Álgebra / Álgebra II/Álgebra lineal

Examen final - 24/07/2023

Oliva, Luca

Hojas: 5

Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA

Condición: Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

Parte práctica.

1. (10 pts.) Sea $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $\det(A) = -2$.

2pts-

   a) Calcular el determinante de la matriz $A_t = \begin{bmatrix} A_{11}+A_{12}t & A_{11}t+A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21}+A_{22}t & A_{21}t+A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}+A_{n2}t & A_{n1}t+A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$.

   b) Hallar todos los valores de $t \in \mathbb{C}$ tales que A_t sea invertible.

2. (15 pts.) Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, escalares no todos nulos y sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^n$ definidos en la forma:

5pts-

$$W_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}, \qquad W_2 = \langle (a_1, \ldots, a_n) \rangle.$$

   a) Mostrar bases de W_1 y de W_2 y determinar sus dimensiones.

   b) Probar que $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$.

   c) Probar que si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $(1,0,\ldots,0), (0,0,\ldots,1) \in U$, entonces $W_1 \cap U \neq \{0\}$.

3. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un operador lineal tal que $(1,0,-1,0)$ y $(0,1,-1,0)$ son autovectores de T con autovalor -1, $(2,0,0,-1)$ es autovector de T con autovalor 1 y $(0,0,1,0)$ es autovector de T con autovalor 2.

8pts

   a) Determinar el polinomio característico y los autoespacios de T.

   b) Dar una fórmula explícita para $T(x,y,z,t)$.

   c) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz de T en la base ordenada canónica. Mostrar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

5

4. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $\mathbb{R}$ y sea $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ una base de V. Sea $T : V \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la única transformación lineal que satisface

$$T(\alpha_1) = 1 + x, \quad T(\alpha_2) = 1 + x + x^3, \quad T(\alpha_3) = x - x^2, \quad T(\alpha_4) = x^3, \quad T(\alpha_5) = 1 + x^2,$$

donde $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones polinomiales de grado menor o igual a 3.

1 a) Calcular la dimensión del núcleo de T.

4 b) Decidir si T es un epimorfismo o un monomorfismo.

   c) Probar que existen bases ordenadas de V y de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tales que la matriz de T con respecto a dichas bases tiene exactamente dos columnas nulas.

Parte Teórica.

5. (15 pts.) Sean A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo F. Probar que si $m < n$, entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene soluciones no triviales.

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición de *subespacio generado* por un subconjunto S de V.

   b) Probar que si V está generado por un conjunto finito de vectores $\beta_1, \ldots, \beta_m$, entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores de V es finito y contiene a lo sumo m elementos.

7. (15 pts.) Completar el siguiente enunciado y demostrar:

"Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que V es de dimensión finita. Entonces

$$\dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \text{Dim (V)} \ldots\ldots"$$

Parte práctica	1	2	3	4	Total
Evaluación	2	5	8	5	20

Parte teórica	5	6	7	Total	Total General
Evaluación	5	5	0	7	27

3 (tres)

HOJA Nº 1

FECHA

Oliva Luca

Parte Teorica

1 B

⑥ a- Sea $S \subseteq V$, tal que $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, los vectores del subespacio generado por S (llamemoslo W) tienen la siguiente forma:

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \quad , \quad w \in W, \{x_1, \dots, x_n\} \in F \text{ (escalares)}$$

Se denota $S = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$S \neq \phi$?

?

b- Tenemos a $V \in F^n$, y un conjunto de generadores $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

El enunciado se puede expresar de la siguiente forma:

S conjunto l.i $\Rightarrow |S| \leq m$, donde $m = |B|$

Para la demostración voy a usar la contrarecíproca de esta expresión:

$|S| > m \Rightarrow S$ es conjunto l.d

Tenemos que $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ $(|S| = n)$ $n > m$.

¿? ¿Por qué?

Si S es li y B es l.i, pero $|S| > |B|$, entonces hay $v_i \in |S|$ que $\langle B \rangle$ no puede generar. Esto es absurdo porque $S \subseteq V$, y $V = \langle B \rangle$

Con esto, si $|S| > m$, S tiene que ser l.d, y si S es li $\Rightarrow |S| \leq |B|$

Hay que justif

NOTA

⑦ Tenemos V, W espacio vectoriales sobre F, $T: V \to W$ transformación lineal.

Para demostrar $\dim Nu(T) + \dim Im(T) = \dim(V)$ voy a asumir que

$\dim(V) = n$ y $\dim(Nu(T)) = k$, por lo que quiero demostrar que $\dim Im(T) = n-k$

Ahora, sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ base de $Nu(T)$ y $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ base de V, quiero ver si $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de $Im(T)$

- Primero veo si genera a $Im(T)$ a partir de $T(v)$, $v \in V$, $w \in Im(T)$

$w = T(v) = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$ $\in V$ ⟵

?

(como $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ es $Nu(T)$)

$= 0 v_1 + \ldots + 0 v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$

$w = a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$

Esto deja claro que $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ genera a $Im(T)$ X

- Ahora quiero ver que $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es l.i ⟵ Ya lo sabemos.

Esto es simple ya que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i ya que es base de V

Si $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es l.d, entonces hay un v_i de ese mismo conjunto tal que

$v_i = a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$

Por lo que tambien

$v_i = 0 v_1 + \ldots + 0 v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$

$v_i - (a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n) = 0$

Esto haría que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sea l.d ya que existe una solución distinta a la trivial. Esto es absurdo ya que es una base de V, por lo tanto, $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ no puede ser l.d (es l.i)

Esto demuestra que $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de $Im(T)$, y que:

$\dim(Im(T)) = n - k = \dim(V) - \dim(Nu(T))$

HOJA N° 2

FECHA

Oliva, Luca

(5) Tengo $A \in F^{m \times n}$, $m < n \Rightarrow AX = 0$ tiene soluciones no triviales

Como $m < n$, es sistema de ecuaciones que A representa tiene más variables que ecuaciones, por lo que existe al menos una variable dependiente. Por esto, es sistema de ecuaciones admite una solución distinta a la trivial y tambien lo hace $AX = 0$

¿Por qué?

Parte práctica

(1) a - W_2 esta generado por $\{(a_1, \dots, a_n)\}$ que claramen es l.i (solo un vector) así que su base es $B_2 = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ y su $\dim W_2 = |B_2| = 1$

- En W_1 tengo que

$$0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$-a_1 x_1 = a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$x_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right) x_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right) x_n \quad \text{suponiendo } a_1 \neq 0$$

Como todos los a_i son $\mathbb{R}$ arbitrarios, puedo reemplazar a $\left(-\frac{a_i}{a_1}\right)$ por un $b_i \in \mathbb{R}$ para simplificar el procedimiento.

Entonces, ~~$v \in$~~ W_1 tiene la siguiente forma

$$v = (x_1, \dots, x_n) = (b_2 x_2 + \dots + b_n x_n, x_2, \dots, x_n)$$
$$= x_2 (b_2, 1, 0, \dots, 0) + x_3 (b_3, 0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (b_n, 0, \dots, 1)$$

Esto te da la base $B_2 = \{(b_2, 1, 0, \dots, 0), \dots, (b_n, 0, \dots, 0)\}$ donde todos los vectores cumplen con

$$v_j = [a_i]_j = \begin{cases} b_i & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Ahora, $\dim W_1 = n - 1$, ya que sus vectores van de v_2 a v_n

Hay que probar LI .

b_ Para que $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ se tiene que cumplir que

$$\dim \mathbb{R}^n = n = \dim(\underset{W_1+W_2}{W_1 \oplus W_2}) \overset{(\ast)}{=} \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Por el ejercicio anterior ya tengo que $\dim W_1 = n-1$ y $\dim W_2 = 1$, por lo que

$$n = (n-1) + 1 + \dim(W_1 \cap W_2) = n + \dim(W_1 \cap W_2) \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

Necesito probar que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$

Primero desarrollo la forma implícita de W_2

$v \in W_2$, $v = (a_1, \dots, a_n)$

Para que $v = 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Con esto y $W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$, tengo que

$W_1 \cap W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \wedge a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0\}$

Claramente, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, por lo que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$

Por lo tanto, $\dim \mathbb{R} = n$ y $\dim(W_1 \oplus W_2) = (n-1) + 1 + 0 = n$, cumpliendo $\dim \mathbb{R}^n = \dim(W_1 \oplus W_2)$

c_ $(1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{U} \Rightarrow$ algunos vectores de $\mathcal{U}$ son generados por estos vectores

$0 \in \mathcal{U}$, $0 = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_n(0, \dots, 0, 1) \Rightarrow a_1 = a_n = 0$

Con esto $W_1 \cap \mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n b_n = 0 \wedge a_1 = a_n = 0\}$?

Queda la condición $a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n = 0$, lo que significa que existen vectores en $W_1 \cap \mathcal{U}$ que son $\neq 0$

Oliva, Luca

④ a- Sabiendo que $\dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(Im(T))$
$= 5 - \dim(Im(T))$

Usando la base de $\mathbb{R}^5$ dada puedo desarrollar a $T(v)$, $v \in \mathbb{R}^5$, para conseguir la imagen.

$$v = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5) \\ &= aT(\alpha_1) + bT(\alpha_2) + cT(\alpha_3) + dT(\alpha_4) + eT(\alpha_5) \\ &= a + ax + b + bx + bx^3 + cx - cx^2 + dx^3 + e + ex^2 \\ &= (a+b+e) + (a+b+c)x + (-c+e)x^2 + (b+d)x^3 \end{aligned}$$

$p \in Im(T)$, $p = r + sx + tx^2 + ux^3$
$= T(v)$
$= (a+b+e) + (a+b+c)x + (-c+e)x^2 + (b+d)x^3$

$$\begin{cases} a+b+e=r \\ a+b+c=s \\ -c+e=t \\ b+d=u \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&0&1&r \\ 1&1&1&0&0&s \\ 0&0&-1&0&1&t \\ 0&1&0&0&1&u \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&0&1&r \\ 0&0&1&0&-1&s-r \\ 0&0&-1&0&1&t \\ 0&1&0&0&1&u \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&0&1&r \\ 0&0&1&0&-1&r-s \\ 0&0&0&0&0&t+s-r \\ 0&1&0&0&1&u \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1-F_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&r-u \\ 0&0&1&0&-1&r-s \\ 0&0&0&0&0&t+s-r \\ 0&1&0&0&1&u \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a=r-u \\ c-e=r-s \\ 0=t+s-r \\ b+c=u \end{cases}$$

Paso a buscar el Nucleo directamente porque sino se complica.
Uso $r=s=t=u=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c-e=0 \\ t+s+r=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ e=c \\ 0=0 \\ b=-c= \end{array} \Rightarrow Nu(T)=\{(0,-c$$

No concluye.

Como se complico no lo termine, pero para el ejercicio b, sabiendo que $\dim_5 V = \dim Nu(T) - \dim(Im(T))$,

$\dim Nu(T)$ tiene que ser ser ≥ 1 porque $\dim Im \leq \dim P_3(\mathbb{R}) = 4$

Si $\dim Nu(T) = 1 \Rightarrow \dim Im = 4$ y T es epimorfismo y monomorfismo

✓ → • Si $\dim Nu(T) \geq 2 \Rightarrow \dim Im < 4$ y T no es epimorfismo ni monomorfismo

NOTA

Oliva Luca

HOJA N° 4

FECHA

1) a. El polinomio característico va a tener la forma

$$(\lambda_1-\lambda)^{x_1}(\lambda_2-\lambda)^{x_2}\cdots(\lambda_n-\lambda)^{x_n}=0$$

Donde λ_i es es un autovalor de T y x_i es la cantidad de autovectores del autoespacio generado por λ_i

Con esto, el polinomio característico queda:

$$(-1-\lambda)^2(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

.Como ya tengo los autovectores, los autoespacios los calculo usandolos como generadores

- $V_{-1}=\langle(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\rangle$

$v\in V_{-1},\ v=a(1,0,-1,0)+b(0,1,-1,0)=(a,b,-a-b,0)$

$\Rightarrow V_{-1}=\{(a,b,-a-b,0)\in\mathbb{R}^4: a,b\in\mathbb{R}\}$

- $V_1=\langle(2,0,0,1)\rangle$

$v\in V_1,\ v=a(2,0,0,1)=(2a,0,0,a)$

$\Rightarrow V_1=\{(2a,0,0,a)\in\mathbb{R}^4: a\in\mathbb{R}\}$

- $V_2=\langle(0,0,1,0)\rangle$

$v\in V_2,\ v=a(0,0,1,0)=(0,0,a,0)$

$\Rightarrow V_2=\{(0,0,a,0)\in\mathbb{R}^4: a\in\mathbb{R}\}$

b. Como tengo 4 autovectores, estos son base de $\mathbb{R}^4$ (porque $\dim\mathbb{R}^4=4$). Además, se que T de un autovector v es $=\lambda v$ (λ siendo su autovalor)

$\Rightarrow v=a(1,0,-1,0)+b(0,1,-1,0)+c(2,0,0,1)+d(0,0,0,1)$

$T(v)=T(a(1,0,-1,0)+b(0,1,-1,0)+c(2,0,0,1)+d(0,0,0,1))$

$=aT(1,0,-1,0)+bT(0,1,-1,0)+cT(2,0,0,1)+dT(0,0,0,1)$

$=a.(-1)(1,0,-1,0)+b(-1)(0,1,-1,0)+c.1(2,0,0,1)+d.2(0,0,0,1)$

$=(-a,0,a,0)+(0,-b,b,0)+(2c,0,0,c)+(0,0,0,2d)$

$=(-a+2c,-b,a+b,c+2d)$

Ahora me falta sacar los valores de a,b,c,d a partir de $v=(x,y,z,t)$

(Me olvide de sacarlos antes)

NOTA

$v=(x,y,z,t)=(a+2c,\ b,\ -a-b,\ c+d)$

$b=y \quad a=-z-y \quad c=\frac{x+y+z}{2}$

$$\begin{cases} a+2c=x \\ b=y \\ -a-b=z \\ c+d=t \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} -a-b&=z \\ -a-y&=z \\ a&=-z-y \end{aligned} \quad \begin{aligned} a+2c&=x \\ -z-y+2c&=x \\ c&=\frac{x+y+z}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} c+d&=t \\ \frac{x+y+z}{2}+d&=t \\ d&=t-\frac{x+y+z}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=y \\ a=-z-y \\ c=\frac{x+y+z}{2} \\ d=t-\frac{x+y+z}{2} \end{cases}$$

Convenía usar matrices ... para que sea más fácil

Entonces,

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= (-a+2c,\ -b,\ a+b,\ c+2d) \\ &= \left(z+y+2\left(\frac{x+y+z}{2}\right),\ -y,\ -z-y+y,\ \frac{x+y+z}{2}+2\left(t-\frac{x+y+z}{2}\right)\right. \\ &= \left(x+2y+2z,\ -y,\ -z,\ -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z+2t\right) \end{aligned}$$

8 pts