Integrales

Antiderivada o primitiva

- $f(x)$ definida en $\mathbb{I}$
- $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ F(x) es una antiderivada de f(x)

Integral indefinida

- $f(x)$ definida en $\mathbb{I}$
- Se llama integral indefinida de f al conjunto de todas sus antiderivadas
- Se simboliza como $\int f(x)\,dx$
- Es el conjunto infinito de todas las funciones de la forma
  - $G(x) = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$
- Cuadritos

Propiedades
$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\int (f-g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

Métodos de integración
Por sustitución: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ con $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$
Por partes: $\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
constante	0	c
$r \neq -1$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$r = -1, x \neq 0$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
	$cos(x)$	$sen(x) + c$
	$sen(x)$	$-cos(x) + c$
	e^x	$e^x + c$
$a > 0$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$-1 \leq x \leq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsen(x) + c$ $-arccos(x) + c$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + c$

Integral definida

- Sea
  - $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
    - continua
    - $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$
    - O bien es acotada con un número finito de discontinuidades en el intervalo
- La integral definida de f en [a,b] se denota
  - $\int_a^b f(x)\,dx$ — Está dada por el area debajo de la curva y = f(x) entre las rectas x=a e x=b
  - Los extremos del intervalo se llaman limite inferior y superior de integracion
- Propiedades
  - $\int_a^b f(x)\,dx = A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$
  - $\int_a^a f(x)dt = 0$
  - $\int_a^b f(x)dt = -\int_b^a f(x)dt$
  - $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dt \geq 0$
  - $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b k.\,f(x)dt = k \int_a^b f(x)dt$
  - $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dt = \int_a^b f(x)\,dt + \int_a^b g(x)\,dt$ — Aplica para la resta
  - $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
  - $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Metodo de sustitucion
  - Sean f y g' continuas en sus dominios
    - $\Rightarrow$ $\int_a^b f(g(x)).\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$
  - Si F es primitiva de f
    - $\int_a^b f(g(x)).\,g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$
- Metodo por partes
  - Sean f y g derivables en [a, b]
    - $\Rightarrow$
      - $\int_a^b f(x).\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x).\,g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Teoremas fundamentales del calculo

- Primer teorema
  - Sea
    - f: [a, b] -> R una funcion continua
    - $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ \ \forall x \in [a,b]$
  - $\Rightarrow$ $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ — Es decir, F es una antiderivada de f en [a, b]
- Segundo teorema
  - Sea
    - f: [a, b] -> R una funcion continua
    - G una antiderivada de f
  - $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = G(a) - G(b) = G(x)\Big|_a^b$ — Regla de barrow

Area entre dos curvas

- Sean f y g tales que $f(x) \geq g(x) \; \forall x \in [a,b]$
- Entonces el area comprendida entre los graficos de f y g y las rectas verticales de x=a y x=b está dada por $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$