Final AM2 16-12-2022

1) a) b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) . \operatorname{sen}(x)\, dx$ ✓

Calculemos la integral indefinida

$$\int \cos(x) . \operatorname{sen}(x)\, dx = \int \operatorname{sen}(x) . \cos(x)\, dx \qquad \begin{array}{|l} u = \operatorname{sen}(x) \\ du = \cos(x)\, dx \end{array}$$

$$\int u . du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + C$$

Calculemos la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) . \operatorname{sen}(x)\, dx = \left.\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(0)}{2}$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \checkmark$$

1) a) 2) ✓

Calculemos la integral indefinida

$$\int x^2 . e^x\, dx = u.v - \int v\, du + C \qquad \begin{array}{|ll} u = x^2 & dv = e^x \\ du = 2x\, dx & v = e^x \end{array}$$

$$= x^2 . e^x - \int e^x . 2x\, dx + C$$

Resolvamos la integral que nos quedó

$$\int e^x . 2x\, dx = u.v - \int v\, du + C \qquad \begin{array}{|ll} u = 2x & dv = e^x \\ du = 2\, dx & v = e^x \end{array}$$

$$= 2x . e^x - \int e^x . 2\, dx + C$$

$$= 2x . e^x - 2 . \int e^x dx = 2x . e^x - 2 . e^x$$
$$= (2 . e^x) . (x-1)$$

$$\therefore \int x^2 . e^x\, dx = x^2 e^x - (2 e^x . (x-1)) + C$$

Resolvemos la integral definida

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2e^x \cdot (x-1) \Big|_0^1$$

$$= 1^2 e^1 - 2 \cdot e^1 \cdot (1-1) - \left(0^2 e^0 - 2e^0 \cdot (0-1)\right)$$

$$= e - 0 - \left(0 - (2 \cdot -1)\right) = e - (2)$$

$$= e - 2 \checkmark$$

1) b) a) ✓ → Dudoso

Busquemos algun $g(x)$ mayor a $f(x) = \frac{1}{2x^4+5x^3}$ y veamos si converge

$$x \leq 2x^4 + 5x^3 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^4+5x}$$ aclarar donde

Veamos si $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to 0^+} \ln(x) \Big|_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \ln(1) - \ln(t)$$

$$= 0 - \lim_{t \to 0^+} \ln(t) = -(-\infty) = \infty$$

∴ la integral diverge

Usemos criterio de comparacion para integrales impropias

Como $|g(x)| \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge, por criterio de comparacion para integrales impropias tenemos que la integral $\int_0^1 \frac{1}{2x^2+5x^5} dx$ diverge

1)b)b) Rehacer X

Busquemos algun $g(x)$ mayor o igual a $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{x^{1/2}}$

$x \geq x^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^{1/2}}$ | $1 \geq \cos^2(x)$

$\therefore$ como $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^{1/2}} \wedge 1 \geq \cos^2(x) \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{\cos^2(x)}{x^{1/2}} \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Veamos si $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx$ converge

$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \ln(\pi/2) - \ln(t) = \ln(\frac{\pi}{2}) - \lim_{t \to 0^+} \ln(t)$

$= \ln(\frac{\pi}{2}) - (-\infty) = \ln(\frac{\pi}{2}) + \infty = \infty$

$\therefore$ la integral diverge.

Conclusion

En base a lo visto anteriormente, como $|g(x)| \geq f(x) \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, entonces por crit. de comparacion para integrales impropias tenemos que no se puede decir nada sobre la convergencia de $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{x^{1/2}}\,dx$

2)a) Rehacer

Calculemos las primeras derivadas de $f(x)$

$f(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$

$f'(x) = 2\cdot\cos(x)\cdot -\operatorname{sen}(x) = -2\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)$

$f''(x) = -2\left(-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\cdot\cos(x)\right)$
$= -2\left(-\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right)$

$f'''(x) = -2\left(-(2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)) - 2\cdot\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)\right)$
$= -2\left(-2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) - 2\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)\right)$
$= 4\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + 4\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$
$= 8\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$

$f''''(x) = 8\left(\cos(x)\cdot\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cdot -\operatorname{sen}(x)\right) = 8\left(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\right)$

Evaluemos en $a=0$

$f(0) = (\cos(0))^2 = 1$

$f'(0) = -2\cdot\cos(0)\cdot\operatorname{sen}(0) = -2\cdot 1\cdot 0 = 0$

$f''(0) = -2\left(-(\operatorname{sen}(0))^2 + (\cos(0))^2\right) = -2(0+1) = -2$

$f'''(0) = 8\cdot\operatorname{sen}(0)\cdot\cos(0) = 8\cdot 0\cdot 1 = 0$

$f''''(0) = 8\cdot\left((\cos(0))^2 - (\operatorname{sen}(0))^2\right) = 8\cdot(1^2 - 0^2) = 8$

$f^{(n)}(0) =$

2)b) ✓

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$= y(s,t) \cdot t . -sen(s) + x(s,t) \cdot 3s^2$$

$$= s^3 \cdot -t . sen(s) + t . cos(s) \cdot 3s^2$$

$$= -t s^2 s . sen(s) + ts^2 . 3 cos(s)$$

$$= ts^2(-s . sen(s) + 3 \cdot cos(s))$$ ✓

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$= y(s,t) \cdot cos(s) + x(s,t) \cdot 0$$

$$= s^3 \cdot cos(s) + 0$$

$$= s^3 \cdot cos(s)$$ ✓

3) a) Rehacer

Fijemos las variables x e y en valores convenientes para ver el dominio

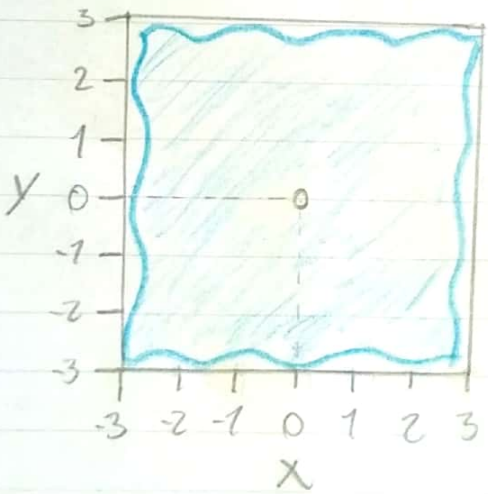
$g(x) = f(x,0) = \dfrac{e^x}{x^2 - 0^2} = \dfrac{e^x}{x^2}$

$h(y) = f(0,y) = \dfrac{e^0}{0^2 - y^2} = \dfrac{-1}{y^2}$

$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$, $Dom(h) = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\}$

$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 0\}$ momento esquizo

$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$



→ el dominio es $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, solo se dibujó una parte, pero se extiende a todo $\mathbb{R}^2$

b) ✓

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{e^x \cdot (x^2 - y^2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \dfrac{e^x \cdot (x^2 - y^2 - 2x)}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}$ ✓

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{(e^x)' \cdot (x^2 - y^2) - e^x \cdot -2y}{(x^2 - y^2)^2} = \dfrac{0 + 2ye^x}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{2ye^x}{x^4 - 2x^2x^2 + y^4}$ ✓

3) c) ✓

Evaluemos derivadas y funcion en (0,1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{e^0.(0^2-1^2-2.0)}{(0^2-1^2)^2} = \frac{1.(-1)}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{2.1.e^0}{(0^2-1^2)^2} = \frac{2.1.1}{1} = 2$$

$$f(0,1) = \frac{e^0}{0^2-1^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Planteo

El plano tangente al gráfico de $f(x,y)$ en el punto $(0,1)$ es el plano que pasa por $(0,1,f(0,1))$ y es generado por los vectores $\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\right)$ y $\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right)$

Conclusion

El plano tangente al gráfico de f en el punto $(0,1)$ es el siguiente:

$\ell = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = (0,1,-1) + t(1,0,-1) + s(0,1,2)$, con $s,t \in \mathbb{R}\}$ ✓

4) $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ Rehacer

Calculemos $\nabla f(x,y)$

$\nabla f(x,y) = (-3.2x + 6y, 3.2y - 2.3y^2 + 6x)$
$= (-6x + 6y, 6y - 6y^2 + 6x)$

$$\begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ -6y^2 + 6y + 6x = 0 \end{cases}$$

$x = y \Rightarrow -6y^2 + 6y + 6x = -6x^2 + 6x + 6x = 0$
$\Rightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -6x^2 = -12x \Rightarrow \frac{-6x^2}{x} = -12$
$\Rightarrow x = \frac{-12}{-6} = x = 2 \rightarrow x_1 = 2$, $\rightarrow x_2 = -2$

$x = 2 \Rightarrow -6.2 + 6y = 0 \Rightarrow -12 + 6y = 0 \Rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{6} \Rightarrow y = 2$

$x = 2 \Rightarrow -6y^2 + 6y + 6.2 = 0 \Rightarrow -6y^2 + 6y = -12 \Rightarrow -y^2 + y = \frac{-12}{6}$

$\Rightarrow y^2 + y = 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

Metodo de reducion
$\Rightarrow -6y^2 + 6y + \cancel{6x} \; \cancel{-6x} + 6y = 0 + 0$
$\Rightarrow -6y^2 + 12y = 0$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4.-6.0}}{2.-6} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 0}}{-12} =$

$= \frac{-12 \pm 12}{-12} \rightarrow y_1 = \frac{-12 + 12}{-12} = 0$
$\rightarrow y_2 = \frac{-12 - 12}{-12} = \frac{-24}{-12} = 2$

$y = 0 \Rightarrow -6x + 6.0 = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$
$y = 2 \Rightarrow -6x + 6.2 = 0 \Rightarrow -6x + 12 = 0 \Rightarrow -6x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-6} \Rightarrow x = 2$
$\therefore \nabla f(x,y) = (0,0)$ para $(x,y) \in \{(0,0), (2,2)\}$

Clasifiquemos los puntos criticos

Calculemos f_{xx}, f_{yy} y f_{xy}

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} -6x+6y = -6 \checkmark$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} -6y^2+6y+6x = 6.2y+6 = -12y+6$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} -6x+6y = +6$$

Definamos $D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$

Evaluemos $D(x,y)$ en los puntos criticos

$$D(0,0) = -6 \cdot (-12 \cdot 0+6) - [6]^2 = -36 - 36 = -72$$

$$D(2,2) = -6 \cdot (-12.2+6) - 6^2 = -6 \cdot (-24+6) - 36 = -6 \cdot -18 - 36 = +92 - 36$$
$$= \cancel{-108}\ +56$$

Apliquemos test de la derivada segunda

En base a lo calculado previamente y al test de la derivada segunda, tenemos lo siguiente:

Como $D(0,0) < 0 \Rightarrow$ no podemos decir nada sobre la funcion en $(0,0)$

Como $D(2,2) > 0 \Rightarrow$ la funcion tiene un punto silla en $(2,2)$

Conclusion

La funcion posee dos puntos criticos, $(0,0)$ y $(2,2)$

La funcion posee un punto silla en $(2,2)$ y sobre $(0,0)$ no podemos afirmar nada

Escaneado con CamScanner