

## Final análisis matemático (transcripción)

### Ejercicio 1: (20 pts)

- a) Resolver y grafica el conjunto de soluciones de la desigualdad

$$\frac{|x-6|}{x+2} < x-1$$

- b) Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x+x^2}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , responder las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

- i) ¿Es  $f$  inyectiva?
- ii) Calcular imagen de  $f$ . ¿Es suryectiva?
- iii) ¿Es  $f$  biyectiva?
- iv) ¿Es necesario restringir el dominio de  $f$  para que resulte inyectiva? En caso afirmativo mostrar como hacerlo
- v) Indicar el dominio y el conjunto de llegada para que  $f$  sea biyectiva y calcular su inversa.

### Ejercicio 2: (20 pts)

- a) Calcular los siguientes límites sin usar la regla de L'Hopital:

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan(2x)}{\sin^2(3x)}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{5x^3 - x^2 + 3}$$

- b) Sea  $g(x)$  la siguiente función definida a tramos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x-3 & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ x \cdot \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar en que puntos  $g$  es discontinua y decir de que tipo es la discontinuidad

- c) i) Enunciar con precisión el teorema del valor intermedio.  
ii) Demostrar que hay una solución de la siguiente ecuación en el intervalo dado.

$$4 - x^4 = 4^x \text{ en } (0, 1)$$

### Ejercicio 3: (20 pts)

- a)
  - i) Obtener la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  en el punto  $(1, \frac{1}{2})$
  - ii) Utilizar la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de  $f(0.9)$  con una aproximación lineal.
  - iii) ¿El valor obtenido en (ii) es mayor o menor que el valor exacto de  $f(0.9)$ ? Justificar
- b)
  - i) Enunciar con precisión el teorema de Rolle.
  - ii) Demostrar que la ecuación  $x^5 + 3x - 7$  tiene a lo sumo 1 raíz en  $\mathbb{R}$

### Ejercicio 4: (20 pts)

Graficar una función  $f$  que cumpla con todas las siguientes características:

- a) El dominio de  $f$  es todo  $\mathbb{R}$
- b)  $y = 0$  es asíntota horizontal del gráfico y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
- c)  $f$  solo tiene una discontinuidad en  $x = 2$  y es esencial.
- d)  $f$  es continua por izquierda en  $x = 2$  y  $f(2) = -1$
- e)  $f'(x)$  y  $f''(x)$  no existen únicamente para  $x = 2$  y  $x = 4$  y  $f(4) = 1$
- f) Los únicos puntos críticos son  $x = 0$ ,  $x = 4$  y  $x = 5$
- g)  $f'(x) > 0$  exclusivamente en  $(0, 2) \cup (4, 5)$
- h) Los únicos puntos de inflexión son  $x = 4$  y  $x = 7$
- i)  $f''(x) < 0$  exclusivamente en  $(4, 7)$

### Ejercicio 5: (20 pts)

- a) Calcular la antiderivada  $F$  de  $\frac{x^2 - x}{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1}}$  que satisface  $F(0) = 1$   
¿Cuál es el valor de  $F(1)$ ?
- b) Graficar y calcular el área encerrada por las siguientes curvas:

$$y = 4 - x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 1 \text{ y } x = e$$