

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

P vs NP 2da parte

Daniel Penazzi

9 de mayo de 2021

Tabla de Contenidos

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- 1 **NP completitud**
 - Reducción Polinomial
 - NP completo
 - Teorema de Cook

- 2 **Teoremas de Karp**

- 3SAT
 - Construcción
 - $B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$
 - $\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$
- 3COLOR
 - Construcción de G
 - $B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$
 - $\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

NP-completo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- La clase pasada dimos la definición y ejemplos de problemas en *NP* (y *co-NP*).
- En esta clase introduciremos las nociones de *NP-hard* y *NP-completo*, y similar para *co-NP*.
- Estos saldrán de una herramienta que se usa para “comparar” problemas de decisión.
- Es decir, dados dos problemas de decisión queremos poder decir cual de los dos es “mas facil” de resolver.

Reducción Polinomial

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Obviamente si supieramos cuál es la mejor complejidad de algoritmos que resuelven cada uno de ellos, ya estaría, pero como vimos, no se conoce la complejidad de muchos problemas en NP , ni siquiera si son o no polinomiales.
- El concepto clave para comparar problemas es el de “Reducción Polinomial”
- La idea básica es definir “Reducción Polinomial” de forma tal que si “reducimos polinomialmente” un problema de decisión τ a un problema de decisión ρ , entonces si podemos resolver ρ , podamos resolver τ con sólo un esfuerzo extra polinomial.

Reducción Polinomial

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- De esa forma si podemos “reducir polinomialmente” un problema de decisión τ a un problema de decisión ρ , entonces τ es “mas fácil” de resolver que ρ , porque si pudieramos resolver ρ , entonces automáticamente podriamos resolver τ usando la forma de resolver ρ mas un esfuerzo extra polinomial para “transformar” τ en ρ .
- Ahora bien, hay varios conceptos distintos de “Reducción Polinomial” en la literatura.

Reducción Polinomial de Cook y de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Las dos mas conocidas son:
 - 1 La reducción polinomial de Cook (tambien llamada reducción de Cook-Turing o a veces reducción polinomial de Turing)
 - 2 La reducción polinomial de Karp. (el de Edmonds-Karp)
- Si bien la primera fue la de Cook, la que casi todo el mundo usa es la de Karp.

Razones para usar la de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Hay varios motivos para eso.
- Si un problema se reduce a otro por medio de una reducción de Karp, entonces también se reduce por medio de una reducción de Cook.
- Al revés no se sabe si siempre es cierto. (se sospecha que no, pero no se sabe. De hecho si fuera cierto entonces $NP = \text{co-}NP$).
- Ambas nociones dan origen a distintos conjuntos NP -hard y $\text{co-}NP$ -hard, y en realidad bajo reducción de Karp esos dos conjuntos son distintos pero bajo Cook son iguales.

Razones para usar la de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud
Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook
Teoremas de
Karp
3SAT
Construcción
 $B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$
 $\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$
3COLOR
Construcción de G
 $B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$
 $\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Como la reducción de Karp es mas “granular” y permite diferenciar mas clases de complejidad, es la que mas se usa.
- Aún si les gusta mas la de Cook, si les enseñara todo usando reducciones de Cook despues no entenderían mucha parte de la literatura de esta area, que usa Karp.
- Asi que daremos una idea de ambas, pero luego daremos la definición formal y todas las pruebas usando la de Karp.

Reducción Polinomial de Cook vs Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Entonces en la reducción de Cook, podemos resolver muchas veces (mientras sea una cantidad polinomial de veces) distintas instancias de ρ para resolver una instancia de τ .
- También tiene el “poder” de que aunque se llame al oráculo una sola vez, luego se pueden hacer “cosas” con el resultado del oráculo.
- Karp restringe mucho más lo que se puede hacer.
- Sólo permite una llamada al oráculo y además hay que usar directamente el resultado.

Reducción Polinomial de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

Reducción Polinomial (de Karp)

Dados dos problemas de decisión ρ y τ , se dice que τ es reducible polinomialmente a ρ ($\tau \leq_p \rho$) si existe un algoritmo A **polinomial** que dadas instancias x de τ , produce instancias $A(x)$ de ρ , de forma tal que para toda instancia x de τ se cumple que $\tau(x) = \rho(A(x))$.

Reducción Polinomial de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Como estamos hablando de problemas de decisión las respuestas posibles son sólo SI o NO, así que la forma general de los teoremas que prueban reducción de Karp es:

- 1 Se da el algoritmo A y se muestra que es polinomial.
- 2 Se prueba que $\tau(x) = \text{"SI"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"SI"}$
- 3 Se prueba que $\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}$

- (o bien sus equivalentes lógicos, pej [3] es lo mismo que probar $\tau(x) = \text{"NO"} \Rightarrow \rho(A(x)) = \text{"NO"}$)

Reducción Polinomial de Karp

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Muchos alumnos cometen serios errores lógicos, pej, intentar probar [2] sin dar antes el algoritmo A .
- O peor, intentan probar $[\rho(A(x)) = \text{"SI"} \Rightarrow \tau(x) = \text{"SI"}]$ usando en el medio de la prueba....que $\tau(x) = \text{"SI"}$.
- Esto suele pasar porque memorizan sin entender las partes [2] y [3] y en el medio de la prueba de pej [3] ponen un fragmento de la prueba de [2].
- Veremos algunas pruebas de reducción y en todo examen final se requerirá una de estas pruebas.
- Por mas que tengan el 90% de la prueba "bien" si cometene un error lógico grave como los indicados arriba el descuento de puntos será masivo.

Complejidad NP

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
complejidad

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- En principio podría suceder que no exista ningún problema *NP* completo sino que tuviéramos dentro de *NP* problemas cada vez más difíciles, o problemas incomparables entre sí, pero de hecho se conocen **miles** de problemas *NP* completos.
- Son todos “igualmente” difíciles entre sí, y todos ellos son los más difíciles de los problemas *NP*.

Complejidad NP

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
complejidad

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Por otro lado, si se quiere probar $P \neq NP$, entonces en vez de buscar algún problema cualquiera, lo lógico es buscar uno de entre la lista de problemas NP completos, ya que siendo los mas difíciles, si algún problema NP no está en P , ellos tampoco lo estarán.
- Veamos cual fue el primer problema que se demostró que era NP completo.

Teorema (de Cook, 1971)

(CNF)SAT es *NP*-completo.

- Cook probó este teorema usando su reducción y luego Karp probó que también valía para la suya.
- El ruso Levin probó en forma independiente un teorema similar pero no era sobre problemas de decisión, así que a veces es llamado el teorema de Cook-Levin.

Demostración del teorema de Cook

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Prueba: no la daremos.
- En gral requiere estar familiarizado con maquinas de Turing, aunque sospecho que debe haber alguna prueba mas informal dando vuelta.
- Esencialmente hay que ver que se puede codificar **cualquier** máquina de Turing no determinística como una expresión booleana en CNF.
- Algunas veces la han dado en 4to año, pero por lo que me comentaron la prueba les ha llevado de 2 a 4 clases, y entiendo que no la dan mas.

- Karp probó no sólo que el teorema de Cook valia para su noción de reducción polinomial, sino que probó que otros 21 problemas eran *NP* completos. (según SU noción de reducibilidad, y por lo tanto, tambien para la de Cook).
- Para probar esto lo que usaba Karp era reducción **DE SAT** (o de algún otro de los problemas que ya habian sido probados *NP* completos) a ese problema.
- Esto es asi pues si σ es *NP* completo y $\sigma \leq_p \rho$ entonces ρ también es *NP* completo, pues dado $\tau \in \text{NP}$ tenemos:
 - $\tau \leq_p \sigma \leq_p \rho$
 - y es fácil ver que \leq_p es transitiva
 - asi que $\tau \leq_p \rho$.

- Pej, Karp tomó un problema ρ_1 y probó que $\text{SAT} \leq_P \rho_1$
- y luego vio que $\rho_1 \leq_P \rho_2$ y luego que $\rho_2 \leq_P \rho_3$, etc,
- lo cual prueba que ρ_1, ρ_2, ρ_3 , etc, son todos *NP*-completos.
- A la lista inicial de Karp se le han agregado miles de problemas, de todo tipo, y pocas personas creen que pueda ser que todos ellos sean polinomiales, así que esta es otra razón por la que se cree que $P \neq NP$ aunque nadie lo ha podido probar.

- Muchos de esos problemas tienen que ver con problemas sobre grafos, otros sobre otras partes de la matemática, varios sobre areas de programación, incluso problemas de biologia computacional como algunos casos de protein folding.
- Algunos juegos, pej, Sudoku, Buscaminas, Tetris y MagicTheGathering son *NP*-completos.
- (hay que buscar la definición técnica de qué significa que esos juegos sean NP completos, es decir, cual es el problema de decisión asociados a cada uno de esos juegos)
- Veamos algunos de los 21 problemas originales de Karp.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

Definición

El problema 3SAT es como CNF-SAT excepto que se requiere además que cada disjunción sea disjunción de exactamente tres literales.

Teorema (Karp)

3SAT es NP completo.

Prueba: La idea, como dije, es probar que
 $(\text{CNF-})\text{SAT} \leq_p 3\text{SAT}$

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Sea $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ una booleana instancia de (CNF)SAT, es decir una expresión booleana en CNF, con variables x_1, \dots, x_n y cada D_j una disjunción de literales.
- Tenemos que construir polinomialmente una \tilde{B} que sea instancia de 3SAT y tal que B sea satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Lo de polinomial es clave, porque si no podriamos simplemente definir \tilde{B} como 1 si B es satisfacible y 0 si no,
- pero para HACER la construcción, deberiamos primero resolver si B es o no satisfacible, y eso no se sabe como hacerlo en tiempo polinomial.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- La idea de Karp es construir $A(B) = \tilde{B} = E_1 \wedge \dots \wedge E_m$ donde cada E_j se construye a partir de cada D_j y es tal que es conjunción de disjunciones de 3 literales.
- Si D_j tiene exactamente 3 literales, se toma $E_j = D_j$.
- Si tiene menos de 3 literales, se agregan variables extras que basicamente no hacen nada mas que “rellenar” espacio para completar los 3 literales.
- Para distinguir las variables nuevas de las originales x_i , usaremos las letras “y”.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Si D_j tiene dos literales: $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j}$
 - tomamos $E_j = (\ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_j) \wedge (\ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \bar{y}_j)$
 - donde y_j es una variable nueva.
- Si D_j tiene un sólo literal: $D_j = \ell_j$, se toma:
 - $E_j = (\ell_j \vee y_{1,j} \vee y_{2,j}) \wedge (\ell_j \vee \bar{y}_{1,j} \vee y_{2,j}) \wedge (\ell_j \vee y_{1,j} \vee \bar{y}_{2,j}) \wedge (\ell_j \vee \bar{y}_{1,j} \vee \bar{y}_{2,j})$
 - con $y_{1,j}, y_{2,j}$ las variables nuevas.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- La dificultad es cuando D_j tiene mas de 3 literales.
- Supongamos $D_j = \ell_{1,j} \vee \dots \vee \ell_{k,j}$ con $k \geq 4$.
- Definimos E_j de la siguiente forma, introduciendo nuevas variables $y_{1,j}, \dots, y_{k-3,j}$

$$E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \dots \wedge F_{k-3,j}$$

donde los $F_{i,j}$ son disyunciones de 3 literales, definidos en la página siguiente.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

$$\begin{aligned} F_{0,j} &= \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j} \\ F_{i,j} &= \bar{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee \ell_{i+2,j} \\ F_{k-3,j} &= \bar{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j} \end{aligned} \quad \text{si } 1 \leq i < k-3$$

Observar que si $k = 4$ entonces la condición $1 \leq i < k - 3$ nunca se cumple, es decir, para $k = 4$ solo tenemos $F_{0,j}$ y $F_{1,j} = \bar{y}_{1,j} \vee \ell_{3,j} \vee \ell_{4,j}$.

3SAT

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- La construcción $B \mapsto A(B) = \tilde{B}$ es claramente polinomial, de hecho lineal, pues sólo agregamos un número lineal de nuevas variables y nuevas disjunciones.
- Tenemos que probar ahora que $SAT(B) = 3SAT(\tilde{B})$ es decir que B es satisfacible si y solo si \tilde{B} lo es.
- Recalquemos que \tilde{B} tiene las mismas variables de B **mas otras variables extras** asi que hay que ser cuidadoso.
- Hagamos cada implicación por separado empezando por B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Si B es satisfacible, entonces existe un asignamiento de valores a las variables de B (es decir a x_1, x_2, \dots, x_n) que la vuelve verdadera.
- Entre las variables de \tilde{B} tambien estan las x_i asi que les damos este mismo asignamiento a ellas.
- Pero \tilde{B} tiene ademas varias variables extras “ y ” a las cuales tenemos que darle un valor.
- Estas variables extras aparecen asociadas a cada D_j dependiendo de cuantos literales tenga, asi que analicemos cada caso por separado.
- Como el asignamiento hace verdadera a B , entonces hace verdadero a todos los D_j pues B es conjunción de los D_j .

B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de

Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Para el caso de D_j con 4 o mas literales, como el asignamiento de valores a las x lo vuelve verdadero y es una disjunción de literales, entonces al menos uno de sus literales debe haberse vuelto verdadero.
- Sea r tal que $\ell_{r,j}$ es verdadero con el asignamiento de valores dado. (si hay mas de uno, tomo alguno).
- Demos valores a las y que haga que $y_{i,j}$ sea verdadera para $i \leq r - 2$ y falsa para $i \geq r - 1$.
- Analicemos los distintos $F_{i,j}$.

B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Primero supongamos que $3 \leq r \leq k - 2$.
- En particular $1 \leq r - 2$ y como estamos especificando que $y_{i,j}$ es verdadera para $i \leq r - 2$, tenemos que $y_{1,j}$ es verdadera.
- Así que $F_{0,j} = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee y_{1,j}$ es verdadero.
- Y para $1 \leq i < k - 3$, como $F_{i,j} = \bar{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \vee \ell_{i+2,j}$ tiene la variable $y_{i+1,j}$ entonces $F_{i,j}$ es verdadero mientras $i + 1 \leq r - 2$, es decir, $i \leq r - 3$.

B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$

sat

- Por otro lado, como $F_{i,j}$ tiene el literal $\bar{y}_{i,j}$, y la variable $y_{i,j}$ es FALSA si $i \geq r - 1$, con lo cual el literal $\bar{y}_{i,j}$ es verdadero en ese caso, tenemos que $F_{i,j}$ también es verdadero si $i \geq r - 1$.
- Esto también vale para $i = k - 3$ pues $F_{k-3,j} = \bar{y}_{k-3,j} \vee \ell_{k-1,j} \vee \ell_{k,j}$ tiene el literal $\bar{y}_{k-3,j}$ que está evaluado a verdadero, pues $k - 3 \geq r - 1$ dado que estamos suponiendo que $r \leq k - 2$.
- Concluimos que $F_{i,j}$ es verdadero para $i \leq r - 3$ y para $i \geq r - 1$, así que queda por ver el caso $i = r - 2$.

B satisfacible $\Rightarrow \tilde{B}$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Pero $F_{r-2,j} = \bar{y}_{r-2,j} \vee y_{r-1,j} \vee \ell_{r,j}$
- y $\ell_{r,j}$ es verdadero así que $F_{r-2,j}$ es verdadero.
- Como todos los $F_{i,j}$ son verdaderos y $E_j = F_{0,j} \wedge F_{1,j} \wedge \dots \wedge F_{k-3,j}$ concluimos que E_j es verdadero en el caso $3 \leq r \leq k-2$.
- Quedan entonces los casos $r = 1, 2, k-3, k-4$ que dejamos como ejercicio.
- Veamos ahora la vuelta, es decir, \tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

\tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Supongamos que \tilde{B} es satisfacible. Entonces hay un asignamiento de valores a las variables de \tilde{B} que hace que \tilde{B} sea verdadera.
- Las variables de \tilde{B} incluyen a las x que son las variables de B , así que les asignamos a esas variables los valores que se les asignan para que \tilde{B} sea verdadera.
- Queremos ver que con ese asignamiento, B es verdadera, así que supongamos que no.
- Entonces algún D_j no es verdadero, pues $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$.
- Es fácil ver que no puede ser uno de los que tiene 3 o menos literales. (ejercicio)

\tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Sea entonces j tal que D_j tiene 4 o mas literales y D_j no evalua a verdadero con ese asignamiento.
- Esto significa que el asignamiento de valores a las variables vuelve a todos los $\ell_{r,j}$, $r = 1, 2, \dots, k$ igual a 0 pues D_j es la disjunción de ellos.
- Pero estamos suponiendo que \tilde{B} evalua a verdadero, con lo cual E_j debe evaluar a verdadero.
- Como E_j es la conjunción de los $F_{i,j}$ concluimos que todos los $F_{i,j}$ evaluan a verdadero.
- Pero si evaluamos $F_{i,j}$ teniendo en cuenta que todos los $\ell_{r,j}$ evaluan a 0, obtenemos:

\tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

$$\begin{aligned} F_{0,j} &= y_{1,j} \\ (1 \leq i < k-3) \rightarrow F_{i,j} &= \bar{y}_{i,j} \vee y_{i+1,j} \\ &= (y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}) \\ F_{k-3,j} &= \bar{y}_{k-3,j} \end{aligned}$$

\tilde{B} satisfacible $\Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- En definitiva, como $y_{i,j} \Rightarrow y_{i+1,j}$ es verdad para $1 \leq i < k - 3$ y la primera $y_{1,j} = F_{0,j}$ es verdadera, entonces todas las $y_{i,j}$ evalúan a verdadera.
- Esto es un absurdo pues $\bar{y}_{k-3,j} = F_{k-3,j}$ también evalúa como verdadera.
- Fin.

3COLOR

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

Teorema (Karp)

3COLOR es NP completo.

- Prueba:
- Veremos que $3\text{-SAT} \leq_p 3\text{-COLOR}$.
- Para ello, dada una instancia B de 3-SAT,
 - i.e., una expresión booleana en CNF con exactamente 3 literales en cada disyunción
- crearemos polinomialmente una instancia $A(B) = G$ de 3-COLOR.
 - i.e., un grafo G
- tal que B sea satisfacible si y solo si $\chi(G) \leq 3$.

Prueba de 3COLOR es NP completo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Lo de polinomial es clave, pues si no sería trivial: definiríamos G como un triángulo si B es satisfacible y como K_4 si no.
- Pero eso requiere primero DECIDIR si B es o no satisfacible, que es justo lo que no sabemos hacer en tiempo polinomial.
- Supongamos que las variables de B son x_1, \dots, x_n
- y que $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$,
- con las disyunciones $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$
 - $\ell_{k,j}$ literales
- Construiremos el grafo G dando sus vértices y sus lados.

Vértices de G

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

■ Los vértices son:

1 $2n$ vértices v_ℓ , uno por cada literal ℓ

■ (es decir, por cada variable x_i hay dos vértices v_{x_i} y $v_{\bar{x}_i}$)

2 $6m$ vértices $\{e_{k,j}\}_{j=1,\dots,m}^{k=1,2,3} \cup \{a_{k,j}\}_{j=1,\dots,m}^{k=1,2,3}$

■ Es decir, para cada $j = 1, 2, \dots, m$, seis vértices
 $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$

3 Dos vértices especiales, s y t

- Observar que los vértices se construyen en tiempo polinomial, porque simplemente los listamos siguiendo los nombres de las variables, el número de las disyunciones y son $2 + 2n + 6m$.

Lados de G

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

- Los lados son tales de que construyen dos estructuras disjuntas, mas algunos lados extras que las unen.
- Una estructura es un abanico de triangulos todos con un vértice en común.
- La otra es una serie de “garras” disjuntas.
- Estas estructuras se unirán por medio del vértice s y con lados directos entre los extremos de las garras y algunos extremos del abanico.

Lados de G

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

■ Los lados son:

1 $3m$ lados $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{1,j}a_{3,j}$, $a_{3,j}a_{2,j}$. ($j = 1, 2, \dots, m$)

- Es decir, para cada j tenemos un triángulo con los vértices $a_{1,j}a_{2,j}$, $a_{3,j}$.

2 $3m$ lados $e_{k,j}a_{k,j}$, ($k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, m$.)

- Por lo tanto los e son como “uñas” que salen de los a . Para cada j los a y los e forman una especie de “garra”.

3 $2n$ lados tv_ℓ , uno por cada literal ℓ .

4 n lados $v_x v_{\bar{x}}$, uno por cada variable x .

- Es decir, para cada variable x tenemos un triángulo con los vértices t , v_x , $v_{\bar{x}}$.

5 El lado st

6 $3m$ lados $se_{k,j}$ ($k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, m$.)

7 $3m$ lados $e_{k,j}v_{\ell_{k,j}}$ ($k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, m$.)

- Los hemos construido simplemente leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y son $1 + 3n + 12m$ así que la construcción de G es polinomial.
- (aunque el número fuese polinomial en n, m , si para decidir donde va cada lado tuviera que hacer un cálculo no polinomial, la construcción no sería polinomial, pero acá está especificado en forma simple donde va cada uno).
- Para que se entienda un poco más como es la construcción, damos un ejemplo.
- Supongamos que

$$B = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

Ejemplo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

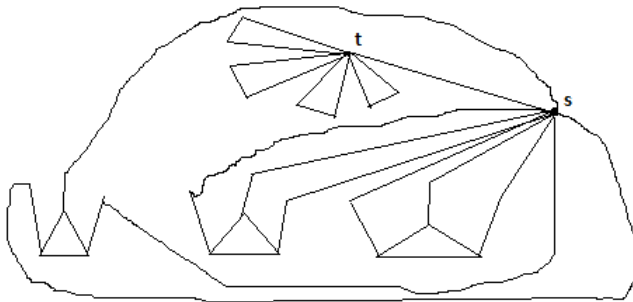
Entonces tenemos $n = 4$ variables y $m = 3$ disjunciones, cada una, como corresponde, con 3 literales.

Ejemplo

PNP2

Daniel
Penazzi

Ahora debemos dibujar todos los lados $e_{k,j}v_{\ell_{k,j}}$



NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

Ejemplo

PNP2

Daniel
Penazzi

$$D_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

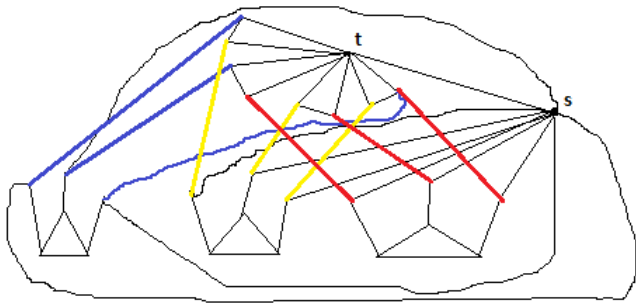
3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat



Prueba de 3COLOR es NP completo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial
NP completo
Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Volviendo a la prueba general, como G tiene triángulos, entonces $\chi(G) \geq 3$.
- Así que $\chi(G) \leq 3$ si y solo si $\chi(G) = 3$.
- Entonces lo que hay que probar que: B es satisfacible si y solo si $\chi(G) = 3$.

Prueba de 3COLOR es NP completo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \bar{B} \text{ sat}$

$\bar{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Vamos a necesitar distinguir entre las variables y los asignamientos de valores a las variables.
- Un asignamiento de valores, dado que las variables son booleanas, es darle valor 1 o 0 a cada variable.
- Por lo tanto un asignamiento de valores es un vector de bits en $\{0, 1\}^n$.
- Así que lo denotaremos por \vec{b} .
- Y $x(\vec{b})$ es el valor que asume la variable x en ese asignamiento.
- Por ejemplo si $n = 4$, $x_2(1, 0, 1, 1) = 0$, pero $x_4(1, 0, 1, 1) = 1$.

Prueba de 3COLOR es NP completo

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Similarmente denotaremos por $\ell(\vec{b})$ el valor que asume el literal ℓ
- Asi por ejemplo
$$\bar{x}_3(1, 0, 1, 1) = 1 - x_3(1, 0, 1, 1) = 1 - 1 = 0.$$
- Y $D_j(\vec{b})$ el valor que asume toda la disjunción y $B(\vec{b})$ el valor que asume toda la expresión booleana.
- Veamos primero la implicación B satisfacible
$$\Rightarrow \chi(G) = 3.$$

B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Esta es fácil pero engorrosa: debemos dar un coloreo propio con 3 colores de G , así que debemos colorear todos los vértices de G , uno por uno.
- Tenemos que usar que hay un asignamiento de valores a las variables de B que la vuelve verdadera.
- Es decir, existe un $\vec{b} \in \{0, 1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- **IMPORTANTE** por algún motivo, posiblemente por memorizar sin entender, muchos en el final hacen todo el coloreo sin usar nunca que existe un $\vec{b} \in \{0, 1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$. Una prueba de ese tipo, aunque ocupe muchas líneas, está mal y no suma puntos.

B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Coloreamos los vértices v_ℓ por medio de $c(v_\ell) = \ell(\vec{b})$
- Al ir coloreando los vértices, iremos chequeando que el coloreo sea propio.
- Para ello, chequearemos que en cada lado donde los dos vértices ya hayan sido coloreados, los extremos tengan colores distintos.
- Al chequearlo, diremos que el lado “no crea problemas”.

$$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Ya tenemos coloreados los vértices v_ℓ y $v_x v_{\bar{x}}$ forman lado, así que tenemos que chequearlos.
- Pero $c(v_{\bar{x}}) = \bar{x}(\vec{b}) = 1 - x(\vec{b}) \neq x(\vec{b}) = c(v_x)$ así que $v_x v_{\bar{x}}$ no crea problemas
- Coloreemos ahora $c(s) = 1$ y $c(t) = 2$.
- Como $c(s) \neq c(t)$ entonces st no crea problemas
- Como $c(t) = 2$ y $c(v_\ell) \in \{0, 1\}$, entonces tv_ℓ no crea problemas
- Ahora debemos colorear las garras, es decir los e y a .
- Aca tenemos que usar que $B(\vec{b}) = 1$ (hasta ahora no lo hicimos)

$$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B \text{ sat}$

- Como $B(\vec{b}) = 1$ y $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$, entonces $D_j(\vec{b}) = 1 \ \forall j$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces por lo de arriba para todo j existe al menos un k_j tal que $\ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$. (\dagger)
- Si hay mas de un tal k_j , elegimos **uno sólo**, pej el primero.
- Coloreamos, para cada j :
 - $c(a_{k_j,j}) = 2$
 - Para los $a_{r,j}$ con $r \neq k_j$, que son los dos que quedan, coloreamos uno de ellos con 1, y el otro con 0.
- Esto significa que el triangulo formado por los $a_{k,j}$ tiene los tres vértices de distinto color, por lo tanto no crea problemas

$$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

- Quedan los e , que están unidos con s , algunos v_ℓ y los a .
- Coloreamos, para cada j :
 - $c(e_{r,j}) = 2$ para los dos $r \neq k_j$.
 - y: $c(e_{k_j,j}) = 0$.
- Como para $r \neq k_j$ tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(a_{r,j}) \in \{0, 1\}$ entonces $e_{r,j}a_{r,j}$ no crea problemas para esos r .
- Como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(a_{k_j,j}) = 2$ entonces $e_{k_j,j}a_{k_j,j}$ no crea problemas
- Por lo tanto las “garras” están coloreadas de forma tal de no tener problemas internos.
- Hay que ver que pasa con los lados que las conectan con el resto del grafo.

$$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

- Primero, veamos s , que esta conectado con todos los e :
- Pero $se_{i,j}$ no crea problemas pues $c(s) = 1$ y $c(e_{i,j}) \in \{2, 0\}$.
- Sólo nos queda ver los lados $e_{r,j}v_{\ell_{r,j}}$.
- El caso $r \neq k_j$ es facil: tenemos $c(e_{r,j}) = 2$ y $c(v_{\ell_{r,j}}) \in \{0, 1\}$ asi que $e_{r,j}v_{\ell_{r,j}}$ no crea problemas para esos r .

$$B \text{ sat} \Rightarrow \chi(G) = 3$$

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
 sat

- Queda el caso k_j .
- Tenemos $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = \ell_{k_j,j}(\vec{b}) = 1$ (por \ddagger)
- Por lo tanto, como $c(e_{k_j,j}) = 0$ y $c(v_{\ell_{k_j,j}}) = 1$, entonces $e_{k_j,j}v_{\ell_{k_j,j}}$ no crea problemas
- Hemos terminado de colorear todos los vértices con 3 colores y chequeado que el coloreo es propio.
- Por lo tanto, hemos completado la implicación B satisfacible $\Rightarrow \chi(G) = 3$.
- Veamos la vuelta.

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ satisfacible

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Suponemos entonces que existe un coloreo propio c de G con tres colores.
- A partir de c debemos definir un $\vec{b} \in \{0, 1\}^n$ tal que $B(\vec{b}) = 1$.
- Otra vez, si nunca lo definen, o no usan el coloreo c , la prueba de esta parte no vale nada.
- Definimos \vec{b} usando el coloreo c de la siguiente forma, con la notación $[]$ que vimos en la parte de flujos:

$$b_i = [c(v_{x_i}) = c(s)]$$

- Es decir $b_i = 1$ si $c(v_{x_i}) = c(s)$ y $b_i = 0$ si $c(v_{x_i}) \neq c(s)$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ satisfacible

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Sea ℓ un literal cualquiera tal que $c(v_\ell) = c(s)$.
- Si ℓ es una variable: $\exists i$ con $\ell = x_i$
 - Entonces decir $c(v_\ell) = c(s)$ es lo mismo que decir $c(v_{x_i}) = c(s)$.
 - Por la definición de \vec{b} eso implica que $b_i = 1$.
 - Con lo que $\ell(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$.
- Si ℓ es negación de una variable: $\exists i$ con $\ell = \bar{x}_i$
 - 1 Entonces decir $c(v_\ell) = c(s)$ es lo mismo que $c(v_{\bar{x}_i}) = c(s)$.
 - 2 Como $v_{x_i} v_{\bar{x}_i} \in E$ entonces $c(v_{x_i}) \neq c(v_{\bar{x}_i})$.
 - 3 Juntando [1] y [2] concluimos que $c(v_{x_i}) \neq c(s)$.
 - 4 El punto [3] implica que $b_i = 0$.
 - 5 Entonces $\ell(\vec{b}) = \bar{x}_i(\vec{b}) = 1 - x_i(\vec{b}) = 1 - b_i = 1 - 0 = 1$.
- En cualquiera de los casos hemos probado que $c(v_\ell) = c(s) \Rightarrow \ell(\vec{b}) = 1$.

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Sea ahora $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.
- Como los $a_{k,j}$ forman un triángulo, y c colorea G con tres colores, entonces los tres colores deben estar representados en ese triángulo.
- En particular, existe un q tal que $c(a_{q,j}) = c(t)$.
- Analicemos el color posible del $e_{q,j}$ asociado a $a_{q,j}$.
 - 1 $e_{q,j}a_{q,j} \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(a_{q,j}) = c(t)$.
 - 2 $e_{q,j}s \in E \Rightarrow c(e_{q,j}) \neq c(s)$.
- Por lo tanto $e_{q,j}$ debe tener el "tercer" color, es decir, el color que no es el color de s ni el color de t .

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP

completitud

Reducción

Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \tilde{B} \text{ sat}$

$\tilde{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- (Como $st \in E$, entonces necesariamente $c(s) \neq c(t)$ así que efectivamente sólo queda un color libre para $e_{q,j}$)

1 $v_{\ell_{q,j}} e_{q,j} \in E \Rightarrow c(v_{\ell_{q,j}}) \neq c(e_{q,j}).$

2 $v_{\ell_{q,j}} t \in E \Rightarrow c(v_{\ell_{q,j}}) \neq c(t).$

- Como $e_{q,j}$ tiene el tercer color, los dos puntos anteriores implican que $v_{\ell_{q,j}}$ no puede tener ni el tercer color ni el color de t .

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$ satisfacible.

PNP2

Daniel
Penazzi

NP
completitud

Reducción
Polinomial

NP completo

Teorema de Cook

Teoremas de
Karp

3SAT

Construcción

$B \text{ sat} \Rightarrow \vec{B} \text{ sat}$

$\vec{B} \text{ sat} \Rightarrow B \text{ sat}$

3COLOR

Construcción de G

$B \text{ sat}$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$\chi(G) = 3 \Rightarrow B$
sat

- Pero si $v_{\ell_{q,j}}$ no tiene ni el color de t ni el tercer color, sólo le queda tener el color de s : $c(v_{\ell_{q,j}}) = c(s)$, pues sólo hay 3 colores disponibles.
- Probamos antes que eso implica que $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$.
- Como $D_j = \ell_{1,j} \vee \ell_{2,j} \vee \ell_{3,j}$ entonces $\ell_{q,j}(\vec{b}) = 1$ implica que $D_j(\vec{b}) = 1$.
- El j era cualquiera en $\{1, 2, \dots, m\}$, es decir, hemos probado que $D_j(\vec{b}) = 1$ para todo j .
- Como $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$, lo anterior implica que $B(\vec{b}) = 1$ así que B es satisfacible y hemos concluido la prueba.