PARTE 1

1)

(a) Determinar el área de la región comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $2x - y = 0$.

Despejemos y

$y^2 = 4x \Rightarrow y = \sqrt{4x} \Rightarrow y = 2.\sqrt{x} = f(x)$

$2x - y = 0 \Rightarrow 2x = y = g(x)$

Veamos donde se intersecan

$2.\sqrt{x} = 2.x \Rightarrow \sqrt{x} = x$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Veamos cual es mayor

Evaluemos ambas funciones en $x = 1/2$

$f(1/2) = 2 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2^{1-1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

$g(1/2) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1$

$\therefore f(x) \geq g(x) \; \forall x \in [0,1]$

Calculemos el area

teniendo en cuenta lo visto previamente, tenemos que el area entre $f(x)$ y $g(x)$ es igual a $\int_0^1 f(x) - g(x)\, dx$

Calculemos la integral

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\, dx = \int_0^1 2.\sqrt{x} - 2x\,dx = \int_0^1 2(\sqrt{x} - x)\,dx = 2.\left(\int_0^1 x^{1/2} dx - \int_0^1 x\, dx\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = 2\left(\frac{1^{3/2}}{3/2} - \frac{0^{3/2}}{3/2} - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3/2} - 0 - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right) = 2.\left(\frac{1}{3}.2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2.\frac{2}{3} - \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

Conclusion

El area entre $f(x)$ y $g(x)$ es de $1/3\, u^2$

1)

(b) Calcular $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Factoricemos

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A.(x^2+1)+Bx.(4x+1)+C.(4x+1)}{(4x+1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow 6x^2-3x+1 = A.(x^2+1)+Bx.(4x+1)+C.(4x+1)$$

Despejemos las variables eligiendo valores para x

$$x=-\tfrac{1}{4} \Rightarrow 6\left(\frac{-1}{4}\right)^2 - 3.\frac{-1}{4}+1 = A.\left(\left(\frac{-1}{4}\right)^2+1\right) + B.\frac{-1}{4}.\left(\cancel{4}.\frac{-1}{\cancel{4}}+1\right) + C.\left(\cancel{4}.\frac{-1}{\cancel{4}}+1\right)$$

$$\Rightarrow \overset{3}{\cancel{6}}.\frac{1}{\underset{8}{\cancel{16}}} - 3.\frac{-1}{4}+1 = A.\left(\frac{1}{16}+1\right) + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}+\frac{3}{4}+1 = A.\frac{1+16}{16} \Rightarrow \frac{3+6}{8}+1 = A.\frac{17}{16} \Rightarrow \frac{9+8}{8} = A.\frac{17}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{17}{\cancel{8}}.\overset{2}{\cancel{16}} = A.17 \Rightarrow \frac{\cancel{17}.2}{\cancel{17}} = A \Rightarrow \boxed{2 = A}$$

$$x=0 \Rightarrow 6.0-3.0+1 = 2.(0+1) + B.0.(4.0+1) + C.(4.0+1)$$

$$\Rightarrow 1 = 2.1+0+C.1 \Rightarrow 1-2 = C \Rightarrow \boxed{-1=C}$$

$$x=1 \Rightarrow 6.1-3.1+1 = 2.(1+1) + B.1.(4.1+1) + -1.(4.1+1)$$

$$\Rightarrow 3+1 = 4+5.B-5 \Rightarrow \cancel{4}-\cancel{4}+5 = 5B \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = B \Rightarrow \boxed{1=B}$$

$$\therefore \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{4x+1} + \frac{1.x-1}{x^2+1}$$

Integremos la primer fraccion

$u = 4x+1$

$du = 4\,dx \Rightarrow \frac{du}{4} = dx$

$$\int \frac{2}{4x+1}\,dx = 2.\int \frac{1}{4x+1}\,dx = 2.\int \frac{1}{u}\frac{du}{4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln(u)\right) + C = \frac{\ln(4x+1)}{2} + C$$

Integremos la segunda fraccion

Factoricemos la fraccion

$$\frac{x-1}{x^2+1} = k_1.\frac{2x+0}{x^2+1} + k_2.\frac{1}{x^2+1}$$

$$k_1 = B/2 = 1/2,\ k_2 = C - k_1\cdot\alpha = -1 - 1/2\cdot 0 = -1$$

$$\therefore \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{x^2+1} + -1.\frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

Ahora integremos

$U = x^2+1$

$du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} - \arctan(x) + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(u) - \arctan(x) + C = \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \arctan(x) + C$$

Ahora resolvamos la primer integral

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \int \frac{2}{4x+1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{\ln(4x+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \arctan(x) + C$$

4)

(a) Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{n3^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln(n)}{n.3^n}}_{c_n} \cdot (x+2)^n$$

Usemos crit. del cociente

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1).3^{n+1}}}{\frac{\ln(n)}{n.3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n.3^{n+1}+3^{n+1}} \cdot \frac{n.3^n}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\cancel{n.3^n}.3+3^n.3} \cdot \frac{\cancel{n.3^n}}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(1+3^n)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(1+3^n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 3(1+3^n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3(1+\lim_{n\to\infty} 3^n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{1}{3(1+\infty)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1}{3.\infty} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{1+0} = 0 \cdot 1 = 0$$

Como $l = 0 \Rightarrow R = \infty$

Conclusion

Como el radio de convergencia es ∞, el intervalo de convergencia es $I = (-\infty, \infty)$

4) (b) Demostrar que la serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n}$ es condicionalmente convergente.

Planteo

Para demostrar que la serie es condicionalmente convergente debemos demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge

Demostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$

Usemos crit. para series alternantes

Veamos si el limite es 0

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} n}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Veamos si b_n es creciente y positivo

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0 \Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow n \leq n+1 > 0$$

$\therefore$ se cumple $\forall n > 0$

Conclusion criterio

Por ende, por criterio para series alternantes como el limite de b_n es 0 y la sucesion es decreciente y positivo, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot b_n$ tambien converge

Demostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \cdot b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}$$

$\therefore$ por criterio de serie p, como $p = 1/2$, sabemos que la serie diverge

Conclusion final

Como demostramos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, por definicion de convergencia condicional, queda demostrado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente

5)

Ejercicio 5 *(20 pts.)*

(a) Dar las definiciones de serie de potencias, radio de convergencia e intervalo de convergencia.

(b) Enunciar el criterio del cociente para series de potencias.

a)

Serie de potencias ✓

Sea $a \in \mathbb{R}$ y C_n una sucesion de números reales, una serie de potencias es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ falto centrado en a

Radio de convergencia ✓

El radio de convergencia es un número $R \in \mathbb{R}$ para el cual se cumple que la serie converge $\forall x$ tal que $|x-a| \leq R$ y diverge para ...

Intervalo de convergencia X

Sea $\mathbb{I}$ el intervalo de convergencia de una serie de potencias y R su radio de convergencia, tenemos los siguientes casos:

$R = 0 \Rightarrow \mathbb{I} = a$, siendo a el centro de la serie

$R = \infty \Rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{R}$

$0 < R < \infty \Rightarrow \mathbb{I} = (a-R, a+R)$ → teniendo en cuenta que los extremos del intervalo pueden ser abiertos o cerrados, o abierto en un extremo y cerrado en otro.

b) Criterio del cociente ✓

Sea $\sum_{n=n_0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencias, con $C_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$, R el radio de convergencia y $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$, tenemos lo siguiente:

$0 < L < \infty \Rightarrow R = 1/L$

$L = \infty \Rightarrow R = 0$

$L = 0 \Rightarrow R = \infty$

PARTE 2

Ejercicio 2 *(20 pts.)*

(a) Calcular la ecuación del plano tangente y el vector normal al gráfico de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ en el punto $(1, 2, \frac{1}{5})$.

a ojimetro en geogebra

Obtener ecuacion del plano tangente

Planteo

El plano tangente a $f(x,y)$ en el punto es el plano que pasa por $(1,2,1/5)$ y es generado por los vectores $(1,0,f_x(1,2))$ y $(0,1,f_y(1,2))$

Calculemos derivadas parciales

$$f_x(x,y) = \frac{(x)'\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x.2x}{(x^2+y^2).(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2).(x^2+y^2)} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x)'\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{0 - x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Evaluemos las derivadas

$$f_x(1,2) = \frac{-1^2+2^2}{(1^2+2^2)^2} = \frac{-1+4}{(1+4)^2} = \frac{3}{25}$$

$$f_y(1,2) = \frac{-2.1.2}{(1^2+2^2)^2} = \frac{-4}{5^2} = \frac{-4}{25}$$

Ecuacion del plano tangente

$$P = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = (1,2,1/5) + t(1,0,f_x(1,2)) + s(0,1,f_y(1,2)),\ \text{con } s,t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{X \in \mathbb{R}^3 / X = (1,2,1/5) + t(1,0,3/25) + s(0,1,-4/25),\ \text{con } s,t \in \mathbb{R}\}$$

Calcular vector normal

Planteo

Para encontrar el vector normal al plano debemos encontrar un vector que sea paralelo a ambos vectores que generan el plano, para ello, podemos calcular el prod. vectorial de los vectores que generan al plano

Calculemos el producto vectorial

$$\left(1,0,\tfrac{3}{25}\right) \times \left(0,1,-\tfrac{4}{25}\right) = \left(0-\tfrac{3}{25},-\left(\tfrac{4}{25}\right),1\right)$$

$$= \left(-\tfrac{3}{25},+\tfrac{4}{25},1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \tfrac{3}{25} \\ 0, & 1, & -\tfrac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Conclusion

El vector normal al grafico de $f(x)$ en el punto $\left(1,2,\tfrac{1}{5}\right)$ es $\left(-\tfrac{3}{25},+\tfrac{4}{25},1\right)$

2)

(b) Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$, en el punto $(-\frac{3}{4}, 0)$ en la dirección del segmento que va de $P = (-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q = (0,1)$.

Calculemos gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} 3x^2 - 2y^2, \frac{\partial f}{\partial y} 3x^2 - 2y^2\right) = (3.2x, -2.2y)$$

$$= (6x, -4y)$$

Calculemos vector direccion

$$u = P - Q = (-3/4, 0) - (0,1) = (-3/4, -1)$$

Calculemos norma

$$\|u\| = \|(-3/4, -1)\| = \sqrt{(-3/4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9/16 + 1} = \sqrt{\frac{9+16}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

Convirtamos el vector direccion en unitario

$$u = \frac{(-3/4, -1)}{\|(-3/4, -1)\|} = \frac{(-3/4, -1)}{\frac{5}{4}} = \left(\frac{-3}{4}, -1\right) \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{-3.\cancel{4}}{\cancel{4}.5}, \frac{-4}{5}\right) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

Calculemos derivada direccional

$$D_u f(-3/4, 0) = \langle \nabla f(-3/4, 0), u \rangle = \left\langle \left(\overset{3}{\cancel{6}}.\frac{-3}{\cancel{4}_2}, -4.0\right), \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{-9}{2}, 0\right), \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \right\rangle = \frac{-9}{2} \cdot \frac{-3}{5} + 0$$

$$= \frac{+27}{10}$$

Conclusion

Por ende, la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(-3/4, 0)$ es $\frac{27}{10}$

Ejercicio 3 *(20 pts.)*

(a) Determinar los puntos extremos (máximos y/o mínimos), si los hubiere, de la función f definida por $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

Calculemos el gradiente

$$\nabla f(x,y) = (3.3x^2 - 9,\ 2y + 4) = (9x^2 - 9,\ 2y + 4)$$

Veamos en que punto se hacen 0

$$9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{9} = x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = y = -2$$

Puntos criticos

En base a lo visto previamente los puntos criticos son $(-1,-2)$ y $(1,-2)$

Clasifiquemos los puntos criticos

Usemos test de la derivada segunda

Calculemos derivadas

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} 9x^2 - 9 = 9.2x = 18x$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} 2y + 4 = 2.1 = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} 9x^2 - 9 = 0 - 0 = 0$$

Definamos $D(x_0, y_0)$

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

$$= 18x \cdot 2 - 0^2$$

$$= 18x \cdot 2$$

Evaluemos los puntos criticos

$$D(-1,-2) = 18.-1 \cdot 2 = -36$$

$$D(1,-2) = 18.1 \cdot 2 = 36$$

↓

3) a)

Apliquemos test de la derivada segunda

$D(-1,-2) < 0 \Rightarrow$ hay un punto silla en $(-1,-2)$

$D(1,-2) > 0$ y $f_{xx}(1,-2) > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo local en $(1,-2)$

Conclusion

La funcion posee un mínimo local en el punto $(1,-2)$ y un punto silla en $(-1,-2)$

3)

(b) Usar la Regla de la cadena para calcular $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ y $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ para $\omega = 2xy$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$.

X

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$= 2y \cdot 2s + 2x \cdot \frac{1}{t} = 2 \cdot \left(\frac{s}{t}\right) \cdot 2s + \frac{2 \cdot (s^2+t^2)}{t}$$

$$= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2+2t^2}{t} = \frac{4s^2 + 2s^2+2t^2}{t} = \frac{6s^2+2t^2}{t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{s}{t}\right) \cdot 2t + 2 \cdot (s^2+t^2) \cdot s = \frac{4s\cancel{t}}{\cancel{t}} + 2s^2 \cdot s + 2t^2 \cdot s$$

$$= 4s + 2s^3 + 2st^2$$

Mal según symbo