(b) Represente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$ como una serie de potencias centrada en $a = 0$ y halle su radio de convergencia.

Partamos de la serie geometrica y transformemosla hasta llegar a $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{5}} \Rightarrow \frac{1}{-5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{-5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{-5+x} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{-5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{d}{dx} (x-5)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{d}{dx} (x-5)^{-1} \cdot \frac{d}{dx} x-5$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = -(x-5)^{-2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{-1}{(x-5)^2} \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{(x-5)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{5}}_{a_n} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{(x-5)^2}$$

Results

$$\frac{1}{(-5+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, 5^{-2-n} (1+n) \quad \text{for } |x| < 5$$

Hallemos el radio de convergencia

Usemos crit. del cociente

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{5}}{\frac{n}{5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}}$$

$$= \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

$\therefore$ como $L = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$

Conclusion

La representacion de $f(x)$ como serie de potencias es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^{n-1}$ y su radio de convergencia es $R = 1$