Análisis Matemático I

Licenciatura en Ciencias de la Computación

FAMAF, UNC — Año 2017

Soluciones de la Guía de Ejercicios N°6: Gráfica de funciones

1. Haga corresponder el gráfico de cada función en (a)-(d) de la figura 1 con el de su derivada en (i)-(iv). Justifique la correspondencia. Discuta lo que ve, prestando especial atención a lo que le pasa a $f(x)$ cuando $f'(x)$ es positiva y cuando $f'(x)$ es negativa. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando $f'(x)$ se acerca a 0? ¿Está de acuerdo con la siguiente afirmación? *Mientras más grande es* $|f'(x)|$, *más rápido cambia* $f(x)$.

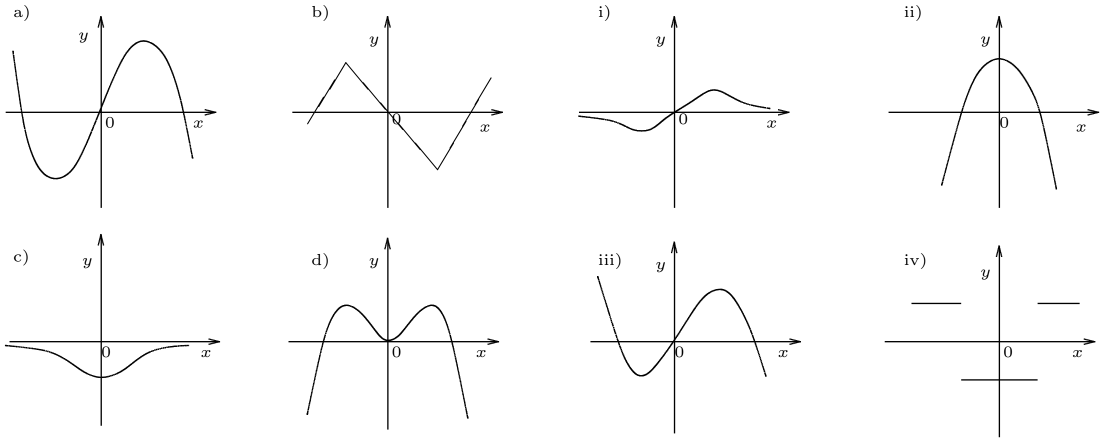

Figura 1: $(a, ii); (b, iv); (c, i); (d, iii)$

2. La Figura 2 muestra la gráfica de la función g en el intervalo [-4,8].

   a) ¿Qué puntos están excluídos del dominio de g?
   La función no está definida en $x = 0$.

   b) ¿En qué puntos del dominio g es discontinua?
   La función es discontinua en $x = -2$ (evitable), $x = 0$ (esencial), $x = 6$ (salto).

   c) ¿En qué puntos del dominio g no es diferenciable?
   La función no es derivable en $x = -2, 0, 2, 6$. En tres de los casos las derivadas laterales son distintas y en $x = 0$ no existen.

   d) Especifique un intervalo donde g crece más rápidamente.
   El mayor crecimiento se da en el intervalo $[-4, -2]$ donde el incremento de la función es 4.

   e) Especifique un intervalo donde g decrece más rápidamente.
   El mayor decrecimiento se da en el intervalo $[0, 2]$ donde el la función pasa de $+\infty$ a 0.

   f) Esboce a grandes rasgos el gráfico de $f'(x)$.

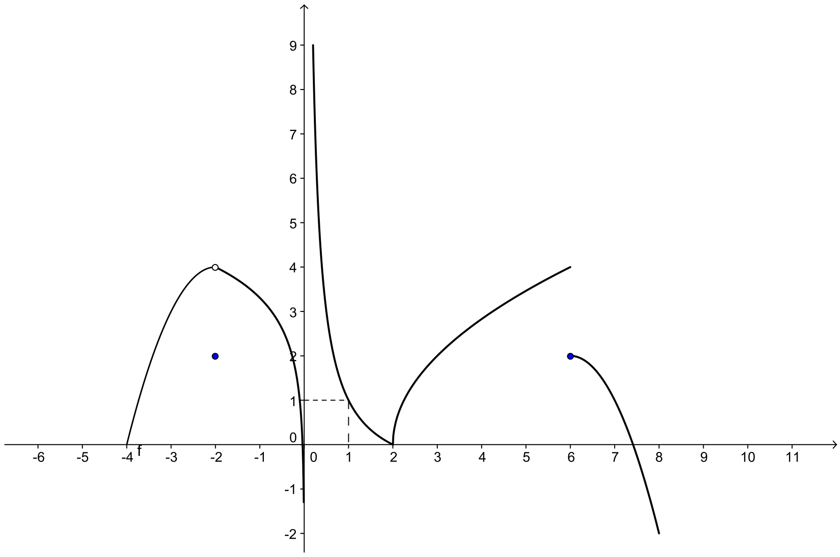

Figura 2: Función g

Formas Indeterminadas y la Regla de L´Hôpital.

3. Calcule los límites indicados

a) $f(x) = \ln(1+6x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6}{1+6x}$, $g(x) = x\,(x-7) \Rightarrow g'(x) = 2x - 7$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{(1+6x)(2x-7)} = -\frac{6}{7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (ver ejercicio 5)

c) $f(x) = 1 + x^6 + x^{12} \Rightarrow f'(x) = 5\,x^5 + 12\,x^{11}$, $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{6}{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^5}} + \frac{12}{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{11}}} = 0$ (ver ejercicio 5)

d) $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x \Rightarrow f'''(x) = e^x + e^{-x}$, $g(x) = x - \text{sen } x \Rightarrow g'''(x) = \cos x$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

e) $f(x) = 1 - \cos x \Rightarrow f'(x) = \text{sen } x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2\,x$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{2}$

f) $f(h) = \ln h \Rightarrow f'(h) = 1/h$, $g(h) = 1/h \Rightarrow g'(x) = -1/h^2$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{g'(h)} = -\lim_{h\to 0} h = 0$

g) $h(r) = r^{\text{sen } r} = \exp(\text{sen } r\, \ln r)$.
$f(r) = \text{sen } r \Rightarrow f'(x) = \cos r$, $g(r) = 1/r \Rightarrow g'(x) = -1/r^2$.
Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\lim_{x\to 0} r^2\, \cos r = 0.$
Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{h\to 0} h(r) = e^0 = 1.$

h) $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 \Rightarrow f'(x) = 1/2(1+x)^{-1/2}$, $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.
Entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1/2 \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-1/2} = \dfrac{1}{2}$.

i) $f(x) = e^{x\ln 6} - e^{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 6\, e^{x\ln 6} - \ln 2\, e^{x\ln 2}$, $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.
Entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ln 6 \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln 6} - \ln 2 \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln 2} = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

j) $h(x) = x^x = e^{x\,\ln x}$.
$f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x \Rightarrow g'(x) = -1/x^2$.
Entonces $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$.
Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = e^0 = 1$.

k) $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$, Entonces $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+} \ln^2 x\right) = +\infty$

l) $h(x) = (1 + \mathrm{s}en4x)^{\mathrm{C}otgx} = \exp(cotgx\ \ln(1 + \mathrm{s}en(4x)))$.
$f(x) = \ln(1 + \mathrm{s}en(4x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4\,\cos(4x)}{1 + \mathrm{s}en(4x)}$, $g(x) = \mathrm{tg}x \Rightarrow g'(x) = \mathrm{sec}^2\, x$.
Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x\, \dfrac{4\,\cos(4x)}{1 + \mathrm{s}en(4x)} = 4$.
Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = e^4$.

4. Compruebe que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^p} = 0$ para cualquier número $p > 0$. Esto hace ver que la función logaritmo tiende a ∞ con mayor lentitud que cualquier potencia de x con exponente positivo.

   $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$. $g(x) = x^p \Rightarrow g'(x) = p\, x^{p-1}$.
   Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{p\, x^p} = 0$, si $p > 0$; caso contrario diverge.

5. Compruebe que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ para cualquier entero n. Esto significa que la función exponencial tiende tiende a ∞ con mayor rapidez que cualquier potencia entera de x.

   Si $n \leq 0$, de manera directa se obtiene que: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n}\, e^x = +\infty$.
   Si $n > 0$, probamos por inducción. Consideremos el caso $n = 1$:
   $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.
   Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
   Supongamos ahora válidad la afirmación: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.
   $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. $g(x) = x^{n+1} \Rightarrow g'(x) = (n+1)\, x^n$.
   Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{n+1} \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Extremos locales y absolutos. Gráfica de funciones.

6. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

   a) $x = -1$ punto de mínimo, $x = 1$ punto de máximo.

   b) $x = -1, 2$ puntos de mínimo, $x = -3$ punto de máximo.

   c) $x = 1$ punto de mínimo, $x = -1$ punto de máximo.

   d) $x = 2$ punto de mínimo, $x = 10$ punto de máximo.

   e) $x = 1$ punto de mínimo, $x = 3$ punto de máximo.

7. *a*) $x = (2/3)^3$ punto de mínimo local. La función no es deribable en $x = 0$ que resulta punto de máximo local. No tiene absolutos.

   b) $x = 1$ punto de máximo absoluto, $x = 5$ punto de mínimo local. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\dfrac{3\pi}{2}$.

8. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ es monótona.

   $f'(x) = \dfrac{-2\,x^2+2}{(1+x^2)^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f'(x) = \begin{cases} > 0 & x \in (-1, 1) \\ < 0 & x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

   Por lo tanto, f es creciente en $(-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$.

9. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 - |2x - 1|$.

   $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \geq 1/2 \\ x^2 + 2x - 1 & x < 1/2 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 1/2 \\ 2x + 2 & x < 1/2 \end{cases}$

   La función resulta continua para todo valor de x, pero no es derivable en $x = 1/2$: $\lim_{x\to 1/2+} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to 1/2-} f'(x) = 3$. Además, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Por lo tanto, $x = -1, 1$ son puntos de mínimo locales y $x = 1/2$ punto de máximo local.

10. Esboce la gráfica de las siguientes funciones y determine los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.

    Visualizar las gráficas las funciones utilizando WolframAlpha con los *scripts* dados en cada caso, pero sólo luego de intentar con esmero graficarlas en papel.

    a) $f(x) = x^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$, para $x > 0$

    $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = g'(x)\,f(x)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$, $f(e) = e^{(1/e)} = 1{,}445$.
    $\lim_{x\to 0+} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
    Gráfica: `plot[f(x) = x**(1/x), x=0 to 10]`

    b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

    Gráfica: `plot[f(x) = x**3-3 *x**2-9*x+11, x=-3 to 5]`

    c) $f(x) = x^2 e^{-2x^2}$. Función par, definida positiva.
    $f'(x) = 2x\,(1 - 2\,x^2)e^{-2x^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (mínimo absoluto), $x = \pm\sqrt{2}/2$ (máximos absolutos). $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{2}/2) = 0{,}1839$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

    Gráfica: `plot[f(x) = x**2*exp(-2*x**2), x=-3 to 3]`

d) $f(x) = x\ln x$
$f'(x) = 1+\ln x$. $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/e$ (mínimo absoluto). $f(1/e) = -1/e$.
$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
Gráfica: `plot[f(x) = x*ln(x), x=0 to 2]`

11. Esboce la gráfica de las siguientes funciones. Previamente determine dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y comportamiento de la función cuando x se acerca a los bordes del dominio.

    Visualizar las gráficas las funciones utilizando WolframAlpha con los *scripts* dados en cada caso, pero sólo luego de intentar con esmero graficarlas en papel.

    a) $f(x) = x^2 + 2x$
    Gráfica: `plot[f(x) = x**2+2*x, x=-3 to 2]`

    b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Función impar.
    $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (máximo y mínimo absoluto respectivamente).
    $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \pm 1/2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0(\pm)$.
    Gráfica: `plot[f(x) = x/(x**2+1), x=-3 to 3]`

    c) $f(x) = x - 2\arctan x$. Función impar.
    $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (mínimo y máximo local respectivamente).
    $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \mp 0{,}57$, $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
    Gráfica: `plot[f(x) = x-2*arctan(x), x=-5 to 5]`

    d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$
    $x^2+x-2 = 0 \Rightarrow x = -2, 1$. $f(x) = \frac{1}{x-1}\,, \forall x \neq -2, 1$. Sin embargo, la función puede definirse continua en $x = -2$. Asíntota vertical en $x = 1$.
    Gráfica: `plot[f(x) = (x+2)/(x**2+x-2), x=-2 to 3]`

    e) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-3}$. Función impar.
    Asíntotas verticales en $x = \pm\sqrt{3}$.
    $f'(x) = \dfrac{x^4-5x+6}{(x^2-3)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \pm\sqrt{6}$
    $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to +\sqrt{3}\pm} f(x) = \pm\infty$.
    Así, $x = -1, +\sqrt{6}$ son puntos de mínimo local y $x = 1, -\sqrt{6}$ son puntos de máximo local.
    Gráfica: `plot[f(x) = (x**3-2x)/(x**2-3), x=-5 to 5]`

    f) $f(x) = (x^2-4)^2$. Función par.
    Gráfica: `plot[f(x) = (x**2-4)**2, x=-3 to 3]`

12. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una y solo una raiz.

    Consideramos $f(x) = x^5 + 10x + 3$. $f'(x) = 5\,x^4 + 10 > 0\,, \forall x$. Por lo tanto $f(x)$ es una función *monótona* creciente. Además, se tiene que: $f(-1) = -8$ y $f(0) = 3$. Entonces la ecuación tiene una única raíz y se encuentra en el intervalo $(-1, 0)$.

13. A las 14:00 hs. el velocímetro de un automovil indica 30 Km/h a las 14:10 hs. indica 50 Km/h. Demuestre que en algún momento entre las 14:00 y las 14:10 hs la aceleración fue 120 Km/h^2.

    La distancia recorrida por un objeto en función del tiempo es una función derivable dos veces. Su derivada primera es la función velocidad y su derivada segunda (la derivada de la función velocidad) es la función aceleración.

    El teorema del valor medio nos permite asegurar que siendo $f'(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

    $$f''(c) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}\,.$$

    Tomando $a =$14:00h y $b =$14:10h. Resulta $b - a =$00:10hs= 1/6h y $f'(b) - f'a) = 20$km/h. Por lo tanto, existe un instante $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 20/(1/6) = 120$Km/h^2.

14. Dos corredores arrancan al mismo tiempo en una competencia y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad.

    El teorema del valor medio de Cauchy nos permite asegurar que si dos funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), siendo que $\forall x \in (a, b)\,, g'(x) \neq 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

    $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

    En este problema podemos notar que al inicio de la carrera en el instante a, ambos se en cuentran a distancia 0 de la partida: $f(a) = g(a) = 0$, mientras que al final de la carrera, por llegar empatados, ambos se encuentran en la llegada en el mismo instante b habiendo recorrido la misma distancia L: $f(b) = g(b) = L$. Entonces resulta que $f(b)/g(b) = 1$ y en consecuencia existe $c \in (a, b)$ para el cual $f'(b)/g'(b) = 1$.

Linealización y aplicaciones

15. Sea f una función tal que $f(1) = 2$, cuya función derivada es $f'(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

    a) Estime el valor de $f(1{,}1)$ con una aproximación lineal.
    La aproximación lineal consiste en aproximar a la función en el entorno de un punto x_0, que pertenece a su dominio, por la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto:

    $$f(x) \approx r(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

    La aproximación es válida en la medida que $f'(x_0) \neq 0$. es decir que x_0 no sea un punto crítico de la función.
    Para este caso particular tenemos que: $x_0 = 1$, $x - x_0 = 0{,}1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = \sqrt{2}$.
    Por lo tanto,

    $$r(1{,}1) = \sqrt{2} \times 0{,}1 + 2 = 2{,}1414\,.$$

    b) ¿Cree que el valor exacto de $f(1{,}1)$ es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?
    $f''(x) = \dfrac{3}{2}\,x\,(x^3 + 1)^{-1/2}\,, f''(1) = 3/(2\sqrt{2}) > 0$. Por lo tanto, la función es cóncava hacia arriba en el entorno de $x = 1$ y en consecuencia la aproximación es por defecto.

16. Usando aproximaciones lineales, encuentra valores aproximado de

a) $\sqrt{36{,}1}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, función cóncava hacia abajo.
$x_0 = 36$, $x - x_0 = 0{,}1$, $f(36) = 6$, $f'(36) = 1/12$. Por lo tanto la aproximación por exceso resulta:

$$r(36{,}1) = \frac{0{,}1}{12} + 6 = 6{,}00833\,.$$

b) $\dfrac{1}{10{,}1}$

$f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, función cóncava hacia arriba. $x_0 = 10$, $x - x_0 = 0{,}1$, $f(10) = 1/10$, $f'(10) = -1/100$. Por lo tanto la aproximación por defecto resulta:

$$r(10{,}1) = -\frac{0{,}1}{100} + \frac{1}{10} = 0{,}099\,.$$

c) $\operatorname{sen} 59°$

Tener presente que para trabajar con las funciones trigonométricas debemos expresar los ángulos en radianes. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, función cóncava hacia abajo. $x_0 = \pi/3$, $x - x_0 = -\pi/180$ (que corresponde a -1^o), $f(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $f'(\pi/3) = 1/2$. Por lo tanto la aproximación por exceso resulta:

$$r(59^o) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}857299\,.$$

Comparar los valores aproximados obtenidos con los que resultan de evaluar con calculadora las expresiones dadas. Observar con cuántos decimales es correcta la aproximación.