Lautaro Bachmann

Ejercicio 3: (20 puntos)

a) (I) Obtener la ecuacion de la recta tangente al grafico de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto $(1, \frac{1}{2})$

(II) Utilizar la ecuacion obtenida en (I) para estimar el valor de $f(0,9)$ con una aproximacion lineal

(III) ¿El valor obtenido en (II) es mayor o menor que el valor exacto de $f(0,9)$? Justificar.

b) (I) Enunciar con precision el teorema de Rolle

(II) Demostrar que la ecuacion x^5+3x-7 tiene a lo sumo 1 raiz en $\mathbb{R}$.

Desarrollo:

a) i) $y = f'(x)(x-1) + f(1)$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{(x+1)^2}\cdot(x-1) + \frac{1}{2}$

$= \frac{-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}$

$\cancel{= \frac{2\cdot(x+1)+(x+1)^2}{(x+1)^2\cdot 2} = (-x+1)\cdot(2+(-x+1))}$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$

$= -1\cdot(x+1)^{-2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$(1, f(1)) = (1, \frac{1}{2}) \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$\frac{-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2\cdot(-x+1)+(x+1)^2\cdot 1}{(x+1)^2\cdot 2}$

Por ende, el valor aproximado de $f(0{,}9) \approx \frac{391}{722}$

III) Para determinar lo que dice el enunciado veamos la derivada segunda de la funcion.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \left(-(x+1)^{-2}\right)' \Rightarrow f''(x) = -2 \cdot -1 \cdot (x+1)^{-3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$\therefore$ como $f''(x) > 0$ cuando $x > 0$, sabemos que la función es concava hacia arriba, por ende, el valor de $f(0{,}9)$ esta subestimado.

b) I) El teorema de Rolle nos dice que si c es un punto critico y $\exists f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$

II)