b) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$

Sea $P(n) = $ " $\sum_{J=1}^{n} J = \frac{n(n+1)}{2}$ "

Caso base:

Veamos si $P(1)$ se cumple

$$\sum_{J=1}^{1} J = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(2)}{2} \qquad \text{Elem. Neutro}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos que $P(K)$ es cierta para cierto $K \in \mathbb{N}$.

$\therefore \; P(K) \Rightarrow P(K+1)$

$$\sum_{J=1}^{K+1} J = \sum_{J=1}^{K} J + K + 1 \qquad \text{def. rec. sumat.}$$

$$\frac{(K+1)(K+1+1)}{2} = \frac{K(K+1)}{2} + K + 1 \qquad \text{Hip. Ind.}$$

$$\frac{(K+1)(K+2)}{2} = \frac{K(K+1) + (K+1).2}{2}$$

$$\frac{(K+1).(K+2)}{2} = \frac{(K+1).(K+2)}{2} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$