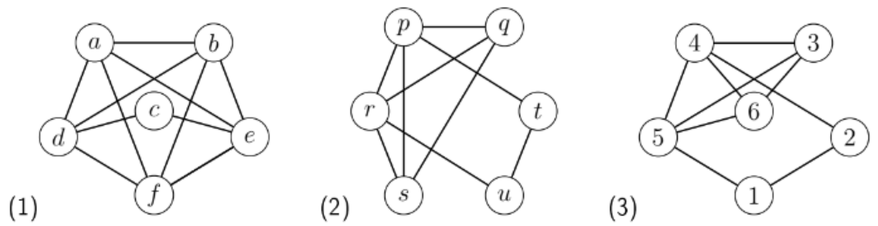
Lautaro Bachmann Tarea 10

Ejercicio 1.

Dados los siguientes grafos:



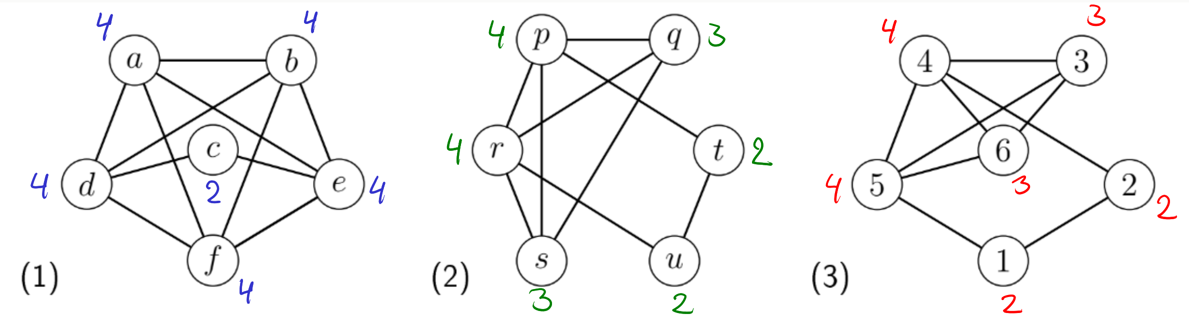
(a) (40 pts) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos. En el caso de ser isomorfos, especifique un isomorfismo; en caso contrario, justificar por que no son isomorfos.

(i) (1) y (2).

(ii) (2) y (3).

(b) (20 pts) Dé un ciclo hamiltoniano en el grafo (1).

a) Primero que nada, veamos cuantas aristas tiene cada vertice.



i) Los grafos 1 y 2 no son isomorfos, ya que poseen distinta lista de valencias, por ende, resulta imposible encontrar una función biyectiva que satisfaga la definición de isomorfismo de grafos.

ii) Como 2 y 3 tienen la misma lista de valencias, para demostrar que son isomorfos debemos encontrar una función biyectiva $\beta: G_1 \to G_2$ que satisfaga la definición de isomorfismo de grafos.

Tomemos $f: G_1 \to G_2$ dada por:

$u \to 1$
$t \to 2$
$q \to 3$
$p \to 4$
$r \to 5$
$s \to 6$

Como f es claramente biyectiva, nos queda comprobar que se cumplan las condiciones sobre las aristas.

$G_1 = \{\{u, r\}, \{u, t\}, \{t, p\}, \{q, p\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{p, s\}, \{p, r\}, \{r, s\}\}$

$G_2 = \{\{1, 5\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$

- $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ es arista $\Rightarrow \{f(\alpha_1), f(\alpha_2)\}$ también

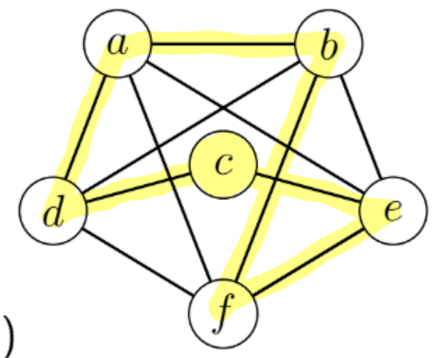
  $\{u, r\} \to \{1, 5\}$ | $\{q, p\} \to \{3, 4\}$

- $\{\beta_1, \beta_2\}$ arista $\in G_2 \Rightarrow \{f^{-1}(\beta_1), f^{-1}(\beta_2)\}$ arista $\in G_1$

  $\{4, 6\} \xrightarrow{f^{-1}} \{p, s\}$ | $\{2, 4\} \xrightarrow{f^{-1}} \{t, p\}$

$\therefore$ como encontramos una función biyectiva que satisfaga la definición de isomorfismo de grafos, queda demostrado que 2 y 3 son isomorfos.

b)



(1)

c, d, a, b, f, e, c

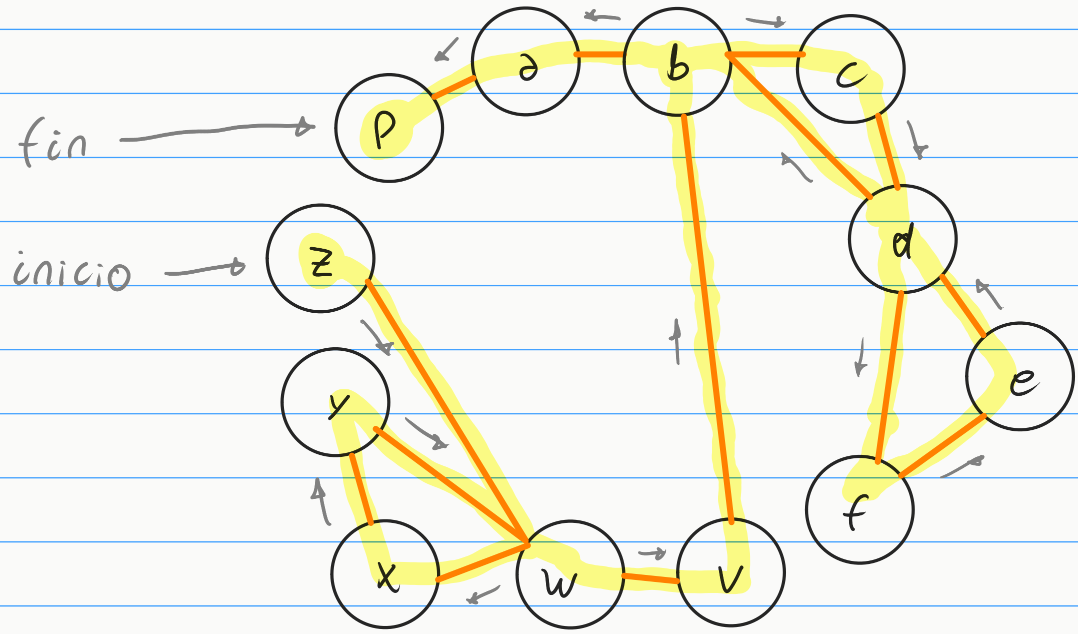
Es un ciclo hamiltoniano, ya que pasa por todos los vertices y termina donde comenzó.

Ejercicio 2.

(40 pts) Determinar si el grafo $G = (V, E)$ tiene caminatas o circuitos eulerianos, y en caso de que la respuesta sea positiva, encontrar una caminata o circuito euleriano.

$$V = \{p, a, b, c, d, e, f, v, w, x, y, z\},$$

$$E = \{\{p, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, v\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{x, y\}\}.$$



El grafo posee la siguiente caminata:

z, w, x, y, w, v, b, c, d, f, e, d, b, a, p

∴ El grafo G tiene una caminata euleriana, ya que se usan todas sus aristas exactamente 1 vez.