f) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $P(n)$ = " $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$ "

Caso base:

Veamos si $P(0)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$$

Elem. Neutro.

$$a^0 = \frac{a^1-1}{a-1}$$

$x^0 = 1$, $a^1 = a$

$$1 = \frac{a-1}{a-1}$$

$\frac{x}{x} = 1$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos $P(J)$ es verdadera para cierto $J \in \mathbb{N}$

$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$

$$\sum_{k=0}^{J+1} a^k = \sum_{k=0}^{J} a^k + a^{J+1}$$

def. rec. sumat., hip. ind

$$\frac{a^{J+1+1}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1}{a-1} + a^{J+1}$$

$x = x^1$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+(a^{J+1}).(a^1-1)}{a-1}$$

$x^n . x^m = x^{n+m}$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+a^{J+1+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$

Conmutatividad.

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1+a^{J+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$

Inverso aditivo

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1}{a-1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$