Lautaro Bachmann

Tarea 6

Ejercicio

Decidir en cada caso si W es subespacio de V. Justificar.

1) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | (\frac{d}{dx}p)(0) = 0\}$ y $V = \mathbb{R}[x]$.

2) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

3) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f^2 = f\}$ y $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Definamos:

(∗) W es no vacio

(★) W es cerrado para la suma y para la multiplicacion por un escalar.

1) Para probar que W es un subespacio de V debemos probar (∗) y (★)

Ahora procederemos a demostrar (∗):

Sea $\tilde{p}$ un polinomio con todos los coeficientes nulos, tenemos que $\left(\frac{d}{dx}\tilde{p}\right)(0) = 0$

$\therefore$ queda demostrado que W es no vacio.

Ahora seguiremos con la demostracion de (★):

Hipótesis: $q(x), h(x) \in W \Rightarrow \left(\frac{d}{dx}q\right)(0) = 0$ y $\left(\frac{d}{dx}h\right)(0) = 0$

Tesis: $q(x) + s.h(x) \in W$, con $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(q+s.h)(0) \overset{(1)}{=} \left(\frac{d}{dx}q\right)(0) + \left(\frac{d}{dx}s.h\right)(0)$$

$$\overset{(2)}{=} \left(\frac{d}{dx}q\right)(0) + s.\left(\frac{d}{dx}h\right)(0) \overset{(3)}{=} 0 + s.0 = 0$$

$\therefore \frac{d}{dx}(q+s.h)(0) = 0 \Rightarrow q(x) + s.h(x) \in W$

Por lo cual, queda demostrada la propiedad (★)

(1) $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx}f \pm \frac{d}{dx}g$

(2) $\frac{d}{dx}(k.f) = k.\frac{d}{dx}f$

(3) Hipotesis

Por ende, como demostramos $(*)$ y $(\star)$, queda demostrado que W es un subespacio vectorial de V.

2) $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times2} : A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $V = \mathbb{R}^{2\times2}$

De la misma forma que en el ejercicio anterior, debemos demostrar que se cumplen $(*)$ y $(\star)$.

Procedamos a demostrar $(*)$:

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ -2.0 & -2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ queda demostrado que W es no vacío.

Ahora procedamos a demostrar la buena definición para la suma:

Hipotesis: Sean $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = 0$ y $C = 0 \in W$

$\Rightarrow \overbrace{B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.-2 & 0.-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\overbrace{C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}^{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.-2 & 0.-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tesis: $\tilde{B} + \tilde{C} \in W$

$$\tilde{B} + \tilde{C} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore$ como $\tilde{B} + \tilde{C} = 0 \Rightarrow \tilde{B} + \tilde{C} \in W$, por lo cual queda demostrada la buena definición para la suma.

Ahora procedamos a demostrar la buena definicion para multiplicacion por escalares:

Teniendo en cuenta lo planteado en la anterior demostracion, intentemos demostrar que $t.\tilde{B} \in W$:

$$t.\tilde{B} = t.B.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.t & 0.t \\ 0.t & 0.t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore$ como $t.\tilde{B} = 0 \Rightarrow t.\tilde{B} \in W$

Por lo cual queda demostrada la buena definición para la multiplicacion por escalares.

Por ende, habiendo demostrado (*) y (★), queda demostrado que W es un subespacio vectorial de V.

3) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f^2 = f\}$ y $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

De la misma forma que en los demas ejercicios, para demostrar que W es un subespacio de V basta con demostrar (*) y (★).

Procedamos a demostrar (*):

Sea $f(x) = 0$ una funcion constante $\Rightarrow (f(x))^2 = f(x) \Rightarrow 0^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$\therefore$ queda demostrado que W es no vacio.

Procedamos a demostrar que no se cumple (★):

Sean f y $g \in W$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene que cumplir que $f + s.g \in W$, sin embargo si $f(x) = 1$, $g(x) = 2$, $s = 3$ tenemos lo siguiente:

$f(x) + s.g(x) = 1 + 3.2 = 7$

Ahora veamos si se cumple que $(f(x) + s.g(x))^2 = f(x) + s.g(x)$:

$(f(x) + s.g(x))^2 = f(x) + s.g(x) \Rightarrow 7^2 = 7 \Rightarrow 49 = 7 \rightarrow$ Absurdo

Por ende, como demostramos que (★) no se cumple, somos capaces de afirmar que W no es un subespacio vectorial de V.