Lautaro Bachmann

Tarea 3:

(1) Calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -13 \end{bmatrix}.$$

Recuerde indicar en el procedimiento las operaciones elementales por fila que realiza.

Primero armemos la matriz ampliada:

$$(A|Id_n) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora procederemos a aplicar operaciones elementales por fila hasta llegar a una matriz de la forma $(B|Z)$, siendo B una MERF y Z una matriz cuadrada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}.F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & -9 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2+4F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 13 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}.F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1.F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right] = (B|Z)$$

$\therefore$ como $B = Id_n \Rightarrow A$ es invertible y Z es la inversa de A.

(2) Dar una solución del sistema $AX = Y$ donde $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ es una matriz invertible cuya inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Teniendo en cuenta el teorema que nos dice que si A es una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{K}$, una de las posibles afirmaciones que podemos hacer es que el sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, la cual es $A^{-1}.Y$

$$A^{-1}.Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+5+2+0-1 \\ 1+0+0+6+0-5 \\ 1+0+15+0+0-5 \\ 0+0+10+6+0-5 \\ 1+0+10+6+0-5 \\ 1+0+15+8+0-5 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \\ 11 \\ 12 \\ 19 \end{bmatrix}}^{Y'}$$

$\therefore$ Y' es solución del sistema

(3) Sean las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -10 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ -1 & -7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -10 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \frac{1}{434}\begin{bmatrix} 49 & 693 & 56 & -29 \\ -7 & -161 & -70 & 13 \\ -42 & -98 & 14 & 16 \\ 0 & -434 & 0 & 62 \end{bmatrix}.$$

Notar que C es como B, sólo que tiene las filas permutadas. Calcular la matriz inversa de C.

Como $C = E \cdot B$, siendo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ podemos averiguar cual es la inversa de C utilizando aritmetica.

$\downarrow$

$C = E \cdot B \overset{(1)}{\Rightarrow} C \cdot B^{-1} = E \cdot B \cdot B^{-1}$

$\Rightarrow C \cdot B^{-1} = E \overset{(2)}{\Rightarrow} C^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = C^{-1} \cdot E$

$\Rightarrow B^{-1} = C^{-1} \cdot E \overset{(3)}{\Rightarrow} B^{-1} \cdot E^{-1} = C^{-1} \cdot E \cdot E^{-1}$

$\Rightarrow B^{-1} \cdot E^{-1} = C^{-1}$

(1) Multiplico por B^{-1} en ambos lados

(2) Multiplico por C^{-1} en ambos lados

(3) Multiplico por E^{-1} en ambos lados

Ahora procedamos a calcular $B^{-1} \cdot E^{-1}$ para averiguar el valor de C^{-1}:

$$B^{-1} \cdot E^{-1} = \frac{1}{434} \cdot \begin{bmatrix} 49 & 693 & 56 & -29 \\ -7 & -161 & -70 & 13 \\ -42 & -98 & 14 & 16 \\ 0 & -434 & 0 & 62 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -29 & 56 & 693 \\ -7 & 13 & -70 & -161 \\ -42 & 16 & 14 & -98 \\ 0 & 62 & 0 & -434 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 49 & -29 & 56 & 693 \\ -7 & 13 & -70 & -161 \\ -42 & 16 & 14 & -98 \\ 0 & 62 & 0 & -434 \end{bmatrix}$$