Ejercicios página 108

1)

Dados $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ el conjunto universal y $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $A - B$
c) A^c
d) $B^c \cap (C - A)$
e) $(A \cap B)^c \cup C$
f) $B \cap C$
g) $A \cap (B \cup C)$
h) $(A \cap B) \cup C$
i) $(A \cap B) - C$
j) $(A \cup B) - (C - B)$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

b) $A - B = \{7, 10\}$

c) $A^c = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

d) $B^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}, \quad C - A = \{2, 6, 8\}$

$$B^c \cap (C - A) = \{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 6, 8\} = \{6, 8\}$$

e) $(A \cap B)^c \cup C$

$$(A \cap B)^c = (\{1, 4\})^c = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$(A \cap B)^c \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$(A \cap B)^c \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

f) $B \cap C = \{2, 4\}$

g) $A \cap (B \cup C)$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 4, 7, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{1, 4\}$$

h) $(A \cap B) \cup C$

$(A \cap B) = \{1, 4\}$

$$(A \cap B) \cup C = \{1, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$$
$$(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

i) $(A \cap B) - C$

$$(A \cap B) - C \quad = \quad \{1,4\} - \{2,4,6,8\}$$
$$(A \cap B) - C \quad = \quad \{1\}$$

j) $(A \cup B) - (C - B)$

$(A \cup B) = \{1,2,3,4,5,7,10\}$

$(C - B) = \{6,8\}$

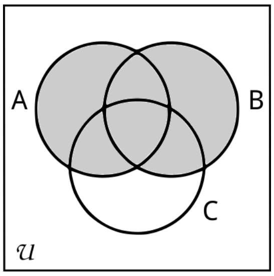
$$(A \cup B) - (C - B) \quad = \quad \{1,2,3,4,5,7,10\} - \{6,8\}$$
$$(A \cup B) - (C - B) \quad = \quad \{1,2,3,4,5,7,10\}$$

2) En diagramas de Venn sombrear los conjuntos siguientes:

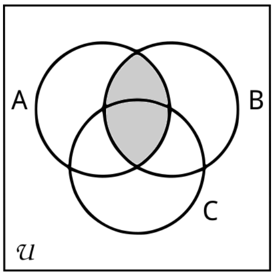
a) $A \cup B$ d) $A \cap B \cap C$ g) $(A \cap C) \cup C^c$

b) $A \cap B$ e) $(A \cup C)^c$ h) $(A \cap B \cap C)^c$

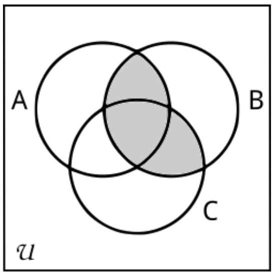
c) $(A \cup C) \cap B$ f) $(A - B) \cap C$ i) $(A - B) - C$



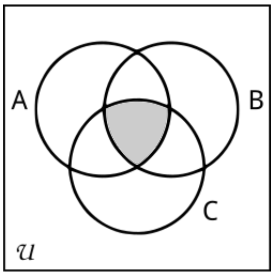
a) $A \cup B$



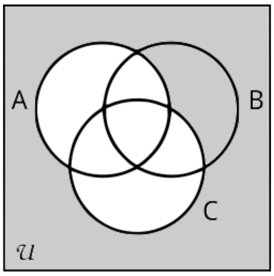
b) $A \cap B$



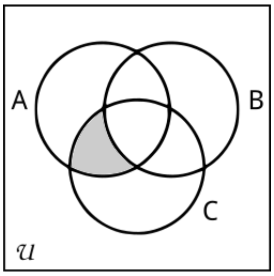
c) $(A \cup C) \cap B$



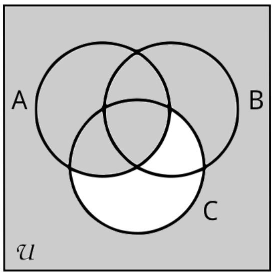
d) $A \cap B \cap C$



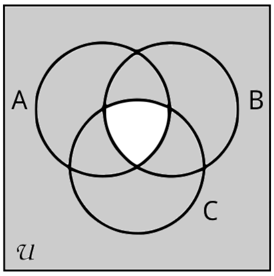
e) $(A \cup C)^c$



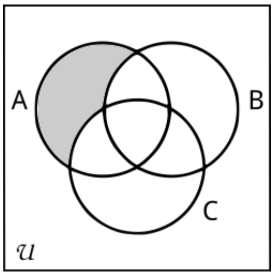
f) $(A - B) \cap C$



g) $(A \cap C) \cup C^c$



h) $(A \cap B \cap C)^c$



i) $(A - B) - C$

3)

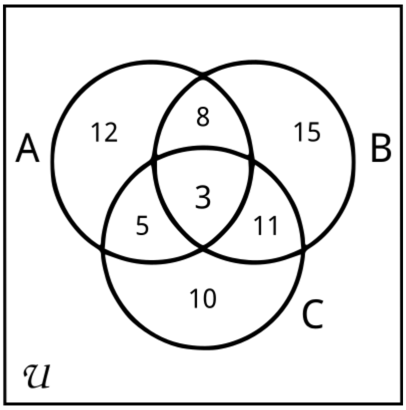
De un total de 64 alumnos de un colegio:

- 15 estudian solamente francés,
- 11 estudian solamente francés e inglés;
- 12 estudian solamente alemán;
- 8 estudian solamente francés y alemán;
- 10 estudian solamente inglés;
- 5 estudian solamente inglés y alemán; y
- 3 los tres idiomas.

Ayudandote de un diagrama de Venn como el del ejercicio anterior, determina:

a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
b) ¿Cuántos estudian alemán?
c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés?
d) ¿Cuántos estudian francés?

$$A = Alemán, \quad B = Francés, \quad C = Inglés$$



a) Todos estudian al menos 1 idioma.
b) En total hay 28 alumnos que estudian Alemán.
c) Hay 8 alumnos que estudian alemán e inglés.
d) Hay 37 alumnos que estudian francés.

4. Describir por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficarlo en la recta real. Indicar si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso representarlo en la notación de intervalos.

a) $[-1,\infty)\cap(-3,2)$.
b) $(-\infty,2)\cup[0,\infty)$
c) $(-3,1]\cap(2,\infty)$
d) $(-2,3]\cup(-\infty,1)$
e) $[-3,0)\cap(-2,3)$

a) $[-1, \infty) \cap (-3, 2) \quad = \quad [-1, 2)$

$[-1, 2) \quad = \quad \{x \in U| -1 \leq x < 2\}$

b) $(-\infty, \infty) \quad = \quad \{x \in U|x\}$

c) $(-3, 1] \cap (2, \infty) \quad = \quad \emptyset$

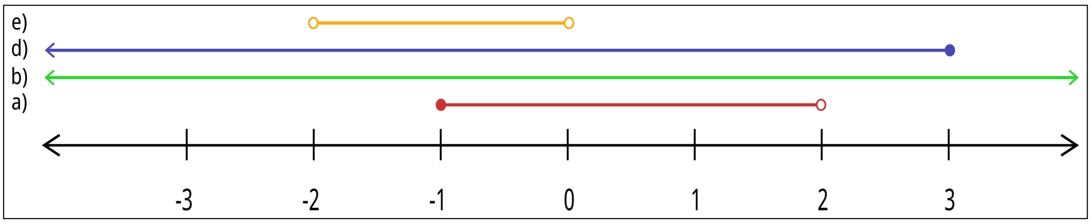
$\{x \in U|2 < x < 1\} \quad = \quad \emptyset$

d) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1) \quad = \quad (-\infty, 3]$

$(-\infty, 3] \quad = \quad \{x \in U|x \leq 3\}$

e) $[-3, 0) \cap (-2, 3) \quad = \quad (-2, 0)$

$(-2, 0) \quad = \quad \{x \in U| -2 < x < 0\}$



5)

Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la intersección y la unión, y las Leyes de De Morgan, comprobar las siguientes identidades. Ilustrar cada caso con un diagrama de Venn. Recordar que $A - B = A \cap B^c$.

a) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$
b) $A \cap (B \cup A)^c = \emptyset$
c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$
e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

a) $(A^c \cap B)^c \quad = \quad A \cup B^c$

$(A^c)^c \cap B^c \quad = \quad A \cup B^c \qquad \boxed{(A^c)^c = A}$

$A \cup B^c \quad = \quad A \cup B^c$

b) $A \cap (B \cup A)^c \quad = \quad \emptyset$

$A \cap B^c \cap A^c \quad = \quad \emptyset \qquad \boxed{(B \cup A)^c = B^c \cap A^c}$

$A \cap A^c \cap B^c \quad = \quad \emptyset \qquad \boxed{A \cap A^c = \emptyset}$

$\emptyset \cap B^c \quad = \quad \emptyset \qquad \boxed{\emptyset \cap B^c = \emptyset}$

$\emptyset \quad = \quad \emptyset$

c) $(A-B)-C \quad = \quad (A-C)-(B-C)$

$(A\cap B^c)-C \quad = \quad (A\cap C^c)-(B\cap C^c) \qquad \boxed{A-B=A\cap B^c}$

$(A\cap B^c)-C \quad = \quad (A-B)\cap C^c \qquad \boxed{A-B=A\cap B^c}$

$(A\cap B^c)\cap C^c \quad = \quad (A\cap B^c)\cap C^c$

d) $(A\cap B)\cup(A\cap B^c) \quad = \quad A$

$A\cup(B\cap B^c) \quad = \quad A \qquad \boxed{(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A\cup(B\cap B^c)}$

$A\cup\emptyset \quad = \quad A \qquad \boxed{B\cap B^c=\emptyset}$

$A \quad = \quad A \qquad \boxed{A\cup\emptyset=A}$

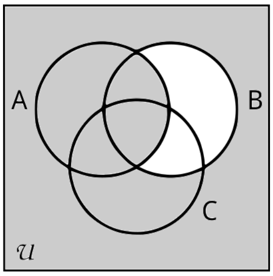
e) $(A\cup B)\cap(A\cup B^c) \quad = \quad A$

$A\cap(B\cup B^c) \quad = \quad A \qquad \boxed{(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cap(B\cup B^c)}$

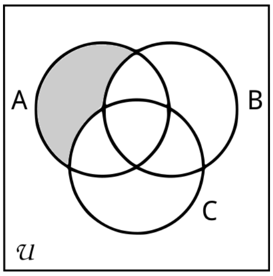
$A\cap U \quad = \quad A \qquad \boxed{A\cap U=A}$

$A \quad = \quad A$

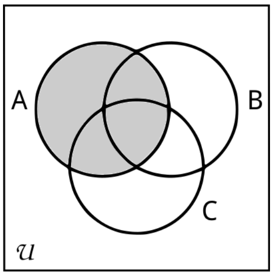
Diagramas de Venn



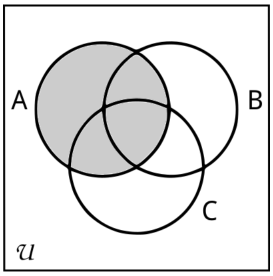
a) $A\cup B^c$



c) $(A\cap B^c)\cap C^c$



d) A



e) A

6. Simplificar la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:

a) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$ b) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

a) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$

$((B \cap A^c) \cup (B \cap C^c))^c \cup (A^c \cap ((C \cap B)^c)^c \cap C^c)$ $\boxed{\text{Distributiva}}$ $\boxed{(A^c)^c = A}$

$((B - A) \cup (B - C))^c \cup (A^c \cap (C \cap B) \cap C^c)$ $\boxed{A \cap B^c = A - B}$

$(B - (A \cup C))^c \cup (A^c \cap B \cap C \cap C^c)$ $\boxed{\text{Distributiva}}$ $\boxed{\text{Conmutativa}}$

$(B - (A \cup C))^c \cup (A^c \cap B \cap \emptyset)$ $\boxed{C \cap C^c = \emptyset}$ $\boxed{A \cap \emptyset = \emptyset}$

$(B - (A \cup C))^c \cup (\emptyset)$ $\boxed{A \cup \emptyset = A}$

$(B - (A \cup C))^c$

b) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

$(A \cup (B^c \cap C^c))^c \cap (A^c \cap (B^c \cup C^c))^c$ $\boxed{DeMorgan}$

$(A^c \cap (B^c \cap C^c)^c) \cap (A \cap (B^c \cup C^c)^c)$

$(A^c \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (B \cup C))$ $\boxed{\text{Distributiva y asociativa de la intersección}}$

$A^c \cap (B \cup C) \cap A \cap (B \cup C)$ $\boxed{(B \cup C) \cap (B \cup C) = (B \cup C)}$

$A^c \cap A \cap (B \cup C)$ $\boxed{A \cap A^c = \emptyset}$

$\emptyset \cap (B \cup C) \cap (B \cup C)$

$\emptyset$