PARTE 1

1)

(a) Determine todos los valores de c para los cuales la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|}\,dx$ converge. *Ayuda: analice por separado los casos $c<0$, $c=0$ y $c>0$.* ✓

Calculemos la integral indefinida

$x \geq 0$

$u = -c.x$

$du = -c\,dx \Rightarrow \frac{du}{-c} = dx$

$$\int e^{-c.x}\,dx = \int e^{u}\,\frac{du}{-c} = \frac{1}{-c}.\int e^{u}\,du$$

$$= \frac{-1}{c}.e^{u} = \frac{-e^{-c.x}}{c} = \frac{-1}{c.e^{cx}} + C$$

$x < 0$

$u = c.x$

$du = c\,dx \Rightarrow \frac{du}{c} = dx$

$$\int e^{c.x}\,dx = \int e^{u}\,\frac{du}{c} = \frac{1}{c}.\int e^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{c}.e^{u} = \frac{e^{c.x}}{c} + C$$

Calculemos la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c.x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{c.x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-c.x}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{e^{c.x}}{c}\Big|_{t}^{0}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{c.e^{cx}}\Big|_{0}^{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{e^{c.0}}{c} - \frac{e^{c.t}}{c}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{c.e^{c.t}} - \left(\frac{-1}{c.e^{c.0}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{c} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{c.t}}{c} + \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{c.e^{c.t}} + \frac{1}{c.1}$$

$$= \frac{2}{c} - \frac{\lim_{t\to-\infty} e^{c.t}}{\lim_{t\to-\infty} c} + \frac{\lim_{t\to\infty} -1}{c.\lim_{t\to\infty} e^{c.t}}$$

$$= \frac{2}{c} - \frac{0}{c} + \frac{-1}{c.\infty} = \frac{2}{c} + \frac{-1}{\infty} = \frac{2}{c} + 0$$

$$= 2/c$$

Conclusion

Como la integral converge a $2/c$, sabemos que la integral converge $\forall c \neq 0$, ya que la division por 0 no está definida

Ejercicio 2 *(20 pts.)*

(a) Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$ y sea $T_{2,4}(x)$ su polinomio de Taylor de grado 2 y centrado en $a = 4$. Estimar el error que se comete si se aproxima el número $\sqrt{3}$ por el valor de $T_{2,4}(x)$ en $x = 3$.

Calculemos las primeras 3 derivadas de $f(x)$

$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2.\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2.\sqrt{4}} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{-1}{4.\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(4) = \frac{-1}{4.\sqrt{4^3}} = \frac{1}{4.\sqrt{4^2}.\sqrt{4}} = \frac{1}{32}$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{x^{5/2}} = \frac{3}{8.\sqrt{x^5}} \Rightarrow f'''(4) = \frac{3}{8.\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8.\sqrt{4^4}.\sqrt{4}} = \frac{3}{128.2} = \frac{3}{256}$$

Usemos la formula de Lagrange para el resto

$$R_{2,4}(3) = \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(3-4)^3 = \frac{\frac{3}{8.\sqrt{t^5}}}{6} \cdot (-1)^3 = \frac{\cancel{3}}{8.\sqrt{t^5}.\cancel{6}_2} \cdot -1$$

$$= \frac{-1}{16.t^2.\sqrt{t}}$$

Acotemos t por x

$$R_{2,4}(3) = \frac{-1}{16.3^2.\sqrt{3}} = \frac{-1}{144.\sqrt{3}}$$

Conclusion

El error que se comete al aproximar el valor de $\sqrt{3}$ con el valor de $T_{2,4}$ es de $\frac{1}{144.\sqrt{3}}$

3)

(a) Represente la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ como una serie de potencias centrada en $a = 2$. Determine el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

???

Representemos la funcion como serie de potencias

(1) Teo. serie geometrica

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{+2-2+x} = \frac{1}{2-(-x+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{(-x+2)}{2}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x+2}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{-1}\cdot\frac{(-x+2)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{-2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 2^n}\cdot(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}\cdot(x-2)^n$$

Representación de la serie en x=2

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\, 2^{-1-n}\,(-2+x)^n$$

Veamos intervalo de convergencia

Como usamos una serie geometrica con $r = \dfrac{-x+2}{2}$, por teorema de la serie geometrica sabemos que la serie converge si $|r| < 1$

Veamos para que valores de x se cumple esto

$$|r| < 1 \Rightarrow \left|\frac{-x+2}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-x+2}{2} < 1$$

$$\Rightarrow -2 < -x+2 < 2 \Rightarrow -4 < -x < 0$$

$$\Rightarrow -4\cdot -1 > -x\cdot -1 > 0\cdot -1 \Rightarrow 4 > x > 0$$

Conclusion intervalo

Por ende, el intervalo de convergencia es $I = (0,4)$

3)

(b) Halle el intervalo/dominio de definición de la función $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}^{c_n} (x-10)^n$ y calcule su derivada g'. ¿Tienen g y g' el mismo dominio? Justifique su respuesta.

Hallemos el intervalo de convergencia de la serie de potencias

Usemos criterio del cociente

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\cdot 3}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\cancel{3^n}} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$= 3 \cdot \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = 3 \sqrt{\frac{1}{1+0}}$$

$$= 3 \cdot \sqrt{1} = 3$$

$\therefore$ por crit del cociente, como $0 < L < \infty \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{3}$

Veamos convergencia para $x = a - R$

$$x = 10 - \frac{1}{3} = \frac{30-1}{3} = \frac{29}{3}$$

$$x = \frac{29}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{29}{3} - 10\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\cancel{3^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$

Usemos crit. para series alternantes

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0 \checkmark$$

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0 \Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow n \leq n+1 > 0 \Rightarrow \text{se cumple } \forall n > 0$$

Por ende, como el límite dio 0 y vimos que la sucesion es positiva y decreciente, por crit. de series alternantes sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge X

La convergencia del radio es $\frac{1}{3}$, El intervalo de convergencia del radio es $\frac{29}{3} \leq x < \frac{31}{3}$

Verificar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{29}{3} - 10\right)^n$: Es divergente

Veamos convergencia para $X = a + R$

$X = 10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

$X = \frac{31}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{31}{3} - 10\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1^n}{\cancel{3^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$\therefore$ por criterio de serie p, como $p < 1$, tenemos que la serie diverge

Conclusion intervalo de convergencia

Como la serie converge para $X = a - R$ y diverge para $x = a + R$, tenemos que el intervalo de convergencia es $I = [a - R, a + R) = \left[\frac{29}{3}, \frac{31}{3}\right)$, por lo tanto el dominio de $g(x)$ es igual a $\left[\frac{29}{3}, \frac{31}{3}\right)$

Ahora derivemos $g(x)$

$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot (x - 10)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{\sqrt{n}} \cdot (x - 10)^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot n^{1 - 1/2} \cdot (x - 10)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot n^{1/2} \cdot (x - 10)^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \sqrt{n} \cdot (x - 10)^{n-1}$

Veamos convergencia en los extremos

Como sabemos que el radio de convergencia permanece igual al derivar una serie de potencias, tenemos que $R = 1/3$ para $g'(x)$

$X = a - R$

$X = 29/3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{29}{3} - 10\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{(-1)^n}{(-1)^1}}{\frac{3^n}{3^1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{3^n} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{(-1)^n}{(-1)^1} \cdot \frac{3}{\cancel{3^n}}$

$= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{-1} \cdot (-1)^n = -3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{n} \cdot (-1)^n}_{a_n} =$

$\downarrow$

Usemos crit. de divergencia

$$\lim_{n\to\infty} |d_n| = \lim_{n\to\infty} |\sqrt{n}\cdot(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} n} = \sqrt{\infty} = \infty$$

$\therefore$ como $\lim_{n\to\infty} d_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |d_n| = 0$, por crit. de divergencia la serie diverge para $x = a - R = \frac{29}{3}$

Conclusion

Como al comprobar el dominio de $g'(x)$ nos dio que $g'(x)$ diverge para $x = \frac{29}{3}$, siendo que $g(x)$ converge para $x = 29/3$, somos capaces de afirmar que $g(x)$ y $g'(x)$ no poseen el mismo dominio, ya que difieren en por lo menos un extremo.

PARTE 2

1)

(b) Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Encuentre el o los vectores unitarios $\mathbf{u}$ tales que la derivada direccional de f en el punto $(0,2)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ tiene el valor 1.

Calculemos gradiente

$$\nabla f(x,y) = (2.4x^3 - 2x\ ,\ 2y-2) = (8x^3-2x\ ,\ 2y-2)$$

Planteemos ecuacion con derivada direccional

$$D_u f(0,2) = 1 \Rightarrow \langle \nabla f(0,2), (U_1, U_2) \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \langle (8.0-2.0, 2.2-2), (U_1, U_2) \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \langle (0,2), (U_1,U_2) \rangle = 1$$

$$\Rightarrow 0 \cdot U_1 + 2.U_2 = 1 \Rightarrow 2U_2 = 1$$

$$\Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}$$

Veamos que valores puede tomar U_1 para que U sea unitario

$$\left\|\left(U_1, \frac{1}{2}\right)\right\| = 1 \Rightarrow \sqrt{U_1^2 + \frac{1^2}{2^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{U_1^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4.U_1^2+1}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{4.U_1^2+1}}{\sqrt{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4.U_1^2+1}}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{4.U_1^2+1} = 2$$

$$\Rightarrow 4.U_1^2 + 1 = 2^2 \Rightarrow 4.U_1^2 = 4-1 \Rightarrow U_1^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow U_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} U_1 = +\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ U_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Conclusion

En base a lo visto anteriormente, tenemos que los vectores unitarios U tales que la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(0,2)$ en la direccion de U tiene valor 1 son los vectores $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) (b) Considere la curva $\gamma(t) = (2\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Dibuje aproximadamente la imagen de γ para $t \geq 0$, calcule el vector tangente a la curva en $t_0 = \pi/4$ y obtenga la ecuación de la recta tangente a la imagen de γ en el punto $\gamma(t_0)$.

Grafiquemos

Evaluemos $\gamma(t)$ en $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$ y $t=1$

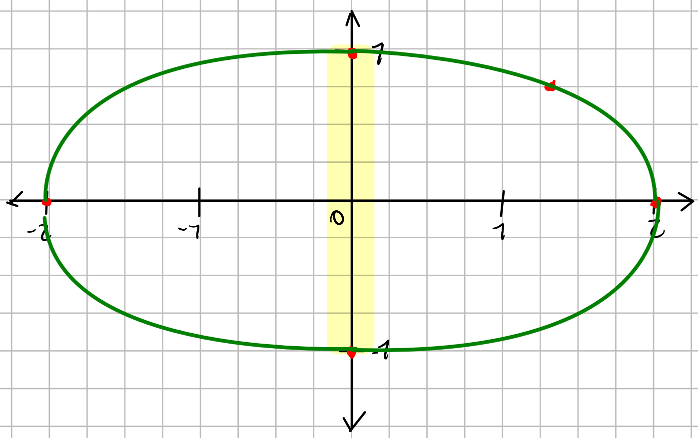
$\gamma(0) = (2.\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = (2.1, 0) = (2,0)$

$\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\gamma(1) = (2.0, 1) = (0,1)$

$\gamma(\pi) = (2.-1, 0) = (-2,0)$

$\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (2.0, -1) = (0,-1)$



Calculemos $\gamma'(t)$

$\gamma'(t) = (2.(\cos(t))', (\operatorname{sen}(t))') = (2.-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$
$= (-2.\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

Calculemos vector tangente

$\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (-2.\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4})) = (-\cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Obtengamos ecuacion recta tangente

La recta tangente a $\gamma(t)$ en t_0 es la recta que pasa por el punto $\gamma(t_0)$ y es generada por el vector tangente a $\gamma(t)$ en t_0, por lo cual, la ecuacion de la recta es la siguiente

$R = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \gamma(\frac{\pi}{4}) + t.\gamma'(\frac{\pi}{4}), \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

$= \{X \in \mathbb{R}^2 / X = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + t(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

4)

Ejercicio 4 *(20 pts.)*

(a) Encuentre la ecuación del plano P que pasa por los puntos $\underbrace{(0,0,10)}_{P_0}$, $\underbrace{(1,0,8)}_{Q}$ y $\underbrace{(0,2,9)}_{R}$.

Planteo

La ecuación del plano P, que pasa por los puntos mencionados en el enunciado es la ecuación del plano que pasa por P_0 y es generado por los vectores $V = Q - P_0$ y $W = R - P_0$

Calculemos los vectores V y W

$$V = (1,0,8) - (0,0,10) = (1,0,-2)$$

$$W = (0,2,9) - (0,0,10) = (0,2,-1)$$

Ecuación del plano P

$$P = \{ X \in \mathbb{R}^3 / X = P_0 + t.V + s.W, \text{ con } s,t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^3 / X = (0,0,10) + t.(1,0,-2) + s(0,2,-1), \text{ con } s,t \in \mathbb{R} \}$$

4) (b) Calcule el volumen del prisma sólido cuya base es el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$ y cuya tapa está contenida en el plano P del inciso anterior.

Planteo

Busquemos representar al plano P como funcion para luego utilizarlo en una integral doble que tiene como region al rectangulo R

Obtengamos vector normal a P

$$N = V \times W = (1,0,-2) \times (0,2,-1)$$
$$= (0.-1-(2.-2), -(1.-1-0.-2), 1.2-0.0)$$
$$= (-(-4), -(-1), 2) = (4,1,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Planteemos ecuacion cartesiana

sea $X = (x,y,z)$, $X \in \mathbb{R}^3$

$$\langle X - P_0, N\rangle = 0 \Rightarrow \langle (x,y,z) - (0,0,10), (4,1,2)\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle (x-0, y-0, z-10), (4,1,2)\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle (x, y, z-10), (4,1,2)\rangle = 0$$
$$\Rightarrow 4x + y + 2.(z-10) = 0$$
$$\Rightarrow 4x + y + 2z - 20 = 0$$

Despejemos z

$$4x + y + 2z - 20 = 0 \Rightarrow 4x + y - 20 = -2z \Rightarrow \frac{4x + y - 20}{-2} = z$$
$$\Rightarrow \frac{-4x - y + 20}{2} = z \Rightarrow \frac{-4x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{20}{2} = z$$
$$\Rightarrow -2x - \frac{y}{2} + 10 = z$$

Definamos funcion

$$z = -2x - \frac{y}{2} + 10 \Rightarrow f(x,y) = -2x - \frac{y}{2} + 10$$

Calculemos volumen

Teniendo en cuenta que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 2$, tenemos lo siguiente

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$$

Calculemos la primer integral

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 -2x - \frac{y}{2} + 10\, dx = \int_0^1 -2x\, dx - \int_0^1 \frac{y}{2}\, dx + \int_0^1 10\, dx$$

$$= -2 \cdot \int_0^1 x\, dx - \frac{y}{2} \cdot \int_0^1 dx + 10 \cdot \int_0^1 dx$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) + \left(\frac{-y}{2} + 10 \right) \cdot \left(x \Big|_0^1 \right)$$

$$= -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right) + \left(\frac{-y}{2} + 10 \right) \cdot (1 - 0) = \cancel{-2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \left(\frac{-y}{2} + 10 \right) \cdot 1$$

$$= -1 - \frac{y}{2} + 10 = -\frac{y}{2} + 9$$

Calculemos la integral iterada

$$\int_0^2 \int_0^1 -2x - \frac{y}{2} + 10\, dx\, dy = \int_0^2 \frac{-y}{2} + 9\, dy = \int_0^2 \frac{-y}{2} dy + \int_0^2 9\, dy$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^2 y\, dy + 9 \cdot \int_0^2 dy$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^2 \right) + 9 \cdot \left(x \Big|_0^2 \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 9 \cdot (2 - 0) = \frac{-1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{2}^1 + 9 \cdot 2$$

$$= -1 + 18 = 17$$

Conclusion

El volumen del prisma solido cuya base es el rectangulo R y cuya tapa está contenida en el plano P es de $17u^3$