0 + \mathrm{h}^* \mathrm{y}_0{'}) + (x_1) + 1]]$$

Donde:

$$\mathrm{y}_0{'} = (-y_0 + x_0 + 1)$$
$$\mathrm{y}_0{'} = (-1 + 0 + 1) = 0$$

Reemplazando cada valor:

$$y_1 = 1 + \frac{0.5}{2!}[(-1+0+1)+[-(1+0.5*0)+(0.5)+1]]$$
$$y_1 = 1.125 = y(x_1) = \mathrm{y}(0.5)$$

Esto se lee así, el valor de y_1 es igual al valor de y evaluado en el punto x_1 y como $x_1 = x_0 + h$ entonces $x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$. Si debemos llegar hasta un valor de x que sea igual a "1" para llegar al final del intervalo, aún nos falta seguir haciendo iteraciones.

- **Segunda iteración**: n=1

Si n=1 entonces:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2!}[(-y_1 + x_1 + 1) + [-(y_1 + \mathrm{h} * \mathrm{y}_1') + (x_2) + 1]]$$

Donde:

$$\mathrm{y}_1' = (-y_1 + x_1 + 1)$$
$$\mathrm{y}_1' = (-1.125 + 0.5 + 1) = 0.375$$

Reemplazando cada valor:

$$y_2 = 1.125 + \frac{0.5}{2!}[(-1.125+0.5+1)+[-(1.125+0.5*0.375)+(1)+1]]$$

$$y_2 = 1.4843 = y(x_2) = \mathrm{y}(1)$$

Llegamos al valor de "y" correspondiente al final del intervalo, por lo tanto el ejercicio termina en este punto.

4) **Ejercicio nro 4:** Resolver el siguiente problema de Valor Inicial aplicando el **método de Runge Kutta de grado 2**.

$$f(x, y(x)) = y' = 2xy$$
$$h = 0.1$$
$$y(1) = 1$$

Hallar $y(1.3)$

La condición inicial:

$$y(1) = 1 \rightarrow y(x_0) = y_0$$
$$entonces$$
$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$

Nuestro dominio o intervalo de trabajo si $x_0 = 0$ y nos pide hallar $y(1.3)$, el intervalo es hasta "1.3" con paso $h = 0.1$, tendremos que realizar entonces **3 iteraciones**.

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = x_0 + h = 1.1$$
$$x_2 = x_1 + h = 1.2$$
$$x_3 = x_2 + h = 1.3$$

Por **Runge Kutta de grado 2** vamos a definir la Ordenada Genérica y_{n+1} para nuestro problema para poder realizar las iteraciones.

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2})]$$
$$\text{donde}:$$
$$k_1 = h * f(x_n, y(\mathrm{x}_n)) \rightarrow$$
$$k_1 = h * y_n{}'$$

Entonces reemplazando por los datos de nuestro problema en las ecuaciones de Runge Kutta de grado 2 nos quedará que:

$$k_1 = h*(2x_n y_n)$$
$$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) = 2*(x_n + \frac{h}{2})*(y_n + \frac{k_1}{2})$$

$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ es mi ecuación diferencial original del enunciado, pero evaluada en los puntos $(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$. Es decir, donde en la ecuación diferencial original y_n' yo tenía el valor "x" ahora uso $(x_n + \frac{h}{2})$ y en donde tenía el valor "y" ahora uso $(y_n + \frac{k_1}{2})$

Por lo tanto la ordenada genérica quedará como:

$$y_{n+1} = y_n + h*[2*(x_n + \frac{h}{2})*(y_n + \frac{k_1}{2}))$$
$$con$$
$$k_1 = h*(2x_n y_n)$$

<u>Ordenada Genérica</u>

Esa será nuestra ordenada genérica y con ella empezamos a recorrer el dominio de trabajo haciendo iteraciones.

- **Primer iteración**: n=0

Si n=0 entonces:

$$y_1 = y_0 + h*[2*(x_0 + \frac{h}{2})*(y_0 + \frac{k_1}{2}))$$

$$con$$

$$k_1 = h*(2x_0 y_0) = 0.1*(2*1*1)$$

$$k_1 = 0.2$$

Entonces:

$$y_1 = 1 + 0.1*[2*(1 + \frac{0.1}{2})*(1 + \frac{0.2}{2}))$$

$$y_1 = 1.231 = y(x_1) = y(1.1)$$

- **Segunda iteración**: n=1

Si n=1 entonces:

$$y_2 = y_1 + h*[2*(x_1 + \frac{h}{2})*(y_1 + \frac{k_1}{2}))$$

$$con$$

$$k_1 = h*(2x_1 y_1) = 0.1*(2*1.1*1.231)$$

$$k_1 = 0.27082$$

Entonces:

$$y_2 = 1.231 + 0.1*[2*(1.1 + \frac{0.1}{2})*(1.231 + \frac{0.27082}{2}))$$
$$y_2 = 1.5452 = y(x_2) = y(1.2)$$

- **Tercer iteración**: n=2

Si n=2 entonces:

$$y_3 = y_2 + h*[2*(x_2 + \frac{h}{2})*(y_2 + \frac{k_1}{2}))$$
$$con$$
$$k_1 = h*(2x_2y_2) = 0.1*(2*1.2*1.5452)$$
$$k_1 = 0.3708$$

Entonces:

$$y_3 = 1.5452 + 0.1*[2*(1.2 + \frac{0.1}{2})*(1.5452 + \frac{0.3708}{2}))$$

$$y_3 = 1.9779 = y(x_3) = y(1.3)$$

Llegamos al valor de “y” correspondiente al final del intervalo, por lo tanto el ejercicio termina en este punto.