

Ejercicio 1

Probar que no son computables usando diagonalización.

A)

Pruebo que la función f no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo que f es computable para llegar a un absurdo. Sea P el programa que computa f . Defino otro programa usando P llamado P' :

```
      P
A    IF Y != 0 GOTO A
```

Lo defino de forma tal que cuando P dice que el programa X se define, entonces P' se indefine. Sea e el número del programa P'

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Psi_P(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

Por definición de f_1 :

$$f(x) = 0 \iff \Phi_x(x) \uparrow$$

Entonces tenemos que para todo x :

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Phi_x(x) \uparrow$$

Tomando $x = e = \#P'$:

$$\Phi_e(e) \downarrow \iff \Psi_{P'}(e) \downarrow \iff \Phi_e(e) \uparrow$$

Absurdo por suponer que f es computable.

Ahora va el ejercicio de verdad:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Usando esto voy a ver que $f(x)$ es una reducción de $f_1(x, y)$ usando $f(x) = f_1(x, x)$.

Supongo f_1 computable y sea Q_1 un programa que lo computa. Usando Q_1 escribo Q_1' :

```
      X2 <- X1
      Q1
```

Entonces vemos que $\Psi_{Q1'}^{(1)}(x) = \Psi_{Q1}^{(2)}(x, x)$

Por hipotesis: $\Psi_{Q1}^{(2)}(x, x) = f1(x, x) = f(x)$

Finalmente, por la transitividad de la igualdad tenemos que: $\Psi_{Q1'}^{(1)}(x) = f(x)$

Absurdo ya que la función que da la salida de un programa (Ψ) no puede ser una función no computable (f).

Surge de suponer que f1 es computable.

B)

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) = 0 \\ 0 & \text{si } \Phi_x(y) \uparrow \vee \Phi_x(y) \neq 0 \end{cases}$$

Sin usar reducción (dudosa)

Hago todo el versito de suponer f computable, con P el programa que la computa y otro programa P' que usa la salida de P...

```

P
A  IF Y != 0 GOTO A
  Y <- 1

```

$$\Psi_{P'}(x, y) \downarrow \iff \Psi_P(x, y) = 1 \iff f_2(x, y) = 1 \iff \Phi_x(y) = 0$$

Queda como:

$$\Psi_{P'}(x, y) \downarrow \iff \Phi_e^2(x, y) \downarrow \iff \Phi_e^2(x, y) = 1 \iff \Phi_x^1(y) = 0$$

Asi de una yo se que las Φ^1 son funciones donde todos los parametros $x_i, i > 1$ estan definidos como 0. Puedo reemplazarlas por una Φ^2 que tenga la segunda variable en 0.

$$\Phi_e^2(x, y) = 1 \iff \Phi_x^2(y, 0) = 0$$

evaluando $x = e = \#(P')$:

$$\Phi_e^2(e, y) = 1 \iff \Phi_e^2(y, 0) = 0$$

Puedo escribir el programa de forma tal que la salida siempre sea 1, lo cual me lleva a un absurdo.

Voy a demostrar un caso mas simple para después demostrar la reducción.

Primera forma (galerazo?)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para probar que f no es computable, primero supongo que **si** lo es. Por ser computable, existe un programa P que la computa: $\Psi_P(x) = f(x)$. Como P existe, puedo definir otro programa que lo use y lo llamo P':

```

P
A  IF Y = 0 GOTO A
   Y <- 1

```

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Psi_P(x) \downarrow \wedge \Psi_P(x) \neq 0$$

Como las unicas salidas del programa P son 1 o 0, estamos pidiendo que la salida sea 1:

$$\Psi_P(x) \downarrow \wedge \Psi_P(x) \neq 0 \iff \Psi_P(x) = 1 \iff f(x) = 1$$

Por definici3n de f, solo se cumple si estamos en la primera guarda:

$$f(x) = 1 \iff \Phi_x(x) = 0$$

Por transitividad, finalmente llegamos a:

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Phi_x(x) = 0$$

Pero por inspecci3n de P' podemos ver que $\Psi_{P'}(x) = 1$ siempre que termine la ejecuci3n del programa. Como P' existe a partir de lo que supusimos, entonces tambi3n podemos calcular su numero de programa. Llamamos $e = \#(P')$.

$$\begin{aligned} \Psi_{P'}(x) \downarrow &\iff \Psi_{P'}(x) = 1 \iff \Phi_x(x) = 0 \\ \Phi * e(e) &= 1 \iff \Phi * e(e) = 0 \end{aligned}$$

Absurdo que parte de suponer que la funci3n f es computable.

Segunda forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo f computable. Sea P el programa que la computa, voy a escribir una P' con la intenci3n de que est3 definida sii la universal se indefina. Para que se indefina la universal necesito que el programa se cuelgue sii la salida es 1 (analizando la guarda de f).

```

P
A  IF Y != 0 GOTO A
   Y <- ¿?

```

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Psi_P(x) = 0 \iff f(x) = 0 \text{ Por definición: } \iff \Phi_x(x) \uparrow \vee \Phi_x(x) \neq 0$$

Mas o menos quedó lo que quería, estaría bueno no tener el $\Phi_P(x) \neq 0$ que no me permite llegar directo a la contradicción. Sabiendo que para la contradicción voy a evaluar $x = e = \#(P')$ puedo modificar P' para que dé una salida 0 y que solo “sobreviva” la primera parte del \vee .

```

P
A  IF Y != 0 GOTO A
   Y <- 0

```

$$\Psi_{P'}(x) \downarrow \iff \Phi_x(x) \uparrow$$

Evaluando $x = e$:

$$\Phi_e(e) \downarrow \iff \Phi_e(e) \uparrow$$

Absurdo, por suponer que f era computable.

Reducción

Usando esto voy a ver que $f(x)$ es una reducción de $f_2(x, y)$ usando $f(x) = f_2(x, x)$.

Supongo f_2 computable y sea Q_2 un programa que lo computa. Usando Q_2 escribo Q_2' :

```

X2 <- X1
Q2

```

Entonces vemos que $\Psi_{Q_2'}^{(1)}(x) = \Psi_{Q_2}^{(2)}(x, x)$

Por hipótesis: $\Psi_{Q_2}^{(2)}(x, x) = f_2(x, x) = f(x)$

Finalmente, por la transitividad de la igualdad tenemos que: $\Psi_{Q_2'}^{(1)}(x) = f(x)$

Absurdo ya que la función que da la salida de un programa (Ψ) no puede ser una función no computable (f).

Surge de suponer que f_2 es computable.

C)

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(y) \leq z \end{cases}$$

Hago P_3' un programa que usa P_3 (el programa de f_3):

Quiero que: $\Psi_{P3'}(x, y, z) \downarrow \iff \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(y) \leq z \iff \Phi_x^{(3)}(y, 0, 0) \uparrow \vee \Phi_x^{(3)}(y, 0, 0) \leq z$
 $\Phi_e^{(3)}(x, y, z) \downarrow \iff \Phi_x^{(3)}(y, 0, 0) \uparrow \vee \Phi_x^{(3)}(y, 0, 0) \leq z$
 $\Phi_e^{(3)}(e, y, z) \downarrow \iff \Phi_e^{(3)}(y, 0, 0) \uparrow \vee \Phi_e^{(3)}(y, 0, 0) \leq z$
 $\Phi_e^{(3)}(e, y, z) \downarrow \iff \Phi_e^{(3)}(y, 0, 0) \uparrow \vee \Phi_e^{(3)}(y, 0, 0) \leq z$
 No se cerrarlo

Pruebo el caso mas simple:

$$g_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) > x \\ 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) \leq x \end{cases}$$

Hago un programa Q3' con Q3:

```

Q3
A   IF Y != 0 GOTO A
    Y <- X + 1

```

$$\Psi_{Q3'}(x) \downarrow \iff \Psi_{Q3}(x) = 0 \iff g_3(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) \leq x$$

Por la cadena de sii:

$$\Psi_{Q3'}(x) \downarrow \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) \leq x$$

Evaluando $x = e = \#(Q3')$

$$\Phi_e(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(e) \leq e$$

Vemos que la salida del programa con numero e siempre es x+1, asi que $\Phi_e^{(1)}(e) \leq e$ es siempre falso.

$$\Phi_e(e) = e + 1 \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(e) \leq e$$

Reducción f3

Voy a usar g3 (no es computable) para probar que f3 no es computable mostrando que g3 es una reducción de f3. Quiero ver que si f3(x,y,z) es computable entonces hay un caso especial (la reducción) g3(x) que tambien es computable, lo hago usando $g3(x) = f3(x,y,z)$.

Supongo que f3(x,y,z) es computable, entonces existe un programa P3 que la computa. Hago un programa P3':

```

X2 <- X1
X3 <- X1
P3

```

Por inspección este programa se comporta como P3 con las 3 variables iguales a la primera:

$$\Psi_{P3'}^{(1)}(x) = \Psi_{P3}^{(3)}(x, x, x) = f_3(x, x, x)$$

Por definición de g_3 sabemos que $g_3(x) = f_3(x, x, x)$ entonces:

$$\Psi_{P3'}^{(1)}(x) = g_3(x)$$

Pero esto implicaría que g_3 es computable, cuando sabemos que no lo es. Absurdo, no existe ningún programa Q tal que $\Psi_Q^{(1)}(x) = g_3(x)$ (no es computable). Surge de suponer que f_3 es computable.

D)

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = x \end{cases}$$

Supongo f_4 computable, entonces existe un programa P_4 que lo computa. Llamo P_4' al siguiente programa:

```

P4
A   IF Y != 0 GOTO A
    Y <- 0

```

Por inspección vemos que el programa termina siempre en 0 y termina sii la salida de P_4 es igual a 0.

$$\Psi_{P3'}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{P3}^{(1)}(x) = 0 \iff f_4(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = x$$

Por transitividad nos queda:

$$\Psi_{P3'}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = x$$

Sea $e = \#(P_4')$ y evaluando x en e :

$$\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(e) = e$$

La segunda parte del \vee es siempre falsa ya que $\Phi_x^{(1)}(x) = 0, \forall x$ y como e no es el programa vacío entonces $\Phi_e^{(1)}(e) = 0 \neq e$. Finalmente:

$$\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$$

Absurdo, surge de suponer que f_4 es computable. # Ejercicio 2

Idea general de la reducción: Partimos con una función (f) que sabemos que no es computable, queremos probar que g tampoco lo es.

- Suponemos f computable
- Vemos como podemos escribir g en función de f
- Escribimos un programa que use el paso anterior
- Hacemos el Ψ del programa de g igual a la reducción con el Ψ del programa de f
- Reemplazamos el Ψ con f, debería quedar la reducción que hicimos antes
- Reemplazamos la reducción con g.
- Por transitividad de igualdad nos quedó que Ψ_f es igual a g, que no es computable. Absurdo

A)

$$g_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) \uparrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Podemos hacer una reducción a f1 (ej1) : $f_1(x, y) = 1 - g_1(x, y)$

Supongo g1 computable, existe un programa Q1 que la computa. Llamo Q1' al siguiente programa:

```
Q1
Y <- 1 - Y
```

Por inspección:

$$\Psi_{Q1'}^{(1)}(x, y) = 1 - \Psi_{Q1}^{(1)}(x, y) = 1 - g_1(x, y) = f_1(x, y)$$

Por transitividad nos queda que:

$$\Psi_{Q1'}^{(1)}(x, y) = f_1(x, y)$$

Absurdo ya que f1 no es computable. Surge de suponer que g1 era computable.

B)

$$g_2(x, y, z, w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_y^{(1)}(w) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(w) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sea k el numero del programa que computa la función identidad (sabemos que existe ya que Id es p.r.). La reducción se puede hacer con f3 del ej1:

$$f_3(x, y, z) = g_2(x, k, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_k^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > \Phi_k^{(1)}(z) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Como la función identidad es total: $\Phi_k^{(1)}(z) \downarrow, \forall z$ y además es igual a z , entonces

$$f_3(x, y, z) = g_2(x, k, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Falta probar que es una reducción válida, para eso suponemos g_2 computable y Q_2 el programa que la computa, definimos el programa Q_2' como:

```
X4 <- X3
X3 <- X2
X2 <- K
Q2
```

Por inspección vemos que:

$$\Psi_{Q_2'}^{(3)}(x, y, z) = \Psi_{Q_2}^{(4)}(x, k, y, z) = g_2(x, k, y, z) = f_3(x, y, z)$$

Pero por transitividad implica que $\Psi_{Q_2'}^{(3)}(x, y, z) = f_3(x, y, z)$, lo cual es un absurdo ya que f_3 no es computable.

C)

Reducción que encontré:

$$f_4(x) = g_3(x, x, x) \dot{-} x = \begin{cases} (x+1) \dot{-} x & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 \dot{-} x & \text{si no} \end{cases}$$

Resolviendo cada caso:

$$f_4(x) = g_3(x, x, x) \dot{-} x = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Falta ver que es una reducción válida:

Supongo g_3 computable. Sea Q_3 el programa que la computa y Q_3' el siguiente programa:

```
X2 <- X1
X3 <- X1
Q3
Y <- Y - X
```

Por inspección del programa se ve:

$$\Psi_{Q_3'}^{(1)}(x) = \Psi_{Q_3}^{(3)}(x, x, x) \dot{-} x = g_3(x, x, x) \dot{-} x = f_4(x)$$

Por transitividad:

$$\Psi_{Q3'}^{(1)}(x) = f_4(x)$$

Absurdo ya que f_4 no es computable.

D)

Sea g la función constante 1 $g(x) = 1$ computable y sea i el numero del programa que la computa.

La reducción que uso para $g_4(x,y,z)$ es:

$$f_1(x, y) = g_4(i, x, y) = \begin{cases} (\Phi_i^{(1)} \circ \Phi_x^{(1)})(y) & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge (\Phi_i^{(1)} \circ \Phi_x^{(1)})(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observar que

$$(\Phi_i^{(1)} \circ \Phi_x^{(1)})(y) = \Phi_i^{(1)}(\Phi_x^{(1)}(y)) = g(\Phi_x^{(1)}(y)) = 1$$

Si se cumple que $\Phi_x^{(1)}(y) \downarrow$. Haciendo todas las simplificaciones nuestra reducción queda como:

$$f_1(x, y) = g_4(i, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo g_4 computable, entonces existe un programa P_4 que la computa. Sea P_4' el siguiente programa:

```
X3 <- X2
X2 <- X1
X1 <- i
P4
```

Por inspección:

$$\Psi_{P_4'}^{(2)}(x, y) = \Psi_{P_4}^{(3)}(i, x, y) = g_4(i, x, y) = f_1(x, y)$$

Por transitividad nos queda el absurdo:

$$\Psi_{P_4'}^{(2)}(x, y) = f_1(x, y)$$

Ya que f1 no es computable. Surge de suponer que g4 era computable. #
Ejercicio 3

$$g'_3(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La reducción es $f_4(x) = (g'_3(x, x, x) = x \wedge x > 0)$:

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \wedge x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Vemos que en el caso de $f_4(0) = 0$ ya que $\Phi_0(0) = 0$ por ser el programa vacío así que lo “hardcodeamos”.

Sea Q el programa que computa g3', voy a escribir P usando todas funciones computables (=, \wedge y $>$ son p.r.) :

```
X2 <- X1
X3 <- X1
Q
Y <- (Y = X1) && X1 > 0
```

Por inspección:

$$\Psi_P^{(1)}(x) = (\Psi_Q^{(3)}(x, x, x) = x \wedge x > 0) = (g'_3(x, x, x) = x \wedge x > 0) = f_4(x)$$

Por transitividad queda un absurdo $\Psi_P^{(1)}(x) = f_4(x)$ ya que f4 no es computable.
Ejercicio 4

Una función parcial computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x)=f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}f$.

Qvq existe una función parcial computable que **no es extensible**.

Para probarlo veo:

Dada una funcion f parcial computable, es extensible sii

$$\exists g : \forall x \in \text{Dom}f, g(x) = f(x)$$

La f que elijo para probar esto está definida como

$$f(x) = \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(x) & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Pruebo que es computable escribiendo un programa P que la computa:

```
Y <- Phi_X(X)
```

Por inspección se ve que termina sii $\Phi_x^{(1)}(x)$ termina su ejecución. Como pudimos escribir un programa tal que:

$$\Psi_P^{(1)}(x) = f(x)$$

Queda probado que f es parcial computable. No es total computable ya que la función no es total.

Sea $h(x)$ una función computable (funcion total y parcial computable). Puedo definir $f'(x)$ como su extensión usando a $h(x)$.

f' cumple que es total y que tiene el mismo comportamiento que f para el dominio de f . Eso significa que está definida (devuelve algún valor) para la guarda en la que f se colgaba:

$$f'(x) = \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(x) & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ h(x) & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente pruebo que para todo $h(x)$, f' no es computable.

Pruebo f' no computable

Supongo f' computable, entonces existe un programa P' que la computa. Escribo el siguiente programa Q :

```

P
A  IF Y != h(x) GOTO A

```

Por inspección del programa Q se ve que:

$$\Psi_Q^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{P'}^{(1)}(x) \neq \Phi_x^{(1)}(x) \iff f'(x) \neq \Phi_x^{(1)}(x)$$

Por definición de f' :

$$f'(x) \neq \Phi_x^{(1)}(x) \iff f'(x) = h(x) \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow$$

Finalmente $\Psi_Q^{(1)}(x) \downarrow \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow$ y evaluando x en $e = \#(Q)$:

$$\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$$

Absurdo que surge de suponer que f' es computable. # Ejercicio 5

A)

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{HALT}(1337, x) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{HALT}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_y^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Voy a convertirlo a f1 del ej 1 y despues en otra f1(x,x) que es mas facil:

tomo e una cte que voy a definir despues. Hago el $S_1^1(u, e) \dots$

Reduzco a

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para esto primero reescribo g1 usando la definici3n de HALT:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(1337) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Vemos que ahora son muy parecidas. Necesitamos darle a g1 el numero de un programa que usa la X2 y X3 para ejecutar algo parecido a f1, lo construimos usando la S del teorema del p1rametro.

$$\begin{aligned} g_1(S_1^2(u, v, e)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{S_1^2(u, v, e)}^{(1)}(1337) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_e^{(3)}(1337, u, v) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u^{(1)}(v) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = f_1(u, v) \end{aligned}$$

Si g1 es computable y Q1 es su programa entonces puedo hacer un programa P1 con numero e cuya salida es el resultado de ignorar la primera variable y usar las siguientes dos para “ejecutar” f1:

```
Z1 <- X2
Z2 <- X3
Y <- U_n(Z1, Z2)
```

Si el numero de este programa es e, podemos construir el numero de otro programa que hardcodea X2 y X3 adentro del codigo y podemos hacer lo que quer1amos

$$\Phi_e^{(3)}(x, u, v) = \Phi_{S_1^2(u, v, e)}^{(1)}(x)$$

Ademas vemos por inspecci3n que:

$$\Phi_u^{(1)}(v) \downarrow \iff \Phi_e^{(3)}(x, u, v) \downarrow \iff \Phi_{S_1^2(u, v, e)}^{(1)}(x) \downarrow$$

g1 es una función que toma el numero de un programa y te dice si este termina o no con una entrada fija 1337. La idea es aprovechar que toma el numero de un programa y mostrar que adentro del numero de un programa podemos codificar variables extra, que nosotros decidimos sus valores (teo parametro).

De esta forma usando una función que nos dice si un programa x termina para cierta entrada, podemos ver si un programa u termina para cualquier entrada v dada. En este numero de programa vamos a querer agregar dos variables para hacer la reducción a f1 del ej1, asi que primero hacemos el programa que copia el comportamiento de $\Phi_{x2}^{(1)}(x3)$ y conseguimos su numero de programa.

Despues usamos ese numero y la función S_1^2 para transformar este programa de 3 variables a uno de 1 variable con las otras dos fijas dentro del codigo. Como S es pr y nuestro programa de recien existe, nada nos impide en darle este programa como entrada a g1.

Construyo programa P tq $\Psi_P^{(3)}(x1, x2, x3) = \Phi_{x2}^{(1)}(x3)$ (ignoramos la primera variable)

```
Y <- Phi_X2(X3)
```

Como pudimos escribir el programa, podemos saber su numero y lo llamamos e = # (P).

Por teo del parametro hay una función p.r. tq

$$\Phi_e^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \Phi_{S_1^2(x_2, x_3, e)}^{(1)}(x_1)$$

Por transitividad de la igualdad vemos que

$$\Phi_{S_1^2(x_2, x_3, e)}^{(1)}(x_1) = \Phi_{x2}^{(1)}(x3)$$

Ahora podemos componer esta función con g1.

Supongo g1 computable y Q1 el programa que la computa, entonces puedo pasarle el numero del programa que acabo de construir.

$$g_1(S_1^2(u, v, e)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{S_1^2(u, v, e)}^{(1)}(1337) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u^{(1)}(v) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = f_1(u, v)$$

Pero si

- e es un numero de programa valido (existe xq lo escribí)

- S es pr \implies S es computable
- g1 es computable

Esto implica que la composición $g_1 \circ S$ es computable, lo cual es un absurdo ya que $g_1 \circ S = f_1$ que **no es computable**.

B)

$$g_2(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_y^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Primero evalúo y en $i = \#(\text{Id})$

$$g_2(x, i, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(z) > z \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora defino un programa que recibe tres variables (x1,x2,x3) (ignora la primera) y computa $\Phi_{x_2}^{(1)}(x_3)$. Llamo P a este programa y e a su número.

`Y <- Phi_X2(X3)`

Por el teorema del parámetro $\Phi_e^{(3)}(z, x, y) = \Phi_{S_1^2(x, y, e)}^1(z)$ que por inspección del programa y transitividad nos queda:

$$\Phi_{S_1^2(x, y, e)}^1(z) = \Phi_x^{(1)}(y)$$

Finalmente hago la reducción usando esta S:

Supongo g2 computable.

$$g_2(S_1^2(x, y, e), i, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{S_1^2(x, y, e)}^{(1)}(z) \downarrow \wedge \Phi_{S_1^2(x, y, e)}^{(1)}(z) > x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = f_3(x, y, z)$$

Entonces la composición g2 y S es computable.

Absurdo ya que la composición da una f que no es computable.

C)

$$g_3(x) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Hago un programa que cumple que es la constante 7 pero que solo termina sii $\Phi_{x_2}^{(1)}(x_2) \downarrow$, lo llamo P3.

Z1 <- Phi_X2(X2)
Y <- 7

Por inspección de P3: $\Psi_{P3}^{(2)}(x_1, x_2)$ es cte 7 $\iff \Phi_{x_2}^{(1)}(x_2) \downarrow$

Sea $e = \#(P3)$, puedo usar el teorema del parametro para fijar x_2 y tener el numero de un programa nuevo en función de x_2 .

$$\Phi_e^{(2)}(x_1, x_2) = \Psi_{S_1^1(x_2, e)}^{(1)}(x_1)$$

Supongo g_3 computable. Sabiendo que S_1^1 es pr (entonces computable) puedo componerlas para formar algo computable:

$$g_3(S_1^1(x_2, e)) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_{S_1^1(x_2, e)}^{(1)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_e^{(2)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_{x_2}^{(1)}(x_2) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Absurdo, ya que la ultima función es una que sabemos que no es computable.

D)

$$g_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_y^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(x) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Voy a reducir g_4 para llegar a f_4 del ejercicio 1.

Quiero meter en x el numero de un programa que toma otra variable (una mas) y que computa $\Phi_{x_2}^{(1)}(x_2)$. Defino el programa P4 como:

Y <- Phi_X2(X2)

Sea $e = \#(P4)$ el numero de este programa. Por el teorema del parametro existe una S_1^1 :

$$\Phi_e^{(2)}(x, y) = \Phi_{S_1^1(y, e)}^{(1)}(x)$$

Y como nuestro programa e computa $\Phi_{x_2}^{(1)}(x_2)$ nos queda que:

$$\Phi_y^{(1)}(y) = \Phi_{S_1^1(y, e)}^{(1)}(x)$$

Evaluando la x de g_4 en $S_1^1(x, e)$:

$$g_4(S_1^1(x, e), y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{S_1^1(x, e)}^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_y^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \wedge \Phi_{S_1^1(x, e)}^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Reemplazando $\Phi_{S_1^1(x,e)}^{(1)}(y)$ por $\Phi_x^{(1)}(x)$

$$g_4(S_1^1(x, e), y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_y^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq \Phi_y^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora tengo que ver que programa darle a y para que se cumpla $\Phi_y^{(1)}(S_1^1(x, e)) = x$, lo hago definiendo un programa que ignora la primera variable y devuelve siempre la segunda.

Defino un programa con numero k que cumple $\Phi_k^{(2)}(x_1, x_2) = x_2$

Y <- X2

Ahora uso el teorema del parametro para encontrar una funcion p.r. $S_1^{1'}$ tal que

$$\Phi_k^{(2)}(x, y) = \Phi_{S_1^{1'}(y, k)}^{(1)}(x) = y$$

$$g_4(S_1^1(x, e), S_1^{1'}(x, k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_{S_1^{1'}(x, k)}^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq \Phi_{S_1^{1'}(x, k)}^{(1)}(S_1^1(x, e)) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para cerrar

- Tomo la primera variable como $S_1^1(x, e)$, ya que $\Phi_{S_1^1(x, e)}^{(1)}(y) = \Phi_x^{(1)}(x)$.
- Tomo la segunda variable como $S_1^{1'}(x, k)$, ya que $\Phi_{S_1^{1'}(x, k)}^{(1)}(y) = x$.

Supongo g_4 computable, como las dos S son pr (\implies computables) y la composicion es computable entonces la siguiente función es computable:

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pero es la función f_4 que ya probamos que no es computable en el ejercicio 1. Faltaría ver que la reducción es computable. # Ejercicio 6

Demostrar que existe un programa P (con numero e) tal que $\Psi_P^{(1)}(x) \downarrow \iff x = e$

Defino una función $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$g(x, y) = \begin{cases} 42 & \text{si } x = y \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Es trivial ver que es parcial computable. Sabiendo esto podemos usar el teorema del parametro sobre g :

Por el teo sabemos que existe un programa con numero e tal que $\Phi_e^{(1)}(y) = g(e, y)$, finalmente:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 42 & \text{si } x = e \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Por la definición de Φ se ve que $\Phi_e^{(1)}(x) \downarrow \iff x = e$ como queriamos probar.
Ejercicio 7

Probar que no son computables usando Teorema de la Recursión.

h1

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{Im } \Phi_x^1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo h_1 computable y defino la siguiente función:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } h_1(x) \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

Observar que es igual a:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } x \in \text{Im } \Phi_x^1 \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

Como g_1 está definida por composición de funciones computables (h_1 incluida) y es parcial, es parcial computable. Puedo usar el teorema de la recursión.

Por TDR existe un programa con numero e tal que $\Phi_e^{(1)}(y) = g(e, y)$, veamos que implica:

$$\Phi_e^{(1)}(y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } e \in \text{Im } \Phi_e^1 \\ e & \text{si no} \end{cases}$$

Acá llegamos a un absurdo:

Supongo $e \in \text{Im } \Phi_e^1$, entonces:

$$e \in \text{Im } \Phi_e^1 \iff \Phi_e^{(1)}(y) \uparrow \forall y \iff \text{Im } \Phi_e^1 = \emptyset \implies e \notin \text{Im } \Phi_e^1$$

Supongo $e \notin \text{Im } \Phi_e^1$, entonces:

$$e \notin \text{Im } \Phi_e^1 \iff \Phi_e^{(1)}(y) = e \forall y \implies e \in \text{Im } \Phi_e^1$$

Comentario de la función a elegir

No necesitaba que el programa se cuelgue, solo necesitaba que implique que e no esta en la imagen para todo y .

Tampoco necesitaba definir la segunda guarda como e , necesitaba que haya algun valor que devuelve e . Otra opción podría haber sido

$$g_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \text{Im } \Phi_x^1 \\ y & \text{si no} \end{cases}$$

Que reemplazando nos queda:

$$\Phi_e^{(1)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in \text{Im } \Phi_e^1 \\ y & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces el absurdo surge de que:

- En la primera guarda la imagen es 0, y el programa e no es vacío.
- En la segunda guarda se implica que existe un $y = e$ tq $\Phi(e)=e$ entonces e SI pertenece a la imagen.

h2

$$h_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Lo voy a llevar a un programa de una sola entrada (que es y) y quiero que

- el programa se cuelgue sii la nueva función no se cuelga (absurdo)
- el programa termina sii la nueva función se cuelga

La negación de la guarda es $\Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(y) \leq x$ asi que si el programa termina tambien quiero que contradiga la otra parte del or. Devuelvo una salida mayor a x . Finalmente defino:

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } h_2(x, y) \\ x + 1 & \text{si no} \end{cases}$$

Como g_2 es una función parcial y composición de funciones computables (y una parcial computable) sabemos que es parcial computable.

Viendo la función h_2 podemos ver que g_2 es igual a:

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ x + 1 & \text{si no} \end{cases}$$

Como g_2 es parcial computable podemos usar el TDR sobre ella: existe un programa con numero e tal que $\Phi_e^{(1)}(y) = g_2(e, y)$, entonces

$$\Phi_e^{(1)}(y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \Phi_e^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_e^{(1)}(y) > e \\ e + 1 & \text{si no} \end{cases}$$

Divido en dos casos distintos:

Supongo la primera guarda y veo que implica:

$$\Phi_e^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_e^{(1)}(y) > e \iff \Phi_e^{(1)}(y) \uparrow \forall y$$

Supongo la segunda guarda y veo que implica:

$$\Phi_e^{(1)}(y) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(y) \leq e \iff \Phi_e^{(1)}(y) = e + 1 \implies \Phi_e^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_e^{(1)}(y) > e$$

Los dos casos dan absurdo que surge de suponer h_2 computable.

h3

$$h_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo h_3 computable, defino la siguiente función g_3 :

$$g_3(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_3(x) = 0 \\ y & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ y & \text{si no} \end{cases}$$

Como g_3 es parcial computable, por TDR $\Phi_e^{(1)}(y) = g_3(e, y)$

$$\Phi_e^{(1)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Im}\Phi_e^{(1)} \text{ es infinita} \\ y & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo primera guarda y veo que implica absurdo:

$$\text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \iff \Phi_e^{(1)}(y) = 0 \forall y \implies \text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es finita}$$

Supongo segunda guarda y veo que implica absurdo:

$$\text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es finita} \iff \Phi_e^{(1)}(y) = y \forall y \implies \text{Im}\Phi_x^{(1)} \text{ es infinita}$$

Los dos absurdos

h4

$$h_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\text{Dom}\Phi_x^{(1)}| = x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo h4 computable. Defino g4 en función de esta de forma tal que g4 sea parcial computable.

$$g_4(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } h_4(x) \\ p(y) & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} \uparrow & \text{si } |\text{Dom}\Phi_x^{(1)}| = x \\ p(x, y) & \text{si no} \end{cases}$$

Y defino p(x, y) de forma tal que $|\text{Dom}(p)| = x$:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente, por TDR se existe un e tal que $\Phi_e^{(1)}(y) = g_4(e, y)$ entonces

$$\Phi_e^{(1)}(y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } |\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| = e \\ p(e, y) & \text{si no} \end{cases}$$

Analizo cada guarda por separado:

Supongo la primera guarda y veo que implica absurdo:

$$|\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| = e \iff \Phi_e^{(1)}(y) \uparrow \forall y \iff |\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| = 0 \implies |\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| \neq e$$

Absurdo ya que $e \neq 0$ (el programa es no nulo)

Supongo la segunda guarda y veo que implica absurdo:

$$\bullet \quad |\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| \neq e \iff \Phi_e^{(1)}(y) = p(e, y) \forall y \implies |\text{Dom}\Phi_e^{(1)}| = e$$

Absurdo # Ejercicio 8

Sean C_1, \dots, C_k conjuntos de índices de programas y sea $C = C_1 \cap \dots \cap C_k$.

A

Probar que C es un conjunto de índices de programas.

Como C_1, \dots, C_k son conjuntos de índices de programas se cumple que:

$$\forall i \in [1, k], C_i = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}_i\} (\mathcal{C}_i \text{ siendo una clase de funciones})$$

Puedo reescribir a C usando la definición de conjuntos de índices de programas:

$$C = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}_1 \wedge \dots \wedge \Phi_x \in \mathcal{C}_k\} = \{x : \Phi_x \in (\mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_k)\} = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}\}$$

Donde \mathcal{C} es $(\mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_k)$ (creo que vale).

B

Proponer un conjunto que no sea un conjunto de índices de programas y no sea computable.

Un ejemplo fácil es $K = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\}$.

No es un conjunto de índices de programas (prueba):

Supongo que K es un cip:

Sea p el número de un programa tal que $\Phi_p(x) \downarrow \iff x = p$ (se que existe por el ejercicio 6). Entonces pertenece a K ya que

Por definición de K : $p \in D \iff \Phi_p(p) \downarrow$

Defino otro programa con número q tal que $\Phi_p = \Phi_q$:

A IF X != p GOTO A

Usando la equivalencia del 9, como K es un cip entonces se cumple que

$$p \in D \wedge \Phi_p = \Phi_q \implies q \in D$$

Pero por definición de q y K : $(\Phi_q(x) \downarrow \iff x = p) \implies \Phi_q(q) \uparrow \implies q \notin K$

Absurdo por suponer que K era un cip.

K no es computable ya que su indicadora no es computable

Ejercicio 9

Probar que son equivalentes:

- D es un conjunto de índices de programas.
- Para todo par de programas P y Q , si $\#P \in D$ y $\Psi_P = \Psi_Q$ entonces $\#Q \in D$.

I \implies II

Supongo que D es un conjunto de índices de programas.

Quiero ver que para todo par de programas P y Q con números p y q , si $p \in D$ y $\Psi_P = \Psi_Q$ entonces $q \in D$.

Si D es un CIP por definición: $D = \{x : \Phi_x \in C\}$. Como p pertenece entonces se cumple que $\Phi_p \in C$.

Por hipotesis sabemos que $\Phi_p = \Psi_P = \Psi_Q = \Phi_q$, finalmente

$$\Phi_p \in C \wedge \Phi_q = \Phi_p \implies \Phi_q \in C \implies q \in D$$

II \implies I

Supongo que para todo para de programas P y Q con numeros p y q , se cumple que $(p \in D \wedge \Phi_q = \Phi_p \implies q \in D)$.

Quiero ver que D es un CIP.

Supongo que D es no vacío y sean P y Q programas tal que $p \in D \wedge \Phi_q = \Phi_p$.

Puedo definir una clase de funciones $F = \{\Phi_p\}$

Se que lo estoy encarando mal, no encuentro cuales teoremas usar

Contrareciproca de Rice? por el absurdo Probar algo \rightarrow computable \rightarrow contra de rice a un absurdo # Ejercicio 10

g1

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom}\Phi_x^{(1)} = \emptyset \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \forall y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pruebo que es un CIP (conjunto de indices de programa) usando el predicado del ejercicio 9.

$$D1 = \{x : \text{Dom}\Phi_x^{(1)} = \emptyset\}$$

Sean p y q numeros de programas tal que $p \in D1$ y $\Phi_q = \Phi_p$

$$p \in D1 \implies \text{Dom}\Phi_p^{(1)} = \emptyset \implies \text{Dom}\Phi_q^{(1)} = \emptyset \implies q \in D1$$

Esto es equivalente a decir que $D1$ es un CIP.

Ahora veo que es no trivial (distinto de \mathbb{N} y \emptyset). Para esto busco un programa que pertenezca y uno que no.

Es trivial definir un programa que siempre se cuelga: $\Phi_e(x) = \uparrow$ y definir una funcion constante $f(x) = 1$ (pr \rightarrow computable).

Por el Teorema de Rice, como $D1$ es un conjunto de indices de programas no trivial entonces es no computable.

g2

$$g_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom}\Phi_x^{(1)} \cup \text{Dom}\Phi_y(1) = \mathbb{N} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora evalúo $y = x$ para encontrar una reducción posible.

$$g_2(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom}\Phi_x^{(1)} = \mathbb{N} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es total} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Esta función es la indicadora de Tot, voy a probar que no es computable.

$$D2 = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es total}\} = \text{Tot}$$

Pruebo que es un conjunto de índices de programas:

Sean p y q números de programas tal que $p \in D2 \wedge \Phi_p = \Phi_q$.

Notar que $\Phi_p = \Phi_q \implies \text{Dom}(\Phi_p) = \text{Dom}(\Phi_q)$

$$p \in D2 \iff \text{Dom}(\Phi_p) = \mathbb{N} \implies \text{Dom}(\Phi_q) = \mathbb{N} \iff q \in D2$$

Como pudimos probar que $(p \in D2 \wedge \Phi_p = \Phi_q \implies q \in D2)$ concluimos que $D2$ es un CIP. Falta ver que es no trivial, podemos usar los mismos programas del ítem anterior para probarlo.

Por el Teorema de Rice, como $D2$ es un conjunto de índices de programas no trivial entonces es no computable.

g3

$$g_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom}\Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Hago la reducción a un CIP fijando y en 1:

$$g_3(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(1) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tenemos que $g_3(x, 1)$ es la función indicadora del conjunto $D3$ definido como

$$D3 = \{x : \Phi_x^{(1)}(1) \downarrow\}$$

Pruebo que es un conjunto de índices de programas:

Sean p y q numeros de programas tal que $p \in D3 \wedge \Phi_p = \Phi_q$.

Notar que $\Phi_p = \Phi_q \implies (\Phi_p^{(1)}(1) \downarrow \iff \Phi_q^{(1)}(1) \downarrow)$

$$p \in D3 \iff \Phi_p^{(1)}(1) \downarrow \implies \Phi_q^{(1)}(1) \downarrow \iff q \in D3$$

Como pudimos probar que $(p \in D3 \wedge \Phi_p = \Phi_q \implies q \in D3)$ concluimos que D3 es un CIP. Falta ver que es no trivial.

Podemos definir un programa que se cuelga para 1 y uno que no se cuelga bastante facil.

Por el Teorema de Rice, como D3 es un conjunto de indices de programas no trivial entonces es no computable.

g4

$$g_4(x, y) = \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(\Phi_y^{(1)}(72)) & \text{si } \Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 73 & \text{si no} \end{cases}$$

Para la reducci3n hacemos que Φ_x devuelva siempre 74, pero por composici3n sabemos que como $f(x)=74$ es total, la composici3n se indefine sii su Φ_y se indefine. Llamo e al numero del programa constante 74.

$$g_4(e, y) - 73 = \begin{cases} 74 - 73 & \text{si } \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 73 - 73 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pudimos hacer otra reducci3n a Tot, que ya probamos no computable en g2. #
Ejercicio 11

Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

A

Si B es computable entonces es c.e.

Por definici3n de conjunto computable, B es computable sii su funci3n caracteristica es computable:

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Quiero ver que B es computablemente enumerable. Lo es sii existe una funcion parcial computable $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$B = \{x : g(x) \downarrow\} = \text{Dom } g$$

Defino una g de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(x) \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Se ve que es trivial hacer un programa que computa esto, ya que $B(x)$ es computable. En conclusión nuestra g es parcial computable ya que no es una función total. Finalmente pudimos encontrar g tal que

$$B(x) = \text{Dom } g$$

B

Si B es c.e. entonces B es computable o su complemento lo es.

Busco un contraejemplo que sea solamente c.e. (no co-c.e.). Tomo una variante parcial computable de halt:

$$B(x) = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\} = K \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Vemos que g es parcial computable y se cumple $B = \text{Dom}(g)$ entonces B es c.e. Como la indicadora de B es una variante de halt, sabemos que no es computable. Falta ver que el complemento de B no es computable.

$$\bar{B} = \{x : \Phi_x(x) \uparrow\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Como podemos hacer una reducción a la indicadora de B con $1-f(x)$ se ve que la indicadora de \bar{B} es no computable.

También podría haber usado que B es c.e. y no es co-c.e. entonces no es computable. El mismo argumento para su complemento, B c.e. y no co-c.e. implica que \bar{B} es co-c.e. y no c.e. entonces no es computable. Si alguno de los dos fuera computable su complemento también lo sería. Solo trate de tomar el camino de encontrar un contra ejemplo.

C

Si B es c.e. entonces su complemento es c.e.

Tomo el mismo contra ejemplo K

K es c.e. ya que existe g tal que $K = \text{Dom } g$

$$K = \{x : \Phi_x(x) \downarrow\} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Pero el complemento no es c.e: Supongamos que lo es, entonces K sería co-c.e. Como K sería c.e. y co-c.e. entonces también sería computable, lo cual es un absurdo. # Ejercicio 12

Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son p.r., cuáles son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso

C1

$$C_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2 * x\}$$

Puedo definir su función indicadora como:

$$C_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) = 2x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) = 2x \\ 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \neq 2x \vee \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \end{cases}$$

Escribo el siguiente programa para probar que C1 es c.e.

```

Z <- Phi_X(X)
A  IF Z != 2X GOTO A
Y <- 1

```

Sea e el número de este programa, podemos definir su comportamiento por inspección:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) = 2x \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente podemos ver que existe la función $\Phi_e^{(1)}(x)$ parcial computable tal que $C_1 = \text{Dom } \Phi_e^{(1)}$, entonces C1 es c.e.

Puedo probar que la indicadora no es computable usando el teorema de la recursión y definiendo la función g(x,y)

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) = 2x \\ 2e & \text{si no} \end{cases}$$

Se llega al absurdo bastante directo.

En conclusión:

- Si C1 fuera pr entonces sería computable. C1 no es pr

- C1 es c.e.
- C1 no es computable
- Si C1 fuera co-c.e. entonces sería computable (por ser c.e.). C1 no es co-c.e.

C2

$$C_2 = \{x : 1 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)}\}$$

Podemos definir su indicadora como

$$C_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(1) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es un conjunto de índices de programa no trivial, así que por Rice sabemos que no es computable. Es c.e. (creo) así que lo pruebo definiendo un programa tal que $C_2 = \text{dom } g$

```
Z <- Phi_x(1)
Y <- 1
```

Sea e el número de este programa, defino su comportamiento por inspección

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(1) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Como la función es parcial y el programa e la computa entonces es parcial computable. Esto implica que el conjunto C_2 es c.e.

En conclusión:

- Si C_2 fuera pr entonces sería computable. C_2 no es pr
- C_2 es c.e.
- C_2 no es computable
- Si C_2 fuera co-c.e. entonces sería computable (por ser c.e.). C_2 no es co-c.e.

C3

$$C_3 = \{x : \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\}\}$$

No es un conjunto de índices de programas así que no puedo usar Rice, escribo su indicadora para ver que puedo hacer.

$$C_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \implies 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para ver que $\text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\}$ habría que probar que Φ se define solamente para elementos entre 0 y x, pero para eso habría que asegurarse que se indefina para todos los mayores a x (claramente no computable, hay que recorrer todo \mathbb{N}).

Para ver lo contrario: $\text{Dom } \Phi_x^{(1)} \not\subseteq \{0, \dots, x\}$ hay que ver que existe un elemento para el cual se define Φ y que es mayor a x. Podemos verlo encontrando el primer (o alguno) que cumpla (parcial computable!). Lo escribo en un programa:

```

      Z1 <- 0      ; tupla
A    Z2 <- STP( 1(Z1)+X+1, X, r(Z1) )
      Z1 <- Z1 + 1
      IF Z2 = 0 GOTO A
      Y <- 1

```

Observar que la tupla mapea a todos los naturales para sus dos parametros, como le sumo X+1 al primero entonces me mapea a todos los naturales $\geq X+1$. De esta forma estoy recorriendo todas las posibles entradas con todas las posibles cantidades de pasos. Si el programa X termina para alguna entrada en alguna cantidad de pasos el programa debería terminar.

Sea e el numero del programa, por inspección:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y : (\Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge y > x) \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \not\subseteq \{0, \dots, x\} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Como existe una función parcial computable tal que su dominio es \bar{C}_3 entonces C_3 es co-c.e.

$$C_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Usando teorema de la recursión y una g(x,y) puedo probar que no es computable:

$$g_3(x, y) = \begin{cases} x+1 & \text{si } C_3(x) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En conclusión:

- Si C_3 fuera pr entonces sería computable. C_3 no es pr
- Si C_3 fuera c.e. entonces sería computable (por ser co-c.e.). C_3 no es co-c.e.
- C_3 no es computable
- C_3 es co-c.e.

C4

Ejercicio 13

Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

A

Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

Si B_1, \dots, B_k son c.e. por definición se cumple que existen funciones parciales computables g_1, \dots, g_k tales que $B_i = \text{Dom } g_i$.

Podemos definir el siguiente programa que usa los programas de las g_1, \dots, g_k cuyos numeros de programa son e_1, \dots, e_k .

```
A   IF STP(X, e1, T) = 1 GOTO E
    IF STP(X, e2, T) = 1 GOTO E
    ...
    IF STP(X, ek, T) = 1 GOTO E
    T <- T + 1
    GOTO A
```

Este programa llamado P con numero e cumple que:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_1(x) \downarrow \vee \dots \vee g_k(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Como cada funcion se define solamente si x pertenece al conjunto correspondiente entonces:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \vee \dots \vee x \in B_k \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \cup \dots \cup B_k \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

completar B

C

Si B_1, \dots, B_k son c.e. entonces $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

Si B_1, \dots, B_k son c.e. por definición se cumple que existen funciones parciales computables g_1, \dots, g_k tales que $B_i = \text{Dom } g_i$.

Podemos definir el siguiente programa que usa los programas de las g_1, \dots, g_k llamados P_1, \dots, P_k .

```

Z <- P1
...
Z <- Pk
Y <- 1

```

Este programa llamado P con numero e cumple que:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_1(x) \downarrow \wedge \cdots \wedge g_k(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Como cada funcion se define solamente si x pertenece al conjunto correspondiente entonces:

$$\Phi_e^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \wedge \cdots \wedge x \in B_k \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \cap \cdots \cap B_k \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$ es c.e.

completar D

Ejercicio 14

Sea B un conjunto *infinito*

A