

# Edmonds-Karp

Daniel Penazzi

21 de abril de 2021

# Tabla de Contenidos

- 1 Ejemplos de Ford-Fulkerson
  - Primer ejemplo
  - Segundo ejemplo
- 2 Algoritmo de Edmonds-Karp
- 3 Primer Ejemplo
- 4 Segundo Ejemplo
  - Primera iteración
  - Segunda iteración
  - Tercera iteración
  - Cuarta Iteración
- 5 Descuentos por errores

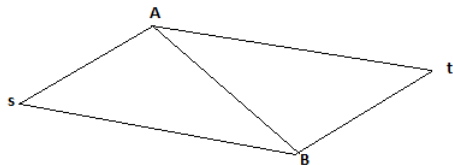
- Hay un detalle de Ford-Fulkerson que no especificamos.
- La clave de Ford-Fulkerson es encontrar un camino aumentante.
- Pero ¿Cómo lo encontramos? (en tiempo polinomial)
- Bueno, hay varias formas. Uds. conocen al menos tres algoritmos que, modificados adecuadamente, permiten encontrar caminos aumentantes.
  - 1 Usar una versión modificada de DFS.
  - 2 Usar una versión modificada de BFS.
  - 3 Usar una versión modificada de Dijkstra.

# Ford-Fulkerson con DFS

## ■ Con DFS:

- 1 Creamos una pila con  $s$ .
- 2 Si la pila es vacía, terminamos, no hay camino. Si no es vacía, tomamos  $x$  = el primer elemento de la pila y buscamos algún vecino de  $x$  que satisfaga las condiciones de Ford-Fulkerson.
- 3 Si no hay, sacamos a  $x$  de la pila y repetimos 2).
- 4 Si hay tal vecino, tomamos  $z$  uno de ellos.
- 5 Si  $z = t$  encontramos nuestro camino.
- 6 Si no, agregamos  $z$  a la pila y repetimos 2).

- Una ventaja de esto es que sabemos que DFS es  $O(m)$  así que la búsqueda de caminos es polinomial.
- Una desventaja es que con DFS Ford-Fulkerson puede no terminar nunca, o aun si termina puede demorar muchísimo en hacerlo.
- Ejemplo:



# Ejemplo

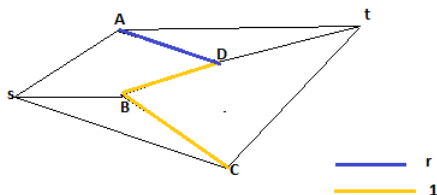
- Ford-Fulkerson encuentra el siguiente camino aumentante, comenzando con  $f = 0$ :  $sABt : 1$ .
- Luego, a partir del flujo obtenido, como se ha mandado una unidad de flujo por  $\overrightarrow{AB}$ , ahora se puede devolver, encontrando el camino aumentante:  $\overleftarrow{sBA}t : 1$
- Continuamos iterando con caminos  $sABt : 1$  y luego  $\overleftarrow{sBA}t : 1$ .
- Luego de dos mil trillones de caminos, llegamos a nuestro flujo maximal.

# Ejemplo

- En vez de mil trillones podemos poner el número que queramos, lo cual muestra que no se puede acotar la complejidad con ninguna función de  $n, m$ .
- Obviamente, se puede acotar con una función que dependa de  $n, m$  y las capacidades.
- Pues vimos que hay a lo sumo  $cap(\{s\})$  flujos intermedios.
- Pero puede ser peor:

# Ejemplo II

- Con capacidades todas 10, excepto  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  de capacidades 1 y  $\overrightarrow{AD}$  de capacidad  $r$ .



- Donde  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,62 < 1$ .

## Ejemplo II

- Ya que  $10 > 1 > r$  nos concentraremos en las 3 capacidades mas chicas,  $1, 1, r$
- Y específicamente miraremos las capacidades “sobrantes” es decir, capacidad-flujo en cada uno de esos lados.
- Empezamos con el camino  $sBDt$ . Como pasa por  $\overrightarrow{BD}$ , solo podemos mandar 1.
- Las capacidades sobrantes de los lados  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$  quedan  $1, 0, r$
- Recordemos esto, digamos con un  $(\star)$ .

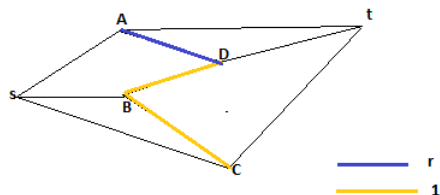
# Ejemplo II

- Luego podemos ir por  $s, A, D$  y al llegar a  $D$ , ya que hay flujo desde  $B$  a  $D$ , podríamos devolver una unidad de flujo, y luego seguir por  $C$ , teniendo  $s \overset{\leftarrow}{A} D B C t$ .
- ¿Cuanto podemos mandar?
- Como usamos el lado  $\overset{\rightarrow}{AD}$  de capacidad  $r$  y  $r < 1$ , entonces podemos mandar sólo  $r$ .

## Ejemplo II

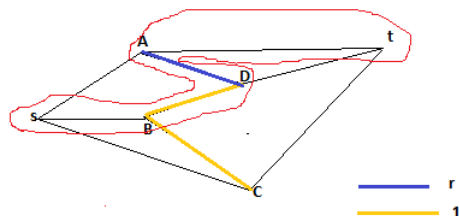
- ¿Como quedan las capacidades sobrantes de los lados  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$ ?
- Sumamos flujo  $r$  en  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$  y restamos  $r$  (pues devolvemos flujo) en  $\overrightarrow{BD}$ .
- Por lo tanto como las capacidades sobrantes son  $c - f$ , se le resta  $r$  en  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$  y se suma  $r$  en  $\overrightarrow{BD}$ .
- Quedan:  $1 - r, r, 0$
- Pero  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  es raiz de la ecuación  $r^2 + r - 1 = 0$ .
- Por lo tanto  $1 - r = r^2$  y las capacidades sobrantes quedan:  $r^2, r, 0$

## Ejemplo II



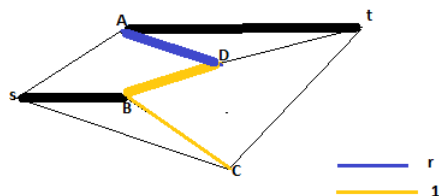
■ Ahora podemos usar el camino  $s\overleftarrow{B}DA\overleftarrow{t}$

## Ejemplo II



- Ahora podemos usar el camino  $s \overleftarrow{B} D A t$  pues  $\overrightarrow{BD}$  quedó con capacidad sobrante  $r$  así que se puede mandar flujo por ahí, y como hemos mandamos flujo por  $\overrightarrow{AD}$ , entonces podemos devolver flujo por el.

# Ejemplo II



- Ahora podemos usar el camino  $s \overrightarrow{BD} A \overleftarrow{t}$
- Capacidades sobrantes de los lados  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$   $r^2, r, 0$

# Ejemplo II

- Podemos mandar  $r$  por  $\overrightarrow{BD}$  y devolver  $r$  por  $\overrightarrow{AD}$  así que el camino es:  $s \xleftarrow{B} D \xrightarrow{A} t : r$
- Capacidades sobrantes de los lados  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$  quedan  $r^2, 0, r$

## Ejemplo II

- Como las capacidades sobrantes son  $r^2, 0, r$  podemos otra vez hacer el camino  $s \overset{\leftarrow}{A} D B C t$ .
- Esta vez podemos mandar  $r^2$  por  $\overset{\rightarrow}{B} C$ , devolver hasta 1 por el  $\overset{\rightarrow}{B} D$  y mandar  $r$  por el  $\overset{\rightarrow}{A} D$ .
- Como  $r < 1$  entonces  $r^2 < r$  así que solo podemos mandar  $r^2$ .
- Capacidades sobrantes quedan  $0, r^2, r^3$

## Ejemplo II

- Como las capacidades sobrantes son  $0, r^2, r^3$  podemos tomar el camino  $s \xleftarrow{C} B D t$ .
- Esta vez podemos devolver 1 por  $\overrightarrow{BC}$ , y mandar  $r^2$  por el  $\overrightarrow{BD}$ , así que el mínimo es  $r^2$ .
- Capacidades sobrantes quedan  $r^2, 0, r^3$
- Comparemos esto con  $(\star)$  que era  $1, 0, r$  y vemos que multiplicamos las capacidades sobrantes por  $r^2$ .
- Esto lo podemos ir repitiendo todo el tiempo que querramos:

# Ejemplo II

- Si suponemos que las capacidades sobrantes son  $r^{2k}, 0, r^{2k+1}$
- 
- $\overleftarrow{sADBCt} : r^{2k+1}$        $\overleftarrow{sBDA t} : r^{2k+1}$
- $\overleftarrow{sADBCt} : r^{2k+2}$        $\overleftarrow{sCBDt} : r^{2k+2}$
- Capacidades sobrantes:  $r^{2k+2}, 0, r^{2k+3}$
- Y hemos pasado de  $r^{2k}, 0, r^{2k+1}$  a  $r^{2k+2}, 0, r^{2k+3}$  así que podemos repetir el ciclo.
- Como el ciclo lo podemos repetir indefinidamente, Ford-Fulkerson no termina nunca.

# Ejemplo II

- Mas aun, es trivial ver que esta secuencia de flujos tiene valores que convergen a 3. pero el valor del flujo maximal es 21, asi que ni siquiera converge al flujo maximal.
- Asi que no conviene usar DFS pues no hay suficientes restricciones en la elección de caminos para garantizar que termine.
- Una posibilidad es, en vez de usar DFS, usar una variación de Dijkstra para buscar un camino de **máximo aumento de flujo**.
- Otra posibilidad es, en vez de usar DFS, usar BFS.
- Eso equivale a decir que, de entre todos los caminos aumentantes, elegimos uno que tenga **la longitud mínima**.

- Una década luego de que Ford y Fulkerson propusieran su algoritmo, Edmonds y Karp propusieron estas dos alternativas.
- Es decir, aumentar eligiendo caminos de longitud mínima, y aumentar eligiendo caminos de aumento máximo.
- Demostraron que en ambos casos el algoritmo siempre termina.
- Y que en el caso de aumento máximo, el algoritmo es polinomial en  $n$ ,  $m$  y las capacidades.
- Pero demostraron que en el caso de aumentar por caminos mínimos, el algoritmo es polinomial en  $n$ ,  $m$  solamente.

# Edmonds-Karp

- Por lo tanto ese es el algoritmo preferido, y el que se llama “algoritmo de Edmonds-Karp”
- Algunos libros lo llaman “heurística” de Edmonds-Karp porque no es un nuevo algoritmo, sino que es Ford-Fulkerson con la especificación de usar BFS para la búsqueda.
- Como sea, una buena forma de recordarlo es que  $EK=FF+BFS$ .
- Parecería que no es mucho lo que hicieron Edmonds y Karp, meramente sugerir usar BFS.
- Pero lo importante no fue sólo sugerir usar BFS, sino que dieron una prueba de que el algoritmo resultante es polinomial.

- Dejaremos esta parte superimportante de demostrar que Edmonds-Karp es polinomial para la proxima clase.
- Lo que haremos ahora es dar un par de ejemplos de cómo escribir un desarrollo “en papel” de Edmonds-Karp, para que todos podamos entendernos.
- Principalmente, que nosotros podamos entenderlos a ustedes.
- Primero daremos el network, listando los lados y sus capacidades.

# Network de Ejemplo

$sA : 7$        $BC : 9$   
 $sB : 9$        $Ct : 7$   
 $AC : 8$        $Dt : 9$   
 $AD : 5$

# 1er camino aumentante

- Como  $EK=FF+BFS$  tenemos que ir construyendo una cola, con  $s$  como primer vértice.
- Luego iremos agregando vecinos de la cabeza de la cola.
- En nuestro caso la cola empezaria asi:

$sABCDt$

El siguiente en la cola es  $C$  que tiene como vecino a  $t$ , asi que ya no hace falta seguir: hemos llegado al objetivo

Ok, pero ¿Cómo reconstruimos el camino que va de  $s$  a  $t$  con lo que hemos hecho?

Hay que usar el truco que ya deben haber visto en otros algoritmos de ir guardando, cuando un vértice es puesto en la cola, quién es el vértice que lo puso

# Refinamientos

- Es decir, en el programa, cada vértice  $x$  tendrá un registro asociado, digamos  $p(x)$  que indicara quien es el vértice que lo pone en BFS.
- Iterando desde  $t$  usando  $p$ , se reconstruye el camino.
- Ahora, el camino en sí no es lo único importante. Lo que también tenemos que saber es cuanto flujo mandar por ese camino
- Hay dos formas de hacer esto:
  - 1 Una vez que se tiene el camino, recorrerlo para averiguar cual es el " $\varepsilon$ " por el cual debemos incrementar el flujo
  - 2 En vez de eso, ir calculando el  $\varepsilon$  a medida que construimos la cola BFS.
- Aca usaremos la segunda opción pero uds. pueden hacer cualquiera de las dos.

- Es decir, tendremos asociado a cada vértice un  $\varepsilon(x)$  que indique cuanto flujo podemos mandar por el camino aumentante temporario que va de  $s$  a  $x$ .
- Así, el  $\varepsilon$  será simplemente  $\varepsilon(t)$ .
- $\varepsilon(x)$  se calcula así:
- Si  $x$  es puesto en la cola por un vértice  $z$  de modo forward, entonces:
  - $\varepsilon(x) = \text{Min}\{\varepsilon(z), c(\overrightarrow{zx}) - f(\overrightarrow{zx})\}$ .
  - Es decir, el mínimo de lo que venía y lo que se puede mandar por de  $z$  a  $x$ .
- Si  $x$  es puesto en la cola por un vértice  $z$  de modo backward, entonces:
  - $\varepsilon(x) = \text{Min}\{\varepsilon(z), f(\overrightarrow{xz})\}$ .
  - Es decir, el mínimo de lo que venía y lo que  $z$  le puede devolver a  $x$ .

# Fragmento del programa

- Además, necesitaríamos otro registro, que nos diga si el vertice fue agregado “forward” o “backward”.
- Digamos un registro  $b$  que es 1 si es forward y -1 si es backward.
- El fragmento del programa para calcular el aumento del flujo sería algo así:
  - $x = t, \varepsilon = \varepsilon(t).$
  - While ( $x \neq s$ )
    - $z = p(x)$
    - If ( $1 == b(x)$ )  $f(\overrightarrow{zx}) + = \varepsilon$  else  $f(\overrightarrow{xz}) - = \varepsilon$
    - $x = z$
  - EndWhile

- Entonces, además de anotar la cola, deberíamos anotar para cada vértice  $x$  que agreguemos a la cola:
  - $p(x)$
  - $\epsilon(x)$
  - $b(x)$
- Esto lo haremos poniendo debajo de  $x$  a  $p(x)$  y debajo de este a  $\epsilon(x)$ .
- Para  $b(x)$  pueden poner una cuarta fila anotando 1 y -1, o sólo los -1s, dando por sentado los 1s. o poner un exponente — en el  $p(x)$  si es backward, tipo  $A^-$ . Usaremos esta última opción.

## Cont Ejemplo

$sA : 7$     $sB : 9$     $AC : 8$     $AD : 5$     $BC : 9$     $Ct : 7$     $Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaria asi:

sAB

ss

79

## Cont Ejemplo

$sA : 7$   $sB : 9$   $AC : 8$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 7$   $Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaria asi:

sABCD  
ssAA  
7975

$\varepsilon(C)$  es 7 pues es el minimo de lo que tiene  $A$  (7) y  $c(\overset{\longrightarrow}{AC})$  que es 8.

$\varepsilon(D)$  es 5 pues es el minimo de lo que tiene  $A$  (7) y  $c(\overset{\longrightarrow}{AD})$  que es 5.

## Cont Ejemplo

$sA : 7$     $sB : 9$     $AC : 8$     $AD : 5$     $BC : 9$     $Ct : 7$     $Dt : 9$

- Entonces el primer camino aumentante quedaria asi:

sABCDt  
ssAAC  
79757

Y ahora reconstruimos el camino, empezando desde t, leyendo la segunda fila

sACt:7

Ahora debemos actualizar el flujo. Podemos hacer una tabla poniendo al lado de cada lado el flujo. O bien poniendo al lado de cada lado la diferencia entre la capacidad y el flujo Es decir, la “capacidad sobrante” . Usaremos esta segunda opción.

# Network de Ejemplo

sACt:7

*sA* : 0      *BC* : 9

*sB* : 9      *Ct* : 0

*AC* : 1      *Dt* : 9

*AD* : 5

# Cont Ejemplo

$sA : 0$   $sB : 9$   $AC : 1$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 0$   $Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBC

sB

99

## Cont Ejemplo

$sA : 0$   $sB : 9$   $AC : 1$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 0$   $Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

$sBCA$   
 $sBC^-$   
99

Observemos que  $C$  no puede mandar flujo hacia  $t$  pues  $\overrightarrow{Ct}$  esta saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia  $A$ , asi que ponemos a  $A$  en la cola, con el marcador  $C^-$  para indicar que es backward.

# Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 9$     $AC : 1$     $AD : 5$     $BC : 9$     $Ct : 0$     $Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

$sBCA$   
 $sBC^-$   
 $997$

El  $\varepsilon(A)$  es 7 pues viene siendo 9 pero solo podemos devolver 7 así que el mínimo de los dos es 7

# Cont Ejemplo

$sA : 0$   $sB : 9$   $AC : 1$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 0$   $Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

sBCA  
sBC<sup>-</sup>  
997

# Cont Ejemplo

$sA : 0$   $sB : 9$   $AC : 1$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 0$   $Dt : 9$

■ Segundo camino aumentante:

$sBCA \ D$   
 $sBC^{-}A$   
997 5

$\varepsilon(D)$  es 5 pues es el minimo entre lo que venia, que era 7, y 5 que es  $c(\overrightarrow{AD})$ .

# Cont Ejemplo

$sA : 0$   $sB : 9$   $AC : 1$   $AD : 5$   $BC : 9$   $Ct : 0$   $Dt : 9$

- Segundo camino aumentante:

$sBCA$   $Dt$   
 $sBC-AD$   
997 55

Reconstrucción del camino:

←  
 $sBCADt:5$

Este es un ejemplo simple, así que sería fácil reconstruir el camino aun sin poner las etiquetas, pero luego veremos un ejemplo más complicado

# Actualización del flujo

$\overleftarrow{sBCADt:5}$

$sA : 0$        $BC : 9$

$sB : 9$        $Ct : 0$

$AC : 1$        $Dt : 9$

$AD : 5$

# Actualización del flujo

$\overleftarrow{sBCADt:5}$

$sA : 0$        $BC : 4$

$sB : 4$        $Ct : 0$

$AC : 1$        $Dt : 4$

$AD : 0$

Restamos 5 a los lados  $\overrightarrow{sB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{Dt}$ , pero ¿qué pasa con el  $\overleftarrow{CA}$ ?

# Actualización del flujo

$$\overleftarrow{sBCADt:5}$$

$$sA : 0 \quad BC : 4$$

$$sB : 4 \quad Ct : 0$$

$$AC : \cancel{1} \quad Dt : 4$$

$$AD : 0$$

Restamos 5 a los lados  $\overrightarrow{sB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{Dt}$ , pero ¿qué pasa con el  $\overleftarrow{CA}$ ?  
Ese lado no existe, el que existe es el  $\overrightarrow{AC}$ , así que vamos a ese para cambiarlo

# Actualización del flujo

$\overleftarrow{sBCADt:5}$

$sA : 0$        $BC : 4$

$sB : 4$        $Ct : 0$

$AC : 6$        $Dt : 4$

$AD : 0$

Como estamos DEVOLVIENDO flujo, entonces **el flujo DISMINUYE**. Pero no estamos escribiendo el flujo sino la capacidad menos el flujo ( $c - f$ ), por lo tanto como  $f$  disminuye entonces  $c - f$  AUMENTA.

# Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

- Tercer camino aumentante:

sBC

sB

44

## Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

■ Tercer camino aumentante:

sBC

sB

44

Al igual que en el segundo camino,  $C$  no puede mandar flujo hacia  $t$  pues  $\overrightarrow{Ct}$  está saturado.

## Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

■ Tercer camino aumentante:

$sBCA$   
 $sBC^-$   
442

Al igual que en el segundo camino,  $C$  no puede mandar flujo hacia  $t$  pues  $\overrightarrow{Ct}$  está saturado. Pero sigue pudiendo devolver flujo hacia  $A$  pues  $(c - f)(\overrightarrow{AC}) = 6$  pero  $c(\overrightarrow{AC}) = 8$ , lo cual dice que  $f(\overrightarrow{AC}) = 2$ , así que podemos devolver flujo. El  $\varepsilon(A)$  es 2 pues es el mínimo entre 4 y 2

# Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

■ Tercer camino aumentante:

sBCA  
sBC<sup>-</sup>  
442

A no puede mandar agregar a nadie mas:

## Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

■ Tercer camino aumentante:

sBCA  
sBC<sup>-</sup>  
442

A no puede mandar agregar a nadie mas: a  $D$  no lo puede agregar porque  $\overrightarrow{AD}$  esta saturado,

## Cont Ejemplo

$sA : 0$     $sB : 4$     $AC : 6$     $AD : 0$     $BC : 4$     $Ct : 0$     $Dt : 4$

■ Tercer camino aumentante:

sBCA  
sBC<sup>-</sup>  
442

A no puede mandar agregar a nadie mas: a  $D$  no lo puede agregar porque  $\overrightarrow{AD}$  esta saturado, a  $C$  no lo puede agregar porque  $C$  ya está en la cola, y tampoco puede agregar backwards a  $s$  por la misma razón.

Por lo tanto, no llegamos a  $t$  y el flujo obtenido es maximal

# valor del flujo y Corte Maximal

- El valor del flujo maximal es
$$v(f) = out_f(s) = f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sB}) = 7 + 5 = 12.$$
- Que es igual a la suma de los  $\varepsilon$ s de los caminos aumentantes.
- Esta doble cuenta sólo verifica que no hicimos algún error aritmético, pero para poder chequear que no hayamos cometido algún otro error y que el flujo no sea en realidad maximal, podemos verificar esto calculando un corte minimal.
- De acuerdo con la demostración de FF, el conjunto de todos los vértices para los cuales exista un camino aumentante desde  $s$  en la ultima iteración será un corte minimal.

# valor del flujo y Corte Maximal

- Y como en EK usamos BFS, entonces el conjunto de vértices que alguna vez estuvieron en la cola es ese conjunto de la prueba de FF.
- En nuestro ejemplo, es  $S = \{s, B, C, A\}$ .
- Recordemos que la capacidad de un corte es  $cap(S) = \sum_{x,y} c(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][\overrightarrow{xy} \in E]$ .
- En nuestro caso, los únicos lados  $\overrightarrow{xy}$  con  $x \in S, y \notin S$  son  $\overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{Ct}$ .
- Así:  $cap(S) = c(\overrightarrow{AD}) + c(\overrightarrow{Ct}) = 5 + 7 = 12$ .
- Como  $cap(S) = v(f)$ , concluimos que  $f$  es maximal.
- Bueno, ahora veamos un ejemplo mas complicado.

## 2do Network de Ejemplo

<i>sA</i> : 9	<i>FI</i> : 7
<i>sC</i> : 9	<i>FM</i> : 8
<i>sF</i> : 9	<i>GE</i> : 8
<i>AB</i> : 10	<i>Ht</i> : 4
<i>AH</i> : 9	<i>IJ</i> : 9
<i>Bt</i> : 9	<i>JK</i> : 9
<i>CD</i> : 9	<i>KH</i> : 9
<i>CL</i> : 9	<i>LN</i> : 9
<i>DB</i> : 9	<i>MJ</i> : 9
<i>DE</i> : 5	<i>NG</i> : 9
<i>Et</i> : 9	

# 1er camino aumentante

<i>sA</i> : 9	<i>sC</i> : 9	<i>sF</i> : 9	<i>AB</i> : 10	<i>AH</i> : 9	<i>Bt</i> : 9	<i>CD</i> : 9
<i>CL</i> : 9	<i>DB</i> : 9	<i>DE</i> : 5	<i>Et</i> : 9	<i>FI</i> : 7	<i>FM</i> : 8	<i>GE</i> : 8
<i>Ht</i> : 4	<i>IJ</i> : 9	<i>JK</i> : 9	<i>KH</i> : 9	<i>LN</i> : 9	<i>MJ</i> : 9	<i>NG</i> : 9

sACFBHDL I Mt  
s s s AACCCFF B  
999999978 9

Y ahora reconstruimos el camino, empezando desde *t*, leyendo la segunda fila

sABt:9

Ahora debemos actualizar el flujo.

$sA : 0$

$FI : 7$

$sC : 9$

$FM : 8$

$sF : 9$

$GE : 8$

$AB : 1$

$Ht : 4$

$AH : 9$

$IJ : 9$

$Bt : 0$

$JK : 9$

$CD : 9$

$KH : 9$

$CL : 9$

$LN : 9$

$DB : 9$

$MJ : 9$

$DE : 5$

$NG : 9$

$Et : 9$

## Segundo camino aumentante:

<i>sA</i> : 0	<i>sC</i> : 9	<i>sF</i> : 9	<i>AB</i> : 1	<i>AH</i> : 9	<i>Bt</i> : 0	<i>CD</i> : 9
<i>CL</i> : 9	<i>DB</i> : 9	<i>DE</i> : 5	<i>Et</i> : 9	<i>FI</i> : 7	<i>FM</i> : 8	<i>GE</i> : 8
<i>Ht</i> : 4	<i>IJ</i> : 9	<i>JK</i> : 9	<i>KH</i> : 9	<i>LN</i> : 9	<i>MJ</i> : 9	<i>NG</i> : 9

sCFDLIMBENJ  
s sCCFFDDL I  
9999789597

.

## Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$FI : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJ

ssCCFFDDL I

9999789597

B no puede mandar flujo hacia  $t$  pues  $\overset{\longrightarrow}{Bt}$  esta saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia  $A$ .

## Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$FI : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJ A  
s sCCFFDDL I B<sup>-</sup>  
9999789597 9

B no puede mandar flujo hacia  $t$  pues  $Bt$  está saturado. Pero si puede DEVOLVER flujo hacia A, así que ponemos a A en la cola, con el marcador B<sup>-</sup> para indicar que es backward.

## Segundo camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 9$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 9$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 5$	$Et : 9$	$FI : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBENJ A t  
s sCCFFDDL I B<sup>-</sup>E  
9999789597 9 5

. Reconstrucción del camino:

sCDEt:5

Y cambiamos el flujo:

## 2: *sCDEt* : 5

*sA* : 0

*sC* : 4

*sF* : 9

*AB* : 1

*AH* : 9

*Bt* : 0

*CD* : 4

*CL* : 9

*DB* : 9

*DE* : 0

*Et* : 4

*FI* : 7

*FM* : 8

*GE* : 8

*Ht* : 4

*IJ* : 9

*JK* : 9

*KH* : 9

*LN* : 9

*MJ* : 9

*NG* : 9

## Tercer camino aumentante:

*sA* : 0   *sC* : 4   *sF* : 9   *AB* : 1   *AH* : 9   *Bt* : 0   *CD* : 4  
*CL* : 9   *DB* : 9   *DE* : 0   *Et* : 4   *FI* : 7   *FM* : 8   *GE* : 8  
*Ht* : 4   *IJ* : 9   *JK* : 9   *KH* : 9   *LN* : 9   *MJ* : 9   *NG* : 9

sCFDLIMBNJ A GKHE  
sCCFFDLI B<sup>-</sup> NJAG  
494478447 4 4744

## Tercer camino aumentante:

$sA : 0$     $sC : 4$     $sF : 9$     $AB : 1$     $AH : 9$     $Bt : 0$     $CD : 4$   
 $CL : 9$     $DB : 9$     $DE : 0$     $Et : 4$     $FI : 7$     $FM : 8$     $GE : 8$   
 $Ht : 4$     $IJ : 9$     $JK : 9$     $KH : 9$     $LN : 9$     $MJ : 9$     $NG : 9$

sCFDLIMBNJ A GKHE  
sCCFFDLI B<sup>-</sup> NJAG  
494478447 4 4744

$K$  podría agregar a  $H$  pero como  $H$  ya está en la cola no puede

## Tercer camino aumentante:

$sA : 0$	$sC : 4$	$sF : 9$	$AB : 1$	$AH : 9$	$Bt : 0$	$CD : 4$
$CL : 9$	$DB : 9$	$DE : 0$	$Et : 4$	$FI : 7$	$FM : 8$	$GE : 8$
$Ht : 4$	$IJ : 9$	$JK : 9$	$KH : 9$	$LN : 9$	$MJ : 9$	$NG : 9$

sCFDLIMBNJ A GKHE t  
s sCCFFDLI B<sup>-</sup> NJAGH  
494478447 4 47444

Llegamos a  $t$ , reconstruimos el camino

←  
sCDBA Ht:4



### 3: *sCDBA**Ht* : 4

*sA* : 0

*FI* : 7

*sC* : 0

*FM* : 8

*sF* : 9

*GE* : 8

*AB* : 5

*Ht* : 0

*AH* : 5

*IJ* : 9

*Bt* : 0

*JK* : 9

*CD* : 0

*KH* : 9

*CL* : 9

*LN* : 9

*DB* : 5

*MJ* : 9

*DE* : 0

*NG* : 9

*Et* : 4

## Cuarto camino aumentante:

$sA:0$	$sC:0$	$sF:9$	$AB:5$	$AH:5$	$Bt:0$	$CD:0$
$CL:9$	$DB:5$	$DE:0$	$Et:4$	$FI:7$	$FM:8$	$GE:8$
$Ht:0$	$IJ:9$	$JK:9$	$KH:9$	$LN:9$	$MJ:9$	$NG:9$

$sFIMJKH A B D C LNGE t$   
 $sFF IJKH^- AB^- D^- CLNGE$   
978777 4 4 4 4 44444

Llegamos a  $t$ , reconstruimos el camino

$\leftarrow$   
 $DCLNGEt:4$

## Cuarto camino aumentante:

$sA : 0$     $sC : 0$     $sF : 9$     $AB : 5$     $AH : 5$     $Bt : 0$     $CD : 0$   
 $CL : 9$     $DB : 5$     $DE : 0$     $Et : 4$     $FI : 7$     $FM : 8$     $GE : 8$   
 $Ht : 0$     $IJ : 9$     $JK : 9$     $KH : 9$     $LN : 9$     $MJ : 9$     $NG : 9$

$sFIMJKH \text{ A B D } C \text{ LNGE } t$   
 $sFFIJKH^-AB^-D^-CLNGE$   
978777 4 4 4 4 44444

Llegamos a  $t$ , reconstruimos el camino

$\longleftarrow$   
 $BDCLNGEt:4$

Esa flecha larga hacia atras sobre  $B$ ,  $D$ ,  $C$  deberian ser dos flechas cortas, una sobre  $BD$ , otra sobre  $DC$ , pero no se como hacerlo en Latex

## Cuarto camino aumentante:

$sA:0$     $sC:0$     $sF:9$     $AB:5$     $AH:5$     $Bt:0$     $CD:0$   
 $CL:9$     $DB:5$     $DE:0$     $Et:4$     $FI:7$     $FM:8$     $GE:8$   
 $Ht:0$     $IJ:9$     $JK:9$     $KH:9$     $LN:9$     $MJ:9$     $NG:9$

$sFIMJKHABDCLNGEt$   
 $sFFIJKH^-AB^-D^-CLNGE$   
978777 4 4 4 4 44444

Llegamos a  $t$ , reconstruimos el camino

$sFIJKHABDCLNGEt:4$

### 3: *sFIJKHABDCLNGEt* : 4

<i>sA</i> : 0	<i>FI</i> : 3
<i>sC</i> : 0	<i>FM</i> : 8
<i>sF</i> : 5	<i>GE</i> : 4
<i>AB</i> : 1	<i>Ht</i> : 0
<i>AH</i> : 9	<i>IJ</i> : 5
<i>Bt</i> : 0	<i>JK</i> : 5
<i>CD</i> : 4	<i>KH</i> : 5
<i>CL</i> : 5	<i>LN</i> : 5
<i>DB</i> : 9	<i>MJ</i> : 9
<i>DE</i> : 0	<i>NG</i> : 5
<i>Et</i> : 0	

# Final:

$sA : 0$     $sC : 0$     $sF : 5$     $AB : 1$     $AH : 9$     $Bt : 0$     $CD : 4$   
 $CL : 5$     $DB : 9$     $DE : 0$     $Et : 0$     $FI : 3$     $FM : 8$     $GE : 4$   
 $Ht : 0$     $IJ : 5$     $JK : 5$     $KH : 5$     $LN : 5$     $MJ : 9$     $NG : 5$

$sFIMJKH$

$sFFIJK$

535333

- No llegamos a  $t$ , el flujo es maximal.
- Valor del flujo =  $f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sC}) + f(\overrightarrow{sF}) = 9 + 9 + 4 = 22$ .
- Primer check: suma de los  $\varepsilon$  de los caminos:  $9 + 5 + 4 + 4 = 22$ .
- Check de maximal: Corte  $S = \{s, F, I, M, J, K, H\}$
- Capacidad de  $S$ :  $= c(\overrightarrow{sA}) + c(\overrightarrow{sC}) + c(\overrightarrow{Ht}) = 9 + 9 + 4 = 22$ .
- Confirmamos que  $f$  es maximal.

- Obviamente al hacer todos estos cálculos a mano pueden equivocarse.
- Si cometen un error tonto que no afecta la dificultad general del ejercicio, el **descuento** será poco.
- Ahora bien, si el error provoca que el ejercicio que terminen haciendo es mucho mas fácil que el “real” el descuento puede ser mucho mayor.
- En particular, en TODO ejercicio de examen, habrá al menos un camino con **con al menos un lado backward**
- Si ustedes resuelven un ejercicio de examen sin lados backwards, es porque tienen algo mal.
- Habiendo avisado esto, si entregan un ejercicio de examen sin lados backwards, el **puntaje total** del ejercicio será 0.1 o 0.2 puntos.

- Otra cosa que tienen que hacer es siempre verificar que  $v(f)$  sea igual a  $cap(S)$ , calculando ambos en forma independiente.
- Si tienen todo bien pero no hacen esta verificación, habrá descuento de puntos.
- Si tienen un error, y  $v(f)$  no les da igual a  $cap(S)$  pero no hacen la verificación, el descuento será mucho mas grande.
- Si tienen un error,  $v(f)$  no les da igual a  $cap(S)$  pero AVISAN con una nota tipo:
  - “ $v(f)$  da tanto,  $cap(S)$  da esto otro, sé que deben dar iguales pero no puedo encontrar el error”
- Entonces el descuento quedará restringido a simplemente el descuento por el error que hayan cometido y no por no verificar  $v(f) = cap(S)$ .