Resumen Algebra Lineal - FAMAF

Profesor: Alejandro Leopoldo Tiraboschi

Lautaro Bachmann

Contents

1 Aviso Importante

Para entender este apunte es fuertemente recomendado ver la playlist "Essence of linear Algebra" del youtuber 3blue1brown, puesto que se hace referencia fuertemente a su contenido.

LINK

2 Matrices

2.1 Inversa

2.1.1 Que pasa si la matriz tiene filas nulas?

No es invertible

2.2 Transpuesta

Es la matriz que tiene las filas y columnas intercambiadas, osea $A_{ij} = A^t_{ji}$

2.2.1 Notacion

A^t

2.3 Simetrica

Sucede cuando $A = A^t$

3 Determinante

3.1 Que es?

Es el factor por el cual es escala un area/volumen al realizar una transformacion lineal

Esta area/volumen puede ser pensada como el cuadrado/cubo formado por los vectores base

3.1.1 Que pasa si es cero?

La transformacion comprime el espacio a una dimension más baja que la actual.

3.1.2 Que pasa si es negativo?

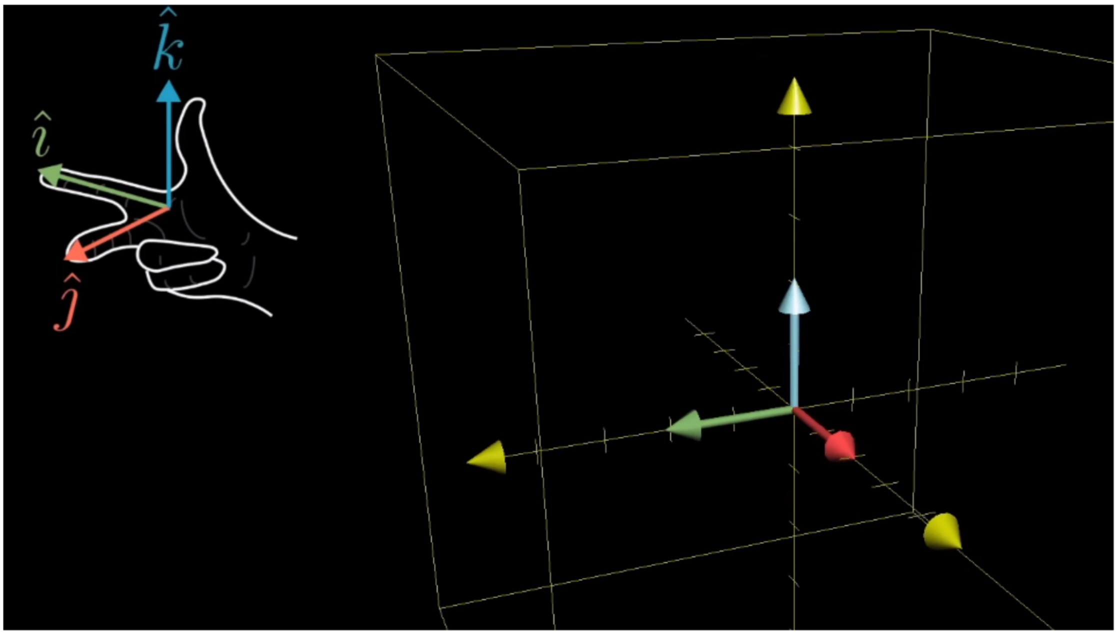
3.1.2.1 2 dimensiones

Podemos interpretarlo como "dar vuelta" el espacio. Como si diesemos vuelta una hoja de papel

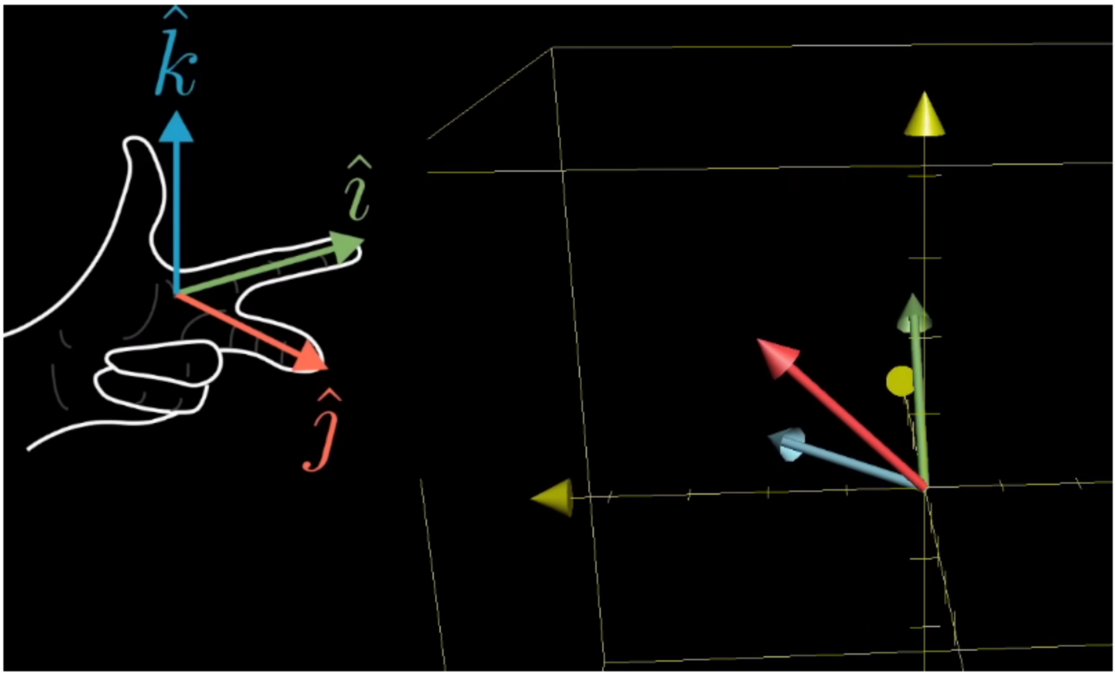
Sucede cuando $\hat{j}$ termina a la derecha de $\hat{i}$

3.1.2.2 3 dimensiones

Imagina que tu pulgar, indice y dedo medio de tu mano derecha son los vectores base como en la siguiente imagen:



Si despues de realizar una transformacion lineal, solo tiene sentido representar los nuevos vectores base con tu mano izquierda, quiere decir que la orientacion del espacio ha cambiado y que el determinante es negativo.



De la misma manera que cuando hay dos dimensiones y se invierte el espacio, sucede que $\hat{\jmath}$ termina a la derecha de $\hat{\imath}$

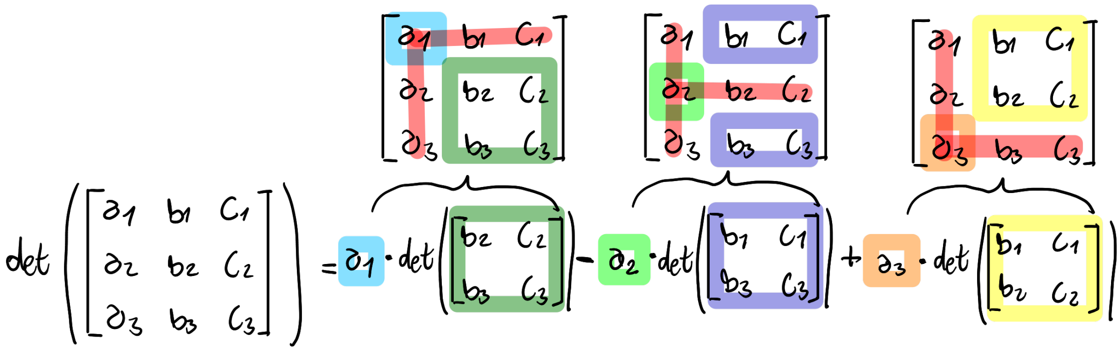
3.2 Como se calcula?

3.2.1 Matriz 3x3

Por cada entrada de la primer columna:

1. "Tachar" (mentalmente) la fila y la columna a la que pertenece dicha entrada
2. Sumar el resultado de multiplicar la entrada por la matriz formada por los elementos sin "tachar" de la matriz
    - Si se trata de la segunda entrada hay que restar en vez de sumar

3.2.1.1 Ejemplo



3.2.2 Matriz NxN

Sea A la siguiente matriz $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definimos $A(i|j)$ como una matriz $(n-1)\times(n-1)$ igual a A donde "ignoramos" la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

Por ejemplo, la matriz $A(1|1)$ luciría así:

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definimos $det(A)$ como:

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A(1|1)) - a_{21} \cdot det(A(2|1)) + \cdots \pm a_{n1} \cdot det(A(n|1))$$

(Los miembros pares restan en vez de sumar)

En otras palabras, el $det(A)$ es la sumatoria de las entradas de la primer columna de A, multiplicadas por el determinante de la submatriz de A que no tiene la fila i ni la columna j dadas por la entrada

3.2.3 Calculo mediante operaciones elementales por fila

Podemos usar operaciones elementales por fila para hacer que la matriz sea una matriz triangular superior, para así usar la siguiente propiedad:

> Si A es triangular superior $\Rightarrow det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
>
> (Es decir, el determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal)

3.2.4 Efectos de las operaciones elementales en el determinante

Para los ejemplos se tiene que B es equivalente por filas a A y se diferencian por una única operacion elemental por filas.

3.2.4.1 Intercambiar filas

Intercambiar filas cambia el signo del determinante

Ejemplo:

$$F_i \leftrightarrow F_j \Rightarrow det(B) = -det(A)$$

3.2.4.2 Multiplicar fila por t

Multiplica el determinante por t

Ejemplo:

$$t \cdot F_i \Rightarrow det(B) = t \cdot det(A)$$

3.2.4.3 Sumar un multiplo de otra fila

No afecta al determinante

Ejemplo:

$$F_i + t \cdot F_j \Rightarrow det(B) = det(A)$$

4 Autovalores y autovectores

4.1 Que son?

4.1.1 Autovectores

Son vectores que permanecen en la misma direccion luego aplicar una transformacion lineal sobre el espacio.

Estos vectores pueden quedar del mismo tamaño o agrandarse/achicarse, pero lo importante es que quedan “en la misma” linea que antes de la transformacion lineal.

4.1.2 Autovalores

Son el factor por el cual se agranda/achica un autovector al aplicar la transformacion lineal.

4.2 Calcular autovalores

4.2.1 Origen de la formula

Como vimos antes cuando definimos autovectores, sabemos que son vectores los cuales solo se agrandan o achican luego de aplicarse una transformacion lineal. Por lo cual podemos representarlos de la siguiente forma.

$$Ax = \lambda x$$

Siendo A una matriz, x un vector y λ un escalar.

4.2.1.1 Que significa esta formula?

Significa que el vector x es un vector tal que el multiplicarlo por una matriz es igual a multiplicarlo por un escalar, es decir, la transformacion lineal (la matriz) lo unico que hace es agrandarlo o achiarlo.

4.2.2 Desarrollo de la formula

$$Ax = \lambda x$$

Para que sea más fácil de operar, representemos la multipicacion por un escalar como una multiplicacion por una matriz que produzca el mismo resultado, en este caso, la matriz identidad multiplicada por λ

$$Ax = (\lambda I)x$$

Pasamos $(\lambda I)x$ al otro lado:

$$Ax - (\lambda I)x = 0$$

Factorizamos x

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Ahora, como la unica forma de que la multiplicacion de una matriz por un vector (no nulo) de como resultado 0 es que el determinante de dicha matriz sea 0, tenemos que:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Por ende, si hallamos los valores de λ que cumplen con esto, habremos hallado los autovectores de transformacion lineal (la matriz).

4.2.3 Pasos

1. Plantear matriz $A - (\lambda I)$
2. Calcular $det(A - \lambda I)$ (el polinomio caracteristico)
3. Ver para que valores el polinomio caracteristico se hace 0
4. Los autovalores son iguales a las raices de este polinomio

4.3 Calcular autovectores

1. Hallar autovalores
2. Por cada autovalor:
    - Reemplazar λ en la matriz $A - \lambda I_d$ por el autovalor
    - Plantear un sistema homogeneo en base a esta matriz y resolverlo
    - El conjunto de soluciones de este sistema es el *autoespacio* de ese autovalor

4.3.1 Ejemplo matriz 2x2

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Viendolo como sistema de equaciones:

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

5 Espacios vectoriales

5.1 Que tengo que probar para saber si algo es un espacio vectorial

5.1.1 Buena definicion de las operaciones

En resumidas cuentas, hay que chequear que si la suma y el producto escalar no producen resultados que no pertenezcan al conjunto.

5.1.1.1 Chequear lo siguiente:

- Es cerrado para la suma
  - Si sumo dos elementos queda dentro del conjunto
- Es cerrado para el producto escalar
  - Si aplico producto por un escalar queda dentro del conjunto

5.1.2 Propiedades de la suma

1) conmutativa $v + w = w + v$
2) asociativa $(v + w) + u = v + (w + u)$
3) $\exists$ neutro: $0 + f = f$
4) $\exists$ Opuesto $f + (-f) = 0$

5.1.3 Propiedades del producto por un escalar

1) Existe un "1" en el conjunto tal que $1 \cdot f = f$

- No tiene que ser necesariamente 1, si no que es el elemento que actua como "1" en el espacio vectorial.
- No tenemos que elegirlo, si no que lo define el espacio.

2) Asociativa: $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1\lambda_2)v$

5.1.4 Distributividad

1) Vectores: $\lambda(f_1 + f_2) = \lambda f_1 + \lambda f_2$
2) Escalares: $(\lambda_1 + \lambda_2)f = \lambda_1 f + \lambda_2 f$

5.2 Subespacio vectorial

Subconjunto de V que con la misma suma y mismo producto que tambien es espacio vectorial

Como sabemos que las operaciones vienen de un espacio vectorial, tenemos que cumplen las propiedades requeridas (S1 a S4, P1, P2, D1, D2)

5.2.1 Cosas a chequear

5.2.1.1 Explicacion

Hace falta chequar las siguientes propiedades

1) $W \neq \emptyset$
2) Es cerrado para la suma
3) Es cerrado para el producto

5.2.1.2 Version resumida

1) $0_v \in W$
   - 0_v representa al 0 del espacio vectorial
2) $w_1 + t \cdot w_2 \in W$
   - Chequea al mismo tiempo la buena definicion de la suma y el producto
   - A veces es más rápido de hacer, pero otras veces conviene chequear por separado para evitar complicaciones.

5.2.2 Interseccion de subespacios

Sean A y B dos subespacios vectoriales de V

$\Rightarrow C = A \cap B$ es un subespacio de V

5.2.3 Caracterizar con ecuaciones

Representar como combinacion lineal

$$x_1 u + x_2 v + x_3 w$$

Desarrollar la expresion obtenida de ser necesario (ver si $w = v + u$ por ejemplo)

Plantear un vector $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ igual a la anterior ecuacion:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = x_1 u + x_2 v + x_3 w$$

Luego expresar en base a valores de B

5.2.3.1 Ejemplo resultado random

$$b_1 = 4b_2, b_2 = b_3$$

5.2.4 Dar base y dimension de W

Ver si los vectores generadores son LD

Expresar todos los vectores no LD y ver cuantos son para determinar la dimension?

5.2.5 Extender base

Hallar vectores nuevos que no sean LD a los vectores generadores que se tengan.

5.3 Independencia lineal

Sea $a_1, \dots, a_n$ escalares y $v_1, \dots, v_n$ vectores

Los vectores v_i son linealmente dependientes si:

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Viendolo como sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$$

En otras palabras, armamos un sistema homogeneo con los vectores que queremos chequear como columnas y vemos si todos los a_i son iguales a 0 o no

5.3.1 Cuando hay independencia lineal

Cuando la solucion del sistema es $(0, 0, \dots, 0)$

5.3.2 Cuando hay dependencia lineal

Cuando la solucion del sistema es distinta a $(0, 0, \dots, 0)$

5.4 Representar como combinacion lineal

Supongamos que queremos representar un vector $A = (a_1, a_2, a_3)$ como combinacion lineal de los vectores u, v y w.

$$(a_1, a_2, a_3) = t_1 u + t_2 v + t_3 w$$

con $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$

Para resolverlo buscamos los valores de t_i resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1 t_1 + v_1 t_2 + w_1 t_3 = a_1 \\ u_2 t_1 + v_2 t_2 + w_2 t_3 = a_2 \\ u_3 t_1 + v_3 t_2 + w_3 t_3 = a_3 \end{cases}$$

O lo que es igual:

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

5.5 Dar conjunto de generadores para subespacios dados por conjuntos de soluciones

Sea G el conjunto de generadores del espacio

5.5.1 Si la solucion es 0

$G = \{0\}$

5.5.2 Ejemplo random

sol: $\{(4t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow G = \{(4, 3, 1)\}$