

PRÁCTICA 3 - FUNCIONES NO-COMPUTABLES Y CONJUNTOS C.E. -

Ejercicio 1. Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & f_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ f_3(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & f_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_2(x, y, z, w) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(w) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(w) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x, y, z) &= \begin{cases} z + 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_4(x, y, z) &= \begin{cases} (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) & \text{si } \Phi_y^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Probar que la siguiente función no es computable reduciendo la función f_4 del Ej. 1.

$$g'_3(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sugerencia: Revisar que la reducción maneje correctamente el caso $f_4(0)$.

Ejercicio 4. Decimos que una función parcial computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom } f$. Probar que existe una función parcial computable que no es extensible (*Sugerencia:* considerar una función tal que con su extensión se podría computar alguna variante del halting problem).

Ejercicio 5. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1 y usando el teorema del parámetro, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Halt}(1337, x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_2(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x) &= \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_4(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Demostrar que existe un programa p tal que $\Psi_p^{(1)}(x) \downarrow$ si y sólo si $x = \#p$.

Ejercicio 7. Demostrar, usando el teorema de la recursión, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{Im } \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & h_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ h_3(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im } \Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & h_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\text{Dom } \Phi_x^{(1)}| = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 8. Sean C_1, \dots, C_k conjuntos de índices de programas y sea $C = C_1 \cap \dots \cap C_k$.

- Demostrar que C es un conjunto de índices de programas (i.e., $C = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}\}$, con \mathcal{C} una clase de funciones).
- Proponer un conjunto que no sea un conjunto de índices de programas y no sea computable.

Ejercicio 9. Probar que son equivalentes

- D es un conjunto de índices de programas.
- Para todo par de programas p y q , si $\#p \in D$ y $\Psi_p = \Psi_q$ entonces $\#q \in D$.

Ejercicio 10. Demostrar, usando reducciones y el teorema de Rice, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cup \text{Dom } \Phi_y^{(1)} = \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_4(x, y) &= \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(\Phi_y^{(1)}(72)) & \text{si } \Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 73 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Observación: la composición de dos funciones parciales puede ser una función parcial.

Ejercicio 11. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si B es computable entonces es c.e.
- Si B es c.e. entonces B es computable o su complemento lo es.
- Si B es c.e. entonces su complemento es c.e.

Ejercicio 12. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son p.r., cuáles son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2 * x\} & C_4 &= \{\langle x, y \rangle : \forall z \in (\text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cap \text{Dom } \Phi_y^{(1)}) \Phi_x^{(1)}(z) < \Phi_y^{(1)}(z)\} \\ C_2 &= \{x : 1 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)}\} & C_5 &= \{\langle x, y, t, i \rangle : \exists \sigma. \text{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\} \\ C_3 &= \{x : \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\}\} & C_6 &= \{\langle x, y, i \rangle : \exists \sigma, t. \text{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\} \end{aligned}$$

Ejercicio 13. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.
- Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.
- Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.
- Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.

Ejercicio 14. Sea B un conjunto *infinito*.

- Probar que B es c.e. sii existe una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y computable tal que $\text{Im } f = B$ (o sea, f es una *enumeración computable* de los elementos de B).
- Probar que B es computable sii existe una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ computable y estrictamente creciente tal que $\text{Im } f = B$ (o sea, f es una *enumeración ordenada y computable* de los elementos de B).
- Probar que si B es c.e. entonces B contiene (al menos) un subconjunto computable infinito.

Ejercicio 15. Sea $TOT = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es una función total}\}$.

- Demostrar que TOT no es co-c.e.
- Demostrar que TOT no es c.e. (*Sugerencia:* considerar la función $g(z) = \Phi_{f(z)}^{(1)}(z) + 9$ donde f es una enumeración computable de TOT).

Ejercicio 16. Demostrar que los siguientes conjuntos no son c.e. ni co-c.e.

$$\begin{aligned} ID &= \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es la función identidad}\} \\ S &= \{x : \text{Im } \Phi_x^{(1)} = \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Sugerencia: utilice una reducción de TOT usando el Teorema del Parámetro.

Ejercicio 17. Exhibir un conjunto *no vacío* $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para toda función f primitiva recursiva, exista un k que cumpla $k \in (C \cup \text{Im } f)$ pero $k \notin (C \cap \text{Im } f)$. Justificar apropiadamente.

Ejercicio 18. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Para toda función computable (total) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existe una función primitiva recursiva $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son primitivas recursivas.
- Sea C un conjunto infinito. Si para todo $x \in C$ vale $\neg \text{Halt}(x, x)$ entonces C no es computable.
- Si C y D son conjuntos c.e. infinitos, entonces existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, computable (total), inyectiva, y tal que $\text{Im } f = C \cup D$.
- Si $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ es una función tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = f(n, x)$ es total y computable, entonces f es computable (total).
- La siguiente función es primitiva recursiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im } \Phi_x^{(1)} \text{ es un conjunto c.e.} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Sea e un número fijo, la siguiente función no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \text{Halt}(e, e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Existe una función computable f tal que para todo programa p , la función computada por el programa con número $f(\#p)$ es *distinta* a la computada por p , es decir, $\Psi_p^{(1)} \neq \Phi_{f(\#p)}^{(1)}$.