ÁLGEBRA / ÁLGEBRA II/ÁLGEBRA LINEAL

EXAMEN FINAL - 07/08/2023

Nombre y apellido: Luca Oliva Hojas: 5

Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA

Condición: Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

Parte práctica.

1. (10 pts.) Sea $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que

$$\begin{aligned} &\det A(1|1) = 0, \quad \det A(1|2) = 0, \quad \det A(1|3) = -1,\\ &\det A(2|1) = 0, \quad \det A(2|2) = -i, \quad \det A(2|3) = 0,\\ &\det A(3|1) = i, \quad \det A(3|2) = 0, \quad \det A(3|3) = i, \end{aligned}$$

donde, para todo $1 \leq i, j \leq 3$, $A(i|j)$ es la matriz que se obtiene de A suprimiendo la fila i y a columna j.

   a) Hallar la matriz adjunta de A.
   b) Sabiendo que $\det(A) = 1$, determinar la matriz A.

2. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado los vectores $\alpha_1 = (-3,1,0,0)$, $\alpha_2 = (-2,0,1,0)$ y $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)$.

   a) Probar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es base de W y dar las coordenadas de un vector (x, y, z, t) de W en la base ordenada $\mathcal{B}$.
   b) Extender el conjunto $\mathcal{B}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.
   c) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la intersección de W con el subespacio generado por los vectores $(1,0,a,0)$ y $(2,0,-1,-a)$ tenga dimensión 1.

3. (20 pts.) Definir una transformación lineal inyectiva (monomorfismo) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Existe una única transformación lineal que cumpla estas condiciones?
   b) Dar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
   c) Dar una descripción implícita de la imagen de T, calcular su dimensión y mostrar una base.

4. (10 pts.) Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por

$$T(x, y, z) = (0, x - z, y + 2z).$$

   a) Determinar el polinomio característico y los autovalores de T.
   b) Decidir si T es diagonalizable.

Parte Teórica.

5. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición de *subespacio* de V.

   b) Probar que si V es de dimensión finita y W es un subespacio de V entonces todo subconjunto linealmente independiente de W es finito y es parte de una base de W.

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial sobre F y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

7. (15 pts.) Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo F. Probar que el rango fila de A es igual a su rango columna.

Parte práctica	1	2	3	4	Total
Evaluación	0	12	16	10·	38

Parte teórica	5	6	7	Total	Total General
Evaluación	15	13	15	43	81

8 (ocho)

HOJA N° 1

FECHA

Luca Oliva

Parte Teórica

⑤ a_ Sea V un F-espacio vectorial con operaciones $+: V \to V$ y $\cdot: F \to V$, W un subconjunto de V ($W \subseteq V$).

W es un subespacio de V si se cumple para todos sus vectores,

- $w_1 + w_2 \in W$, donde $w_1, w_2 \in W$
- $\lambda w \in W$, donde $\lambda \in F$, $w \in W$

Además, $W \neq \{\emptyset\}$ OK

b_ Tenemos un subconjunto S_0 linealmente independiente de W y

- Si S_0 genera a W, entonces S_0 es base de W y se cumple que sea parte de una base de W

- Si S_0 no genera a W, entonces existe $w_1 \in W$ que no es generado por $\langle S_0 \rangle$ y si hacemos $S_0 \cup \{w_1\} = S_1$, S_1 mantiene su independencia lineal. Si S_1 genera a W, $S_0 \cup \{w_1\}$ es base de W y S_0 es parte de la base. Si S_1 no genera a W, se repite el buscar un $w_i \in W$ no generado por $\langle S_i \rangle$ hasta llegar a un $S_n = S_0 \cup \{w_1, \dots, w_n\}$ linealmente independiente que va a generar a W, haciendo que S_0 sea parte de una base de W

Cabe aclarar que si $\dim W = m \Rightarrow m = |S_0| + |\{w_1, \dots, w_n\}|$

⑥ Sea $v \in V$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base ordenada de V, tenemos que

$v = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ de manera única $\Rightarrow$ Base def

Sean $\beta_1, \dots, \beta_n$ vectores cualquiera de W, $T: V \to W$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n) \\ &= a_1 T(\alpha_1) + \dots + a_n T(\alpha_n) \\ &= a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i \end{aligned}$$

Def de T?

Ahora supongamos que hay otra transformación lineal $S: V \to W$ tal que $S(\alpha_i) = \beta_i$. Entonces

$$S(v) = S\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i S(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i = T(v)$$

Por lo que $S = T$, haciendo que T sea única

T lineal?

NOTA

⑦ Sea $T: V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, y $\dim Nu(T) = k$
$X \mapsto AX$

$V = ?$ $W = ?$

El rango fila de A va a ser $n-k$, ya que al ser $\dim Nu(T) = k$, entonces hay k variables libres, y la cantidad restante a ser la dim del espacio generado por las filas de A

$$rg\ fila(A) = \dim V - \dim Nu(T)$$ ✓

Para el rango columna desarrollo AX,

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esto te deja que $\dim Im(T) = rg\ columna(A)$, ya que los resultado de T son generados por las columnas de A

Ahora,

$$\begin{aligned} rg\ columna(A) &= \dim Im(T) \\ &= \dim V - \dim Nu(T) \\ &= rg\ fila(A) \end{aligned}$$ ✓

NOTA

Luca Oliva

HOJA N° 2

FECHA

Parte Práctica

② a.- El enunciado ya aclara que B genera a W, así que hay que probar que B es linealmente independiente. Para esto se tiene que cumplir que,

$$a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = (0,0,0,0)$$

$$a(-3,1,0,0) + b(-2,0,1,0) + c(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0)$$

Esto te da el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} -3a-2b+c=0 \\ a-c=0 \\ b+c=0 \\ -c=0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_4} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_4]{\substack{F_1-F_4 \\ F_2+F_4}} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1+3F_2 \\ F_1+2F_3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ahorrar pasos, directamente llevo la fila nula al final, dandome una MERF sin variables libres, por lo que solo se admite la solución trivia, haciendo a B linealmente independiente.

- Para hayar las coordenadas de (x,y,z,t) hay que encontrar los (a,b,c) tales que,

$$(x,y,z,t) = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$$

$$(x,y,z,t) = a(-3,1,0,0) + b(-2,0,1,0) + c(1,-1,1,-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a-2b+c=x \\ a-c=y \\ b+c=z \\ -c=t \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & -1 & t \end{array}\right] \xrightarrow{-F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-F_4]{\substack{F_1-F_4 \\ F_2+F_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 0 & x+t \\ 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 1 & 0 & z+t \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_1+3F_2 \\ F_1+2F_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x+t+3y-3t+2z+2t \\ 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 1 & 0 & z+t \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{array}\right] \to \begin{cases} 0 = x+3y+2z \\ a = y-t \\ b = z+t \\ c = -t \end{cases}$$

Entonces, las coordenadas de (x,y,z,t) en B son $(y-t, z+t, -t)$

b.- Desarrollando (x,y,z,t) en la base anterior habíamos llegado a que $0 = x+3y+2z$. Por lo que

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 0 = x+3y+2z, t \in \mathbb{R}\}$$

Ahora voy a busar un vector $\in \mathbb{R}^4$ que no sea W $(0 \neq x+3y+2z)$

$$(1,1,1,1) \to x+3y+2z = 1+3+2 = 6 \Rightarrow (1,1,1,1) \notin W$$

Como $(1,1,1,1) \notin W$, $B \cup \{(1,1,1,1)\}$ es linealmente independiente, y además $|B \cup \{(1,1,1,1)\}| = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, por lo que $\{(-3,1,0,0), (-2,0,1,0), (1,-1,1,-1), (1,1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^4$

NOTA

Luca Oliva | HOJA Nº 3

FECHA

③ a- Para que T sea única, $\{(1,0,-1),(-1,1,0)\}$ tiene que ser base de $\mathbb{R}^3$, ahora

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & -z \end{array}\right] \xrightarrow[F_1-F_3]{F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+y-z \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & -z \end{array}\right] \Rightarrow x+y-z=0$$

Como tenemos la condición $x+y-z=0$, $\{(1,0,-1),(-1,1,0)\}$ no genera a $\mathbb{R}^3$
Busco un vector que no cumpla con esa condición.

$(0,0,1) \rightarrow x+y-z = 0+0-1 = -1$

Y ahora con $(x,y,z) = a(1,0,-1)+b(-1,1,0)+c(0,0,1) = (a-b,\ b,\ -a+c)$

$$\begin{cases} a-b=x \\ b=y \\ -a+c=z \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z+x+y \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a=x+y \\ b=y \\ c=z+x+y \end{cases}$$

Como no hay variables libres ni condiciones, $\{(1,0,-1),(-1,1,0),(0,0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^4$, y como es linealmente independiente, es base de $\mathbb{R}^4$

Para que T sea única, necesito asignarle un valor a $T(0,0,1)$. Para mantenerlo simple, $T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esto te deja con que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(a(1,0,-1)+b(-1,1,0)+c(0,0,1)) \\ &= aT(1,0,-1)+bT(-1,1,0)+cT(0,0,1) \\ &= \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con lo calculado antes, ya sabemos que $a=x+y$, $b=y$, $c=z+x+y$. Por lo que

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & z+x+y \end{bmatrix}$$

Como el ejercicio también pide que sea monomorfismo, hay que ver que solo se admita la solución trivial en

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z+x+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Es monomorfismo}$$

NOTA

6. La matriz T respecto a $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_{2x2}$ (base canonicas ordenadas) va a tener la forma

$$[T]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_{2x2}} = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{E}_{2x2}} & [T(b_2)]_{\mathcal{E}_{2x2}} & [T(b_3)]_{\mathcal{E}_{2x2}} \end{bmatrix}$$

donde b_i son los vectores de $\mathcal{E}_3$

Usando $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & z+x+y \end{bmatrix}$

$$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(0,0,1)]_{\mathcal{E}} =$$

Incompleto

HOJA N° 4

Luca Oliva

FECHA

③ c_ Como T es monomorfismo, $\dim(Nu(T)) = 0$, y por lo tanto

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(Nu(T)) + \dim(Im(T))$$
$$3 = 0 + \dim(Im(T))$$
$$3 = \dim(Im(T))$$

Ya tenemos que $\dim(Im(T)) = 3$

Ahora,

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & z+x+y \end{bmatrix}$$
$$= x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esto es una combinación lineal, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es base de $Im(T)$. Ahora,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a+b+c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = x \\ a = y \\ b = z \\ t = a+b+c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t-x-z \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x-y \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t-x-z \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = x-y \\ a = x \\ b = z \\ 0 = t-x-z \end{cases} \Rightarrow Im(T) = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ t-x-z = 0,\ t,x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$$

NOTA

4) a_ Primero busco la matriz asociada a T (llamemos la $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

Todo T cumple con que $T(v) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$

donde $[A]_{ij} = a_{ij}$ y $v = (x_n, \dots, x_n)$

Ahora, $T(x,y,z) = (0x + 0y + 0z, 1x + 0y + (-1)z, 0x + 1y + 2z)$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ ✓

El polinomio característico tiene la siguiente forma,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Para encontrar los autovalores tomo

$$0 = \det(A - \lambda Id)$$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculo el determinante usando cofactores en la primera fila, ya que es la que tiene más ceros, facilitando el proceso

$$= (-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot ((-\lambda)(2-\lambda) + 1) = 0$$

O sea, $-\lambda = 0$ o $(-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0$

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda = 1$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Los autovalores de T son 0 y 1 ✓

Luca Olivn

HOJA Nº 9

FECHA

4) b. Para que T sea diagonalizable se tiene que cumplir que

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3_0)+\dim(\mathbb{R}^3_1)}_{\text{autoespacios}}=\dim\mathbb{R}^3$$

Para esto, tengo que buscar lo autovectores. Si tomo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y hago $T(x,y,z)=\lambda(x,y,z)$ voy a obtener un vector genérico del autoespacio de la correspondiente λ y de ahí sacar su base y dimensión

• $\lambda=1$

$$T(x,y,z)=(0,x-z,y+2z)=(x,y,z)$$

$$\begin{cases}x=0\\x-z=y\\y+2z=z\end{cases}\rightarrow\quad \begin{matrix}x-z=y\\-z=y\end{matrix}\qquad \begin{matrix}y+2z=z\\-z+2z=z\\z=z\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-z\\z=z\end{cases}$$

$$\Rightarrow\mathbb{R}^3_1=\{(0,-z,z)\in\mathbb{R}^3,\ z\in\mathbb{R}\}$$

Claramente $\mathbb{R}^3_1=\langle(0,-1,1)\rangle\Rightarrow\dim\mathbb{R}^3_1=1$

• $\lambda=0$

$$T(x,y,z)=(0,x-z,y+2z)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}x-z=0\\y+2z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases}$$

$$\Rightarrow\mathbb{R}^3_0=\{(z,-2z,z)\in\mathbb{R}^3_0,\ z\in\mathbb{R}\}$$

Claramente $\mathbb{R}^3_0=\langle(z,-2z,z)\rangle\Rightarrow\dim\mathbb{R}^2=1$

Por lo tanto $\dim\mathbb{R}^3_0+\dim\mathbb{R}^3_1=1+1=2\neq\dim\mathbb{R}^3=3$, osea que T no es diagonalizable

NOTA