Bachmann Lautaro

Tarea 4

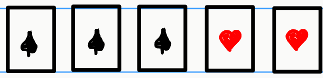
1. (80 pts) ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?
   (a) (20 pts) Si no hay restricciones.
   (b) (30 pts) Si debe haber tres picas y dos corazones.
   (c) (30 pts) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

a) Si no hay restricciones basta con averiguar el número de formas en los que se pueden seleccionar 5 cartas entre 52 sin tener en cuenta el orden.

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!\,5!} = \frac{\cancelto{13}{52}\cdot\cancelto{17}{51}\cdot\cancelto{10}{50}\cdot 49\cdot\cancelto{24}{48}\cdot\cancel{47!}}{\cancel{47!}\;\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1!} = \frac{13\cdot 17\cdot 10\cdot 49\cdot 24}{1} = 2.598.960$$

$\therefore$ existen 2.598.960 formas distintas de elegir 5 cartas de una barajo de 52 cartas.

b)



Para saber la cantidad de formas posibles en las que se pueden elegir 3 picas y 2 corazones en un mazo de 52 cartas, con 13 cartas de cada palo, debemos averiguar la cantidad de formas posibles que tenemos para seleccionar a 3 picas entre 13 y la cantidad de maneras distintas que existen de seleccionar a 2 corazones entre 13. Y luego multiplicar ambos resultados.

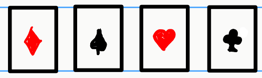
$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{13\cdot\cancelto{2}{12}\cdot 11\cdot\cancel{10!}}{\cancel{10!}\;\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1!} = \frac{13\cdot 2\cdot 11}{1} = 286$$

$$\binom{13}{2} = \frac{13!}{11!\,2!} = \frac{13\cdot\cancelto{6}{12}\cdot\cancel{11!}}{\cancel{11!}\;\cancel{2}\cdot 1!} = \frac{13\cdot 6}{1} = 78$$

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{2} = 286\cdot 78 = 22.308$$

∴ existen 22.308 formas distintas de elegir 5 cartas de una baraja de 52 cartas, teniendo en cuenta que deben haber 3 picas y 2 corazones.

c)



$$\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}$$

Para saber la cantidad de formas posibles que existen para escoger 5 cartas entre 52, teniendo en cuenta que tiene que haber una carta de cada palo, podemos multiplicar las formas que existen de seleccionar a cada palo sin tener en cuenta el orden. Algo importante a considerar es que si o si se va a repetir uno de los palos, debido a eso, en ese caso hay que seleccionar 2 cartas sin orden entre 13 cartas. Tampoco hay que pasar por alto que esto solo representaría el caso para uno de los palos, por lo tanto hay que multiplicar al número resultante por 4.

$$4\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1} = 4\cdot\frac{13!}{11!\,2!}\cdot 13\cdot 13\cdot 13$$

$$4\cdot\frac{13\cdot 12\cdot\cancel{11!}}{\cancel{11!}\,2!}\cdot 13^3 = 4\cdot\frac{13\cdot\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{2}}\cdot 13^3 = 4\cdot 13\cdot 6\cdot 13^3 = 312\cdot 13^3 = 685.464$$

∴ Existen 685.464 formas distintas de escoger 5 cartas entre 52 teniendo en cuenta que debe haber al menos una carta de cada palo.

2. (20 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar la siguiente igualdad:

$$n = \frac{n! + (n+2)! - n(n+2)(n-1)!}{n! + (n-1)! + (n+1)!}.$$

$$n = \frac{n! + (n+2)! - n(n+2)(n-1)!}{n! + (n-1)! + (n+1)!}$$ def. recursivo de factorial

$$n = \frac{n.(n-1)! + (n+2).(n+2-1)! - n(n+2)(n-1)!}{n! + (n-1)! + (n+1).(n+1-1)!}$$ def. recursivo de factorial

$$n = \frac{n.(n-1)! + (n+2).(n+1).n.(n-1)! - n(n+2)(n-1)!}{n.(n-1)! + (n-1)! + (n+1).n.(n-1)!}$$ factorizar

$$n = \frac{\cancel{(n-1)!}\left(n + (n+2).(n+1).n - n.(n+2)\right)}{\cancel{(n-1)!}\left(n+1+(n+1).n\right)}$$

$$n = \frac{n + (n+2).(n+1).n - n.(n+2)}{n+1+(n+1).n}$$ distributividad

$$n = \frac{n + (n^2+3n+2).n - n^2 - 2n}{1n + 1 + n^2 + 1n}$$ distributividad

$$n = \frac{n + n^3 + 3n^2 \cancel{+2n} - n^2 \cancel{-2n}}{2n+1+n^2}$$ factorizar y conmutatividad

$$n = \frac{n.\left(\cancel{1+n^2+2n}\right)}{\cancel{1+n^2+2n}}$$

$$n = \frac{n.1}{1}$$

$$n = n$$