1. (50 pts) Probar que $\sqrt[4]{125}$ no es un número racional.
2. (50 pts) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 2772 y 33000, usando la descomposición en números primos.

1. Supongamos que $\sqrt[4]{125}$ es un número racional:

$$\sqrt[4]{125} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[4]{125} = \frac{n}{m}$$

$$\sqrt[4]{125} = \frac{n}{m} \Rightarrow 125 = \left(\frac{n}{m}\right)^4 \Rightarrow 125 = \frac{n^4}{m^4} \Rightarrow 125 . m^4 = n^4$$

$$125 = 5^3$$

$$n = p_1^{f_1} . p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k} \Rightarrow n^4 = p_1^{f_1.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4} \Rightarrow n^4 = 5^{x.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4}$$

$$m = p_1^{e_1} . p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} \Rightarrow m^4 = p_1^{e_1.4} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4} \Rightarrow m^4 = 5^{y.4} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4}$$

$$125 . m^4 = n^4 \Rightarrow 5^3 . 5^{y.4} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4} = 5^{x.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4}$$

$$5^3 . 5^{y.4} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4} = 5^{x.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4} \Rightarrow 5^{y.4+3} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4} = 5^{x.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4}$$

$$\underbrace{y.4+3}_{\text{Resto } 3} = \underbrace{x.4}_{\text{Resto } 0} \Rightarrow y.4+3 \neq x.4$$

$$\therefore 5^{y.4+3} . p_2^{e_2.4} \dots p_k^{e_k.4} \neq 5^{x.4} . p_2^{f_2.4} \dots p_k^{f_k.4} \longrightarrow \text{Absurdo}$$

Como llegamos a un absurdo al suponer que $\sqrt[4]{125}$ es un número racional, somos capaces de afirmar que $\sqrt[4]{125}$ no es un número racional.

2) $2772 = 2 \cdot 1386 = 2 \cdot 2 \cdot 693 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

$33.000 = 10^3 \cdot 33 = (5 \cdot 2)^3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$

$2772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = a$ | $mcd(a,b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$

$33000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 = b$ | $mcm(a,b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 = 693.000$