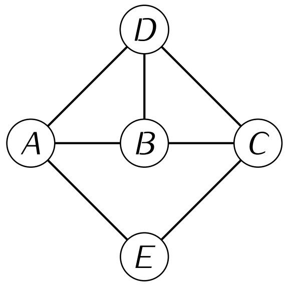
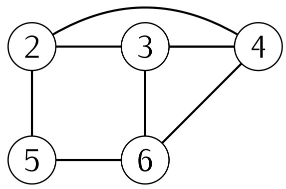
Práctico 5
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

(1) Escribir las listas de adyacencia de los siguientes grafos.

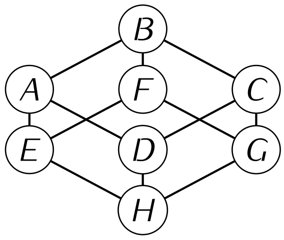
(a)



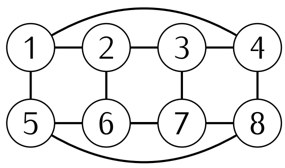
(b)



(c)



(d)



(2) Dibujar los grafos correspondientes a las siguientes listas de adyacencias.

(a)

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	b
e	e	e	e	c
				d

(b)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	
4	4	4	3	
5				

(c)

1	2	3	4	5	6	7	8
6	3	2	5	4	1	1	6
7	7		6		4	2	7
					8	8	

(d)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	4
4	4	4	3	
5			5	

(e)

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	c
e		e		

(f)

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	e	e	c
e				d

(g)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	7	2	2	1	3	3	1	8	7	6
9	5	8			12	11	10	12	11	10	9

(3) Un *grafo planar* es un grafo para el que *existe* un dibujo del grafo en el plano tal que no hay ningún cruce de aristas. Por ejemplo, los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) son planares.

Un grafo planar divide al plano en *regiones* delimitadas por aristas, por ejemplo el grafo (a) del ejercicio (1) determina 4 regiones:

- la delimitada por las aristas AB, BD y DA,
- la delimitada por BC, CD y DB,
- la delimitada por AB, BC, CE y EA, y
- la región exterior.

Para todo grafo planar vale el famoso *Teorema de Euler para poliedros* que dice

$$C + V - A = 2, \tag{*}$$

donde C es el número de regiones (en el caso de poliedros, caras), A es el número de aristas y V es el número de vértices.

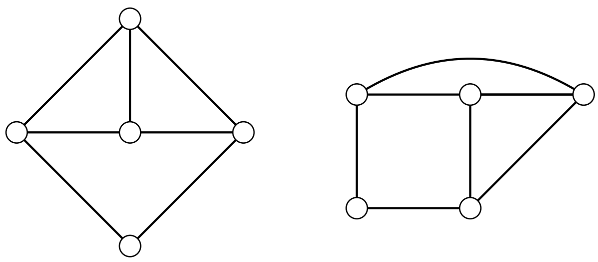
Comprobar que los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) satisfacen la fórmula (*).

(4) Demostrar que el grafo (d) del ejercicio (2) es planar y comprobar la fórmula de Euler.

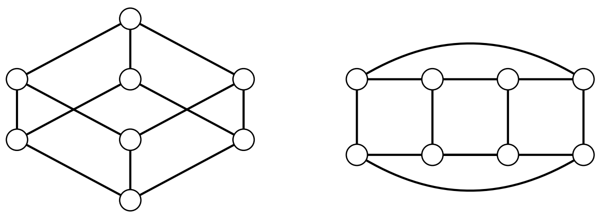
(5) ¿Cuántas aristas tiene el grafo completo K_n? ¿Para qué valores de n se puede afirmar que K_n es planar?

(6) Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos, especificando un isomorfismo en cada caso.

(a)



(b)



(7) Encuentre un isomorfismo entre los grafos dados por las siguientes listas (ambas listas especifican versiones de un famoso grafo conocido como *grafo de Petersen*).

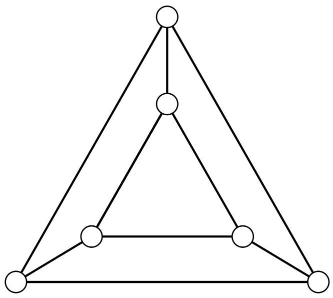
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h

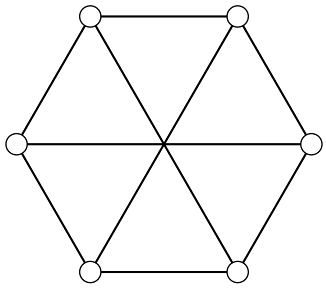
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	0	1	0	2	6
5	2	3	4	5	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

(8) (a) Encuentre todos los grafos de 5 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí.

(b) Encuentre todos los grafos de 4 vértices y 3 aristas no isomorfos entre sí.

(9) Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos.





(10) Determinar la valencia máxima y la valencia mínima de cada grafo del ejercicio (1). Decir cual grafo es regular.

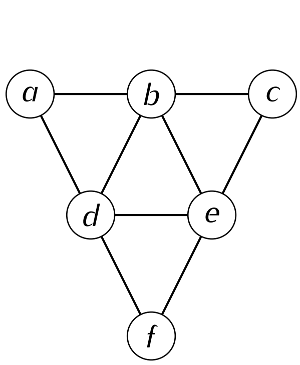
(11) Escribir la lista de valencias de cada grafo del ejercicio (2). Es decir, escribir todos los valores que toman las valencias en cada grafo (sin repetir).

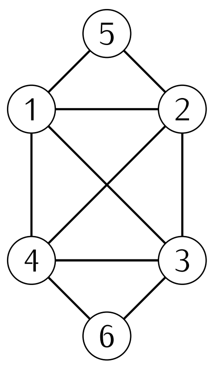
(12) Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente las valencias indicadas o demuestre que tal grafo no existe.

(a) 3, 3, 1, 1 (b) 3, 2, 2, 1 (c) 3, 3, 2, 2, 1, 1

(d) 4, 1, 1, 1, 1 (e) 7, 3, 3, 3, 2, 2 (f) 4, 1, 1, 1

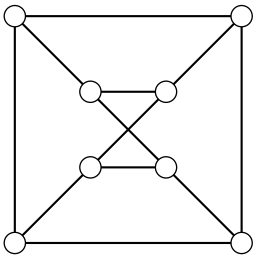
(13) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



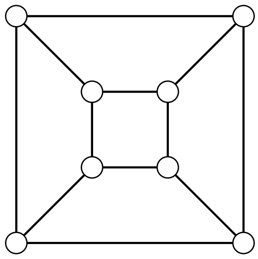


(14) Encuentre una función del grafo G al H que preserve valencias. ¿Es un isomorfismo?.

G :



H :



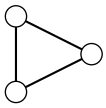
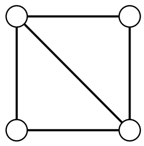
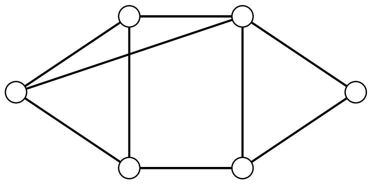
(15) Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, y sea $\alpha : V \mapsto V'$ una función biyectiva tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v))\ \ \forall\ v \in V$.

(a) ¿Puede afirmar que α es un isomorfismo?.

(b) ¿Puede afirmarlo si $|V| = 3$ ó 4?.

(16) Sea $G = (V, E)$ un grafo. El *grafo complemento* de G es $\overline{G} = \left(V, \overline{E}\right)$, donde $\overline{E}$ son todos los 2-subconjuntos de V que no están en E. Es decir, el grafo complemento tiene los mismos vértices que el grafo original y todas las aristas que le faltan para ser un grafo completo. Un propiedad importante del grafo complemento es: *Si los grafos G y H son isomorfos entonces $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfos*.

(a) Halle el complemento de los siguientes grafos:

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

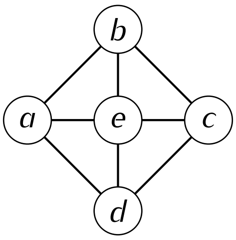
(b) Si $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\delta(v_i) = d_i\ \ \forall\ \ i = 1, \ldots, n$, calcule las valencias del grafo complemento.

(c) Pruebe que los grafos del ejercicio (9) no son isomorfos usando los grafos complemento.

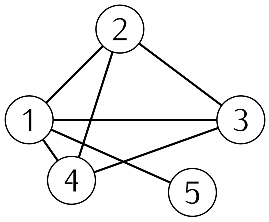
(17) Pruebe que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.

(18) Dados los siguientes grafos:

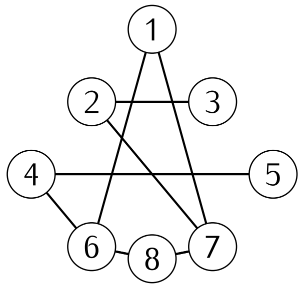
(1)



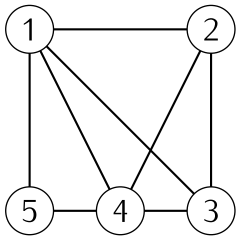
(2)



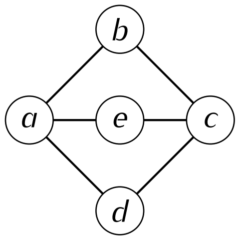
(3)



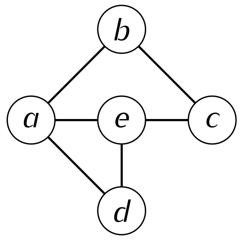
(4)



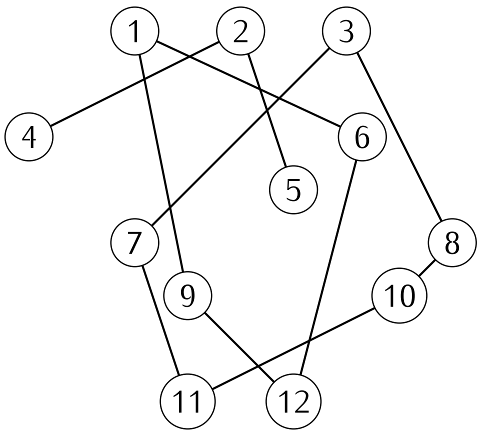
(5)



(6)



(7)



(a) Determine en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.

(b) Para el grafo (1), dé todos los caminos que unen a con b.

(c) Dé caminatas eulerianas en los grafos (4), (5) y (6).

(d) Para (2) y (3), decir si existen ciclos hamiltonianos.

(e) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos:
(i) (4) y (2),
(ii) (5) y (6),
(iii) (5) y (1).

(f) Halle las componentes conexas del grafo (7).

(19) Dado el siguiente grafo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

encuentre un ciclo hamiltoniano (si existe). Determine si existe una caminata euleriana, y en caso de ser así, encuentre una.

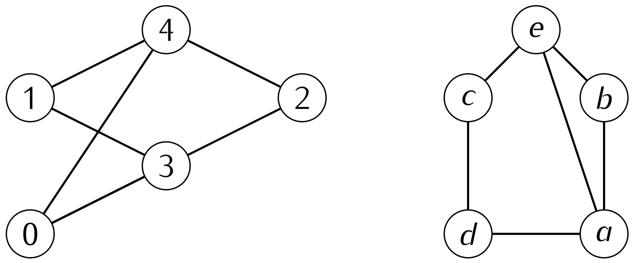
(20) Un ratón intenta comer un $3 \times 3 \times 3$ cubo de queso. Él comienza en una esquina y come un subcubo de $1 \times 1 \times 1$, para luego pasar a un subcubo adyacente. ¿Podrá el ratón terminar de comer el queso en el centro?

(21) Dé todos los árboles de 5 vértices no isomorfos.

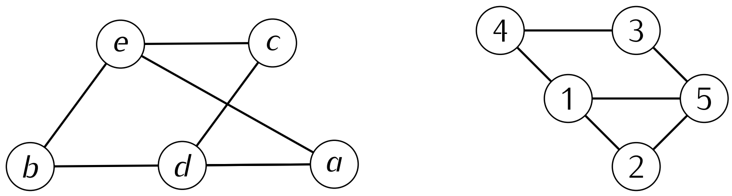
§ Ejercicios de repaso.

(22) Probar que los siguientes pares de grafos no son isomorfos.

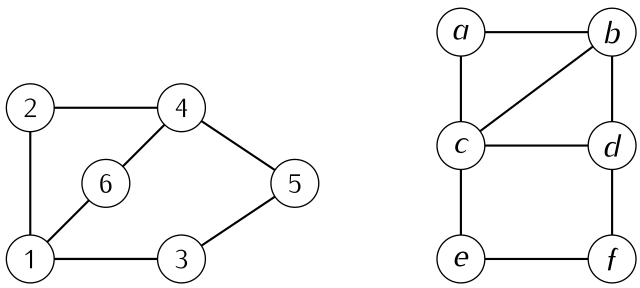
a)



b)

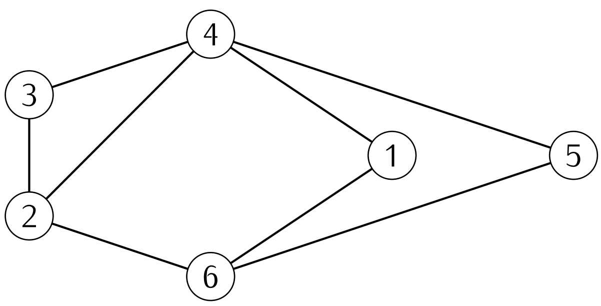


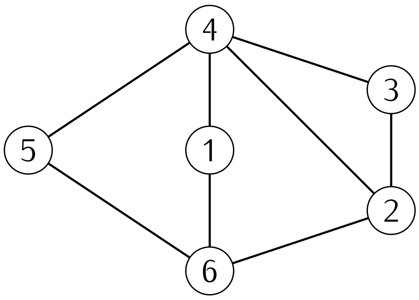
c)

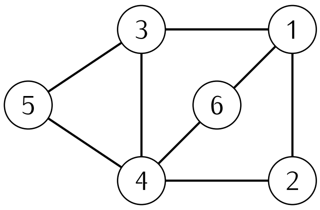


(23) Encontrar una caminata euleriana en cada uno de los siguientes grafos.

a)



b) 

c) 

(24) En el grafo de la derecha del ejercicio (13), encontrar un *circuito euleriano*, es decir una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice.