Lautaro Bachmann

a) *(2 Pts.)* Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n$$

i)

Sea $a_n = n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

Por teorema de relación entre límite de funciones y sucesiones, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n.\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

L'hopital

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+1}}{-n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2+1}.-n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = g(h(x))$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ h'(x) = -n^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}.-n^{-2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.\frac{-1}{n^2} = \frac{-1}{n^2+\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}}$$

$$= \frac{-1}{n^2+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} n.\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Por ende, por teorema de relación entre límite de funciones y sucesiones, como $\lim_{n\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n.\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{+2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}.\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}$$

$$= 2.\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 2.\left(\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\right) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+1}\right) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{1}{1+1}\right) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n = 1$$

(b) *(1.5 Pts.)* Utilice algún criterio de convergencia y determine si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n^{1/3}}{n^3+3n}}^{a_n} \qquad \frac{n^{1/3}}{n^3}$$

Sea $a_n = \frac{n^{1/3}}{n^3+3n}$, $b_n = \frac{n^{1/3}}{n^3}$, como ambas estan compuestas por el cociente de polinomios positivos, podemos afirmar que son series de terminos positivos.

Ahora procederemos a aplicar el criterio de comparación en el limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{1/3}}{n^3+3n}}{\frac{n^{1/3}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^{1/3}}}{n^3+3n}}{\frac{\cancel{n^{1/3}}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3+3n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{n^3}{n^3}}}{\cancel{\frac{n^3}{n^3}}+\frac{3\cancel{n}}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{\infty^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

Veamos si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge:

$$b_n = \frac{n^{1/3}}{n^3} = n^{1/3} \cdot n^{-3} = n^{-8/3} = \frac{1}{n^{8/3}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{1} = \frac{1-9}{3} = \frac{-8}{3}$$

Criterio de serie p con $p>1$ (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}} \text{ converge}$$

Por ende, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3+3n}$ es convergente.