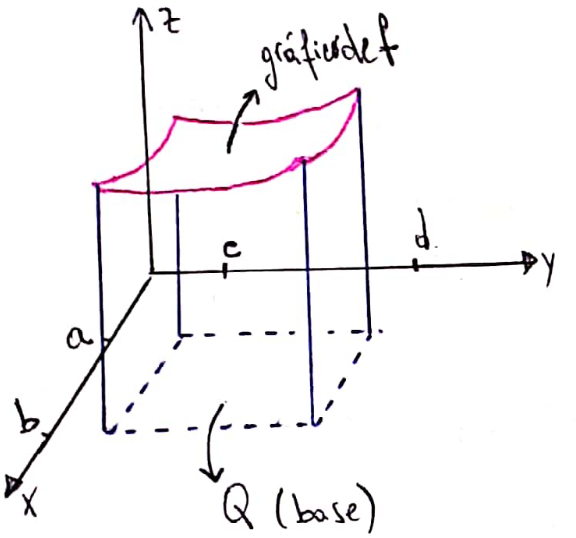
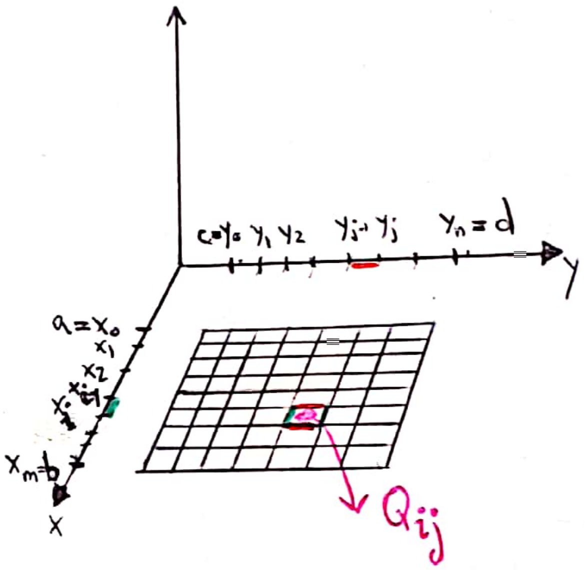
Integrales dobles en rectángulos

- Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f: Q \to \mathbb{R}$ no negativa $(f(x,y) \geq 0)$

¿Cuál es el volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q?





- Para calcular el volumen haremos un procedimiento análogo al que realizamos para cálcular el área bajo una curva.
- Dadas particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, es decir

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad y \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

formamos una partición del rectángulo Q de la siguiente manera:

definimos $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $\begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$

En total hay $m.n$ subrectángulos Q_{ij} y su unión cubre a Q.

- Si llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, tenemos que el área de Q_{ij} es $\Delta x_i . \Delta x_j$

- Luego, en cada Q_{ij} elegimos un pto (x_{ij}, y_{ij}) y consideramos la (doble) suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$ → suma de los volúmenes de los paralelepípedos de base Q_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$.

- El volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q es el límite de este proceso.

<u>Definición</u>: dado una partición $P = \{Q_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ de un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$ definimos la norma de la partición P como la mayor longitud de las diagonales de los subrectángulos Q_{ij} y la denotamos por $\|P\|$.

<u>Definición</u>: Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f: Q \to \mathbb{R}$, la integral doble de f sobre el rectángulo Q es

$$\iint_Q f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$ si este límite existe.

En tal caso, f se dice integrable sobre Q.

<u>Observaciones</u>:

1. En la def. de int. doble no pedimos $f \geq 0$. La def. vale también si $f \leq 0$ o f cambia de signo.

2. Se puede demostrar que si f es continua en $Q \Rightarrow f$ es integrable sobre Q.
Más aún, si f es acotada y continua en Q, salvo una cantidad finita de curvas suaves entonces f es integrable sobre Q (resultado análogo a de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

3. Si $f \geq 0$ e integrable sobre $Q \Rightarrow \iint_Q f(x,y)\,dA =$ volumen bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo Q

4. A veces denotamos $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$ en lugar de $\iint_Q f(x,y)\,dA$.

Integrales iteradas

- Al igual que para el caso de funciones de una variable, **no resulta** muy fácil **calcular** integrales dobles a partir de la definición (Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ utilizamos el TFC)
- Veremos que, en muchos casos, el cálculo de integrales dobles se reduce al cálculo de integrales de funciones de una variable. En efecto, sean $Q=[a,b]\times[c,d]$ y $f:Q\to\mathbb{R}$. Notemos que si fijamos una de las dos variables, por ejemplo y, obtenemos una función de la otra variable y entonces podemos integrarla como ya sabemos. O sea, para cada $y\in[c,d]$ hacemos $\int_a^b f(x,y)\,\underline{dx}$ → esto define una función de y que podemos volver a integrar obteniendo $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\underline{dy}$ → esta integral se llama <u>integral iterada de f</u>.

Observaciones:

1. Podríamos haber hecho el proceso en el otro orden obteniendo $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$, lo que nos daría la "otra" integral iterada de f.
2. Usualmente se omiten los paréntesis y se escribe $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ ó $\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_0^2\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx\,dy$.

- Primero debemos integrar $f(x,y)=x^2y^3$ con respecto a x en el intervalo $[-1,1]$.

Entonces, $\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx = \underbrace{y^3}_{\text{"cte"}}\int_{-1}^1 x^2\,\underline{dx} = y^3\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = y^3\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) = y^3\cdot\frac{2}{3}$.

Por lo tanto, $\int_0^2\underbrace{\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx}_{\frac{2}{3}y^3}\,dy = \int_0^2\frac{2}{3}y^3\,dy = \frac{2}{3}\,\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right) = \frac{8}{3}$

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} x^2y^3\,dy\,dx$.

- En este caso primero debemos integrar $f(x,y)=x^2y^3$ con respecto a y en $[0,2]$.

Luego, $\int_0^2 x^2y^3\,dy = x^2\int_0^2 y^3\,dy = x^2\,\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = x^2\left(\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right) = x^2 4$.

Finalmente, $\int_{-1}^{1}\int_0^2 x^2y^3\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} 4x^2\,dx = 4\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{(-1)}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

- Notemos que las integrales iteradas dieron el mismo resultado. Esta situación es bastante general según el siguiente teorema.

Teorema de Fubini: si f es continua en el rectángulo $Q=[a,b]\times[c,d]$, entonces

$$\iint_Q f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy .$$

Observación: el teorema anterior también vale si f es acotada en Q, discontinua sólo en un nro. finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

Ejemplo: calcule el volumen del sólido debajo del plano $z=4-x-y$ y arriba del rectángulo definido por $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 2$.

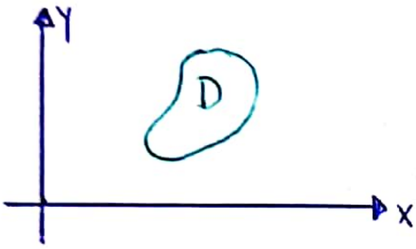
- Sea $f(x,y)=4-x-y$. Notemos que $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in Q$ y entonces lo que se nos pide es calcular $\iint_Q f(x,y)\,dA$ $\rightarrow$ para esto usaremos Fubini.

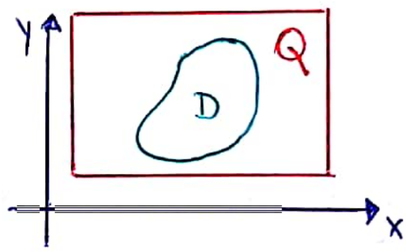
$$\iint_Q (4-x-y)\,dA = \int_1^2\int_0^1 (4-x-y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^1 dy = \int_1^2\left(4-\frac{1}{2}-y\right)dy = \left(4y-\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2.$$

- Por lo tanto, el volumen del sólido bajo el gráfico de f y arriba de Q es 2.

Integrales dobles en regiones generales

- Sea D una región acotada en $\mathbb{R}^2$, o sea D está contenida en algún rectángulo Q con lados paralelos a los ejes cartesianos.





- Dada f definida en D queremos definir la integral de f sobre la región D. Para esto vamos a extender f al rectángulo Q de la siguiente manera:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \cap Q \\ 0 & \text{si } (x,y) \in D^c \cap Q \end{cases}$$

Definición: decimos que f es integrable sobre D si F es integrable sobre Q y en ese caso definimos

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_Q F(x,y)\, dA .$$

Observaciones:

1. Como F vale cero fuera de D, esta región no contribuye a la integral y por lo tanto la definición es independiente del rectángulo Q elegido.
2. Si $f \geq 0$ en D, entonces la integral se puede interpretar como el volumen del sólido debajo del gráfico de f y arriba de la región D.

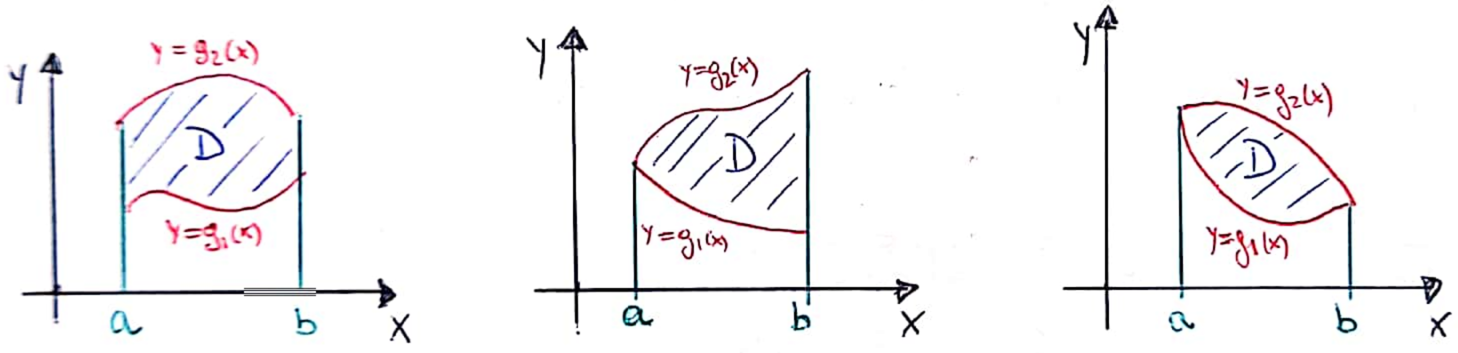
- Las integrales dobles se pueden calcular con facilidad para cierto tipo de regiones D "bastante" generales.

Definición: una región D se denomina

(i) región de tipo I (x-simple) si es de la forma

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ , \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

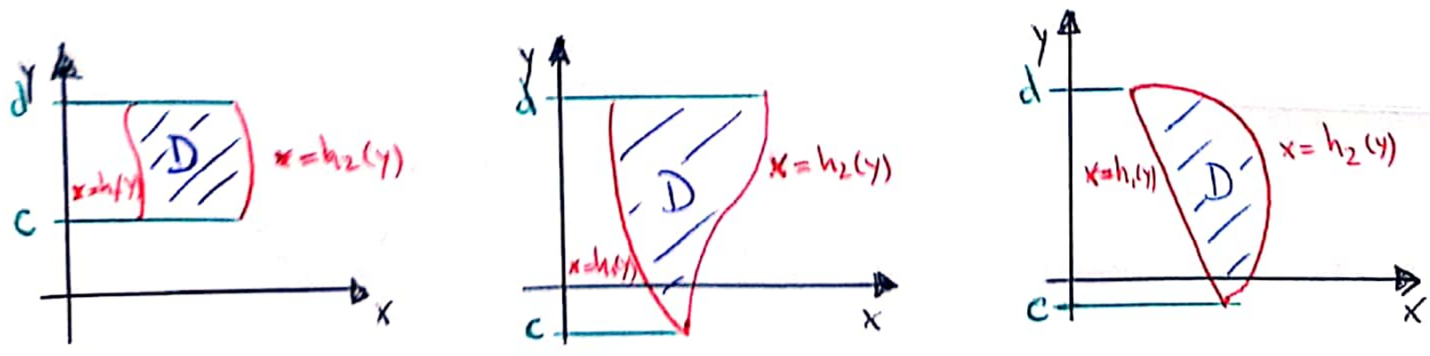
con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$. (O sea, está entre la gráfica de dos func. continuas)



(ii) región de tipo II (y-simple) si es de la forma

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ , \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

con h_1 y h_2 funciones continuas en $[c,d]$.



Observación: existen regiones de tipo I y II simultaneamente, por ejemplo un círculo, un rectángulo, etc.

- ¿Cómo calcular $\iint_D f(x,y)\,dA$ si D es de tipo I?

- Tomamos $Q=[a,b]\times[c,d]$ tal que $D\subset Q$ y definimos F como antes. Luego, por el Teo. de Fubini tenemos que

$$\iint_Q F(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d F(x,y)\,dy\,dx\,.$$

- Ahora, como $F(x,y)=0$ fuera de D, entonces para cada x fijo tal que $x\in[a,b]$ tenemos que $F(x,y)=0$ si $y<g_1(x)$ o si $y>g_2(x)$. Por lo tanto para esos valores de x tenemos que $\int_c^d F(x,y)\,dy=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy$.

- Luego,

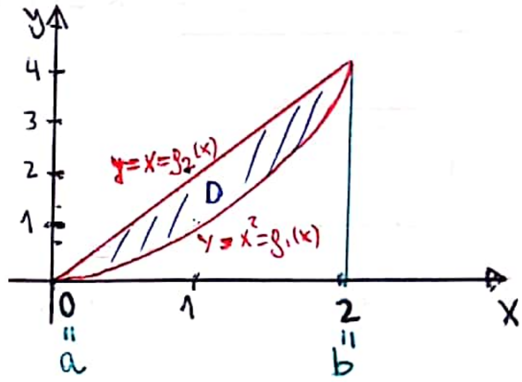
$$\iint_D f(x,y)\,dA \underset{\text{definición}}{=} \iint_Q F(x,y)\,dA \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\!\!\int_c^d F(x,y)\,dy\,dx \overset{\text{Obs.}}{=} \int_a^b\!\!\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx \underset{F(x,y)=f(x,y)\text{ en }D}{=} \int_a^b\!\!\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Conclusión: la integral de una función f en una región de tipo I, o sea

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}\,,\ \text{es}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx\,.\qquad \left(\begin{array}{c}\text{Integral de } f\\ \text{sobre } D \text{ de}\\ \text{tipo I}\end{array}\right)$$

Ejemplo: Calcular $\iint_D (x-2y)\, dA$, donde D es la región del primer cuadrante comprendida entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=2x$.



- Notemos que la región D es de tipo I con $g_1(x)=x^2$ y $g_2(x)=2x$.

Estas curvas se intersecan cuando $x^2=2x$, o sea cuando $x=0$ o $x=2$.

Así tenemos que $a=0$ y $b=2$.

Luego,

$$\iint_D (x-2y)\, dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x} (x-2y)\, dy\, dx = \int_0^2 (xy-y^2)\Big|_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x^3-4x^2-x^3+x^4)\, dx$$

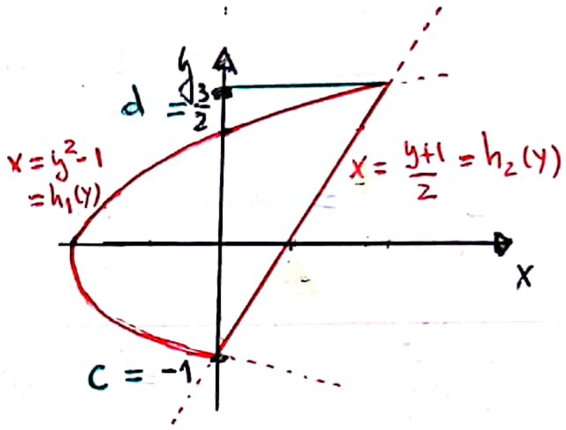
$$= \int_0^2 (x^4+x^3-4x^2)\, dx = \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^5}{5}+\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{3} = -\frac{2^4}{60} \blacksquare$$

- ¿Cómo calcular $\iint_D f(x,y)\, dA$ si D es una región de tipo II?

- Procediendo de manera similar, se puede ver que si f está definida en una región D de tipo II, es decir $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\leq y\leq d,\ h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\}$ entonces

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy \,. \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Integral de } f\\ \text{sobre } D \text{ de}\\ \text{tipo II}\end{array}\right)$$

Ejemplo: Calcular el área A de la región acotada por las curvas $y = 2x-1$ y $x = y^2 - 1$.



• **Solución:** observemos que la región acotada por las curvas

$y = 2x+1 \quad \left(\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}\right)$ y $x = y^2 - 1$

definen una región de tipo II.

• Para averiguar los valores c y d debemos ver dónde se cortan ambas curvas o sea cuando $\frac{y+1}{2} = y^2 - 1$. Esto sucede si $y = -1$ o $y = \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, $c = -1$ y $d = 3/2$.

• Finalmente, para calcular el área debemos integrar sobre D la función identicamente 1, o sea $f(x,y) \equiv 1$. Así,

$$A = \iint_D 1\, dA = \int_{-1}^{3/2} \int_{y^2-1}^{\frac{y+1}{2}} dx\, dy = \int_{-1}^{3/2} \left(\frac{y+1}{2} - (y^2-1)\right) dy = \int_{-1}^{3/2} \left(-y^2 + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right) dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3/2} = \frac{125}{48}.$$

Conclusión: el área es $A = \frac{125}{48}$ $(\geq 0 \checkmark)$.

Propiedades de la integral doble.

- Sea D una región y f y g funciones tales que $\iint_D f(x,y)\,dA$ y $\iint_D g(x,y)\,dA$ existen. Entonces, las siguientes son válidas:

1. $\iint_D 1\,dA = A(D)$ (área de la región D).

2. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$.

3. $\iint c \cdot f(x,y)\,dA = c \iint f(x,y)\,dA$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

4. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$.

5. Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se superponen excepto quizás en sus fronteras, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$