Bachmann Lautaro

Tarea 2:

Ejercicio

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes reales.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales que deben cumplir $\{a, b, c\}$ para que $p(1) = 1$ y $p(2) = 2$.

b) Asociar una matriz ampliada al sistema de a) y encontrar una MERF equivalente a ella. Justificar.

c) Hallar todas las soluciones del sistema planteado en a)

a) $P(1) = a1^2 + b.1 + c \;=\; a + b + c \;=\; 1$

$P(2) = a.2^2 + b.2 + c \;=\; a.4 + b.2 + c \;=\; 2$

$$\therefore (E) \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a.4 + b.2 + c = 2 \end{cases}$$

b) La matriz ampliada asociada a (E) es:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ahora procederemos a hallar su MERF equivalente utilizando el metodo de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 4.F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + \frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] = B$$

$$\frac{-3}{2} + \frac{1}{1} = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2}$$

Como en base a realizar operaciones elementales a la matriz A llegamos a la matriz B, podemos afirmar que A y B son equivalentes.

c) $A \sim B \Rightarrow (E) \equiv \begin{cases} a + 0.b - \frac{1}{2}c = 0 \\ 0.a + b + \frac{3}{2}c = 1 \end{cases}$

Ahora resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + 0.b - \frac{1}{2}c = 0 & \Rightarrow a = \frac{c}{2} \\ 0.a + b + \frac{3}{2}c = 1 & \Rightarrow b = 1 - \frac{3c}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ el conjunto de soluciones para el sistema es $\left\{\left(\frac{c}{2}, 1 - \frac{3c}{2}, c\right) / c \in \mathbb{R}\right\}$.