Carrera:

Nombre y apellido: Luca Oliva

No se permite el uso de celular, calculadora, o similar, durante la resolución del parcial.

1. (30 pts.) Sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por:

$$W_1 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : u + v = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 0, 0) \rangle.$$

10 (a) Dar una base del subespacio $W_1 \cap W_2$ y calcular su dimensión.

2 (b) Dar una base del subespacio $W_1 + W_2$ y calcular su dimensión.

0 (c) Decidir si el vector $(1, 1, -2, 1, 1)$ pertenece a $W_1 + W_2$.

2. (30 pts.) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

20 pts. (a) Hallar la matriz de cambio de base de la base ordenada $\mathcal{B}' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ a la base ordenada $\mathcal{B}$.

(b) Hallar las coordenadas de un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en la base ordenada $\mathcal{B}$.

3. (25 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + y + 2z).$$

8pts (a) Dar una base y una descripción implícita del núcleo de T.

8pts (b) Dar una base y una descripción implícita de la imagen de T.

9 (c) Hallar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, donde

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \qquad \mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta.

(a) El conjunto $\{(1, 0, -1), (-i, 0, i)\}$ se extiende a una base de $\mathbb{C}^3$.

(b) Si W_1 y W_2 son subespacios de $F^{2\times 2}$ tales que $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, entonces $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (2, -1)$ y $T(1, 0, 0) = (1, 1)$.

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntaje					57

6 (seis)

Luca Oliva   Hoja 1

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 1:

$W_1, W_2 \in \mathbb{R}^5$,

$W_1 = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : u+v=0, x+y+z=0\}$

$W_2 = \langle (1,-1,1,-1,1), (0,1,0,0,0) \rangle$

a- Primero busco la caracterización de W_2

$(x,y,z,u,v) \quad a(1,-1,1,-1,1) + b(0,1,0,0,0) = (a,-a+b,a,-a,a) = (x,y,z,u,v)$

$$\begin{cases} a = x \\ (-a)+b = y \\ a = z \\ -a = u \\ a = v \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ -1 & 0 & u \\ 1 & 0 & v \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4+F_1 \\ F_5-F_1}]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & u+x \\ 0 & 0 & v-x \end{array}\right] \checkmark$$

$W_2 = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5, z-x=0, u+x=0, v-x=0\}$

Con esto, $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5, u+v=0, x+y+z=0, z-x=0, v-x=0$

$z-x=0 \quad z=x$
$u+x=0 \rightarrow u=-x$
$v-x=0 \quad v=x$

Ahora, $\underline{u+v = (-x)+x = 0}$ (cumple) $\checkmark$

$x+y+z=0$
$x+y+x=0$
$y=2x$

Entonces, $W_1 \cap W_2 = \{(x,2x,x,-x,x) \in \mathbb{R}^5, x \in \mathbb{R}\}$ $\checkmark$

y su base (por deducción) es $\langle(1,2,1,-1,1)\rangle$, por lo que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

b- $W_1 + W_2 = \{v+w, v \in W_1, w \in W_2\}$

Necesito base de W_1, así que a partir de su caracterización

$(-y-z, y, z, u, -u) = y(-1,1,0,0,0) + z(-1,0,1,0,0) + u(0,0,0,1,-1)$

$\{(-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0), (0,0,0,1,-1)\}$ claramente generan a W_1, falta ver si es L.I

$$\begin{cases} -y-z=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ u=0 \\ -u=0 \end{cases} \rightarrow \text{Claramente solo acepta la solución trivial, es L.I}$$

NOTA

Como $\forall\ u \in W_1 + W_2$, $u = v + w$, $v \in W_1$, $w \in W_2$, entonces u es la suma de la combinación lineal de cada una (y es generada por la unión de bases)

$$\Rightarrow u = v + w = a\underbrace{(-1,1,0,0,0)}_{\alpha_1} + b\underbrace{(-1,0,1,0,0)}_{\alpha_2} + c\underbrace{(0,0,0,1,-1)}_{\alpha_3} + d\underbrace{(1,-1,1,-1,1)}_{\alpha_4} + e\underbrace{(0,1,0,0,0)}_{\alpha_5}$$

Hay que ver si es L.I

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{matrix} 0 \\ 1\ 0\ 0\ -1\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Incomplet

Luca Oliva

Hoja 2

FECHA

Ejercicio 2:

$B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

ⓐ $B' = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

Para conseguir $[T]_{BB'}$, primero hay que calcular las coordenadas de los vectores de B en la base ordenada B'

$[(1,1,0)]_{B'} \to a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) = (1,1,0)$

$a=0$
$b=1$ $\Rightarrow [(1,1,0)]_{B'} = (0,1,1)$
$c=1$

$[(0,0,1)]_{B'} \to a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) = (0,0,1)$

$a=1$
$b=0$ $\Rightarrow [(0,0,1)]_{B'} = (1,0,0)$
$c=0$

$[(1,0,2)]_{B'} \to a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) = (1,0,2)$

$a=2$
$b=0$ $\Rightarrow [(1,0,2)]_{B'} = (2,0,1)$
$c=1$

A partir de estos vectores la matriz de cambio de base se escribe de la siguiente forma

$$[T]_{BB'} = \left[[(1,1,0)]_{B'}, [(0,0,1)]_{B'}, [(1,0,2)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz de cambio de base de B a B'.

OK!

(b) Para encontrar las coordenadas de un vector (x,y,z) en $\mathcal{B}$ se necesita otra base, en este caso se intepreta que (x,y,z) esta escrito a partir de $\mathcal{E}_3$. Esto te deja la mattiz de $\mathcal{E}_3$ a $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora se hace

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x-z, y, y+2z)$$

X

Osea que $[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (x-z, y, y+2z)$

Luca Oliva

Hoja 3

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 3: $T(x,y,z)=(x-y-2z,-x+y+2z)$, $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

a- $\mathrm{Nu}\,T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: T(x,y,z)=(0,0)\}$

A partir de esta definición se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}x-y-2z=0\\-x+y+2z=0\end{cases}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2+F_1}\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\{x-y-2z=0$$

Queda la descripción implícita: $\mathrm{Nu}\,T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y-2z=0\}$ ✓

A partir de eso se obtiene

$x=y+2z \Rightarrow (y+2z,y,z)=y(1,1,0)+z(2,0,1)$

Queda la base $B=\{(1,1,0),(2,0,1)\}$ ✓ 8pts

b- $\mathrm{Im}\,T=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2: T(v)=(a,b),\ v\in\mathbb{R}^3\}$

Sabiendo que $T(x,y,z)=(x-y-2z,-x+y+2z)=(a,b)$

$$\begin{cases}x-y-2z=a\\-x+y+2z=b\end{cases}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&a\\-1&1&2&b\end{array}\right]\xrightarrow{F_2+F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&a\\0&0&0&a+b\end{array}\right]\Rightarrow a+b=0$$

Queda la descripción implícita: $\mathrm{Im}\,T=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2, a+b=0\}$

A partir de eso se obtiene

$a=-b\Rightarrow(-b,b)=b(-1,1)$ ✓

Queda la base $B=\{(-1,1)\}$ 8pts

Nota: El a y b dan bien tomando en cuenta el teorema de la dimensión

$$\dim\mathbb{R}^3=\dim(\mathrm{Im}\,T)+\dim(\mathrm{Nu}\,T)$$
$$3=1+2$$
$$3=3$$

NOTA

c.- Primero hay que encontrar las coordenadas de los vectores de C en T a B'

$[T(1,0,0)]_{B'} = [(1,-1)]_{B'} = (-1,1)$

$[T(0,1,0)]_{B'} = [(-1,1)]_{B'} = (1,-1)$

$[T(0,0,1)]_{B'} = [(-2,2)]_{B'} = (2,-2)$

Ahora, puesto en la matriz $[T]_{CB'}$, (la matriz de T respecto a C y B')

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$