Lautaro Bachmann

Ejercicio 3 *(3.5 pts.)*

a) *(1.5 Pts.)* Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}3^n}(3x-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}3^n}.(3x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}\cancel{3^n}}.\cancel{3}^n.(x-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}.(x-\frac{1}{3})^n \Rightarrow C_n = \frac{1}{n^{1/4}}, \; a = \frac{1}{3}$$

Como $C_n \neq 0 \;\forall n \geq 1$, podemos aplicar criterio del cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{1/4}}}{\frac{1}{n^{1/4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}}{(n+1)^{1/4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/4}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^{1/4} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}\right)^{1/4} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ por criterio del cociente como $0 < L < \infty \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$

Es decir, el radio de convergencia es $R = 1$.

Ahora veamos el intervalo de convergencia:

Calculemos el extremo izquierdo del intervalo y veamos si la serie converge en dicho extremo:

$$a - R = \frac{1}{3} - 1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}\left(\frac{-2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}.(-1)^n$$

$$\left|\; \frac{-2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}} = -1\right.$$

Veamos si es posible aplicar criterio para series alternantes:

- Comprobemos si el límite es igual a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/4}} = \frac{1}{\infty^{1/4}} = \frac{1}{\infty} = 0 \; \checkmark$$

- Comprobemos si C_n es decreciente y positiva:

$C_n \geq C_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n^{1/4}} > \frac{1}{(n+1)^{1/4}}$, lo cual es cierto, ya que $n^{1/4} < (n+1)^{1/4} \Rightarrow \frac{1}{n^{1/4}} > \frac{1}{(n+1)^{1/4}}$

Como C_n está formado por el cociente de dos polinomios positivos, podemos afirmar que $C_n > 0 \;\forall n \geq 1$

Por ende, como C_n cumple con los anteriores items, por criterio de series alternantes llegamos a que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n$ converge (y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n$ tambien converge)

Ahora hagamos lo mismo con el otro extremo:

$a+R = \frac{1}{3}+1 = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}} \cdot 1^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$ diverge

$\frac{4}{3}-\frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} = 1$

Criterio de serie p con $p<1$ (1)

Finalmente, como en el extremo izquierdo del intervalo la serie converge y en el extremo derecho la serie diverge, tenemos que el intervalo de convergencia es $I = \left[\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(b) *(2 Pts.)* Represente la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ como una serie de potencias centrada en $a = -3$ y halle el radio de convergencia.

Vamos a aplicar el teorema que nos dice que $\forall x$ en el intervalo de convergencia de una serie de potencias, la serie define una función cuyo dominio es el intervalo de convergencia

$f(x) = g'(x)$ con $g(x) = \frac{-1}{x}$

Veamos si $\frac{-1}{x}$ puede ser representado mediante una serie geometrica, es decir, hay que hallar un r tal que $\frac{1}{1-r} = \frac{-1}{x}$:

$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -\frac{x^{-1}}{1}+C$

$= \frac{-1}{x}$

$\frac{-1}{x} = \frac{-1}{x-(-3)+(-3)} = \frac{-1}{(x+3)-3} = \frac{-1}{-3\left(\frac{-(x+3)}{3}+1\right)} = +\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{-(x+3)}{3}+1} = +\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{(x+3)}{3}}$ $\therefore r = \frac{(x+3)}{3}$

$\Rightarrow \frac{-1}{x} = +\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot (x+3)^n$

$\therefore g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot (x+3)^n$, sin embargo, lo que nos interesa es $g'(x)$.

como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot (x+3)^n$ es una serie geometrica, sabemos que su $R = 1$

$\Rightarrow$ la serie es derivable y continua en el intervalo $(-3-1, -3+1) = (-4, 2)$

Por ende, tomemos la derivada de $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot (x+3)^n$

Por teo. $\rightarrow h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1} \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} (x+3)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (x+3)^{n-1}$

Finalmente, la representación de $f(x)$ como serie de pot. es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} (x+3)^{n-1}$