Práctico 0: Repaso de Cálculo Proposicional

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2021

Este práctico busca repasar algunas cuestiones básicas de la programación funcional y la manera en que probamos teoremas del cálculo proposicional. No te asustes por el largo, hay relativamente pocos ejercicios y mucho para pensar. Un plazo realista para completar este práctico es una semana. Es importante que vos puedas darte cuenta cuánto necesitás de el y qué partes podes saltearte. Lo más importante es verificar que:

1. Comprendés qué son los patrones y cómo saber si un término es un patrón.
2. Podés evaluar paso a paso términos.
3. Sabés en qué tipos podés usar pattern-matching.
4. Sabés cómo decidir si podés aplicar un teorema/axioma en un paso.
5. Sabés que si una fórmula P no es válida, entonces hay un contra-ejemplo para esa fórmula (es decir, hay un modelo para $\neg P$).
6. Tenés cierta práctica para manipular fórmulas proposicionales y (des)igualdades aritméticas.
7. Tenés cierta práctica para probar teoremas.

Ejercicios

1. Considerá las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rl} f.0 & \doteq 1 \\ f.(n+1) & \doteq f.n + 2 * n + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} g.[\,] & \doteq 0 \\ g.(x \triangleright xs) & \doteq x * (1 + g.xs) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} p.n.[\,] & \doteq 0 \\ p.n.(x \triangleright xs) & \doteq (x + sum.xs)/n \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h.n.[\,] & \doteq n \geq 0 \\ h.n.(x \triangleright xs) & \doteq n \geq 0 \ \wedge \ h.(n+x).xs \end{array}$$

a. Escribí el tipo de cada función.

b. ¿Cuáles de ellas son funciones recursivas? Para las que lo son, en qué argumento es la recursión?

c. Evaluá las expresiones $f.4$, $g.[-1, 4, 2]$ y $h.0.[3, -2, -2]$, aplicando una reducción por paso.

d. Reescribí la definición de f usando análisis por casos en vez de pattern-matching.

e. ¿Es $[x] +\!\!+\, xs$ un patrón válido para un argumento de tipo lista?

f. Definí g' de manera que $g'.xs = g.xs$ y que el valor de $g'.[0, 4, 2]$ se encuentre en no más de 4 pasos.

2. En el margen mostramos una demostración para la asociatividad de la discrepancia. ¿Podrías explicar (escribilo) brevemente por qué la prueba es correcta?

$$\begin{array}{ll} & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\ & \neg(p \equiv (q \not\equiv r)) \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\ & \neg(p \equiv \neg(q \equiv r)) \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \neg \ \} \\ & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\ & (p \equiv \neg q) \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \neg \ \} \\ & \neg(p \equiv q) \not\equiv r \\ \equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\ & (p \not\equiv q) \not\equiv r \end{array}$$

3. Considerá la siguiente fórmula: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Indicá cuáles de las siguientes fórmulas son sub-fórmulas.

a. $(q \wedge r)$ **b.** $(q \wedge r) \equiv (p \vee q)$ **c.** $p \equiv (p \vee q)$ **d.** $p \vee r$

e. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Reflexión: Este ejercicio busca evidenciar que no cualquier "pedazo" (sub-cadena) de la fórmula es una sub-fórmula. Es importante porque sólo podemos aplicar pasos (ya sean de equivalencia, igualdad, implicación o desigualdad) en sub-fórmulas. De hecho, hay mucho más en este ejercicio: muestra que las fórmulas no son "cadenas de símbolos" que podemos partir donde se nos antoje ("pedazos") sino que tienen una estructura y por eso hablamos de sub-fórmulas.

4. Indicá cuáles de los siguientes pasos lógicos son correctos para algún axioma/teorema. Si son correctos indicá el axioma/teorema que aplicaste. ¿Qué significa *aplicar* un axioma/teorema?

a.

$$\begin{array}{ll} & (p \vee q) \wedge (q \vee p) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & p \vee q \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{ll} & (p \vee q) \wedge (p \vee q) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & p \vee q \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{ll} & \neg(p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & \neg q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r) \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{ll} & \neg(p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg q \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r) \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{ll} & \neg((x > 0) \equiv (x > 0)) \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & False \end{array}$$

f.

$$\begin{array}{ll} & \neg p \\ \equiv \{ & \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\ & False \end{array}$$

Reflexión: Ahora nos interesa entender qué significa "aplicar" un paso; es decir, una vez que identificamos la sub-fórmula tenemos que encontrar una correspondencia entre el axioma/teorema y la sub-fórmula donde lo aplicamos. El proceso que aplicamos para decidir si un paso es aplicable o no, y cuál es el resultado en caso que se pueda, es el mismo que usamos para pattern-matching.

5. Demostrá los siguientes teoremas utilizando los axiomas y teoremas del cálculo proposicional del digesto (y cualquier otro teorema que se te ocurra y demuestres, claro). Acá hay dos observaciones que descubrimos probando teoremas, quizás te resulten útiles. Sería buenísimo si vos podés escribir brevemente tus propias observaciones.

- Si hay que demostrar una equivalencia, puede ser mejor comenzar con el término más *complejo* e intentar llegar al termino más simple.
- La Regla Dorada es útil para obtener teoremas más cómodos sobre la conjunción (y la disyunción). Recomendamos evitarla tanto como sea posible.[1]

a. Idempotencia de la conjunción: $p \wedge p \equiv p$. **b.** Neutro de la conjunción: $p \wedge True \equiv p$.

c. Absorción de conjunción respecto a disyunción: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

d. Debilitamiento para $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$. **e.** Debilitamiento para $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

f. Relación entre $\Rightarrow$ y $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. **g.** Contra-recíproca: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

h. De Morgan para $\wedge$: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ **i.** De Morgan para $\vee$: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

j. Distributividad de $\vee$ con $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

k. Distributividad de $\wedge$ con $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

l. Intercambio para $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

m. Implicación de la disyunción: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

n. Distributividad de $\Rightarrow$ con respecto a $\wedge$: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

[1]William Blake ya lo sabía en 1808: (siguió la regla dorada//hasta convertirse en el tonto de oro)
He has observ'd the Golden Rule
Till he's become the Golden Fool.

Reflexión: Es importante que podamos darle sentido a los títulos que tienen, algunos son fáciles de comprender si hacemos alguna analogía con la aritmética (por ejemplo, las distribuciones).

También podemos utilizar tablas de verdad o algún otro *modelo* para razonar sobre los teoremas; por ejemplo, las leyes de De Morgan pueden verse claramente si pensamos que p y q son sub-conjuntos de algún conjunto U e interpretamos la conjunción como la intersección, la disyunción como unión y la negación como el complemento.

Recordemos que encontrar una interpretación donde la fórmula sea válida (decimos que la fórmula es satisfactible) no la convierte en un teorema:

1. En una tabla de verdad, qué es una interpretación de la fórmula?
2. ¿Qué es un teorema?
3. Las *oraciones (indicativas) en castellano* también son modelos: “Llueve y hace frío” es menos habitual que “Llueve”; es decir “Llueve” es más débil que “Llueve y hace frío”.
4. Relacionando la interpretación de sub-conjuntos con debilitamiento: considerá que U tiene 8 elementos y que p y q son sub-conjuntos de U: compará la cantidad de elementos (cardinalidad) de p y de q con las de $p \cap q$ y las de $p \cup q$.

Finalmente, podemos pensar los últimos tres teoremas (items l., m. y n.) como formas alternativas de probar uno de los lados: por ejemplo, probar $p \vee q \Rightarrow r$ es equivalente a probar $p \Rightarrow r$ y $q \Rightarrow r$; estas dos últimas pruebas son independientes entre sí.

6. Decidí si los siguientes son teoremas o no. Si son teoremas, construí una prueba; si no da un contra-ejemplo.

a. $x > 4 \Rightarrow x > 0$ **b.** $x > 0 \equiv x \geqslant 1$, si $x \in \mathbb{N}$ **c.** $4 < 2 \Rightarrow 8 = 9 + 1$