

Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

- (1) Hallar el cociente y el resto de la división de:
a) 135 por 23. b) -135 por 23. c) 135 por -23 .
d) -135 por -23 . e) 127 por 99. f) -98 por -73 .
- (2) a) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b .
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
- (3) Dado $m \in \mathbb{N}$, hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.
- (4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:
a) $(1503)_6$ b) $(1111)_2$ c) $(1111)_{12}$
d) $(123)_4$ e) $(12121)_3$ f) $(1111)_5$
- (5) Convertir
a) $(133)_4$ a base 8, b) $(B38)_{16}$ a base 8,
c) $(3506)_7$ a base 2, d) $(1541)_6$ a base 4.
- (6) Calcular:
a) $(2234)_5 + (2310)_5$, b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.
- (7) Expresar en base 5: $(1503)_6 + (1111)_2$.
- (8) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
a) Si $a \neq 0$ y $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
b) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(rb + sc)$ para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$.
c) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.
- (9) Dados $b, c \in \mathbb{Z}$, probar las siguientes propiedades:
a) 0 es par y 1 es impar.
b) Si b es un número par no nulo y $b | c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
c) Si un número par no nulo divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2 .
d) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.

- e) La suma de un número par y uno impar es impar.
- f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
- g) b es par si y sólo si b^2 es par.

(10) Probar que $n(n + 1)$ es par para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(11) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (no nulos cuando el enunciado lo requiera). ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

- a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b \text{ ó } a \mid c$.
- b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b \text{ ó } a \mid c$.
- c) $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
- d) $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
- e) $b, c \in \mathbb{N} \text{ y } a = b \cdot c \Rightarrow a \geq b \text{ y } a \geq c$.

(12) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
- b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

(13) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar la respuesta.

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n + 1$ es múltiplo de n .
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 + 1$ es múltiplo de 2.
- c) $\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2.

(14) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

(15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

(16) a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: para todo $n \in \mathbb{N}$, el número combinatorio $\binom{n+3}{4} \in \mathbb{N}$).

c) Sea $m \geq 2$. Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.

(17) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

- (18) Encontrar
 $a)$ (7469, 2464), $b)$ (2689, 4001),
 $c)$ (2447, -3997), $d)$ (-1109, -4999).
- (19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:
 $a)$ 14 y 35, $b)$ 11 y 15, $c)$ 12 y 52,
 $d)$ 12 y -52, $e)$ 12 y 532, $f)$ 725 y 441,
 $g)$ 606 y 108.
- (20) Probar que no existen enteros a y b que satisfagan $a + b = 100$ y $(a, b) = 3$.
- (21) $a)$ Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
 $b)$ Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
- (22) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
- (23) $a)$ Probar que si d es divisor común de a y b , entonces $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$.
 $b)$ Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\frac{a}{(a, b)}$ y $\frac{b}{(a, b)}$ son coprimos.
- (24) Probar que 3 y 5 son números primos.
- (25) Dar todos los números primos positivos menores que 100.
- (26) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
- (27) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.
- (28) Demostrar que si $a \cdot b$ es un cuadrado y $(a, b) = 1$, entonces a y b son cuadrados.
- (29) $a)$ Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.
 $b)$ Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.
 $c)$ Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
- (30) $a)$ Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.
 $b)$ Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es racional.
 $c)$ Probar que no existen enteros m, n no nulos tal que $21n^5 = m^5$.

(31) Probar que si p_k es el k -ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

(32) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.

b) $a = 11$ y $b = 13$.

c) $a = 140$ y $b = 150$.

d) $a = 225$ y $b = 44$.

e) $a = 60$ y $b = 70$.