Clase 3

Expresiones cuantificadas

- Cuantificador
  - TIene un simbolo cuantificador (propiamente dicho) y una o más variables (tipadas aunque no lo explicitemos)
- Rango
  - Es de tipo booleano y puede aparecer la variable cuantificada
  - Es un predicado sobre los valores posibles que puede tomar la variable cuantificada
- Termino
  - El tipo del termino depende del cuantificador que usemos — $\forall \Rightarrow \text{termino} = Bool$
- Requisitos para que tengan sentido
  - Sea — $\langle \square\, k : R.k : T.k \rangle$
  - $\square : a \to a \to a$
  - $\square$
    - Conmutativo — $\forall x, y : b / x \square y = y \square x$
    - Asociativo — $\forall x, y, z : b / x \square (y \square z) = (x \square y) \square z$
  - $k : b$
  - $R : b \to Bool$
  - $T : b \to a$

Axiomas

- Para darle sentido a los axiomas siempre hay que pensar en la lectura operacional
- Lectura operacional
  - evaluar el termino en el rango y transformar el cuantificador en el operador que separa cada expresion
- Conviene pensarlos como predicados que definen sub-conjuntos del tipo
- Reglas de Liebniz
  - $R.j \equiv R'.j \implies \langle \oplus j : R.j : T.j \rangle = \langle \oplus j : R'.j : T.j \rangle$
  - $T.j \equiv T'.j \implies \langle \oplus j : R.j : T.j \rangle = \langle \oplus j : R.j : T'.j \rangle$
  - Se justifican a traves de la lectura operacional

Listado de axiomas

- Rango vacio
  - $\langle \Sigma j : 0 \leq j < 0 : 25 + j \rangle = 0$
  - $\langle \Pi\, k : False : 0 \rangle = 1$
  - $\langle Max\, i : False : 32 - i \rangle$
    - 0 — si T.i : Nat
    - $-\infty$ — si T.i : Int
  - $\langle Max\, b : b \wedge False : 0 \rangle = 0$ — (suponemos que T.b : Nat)
  - $\langle \oplus i : False : T.i \rangle = e$ — Sea — e el elemento neutro de $\oplus$
- Rango Unitario
  - $\langle \oplus\, i : i = C : T.i \rangle = T.C$
  - Hay un único valor que satisface el rango
- Termino constante
  - $\langle \oplus\, i : R.i : C \rangle = C$ — $\iff$
    - R no vacio
    - $C \oplus C = C$
    - i no aparece en C — Quiere decir que i aparece mencionado en C
  - Contraejemplo
    - $\langle \Pi i : 0 \leq i < 10 : 2 \rangle = 2^{10}$ — Ya que $2 \cdot 2 \neq 2$
- Particion de Rango
  - $\langle \oplus\, i : R.i \vee S.i : T.i \rangle = \langle \oplus\, i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \oplus\, i : S.i : T.i \rangle$ — $\iff$
    - R.i y S.i son disjuntos
    - $x \oplus x = x$
  - Tiene que haber una disyuncion explicita
- Cambio de variable
  - $\langle \oplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \oplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$ — $\iff$
    - f es biyectiva en el rango
    - $f : b \to b$
    - j no aparece en R ni en T