Lautaro Bachmann

Ejercicio 1:

a) $\frac{x+3}{|x-5|} < x+3 \rightarrow x \neq 5$

Caso 1: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

$\frac{x+3}{x-5} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - (x+3) < 0$

$\Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+3 - x.(x-5) - 3.(x-5)}{x-5} < 0$

$\Rightarrow \frac{x+3 - x^2 + 5x - 3x + 15}{x-5} < 0$

$\Rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 3x + 18}{x-5} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 3x + 18}{x-5} < 0$

$\Rightarrow \frac{-1.(x+3)(x-6)}{x-5} < 0$

~~$x = -3 \pm \sqrt{\quad}$~~

$\Delta = 3^2 - 4.-1.18 = 9 + 72$
$= 81$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2.-1} = \frac{-3 \pm 9}{-2}$

$x_1 = \frac{-3+9}{-2} = \frac{+6}{-2} = -3$

$x_2 = \frac{-3-9}{-2} = \frac{-12}{-2} = +6$

Procedamos a hacer un cuadro con los puntos relevantes para así ver cuando la expresion es negativa

	$(-\infty,-3]$	$[-3,5)$	$(5,6]$	$[6,\infty)$
-1	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$	$+$
Resultado	$+$	$-$	$+$	$-$

$\therefore\ x \in [6,\infty)$, ya que $x \geq 5$ ~~y se busca~~

Caso 2: $x-5<0 \Rightarrow x<5$

$$\frac{x+3}{-(x-5)} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{-x+5} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{-x+5}-(x+3)<0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{-x+5}-x-3<0 \Rightarrow \frac{x+3-x(-x+5)-3.(-x+5)}{-x+5}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3+x^2-5x+3x-15}{-x+5}<0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+4x-12}{-x+5}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-12}{-(x-5)}<0 \Rightarrow \frac{(x-4).(x+3)}{-(x-5)}<0$$

$$\Delta=(-1)^2-4.1.-12=1+48=49$$

$$x=\frac{+1\pm\sqrt{49}}{2.1}=\frac{1\pm7}{2}$$

$$x_1=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$x_2=\frac{1-7}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

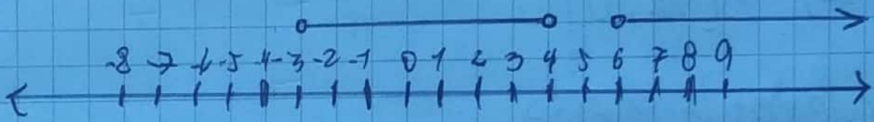
	$(-\infty,-3)$	$(-3,4)$	$(4,5)$	$(5,\infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-(x-5)$	$+$	$+$	$+$	$-$
Resultado	$+$	$-$	$+$	$-$

$\therefore\ x \in (-3,4)$, ya que $x<5$

Lautaro Bachmann

Ahora procedamos con el gráfico.

Segun lo antes visto, tenemos que $x \in (-3,4) \cup (6,\infty)$



b) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{x^2}}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) No, ya que es una función par:

$$f(-x) = \frac{1}{1+e^{(-x)^2}} = \frac{1}{1+e^{x^2}} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

$\therefore$ no se cumple que si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) Para calcular la imagen de f veamos donde corta al eje Y y cual es su limite cuando tiende a infinito:

$$f(0) = \frac{1}{1+e^{0^2}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{x^2}} = \frac{1}{1+e^{\infty^2}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\therefore$ como a medida que x crece, la funcion se acerca a 0, la funcion posee su máximo en $x = 0$.

$\therefore im(f) = [1/2, 0)$

Por ende, la funcion no es suryectiva ya que $im(f) \neq \mathbb{R}$ (conj. llegada).

iii) No es biyectiva ya que no es ni inyectiva ni suryectiva.

IV) Si, es necesario. Habría que delimitar el dominio tal que la funcion este definida de la siguiente forma: $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

V) Para que f sea biyectiva debería estar definida así:

$f: [0, \infty) \to [1/2, 0)$

Ahora calculemos la inversa.

$y = \frac{1}{1+e^{x^2}} \Rightarrow y \cdot (1+e^{x^2}) = 1$

$\Rightarrow 1 + e^{x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow e^{x^2} = \frac{1}{y} - 1$

$\Rightarrow \ln(e^{x^2}) = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) \Rightarrow x^2 \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)$

$\Rightarrow x^2 \cdot 1 = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) \Rightarrow x = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)}$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$

Escaneado con CamScanner

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoria y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el regimen de infraccion de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apendice de la Res. Rec. 1554/2018.