Ejercicios Discreta

(6) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:
$a)\ x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ $\quad b)\ (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ $\quad c)\ (x^n)^m = x^{n \cdot m}$

a) Sea $P(n) = x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

Caso base:

Veamos si $P(1)$ es verdadera.

$$x^1 \cdot x^m = x^{1+m}$$
$$x \cdot x^m = x \cdot x^{1+m-1}$$
$$x \cdot x^m = x \cdot x^m$$

$$\begin{cases} x^q = x \cdot x^{q-1} \\ x^1 = x \end{cases}$$

Comprobado la igualdad podemos afirmar que $P(1)$ es verdadera.

Hipotesis inductiva:

Supongamos que para cierto $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ es verdadera.
Es decir, $x^k \cdot x^m = x^{k+m}$ es verdadera.

$\therefore$ si $P(k)$ es verdadera $\Longrightarrow P(k+1)$ también lo es.

$$x^{k+1} \cdot x^m = x^{(k+1)+m} \qquad \text{def. rec. pot.}$$
$$x \cdot x^{k+1-1} \cdot x^m = x^{k+1} \cdot x^m \qquad \text{hip. ind.}$$
$$x \cdot x^k \cdot x^m = x \cdot x^{k+1-1} \cdot x^m \qquad \text{def. rec. pot.}$$
$$x \cdot x^k \cdot x^m = x \cdot x^k \cdot x^m$$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que $P(k+1)$ es verdadera.
Teniendo en cuenta este hecho y el principio de inducción, somos capaces de confirmar que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$b)\ (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Sea $P(n) = (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Veamos si $P(1)$ es verdadero:

$(x \cdot y)^1 = x^1 \cdot y^1$ — def. rec. pot.

$(x \cdot y) . (x \cdot y)^{1-1} = x^1 \cdot y^1$

$(x \cdot y) . (x \cdot y)^0 = x^1 \cdot y^1$ — $x^0 = 1$

$(x \cdot y) . 1 = x^1 \cdot y^1$ — $x^1 = x$, elem. neutro mult.

$x \cdot y = x \cdot y$

Comprobada la igualdad, podemos afirmar que P(1) es verdadera.

Hipotesis inductiva: $P(k) = (x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$

Supongamos que para cierto $k \in \mathbb{N}$, P(k) es verdadera

Por lo tanto, si P(k) es verdadera => P(k+1) también lo es

$(x \cdot y)^{k+1} = x^{k+1} \cdot y^{k+1}$

$(x \cdot y) . (x \cdot y)^{k+1-1} = x \cdot x^{k+1-1} \cdot y \cdot y^{k+1-1}$ — def. rec. pot

$(x \cdot y) . \underline{(x \cdot y)^k} = x . x^k \cdot y . y^k$ — Hip. Inductiva

$x \cdot y \cdot x^k \cdot y^k = x . x^k \cdot y . y^k$ — Asociatividad

$x . x^k \cdot y . y^k = x . x^k \cdot y . y^k$ — Cancelación

$x^k \cdot y^k = x^k \cdot y^k$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(k+1) es verdadera.

Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(n) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Sea $P(n) =$ "$(x^n)^m = x^{n.m}$"

Caso base:

Comprobar si se cumple $P(1)$

$$(x^1)^m = x^{1 \cdot m}$$

$$(x)^m = x^m$$

$$x^m = x^m$$

Hipótesis Inductiva: $P(k) =$ "$(x^k)^m = x^{k \cdot m}$"

Supongamos que para cierto $k \in \mathbb{N}$ se cumple $P(k)$

$\therefore$ si $P(k)$ es verdadero $\Longrightarrow P(k+1)$ también lo es.

$$(x^{k+1})^m = x^{(k+1) \cdot m}$$ distributividad, def. rec. pot

$$(x \cdot x^{k+1-1})^m = x^{km+m}$$ Elem. neutro

$$(x \cdot x^k)^m = x^{km+m}$$ $x^n \cdot x^m = x^{n+m} \mid (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

$$x^m \cdot \underline{(x^k)^m} = x^{k \cdot m} \cdot x^m$$ Hip. Ind.

$$x^m \cdot x^{k \cdot m} = x^{k \cdot m} \cdot x^m$$ Cancelación

$$x^{k \cdot m} = x^{k \cdot m}$$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(k+1) es verdadera.
Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(n) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

a) Sea $P(n) =$ " $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$ "

Veamos si $P(1)$ es cierta.

$$\left(2^{2^1}\right)^{2^k} = 2^{2^{1+k}}$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$2^{2^1 \cdot 2^k} = 2^{2^{1+k}}$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$2^{2^{1+k}} = 2^{2^{1+k}}$$

Hipótesis Inductiva: $P(J) =$ " $(2^{2^J})^{2^k} = 2^{2^{J+k}}$ "

Supongamos que para cierto $J \in \mathbb{N}$ se cumple $P(J)$

$\therefore$ si $P(J)$ es verdadero $\Rightarrow P(J+1)$ también lo es.

$$\left(2^{2^{J+1}}\right)^{2^k} = 2^{2^{J+1+k}}$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$2^{2^{J+1} \cdot 2^k} = 2^{2^{J+1+k}}$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$2^{2^{J+1+k}} = 2^{2^{J+1+k}}$$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(j+1) es verdadera.
Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(j) se cumple para todo $j \in \mathbb{N}$

b) $(2^n)^2 = 4^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Sea $P(n) =$ " $(2^n)^2 = 4^n$ "

Veamos si $P(1)$ es cierta.

$$(2^1)^2 = 4^1$$

$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$$2^{1.2} = 4$$

$x^1 = x$, elem. neut.

$$2^2 = 4$$

$$2 . 2^{2-1} = 4$$

$$2 . 2^1 = 4$$

$$2 . 2 = 4$$

$$4 = 4$$

Hipotesis Inductiva: $P(k) =$ " $(2^k)^2 = 4^k$ "

Supongamos que para cierto $k \in \mathbb{N}$ se cumple $P(k)$

$\therefore$ si $P(k)$ es verdadera $\Longrightarrow P(k+1)$ tambien lo es.

$$(2^{k+1})^2 = 4^{k+1}$$

$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$$2^{(k+1) \cdot 2} = 4^{k+1}$$

distributividad.

$$2^{2k+2} = 4^{k+1}$$

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$$2^{2k} \cdot 2^2 = 4^{k+1}$$

$2^2 = 2 \cdot 2^{2-1} = 2 \cdot 2 = 4$

$$2^{2k} \cdot 4 = 4^{k+1}$$

$$(2^2)^k \cdot 4 = 4^{k+1}$$

$$4^k \cdot 4^1 = 4^{k+1}$$

$$4^{k+1} = 4^{k+1}$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$2^2 = 4$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(k+1) es verdadera.

Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(n) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

$$2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$2^7 \cdot 2^{11} \neq 2^7 + 2^{11}$$

La anterior igualdad no se cumple, ya que a pesar de que en ambos miembros están presentes los mismos valores, en el primero estos se multiplican entre si, mientras que en el segundo se lleva a cabo una adición, y como estas operaciones mencionadas anteriormente no son equivalentes, la igualdad no se cumple.

(8) Probar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ $(n \geq 0)$.

Caso base: Sea $P(n) =$ " $\sum_{i=0}^{n} 2i = 2^{n+1} - 1$ "

Veamos si $P(0)$ es cierta

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1$$

Elem. neut., $x^1 = x$

$$2^0 = 2 - 1$$

$x^0 = 1$

$$1 = 1$$

✓

Caso Inductivo:

Supongamos que $P(k)$ se cumple para cierto $k \in \mathbb{N}$

$$\therefore \quad P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1}$$

def. rec. sum, hipotesis Ind.

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

Asociatividad, $2 \cdot x = x + x$, $x = x^1$

$$2^{k+2} - 1 = 2^1 . (2^{k+1}) - 1$$

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, conmut.

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+1+1} - 1$$

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

✓

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(k+1) es verdadera.

Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(n) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k,\ n\in\mathbb{N}.$

Sea $P(n)$ = " $\sum_{K=1}^{n}(a_K+b_K)=\sum_{K=1}^{n}a_K+\sum_{K=1}^{n}b_K$ "

Caso base: Veamos si se cumple $P(1)$

$$\sum_{K=1}^{1}(a_K+b_K)=\sum_{K=1}^{1}a_K+\sum_{K=1}^{1}b_K \qquad \text{def. rec. Sumatoria}$$

$$(a_1+b_1) = a_1+b_1 \qquad \text{Asoc.}$$

$$a_1+b_1 = a_1+b_1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos que $P(J)$ se cumple para cierto $K\in\mathbb{N}$.

$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$

$$\sum_{K=1}^{J+1}(a_K+b_K)=\sum_{K=1}^{J}(a_K+b_K)+(a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{def. rec. Sumatoria.}$$

$$\sum_{K=1}^{J+1}a_K+\sum_{K=1}^{J+1}b_K=\sum_{K=1}^{J}a_K+\sum_{K=1}^{J}b_K+(a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{Hip. Ind., def. rec. sumatoria}$$

$$\sum_{K=1}^{J}a_K+a_{J+1}+\sum_{K=1}^{J}b_K+b_{J+1}=\sum_{K=1}^{J}a_K+\sum_{K=1}^{J}b_K+(a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{Conmutatividad}$$

$$\sum_{K=1}^{J}a_K+a_{J+1}+\sum_{K=1}^{J}b_K+b_{J+1}=\sum_{K=1}^{J}a_K+a_{J+1}+\sum_{K=1}^{J}b_K+b_{J+1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción, queda demostrado que $P(J)$ se cumple para todo $J\in\mathbb{N}$.

b) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$

Sea $P(n) = $ " $\sum_{J=1}^{n} J = \frac{n(n+1)}{2}$ "

Caso base:

Veamos si $P(1)$ se cumple

$$\sum_{J=1}^{1} J = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(2)}{2}$$ Elem. Neutro

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos que $P(K)$ es cierta para cierto $K \in \mathbb{N}$.

$\therefore \; P(K) \Rightarrow P(K+1)$

$$\sum_{J=1}^{K+1} J = \sum_{J=1}^{K} J + K + 1$$ def. rec. sumat.

$$\frac{(K+1)(K+1+1)}{2} = \frac{K(K+1)}{2} + K + 1$$ Hip. Ind.

$$\frac{(K+1)(K+2)}{2} = \frac{K(K+1) + (K+1).2}{2}$$

$$\frac{(K+1).(K+2)}{2} = \frac{(K+1).(K+2)}{2} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

f) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $P(n)$ = " $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ "

Caso base:

Veamos si $P(0)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$$ Elem. Neutro.

$$a^0 = \frac{a^1-1}{a-1}$$ $x^0 = 1$, $a^1 = a$

$$1 = \frac{a-1}{a-1}$$ $\frac{x}{x} = 1$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos $P(J)$ es verdadera para cierto $J \in \mathbb{N}$

$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$

$$\sum_{k=0}^{J+1} a^k = \sum_{k=0}^{J} a^k + a^{J+1}$$ def. rec. sumat., hip. ind

$$\frac{a^{J+1+1}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1}{a-1} + a^{J+1}$$ $x = x^1$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+(a^{J+1}).(a^1-1)}{a-1}$$ $x^n . x^m = x^{n+m}$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+a^{J+1+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$ Conmutatividad.

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1+a^{J+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$ Inverso aditivo

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1}{a-1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$