

Resumen Algebra Lineal Parcial 3 (SIN REVISAR) - FAMAF

Profesor: Alejandro Leopoldo Tiraboschi

Lautaro Bachmann

Contents

0.1	18)	2
0.1.1	Encontrar interseccion de subespacios	2
0.1.2	Encontrar generadores subespacio	3
0.1.3	Suma de subespacios	3
1	Practico 7	3
1.1	4)	3
1.1.1	b)	3
1.1.2	c)	4
1.1.3	d)	4
1.1.4	e)	4
1.2	9)	4
1.2.1	Howto	4
1.2.2	Probar que T es un epimorfismo	4
1.2.3	Tamaño de matrices	5
1.3	10)	5
1.3.1	Howto	5
2	Practico 8	6
2.1	1)	6
2.1.1	Howto	6

0.1 18)

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 :

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\},$$

$$W_2 = \langle (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1) \rangle.$$

- Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
- Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

0.1.1 Encontrar interseccion de subespacios

Para encontrar la interseccion de subespacios podemos encontrar la descripcion implicita de los subespacios y luego definir uno nuevo con la conjuncion de ambas

0.1.2 Encontrar generadores subespacio

1. Pasar a descripción paramétrica
2. Separar el vector de la paramétrica en varios vectores hasta tener algo de la forma:
 - $\lambda_1(a_1, a_2, a_3) + \dots + \lambda_n(b_1, b_2, b_3)$
 - Los vectores a y b son los generadores del espacio
3. Escribir los generadores

0.1.3 Suma de subespacios

1. Concatenar los generadores de ambos subespacios
 - Sean G_{W_1} y G_{W_2} los generadores de W_1 y W_2
 - $W_1 + W_2 = \langle G_{W_1}, G_{W_2} \rangle$
2. Encontrar base para $W_1 + W_2$

1 Practico 7

1.1 4)

(4) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

- a) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Como en el ejercicio (3) c) pensamos a los vectores como columnas.
- b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 1, 1)$, $(-5, 1, 1)$.
- c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T .
- d) Dar un conjunto de generadores del núcleo y la imagen de T .
- e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 3)$.

1.1.1 b)

Para que pertenezca al núcleo se tiene que dar que $T(v) = 0$. Así que basta con chequear esto para cada uno de los vectores

1.1.2 c)

- Obtener nucleo: resolver $AX = 0$
- Obtener imagen: resolver $AX = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$

1.1.3 d)

Pasar los conjuntos de soluciones anteriores a su version parametrica y extraer de ahí los generadores

1.1.4 e)

Ver si los vectores cumplen con la condicion de la imagen - $b_3 - b_1 - 3b_2 = 0$

1.2 9)

(9) Sea $T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

a) Probar que T es un epimorfismo.

b) Dar la dimensión del núcleo de T .

c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A ? Como en el ejercicio (4) a) pensamos a los vectores como columnas.

1.2.1 Howto

suryectiva = sobreyectiva

1.2.2 Probar que T es un epimorfismo

Para probar que T es un epimorfismo hay que demostrar que T es suryectiva/sobreyectiva

Sea $T : V \rightarrow W$

$$Im(T) = W \Rightarrow T \text{ es suryectiva} \Rightarrow T \text{ es epimorfismo}$$

1.2.3 Tamaño de matrices

$$A_{\text{alto} \times \text{ancho}}$$

$$\begin{aligned} A_{m \times n} \cdot B_{p \times q} &= C_{m \times q} \\ \Leftrightarrow n &= p \end{aligned}$$

1.3 10)

(10) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios (6) y (7) son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

Figure 1: 4b

1.3.1 Howto

Sea $T : V \rightarrow W$:

$\text{Im}(T) = W \Rightarrow T$ es sobreyectiva y epimorfismo

$\text{Nu}(T) = 0 \Rightarrow T$ es inyectiva y monomorfismo

es epimorfismo y monomorfismo \Rightarrow es isomorfismo

(11) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas (como en el ejercicio (3) c) pensamos a los vectores como columnas). Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

a) $\dim \text{Im}(T) = 2$ y $\dim \text{Nu}(T) = 2$.

b) T inyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

d) $e_1 \in \text{Im}(T)$ y $(-5, 1, 1) \in \text{Nu}(T)$.

e) $\dim \text{Im}(T) = 2$.

2 Practico 8

2.1 1)

(1) Dar las coordenadas del polinomio $2x^2 + 10x - 1 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, x + 1, x^2 + x + 1\}.$$

2.1.1 Howto

1. Expresar el polinomio como la combinacion lineal de los miembros de \mathcal{B}

$$2x^2 + 10x - 1 = a \cdot 1 + b \cdot (x + 1) + c \cdot (x^2 + x + 1)$$

2. Hallar el valor de a, b y c armando un sistema de ecuaciones
3. $[p(x)]_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$