(1) La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos.

a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?

b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?

c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?

d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?

e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

a) Existen 10 elecciones posibles por digito.

$$\underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}$$

$\therefore$ Nos encontramos frente a una seleccion ordenada con repetición, con n=10 y m=5

$$n^m \Rightarrow 10^5$$

10^5 = 100.000

Por ende, existen 100.000 números de 5 digitos

b) Para que un número sea par, su unidad debe de ser par, por lo tanto, solo contamos con solo 5 elecciones posibles para el último digito.

$$\underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{10}\ \ \underline{5}$$

$$|\{0,2,4,6,8\}|$$

$$10^4 \cdot 5 = 50.000$$

Por ende, debido al principio de multiplicacion y a que se encuentra presente una seleccion ordenada con repeticion, podemos afirmar que la cantidad de números pares de 5 digitos es 50.000.

c) Al descartar al 3 como posible elección para todos los lugares menos 1, el número de elecciones se reduce en 1 para 4 de los 5 digitos, lo cual queda ejemplificado a continuación:

Posición elegida de manera arbitraria

El orden de los factores no altera el producto.

$$\underbrace{\underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}}_{N \neq 3}\ \ \underline{10}$$

Puede ser 3

$$9^4 \cdot 10 = 65.610$$

$\therefore$ La cantidad de números de 5 digitos que posean un solo 3 es igual a 65.610.

d) Para que un número sea capicúa debe de tener la siguiente forma:

$$XYZYX$$

$$\begin{array}{ccccc} X & Y & Z & N=Y & N=X \\ \underline{10} & \underline{10} & \underline{10} & \underline{1} & \underline{1} \end{array}$$

$N \neq 0$

Unica elección posible

$$10^3 = 1000$$

Por ende, existen 1000 números capicúa de 5 digitos.

e) Debido al punto anterior sabemos que hay 1000 números capicua de 5 digitos. Por ende, si calculamos la cantidad de números capicua de 2, 3 y 4 digitos y sumamos esa cantidad a la cantidad de números capicua de 5 digitos obtendriamos la cantidad de números capicuas de a lo sumo 5 digitos.

$$\begin{array}{cc} X & X \\ \underline{10} & \underline{1} \end{array} = 10$$

$$\begin{array}{ccc} X & Y & X \\ \underline{10} & \underline{10} & \underline{1} \end{array} = 10^2 = 100$$

$$\begin{array}{cccc} X & Y & Y & X \\ \underline{10} & \underline{10} & \underline{1} & \underline{1} \end{array} = 10^2 = 100$$

$$10 + 100 + 100 + 1000 = 1210$$

$\therefore$ Existen 1210 números capicúa de al menos 5 digitos.

(2) ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

$$\underline{10} \quad \underline{10} \quad \underline{10} \quad \underline{5}$$

$$|\{1,3,5,7,9\}|$$

$$10^3 \cdot 5 = 5000$$

La cantidad de números impares de cuatro cifras es 5000.

(3) ¿Cuántos números múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

$$\underset{\uparrow}{\underline{5}}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underset{\uparrow}{\underline{2}}$$

$$|\{0,1,2,3,4\}| \qquad |\{0,5\}|$$

$$5\cdot 10^2\cdot 2 = 500\cdot 2 = 1000$$

La cantidad de números multiplos de 5 y menores de 4999 es 1000.

(4) En los boletos viejos de ómnibus, aparecía un *número* de 5 cifras (en este caso podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.

a) ¿Cuántos boletos capicúas había?

b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?

a) Como hemos visto en el ejercicio 1.d, existen 1000 números capicua de 5 digitos. Por lo tanto, la cantidad de boletos capicua es 1000.

b) Para obtener la cantidad de boletos en los cuales no se repetia ningún digito, es necesario utilizar la formula de la seleccion ordenada sin repetición.

$n=10$, ya que hay 10 posibles digitos

$m=5$, ya que solo seleccionamos 5 digitos de 10.

$$\frac{n!}{(n-m)!} \Rightarrow \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30.240$$

$\therefore$ Habían 30.240 boletos que no tenían ningún digito repetido.

(5) Las antiguas patentes de auto tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Luego vinieron patentes que tienen 3 letras y luego 3 dígitos. Finalmente, ahora las patentes tienen 2 letras, luego 3 dígitos y a continuación dos letras más ¿Cuántas patentes pueden hacerse con cada uno de los sistemas?

Sist. 1 : $\underline{11}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 11\cdot 10^6$

$$\underline{26}\ \underline{26}\ \underline{26}\quad \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 26^3\cdot 10^3$$

$$\underline{26}\ \underline{26}\quad \underline{10}\ \underline{10}\quad \underline{26}\ \underline{26}\ \underline{26} = 26^5\cdot 10^2$$

(6) Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos,

a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?

b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?

c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

a)

$$8+7+5 = 20$$

Por principio de adicion, existen 20 formas distintas de de seleccionar un CD.

b)

$$\underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{5} = 280 \cdot 3!$$

c)

Hay 20 cd

$20 \cdot 19 \cdot 18$ formas de elegir sin restricción.

$280 \cdot 3!$ es la cantidad para 3 generos distintos

$\therefore$ Existen 20*19*18 - 280* 3! formas de elegir los cd sin repetir más de dos generos

(7) Mostrar que si uno arroja un dado n veces y suma todos los resultados obtenidos, hay $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

Teniendo en cuenta que un dado tiene 6 caras, la cantidad de resultados posibles será 6^1.

Si arrojamos m cantidad de dados, como se trata de una seleccion ordenada con repetición, la cantidad de las posibles sumas de sus resultados será

$$n^m \Rightarrow 6^m$$

Teniendo en cuenta esto, y que la mitad de los números son pares y la otra mitad impares. Si dividimos la cantidad de las posibles sumas por dos, estariamos obteniendo la cantidad de formas distintas de obtener una suma par. Es decir

Existen $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

(8) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

$$\underline{2}\ \underline{1} = 2$$

Elegir 2 entre 4

$$\overbrace{\begin{matrix} 7 & 5 \\ \underline{5} & \underline{7} \end{matrix}}\ \underline{8}\ \underline{8} = \underline{12} \cdot 8^2$$

$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4 \cdot 3 = 12$$

Así se toman en cuenta las permutaciones.

(9) ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?

La cantidad de subconjuntos que no tienen ningún impar es la cantidad de subconjuntos del conjunto {0,2,4,6,8}. Podemos averiguar dicha cantidad elevando a 2 por el número de elementos del conjunto, por lo tanto, el conjunto de números pares posee 2^5 subconjuntos.

Teniendo en cuenta que el conjunto entero posee 2^{10} subconjuntos en total, para averiguar el número de subconjuntos que contiene al menos un impar, debemos restar el número total de subconjuntos por el número de subconjuntos compuestos enteramente por números pares. Es decir:

$$2^{10} - 2^5 = 1024 - 32 = 992$$

$\therefore$ Existen 992 subconjuntos que poseen al menos un impar

(10) El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho, o tener 33?

$$\boxed{?} \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \Rightarrow \binom{40}{3} = \frac{40!}{37!\,3!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \cancel{37!}}{\cancel{37!}\;3!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} = 9880$$

$$\boxed{M} \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \Rightarrow \binom{39}{2} = \frac{39!}{37!\,2!} = \frac{39 \cdot 38 \cdot \cancel{37!}}{\cancel{37!}\;2!} = \frac{39 \cdot 38}{2} = 741$$

$$\boxed{7} \quad \boxed{6} \quad \boxed{?} \Rightarrow \binom{38}{1} = 38$$

Posibilidades Macho:

$$P_m = \frac{741}{9880} = 0{,}075 = 0{,}75\,\%$$

Posibilidades 33:

$$P_{33} = \frac{38}{9880} = 0{,}0038 = 0{,}038\,\%$$

Como $P_m > P_{33}$, podemos afirmar que obtener el macho es más probable que tener 33.

(11) ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

Mujeres: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,3!} = \frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{6}} = 20$

Hombres: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot3}{\cancel{2}} = 2\cdot3 = 6$

Comités: $\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2} = 20\cdot6 = 120$

(12) ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:

a) No hay restricciones en la selección?

b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?

c) El comité debe tener al menos 3 profesores?

d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

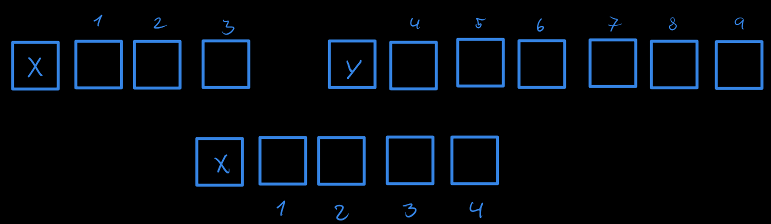
a) $\binom{11}{5} = \frac{11!}{6!\,5!} = \boxed{462}$

b) $\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{3} = \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{7!}{4!\,3!} = \frac{4\cdot3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!}\cdot\frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,3!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot3}{\cancel{2}}\cdot\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{6}} = 6\cdot35 = \boxed{210}$

c) $\binom{4}{3}\cdot\binom{7}{2} + \binom{4}{4}\cdot\binom{7}{1} = 4\cdot\frac{7!}{5!\,2!} + 1\cdot7$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{2}} + 7 = 2\cdot7\cdot6 + 7 = 84 + 7 = \boxed{91}$

d)



Hay que elegir a 4 de 9

$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1!} = 9\cdot2\cdot7 = 126$

(13) Si en un torneo de fútbol participan $2n$ equipos, probar que el número total de opciones posibles para la primera fecha es $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$. sugerencia: use un argumento por inducción.

$$P(n) = \text{"} \prod_{j=1}^{n} (2n-1) \text{"}$$

???