$$\frac{|x-6|}{x+2} < x-1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{(x+2)^2} < (x-1)^2 = (x-6)^2 < (x-1)^2 \cdot (x+2)^2$$

$$= 0 < (x-1)^2 \cdot (x+2)^2 - (x-6)^2 \Rightarrow (x^2+x-2)^2 - (x-6)^2$$

$$= \left[x^2+x-2 + x-6\right] \cdot \left[x^2+x-2 - (x-6)\right]$$

$$= (x^2+2x-8) \cdot (x^2 \cancel{+x} - 2 \cancel{-x} + 6) = (x^2+2x-8) \cdot (x^2+4)$$

$(x^2+4) \rightarrow$ Siempre positivo

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(4 \cdot -8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\frac{-2+6}{2} = \frac{4}{\cancel{2}} = 2$$

$$\frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{\cancel{2}} = -4$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
x^2+2x-8	+	−	−	+
x^2+4	+	+	+	+
	+	−	−	+

$$\frac{\overbrace{|x-6|}^{f(x)}}{x+2} < \overbrace{x-1}^{g(x)}, \quad x \neq -2$$

Pensemos a los miembros de la inecuacion como funciones.
Primero que nada veamos el punto de interseccion

Caso 1: $x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$

$$\frac{x-6}{x+2} = x-1 \Rightarrow x-6 = (x-1).(x+2) \Rightarrow 0 = x^2 + \cancel{x} - 2 - \cancel{x} + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = 0 \longrightarrow \text{No tiene raices reales}$$

Caso 2: $x-6 < 0 \Rightarrow x < 6$

$$\frac{-(x-6)}{x+2} = x-1 \Rightarrow -x+6 = (x-1).(x+2) \Rightarrow 0 = x^2+x-2+x-6$$

$$\Rightarrow 0 = x^2+2x-8 \Rightarrow 0 = (x-2).(x+4) \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -4$$

$\therefore$ las funciones se intersecan en $x = -4$ y $x = 2$

Veamos que funcion es mayor teniendo en cuenta sus puntos de intersección y los puntos criticos:

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$\frac{\lvert x-6\rvert}{x+2} < x-1$	No	Si	No	Si

$\frac{|-5-6|}{-5+2} < -5-1 \Rightarrow -\frac{11}{3} < -6 \rightarrow$ No

$\frac{|-3-6|}{-3+2} < -3-1 \Rightarrow -9 < -4 \rightarrow$ Si

$\frac{|-1-6|}{-1+2} < -1-1 \Rightarrow 7 < -2 \rightarrow$ No

$\frac{|3-6|}{3+2} < 3-1 \Rightarrow \frac{3}{5} < 2 \rightarrow$ Si

Por ende, $\frac{|x-6|}{x+2} < x-1$ en $(-4,-2) \cup (2,\infty)$

$b)$ Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad:

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} < (x+4)$$

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} < x+4 \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{x+4}{x-1}\right|}_{f(x)} < \underbrace{x+4}_{g(x)}, \quad x \neq 1$$

Tomemos a los miembros de la desigualdad como funciones.
Primero veamos donde intersecan:

Caso 1: $\frac{x+4}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-4] \cup (1,\infty)$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$\frac{x+4}{x-1} = x+4 \Rightarrow x+4 = (x+4).(x-1)$

$\Rightarrow 0 = x^2+3x-4-x-4 \Rightarrow 0 = x^2+2x-8$

$\Rightarrow 0 = (x-2).(x+4) \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -4$

$\therefore$ las funciones intersecan con $x=2$ y $x=-4$ en el intervalo $(-\infty,-4] \cup (1,\infty)$

Caso 2: $\frac{x+4}{x-1} < 0 \Rightarrow x \in (-4,1)$

$-\left(\frac{x+4}{x-1}\right) = x+4 \Rightarrow \frac{-x-4}{x-1} = x+4 \Rightarrow -x-4 = (x+4).(x-1)$

$\Rightarrow 0 = x^2+3x\cancel{-4}+x\cancel{+4} \Rightarrow 0 = x^2+4x$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4.1.0}}{2} = \frac{-4 \pm 4}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = \frac{-8}{2} = -4$

$\therefore$ las funciones intersecan con $x=0$ en el intervalo $(-4,1)$

Teniendo en cuenta los puntos de interseccion y los puntos criticos, veamos en que intervalos se cumple la desigualdad $\left|\frac{x+4}{x-1}\right| < x+4$

	x	f(x)	g(x)	Resultado
$(-\infty,-4]$	-5	$\left\lvert\frac{-5+4}{-5-1}\right\rvert = \left\lvert\frac{1}{6}\right\rvert = \frac{1}{6}$	$-5+4=-1$	$f(x) > g(x)$
$(-4,0)$	-3	$\left\lvert\frac{-3+4}{-3-1}\right\rvert = \left\lvert\frac{-1}{4}\right\rvert = \frac{1}{4}$	$-3+4=1$	$f(x) < g(x)$
$(2,\infty)$	3	$\left\lvert\frac{3+4}{3-1}\right\rvert = \left\lvert\frac{7}{2}\right\rvert = \frac{7}{2}$	$3+4=7$	$f(x) < g(x)$

$\therefore$ $f(x) < g(x)$ para los intervalos $(-4,0)$ y $(2,\infty)$

Por ende, la desigualdad se cumple en el intervalo $(-4,0) \cup (2,\infty)$

b) Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} < |x^2-4|$$

$$\frac{x-2}{x+1} < |x^2-4| \Rightarrow \underbrace{\frac{x-2}{x+1}}_{f(x)} < \underbrace{|(x+2).(x-2)|}_{g(x)}$$

Veamos en que intervalos el valor absoluto es menor o mayor a cero:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2).(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Ahora veamos donde intersecan las funciones:

Caso 1: $|x^2-2^2| \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

$$\frac{x-2}{x+1} = x^2-2^2 \Rightarrow x-2 = (x^2-2^2).(x+1) \Rightarrow 0 = x^3+x^2-4x-4-x+2$$

$$\Rightarrow x^3+x^2-5x-2 \Rightarrow (x^2+3x+1).(x-2)$$

x^3	x^2	x	x^0
1	1	-5	-2
	2	6	2
1	3	1	0

$x=2 \Rightarrow (x-2)=0$

$\Rightarrow x^2+3x+1$

$$\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Metodo Tradicional

El anterior metodo puede tornarse engorroso, volvamos al metodo original

$x \neq -2$

$$\frac{|x-6|}{x+2} < x-1 \Rightarrow \frac{|x-6|}{x+2} - x + 1 < 0 \Rightarrow \frac{|x-6| - x.(x+2) + x+2}{x+2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{|x-6| - x^2 - 2x + x + 2}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{|x-6| - x^2 - x + 2}{x+2} < 0$$

Caso 1: $x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$

$$\frac{\cancel{x}-6 - x^2 - \cancel{x} + 2}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4}{x+2} < 0$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 0^2 - 4.-1.-4 = -16$

$\therefore$ la curva no corta al eje x

Como hay un cuadrado negativo siendo restado por 4, sabemos que la curva siempre es negativa

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$
$-x^2-4$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$+$
$\frac{-x^2-4}{x+2}$	$+$	$-$

$\therefore x \in (-2,\infty) \cap [6,\infty) \Rightarrow x \in [6,\infty)$

Caso 2: $x-6 < 0 \Rightarrow x < 6$

$$\frac{-(x-6) - x^2 - x + 2}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{-x+6-x^2-x+2}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2-2x+8}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{-1.(x+4).(x-2)}{x+2} < 0$$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-1.2} = \frac{2 \pm 6}{-2}$

$x_1 = \frac{2+6}{-2} = \frac{8}{\cancel{-2}} = -4$

$x_2 = \frac{2-6}{-2} = \frac{\cancel{-4}}{\cancel{-2}} = 2$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
-1	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-1(x+4)(x-2)}{x+2}$	$+$	$-$	$+$	$-$

$\therefore x \in [(-4,2) \cup (2,\infty)] \cap (-\infty,6)$

$\Rightarrow x \in (-4,2) \cup (2,6)$

Por ende, teniendo en cuenta los resultados de ambos casos, tenemos que la desigualdad se cumple en el intervalo $(-4,2) \cup (2,6) \cup [6,\infty) = (-4,2) \cup (2,\infty)$.

b) Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad:

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} < (x+4)$$

$x \neq 1$

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} < x+4 \Rightarrow \left|\frac{x+4}{x-1}\right| < x+4 \Rightarrow -(x+4) < \frac{x+4}{x-1} < x+4$$

$$\Rightarrow -x-4 < \frac{x+4}{x-1} \wedge \frac{x+4}{x-1} < x+4 \Rightarrow 0 < \frac{x+4}{x-1} + x + 4 \wedge \frac{x+4}{x-1} - x - 4 < 0$$

$$0 < \frac{x+4}{x-1} + x + 4 \Rightarrow 0 < \frac{x+4+x.(x-1)+4.(x-1)}{x-1} \Rightarrow 0 < \frac{\cancel{x}\cancel{+4}+x^2\cancel{-x}+4x\cancel{-4}}{x-1}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x^2+4x}{x-1} \Rightarrow 0 < \frac{x.(x+4)}{x-1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4.1.0}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4+4}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$

$$x_2 = \frac{-4-4}{2} = \frac{\cancel{-8}^{4}}{\cancel{2}} = -4$$

Useless

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x.(x+4)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore\ x \in (-4,0) \cup (1,\infty)$

$$\frac{x+4}{x-1} - x - 4 < 0 \Rightarrow \frac{x+4-x.(x-1)-4.(x-1)}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{x+4-x^2+x-4x+4}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+2x-4x+8}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+8}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1.(x+4).(x-2)}{x-1} < 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.-1.8 = 4+32 = 36$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{36}}{2.-1} = \frac{2 \pm 6}{-2}$$

$$x_1 = \frac{2+6}{-2} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{-2}} = -4, \quad x_2 = \frac{2-6}{-2} = \frac{\cancel{-4}^{2}}{\cancel{-2}} = 2$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
-1	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-1\cdot(x+4)(x-2)}{x-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$

$\therefore\ x \in (-4,1) \cup (2,\infty)$

Por ende, la desigualdad se cumple para el intervalo

$[(-4,0)\cup(1,\infty)] \cap [(-4,1)\cup(2,\infty)] = (-4,0)\cup(2,\infty)$

b) Grafique el conjunto de soluciones de la siguiente desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} < |x^2-4|$$

$$\frac{x-2}{x+1} < |x^2-4| \Rightarrow |x^2-4| > \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow x^2-4 < -\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \cup x^2-4 > \frac{x-2}{x+1}$$

Mal

$$x^2-4 < \frac{-x+2}{x+1} \Rightarrow \frac{-x+2}{x+1} - x^2+4 < 0 \Rightarrow \frac{-x+2-x^2(x+1)+4(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x+2-x^3-x^2+4x+4}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x^3-x^2+3x+6}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{(x-2)(-x^2-3x-3)}{x+1}$$

	x^3	x^2	x	x^0
	-1	-1	3	6
2		-2	-6	-6
	-1	-3	-3	0

$x=2 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow -x^2-3x-3$

$\Delta = 9-4\cdot-1\cdot-3 = 9-12 = -4$

∴ tiene raíces imaginarias y no corta al eje x.

Por ende, por como está compuesta asumimos que siempre es negativa.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x-2$	−	−	+
$-x^2-3x-3$	−	−	−
$x+1$	−	+	+
Signo final	−	+	−

∴ $x \in (-1, 2)$

Mal

$$x^2-4 > \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} - x^2+4 > 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^3-x^2+4x+4}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^3-x^2+5x+2}{x-1} > 0 \Rightarrow 0 > \frac{(x-2)(-x^2-3x-1)}{x-1}$$

	x^3	x^2	x	x^0
	-1	-1	5	2
2		-2	-6	-2
	1	-3	-1	0

$x=2 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow -x^2-3x-1$

$\Delta = 9-4\cdot-1\cdot-1 = 9-4 = 5$

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{5}}{2\cdot-1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$-2,6$ $\quad$ $-0,38$

$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2$

	$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$	$(2, \infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-x^2-3x-1$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Resultado	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \quad x \in \left(-\infty, \underbrace{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}_{}\right) \cup \left(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2, \infty)$$

$-2,6$ $\quad -0,38$

$$x^2-4 < -\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \quad \cup \quad x^2-4 > \frac{x-2}{x+1}$$

$-2,6$ $\quad -0,38$

$$\Rightarrow (-1, 2) \cup \left[\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2, \infty)\right]$$

$$\Rightarrow \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty) \quad \checkmark$$