ETIQUETAS: MD2::(01)Grafos

¿Que es un grafo?

Es un par ordenado $G = (V, E)$ donde v y E cumplen ciertas propiedades

¿Que es V en el grafo $G = (V, E)$?

V es un conjunto cualquiera
Extra: Siempre supondremos V finito

¿Que es E en el grafo $G = (V, E)$?

E es un subconjunto del conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V

En el grafo $G = (V, E)$ se cumple que {{c2::$E \subseteq$}} {{c1::$\{A \subseteq V : |A| = 2\}$}}

¿Cómo se llaman los elementos de V en el grafo $G = (V, E)$?

Vértices

¿Cómo se llaman los elementos de E en el grafo $G = (V, E)$?

Lados

¿Con que letra se denota la cantidad de elementos de V en el grafo $G = (V, E)$?

n

¿Con que letra se denota la cantidad de elementos de E en el grafo $G = (V, E)$?

m

¿Cómo será abreviado un elemento $\{x, y\} \in E$ en el grafo $G = (V, E)$?

xy

¿Cuales son los extremos del lado xy en el grafo $G = (V, E)$?

x e y

Como xy denota {{c1::el conjunto $\{x, y\}$}} entonces es claro que {{c1::$xy = yx$}}

¿Como se llaman los grafos donde el orden de los elementos de un lado importan?

Grafos dirigidos

¿Cuando es útil la representación gráfica de un grafo?

Para grafos con pocos vértices o lados
Extra: a medida que el grafo se vuelve mas grande se vuelve casi inútil.

¿Que es un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$?

Es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$

¿Que es importante que se cumpla para que $H = (W, F)$ sea un subgrafo de $G = (V, E)$?

Que H sea en si mismo un grafo
Extra: No cualquier par (W, F) con $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$ será un subgrafo porque necesitamos que si un lado está, los dos extremos del lado estén

¿Que son los vecinos de $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

Los vértices que forman un lado con x

¿Como se los llama a los vértices que forman un lado con $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

Vecinos de x

¿Cómo se lo llama al conjunto de vecinos de un vértice?

Vecindario

¿Cómo se denota el vecindario de $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

$$\Gamma(x)$$

$\Gamma(x) =$ {{c1::$y \in V : xy \in E$}}

¿Cómo se llama la cardinalidad de $\Gamma(x)$ para $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

El grado de x

¿Que es el grado de $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

$$|\Gamma(x)|$$

¿Cómo se denota el grado de $x \in V$ en el grafo $G = (V, E)$?

$$d(x)$$

¿Cómo se denota el menor de todos los grados de un grafo?

$$\delta$$

¿Cómo se denota el mayor de todos los grados de un grafo?

$$\Delta$$

$\delta =$ {{c1::$\min\{d(x) : x \in V\}$}}

$\Delta =$ {{c1::$\max\{d(x) : x \in V\}$}}

¿Cuando un grafo es regular?

Cuando $\delta = \Delta$
Extra: Es decir, todos los grados iguales

¿Cómo se denota un grafo cíclico?

$$C_n$$

¿Cual es el mínimo n para un grafo cíclico?

$$3$$

¿Que estructura cumple el grafo cíclico C_n?

- Tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Tiene lados $\{12, 23, \ldots, (n-1)n, n1\}$

¿Cómo se denota un grafo completo?

$$K_n$$

¿Cual es el mínimo n para un grafo completo?

$$1$$

¿Que estructura cumple el grafo completo K_n?

- Tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Tiene lados $\{ij : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i < j\}$

¿Cuantos lados tiene C_n?

n lados

¿Cuantos lados tiene K_n?

$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ lados

C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es {{c1::un ciclo de n puntos}}

$d_{C_n}(x) =$ {{c1::2}} para todo vértice de C_n

$d_{K_n}(x) =$ {{c1::$n-1$}} para todo vértice de K_n

¿Los grafos cíclicos son regulares?

Sí

¿Los grafos completos son regulares?

Sí

C_n es {{c1::2}}-regular

K_n es {{c1::$(n-1)$}}-regular

¿Que es un camino entre 2 vértices x, y?

Es una sucesión de vértices $x_1, \ldots, x_r$ tales que:

- $x_1 = x$
- $x_r = y$

- $x_i x_{i+1} \in E, \forall i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$

{{c2::$x \sim y$}} si y solo si {{c1::existe un camino entre x e y}}

¿Que son las componentes conexas de G?

Son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia $x \sim y$

¿En que se basa la relación de equivalencia $x \sim y$?

En que exista un camino entre x e y

¿Cuando un grafo es conexo?

Cuando tiene una sola componente conexa

¿Los grafos cíclicos son conexos?

Sí

¿Los grafos completos son conexos?

Sí

¿Que es un árbol?

Es un grafo conexo sin ciclos.
Extra: No tiene como subgrafo a un C_k

¿Cual es la complejidad de DFS y BFS?

$$O(m)$$

¿Que hace el algoritmo básico de DFS o BFS?

Dado un vértice x, encontrar todos los vértices de la componente conexa de x

¿Cómo es el algoritmo de determinación de las componentes conexas con BFS/DFS?

1. Tomar $W = \emptyset, i = 1$
2. Tomar un vértice cualquiera x de V
3. Correr $BFS(x)$ o $DFS(x)$
4. Llamarle C_i a la componente conexa encontrada en el paso anterior.
5. Hacer $W = W \cup (\text{vértices de } C_i)$
6. Si $W = V$, retornar $C_1, C_2, \ldots, C_i$

7. Si no, hacer $i = i + 1$, tomar un vértice $x \notin W$ y repetir desde el paso 3

¿Que forma tiene la componente conexa encontrada por BFS o DFS?

Son árboles

¿Cómo agrega los vecinos DFS?

De a uno por vez

¿Que estructura de datos usa DFS?

Una pila

¿Cómo agrega los vecinos BFS?

Todos los vecinos juntos

¿Que estructura de datos usa BFS?

Una cola

¿Que es un coloreo (de los vértices)?

Es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito

¿Cuando un coloreo es propio?

Si $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$
Es decir, los extremos de un lado tienen distinto color entre si

¿Como se denotan los colores que se usan para el coloreo?

$$S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

¿Que es un grafo k -coloreable?

Un grafo que tiene un coloreo propio con k colores

¿Que es el número cromático del grafo G?

$$\min\{k : \exists \text{ un coloreo propio con k colores de G }\}$$

¿Cómo se denota el número cromático del grafo G?

$\chi(G)$

¿Cómo se demuestra que $\chi(G) = k$?

- Dar un coloreo propio de G con k colores. (Probar que es propio).
- Probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G.

¿Que se prueba al dar un coloreo propio de G con k colores?

Que $\exists$ un coloreo propio con k colores de G

¿Que se prueba al probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G? (Suponiendo que tenemos un coloreo con k colores)

Que k es el mínimo número tal que existe un coloreo propio con k colores de G

Comparación de números cromáticos:
Si H es un subgrafo de G, entonces {{c1::$\chi(H) \leq \chi(G)$}}

¿Cómo probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G?

- Encontrando un subgrafo H de G para el cual sepamos que $\chi(H) = k$
- Hacer una prueba por contradicción

¿Cómo se hace la prueba por contradicción para probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G?

Se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo

¿Que subgrafos se utilizan para probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G?

- K_n
- C_n

$\chi(G) =$ {{c2::1}} si y solo si {{c1::$E = \emptyset$}}

Para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G)$ {{c1::≥ 2}}

$\chi(K_n) =$ {{c1::n}}

Si n es {{c2::par}} entonces $\chi(C_n) =$ {{c1::2}}

Si n es {{c2::impar}} entonces $\chi(C_n) =$ {{c1::3}}

¿Cuales son los inputs del algoritmo Greedy de coloreo?

Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_n$

¿Que color le da a cada vértice el algoritmo Greedy de coloreo?

Al momento de colorearlo a cada vértice le da el menor color posible que se le pueda dar manteniendo el invariante de que el coloreo es propio.

En el algoritmo Greedy de coloreo se colorean los vértices de G {{c1::uno por uno, en el orden dado}}, manteniendo siempre {{c2::el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio}}.

¿El algoritmo greedy de coloreo obtiene siempre $\chi(G)$?

No necesariamente

En el algoritmo greedy de coloreo, x_i recibe {{c1::el menor color que sea distinto del color de todos los vecinos anteriores a x_i}}

¿Cual es la complejidad del algoritmo Greedy de coloreo?

$O(m)$, es decir, polinomial

$\chi(G) \leq$ {{c1::$\Delta + 1$}}

$\Delta(K_n) =$ {{c1::$n - 1$}}

$\Delta(C_n) =$ {{c1::2}}

¿Que dice el teorema de Brooks?

Si G es conexo, entonces $\chi(G) \leq \Delta$, a menos que G sea un ciclo impar o un grafo completo.

¿De que depende el resultado del coloreo dado por el algoritmo Greedy?

Del orden en que estén dados los vértices.

¿Que dice el Very Important Theorem (VIT)?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo cuyos vértices están coloreados con un coloreo propio c con r colores $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$
- Sea $V_i = \{x \in V : c(x) = c_i\}, i = 1, 2, \dots, r$
- Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de V_1 , luego los de V_2 ,etc, hasta V_r . (el orden interno de los vértices dentro de cada V_i es irrelevante)
- Entonces Greedy en ese orden coloreará G con r colores o menos.

Existe {{c2::un ordenamiento de los vértices de G}} tal que Greedy colorea G con {{c1::$\chi(G)$ colores}}

¿Que es un grafo bipartito?

Un grafo G que satisface que $\chi(G) \leq 2$

¿Que característica tienen los vértices de un grafo bipartito?

Los vértices se “parten”en dos partes, (una de un color, otra de otro) de forma tal que los lados son únicamente entre vértices de partes distintas.

¿Que es el problema 2COLOR?

Dado un grafo G, determinar si es $\chi(G) \leq 2$

¿Que es el problema n-COLOR?

Dado un grafo G, determinar si es $\chi(G) \leq n$

¿2COLOR es polinomial?

Sí

¿Que es el nivel del vértice z en un árbol con raíz x?

Tomamos el único camino entre z y x, es la cantidad de lados que hay en ese camino

¿Cómo es el algoritmo de 2COLOR?

1. Elegir un vértice x cualquiera.
2. Correr $BFS(x)$, creando un árbol.
3. Para cada vértice z, sea $N(z)$ el nivel de z en el árbol $BFS(x)$.
4. Colorear $c(z) = N(z) \; mod \; 2$

5. Chequear si el coloreo dado en el paso anterior es propio.
   - Si lo es, retornar "$\chi(G) \leq 2$", si no lo es, retornar "$\chi(G) > 2$"

{{c1::$\chi(G) \geq 3$}} si y solo si {{c2::existe un ciclo impar en G}}

¿Que es un grafo planar?

Un grafo dibujado en un plano sin que se crucen sus lados.

¿Que propiedad cumple $\chi(G)$ si G es planar?

$\chi(G) \leq 4$

¿Que dice el teorema de los 4 colores?

Si G es un grafo planar entonces tiene $\chi(G) \leq 4$

¿Que es un grafo denso?

Un grafo en el que el número de aristas es cercano al número máximo de aristas posibles
Extra: Cercano al grafo completo

¿Que es un grafo disperso?

Un grafo con un número de aristas muy bajo
Extra: Cercano al grafo vació

¿Cómo se hace para dar un coloreo propio cuando estamos trabajando con un grafo muy grande?

1. Se da el coloreo por comprensión
2. Se demuestra que es propio

¿Cómo encarar un ejercicio donde se te da un grafo por comprensión?

Empezar probando casos chicos y viendo como se comporta

¿Que frase hay que utilizar al demostrar cosas en grafos?

Sin perder generalidad porque (inserte razón) llamaré 0 al color del vértice v

¿Cómo hacer para evitar la perdida de generalidad?

Nunca asumir nada, todo debe ser deducido a partir de la estructura del grafo

¿Que significa que un subgrafo H de G sea propio?

Que $H \neq G$

¿Que significa que un grafo G sea k-crítico?

Significa que $\chi(H) < \chi(G) = k$ para todo subgrafo H propio de G

¿Que subgrafos hay que buscar para demostrar que no existe un coloreo con menor cantidad de colores?

- Grafo cíclico (casi siempre impar)
- Grafo completo

Si tenemos un grafo coloreado por Greedy con t colores y sean V_i los vértices coloreados con el color i ¿De cuantos colores obtenemos el coloreo si usamos el orden normal de los V_i para colorear?

t colores

¿Que técnica usar en figuras simétricas para simplificar la demostración (de que no puede colorearse con t colores)?

Tomar pequeños subgrafos y establecer propiedades sobre esos subgrafos
Extra: Por ejemplo: el rombo del grafo con triangulos, los triangulos raros del C_5, C_7 con cosas dentro