Ejercicio 1

Si solo conocemos v(p1), v(p2), v(p3) iguales a 0.

Argumentar si es posible decidir $v \vDash \alpha$ o $v \nvDash \alpha$

a) $\alpha = \neg p_1$

Por definición: $v \vDash \neg p_1$ sii $v \nvDash p_1$ sii $v(p_1) = 0$

Entonces se cumple que $v \nvDash \alpha$

b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \rightarrow p_1)$

$$v \vDash ((p_5 \vee p_3) \rightarrow p_1) \iff v \nvDash (p_5 \vee p_3) \text{ o bien } v \vDash p_1$$

Vemos que v(p1)=0 entonces la verdad de la formula no se puede decidir con la información que tenemos.

c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)$

$$v \vDash ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \iff v \nvDash (p_1 \vee p_2) \text{ o bien } v \vDash p_3$$

Como v(p3)=0, la verdad de la formula depende de la otra condición:

$$v \nvDash (p_1 \vee p_2) \iff v \nvDash p_1 \text{ y } v \nvDash p_2 \iff v(p_1) = 0 \text{ y } v(p_2) = 0$$

La conclusión es que como las valuaciones de p1 y p2 son 0, entonces es decidible y $v \vDash \alpha$

d) $\alpha = \neg p_4$

No es decidible ya que depende de un valor que no esta valuado.

e) $\alpha = ((p_8 \rightarrow p_5) \rightarrow (p_8 \wedge p_0))$

$$v \vDash ((p_8 \rightarrow p_5) \rightarrow (p_8 \wedge p_0)) \iff v \nvDash (p_8 \rightarrow p_5) \text{ o bien } v \vDash (p_8 \wedge p_0)$$

- $v \nvDash (p_8 \rightarrow p_5)$ si y solo si $v \vDash p_8$ y $v \nvDash p_5$
- $v \vDash (p_8 \wedge p_0)$ si y solo si $v \vDash p_8$ y $v \vDash p_0$

Como v(p0)=0 para poder decidir necesitamos ver la primer formula.

Entonces $v \vDash \alpha$ si y solo si $v \vDash p_8$ y $v \vDash p_0$.

Ejercicio 2

Primero busco las valuaciones v tales que $v \vDash \alpha_i$ para cada i = 1, 2, 3.

p1	p3	p4	not p1	p3 or p4	(not p1) → (p3 or p4)	p1	p2	p3	p3 and p1	not(p2 → p3 and p1)	p2	p3	p5	not p2 → p3	p5 → p3	((not p2 → p3) → (p2 or (p5 → p3))
0	0	0	TRUE	FALSE	FALSE	0	0	0	FALSE	TRUE	0	0	0	FALSE	TRUE	TRUE
0	0	1	TRUE	TRUE	TRUE	0	0	1	FALSE	TRUE	0	0	1	FALSE	FALSE	TRUE
0	1	0	TRUE	TRUE	TRUE	0	1	0	FALSE	TRUE	0	1	0	TRUE	TRUE	TRUE
0	1	1	TRUE	TRUE	TRUE	0	1	1	FALSE	TRUE	0	1	1	TRUE	TRUE	TRUE
1	0	0	FALSE	FALSE	TRUE	1	0	0	FALSE	TRUE	1	0	0	TRUE	TRUE	TRUE
1	0	1	FALSE	TRUE	TRUE	1	0	1	TRUE	FALSE	1	0	1	TRUE	FALSE	TRUE
1	1	0	FALSE	TRUE	TRUE	1	1	0	FALSE	TRUE	1	1	0	TRUE	TRUE	TRUE
1	1	1	FALSE	TRUE	TRUE	1	1	1	TRUE	TRUE	1	1	1	TRUE	TRUE	TRUE

Figure 1: Tablas de verdad

Ahora veo la intersección de las filas que dan true para ver las valuaciones tales que $v \vDash \alpha_i$ para todo i.

Primero: (p1,p3,p4) != (0,0,0)

Segundo: (p1,p2,p3) != (1,0,1)

Si ambas se cumplen entonces las tres formulas son verdaderas.

??

Ejercicio 3

Item a

$$\alpha \text{ es tautologia sii } \neg\alpha \text{ no es satisfacible}$$

Observar que por definicion $v \vDash \alpha \iff v \nvDash \neg\alpha$, entonces:

$$\alpha \text{ es tautologia } \overset{\text{def Tau}}{\iff} \forall v : v \vDash \alpha \overset{\text{def } \neg}{\iff} \forall v : v \nvDash \neg\alpha \overset{\text{def satisfacible}}{\iff} \neg\alpha \text{ no es satisfacible}$$

Item b

$$(\alpha \wedge \beta) \text{ es tautologia si y solo si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son tautologias.}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \text{ es tautologia} &\iff \forall v : v \vDash (\alpha \wedge \beta) && \text{Definicion de } \wedge \\
&\iff \forall v : v \vDash \alpha \text{ y } v \vDash \beta && \text{Divido los para todo} \\
&\iff \forall v : v \vDash \alpha \text{ y } \forall v : v \vDash \beta && \text{Definicion de T} \\
&\iff \alpha \text{ y } \beta \text{ son tautologias}
\end{aligned}$$

Item c

$$(\alpha \vee \beta) \text{ es contradiccion sii } \alpha \text{ y } \beta \text{ son contradicciones.}$$

Observar que por definición del $\vee$ son equivalentes:

- $v \vDash (\alpha \vee \beta)$ si y solo si $v \vDash \alpha$ o $v \vDash \beta$
- $v \nvDash (\alpha \vee \beta)$ si y solo si $v \nvDash \alpha$ y $v \nvDash \beta$

Usando esto llegamos al sii que nos piden:

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) \text{ es una contradiccion} &\iff \forall v : v \nvDash (\alpha \vee \beta) && \text{Observacion anterior} \\
&\iff \forall v : v \nvDash \alpha \text{ y } v \nvDash \beta && \text{Divido el para todo} \\
&\iff \forall v : v \nvDash \alpha \text{ y } \forall v : v \nvDash \beta && \text{Definicion de contradiccion} \\
&\iff \alpha \text{ y } \beta \text{ son contradicciones}
\end{aligned}$$

Item d

$$(\alpha \to \beta) \text{ es una contradiccion sii } \alpha \text{ es una tautologia y } \beta \text{ es una contradiccion.}$$

Observar que por definición del $\vee$ son equivalentes:

- $v \vDash (\alpha \to \beta)$ si y solo si $v \nvDash \alpha$ o $v \vDash \beta$
- $v \nvDash (\alpha \to \beta)$ si y solo si $v \vDash \alpha$ y $v \nvDash \beta$

Usando esto llegamos al sii que nos piden:

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \beta) \text{ es una contradiccion} &\iff \forall v : v \nvDash (\alpha \to \beta) && \text{Definicion de contradiccion} \\
&\iff \forall v : v \vDash \alpha \text{ y } v \nvDash \beta && \text{Observacion anterior} \\
&\iff \forall v : v \vDash \alpha \text{ y } \forall v : v \nvDash \beta && \text{Divido el para todo} \\
&\iff \alpha \text{ es una tautologia y } \beta \text{ es una contradiccion} && \text{Definiciones de C y T}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Item a

Probar que si $a \wedge b$ es una contingencia, entonces a es una contingencia o b es una contingencia.

Demuestro la contra reciproca: Si ni a ni b son contingencias, entonces $(a \wedge b)$ tampoco es una contingencia.

Observacion: si a es C y b es T entonces $(a \wedge b)$ es C:

$$(\forall v : v \not\vDash a) \text{ y } (\forall v : v \vDash b) \Longrightarrow \forall v : v \not\vDash a \text{ y } v \vDash b \implies \forall v : v \not\vDash (a \wedge b).$$

De esta misma forma podemos probar las otras 3 combinaciones que hay, uso C y T para referirme a Contradicción y Tautología:

- Si a es C y b es C entonces $(a \wedge b)$ es C.
- Si a es C y b es T entonces $(a \wedge b)$ es C.
- Si a es T y b es C entonces $(a \wedge b)$ es C.
- Si a es T y b es T entonces $(a \wedge b)$ es T.

Vemos que para todos los casos donde a y b no son contingencias se cumple que $(a \wedge b)$ no es una contingencia.

Item b

Dadas dos valuaciones v y v', probar que si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in \text{Var}(\alpha)$ entonces $v \vDash \alpha$ sii $v' \vDash \alpha$.

Voy a probarlo por inducción estructural sobre la complejidad de la formula:

Puedo construir una formula de tres maneras:

1. Usando un simbolo proposicional
2. Negando $(\neg)$ una fórmula
3. Implicando $(\rightarrow)$ entre dos fórmulas

Caso Base (Caso 1)

Quiero ver que para todas las $\alpha \in \text{FORM}, \text{comp}(\alpha) = 0$ se cumple nuestra proposición.

$$\forall v, v' : \big((\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) : v(p_i) = v'(p_i)) \implies (v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha)\big)$$

La complejidad de α es 0 sii $\alpha \in \text{PROP}$. Supongo la hipotesis verdadera para ver que implica al antecedente.

$$\begin{aligned} v \vDash \alpha &\iff v(\alpha) = 1 && \alpha \in \text{PROP y Def de } \vDash \\ &\iff v'(\alpha) = 1 && (\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) = \{\alpha\} : v(p_i) = v'(p_i)) \\ &\iff v' \vDash \alpha && \alpha \in \text{PROP y Def de } \vDash \end{aligned}$$

Paso Inductivo (Casos 2 y 3)

Supongo que se cumple para todas las formulas α de complejidad menor o igual a n, quiero ver que se cumpla para las de complejidad n+1.

Lo supongo del caso menor o igual a n es:

$$\begin{aligned} &\forall \alpha \in \text{FORM}, \text{comp}(\alpha) \leq n : \\ &\qquad \forall v, v' : \big((\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) : v(p_i) = v'(p_i)) \implies (v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha)\big) \end{aligned}$$

Negación Supongo verdadera la hipotesis: $(\forall p_i \in \text{Var}(\neg\alpha) : v(p_i) = v'(p_i))$

Quiero ver que es verdadero: $(v \vDash \neg\alpha \iff v' \vDash \neg\alpha)$

Observaciones:

1. $\text{comp}(\neg\alpha) = 1 + \text{comp}(\alpha)$ entonces nuestro α entra en la HI
2. $\text{Var}(\neg\alpha) = \text{Var}(\alpha)$

Como suponemos verdaderas la hipotesis y el caso menor o igual a n se ve que usando las observaciones llegamos a que:

$$\begin{aligned}
&(\forall p_i \in \text{Var}(\neg\alpha) : v(p_i) = v'(p_i)) \land \text{Var}(\neg\alpha) = \text{Var}(\alpha) && \text{Reemplazando los Var}\\
&\implies (\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) : v(p_i) = v'(p_i)) && \text{Por HI}\\
&\implies (v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha)
\end{aligned}$$

Falta ver como el sii es verdadero usando que $(v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha)$:

$$\begin{aligned}
v \vDash \neg\alpha &\iff v \nvDash \alpha && \text{Def de } \vDash\\
&\iff v' \nvDash \alpha && \text{Observacion anterior}\\
&\iff v' \vDash \neg\alpha && \text{Def de } \vDash
\end{aligned}$$

Implica Supongo verdadera la hipotesis: $(\forall p_i \in \text{Var}(\alpha \to \beta) : v(p_i) = v'(p_i))$

Quiero ver que es verdadero: $(v \vDash (\alpha \to \beta) \iff v' \vDash (\alpha \to \beta))$

Observaciones:

1. $\text{comp}(\alpha \to \beta) = 1 + \text{comp}(\alpha) + \text{comp}(\beta)$ entonces nuestros α y β entran en la HI
2. $\text{Var}(\alpha \to \beta) = \text{Var}(\alpha) \cup \text{Var}(\beta)$

Como suponemos verdaderas la hipotesis y el caso menor o igual a n se ve que usando las observaciones llegamos a que:

$$\begin{aligned}
&(\forall p_i \in \text{Var}(\alpha \to \beta) : v(p_i) = v'(p_i)) && \text{Remplazando con Obs 2}\\
&\implies (\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) \cup \text{Var}(\beta) : v(p_i) = v'(p_i)) && \text{Separo la union}\\
&\implies (\forall p_i \in \text{Var}(\alpha) : v(p_i) = v'(p_i)) \land (\forall p_i \in \text{Var}(\beta) : v(p_i) = v'(p_i)) && \text{Por HI}\\
&\implies (v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha) \land (v \vDash \beta \iff v' \vDash \beta)
\end{aligned}$$

Falta ver como el sii es verdadero usando que $(v \vDash \alpha \iff v' \vDash \alpha) \land (v \vDash \beta \iff v' \vDash \beta)$:

$$\begin{aligned}
v \vDash (\alpha \to \beta) &\iff v \nvDash \alpha \lor v \vDash \beta && \text{Def de } \vDash\\
&\iff v' \nvDash \alpha \lor v' \vDash \beta && \text{Observacion anterior}\\
&\iff v' \vDash (\alpha \to \beta) && \text{Def de } \vDash
\end{aligned}$$