Bachmann Lautaro 44.390.167

Ejercicio 1 *(3.5 pts.)*

(a) *(1.75 Pts.)* Determinar el polinomio de Taylor de orden $n = 3$ y centrado en $a = 2$ de la función $f(x) = \ln(x)$. Utilizar el polinomio calculado para dar un valor aproximado de $\ln(2.5)$ *(basta con dejar expresada la fórmula)* y estimar el error que se comete con dicha aproximación.

(b) *(1.75 Pts.)* Dar el dominio de la función vectorial $r(t) = (\ln(1-t^2), \sqrt{1+t}, -e^{2t})$ y determinar el vector tangente a la imagen de r para $t = 0$.

Primero procederemos a calcular las derivadas de f hasta el 4to orden para luego evaluar cada una de ellas en 2.

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f(2) = \ln(2)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(2) = \frac{-1}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(2) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{8}} = \frac{1}{4}$$
$$f''''(x) = 2 \cdot -3 \cdot x^{-4} = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f''''(2) = \frac{6}{2^4} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}} = \frac{3}{8}$$

Teniendo en cuenta los anteriores cálculos procedamos a realizar el polinomio de Taylor

$$T_{3,2}(x) = \ln(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!} \cdot (x-2)^3 + \frac{f''''(2)}{4!} \cdot (x-2)^4$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x-2)^3$$

Ahora procedemos a evaluar el polinomio en $2,5 = 5/2$

$$T_{3,2}(2,5) = \ln(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}-2\right)^3$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{1} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

↓

Bachmann Lautaro 44.390.167

$$= \ln(2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192}$$

$$= \ln(2) + \frac{48-6+1}{192} = \ln(2)\ \frac{43}{192}$$

$$\therefore T_{3,2}(2,5) = \ln(2)\ \frac{43}{192}$$

Ahora procederemos a estimar el error mediante la formula de Lagrange.

$$R_{3,2}(x) = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (x-2)^4 \right|$$

$$\Rightarrow R_{3,2}(2,5) = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (2,5-2)^4 \right| = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (0,5)^4 \right| \quad \text{con } t \in (2, 2.5)$$

Ahora procederemos a hallar un valor para t

$$|f''''(t)| = \left| \frac{-6}{x^4} \right|$$

$f''''(t)$ es una función decreciente, por lo cual es posible acotarla, teniendo en cuenta que $t \in (2, 2.5)$, tenemos que $\frac{6}{t^4} < \frac{6}{2^4}$.

$$\therefore R_{3,2}(2,5) < \left| \frac{f''''(2)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right| \Rightarrow R_{3,2}(2,5) < \left| \frac{-6}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \right|$$

$$\Rightarrow R_{3,2}(2,5) < \left| \frac{-6}{2^8 \cdot 4!} \right| \Rightarrow R_{3,2}(2,5) < \frac{6}{2^8 \cdot 4!}$$

Por ende, el error que se comete al aproximar $\ln(2,5)$ con $T_{3,2}(2,5)$ es menor a $\frac{6}{2^8 \cdot 4!}$.

Bachmann Lautaro 44.390.167

b) Como el el dominio de una función vectorial está formado por la intersección de los dominios de las funciones coordenadas, procedamos a calcular dichos dominios.

Sean $f_1 = \ln(1-t^2)$, $f_2 = \sqrt{1+t}$, $f_3 = -e^{2t}$, tenemos lo siguiente:

$Dom(f_1) = 1-t^2 > 0 = -t^2 > -1 = t^2 < 1 = -1 < t < 1 = (-1,1)$

$Dom(f_2) = 1+t \geq 0 = t \geq -1 = [-1,\infty)$

$Dom(f_3) = (-\infty, \infty)$

∴ tenemos que:

$Dom(f) = \bigcap_{i=1}^{n} Dom(f_i) = Dom(f_1) \cap Dom(f_2) \cap Dom(f_3)$

$= (-1,1) \cap [-1,\infty) \cap (-\infty,\infty) = (-1,1)$

Por ende, tenemos que $Dom(f) = (-1,1)$

Ahora para determinar el vector tangente a la imagen de r cuando $t=0$, calculemos $r'(t)$ derivando "coordenada a coordenada" y evaluemosla en 0.

$f_1' = \ln'(1-t^2) . (1-x^2)' = \frac{1}{1-t^2} . -2x = \frac{-2x}{1-t^2}$

$f_2' = ((1+t)^{1/2})' . (1+x)' = \frac{1}{2} . (1+x)^{-1/2} . 1 = \frac{(1+x)^{-1/2}}{2}$

$f_3' = (e^{2x})' . (2x)' = -e^{2x} . 2$

$\therefore \quad r'(t) = \left(\frac{-2t}{1-t^2}, \frac{(1+t)^{-1/2}}{2}, -2 . e^{2t} \right)$

$\Rightarrow r'(0) = \left(\frac{-2.0}{1-0}, \frac{(1+0)^{-1/2}}{2}, -2 . e^{2.0} \right) = \left(0, \frac{1}{2}, -2 \right)$

Por ende, el vector tangente a la imagen de r cuando $t=0$ es $(0, 1/2, -2)$.

Bachmann Lautaro 44.390.167

Ejercicio 2 *(3 pts.)*

a) *(1.5 Pts.)* Determinar el plano horizontal que es tangente a la superficie dada por $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ y cuál es el punto de tangencia $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$.

(Ayuda: un plano es horizontal sólo si su ecuación es de la forma $z = k$, para alguna constante k. Pensar entonces qué deben satisfacer $z_x(x_0, y_0)$ y $z_y(x_0, y_0)$)

(b) *(1.5 Pts.)* Sea $z = \operatorname{sen}(x^2 y)$, donde $x = st^2$ e $y = s^2 + 1/t$. Utilizar la Regla de la cadena para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}(s,t)$ y $\frac{\partial z}{\partial t}(s,t)$ y evalúelas en el punto $(s,t) = (1,1)$.

a) Para determinar el plano tangente horizontal a la funcion procederemos a calcular las derivadas parciales de la misma.

$$f(x,y) = z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

$$f_x(x,y) = (x^2)' - (4xy)' - (2y^2)' + (12x)' - (12y)' - (1)' = 2x - 4y - 0 + 12 - 0 - 0$$
$$= 2x - 4y + 12$$

$$f_y(x,y) = (x^2)' - (4xy)' - (2y^2)' + (12x)' - (12y)' - (1)' = 0 - 4x - 4y + 0 - 12 - 0$$
$$= -4x - 4y - 12$$

Ahora veamos en que punto se anulan f_x y f_y, para luego reemplazar dicho punto en una ecuacion vectorial, de manera que se cumpla que $z = k$, siendo k una constante.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 12 = 0 \\ 4x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow 2x = 4y - 12 \Rightarrow x = 2y - 6$$
$$x = 2y - 6 \Rightarrow -4(2y - 6) - 4y - 12 = 0 \Rightarrow -8y + 24 - 4y - 12 = 0$$
$$\Rightarrow -12y + 12 = 0 \Rightarrow -12y = -12 \Rightarrow y = \frac{-12}{-12} \Rightarrow y = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2.1 - 6 \Rightarrow x = -4$$

Bachmann Lautaro 44.390.167

Ahora procedamos a realizar la ecuacion vectorial teniendo en cuenta el punto (-4,1)

$$(x,y,z) = (-4,1,f(-4,1)) + t.(1,0,f_x(-4,1)) + r.(0,1,f_y(-4,1)) \text{, con } t,r \in \mathbb{R}$$
$$= (-4,1,(-4)^2-4\cdot 4.1-2.1^2+12.-4-12.1-1) + (t,0,0) + (0,r,0)$$
$$= (-4,1,16+16-2-48-12-1) + (t,0,0) + (0,r,0)$$
$$= (-4,1,-31) + (t,0,0) + (0,r,0) = (-4+t,1+r,-31)$$

Como ya lo vimos previamente al calcular $z = f(x,y)$ en el punto $(-4,1)$ el resultado es una constante $K=-31$, es decir, se cumple que $z = K = -31$ y por lo tanto z es un plano horizontal.

Por ende, el plano horizontal que es tangente a la superficie dada por $f(x,y)$ es $(4+t,1+r,-31)$.

Bachmann Lautaro 44.390.167

Ejercicio 3 *(3.5 pts.)*

(a) *(1.75 Pts.)* Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(b) *(1.75 Pts.)* Calcular el volumen del sólido determinado por la función $z = 4 - y^2$ y con dominio dado por $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2$.
(*Ayuda: para interpretar el resultado graficar la función* z).

a) Primero, procedamos a calcular las derivadas parciales de la funcion para luego calcular el gradiente.

$$f_x(x,y) = (x^3)' + (y^3)' - (3xy)' = 3x^2 + 0 - y.(3x)' = 3x^2 - 3y$$

$$f_y(x,y) = (x^3)' + (y^3)' - (3xy)' = 0 + 3.y^2 - x.(3.y)' = 3y^2 - 3x$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y \, , 3y^2 - 3x)$$

Ahora para determinar los puntos criticos veamos para que valores de x e y $\nabla f(x,y) = (0,0)$, es decir $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$, para ello armemos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3y \Rightarrow x^2 = y$$
$$\Rightarrow 3(x^2) - 3x \overset{2}{=} 0 \Rightarrow 3x^4 - 3x = 0 \Rightarrow 3x.(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow 3.0.(0-1) = 0 \Rightarrow 0.(-1) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \therefore x_1 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow 3x.(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow 3.1.(1^3 - 1) = 0 \Rightarrow 3.0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \therefore x_2 = 1$$

Ahora veamos cual es el valor de y en cada caso.

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 = y \Rightarrow 0 = y$$
$$x = 1 \Rightarrow 1^2 = y \Rightarrow 1 = y$$

Por ende, los puntos criticos son $(0,0)$ y $(1,1)$

Bachmann Lautaro 44.390.167

Ahora procedemos a utilizar el test de la derivada segunda. Para ello calculemos $D = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$ para cada punto critico encontrado.

Primero que nada calculemos las derivadas segundas:

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \Rightarrow f_{xx} = (3x^2)' - (3.y)' = 3(x^2)' - 0 = 3.2x = 6x$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow f_{yy} = (3y^2)' - (3x)' = 6y - 0 = 6y$

$f_{xy}(x,y) = (3x^2)' - (3.y)' = 0 - 3 = -3$

$\therefore D(x,y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 6x \cdot 6y - 9$

Ahora evaluemos D en los puntos criticos:

$D_1(0,0) = 6.0 \cdot 6.0 - 9 = -9 \Rightarrow$

$D_2(1,1) = 6.1 \cdot 6.1 - 9 = 36 - 9 = 27$

Por ende, teniendo en cuenta el test de la derivada segunda, tenemos lo siguiente:

$D_1 < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto silla en $(0,0)$

$D_2 > 0$ y $f_{xx}(1,1) > 0 \Rightarrow f$ tiene un minimo local en $(1,1)$

b) Para calcular el volumen del solido determinado por la funcion $z = 4 - y^2$ procedemos a aplicar el teorema de fubini, teniendo en cuenta que el dominio de la funcion está dado por $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2$.

$$\int_0^3 \int_0^2 4 - y^2 \, dy \, dx = \int_0^3 4y - \frac{y}{3} \Big|_0^2 dx = \int_0^3 \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.0 - \frac{0^3}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^3 8 - \frac{8}{3} - 0 \, dx = \int_0^3 \frac{16}{3} dx = \frac{16}{3} x \Big|_0^3$$

$$= \frac{16.\cancel{3}}{\cancel{3}} - \frac{16.0}{3} = 16 - 0 = 16$$

Por ende, el volumen del solido determinado por la funcion $z = 4 - y^2$ es 16