

Interpolación polinomial:

Método de Newton y de Lagrange, Error del polinomio interpolante, Splines.

1. a) Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, construir el polinomio interpolante de Lagrange p y el polinomio interpolante de Newton q . Usar como nodos los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.
 - (i) Comparar los polinomios p y q y dar sus grados.
 - (ii) Calcular $p(3)$.
 - (iii) Graficar $f(x)$ y $p(x)$.
 - (iv) Analizar los resultados.
- b) Construir los polinomios de Taylor p_n de grado $n = 0, 1, 2, 3$ de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor de $x_* = 1$.
 - (i) Calcular $p_n(3)$.
 - (ii) Graficar $p_n(x)$.
- c) Comparar los valores $p(3)$ y $p_n(3)$.
2. Demostrar que si f es un polinomio de grado menor o igual que n entonces el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a f en x_0, x_1, \dots, x_n es f .
3. Mostrar que si $g(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_{n-1} y $h(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos x_1, \dots, x_{n-1}, x_n , entonces

$$p(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x)) \quad (1)$$

interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, \dots, x_n .

4. Dados $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, se definen los polinomios básicos de Lagrange l_k para $k = 0, \dots, n$ como

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

- a) Probar que $\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) Probar que $\sum_{k=0}^n x_k l_k(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- c) Probar que $\sum_{k=0}^n x_k^m l_k(x) = x^m$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $m \leq n$.

5. Considerar los siguientes conjuntos de datos

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

- a) Calcular los polinomios interpolantes de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange.
- b) Construir las tablas de diferencias divididas y los polinomios interpolantes en la forma de Newton.
- c) Agregar a las tablas el punto $x = 4$, $y = 1$ y actualizar las tablas de diferencias divididas para recalcular los polinomios interpolantes.
6. Sea $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos del intervalo $[0, 5]$. Demostrar que para cualquier x en dicho intervalo vale que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!}.$$

7. Mostrar que el error obtenido al interpolar la función $f(x) = \cosh(x)$ con un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 22 en el intervalo $[-1,1]$ es menor o igual a 5×10^{-16} .
8. a) Sea $a < b$, m el punto medio entre a y b , $p = m - h$ y $q = m + h$ para $0 \leq h \leq (b-a)/2$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

- b) Sean $x_i = a + i \left(\frac{b-a}{n} \right)$, $i = 0, \dots, n$, $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-x_0) \dots (x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}. \quad (2)$$

9. a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual a 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(1) = f'(1).$$

- b) Hallar un polinomio de grado menor o igual a 4 que verifique las condiciones del ítem anterior, más la condición $p''(1) = f''(1)$.

10. Se desea aproximar la función $f(x) = \sqrt{x}$ con un error de a lo sumo 5×10^{-8} , usando los siguientes métodos:

- a) Un spline lineal
b) Interpolación cuadrática cada 3 nodos.

Determinar para cada caso el mínimo número necesario n de nodos de la forma $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ para $i = 0, \dots, n$, y la longitud de paso h , para satisfacer la cota del error.

11. Dada una tabla de valores igualmente espaciados de la función $f(x) = \cos(x)$, determinar el valor del paso h y el mínimo número de nodos cuando $f(x)$ es aproximada por un spline lineal en el intervalo $[0, 2\pi]$ con un error menor o igual a 5×10^{-7} .
12. a) Determinar valores de α, β, γ para que S sea una función spline cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- b) Con los valores de α, β, γ obtenidos en el ítem anterior, decida si S interpola a la función $f(x) = 2^x + 0.5x^2 - 0.5x - 1$ en el intervalo $[0, 2]$ respecto de los nodos $\{0, 1, 2\}$.
c) Grafique simultáneamente f y S en el intervalo $[0, 2]$.

13. Supongamos que

$$s(x) = \begin{cases} 1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

es un spline cúbico natural para una función f que satisface

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 3.$$

Encontrar los coeficientes b_1, c_1, d_1, b_2, c_2 y d_2 .