Parte práctica

Dar una descripción implícita o caracterizar el subespacio

Planteó un sistemas de ecuaciones de los vectores generadores igualados a un vector genérico y las filas vacías me describen el subespacio

Dar una base W de los vectores generadores

Verifico que sean LI planteando un sistemas de ecuaciones poniendo los vectores de manera horizontal (me tiene que coincidir las filas con los vectores generadores) y busco eliminar algún vector SIN permutar filas. Eliminar el vector cuyas filas quedaron nulas del conjunto generador

Extender una base de W para generar todo V

Verifico que los generadores de W sean LI y si dimW < dimV, agrego los vectores canónicos de V en una matriz poniendo los vectores como fila y busco eliminar los vectores suficientes (SIN TOCAR LOS ORIGINALES) hasta que dimW = dimV.

Dar la imagen y el núcleo de una transformación lineal
Planteo la matriz A que es tomar $T(e_i)$ (vectores canónicos) y expresarlos en su fila correspondiente. Luego planteó la ecuación AX = Y donde Y = (y1, y2, … yn), reduzco a merf y la imagen va a estar caracterizada por las filas nulas. Cada restricción a la imagen es una dimensión menos que puede tener

Para el núcleo, tomo AX = 0 (uso la merf que me quedo de la imagen) y el núcleo queda dado de forma paramétrica

Pasar de una coordenada a otra
Tengo una base B = {v1, … vn} y quiero expresar a w en base B

[v]B = ƛ1v1 + … + ƛnvn

Planteo un sistema de ecuaciones y resuelvo

Matriz de cambio de base

P = [Id]B'B = tomo los vectores de B' y los expreso en coordenadas de B como columna y armo la matriz
La inversa de P (o sea P^{-1}) es [Id]BB'

Mono, epi o iso morfismos?

Es monomorfismo si:
- Inyectiva
- NuT = 0
- dimT = 0
- T(un conjunto LI) es LI

Es epimorfismo si:
- Im(T) = W
- dim(ImT) = dim(W)

Es isomorfismo si es mono y epi a la vez

Transformación nose

[T(v)]B' = [T[BB' [v]B

Matriz de transformación de una composición
[U o T]BB'' = [U]B'B'' [T]BB'

Calcular autovalores y autovectores de una transformación lineal
Planteo la matriz A la cual es igual a $T(e_i)$ (vectores canónicos) en cada fila.
Busco los autovalores planteando el polinomio característico de A: det(xId - A).
Busco las raices de ese polinomio y esos son los autovalores.
Planteo el autoespacio de cada autovalor planteando (ƛId -A) = 0 donde ƛ es el autovalor que estoy trabajando y busco llegar a una MERF y planteo el autoespacio de forma parametrica o generada.
Luego si los vectores que forman el autoespacio son iguales a la dimensiones de la transformacion etnonces es diagonalizable.

Teoremas que entran

Propieades P1, P2, P3, P4 del producto escalar (Proposicion 1.2.2)
Expresando en coordenadas $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = \langle w_1, \ldots, w_n)$

P1 $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$
$v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n = w_1v_1 + w_2v_2 + \ldots + w_nv_n$
Por conmutatividad del producto

P2 $\langle v, w + u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle = \langle w + u, v\rangle$

Sea $u = (u_1, \dots, u_n)$

$\langle v, w + u\rangle = \langle(v_1 \dots v_n), (w_1+u_1, \dots, w_nu_n)\rangle$
$= v_1(w_1+u_1) + \dots + v_n(w_n+u_n)$
$= v_1w_1 + v_1u_1 + \dots + v_nw_n + v_nu_n$

Luego reordenando los terminos me queda

$= v_1w_1 + \dots + v_nw_n + v_1u_1 +\dots + v_nu_n$

Que es lo mismo que $\langle v,w\rangle + \langle v,u\rangle$

P3 $\langle ƛv, w\rangle = ƛ\langle v, m\rangle$ y $\langle v, ƛm\rangle = ƛ\langle v, m\rangle$

$\langle ƛv, w\rangle = ƛv1w1 + \dots + ƛvnwn$
$= ƛ (v1w1 + \dots + vnwn)$

$ƛ\langle v,m\rangle = ƛ(v1w1 + \dots + vnwn\rangle$

P4 $\langle v, v\rangle > 0$ excepto que $v = 0$

Proposición 2.7.2

1) Sea $A, B, C \in M_{nxn} (K)$ (sean A,B,C matrices cuadradas en un cuerpo K)
Tales que $BA = Id_n$ y $AC = Id_b$ entonces $B = C$

Demostración
B = B Id
que por hipótesis
B = B (AC)
por asociativa del producto de matrices
= (BA)C
por hipotesis
= Id C
Id es neutro
= C

2) Si A es invertible la inversa es única

Sean B y C inversas de A (BA = AB = Id y CA=AC=Id) o sea BA = Id y CA = Id, luego por el teorema anterior B=C

Teorema 2.7.4 (2)
Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (la inversa del producto es el producto de las inversas)

Demostración
Compruebo que $B^{-1}A^{-1}$ es inversa a la izquierda y derecha de AB

Por izquierda
$(B^{-1}A^{-1})AB$
= por asociativa
$B^{-1}(A^{-1}A)B$
= $\{A^{-1}A = Id\}$
$B^{-1}IdB$
= {Id es nuestro}
$B^{-1}B$
=
Id

Ahora por derecha
$AB(B^{-1}A^{-1})$
= {asociativa}
$A(BB^{-1})A^{-1}$
≡ {es id}
$AidA^{-1}$
≡ {Neutro}
AA^{-1}
Id

Teorema 2.7.9
A es invertible si y sólo si los sistemas AX=Y y AX=0 tiene solución única

A es invertible ⇒ AX=Y tiene sol unica
Sea X_0 solucion del sistema AX=Y
$AX_0=Y$ ⇒
(multiplico A^1 de ambos lados)
$A^{-1}AX_0 = A^{-1}Y$ ⇒
($A^{-1}A$ es igual a Id asi que neutro
$X_0 = A^{-1}Y$

AX=Y tiene solucion unica ⇒ AX=0 tiene una unica solucion trivial
Tomando Y=0 se cumple

AX=0 tiene una única solución trivial ⇒ A es invertible
Sea R la MERF equivalente a A. Si R tiene una fila nula, entonces el sistema AX=0 tiene más de una solución lo cual es un absurdo (por hipótesis). Por lo tanto, R no tiene final nulas y como es cuadrada y es MERF, R = Id. Luego A es equivalente por filas a ID y por

otro teorema decir que sea equivalente por filas a Id es lo mismo que decir que sea invertible

Proposicion 2.8.3

Fórmula del determinante de una matriz triangular superior

Si A es triangular superior y los elementos de la diagonal son $d_1 \ldots d_n$

Entonces detA = $d_1.d_2 \ldots d_n$

Se prueba por induccion sobre n

Si n=1, entonces el determinante vale $d_{1,}$. Si n > 1, A(1|1) tambien es triangular superior con valores $d_2 \ldots d_b$ en la diagonal principal. Entonces usando el desarrollo de determinante por columna nos queda que la primera columna solo tiene un termino ya que tiene un solo coeficiente no nulo en d_1 en la primera posicion. Por lo tanto

det(A) = d_1 det(A(1|1), que por hipotesis inductiva equivale a: $d_1(d_2 \ldots d_n)$

Corolario 2.8.8

Si la matriz tiene dos filas iguales o una luna entonces el detA = 0

Supongamos que tenemos una matriz con dos filas iguales, Luego intercambiando sus filas tenemos que por propiedades del determinante que al aplicar el cambio de fila det(A) = -det(A), y el único número cuyo opuesto es igual es el 0, por lo tanto det(A) = 0

Supongamos que tenemos una fila nula en a. Si multiplicamos esa fila por una constante, por propiedades del determinante, multiplicar una fila por una constante ‘c ≠ 1’ multiplica el determinante por esa misma constante pero al multiplcar la fila nula nos queda la misma fila entonces det(A) = cdet(A) por lo tanto detA = 0

REVISAR ESTE

Colorario 2.8.10 (1)

Si A es invertible $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Como A es invertible si y solo si det(A) ≠ 0 entonces $det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1})$.

Como AA^{-1} = Id, etnonces 1 = det(Id) = $det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1})$. Por lo tanto $det(A^{-1}) = 1/det(A)$

(2)

det(AB) = det(BA)

det(AB) = det(A)det(B) = det(B)det(A) = det(BA)

Proposición 2.9.8

ƛ es autovalor de A si y sólo si ƛ es raíz del polinomio característico de a

ƛ es autovalor

⇔ ∃ v ≠ 0 tq Av = ƛv

⇔ 0 = ƛv - Av = ƛIdv - Av = (A - ƛId)v

⇔ (ƛId - A)X = 0 tiene solución no trivial

⇔ $X_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = 0$
⇔ λ es raíz del polinomio característico
Proposición 3.1.2

1) $\lambda . 0 = 0 \quad \forall \lambda \in K$

Como 0 es neutro de la suma en V entonces 0 = 0 + 0
$\lambda . 0 = \lambda (0 + 0)$
{distribuyo}
$\lambda . 0 = \lambda 0 + \lambda 0$
{sumo en ambos lados $-\lambda$ 0}
$\lambda.0 - \lambda.0 = \lambda.0 + \lambda.0 - \lambda.0$
{opuestos}
$0 = \lambda.0 + 0$
{neutro de la suma}
$0 = \lambda.0$

2) $0.v = 0 \ \forall v \in V$

Como 0 es neutro de la suma en V entonces 0 = 0 + 0
$v.0 = v (0 + 0)$
{distribuyo}
$v.0 = v.0 + v.0$
{sumo en ambos lados -v.0}
$v.0 - v.0 = v.0 + v.0 - v.0$
{opuestos}
$0 = v.0 + 0$
{neutro de la suma}
$0 = v.0$

3) Si $\lambda \in K$, $v \in V$, $v \neq 0$ y $\lambda.v = 0$ entonces $\lambda = 0$

Supongamos que $\lambda.v = 0$ y $\lambda \neq 0$

$\lambda.v = 0 \equiv \lambda^{-1}(\lambda.v) =$
$(\lambda^{-1}.\lambda).v = 0$
$1.v = 0$
$v = 0$
Lo cual contradice la hipótesis. Como el absurdo vino de suponer $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda = 0$.

4) $(-1)\, v = -v \quad \forall v \in V$

$(-1).v + v = (-1) .v + 1.v$
por distributiva
$(-1 + 1)v = 0 . v = 0$
Es decir $(-1)v + v = 0$
por lo tanto (-1).v es el opuesto de v (que es -v)

Observacion 3.2.2
El vector nulo pertenece a todos los subespacios

Si W subespacio de V, entonces 0 ∈ W, como W ≠ vacio, tomo cualquier v ∈ W y como el subespacio es cerrado por la suma tenemos que 0 . w ∈ W. Y como 0.w = 0 entonces 0 ∈ W

Teorema 3.2.6
Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $v_{1,}$ … v_k ∈ V. Entonces

W = {$ƛ_1v_1$ + … + $ƛ_kv_k$: $ƛ_1$ … $ƛ_k$ ∈ K}
es un subespacio vectorial
El conjunto de las combinaciones lineales de los vectores de V es un subespacio vectorial

Sean $ƛ_1v_1$ + … + $ƛ_kv_k$ y u_1v_1 + … + u_kv_k dos combinaciones lineales de los vectores de V

($ƛ_1v_1$ + … + $ƛ_kv_k$) + (u_1v_1 + … + u_kv_k) = $ƛ_1v_{1,}$+ u_1v_1 + …. + $ƛ_kv_k$ + u_kv_k
Que sacando factor común queda
(ƛ1 + u1)v1 + … + (ƛk + uk)vk
lo cual es una combinación lineal de v1 … vk

Si ƛ ∈ K y ƛ1v1 + …. + ƛkvk es combinación lineal de v1 … vk
entonces

ƛ(ƛ1v1 + … + ƛkvk) = ƛ(ƛ1v1) + … + ƛ(ƛkvk)
= (ƛƛ1)v1 + … + (ƛƛk) vk
que es una combinación lineal por lo tanto pertenece a W

Teorema 3.2.8
La interseccion de subespaacios es un subespcios

Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios vectorial y sea
W = la interseccion de todos los subespacios de I

Como 0 pertence a todos los subespacios por lo tanto en la intersección de de los subespacios de W_i es no vacia

(a) si $w_1, w_2 \in W$, tenemos que $w_1, w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, luego, como W_i es subespacio vectorial, $w_1 + w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto $w_1 + w_2 \in W$;

(b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $w \in W_i$ para todo $i \in I$ y, por lo tanto, $\lambda w \in W_i$ para todo $i \in I$. En consecuencia $\lambda w \in W$.

Lema 3.3.7
Sea S un subconjunto LI de un espacio vectorial V. Suponiendo que w es un vector de V que no pertenece al subespacio generado por S. Entonces S U {w} es LI

Suponiendo que v_1 …. , v_n son vectores de S y sean ƛ1 … ƛn, ƛ ∈ K tq

ƛ1v1 + … + ƛnvn + ƛw = 0

Hay que probar que los escalres son iguales a 0, pero supongamos que no son iguales a 0.
Entonces pasando ƛw a la derecha de la ecuacion y dividiando por -ƛ nos queda

w = (-ƛ1/ƛ)v1 + … + (-ƛn/ƛ)vn

Lo cual contradice la hipotesis de que w no es combinacion lineal. Por lo tanto ƛ = 0
y como S es un conjunto LI, todos los esacalres son iguales a 0

Corolario 3.3.11

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y dimW < dimV

Si W = {0}, entonces dimW = 0, como W ⊆ V, tenemos que V es no nulo y por lo tanto dimW = 0 < dimV

Si W ≠ {0}, sea S un subconjunto LI de W. Claramente S es LI en V, por lo tanto |S| < dim(V).

El axioma de buena ordenación nos garantiza que existe S subconjunto LI de W con |S| máximo

Si S no genera a W, entonces existiria w ∈ W y w /∈/ ⟨S⟩. Como S es LI, la union de S y {w} es LI, entonces está incluido en W y tiene cardinal mayor a S. Esto es absurdo por la maximalidad de S.

Por lo tanto S es un conjunto LI que genera a W, es decir, S es una base de W

Como W es un subespacio propio de V, existe un vector v en V que no esta en W.

Agregando v a la base S de W se obtiene un subconjunto LI de V. Por lo tanto dimW < dimV

Observacion pagina 138

Si T es transformación lineal, entonces T(0) = 0

T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)

Por lo tanto restando T(0) de ambos lados

-T(0) + T(0) = -T(0) + T(0) + T(0)

0 = 0 + T(0)

0 = T(0)

Teorema 4.2.2

T : V → W

ImT C W y Nu(T) C V son subespacios vectoriales

Im(T) ≠ vacio, pues T(0) = 0 ∈ Im(T)

Si T(v1), T(v2) ∈ Im(t) y ƛ K, entonces

T(v1) + T(v2) = T(v1 + v2) ∈ Im(T) y ƛT(v1) = T(ƛv1) ∈ Im(T)

$Nu(T) \neq$ Vacio pues $T(0) = 0 \in Nu(T)$
Si $v, w \in V$ tales que $T(v) = 0$ y $T(w) = 0$, entonces
$T(v) + T(w) = T(v + w) = 0$
por lo tanto $v + w \in Nu(T)$
Si $\lambda \in K$, entonces $T(\lambda v) = \lambda(Tv) = \lambda.0 = 0$, luego $\lambda v \in Nu(T)$

Teorema 4.2.8

$dim(ImT) + dim(NuT) = dimV$

Sean $n = dimV$, $k = dim(NuT)$

hay que probrar que $n - k = dim(ImT)$

Sea {v1, … , vk) una base de NuT. Entonces se puede extender la base del nucleo con vectores {vk+1, … , vn) en V tales que {v1, …, vn} es una base de V.

Vamos a probar que {T(vk+1), … , T(vn)} es una base de Im(t)

TERMINAR

Proposición 4.3.2
T es un monomorfismo si y solo si $Nu(T) = 0$

Demuestro la ida
Si $T(v) = 0$, como $T(0) = 0$, tenemos que $T(v) = T(0)$, y como T es inyectiva (es un monomorfismo), implica que $v = 0$
Demuestro la vuelta
Sea $v1, v2 \in V$ tal que $T(v1) = T(v2)$. Enontces
$0 = T(v1) - T(v2) = T(v1 - v2)$
Por lo tanto $v1 - v2 \in Nu(T)$. Por hipotesis, $v1 - v2 = 0$, es decir $v1 = v2$

4.3.3 (1)
T es monomorfis si y solo si T de un conjunto LI es Li
Ida
Sea {v1, … , vk} un cojunto LI en V y sean $\lambda 1, \dots, \lambda k \in K$ tales que

$$\lambda 1T(v1) + \dots + \lambda nT(vn) = 0$$
entonces
$$0 = T(\lambda 1v1 + \dots + \lambda nvn)$$

Como T es inyectiva, $NuT = 0$,
$$\lambda 1v1 +... + \lambda nvn = 0$$
lo cual implica qe los λ son todos nulos por lo tanto T(v1), …., T(vn) son Li

Vuelta
Sea $v \in V$ tq $T(v) = 0$. Demuesto que $v = 0$.
Sea $\{v1, \ldots, vn\}$ una base de V, entonces existen escalares $\lambda 1, \ldots \lambda n \in K$ tales que

$$v = \lambda 1 v1 + \ldots + \lambda n vn$$

Por lo tanto

$$0 = T(v) = T(\lambda 1 v1 + \ldots + \lambda n vn)$$

Como la base es LI, por hipotesis, $\{T(V1), \ldots T(vn)\}$ es LI y por lo tanto los escalres son todos nulos, lo cual implica que $v = 0$. Como el nucleo de T es 0, T es un monomorfismo

Proposición 4.3.3 (2)
T es epimorfismo si y solo si T de un conjunto de generados de V es un conjunto de generadores de W

Ida
Sea $\{v1, \ldots ,vn\}$ un conjunto de generadores de V y sea $w \in W$. Como T es epimorfismo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Ahora bien
v es combinacion lineal del conjunto de generadores
Por lo tanto
$w = T(v) = T(\lambda 1 v1 + \ldots + \lambda n vn) = \lambda 1 T(v1) + \ldots. = \lambda n T(vn)$

Es decir, cualquier $w \in W$ se puede escribir como combinacion lineal de las transformaciones del conjunto generador por lo tanto generan W.

Vuelta
Sea $\{v1, \ldots, vn\}$ una base de V, por hipotesis $T(v1), \ldots, T(vn)$ generan W, es decir dado cualquier $w \in W$ existen $\lambda 1, \ldots, \lambda n \in K$ tales que

$$w = \lambda 1 T(v1) + \ldots + \lambda n T(vn)$$

y por lo tanto $w = T(v)$ con

$$v = \lambda 1 v1 + \ldots + \lambda n vn$$

Proposicion 4.5.2
Sea V espacio vectorial de dimension finita y sea $B = \{v1, \ldots, vn\}$ una base ordenada de V. Entonces, para cada $v \in V$, existen unicos $x1, \ldots, xn \in K$ tales que

$$v = x1v1 + \ldots + xnvn$$

Como $v1, \ldots, vn$ generan v, existen $x1, \ldots.m\ xn \in K$ tales que v sea combinacion lineal de los vectores y los escalares. Sean $y1, \ldots , yn \in K$ tales que $v = y1v1 + \ldots + ynvn$

Como v es igual a la combinacion lineal de los vectores v con los escalares x y los vectores v con los escalares y, restando meimbro a mie

Como $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, restando miembro a miembro obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) v_i.$$

Ahora bien, $v_1, \ldots, v_n$ son LI, por lo tanto todos los coeficientes de la ecuación anterior son nulos, es decir $x_i - y_i = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y entonces $x_i = y_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. □

4.7.2

Los autoespacios de una transformacion son subespacios vectoriales

Sean v1, v2 ∈ V tales que Tv1 = ƛv1 y Tv2 = ƛv2 entonces

T(v1 + v2) = T(v1) + T(v2) = ƛv1 + ƛv2 = ƛ(v1 + v2)

es decir si v1 v2 ∈ Vƛ, probamos que v1 + v2 ∈ Vƛ

T(cv) = cT(v1) = cƛv1 = ƛ (cv1)

por lo tanto es cerrado por el producto por escalares

4.7.3

Si los autovalores son distintos entre sí, entonces sus autovectores son LI

Paso inductivo. Supongamos que el enunciado es verdadero para el caso $m-1$ con $m > 1$, (hipótesis inductiva o HI), y probemos entonces que esto implica que es cierto para m. Debemos ver que si

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots c_m v_m = 0 \qquad (*)$$

entonces $c_1 = \cdots c_m = 0$. Multipliquemos $(*)$ por λ_1, obtenemos:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2 + \cdots c_m \lambda_1 v_m = 0. \qquad (**)$$

También apliquemos T a $(*)$ y obtenemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots c_m \lambda_m v_m = 0. \qquad (***)$$

Ahora a $(**)$ le restamos $(***)$ y obtenemos:

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \cdots c_m(\lambda_1 - \lambda_m) v_m = 0. \qquad (4.7.2)$$

Como, por hipótesis inductiva, $v_2, \ldots, v_m$ son LI, tenemos que $c_i(\lambda_1 - \lambda_i) = 0$ para $i \geqslant 2$. Como $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ para $i \geqslant 2$, obtenemos que $c_i = 0$ para $i \geqslant 2$. Por $(*)$ eso implica que $c_1 = 0$ y por lo tanto $c_i = 0$ para todo i. □