1. Calcular la distancia entre P y Q:

a) $P=(-2,3)$, $Q=(-2,5)$ b) $P=(0,0)$, $Q=(3,-3)$ c) $P=(1,2)$, $Q=(2,-3)$

a) $x_a = -2$, $y_a = 3$
$x_b = -2$, $y_b = 5$

Ya que los valores en x son iguales, es posible usar la formula para calcular la distancia entre dos puntos de la recta real.

$$d(y_a, y_b) = |y_a - y_b|$$
$$= |3-5|$$
$$= |-2|$$
$$= 2$$

b) $x_p = 0$, $y_p = 0$
$x_q = 3$, $y_q = -3$

$$d(P,Q) = \sqrt{(0-3)^2+(0+3)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 9}$$
$$= \sqrt{18}$$

c) $x_p = 1$, $y_p = 2$
$x_q = 2$, $y_q = -3$

$$d(P,Q) = \sqrt{(1-2)^2+(2+3)^2}$$
$$= 1 + 25$$
$$= \sqrt{26}$$

2. Escribir la ecuación de la circunferencia centrada en A y con radio r en cada uno de los siguientes casos. Representarla gráficamente.

a) $A = (1,1), \quad r = 1$ b) $A = (2,0), \quad r = 2$ c) $A = (0,0), \quad r = 3$

a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$

b) $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

c) $x^2 + y^2 = 3^2$

3. Convertir de radianes a grados sexagesimales, o de grados sexagesimales a radianes, según corresponda:

a) $150°$ b) $\frac{\pi}{5}$ rad. c) $72°$ d) $\frac{3}{2}\pi$ rad.

a) $\pi \cdot 150° = 180° \cdot h$

$\frac{\pi \cdot \cancel{150°}}{\cancel{180}} = h$

$\frac{5}{6}\pi = h$

$\overset{2}{15}$

$\times 5$

75

b) $\pi \cdot g = 180° \cdot \frac{\pi}{5}$

$g = 180° \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1}{\pi}$

$g = \frac{\cancel{180°} \cdot \cancel{\pi}}{\cancel{5} \cdot \cancel{\pi}}$

$g = 36°$

$180 \mid 5$

$30 \quad 36$

0

$\pi \cdot 72° = 180° \cdot h$

$\frac{\pi \cdot \cancel{72°}}{\cancel{180°}} = h$

$\frac{2}{5}\pi = h$

d) $\frac{3}{2}\pi$ rad.

$$\pi \cdot g = 180 \cdot \frac{3}{2}\pi$$

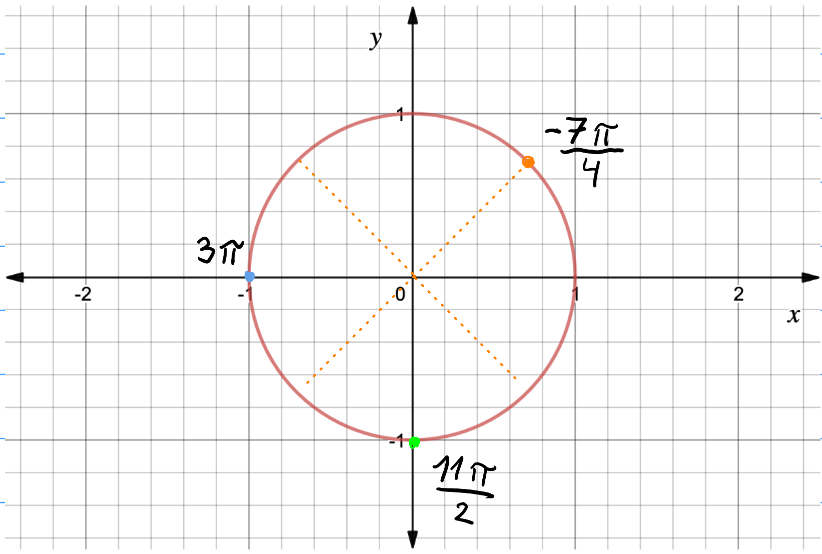
$$g = \frac{540\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

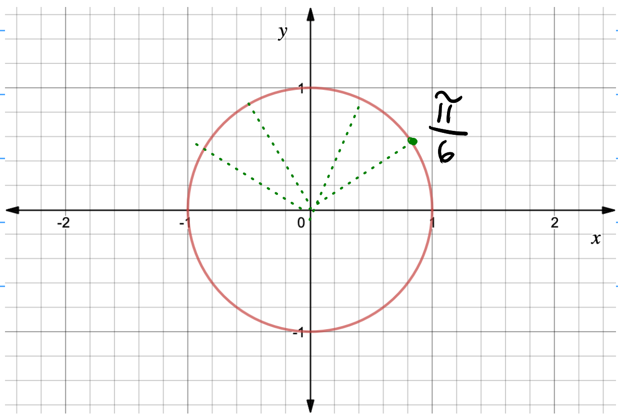
$$g = \frac{\overset{27}{\cancel{540}}\,\cancel{\pi}}{\underset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{\pi}}$$

$$g = 27°$$

4. Determinar las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos de la circunferencia unidad:

a) $P(3\pi)$ b) $P(\frac{11\pi}{2})$ c) $P(\frac{-7\pi}{4})$ d) $P(\frac{\pi}{6})$

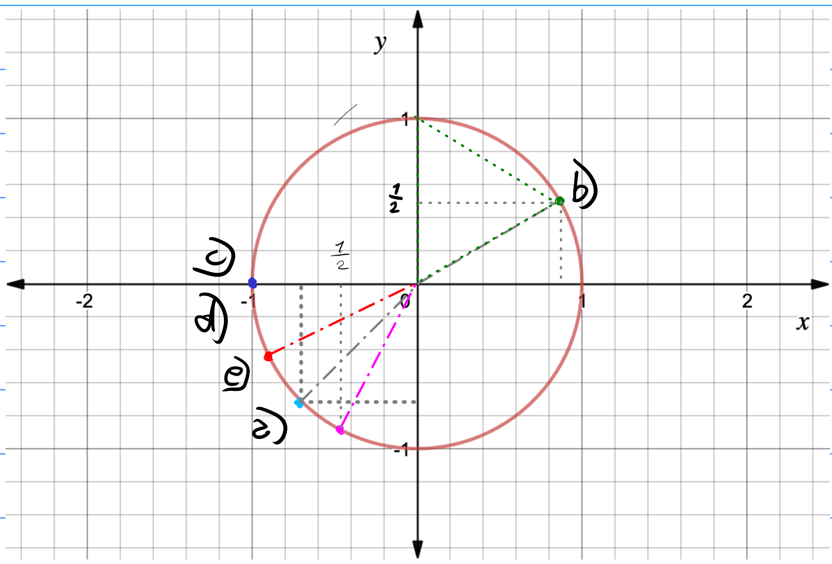




5. Dar los valores de:

a) $\cos(\frac{5\pi}{4})$ c) $\cos(-\pi)$ e) $\cos(-\frac{5\pi}{6})$

b) $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ d) $\text{sen}(\frac{21}{3}\pi)$ f) $\text{sen}(-\frac{8\pi}{3})$



a)

$x = y$

$1^2 = x^2 + x^2$

$1 = 2x^2$

$\frac{1}{2} = x^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\boxed{+\frac{\sqrt{2}}{2}}$, → $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Al ser equilátero todos los lados son iguales. ∴ al ser y la mitad de un lado, podemos afirmar que su valor es $\frac{1}{2}$.

$\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\text{Cos}(-\pi) = -1$

d) $\text{Sen}(7\pi) = \text{Sen}(\pi) = 0$

e) Como $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\frac{1}{2}$ ya que $\text{Sen}(t+\pi) = -\text{Sen}(t)$

$\frac{7\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} \Rightarrow \text{Sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \text{Sen}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$

$\therefore \text{Sen}\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

f) $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2$

$1 = \frac{1}{4} + y^2$

$1 - \frac{1}{4} = y^2$

$\frac{3}{4} = y^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = y^2$

7. a) Si $\operatorname{sen}(t) = \frac{2}{5}$, ¿qué valores puede tener $\cos(t)$?

b) Sabiendo que $P(t)$ está en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, ¿qué valor tiene $\cos(t)$?

$$x^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 + \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} = 1 - \frac{4}{25}$$

$$x^2 = \frac{25-4}{25}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{21}{25}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{21}}{5} \to +\frac{\sqrt{21}}{5}, \; -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$P(t) \to$ 4to cuad $\Rightarrow x > 0, \; y < 0$

$$x^2 + \left(\frac{-\sqrt{8}}{3}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 + \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{1} - \frac{8}{9}$$

$$x^2 = \frac{9-8}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$x = \pm\frac{1}{3} \to +\frac{1}{3}, \; -\frac{1}{3}$$

ya que $x > 0$

8. Sabiendo que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{1}{3}$ y $\cos(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$:

a) Indicar en qué cuadrante se encuentra $P(t)$.

b) Calcular $\operatorname{sen}(-t)$ y $\cos(\pi - t)$.

a) Como sen(t) es negativo y cos(t) es positivo, podemos afirmar que P(t) se encuentra en el 4to cuadrante.

b) $\operatorname{Sen}(-t) = -\operatorname{Sen}(t)$

$$\cos(\pi - t) = \cos(\pi)\cos(t) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(t)$$

$$-1 \cdot \cos(t) + 0 \cdot \operatorname{Sen}(t)$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$$

9. Usar la igualdad $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, para calcular:

a) $\cos(\frac{\pi}{12})$.

b) $\operatorname{sen}(\frac{7}{12}\pi)$.

a) $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$

b) $$\operatorname{Sen}\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\overset{1}{\cancel{6}}\pi}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{3} \quad \frac{-\pi + 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

11. Utilice la fórmula para $\cos(t+s)$ y el hecho que $\cos(2t) = \cos(t+t)$ para deducir que:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1.$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\cos(t)\cos(t) - \operatorname{Sen}(t)\operatorname{Sen}(t) = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\cos^2(t) - \operatorname{Sen}^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\cos^2(t) - 2\cos^2(t) - \operatorname{Sen}^2(t) = -1$$

$$-1\cos^2(t) - \operatorname{Sen}^2(t) = -1$$

$$\cos^2(t) + \operatorname{Sen}^2(t) = 1$$

$$1 = 1$$

Determinar la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, con B el vértice del ángulo recto, en cada uno de los siguientes casos. El ángulo α tiene vértice en A.

a) Los catetos son iguales y la hipotenusa mide $\sqrt{20}$ cm.

b) $\alpha = 60°$ y el cateto adyacente mide 10 cm.

c) $\alpha = 45°$ y el cateto opuesto mide 2 cm.

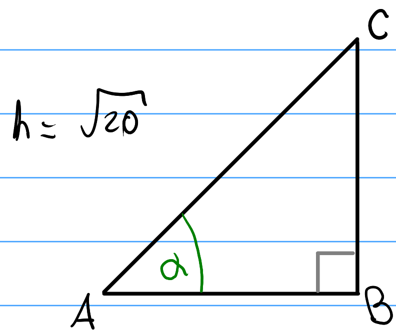
d) La hipotenusa mide 30 cm y $\alpha = 30°$.

$\overline{AB} = C_a$

$\overline{BC} = C_o$

$\overline{AC} = h$

a)



$h = \sqrt{20}$

$C_o = \sqrt{10}$

$C_a = \sqrt{10}$

$h^2 = x^2 + x^2 \longrightarrow (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2$

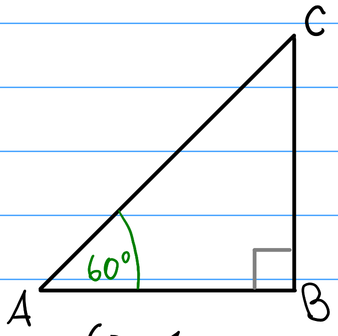
$(\sqrt{20})^2 = 2x^2$

$\frac{20}{2} = x^2$

$\sqrt{10} = x$

$20 = 10 + 10$

$20 = 20$



$Ca = 10\,cm$

$$\cos(60) = \frac{10}{h}$$

$$\frac{1}{2} \cdot h = 10$$

$$h = 10 \cdot 2$$

$$h = 20$$

$$h^2 = Ca^2 + Co^2$$

$$20^2 = 10^2 + Co^2$$

$$400 = 100 + Co^2$$

$$400 - 100 = Co$$

$$\sqrt{300} = Co$$

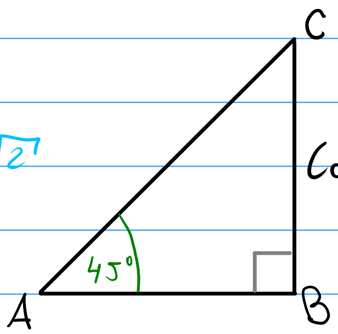
$$\sqrt{100 \cdot 3} = Co$$

$$\sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = Co$$

$$10 \cdot \sqrt{3} = Co$$

c)

$h = 2 \cdot \sqrt{2}$



$Co = 2\,cm$

$$\operatorname{Sen}(45) = \frac{2}{h}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{h}$$

$$h = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$(2 \cdot \sqrt{2})^2 = Ca^2 + 2^2$$

$$4 \cdot 2 = Ca^2 + 4$$

$$8 - 4 = Ca^2$$

$$\sqrt{4} = Ca$$

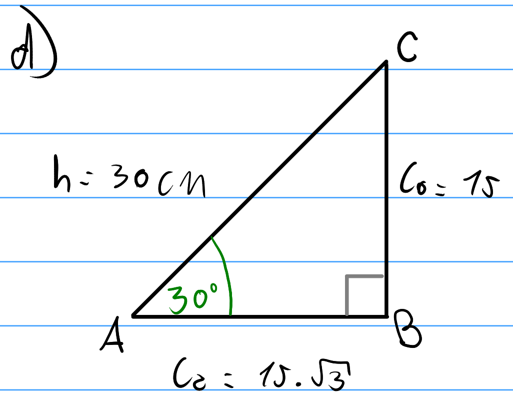
$$2 = Ca$$

$$(2 \cdot \sqrt{2})^2 = 4 + 4$$

$$4 \cdot 2 = 4 + 4$$

$$8 = 8$$

d)



$$\text{Sen}(30) = \frac{Co}{30}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{15}{\cancel{30}} = Co$$

$$15 = Co$$

$$\text{Cos}(30) = \frac{Ca}{30}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \overset{15}{\cancel{30}} = Ca$$

$$15 \cdot \sqrt{3} = Ca$$

13. Sabiendo que $\cos(42°) = 0,74$. Calcular:

a) $\text{sen}(222°) =$

b) $\tan(138°) =$

c) $\cos(48°) =$

d) $\text{sen}(318°) =$

e) $\text{sen}(132°) =$

$$\pi \cdot g = 180 \cdot h$$

$$\frac{\pi g}{180} = h$$

$$\frac{\pi \cdot \overset{7}{\cancel{\overset{21}{\cancel{42}}}}}{\underset{30}{\cancel{\underset{90}{\cancel{180}}}}} = h$$

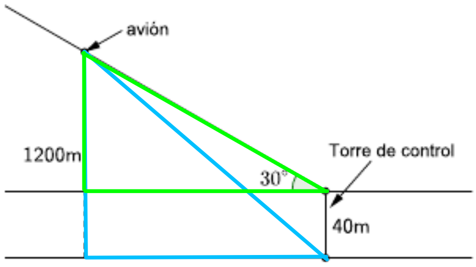
$$\frac{7\pi}{30} = h$$

$$\frac{\overset{37}{\cancel{74}}}{\underset{50}{\cancel{100}}} = \frac{37}{50}$$

$$\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{37}{50}$$

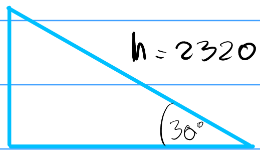
a) $+ \frac{7\pi}{30} = \frac{37}{50}$

Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1200 m y el ángulo de observación desde la torre es de $30°$. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de altura? La Figura 5.34 ilustra la situación.



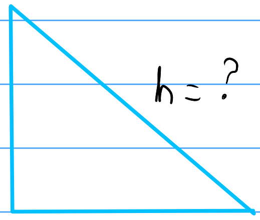
$O_1 = 1200 - 40$

1160



a_1

$O_2 = 1200$



$a_2 = 1160 \cdot \sqrt{3}$

$$\boxed{a_1 = a_2}$$

$$sen(30) = \frac{1160}{h}$$

$$\frac{1}{2} \cdot h = 1160$$

$$h = 1160 \cdot \frac{2}{1}$$

$$h = 2320$$

$$cos(30) = \frac{a_1}{2320}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{2320}^{1160} = a_1$$

$$1160 \cdot \sqrt{3} = a_1$$

$$h^2 = O_2^{\,2} + a_2^{\,2}$$

$$h^2 = (1200)^2 + (1160 \cdot \sqrt{3})^2$$

$$h = \sqrt{1200^2 + 1160^2 \cdot 3}$$