Practica Final AnMat2

Integrales

1. 1. Calcule las siguientes integrales e indique el método utilizado.

   a) $\displaystyle\int \sin(3x)\, e^{\cos(3x)}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4x}{(x+2)(x^2-1)}\, dx$

2. 1. Calcule las siguientes integrales e indique el método utilizado.

   a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, ln(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\, dx$

3. (a) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\, dx.$

4. (a) Halle la función g que cumple $g'(x) = \dfrac{(x+2)}{x^2+2x+5}$, y $g(-1) = 0.$

5. (a) Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a ella en el punto $(1, 1)$ y el eje x.

6. $$\int_1^2 \frac{2x+5}{\left(x^2+5x\right)^2} \mathrm{dx}$$

7. (a) Hallar la función h tal que $h'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$ y $h(1/2) = 2.$

Integrales Impropias

1. 2. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln 4x}{x^3} dx$$

2. 2. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln 2x}{x^5} dx$$

3. (b) Determine si la siguiente integral impropia es convergente o divergente $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{|x-3|^{3/2}}\, dx$.

4. (b) Determine si la siguiente integral impropia converge o diverge: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}dx}{x^3+1}$.

5. (a) Determine todos los valores de a para los cuales la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx$ converge. *Ayuda: analice por separado los casos* $a<0$, $a=0$ *y* $a>0$.

6. $$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^{4/5}} \mathrm{dx}$$

7. (b) Determinar si la siguiente integral impropia es convergente o divergente $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\, dx$.

Sucesiones

1. 3. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.

$$a_n = \cos\left(\frac{2}{n}\right)$$

2. 3. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

Series

1. (a) Determine si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n-2}}.$$

2. (a) Determine si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^2-1}$.

3. (a) Determine si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n-2)}$.

4. (a) Determinar si la siguiente serie converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}.$$

Series de potencias

1. 4. Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

2. 4. Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(x+1)^n}{2^{n+1}}.$$

3. (b) Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2x-1)^n}{n^3}$.

4. **EJERCICIO 5)** [2 puntos] Determine el radio e intervalo de convergencia de las siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \ln(n)}$$

Valores de convergencia Taylor:

1. 5. Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$ de $f(x) = \cos(\pi x)$. ¿Para qué valores de x converge la serie?

2. 5. Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = \pi$ de $f(x) = \sin(x-\pi)$. ¿Para qué valores de x converge la serie?

Orden n del polinomio de Taylor:

1. (a) Sea $f(t) = 3\sin(t)$. Determine el orden n del polinomio de Taylor de f, centrado en $a = 0$, que se necesita para aproximar $3\sin(0.1)$ con un error menor que 10^{-3}.

2. (b) Sea $f(t) = 2\cos(t)$. Determine el orden n del polinomio de Taylor de f, centrado en $a = 0$, que se necesita para aproximar $2\cos(0.1)$ con un error menor que 10^{-3}.

Estimar error Taylor:

1. (a) Considere la función $f(x) = sen(x)$ y sea $T_{5,0}(x)$ su polinomio de Taylor de grado 5 y centrado en $a = 0$. Estimar el error que se comete si se aproxima el número $sen(1)$ por el valor de $T_{5,0}(x)$ en $x = 1$.

2. **Ejercicio 3** *(20 pts.)*
   Sea $h(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Calcule el polinomio de Taylor de h de orden 3 y centrado en $a = 4$, $T_{3,4}(x)$.

   (b) Estime el error cometido al aproximar $h(x)$ por el valor $T_{3,4}(x)$, para $3 \leq x \leq 5$.

Dibujar imagen aproximada

1. (b) Considere la curva $\gamma(t) = (3\sin(t), t, 3\cos(t))$. Dibuje aproximadamente la imagen de γ para $t \geq 0$ y calcule el vector tangente a la curva en $t_0 = \pi/2$.

2. (b) Considere la curva $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$. Dibuje aproximadamente la imagen de γ para $t \geq 0$, calcule el vector tangente a la curva en $t_0 = \pi/4$ y obtenga la ecuación de la recta tangente a la imagen de γ en el punto $\gamma(t_0)$.

Dar ecuaciones y ver si un punto está en el plano

1. 6. Dar la ecuación vectorial y la ecuación normal del plano que contiene a los puntos $(1,2,3)$, $(0,-1,1)$ y $(1,-1,0)$. ¿Está el punto $(0,0,0)$ en el plano anterior?
2. 6. Dar la ecuación vectorial y la ecuación normal del plano que contiene a los puntos $(3,2,1)$, $(1,-1,-1)$ y $(0,1,2)$. ¿Está el punto $(0,0,0)$ en el plano anterior?
3.

Derivadas parciales

1. 7. Para la función

$$f(x, y, z) = \frac{xz^2}{y+z},$$

calcular todas las derivadas parciales de primer orden (o sea, f_x, f_y, f_z) y alguna derivada parcial de orden dos.

2. 7. Para la función

$$f(x, y, z) = \frac{x^2z^3}{y-z},$$

calcular todas las derivadas parciales de primer orden (o sea, f_x, f_y, f_z) y alguna derivada parcial de orden dos.

3. a) Calcule las derivadas parciales primeras de $f(x, y)$: $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Obtener ecuaciones

1. 8. Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de la siguiente función en el punto dado:

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \text{en } (3,\pi).$$

2. 8. Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de la siguiente función en el punto dado:

$$f(x,y) = \cos(xy), \qquad \text{en } (\pi, 1/2).$$

3. (a) Encuentre la ecuación del plano tangente al gráfico de la función $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^4 + 4$ en el punto $p_0 = (1,0,6)$.

4. Sea $f(x,y) = (3x + 4x^3)(y^2 + 2y)$.

[redacted]

(b) Halle la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $p = (-1,0,0)$, y encuentre la ecuación de la recta perpendicular al gráfico de f que pasa por p.

5. **Ejercicio 4** *(20 pts.)*
Sea $g(x,y) = 2x^2 - 3y^2$.

(a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de la función g en el punto $(1,1)$.

(b) Halle la ecuación de la recta perpendicular al gráfico de la función g en el punto $(1,1,-1)$.

6. (a) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de $z = \text{sen}(xy)$ si $x = \pi/3$, $y = -1$. Además, dar el vector normal al plano hallado.

Encontrar puntos criticos

1. Sea $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2 + 4y$.

   (a) Encuentre todos los puntos críticos de la función f y determine cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

2. Sea $f(x,y) = (3x + 4x^3)(y^2 + 2y)$.

   (a) Encuentre todos los puntos críticos de la función f y determine cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

3. Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

   (a) Encuentre todos los puntos críticos de la función f y determine cuales son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

4. Encuentre y clasifique los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y.$$

5. **Ejercicio 3** *(20 pts.)*

   (a) Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios de la función f.

Regla de la cadena

1. Sea $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2 + 4y$.

   [redacted]

   (b) Considere la función $g(t) = f(1 + t^2 u_1, 1 + t u_2)$, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario. Use la regla de la cadena y encuentre la dirección $\mathbf{u}$ para la cual la derivada $g'(0)$ es máxima.

2. (a) Sea $h(x, y)$ una función cuyas derivadas parciales $h_x, h_y, h_{xx}, h_{xy} = h_{yx}, h_{yy}$ existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$. Sea $z(t) = h(t, e^t)$. Use la regla de la cadena para calcular $z''(t)$.

3. (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales de orden 1 y 2 existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Sea $z(t) = f(t, \mathrm{e}^t)$. Use la Regla de la cadena para calcular $z''(t)$.

Encontrar el volumen del solido

1.

Ejercicio 5 *(20 pts.)*

(a) Encuentre la ecuación del plano tangente al gráfico de la función $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^4 + 4$ en el punto $p_0 = (1, 0, 6)$.

(b) Encuentre el volumen del sólido que está debajo del plano hallado en el inciso (a) y arriba del rectángulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$.

2.

(b) Encuentre el volumen del sólido que está debajo del gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1$ y arriba del rectángulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$.

Integral doble

1. (b) Calcular la integral doble $\int\int_T xy\, dA$, donde T es el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

Encontrar vectores unitarios

1. (b) Encuentre el o los vectores unitarios $\mathbf{u}$ tales que la derivada direccional de f en el punto $(0, 2)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ tiene el valor 1.

Hallar direccion de maximo crecimiento

EJERCICIO 2) [2 puntos] Sea $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x+y}$.

b) ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de $f(x,y)$ en $(1,1)$?

1.
2.