(8) Probar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ $(n \geq 0)$.

Caso base: Sea $P(n) =$ " $\sum_{i=0}^{n} 2i = 2^{n+1} - 1$ "

Veamos si $P(1)$ es cierta

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^{0+1} - 1$$

Elem. neut., $x^1 = x$

$$2^0 = 2 - 1$$

$x^0 = 1$

$$1 = 1$$

$\checkmark$

Caso Inductivo:

Supongamos que $P(k)$ se cumple para cierto $k \in \mathbb{N}$

$$\therefore \quad P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1}$$

def. rec. sum, hipotesis Ind.

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

Asociatividad, $2 \cdot x = x + x$, $x = x^1$

$$2^{k+2} - 1 = 2^1 \cdot (2^{k+1}) - 1$$

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, conmut.

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+1+1} - 1$$

$$2^{k+2} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

$\checkmark$

Como se comprobó que la anterior igualdad es verdadera, podemos afirmar que P(k+1) es verdadera.

Teniendo en cuenta este hecho y el principio de induccion, somos capaces de confirmar que P(n) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$