Contents

1 Practico 6 **1**
- 1.1 13 . . . 1
- 1.2 Encontrar vector para completar base . . . 1
  - 1.2.1 Metodo 1 . . . 1
  - 1.2.2 Metodo 2 . . . 2
- 1.3 14) . . . 2
  - 1.3.1 Howto . . . 2
- 1.4 15) . . . 2
- 1.5 16) . . . 2
  - 1.5.1 $\mathbb{C}$-espacio vectorial . . . 3
  - 1.5.2 $\mathbb{R}$-espacio vectorial . . . 3
- 1.6 17) . . . 3
  - 1.6.1 Encontrar base . . . 3
- 1.7 18) . . . 4
  - 1.7.1 Encontrar interseccion de subespacios . . . 4
  - 1.7.2 Encontrar generadores subespacio . . . 4
  - 1.7.3 Suma de subespacios . . . 4
- 1.8 19) . . . 5

1 Practico 6

1.1 13

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.

a) Los conjuntos del ejercicio (10).

b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

1.2 Encontrar vector para completar base

1.2.1 Metodo 1

Tirar un vector random (buscando siempre que no sea LD) y verificar que los vectores sean LI

1.2.2 Metodo 2

1. Caracterizar el espacio con ecuaciones.
   - $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = (b_1, \ldots, b_n)$
   - Transformar esto a matriz y reducir con Gauss
2. Obtener ecuacion implicita del espacio
3. Buscar algun vector x que no cumpla con la definicion
   - Por ejemplo, si la condicion del subespacio es que $b_1 = b_3$ entonces tomamos $(0, 0, 1, 0)$, ya que no cumple con esta condicion.
4. Plantear que como el nuevo vector no pertenecea al espacio entonces completa la base

1.3 14)

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

1.3.1 Howto

El unico subespacio de dimension 0 es $\{0\}$

El unico espacio de dimension 3 contenido en $\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$

1.4 15)

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

1.5 16)

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

1.5.1 $\mathbb{C}$-espacio vectorial

Cuando trabajamos en este espacio, los escalares de una combinacion lineal puede ser números complejos.

Por ende, con tomar la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es suficiente, ya que los coeficientes que multiplican a esta base y forman el espacio pueden ser complejos, por ende, pueden describir todas las posibles combinaciones lineales.

1.5.2 $\mathbb{R}$-espacio vectorial

Cuando trabajamos en este espacio, los escalares de una combinacion lineal son números reales.

Por ende, debemos contemplar a los números complejos en la base para que esta pueda describir todas las posibles combinaciones lineales. Esto es debido a que necesitamos describir tanto la parte real como la imaginaria de un número.

1.6 17)

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) Los subespacios del ejercicio (8).

b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z, \ w = x + z, \ u = 2x - 3z\}$.

c) $W = \langle (1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.

e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1.6.1 Encontrar base

Corolario 4.4.3. *Sean* A *matriz* $m \times n$ *y* R *la MRF equivalente por filas a* A. *Entonces, el espacio fila de* A *es igual al espacio fila de* R *y las filas no nulas de* R *forman una base del espacio fila de* A.

$W = \langle$ filas de A $\rangle = \langle$ filas no nulas de R $\rangle$

El espacio generado por las filas de A, es el el mismo que el espacio generado por las filas no nulas de R. Siendo R la MRF de A

Se hacen sumas y restas pero no permutaciones

1.7 18)

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1) \rangle.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

1.7.1 Encontrar interseccion de subespacios

Para encontrar la interseccion de subespacios podemos encontrar la descripcion implicita de los subespacios y luego definir uno nuevo con la conjuncion de ambas

1.7.2 Encontrar generadores subespacio

1. Pasar a descripcion parametrica
2. Separar el vector de la parametrica en varios vectores hasta tener algo de la forma:
   - $\lambda_1(a_1, a_2, a_3) + \cdots + \lambda_n(b_1, b_2, b_3)$
   - Los vectores a y b son los generadores del espacio
3. Escribir los generadores

1.7.3 Suma de subespacios

1. Concatenar los generadores de ambos subespacios
   - Sean G_{W_1} y G_{W_2} los generadores de W_1 y W_2
   - $W_1 + W_2 = \langle G_{W_1}, G_{W_2} \rangle$
2. Encontrar base para $W_1 + W_2$

1.7.4

1.8 19)

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.

c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

d) ⓐ $\{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

e) ⓐ $\{1, \text{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) ⓐ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.