Lautaro Bachmann

Ejercicio 3:

a) 1) $f(x) = \sqrt{3+x}$

Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,2)$

$$g(x) = f'(1).(x-1) + f(1)$$
$$= \frac{1}{2.\sqrt{3+1}}.(x-1) + \sqrt{3+1}$$
$$= \frac{1}{2.\sqrt{4}}.(x-1) + \sqrt{4}$$
$$= \frac{1}{4}.(x-1) + 2 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{1}$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{-1+8}{4} = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

$$f'(x) = \left((3+x)^{1/2}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}.(3+x)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{2.\sqrt{3+x}}$$

Por ende, la ecuación de la recta tangente al gráfico en $(1,2)$ es

$$g(x) = \frac{1}{4}.x + \frac{7}{4}$$

ii) $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(\frac{9}{10}) \sim g(\frac{9}{10})$

$0{,}9 = \frac{9}{10}$

$$g(\tfrac{9}{10}) = \frac{1}{4}.\frac{9}{10} + \frac{7}{4} = \frac{9}{40} + \frac{7}{4}$$
$$= \frac{9+70}{40} = \frac{79}{40}$$

$\therefore f(\frac{9}{10}) \sim \frac{79}{40}$ | Por ende, el valor estimado de $f(\frac{9}{10})$ es $\frac{79}{40}$.

iii) Primero veamos la ~~como~~ dirección de la concavidad de $f(x)$.
Para ello calculemos la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{3+x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{(1)'.2.\sqrt{3+x} - 1.2.(\sqrt{3+x})'}{(2.\sqrt{3+x})^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{0.2.\sqrt{3+x} - 2.\frac{1}{2.\sqrt{3+x}}}{2^2.(\sqrt{3+x})^2}$$

$$= \frac{\frac{-2}{2.\sqrt{3+x}}}{4.(3+x)} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{3+x}}}{\frac{12+4x}{1}} = \frac{-1}{\sqrt{3+x}} . \frac{1}{(12+4x)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3+x}.(12+4x)}$$

Veamos en que intervalos $f''(x)$ es positiva o negativa

| | $(-3,\infty)$ |
|---|---|
| $-1$ | $-$ |
| $\sqrt{3+x}$ | $+$ |
| $(12+4x)$ | $+$ |
| | $-$ |

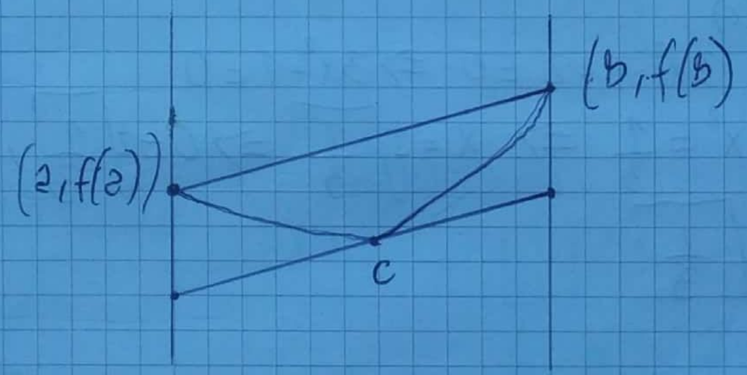
$\therefore f''(x) < 0$, por lo cual la funcion es concava hacia abajo y por ende, el valor obtenido en (ii) está ~~sobre~~ sobreestimado.

Lautaro Bachmann

b) I) El teorema del valor medio nos dice que si una funcion $f$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$ tenemos lo siguiente:

$$\exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Es decir, existe un número $c$, para el cual la pendiente de la recta tangente que pase por dicho punto es igual a la pendiente que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$




II) Si $f(x) = x^3 - 3x + 1$, explicar (sin calcular $f'$) porque existe $c$ en el intervalo $(-1,0)$ que satisface $f'(c) = -2$. Calcular dicho valor de $c$.

Probemos evaluar $f(x)$ con $x=-1$ y $x=0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

$f(0) = 0^3 - 3.0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

↓

Ahora calculemos la pendiente que pasa por $(-1, f(-1))$ y $(0, f(0))$

$$a = \frac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)} = \frac{1-3}{+1} = -2$$

$\therefore$ por teorema del valor medio sabemos que existe un $c \in (-1,0)$, tal que $f'(c) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = -2$

Cabe aclarar que esto es posible ya que $f(x)$ al ser un polinomio es continuo en $[-1,0]$ y derivable en $(-1,0)$.

Ahora veamos $f'(x)$ y hallemos el valor de $c$.

$$f'(x) = (x^3)' - (3x)' + (1)' = 3x^2 - 3 + 0 = 3x^2 - 3$$

$$\overbrace{3x^2-3}^{f'(c)} = -2 \Rightarrow 3x^2-3+2 = 0 \Rightarrow 3x^2-1=0$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}},$$

Por ende, $c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$