PARTE 1

1)a)

Ejercicio 1 *(20 pts.)* Sea D la región comprendida entre las funciones $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = 1 - x^2$.

(a) Dibuje la región D y calcule su área.

Veamos donde se intersecan

$g(x) = h(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 1 + 1 \Rightarrow 2x^2 = 2$

$\Rightarrow x^2 = \cancel{2}/\cancel{2} \Rightarrow x^2 = 1$ $\begin{matrix} \to x_0 = 1 \\ \to x_1 = -1 \end{matrix}$

$\therefore$ las funciones se intersecan en $x = 1$ y $x = -1$

Veamos cual es mayor

Como sabemos que las funciones se intersecan en $x = 1$ y $x = -1$, evaluemos las funciones en algun punto arbitrario entre -1 y 1 y veamos cual es mayor

$g(0) = 0^2 - 1 = -1$

$h(0) = 1 - 0^2 = 1$

$\therefore h(x) \geq g(x) \ \forall x \in [-1, 1]$

Ahora calculemos el area

Como sabemos que $h(x) \geq g(x) \ \forall x \in [-1, 1]$, el area entre los graficos de las funciones es igual a $\int_{-1}^{1} h(x) - g(x)\, dx$

Resolvamos la integral

$$\int_{-1}^{1} h(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) - (x^2 - 1)\, dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 - x^2 + 1\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -2x^2 + 2\, dx = -2 \cdot \int_{-1}^{1} x^2 + 2 \cdot \int_{-1}^{1} dx$$

$$= -2\left(\int_{-1}^{1} x^2 - \int_{-1}^{1} dx\right) = -2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - x\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} - (1 - (-1))\right) = -2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - (2)\right)$$

$$= -2\left(\frac{2}{3} - 2\right) = -2 \cdot \frac{2 - 6}{3} = -2 \cdot \frac{-4}{3} = \frac{8}{3}$$

Conclusion

Como el resultado de la integral fue $\frac{8}{3}$, podemos concluir que el area entre $h(x)$ y $g(x)$ es de $8/3\ u^2$

3)a)

(a) Encuentre el conjunto de todos los números reales t_0 para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2^n} e^{t_0 n}}_{a_n}$ converge.

Usemos crit. del cociente

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{t_0(n+1)}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n \cdot e^{t_0 \cdot n}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{t_0 \cdot (n+1)}}{2^n \cdot 2}}{\frac{e^{t_0 \cdot n}}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{t_0 \cdot n}} \cdot e^{t_0}}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{e^{t_0 \cdot n}}} = \frac{e^{t_0}}{2}$$

Veamos para que valores de t_0 $r<1$

$$r<1 \Rightarrow \frac{e^{t_0}}{2} < 1 \Rightarrow e^{t_0} < 2 \Rightarrow \ln(e^{t_0}) < \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_0 \cdot \ln(e) < \ln(2) \Rightarrow t_0 \cdot 1 < \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_0 < \ln(2)$$

Conclusion

Por crit. del cociente tenemos que si $r<1 \Rightarrow$ la serie converge abs. y como vimos anteriormente $r<1$ cuando $t_0 < \ln(2)$.

Por ende, la serie converge absolutamente (y por lo tanto converge normalmente) $\forall t_0 \in (-\infty, \ln(2))$

3) b)

(b) Represente la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ como una serie de potencias centrada en $a=0$ y halle su radio de convergencia.

?

Partamos de la serie geometrica y transformemosla hasta llegar a $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{5}} \Rightarrow \frac{1}{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{-5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{-5+x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\,\frac{1}{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{d}{dx}\,(x-5)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{d}{dx}\,(x-5)^{-1}\cdot\frac{d}{dx}\,x-5$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = -(x-5)^{-2}\cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{-1}{(x-5)^2} \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{(x-5)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{5}}_{a_n}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{(x-5)^2} \quad \times$$

Results

$$\frac{1}{(-5+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, 5^{-2-n}\,(1+n) \quad \text{for } |x|<5$$

Hallemos el radio de convergencia

Usemos crit. del cociente

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5}}{\frac{n}{5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}}$$

$$= \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1+0 = 1$$

$\therefore$ como $L=1 \Rightarrow R=\frac{1}{L}=\frac{1}{1}=1$

Conclusion

La representación de $f(x)$ como serie de potencias es $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^{n-1}$ y su radio de convergencia es $R=1$

5) a)

(a) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $T_{n,a}$ su polinomio de Taylor de orden n centrado en a. De la fórmula de Lagrange para el resto de orden n (enuncie claramente las hipótesis que debe satisfacer f).

X

Sea f una funcion continua y que posea derivadas hasta el orden n+1, y sea t un número entre x y a, la formula de Lagrange para el resto es la siguiente:

$$R_{n,a} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

5) b)

(b) De la definición de serie absolutamente convergente, de serie condicionalmente convergente y de serie divergente.

✓

Sea a_n una sucesion de números reales

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ tambien $\Rightarrow$ la serie es absolutamente convergente

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge $\Rightarrow$ la serie es condicionalmente convergente

Si el $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$ no existe o es $\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

PARTE 2

1)b)

Ejercicio 1 *(20 pts.)* Sea D la región comprendida entre las funciones $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = 1 - x^2$.

(a) Dibuje la región D y calcule su área.

(b) Calcule la siguiente integral doble $\int\int_D x^2\, y\, dx\, dy$.

Como x e y ambos estan entre -1 y 1, tenemos lo siguiente

$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 y\, dx\, dy$$ dudoso

Resolvamos la integral iterada

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\left(y\cdot\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(y\cdot\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)dx\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(y\cdot\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(y\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y\cdot\frac{2}{3}\, dy = \frac{2}{3}\cdot\int_{-1}^{1} y\, dy = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot 0$$

$$= 0$$

Conclusion

$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = 0$$ → Dudoso

2) a)

Ejercicio 2 *(20 pts.)*

(a) Sea S la superficie de nivel en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$ y sea $P_0 = (3, -2, -1)$. Obtener la ecuación normal del plano Π_0 tangente a S en P_0.

(b) Considere el plano Π_1 definido por la ecuación $x + y + z = 1$. Calcule el ángulo α entre los planos Π_0 y Π_1. *(Basta con dejar expresada la fórmula)*

Calculemos vector normal del plano tangente a S

Calculemos el gradiente

$$f_x(x,y,z) = 2x - 2.0 - 3.0 + 1.y.z$$
$$= 2x + yz$$
$$f_y(x,y,z) = 0 - 2.2.y - 3.0 + x.1.z$$
$$= -4y + xz$$
$$f_y(x,y,z) = 0 - 2.0 - 3.2.z + x.y.1$$
$$= -6z + xy$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = (2x + yz, -4y + xz, -6z + xy)$$

Evaluemos punto en gradiente

$$\nabla f(3,-2,-1) = (2.3 + -2.-1, -4.-2 + 3.-1, -6.-1 + 3.-2)$$
$$= (6 + 2, 8 - 3, 6 - 6)$$
$$= (8, 5, 0)$$

Conclusion

Habiendo calculado el vector normal del plano tangente a S, tenemos que la ecuacion del plano Π_0 tangente a S en P_0 es la siguiente:

$$\Pi_0 = \{X \in \mathbb{R}^3 / \langle X - (3,-2,-1), \nabla f(3,-2,-1) \rangle = 0\}$$
$$= \{X \in \mathbb{R}^3 / \langle X - (3,-2,-1), (8,5,0) \rangle = 0\}$$

2)b)

(b) Considere el plano Π_1 definido por la ecuación $x + y + z = 1$. Calcule el ángulo α entre los planos Π_0 y Π_1. *(Basta con dejar expresada la fórmula)*

Planteo

Para calcular el angulo entre dos planos debemos obtener el angulo entre sus vectores normales

Obtengamos vector normal de Π_1

Como el plano Π_1 esta definido usando una ecuacion cartesiana, y sabemos que los coeficientes de una ecuacion cartesiana estan dados por el vector normal al plano, tenemos que el vector normal del plano Π_1 es $N_2 = (1,1,1)$

Calculemos angulo entre plano

En base a lo visto en el inciso anterior, definamos el vector normal al plano Π_0 como $N_1 = \nabla f(3,-2,-1) = (8,5,0)$

Usemos la formula para obtener el coseno del angulo entre dos vectores

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle N_1, N_2\rangle|}{\|N_1\| \cdot \|N_2\|} = \frac{|\langle (8,5,0),(1,1,1)\rangle|}{\|(8,5,0)\| \cdot \|(1,1,1)\|}$$

$$\|(8,5,0)\| = \sqrt{8^2+5^2+0^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$$

$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$= \frac{|8+5+0|}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{267}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{13}{\sqrt{267}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{267}}\right)$$

Conclusion

En base a lo visto anteriormente, tenemos que el angulo entre los planos Π_0 y Π_1 es igual a $\arccos\left(\frac{13}{\sqrt{267}}\right)$

4) a)

Ejercicio 4 *(20 pts.)* Considere la función $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$.

(a) Determine en qué direcciones v y w hay que moverse, partiendo del punto $p = (0, 1)$, para lograr la más alta tasa y la más baja tasa de crecimiento de f, respectivamente. Luego, calcule $D_v f(p)$ y $D_w f(p)$.

(b) Sea $h(t) = f(2 + 3t^2 u_1, 3 + tu_2)$, donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario. Use la regla de la cadena y encuentre la dirección u para la cual la derivada $h'(0)$ es máxima.

Planteo

Para calcular la direccion de maximo crecimiento partiendo de un punto, basta con evaluar el gradiente de la funcion en dicho punto y dividir esto por la norma del gradiente en dicho punto para así obtener un vector unitario

Para calcular la direccion de mínimo crecimiento el procedimiento es el mismo, solo que se pone el gradiente como negativo

Calculemos el gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2.1.y^2, 0 - 2.x.2y)$$
$$= (2x - 2.y^2, 4.x.y)$$

Evaluemos gradiente

$$\nabla f(0,1) = (2.0 - 2.1^2, 4.0.1) = (-2, 0)$$

Calculemos la norma del gradiente

$$\|\nabla f(0,1)\| = \|(-2,0)\| = \sqrt{(-2)^2 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

Definamos v y w

$$v = \frac{\nabla f(0,1)}{\|\nabla f(0,1)\|} = \frac{(-2,0)}{2} = (-1,0)$$

$$w = -\frac{\nabla f(0,1)}{\|\nabla f(0,1)\|} = -\frac{(-2,0)}{2} = -(-1,0) = (1,0)$$

Calculemos la derivadas direccionales

$$D_v f(0,1) = \langle \nabla f(0,1), (-1,0) \rangle = \langle (-2,0), (-1,0) \rangle = 2 + 0 = 2$$

$$D_v f(0,1) = \langle \nabla f(0,1), (1,0) \rangle = \langle (-2,0), (1,0) \rangle = -2 + 0 = -2$$

4) b)

Ejercicio 4 *(20 pts.)* Considere la función $f(x,y) = x^2 - 2xy^2$.

(b) Sea $h(t) = f(2 + 3t^2u_1, 3 + tu_2)$, donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario. Use la regla de la cadena y encuentre la dirección u para la cual la derivada $h'(0)$ es máxima.

Planteo

Definamos $\vec{v}(t) = (2+3t^2u_1, 3+tu_2)$

La regla de la cadena puede escribirse de la siguiente forma $\langle \nabla f(\vec{v}(t)), \vec{v}\,'(t) \rangle$

Calculemos el gradiente

$\nabla f(x,y) = (2x - 2y^2, 0 - 2.x.2y) = (2x-2y^2, -4xy)$

$\nabla f(\vec{v}(t)) = (2.(2+3t^2U_1) - 2.(3+tU_2)^2, -4.(2+3t^2U_1).(3+tU_2))$

Calculemos $\vec{v}\,'(t)$

$\vec{v}\,'(t) = ((2+3t^2U_1)', (3+tU_2)') = (3.2t.U_1, 1.U_2)$

$= (6tU_1, U_2)$

Calculemos la derivada

$h'(0) = \langle \nabla f(\vec{v}(0)), \vec{v}\,'(0) \rangle$

$= \langle (2.(2+3.0.U_1) - 2.(3+0.U_2)^2, -4.(2+3.0.U_1).(3+0U_2)), (6.0.U_1, U_2) \rangle$

$= \langle (2.2 - 2.3^2, -4.2.3), (0, U_2) \rangle$

$= \langle (4-18, -24), (0, U_2) \rangle = \langle (-14, -24), (0, U_2) \rangle$

$= -14 \cdot 0 + (-24 . U_2) = -24 . U_2$

Calculemos U

Como U_1 no aparece en $h'(0)$, definamos $U_1 = 0$ y procedamos a encontrar algun U_2 que maximice a $h'(0)$

$\|(0,U_2)\| = 1 \Rightarrow \sqrt{0^2 + U_2^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{U_2^2} = 1 \Rightarrow U_2 = 1$

por lo tanto, tenemos $U_2 = 1$, lo cual tiene sentido, ya que el valor maximo que puede tomar una de las coordenadas de un vector unitario es 1

Conclusion

La direccion U para la cual $h'(0)$ es maxima es $U = (0,1)$