

Edmonds-Karp

Daniel Penazzi

21 de abril de 2021

Tabla de Contenidos

1 Ejemplos de Ford-Fulkerson

- Primer ejemplo
- Segundo ejemplo

2 Algoritmo de Edmonds-Karp

3 Primer Ejemplo

4 Segundo Ejemplo

- Primera iteración
- Segunda iteración
- Tercera iteración
- Cuarta Iteración

5 Descuentos por errores

- Hay un detalle de Ford-Fulkerson que no especificamos.
- La clave de Ford-Fulkerson es encontrar un camino aumentante.
- Pero ¿Cómo lo encontramos? (en tiempo polinomial)
- Bueno, hay varias formas. Uds. conocen al menos tres algoritmos que, modificados adecuadamente, permiten encontrar caminos aumentantes.
 - 1 Usar una versión modificada de DFS.
 - 2 Usar una versión modificada de BFS.
 - 3 Usar una versión modificada de Dijkstra.

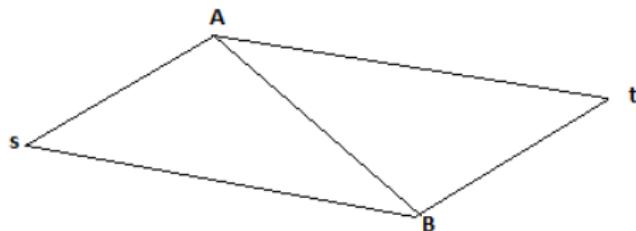
Ford-Fulkerson con DFS

■ Con DFS:

- 1 Creamos una pila con s .
- 2 Si la pila es vacía, terminamos, no hay camino. Si no es vacía, tomamos $x =$ el primer elemento de la pila y buscamos algún vecino de x que satisfaga las condiciones de Ford-Fulkerson.
- 3 Si no hay, sacamos a x de la pila y repetimos 2).
- 4 Si hay tal vecino, tomamos z uno de ellos.
- 5 Si $z = t$ encontramos nuestro camino.
- 6 Si no, agregamos z a la pila y repetimos 2).

FF+DFS

- Una ventaja de esto es que sabemos que DFS es $O(m)$ así que la búsqueda de caminos es polinomial.
- Una desventaja es que con DFS Ford-Fulkerson puede no terminar nunca, o aun si termina puede demorar muchísimo en hacerlo.
- Ejemplo:



Ejemplo

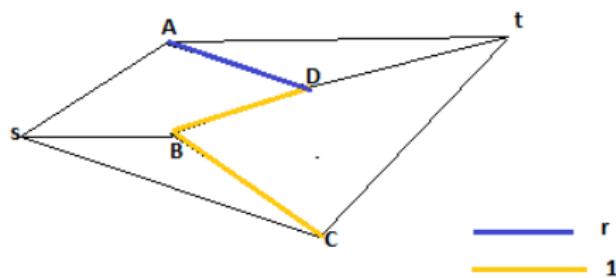
- Ford-Fulkerson encuentra el siguiente camino aumentante, comenzando con $f = 0$: $sABt : 1$.
- Luego, a partir del flujo obtenido, como se ha mandado una unidad de flujo por \overrightarrow{AB} , ahora se puede devolver, encontrando el camino aumentante: $s\overset{\leftarrow}{BA}t : 1$
- Continuamos iterando con caminos $sABt : 1$ y luego $s\overset{\leftarrow}{BA}t : 1$.
- Luego de dos mil trillones de caminos, llegamos a nuestro flujo maximal.

Ejemplo

- En vez de mil trillones podemos poner el número que queramos, lo cual muestra que no se puede acotar la complejidad con ninguna función de n, m .
- Obviamente, se puede acotar con una función que dependa de n, m y las capacidades.
- Pues vimos que hay a lo sumo $\text{cap}(\{s\})$ flujos intermedios.
- Pero puede ser peor:

Ejemplo II

- Con capacidades todas 10, excepto \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} de capacidades 1 y \overrightarrow{AD} de capacidad r .



- Donde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,62 < 1$.

Ejemplo II

- Ya que $10 > 1 > r$ nos concentraremos en las 3 capacidades más chicas, $1, 1, r$
- Y específicamente miraremos las capacidades “sobrantes” es decir, capacidad-flujo en cada uno de esos lados.
- Empezamos con el camino $sBDt$. Como pasa por \overrightarrow{BD} , solo podemos mandar 1.
- Las capacidades sobrantes de los lados $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$ quedan $1, 0, r$
- Recordemos esto, digamos con un (*).

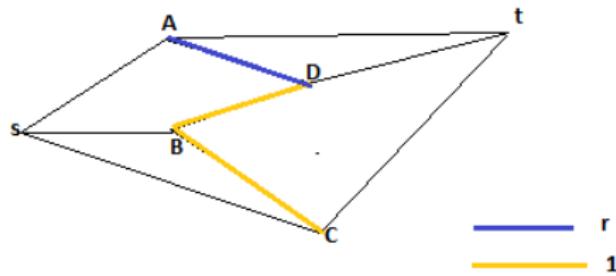
Ejemplo II

- Luego podemos ir por s, A, D y al llegar a D , ya que hay flujo desde B a D , podriamos devolver una unidad de flujo, y luego seguir por C , teniendo $s \xrightarrow{AD} D \xleftarrow{BC} t$.
- ¿Cuanto podemos mandar?
- Como usamos el lado \overrightarrow{AD} de capacidad r y $r < 1$, entonces podemos mandar sólo r .

Ejemplo II

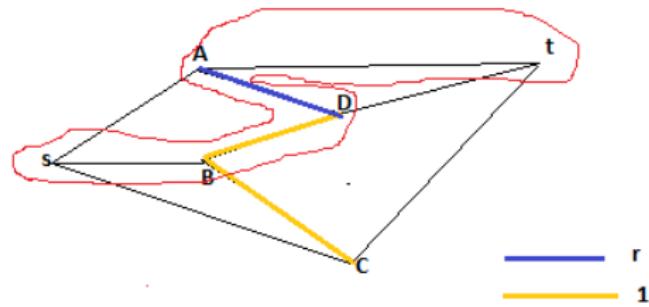
- ¿Como quedan las capacidades sobrantes de los lados \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AD} ?
- Sumamos flujo r en \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} y restamos r (pues devolvemos flujo) en \overrightarrow{BD} .
- Por lo tanto como las capacidades sobrantes son $c - f$, se le resta r en \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} y se suma r en \overrightarrow{BC} .
- Quedan: $1 - r, r, 0$
- Pero $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es raiz de la ecuación $r^2 + r - 1 = 0$.
- Por lo tanto $1 - r = r^2$ y las capacidades sobrantes quedan: $r^2, r, 0$

Ejemplo II



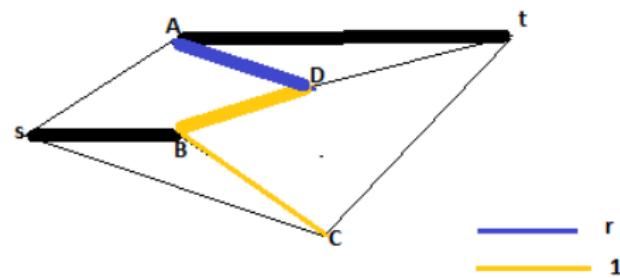
- Ahora podemos usar el camino $s \xrightarrow{BDA} t$

Ejemplo II



- Ahora podemos usar el camino $s \xrightarrow{B} \xleftarrow{D} \xrightarrow{A} t$ pues \overleftarrow{BD} quedó con capacidad sobrante r así que se puede mandar flujo por ahí, y como hemos mandado flujo por \overrightarrow{AD} , entonces podemos devolver flujo por el.

Ejemplo II



- Ahora podemos usar el camino $s \xrightarrow{B} \xrightarrow{D} \xleftarrow{A} t$
- Capacidades sobrantes de los lados $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$ $r^2, r, 0$

Ejemplo II

- Podemos mandar r por \overrightarrow{BD} y devolver r por \overrightarrow{AD} asi que el camino es: $s \xleftarrow{\leftarrow} BDA t : r$
- Capacidades sobrantes de los lados $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$ quedan $r^2, 0, r$

Ejemplo II

- Como las capacidades sobrantes son r^2 , 0, r podemos otra vez hacer el camino $s \xleftarrow{A} D \xrightarrow{B} C \xleftarrow{t}$.
- Esta vez podemos mandar r^2 por \overrightarrow{BC} , devolver hasta 1 por el \overrightarrow{BD} y mandar r por el \overrightarrow{AD} .
- Como $r < 1$ entonces $r^2 < r$ así que solo podemos mandar r^2 .
- Capacidades sobrantes quedan 0, r^2 , r^3

Ejemplo II

- Como las capacidades sobrantes son $0, r^2, r^3$ podemos tomar el camino $\overleftarrow{sC}BDt$.
- Esta vez podemos devolver 1 por \overrightarrow{BC} , y mandar r^2 por el \overrightarrow{BD} , así que el mínimo es r^2 .
- Capacidades sobrantes quedan $r^2, 0, r^3$
- Comparemos esto con (*) que era $1, 0, r$ y vemos que multiplicamos las capacidades sobrantes por r^2 .
- Esto lo podemos ir repitiendo todo el tiempo que querramos:

Ejemplo II

- Si suponemos que las capacidades sobrantes son $r^{2k}, 0, r^{2k+1}$
-
- $s \xrightarrow{\leftarrow} ADB Ct : r^{2k+1}$ $s \xrightarrow{\leftarrow} BDA t : r^{2k+1}$
- $s \xrightarrow{\leftarrow} ADB Ct : r^{2k+2}$ $s \xrightarrow{\leftarrow} CBD t : r^{2k+2}$
- Capacidades sobrantes: $r^{2k+2}, 0, r^{2k+3}$
- Y hemos pasado de $r^{2k}, 0, r^{2k+1}$ a $r^{2k+2}, 0, r^{2k+3}$ así que podemos repetir el ciclo.
- Como el ciclo lo podemos repetir indefinidamente, Ford-Fulkerson no termina nunca.

Ejemplo II

- Mas aun, es trivial ver que esta secuencia de flujos tiene valores que convergen a 3. pero el valor del flujo maximal es 21, asi que ni siquiera converge al flujo maximal.
- Asi que no conviene usar DFS pues no hay suficientes restricciones en la elección de caminos para garantizar que termine.
- Una posibilidad es, en vez de usar DFS, usar una variación de Dijkstra para buscar un camino de **máximo aumento de flujo**.
- Otra posibilidad es, en vez de usar DFS, usar BFS.
- Eso equivale a decir que, de entre todos los caminos aumentantes, elegimos uno que tenga **la longitud mínima**.

Edmonds y Karp

- Una década luego de que Ford y Fulkerson propusieran su algoritmo, Edmonds y Karp propusieron estas dos alternativas.
- Es decir, aumentar eligiendo caminos de longitud mínima, y aumentar eligiendo caminos de aumento máximo.
- Demostraron que en ambos casos el algoritmo siempre termina.
- Y que en el caso de aumento máximo, el algoritmo es polinomial en n, m y las capacidades.
- Pero demostraron que en el caso de aumentar por caminos mínimos, el algoritmo es polinomial en n, m solamente.

Edmonds-Karp

- Por lo tanto ese es el algoritmo preferido, y el que se llama “algoritmo de Edmonds-Karp”
- Algunos libros lo llaman “heurística” de Edmonds-Karp porque no es un nuevo algoritmo, sino que es Ford-Fulkerson con la especificación de usar BFS para la búsqueda.
- Como sea, una buena forma de recordarlo es que EK=FF+BFS.
- Parecería que no es mucho lo que hicieron Edmonds y Karp, meramente sugerir usar BFS.
- Pero lo importante no fue sólo sugerir usar BFS, sino que dieron una prueba de que el algoritmo resultante es polinomial.

Edmonds y Karp

- Dejaremos esta parte superimportante de demostrar que Edmonds-Karp es polinomial para la proxima clase.
- Lo que haremos ahora es dar un par de ejemplos de cómo escribir un desarrollo “en papel” de Edmonds-Karp, para que todos podamos entendernos.
- Principalmente, que nosotros podamos entenderlos a ustedes.
- Primero daremos el network, listando los lados y sus capacidades.

Network de Ejemplo

$sA : 7$ $BC : 9$

$sB : 9$ $Ct : 7$

$AC : 8$ $Dt : 9$

$AD : 5$

1er camino aumentante

- Como $EK=FF+BFS$ tenemos que ir construyendo una cola, con s como primer vértice.
- Luego iremos agregando vecinos de la cabeza de la cola.
- En nuestro caso la cola empezaría así:

sABCDt

El siguiente en la cola es C que tiene como vecino a t , así que ya no hace falta seguir: hemos llegado al objetivo

Ok, pero ¿Cómo reconstruimos el camino que va de s a t con lo que hemos hecho?

Hay que usar el truco que ya deben haber visto en otros algoritmos de ir guardando, cuando un vértice es puesto en la cola, quién es el vértice que lo puso

Refinamientos

- Es decir, en el programa, cada vértice x tendrá un registro asociado, digamos $p(x)$ que indicara quien es el vértice que lo pone en BFS.
- Iterando desde t usando p , se reconstruye el camino.
- Ahora, el camino en sí no es lo único importante. Lo que también tenemos que saber es cuánto flujo mandar por ese camino
- Hay dos formas de hacer esto:
 - 1 Una vez que se tiene el camino, recorrerlo para averiguar cuál es el " ε " por el cual debemos incrementar el flujo
 - 2 En vez de eso, ir calculando el ε a medida que construimos la cola BFS.
- Aquí usaremos la segunda opción pero uds. pueden hacer cualquiera de las dos.

- Es decir, tendremos asociado a cada vértice un $\varepsilon(x)$ que indique cuantos flujo podemos mandar por el camino aumentante temporal que va de s a x .
- Así, el ε será simplemente $\varepsilon(t)$.
- $\varepsilon(x)$ se calcula así:
- Si x es puesto en la cola por un vértice z de modo forward, entonces:
 - $\varepsilon(x) = \text{Min}\{\varepsilon(z), c(\overrightarrow{zx}) - f(\overrightarrow{zx})\}$.
 - Es decir, el mínimo de lo que venia y lo que se puede mandar por de z a x .
- Si x es puesto en la cola por un vértice z de modo backward, entonces:
 - $\varepsilon(x) = \text{Min}\{\varepsilon(z), f(\overrightarrow{xz})\}$.
 - Es decir, el mínimo de lo que venia y lo que z le puede devolver a x .

Fragmento del programa

- Ademas, necesitariamos otro registro, que nos diga si el vertice fue agregado “forward” o “backward”.
- Digamos un registro b que es 1 si es forward y -1 si es backward.
- El fragmento del programa para calcular el aumento del flujo sería algo asi:
 - $x = t, \varepsilon = \varepsilon(t)$.
 - While ($x \neq s$)
 - $z = p(x)$
 - If($1 == b(x)$) $f(\overrightarrow{zx})+ = \varepsilon$ else $f(\overrightarrow{xz})- = \varepsilon$
 - $x = z$
 - EndWhile

- Entonces, ademas de anotar la cola, deberiamos anotar para cada vértice x que agreguemos a la cola:
 - $p(x)$
 - $\epsilon(x)$
 - $b(x)$
- Esto lo haremos poniendo debajo de x a $p(x)$ y debajo de este a $\epsilon(x)$.
- Para $b(x)$ pueden poner una cuarta fila anotando 1 y -1, o sólo los -1s, dando por sentado los 1s. o poner un exponente – en el $p(x)$ si es backward, tipo A^- . Usaremos esta última opción.

Cont Ejemplo

$sA : 7 \quad sB : 9 \quad AC : 8 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 7 \quad Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaria asi:

sAB
ss
79

Cont Ejemplo

$sA : 7 \quad sB : 9 \quad AC : 8 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 7 \quad Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaría así:

sABCD

ssAA

7975

$\varepsilon(C)$ es 7 pues es el mínimo de lo que tiene A (7) y $c(\overrightarrow{AC})$ que es 8.

$\varepsilon(D)$ es 5 pues es el mínimo de lo que tiene A (7) y $c(\overrightarrow{AD})$ que es 5.

Cont Ejemplo

$sA : 7 \quad sB : 9 \quad AC : 8 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 7 \quad Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaría así:

sABCDt
ssAAC
79757

Y ahora reconstruimos el camino, empezando desde t, leyendo la segunda fila

sACt:7

Ahora debemos actualizar el flujo. Podemos hacer una tabla poniendo al lado de cada lado el flujo. O bien poniendo al lado de cada lado la diferencia entre la capacidad y el flujo Es decir, la “capacidad sobrante”. Usaremos esta segunda opción.

Network de Ejemplo

sAct:7

$sA : 0$ $BC : 9$

$sB : 9$ $Ct : 0$

$AC : 1$ $Dt : 9$

$AD : 5$

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBC
s B
99

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

$\begin{matrix} \text{sB} & \text{CA} \\ \text{s} & \text{B} \text{C}^- \\ & 99 \end{matrix}$

Observemos que C no puede mandar flujo hacia t pues \xrightarrow{Ct} esta saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia A , así que ponemos a A en la cola, con el marcador C^- para indicar que es backward.

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBCA
s BC⁻
997

El $\varepsilon(A)$ es 7 pues viene siendo 9 pero solo podemos devolver 7 asi que el minimo de los dos es 7

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBCA
sBC⁻
997

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

$\begin{matrix} s & B & C & A & D \\ s & B & C^- & A \\ 9 & 9 & 7 & 5 \end{matrix}$

$\varepsilon(D)$ es 5 pues es el minimo entre lo que venia, que era 7, y 5 que es $c(\overrightarrow{AD})$.

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 9 \quad AC : 1 \quad AD : 5 \quad BC : 9 \quad Ct : 0 \quad Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBCA Dt
s BC - AD
997 55

Reconstrucción del camino:

\leftarrow
sBCADt:5

Este es un ejemplo simple, asi que seria facil reconstruir el camino aun sin poner las etiquetas, pero luego veremos un ejemplo mas complicado

Actualización del flujo

\leftarrow
sB \overleftarrow{C} ADt:5

$sA : 0$ $BC : 9$

$sB : 9$ $Ct : 0$

$AC : 1$ $Dt : 9$

$AD : 5$

Actualización del flujo

\leftarrow
 $s \overleftarrow{BCADt} : 5$

$$sA : 0 \quad BC : 4$$

$$sB : 4 \quad Ct : 0$$

$$AC : 1 \quad Dt : 4$$

$$AD : 0$$

Restamos 5 a los lados \overrightarrow{sB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{Dt} , pero ¿qué pasa con el \overleftarrow{CA} ?

Actualización del flujo

\leftarrow
 $s\vec{B}\vec{C}\vec{A}\vec{D}t:5$

$$\begin{array}{ll} sA : 0 & BC : 4 \\ sB : 4 & Ct : 0 \\ AC : 1 & Dt : 4 \\ AD : 0 \end{array}$$

Restamos 5 a los lados $\vec{sB}, \vec{BC}, \vec{AD}, \vec{Dt}$, pero ¿qué pasa con el \vec{CA} ?
Ese lado no existe, el que existe es el \vec{AC} , así que vamos a ese para cambiarlo

Actualización del flujo

\leftarrow
sBCADt:5

$sA : 0$ $BC : 4$

$sB : 4$ $Ct : 0$

$AC : 6$ $Dt : 4$

$AD : 0$

Como estamos DEVOLVIENDO flujo, entonces el flujo DISMINUYE.
Pero no estamos escribiendo el flujo sino la capacidad menos el flujo
($c - f$), por lo tanto como f disminuye entonces $c - f$ AUMENTA.

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

sBC

s B

44

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

$\begin{matrix} \textcolor{red}{sB}C \\ sB \\ 44 \end{matrix}$

Al igual que en el segundo camino, C no puede mandar flujo hacia t pues \xrightarrow{Ct} esta saturado.

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

sBCA
s BC^-
442

Al igual que en el segundo camino, C no puede mandar flujo hacia t pues \overrightarrow{Ct} esta saturado. Pero sigue pudiendo devolver flujo hacia A pues $(c - f)(\overrightarrow{AC}) = 6$ pero $c(\overrightarrow{AC}) = 8$, lo cual dice que $f(\overrightarrow{AC}) = 2$, asi que podemos devolver flujo. El $\varepsilon(A)$ es 2 pues es el minimo entre 4 y 2

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

sBCA
sBC⁻
442

A no puede mandar agregar a nadie mas:

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

$\begin{matrix} sBCA \\ sBC^- \\ 442 \end{matrix}$

A no puede mandar agregar a nadie mas: a D no lo puede agregar porque \overrightarrow{AD} esta saturado,

Cont Ejemplo

$sA : 0 \quad sB : 4 \quad AC : 6 \quad AD : 0 \quad BC : 4 \quad Ct : 0 \quad Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

$sBCA$
 sBC^-
442

A no puede mandar agregar a nadie mas: a D no lo puede agregar porque \overrightarrow{AD} esta saturado, a C no lo puede agregar porque C ya está en la cola, y tampoco puede agregar backwards a s por la misma razón.

Por lo tanto, no llegamos a t y el flujo obtenido es maximal

valor del flujo y Corte Maximal

- El valor del flujo maximal es
 $v(f) = \text{out}_f(s) = f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sB}) = 7 + 5 = 12.$
- Que es igual a la suma de los ε s de los caminos aumentantes.
- Esta doble cuenta sólo verifica que no hicimos algún error aritmético, pero para poder chequear que no hayamos cometido algún otro error y que el flujo no sea en realidad maximal, podemos verificar esto calculando un corte minimal.
- De acuerdo con la demostración de FF, el conjunto de todos los vértices para los cuales exista un camino aumentante desde s en la ultima iteración será un corte minimal.

valor del flujo y Corte Maximal

- Y como en EK usamos BFS, entonces el conjunto de vértices que alguna vez estuvieron en la cola es ese conjunto de la prueba de FF.
- En nuestro ejemplo, es $S = \{s, B, C, A\}$.
- Recordemos que la capacidad de un corte es
$$cap(S) = \sum_{x,y} c(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][\overrightarrow{xy} \in E].$$
- En nuestro caso, los únicos lados \overrightarrow{xy} con $x \in S, y \notin S$ son \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{Ct} .
- Así: $cap(S) = c(\overrightarrow{AD}) + c(\overrightarrow{Ct}) = 5 + 7 = 12$.
- Como $cap(S) = v(f)$, concluimos que f es maximal.
- Bueno, ahora veamos un ejemplo mas complicado.

2do Network de Ejemplo

$sA : 9$	$FI : 7$
$sC : 9$	$FM : 8$
$sF : 9$	$GE : 8$
$AB : 10$	$Ht : 4$
$AH : 9$	$IJ : 9$
$Bt : 9$	$JK : 9$
$CD : 9$	$KH : 9$
$CL : 9$	$LN : 9$
$DB : 9$	$MJ : 9$
$DE : 5$	$NG : 9$
$Et : 9$	

1er camino aumentante

$sA : 9 \quad sC : 9 \quad sF : 9 \quad AB : 10 \quad AH : 9 \quad Bt : 9 \quad CD : 9$
 $CL : 9 \quad DB : 9 \quad DE : 5 \quad Et : 9 \quad FI : 7 \quad FM : 8 \quad GE : 8$
 $Ht : 4 \quad IJ : 9 \quad JK : 9 \quad KH : 9 \quad LN : 9 \quad MJ : 9 \quad NG : 9$

sACFBHDLI Mt
sssAACCF B
999999978 9

Y ahora reconstruimos el camino, empezando desde t, leyendo la segunda fila

sABt:9

Ahora debemos actualizar el flujo.

1: $sABt : 9$

$sA : 0$	$FI : 7$
$sC : 9$	$FM : 8$
$sF : 9$	$GE : 8$
$AB : 1$	$Ht : 4$
$AH : 9$	$IJ : 9$
$Bt : 0$	$JK : 9$
$CD : 9$	$KH : 9$
$CL : 9$	$LN : 9$
$DB : 9$	$MJ : 9$
$DE : 5$	$NG : 9$
$Et : 9$	

Segundo camino aumentante:

$sA : 0$ $sC : 9$ $sF : 9$ $AB : 1$ $AH : 9$ $Bt : 0$ $CD : 9$
 $CL : 9$ $DB : 9$ $DE : 5$ $Et : 9$ $Fl : 7$ $FM : 8$ $GE : 8$
 $Ht : 4$ $IJ : 9$ $JK : 9$ $KH : 9$ $LN : 9$ $MJ : 9$ $NG : 9$

sCFDL I MBENJ
ssCCFFDDL I
9999789597

Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJ
ssCCFFDDL
9999789597

B no puede mandar flujo hacia t pues \overrightarrow{Bt} esta saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia A .

Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJA
ssCCFFDDLIB-
99997895979

B no puede mandar flujo hacia t pues \xrightarrow{Bt} esta saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia A, así que ponemos a A en la cola, con el marcador B^- para indicar que es backward .

Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJA t
ssCCFFDDLIB-E
9999789597 9 5

. Reconstrucción del camino:

sCDEt:5

Y cambiamos el flujo:

2: *sCDEt* : 5

<i>sA</i> : 0	<i>Fl</i> : 7
<i>sC</i> : 4	<i>FM</i> : 8
<i>sF</i> : 9	<i>GE</i> : 8
<i>AB</i> : 1	<i>Ht</i> : 4
<i>AH</i> : 9	<i>IJ</i> : 9
<i>Bt</i> : 0	<i>JK</i> : 9
<i>CD</i> : 4	<i>KH</i> : 9
<i>CL</i> : 9	<i>LN</i> : 9
<i>DB</i> : 9	<i>MJ</i> : 9
<i>DE</i> : 0	<i>NG</i> : 9
<i>Et</i> : 4	

Tercer camino aumentante:

$sA : 0$ $sC : 4$ $sF : 9$ $AB : 1$ $AH : 9$ $Bt : 0$ $CD : 4$
 $CL : 9$ $DB : 9$ $DE : 0$ $Et : 4$ $Fl : 7$ $FM : 8$ $GE : 8$
 $Ht : 4$ $IJ : 9$ $JK : 9$ $KH : 9$ $LN : 9$ $MJ : 9$ $NG : 9$

sCFDLIMBNJA GKHE
ssCCFFDLIB-NJAG
494478447 4 4744

Tercer camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 4$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 4$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 0$	$Et : 4$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBNJA GKHE
ssCCFFDLIBNJAG
494478447 4 4744

K podria agregar a H pero como H ya está en la cola no puede

Tercer camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 4$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 4$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 0$	$Et : 4$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBNJA GKHE t
ssCCFFDLIB-NJAGH
494478447 4 47444

Llegamos a t , reconstruimos el camino

$\xleftarrow{\quad}$
sCDBAHt:4

3: $s \xleftarrow{CDBAHt} 4$

$sA : 0$	$FI : 7$
$sC : 0$	$FM : 8$
$sF : 9$	$GE : 8$
$AB : 5$	$Ht : 0$
$AH : 5$	$IJ : 9$
$Bt : 0$	$JK : 9$
$CD : 0$	$KH : 9$
$CL : 9$	$LN : 9$
$DB : 5$	$MJ : 9$
$DE : 0$	$NG : 9$
$Et : 4$	

Cuarto camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 0$	$sF : 9$	$AB : 5$	$AH : 5$	$Bt : 0$	$CD : 0$
$CL : 9$	$DB : 5$	$DE : 0$	$Et : 4$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 0$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sFIMJKH A B D C LNGEt
sFFIJKH-AB-D-CLNGE
978777 4 4 4 4 44444

Llegamos a t , reconstruimos el camino

$\overleftarrow{DCLNGEt:4}$

Cuarto camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 0$	$sF : 9$	$AB : 5$	$AH : 5$	$Bt : 0$	$CD : 0$
$CL : 9$	$DB : 5$	$DE : 0$	$Et : 4$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 0$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sFIMJKH A B D C LNGE t
sFF IJKH - AB - D - CLNGE
978777 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

Llegamos a t , reconstruimos el camino

$\xleftarrow{BDCLNGEt:4}$

Esa flecha larga hacia atras sobre B, D, C deberian ser dos flechas cortas, una sobre BD, otra sobre DC, pero no se como hacerlo en Latex

Cuarto camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 0$	$sF : 9$	$AB : 5$	$AH : 5$	$Bt : 0$	$CD : 0$
$CL : 9$	$DB : 5$	$DE : 0$	$Et : 4$	$Fl : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 0$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sFIMJKH A B D C LNGE t
sFFIJKH-AB-D-CLNGE
978777 4 4 4 4 44444

Llegamos a t , reconstruimos el camino

sFIJKH $\overset{\leftarrow}{AB}$ $\overset{\leftarrow}{D}$ CLNGEt:4

3: *sFIJKHABDCLNGET* : 4

<i>sA</i> : 0	<i>Fl</i> : 3
<i>sC</i> : 0	<i>FM</i> : 8
<i>sF</i> : 5	<i>GE</i> : 4
<i>AB</i> : 1	<i>Ht</i> : 0
<i>AH</i> : 9	<i>IJ</i> : 5
<i>Bt</i> : 0	<i>JK</i> : 5
<i>CD</i> : 4	<i>KH</i> : 5
<i>CL</i> : 5	<i>LN</i> : 5
<i>DB</i> : 9	<i>MJ</i> : 9
<i>DE</i> : 0	<i>NG</i> : 5
<i>Et</i> : 0	

Final:

$sA : 0$	$sC : 0$	$sF : 5$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 4$
$CL : 5$	$DB : 9$	$DE : 0$	$Et : 0$	$Fl : 3$	$FM : 8$	$GE : 4$
$Ht : 0$	$IJ : 5$	$JK : 5$	$KH : 5$	$LN : 5$	$MJ : 9$	$NG : 5$

sFIMJKH

sFFIJK

535333

- No llegamos a t , el flujo es maximal.
- Valor del flujo = $f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sC}) + f(\overrightarrow{sF}) = 9 + 9 + 4 = 22$.
- Primer check: suma de los ε de los caminos: $9 + 5 + 4 + 4 = 22$.
- Check de maximal: Corte $S = \{s, F, I, M, J, K, H\}$
- Capacidad de S : $= c(\overrightarrow{sA}) + c(\overrightarrow{sC}) + c(\overrightarrow{Ht}) = 9 + 9 + 4 = 22$.
- Confirmamos que f es maximal.

- Obviamente al hacer todos estos cálculos a mano pueden equivocarse.
- Si cometen un error tonto que no afecta la dificultad general del ejercicio, el **descuento** será poco.
- Ahora bien, si el error provoca que el ejercicio que terminen haciendo es mucho mas fácil que el “real” el descuento puede ser mucho mayor.
- En particular, en TODO ejercicio de examen, habrá al menos un camino con **con al menos un lado backward**
- Si ustedes resuelven un ejercicio de examen sin lados backwards, es porque tienen algo mal.
- Habiendo avisado esto, si entregan un ejercicio de examen sin lados backwards, el **puntaje total** del ejercicio será 0.1 o 0.2 puntos.

- Otra cosa que tienen que hacer es siempre verificar que $v(f)$ sea igual a $cap(S)$, calculando ambos en forma independiente.
- Si tienen todo bien pero no hacen esta verificación, habrá descuento de puntos.
- Si tienen un error, y $v(f)$ no les da igual a $cap(S)$ pero no hacen la verificación, el descuento será mucho mas grande.
- Si tienen un error, $v(f)$ no les da igual a $cap(S)$ pero AVISAN con una nota tipo:
 - “ $v(f)$ da tanto, $cap(S)$ da esto otro, sé que deben dar iguales pero no puedo encontrar el error”
- Entonces el descuento quedará restringido a simplemente el descuento por el error que hayan cometido y no por no verificar $v(f) = cap(S)$.