

Ejercicio 1:

$$2) \frac{x+3}{|x-5|} < x+3 \rightarrow x \neq 5$$

Caso 1: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

$$\frac{x+3}{x-5} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - (x+3) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+3 - x(x-5) - 3(x-5)}{x-5} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3 - x^2 + 5x - 3x + 15}{x-5} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 3x + 18}{x-5} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 3x + 18}{x-5} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1 \cdot (x+3)(x-6)}{x-5} < 0$$

Procedamos a hacer un cuadro con los puntos relevantes para así ver cuándo la expresión es negativa

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18 = 9 + 72 = 81$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 9}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 9}{-2} = \frac{+6}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-3 - 9}{-2} = \frac{-12}{-2} = +6$$

$$x_1 = -3, x_2 = 6$$

$$x_1 = -3, x_2 = 6$$

$$x_1 = -3, x_2 = 6$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, 6)$	$(6, \infty)$
-1	-	-	-	-
$x+3$	-	+	+	+
$x-6$	-	-	-	+
$x-5$	-	-	+	+
Resultado	+	-	+	-

$\therefore x \in (6, \infty)$, ya que $x \geq 5$ y ~~se busca~~

Caso 2: $x-5 < 0 \Rightarrow x < 5$

$$\frac{x+3}{x-5} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{-x+5} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{-x+5} - (x+3) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{-x+5} - x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+3 - x(-x+5) - 3(-x+5)}{-x+5} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3 + x^2 - 5x + 3x - 15}{-x+5} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 4x - 12}{-x+5} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 12}{-(x-5)} < 0 \Rightarrow \frac{(x-4) \cdot (x+3)}{-(x-5)} < 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -12 = 1 + 48 = 49$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$x-4$	-	-	+	+
$x+3$	-	+	+	+
$-(x-5)$	+	+	+	-
Resultado	+	-	+	-

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

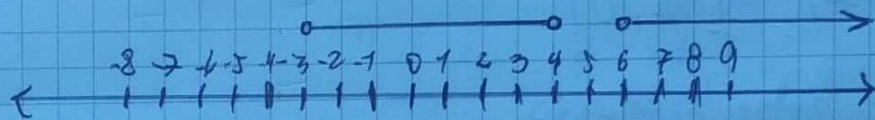
$$x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$\therefore x \in (-3, 4)$, ya que $x < 5$

Ahora procedamos con el gráfico.

Segun lo enter visto, tener que $x \in (-3, 4) \cup (6, \infty)$



b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{x^2}}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

i) No, ya que es una función par:

$$f(-x) = \frac{1}{1+e^{(-x)^2}} = \frac{1}{1+e^{x^2}} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

\therefore no se cumple que si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) Para calcular la imagen de f veamos donde corta al eje y y cual es su limite cuando tiende a infinito:

$$f(0) = \frac{1}{1+e^{0^2}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{x^2}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

\therefore como a medida que x crece, la función se acerca a 0, la función posee su máximo en $x=0$:

$$\therefore \text{im}(f) = \left[\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Por ende, la función no es suryectiva ya que $\text{im}(f) \neq \mathbb{R}$ (conj. Negros).

iii) No es biyectiva ya que no es ni inyectiva ni suryectiva.

iv) Si, es necesario. Habría que delimitar el dominio tal que la función este definida de la siguiente forma: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

v) Para que f sea biyectiva debería estar definida así:
 $f: [0, \infty) \rightarrow [\frac{1}{2}, 1)$

Ahora calculemos la inversa.

$$y = \frac{1}{1+e^{x^2}} \Rightarrow y \cdot (1+e^{x^2}) = 1$$

$$\Rightarrow 1+e^{x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow e^{x^2} = \frac{1}{y} - 1$$

$$\Rightarrow \ln(e^{x^2}) = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) \Rightarrow x^2 \cdot \ln(e) = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 1 = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) \Rightarrow x = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$$

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.

REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS
MINISTERIO DEL INTERIOR, OBRAS PÚBLICAS Y VIVIENDA

Apellido / Surname
BACHMANN

Nombre / Name
LAUTARO RON

Sexo / Sex Nacionalidad / Nationality Ejemplar
M ARGENTINA A

Fecha de nacimiento / Date of birth
01 AGO / AUG 2002

Fecha de emisión / Date of issue
09 AGO / AUG 2016

Fecha de vencimiento / Date of expiry
09 AGO / AUG 2031

Documento / Document
44.390.167

Trámite N.º / Off. ident.
0045047353
8310

Signature: Lautaro

FORMA IDENTIFICADO SIGNATURE