Práctica 1 - Funciones primitivas recursivas y clases *PRC* -

Ejercicio 1. Mostrar que, dado un k fijo, la función constante $f(x) = k$ puede definirse usando las funciones iniciales y composición (*sin* usar recursión primitiva).

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas, mostrando que pueden obtenerse a partir de las funciones iniciales usando composición y/o recursión primitiva:

$$f_1(x,y) = x+y \qquad f_2(x,y) = x \cdot y \qquad f_3(x,y) = x^y \qquad f_4(x,y) = \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{y \text{ veces}}$$

$$g_1(x) = x \dot{-} 1 \qquad g_2(x,y) = x \dot{-} y \qquad g_3(x,y) = \max\{x,y\} \qquad g_4(x,y) = \min\{x,y\}$$

Observaciones: Se asume que $f_4(x,0) = 1$. $\quad x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & \text{si } y \leq x \\ 0 & \text{si } y > x \end{cases}$

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{C}_i$ la clase de funciones iniciales, es decir, aquella que contiene a:

$$n(x) = 0 \qquad s(x) = x+1 \qquad u_i^n(x_1,\ldots,x_n) = x_i \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \{1,\ldots,n\}$$

y sea $\mathcal{C}_c$ la (mínima) clase que extiende a $\mathcal{C}_i$ y se encuentra cerrada por composición, i.e., si $f, g_1, \ldots g_m$ están en $\mathcal{C}_c$, entonces $h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$ también lo está.

a. Demostrar que para toda $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, f está en $\mathcal{C}_c$ sii existe $k \geq 0$ tal que, o bien sucede $f(x_1,\ldots,x_n) = k$, o bien para algún i fijo, se tiene $f(x_1,\ldots,x_n) = x_i + k$.

b. Mostrar que existe una función primitiva recursiva que no está en $\mathcal{C}_c$.

Ejercicio 4. Llamamos *predicado* a cualquier función $p : \mathbb{N}^n \to \{0,1\}$, escribimos $p(a_1,\ldots,a_n)$ en lugar de $p(a_1,\ldots,a_n) = 1$ y decimos, informalmente, en ese caso, que "$p(a_1,\ldots,a_n)$ es verdadero". Mostrar que los predicados $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$, $<$ y $>$: $\mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ están en cualquier clase PRC.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC, sean $f_1,\ldots,f_k,g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funciones en $\mathcal{C}$ y sean también $p_1,\ldots,p_k : \mathbb{N}^n \to \{0,1\}$ predicados disjuntos en $\mathcal{C}$ (i.e., no sucede $p_i(a_1,\ldots,a_n) = p_j(a_1,\ldots,a_n) = 1$ con $i \neq j$ para ningún $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{N}^n$). Mostrar que también está en $\mathcal{C}$ cualquier función h que cumpla:

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) & \text{si } p_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \quad\vdots & \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) & \text{si } p_k(x_1,\ldots,x_n) \\ g(x_1,\ldots,x_n) & \text{si no} \end{cases}$$

Observar que h queda completamente determinada por este esquema.

Ejercicio 6. a. Demostrar que el predicado $\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ está en toda clase PRC.

b. Demostrar que la función $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ está en toda clase PRC.

c. Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC, y sean $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $g_1, g_2 : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funciones en $\mathcal{C}$. Mostrar que también está en $\mathcal{C}$ cualquier h que cumpla:

$$h(x_1,\ldots,x_n,t) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_n) & \text{si } t = 0 \\ g_1(x_1,\ldots,x_n,k,h(x_1,\ldots,x_n,t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 1 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n,k,h(x_1,\ldots,x_n,t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 2 \end{cases}$$

Observar que h queda completamente determinada por este esquema.

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{C}$ una clase *PRC* y sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado en $\mathcal{C}$. Mostrar que también están en $\mathcal{C}$ las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
\text{cantidad}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= |\{t \mid y \le t \le z \wedge p(x_1,\ldots,x_n,t)\}| \\
\text{todos}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (\forall t : y \le t \le z) p(x_1,\ldots,x_n,t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{alguno}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists t : y \le t \le z) p(x_1,\ldots,x_n,t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{minimo}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= \begin{cases} \text{mín}\{t \mid y \le t \le z \wedge p(x_1,\ldots,x_n,t)\} & \text{si existe tal t} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{maximo}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= \begin{cases} \text{máx}\{t \mid y \le t \le z \wedge p(x_1,\ldots,x_n,t)\} & \text{si existe tal t} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{unico}_p(x_1,\ldots,x_n,y,z) &= \begin{cases} u & \text{si } \{u\} = \{t \mid y \le t \le z \wedge p(x_1,\ldots,x_n,t)\} \\ z+1 & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación: pueden usarse los operadores acotados ($\text{mín}, \Sigma, \forall, \exists$) vistos en la teórica.

Ejercicio 8. Mostrar que las siguientes funciones están en toda clase *PRC*:

$$\begin{aligned}
\text{cociente}(x,y) &= \lfloor x/y \rfloor \\
\text{resto}(x,y) &= x \bmod y \\
\text{divide}(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ divide a } y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{primo}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número primo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{raiz}(x,y) &= \begin{cases} \lfloor \sqrt[x]{y} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
\text{nprimo}(n) &= k \text{ sii } k \text{ es primo y hay sólo } n-1 \text{ primos positivos menores que } k
\end{aligned}$$

Observación: Se asume que $\text{cociente}(x,0) = 0$ y $\text{resto}(x,0) = x$.

Ejercicio 9. Considerar la codificación de pares de naturales dada por $\langle x,y \rangle = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$. Mostrar que las funciones observadoras $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $l(\langle x,y \rangle) = x$ y $r(\langle x,y \rangle) = y$ están en toda clase *PRC*.

Ejercicio 10. Mostrar que *fib*, la función de Fibonacci, está en toda clase *PRC*, donde:

$$\begin{aligned}
\mathit{fib}(0) &= 0 \\
\mathit{fib}(1) &= 1 \\
\mathit{fib}(n+2) &= \mathit{fib}(n+1) + \mathit{fib}(n)
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. Demostrar que toda clase *PRC* se encuentra cerrada por *recursión mutua*. Es decir, dada $\mathcal{C}$, una clase *PRC* y dadas f_1, f_2, g_1 y g_2 funciones en $\mathcal{C}$, mostrar que también están en $\mathcal{C}$ las funciones h_1 y h_2 que cumplen:

$$\begin{aligned}
h_1(x_1,\ldots,x_n,t) &= \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) & \text{si t} = 0 \\ g_1(h_1(x_1,\ldots,x_n,t-1), h_2(x_1,\ldots,x_n,t-1), x_1,\ldots,x_n,t) & \text{si no} \end{cases} \\
h_2(x_1,\ldots,x_n,t) &= \begin{cases} f_2(x_1,\ldots,x_n) & \text{si t} = 0 \\ g_2(h_2(x_1,\ldots,x_n,t-1), h_1(x_1,\ldots,x_n,t-1), x_1,\ldots,x_n,t) & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observar que h_1 y h_2 quedan completamente determinadas por el esquema de recursión mutua.

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{C}_{i+p}$ la clase de funciones que extiende a la clase de funciones iniciales $\mathcal{C}_i$ con la función codificadora de pares $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y las observadoras $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{C}_{Ack}$ la (mínima) clase que incluye a $\mathcal{C}_{i+p}$ y se encuentra cerrada por composición y por *iteración de funciones unarias*, i.e., si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}_{Ack}$, entonces también está $h(n, x) = f^{(n)}(x)$ (recordar que $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$).

a) Demostrar que $\mathcal{C}_{Ack} \subset PR$.

b) Observar que en $\mathcal{C}_{Ack}$ se tienen las funciones codificadoras de n-tuplas y sus observadoras.

c) Demostrar que si $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ pertenecen a la clase $\mathcal{C}_{Ack}$ y h se obtiene mediante el esquema de recursión primitiva a partir de f y g, entonces la función $s : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definida por $s(\overline{x}, y) = \langle \overline{x}, y, h(\overline{x}, y)\rangle$ también pertenece a la clase $\mathcal{C}_{Ack}$.

d) Concluir que $PR \subset \mathcal{C}_{Ack}$ y, por lo tanto, coinciden.

Ejercicio 13. Considerar la codificación de secuencias finitas de números naturales dada por $[a_1, \ldots, a_n] = \Pi_{i=1}^{n} \text{nprimo}(i)^{a_i}$, donde nprimo es la función definida en el Ejercicio 8.

a. Mostrar que la codificación dada forma una biyección entre el conjunto de secuencias finitas que no terminan en cero y los números naturales mayores que cero.

b. Determinar qué valor codifica la secuencia vacía y mostrar que las siguientes funciones están en toda clase PRC:

- $|\cdot| : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $|[a_1, \ldots, a_n]| = n$ (longitud)
- $\cdot[i] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $[a_1, \ldots, a_n][i] = \begin{cases} a_i & \text{si } 1 \le i \le n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ (observador)
- $[\cdot] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $[x]$ es la lista con único elemento x (creación)
- $\cdot \circ \cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $[a_1, \ldots, a_n] \circ [b_1, \ldots, b_m] = [a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m]$ (concatenación)
- $\text{sub} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ tal que $\text{sub}([a_1, \ldots, a_n], i, j) = [a_i, \ldots, a_j]$ (sublista)

c. Proponer una codificación de secuencias ρ : Listas $\to \mathbb{N}$ que forme una biyección entre los números naturales (incluyendo el cero) y el conjunto de *todas* las secuencias finitas de naturales tal que las funciones del punto b estén en toda clase PRC.

Ejercicio 14. Utilicemos [] para referirnos a la codificación de secuencias dada en el punto 13.c.

a. Demostrar que toda clase PRC se encuentra cerrada por *recursión global* (*course-of-values recursion*). Es decir, dada $\mathcal{C}$, una clase PRC, y dada una función $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$, mostrar que la función definida como

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= f([], x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, t+1) &= f([h(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, h(x_1, \ldots, x_n, t)], x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

también está en $\mathcal{C}$.

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión global.

b. Demostrar, a partir del ítem anterior, que dada $\mathcal{C}$, una clase PRC, y funciones $g_1 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $g_2 : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$, la función definida como

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, t+1) &= g_2([h(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, h(x_1, \ldots, x_n, t)], x_1, \ldots, x_n, t) \end{aligned}$$

también está en $\mathcal{C}$.

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión global.

Ejercicio 15. Demostrar que toda clase PRC se encuentra cerrada por *recursión doble*. Es decir, dadas $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ pertenecientes a $\mathcal{C}$, una clase PRC, demostrar que también está en $\mathcal{C}$ la función $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ que cumple:

$$\begin{aligned} h(x, 0, z) &= f(x, 0, z) \\ h(x, y, 0) &= f(x, y, 0) \\ h(x, y+1, z+1) &= g(x, y, z, h(x, y, z)) \end{aligned}$$

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión doble.