Ejercicio 1

Probar que no son computables usando diagonalización.

A

Pruebo que la función f no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supongo que f es computable para llegar a un absurdo. Sea P el programa que computa f.
Defino otro programa usando P llamado P':

```
    P
A   IF Y != 0 GOTO A
```

Lo defino de forma tal que cuando P dice que el programa X se define, entonces P' se indefine. Sea e el numero del programa P'

$$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Psi_P(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

Por definicion de f1:

$$f(x) = 0 \iff \Phi_x(x)\uparrow$$

Entonces tenemos que para todo x:

$$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Phi_x(x)\uparrow$$

Tomando x = e = #P':

$$\Phi_e(e)\downarrow \iff \Psi_{P'}(e)\downarrow \iff \Phi_e(e)\uparrow$$

Absurdo por suponer que f es computable.

Ahora va el ejercicio de verdad:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Usando esto voy a ver que f(x) es una reducción de f1(x, y) usando f(x) = f1(x, x).

Supongo f1 computable y sea Q1 un programa que lo computa. Usando Q1 escribo Q1':

```
    X2 <- X1
    Q1
```

Entonces vemos que $\Psi^{(1)}_{Q1'}(x) = \Psi^{(2)}_{Q1}(x,x)$

Por hipotesis: $\Psi^{(2)}_{Q1}(x,x) = f1(x,x) = f(x)$

Finalmente, por la transitividad de la igualdad tenemos que: $\Psi^{(1)}_{Q1'}(x) = f(x)$

Absurdo ya que la función que da la salida de un programa (Ψ) no puede ser una función no computable (f).

Surge de suponer que f1 es computable.

2)

Voy a demostrar un caso mas simple para despues demostrar la reducción.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) = 0 \\ 0 & \text{si } \Phi_x(y) \uparrow \vee \Phi_x(y) \neq 0 \end{cases}$$

Escribo un programa P' cuya función se escribe como:

Si P termina y da 1 devuelve 0

Si P termina y da 0 devuelve 0

Si P no termina se cuelga

$$g(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si} \end{cases}$$

```
    P
A   IF Y = 0 GOTO A
    Y <- 0
```

```
    P
A   IF Y = 0 GOTO A
    Y <- 1
```

$$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Psi_P(x)\downarrow \wedge\, \Psi_P(x) \neq 0 \iff$$

Voy a tratar de hacer que cuando mi nuevo programa P' se define, que $\Phi_x(x)$ se indefina.