(1) Demostrar las siguientes afirmaciones, donde a, b, c y d son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a = -(-a)$

$a + (-a) = \cancel{-(-a)} + \cancel{(-a)}$ Propiedad uniforme

$a + (-a) = 0$ Axioma 6 inverso aditivo.

$0 = 0$

b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$

$a = b \Leftrightarrow -a = -b$

$-a = -b$

$-1.a = -1.b$ Axioma 4, elemento neutro.

$a = b$ Axioma 7, cancelación

$\Downarrow$

$a = b \quad = \quad -a = -b$

c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.

$a + a = a \implies a = 0$

$0 + 0 = 0$ Axioma 4, elemento neutro

$0 = 0$

$a + \cancel{a} \cancel{-a} = \cancel{a} \cancel{-a}$ Axioma 6, inverso aditivo y

$a = 0$ Propiedad uniforme

Solo cuatro axiomas se necesitan para especificar las propiedades básicas del símbolo $<$, y ellos son listados en lo que sigue. La numeración de los axiomas se continúa de la sección 1.1. Como antes, a, b y c denotan enteros arbitrarios.

I1) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

I2) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

I3) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

I4) *Compatibilidad del producto con el orden.* Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

$c \neq 0$

a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$

$0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < a \cdot b$

$0 < (a \wedge B)$ Axioma 5, distributividad

Sabemos que 0 < b, entonces ¿$a < b$? $\longrightarrow$ $0 < b$

ac < bc $a = 0,\ b = a,\ c = b$ Axioma 4

$0 . b < a . b$

$0 < a . b \quad = \quad 0 < a . b$

$0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < a \cdot b$ Es verdadera, ya que las expresiones pueden ser interpretadas como equivalentes *b)* $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$

$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow b.c < a.c$

$ac < bc \Rightarrow b.c < a.c$ $\qquad$ ac < bc