Práctico 3

Álgebra de matrices

Objetivos.

- Familiarizarse con matrices y sus operaciones de suma y multiplicación, Ejs (1) – (3).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices, Ejs (4) – (6).
- Aprender las nociones de matriz traspuesta y traza de una matriz, Ejs (7) – (8).
- Aprender la noción de matriz inversa y cómo cálcularla, Ejs (9) – (11).
- Relacionar matrices con la resolución de sistemas de ecuaciones, Ejs (13) – (15).

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo. Como ayuda general, cada ejemplo o contraejemplo que deba dar, piense en matrices 2×2. En este práctico, $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

(1) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC. Calcular ABC.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

(a) $-2A + 3B$

(b) C^2 y C^3. ¿Se anima a conjeturar una fórmula para C^n, $n \in \mathbb{N}$ y probarla por inducción?

(c) AB

(d) BA

¿Qué conclusión puede sacar de (c) y (d)? Para no olvidarnos vamos a anotarlo acá:

(3) (a) ⓐ Dar ejemplos de matrices $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ para mostrar que las siguientes afirmaciones son falsas:

(i) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.	(iv) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
(ii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$.	(v) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \mathrm{I}_2$.
(iii) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$.	(vi) $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ para que

(i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (ii) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

(4) Probar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ entonces $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

(5) Sean

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

es decir, $C_1, ..., C_n$ denotan las columnas de A. Probar que[1] $Av = \sum_{j=1}^n v_j C_j$.

(6) Una matriz A se dice *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Probar que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

(7) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la *traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$ definida por

$$[A^t]_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m.$$

(a) Dar las matrices traspuestas del ejercicio 1 y de la matriz A del ejercicio 2.
(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces
  (i) $(A + cB)^t = A^t + cB^t$.
  (ii) $(A^t)^t = A$.
  (iii) $(BC)^t = C^tB^t$.
(c) Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice *simétrica* si $A^t = A$ y se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.
  (i) Dar un ejemplo de una matriz no diagonal que sea simétrica y un ejemplo de una matriz que sea antisimétrica.
  (ii) Mostrar que si A es antisimétrica, entonces $a_{ii} = 0$ para todo i.

(8) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}$.
(a) Calcular la traza de las matrices del Ejercicio (2).
(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces
  (i) $\mathrm{Tr}(A + cB) = \mathrm{Tr}\,A + c\,\mathrm{Tr}\,B$
  (ii) $\mathrm{Tr}(A^t) = \mathrm{Tr}(A)$.
  (iii) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(9) (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A es una matriz $n \times n$ entonces

$$(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^k) = \mathrm{I}_n - A^{k+1}.$$

(b) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

[1] Esto quiere decir que multiplicar una matriz por un vector columna es hacer la respectiva combinación lineal de las columnas.

(10) Para cada una de las siguientes matrices, decidir si son invertibles. Para aquellas que sean invertibles, hallar la matriz inversa y matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(11) ⓐ Probar las siguientes afirmaciones:
- (a) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- (b) Sea A una matriz triangular superior tal que todos los elementos de su diagonal son no nulos[2]. Probar que A es invertible y que A^{-1} es triangular superior.

(12) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.
- (a) Si A y B son matrices invertibles, entonces $A + B$ es una matriz invertible.
- (b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\mathrm{Tr}\, A^2 = 0$ entonces $A = 0$.
- (c) Existen matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

(13)
- (a) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también[3] es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.
- (b) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema para todo $t \in \mathbb{K}$.
- (c) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.
- (d) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

(14) Sea A una matriz $n \times n$. Demostrar que:
- (a) Si A es invertible y $AB = 0$ para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = 0$.
- (b) ⓐ Si A no es invertible, entonces existe una matriz $n \times n$, B, tal que $AB = 0$, pero $B \neq 0$.

(15) ⓐ Sean A y B matrices $m \times n$ y $n \times r$ respectivamente. Probar que
- (a) Si $r > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas. ¿Qué podemos decir respecto de la invertibilidad de AB en este caso si $m = r$?
- (b) Si $m > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.
- (c) Dar un ejemplo de matrices A y B (no cuadradas) tales que AB no sea invertible pero BA lo sea[4].

[2] Veremos en la sección que sigue que esta condición además de ser suficiente para que A sea invertible, es necesaria.

[3] Esto dice que el espacio de soluciones de un sistema homogéneo es cerrado para la suma y la multiplicación por escalar

[4] Si las matrices son cuadradas esto no puede suceder.

Ejercicios Adicionales. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(16) Una matriz D se dice *diagonal* si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Sean A, B matrices diagonales. Probar que
  (a) AB es diagonal.
  (b) $AB = BA$.

(17) Decimos que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.
  (a) Probar que la traspuesta de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular superior (inferior).
  (b) Deducir de (a) y de los hechos probados para matrices triangulares superiores que:
    (i) el producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
    (ii) una matriz triangular inferior con todos sus elementos de la diagonal no nulos es invertible y su inversa es triangular inferior.

(18) Decidir si la siguiente matriz es invertible. En caso afirmativo hallar la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(19) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la *traspuesta conjugada* de A es la matriz $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definida por

$$[A^*]_{ij} = \overline{A_{ji}}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

donde $\overline{A_{ji}}$ significa el conjugado del número complejo A_{ji}.
  (a) Dar A^* para las matrices $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$.
  (b) Probar que si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces
    (i) $(A + cB)^* = A^* + \overline{c}B^*$.
    (ii) $(A^*)^* = A$.
    (iii) $(BC)^* = C^*B^*$.
    (iv) $\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}$.
  (c) Probar que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, entonces A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
  (d) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice *hermitiana* si $A^* = A$ y *antihermitiana* si $A^* = -A$.
    (i) Dar un ejemplo de una matriz (anti)simétrica no (anti)hermitiana y un ejemplo de una matriz (anti)hermitiana no (anti)simétrica.
    (ii) Probar que si A es hermitiana entonces $a_{jj} \in \mathbb{R}$ para todo j y que si A es antihermitiana entonces a_{jj} es imaginario puro para todo j.

(20) (a) Decimos que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *ortogonal* si $A^tA = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son ortogonales, entonces AB es ortogonal, A es invertible, y A^{-1} es ortogonal.
  (b) Decimos que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *unitaria* si $A^*A = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son unitarias, entonces AB es unitaria, A es invertible, y A^{-1} es unitaria.
  (c) ⓐ Dar un ejemplo de una matriz ortogonal que no sea unitaria y un ejemplo de una unitaria que no sea ortogonal.

Comentario (para el futuro): Un subconjunto G del conjunto de matrices invertibles que cumple las propiedades i) $A, B \in G \Rightarrow G$ ii) $\mathrm{I} \in G$ y iii) $A^{-1} \in G$ es un ejemplo de lo que en matemática se conoce como *grupo*. Los grupos son estructuras algebraicas que aparecen por todos lados. Realizando este práctico, usted probó que los siguientes subconjuntos son grupos: todas las matrices invertibles (denotado $\mathsf{GL}(n, \mathbb{K})$), las matrices triangulares superiores (e inferiores), las matrices ortogonales (denotado $\mathsf{O}(n)$) y las matrices unitarias (denotado $\mathsf{U}(n)$).

(21) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.

(a) Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra. Entonces A ó B es diagonal.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^tA = 0$. Entonces $A = 0$.

(c) Dadas A, B, C matrices se tiene que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$.

(d) Sean A nilpotente y B invertible. Entonces $B - A$ es una matriz invertible.

(22) Sean[5] $E^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $E^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ conmuta con E^{11} y E^{12} entonces debe ser $A = c\,\mathrm{I}_2$, para algún $c \in \mathbb{K}$.

(b) Probar que $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ conmuta con toda matriz 2×2 si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_2$ con $c \in \mathbb{K}$.

(23) (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A y B son matrices $n \times n$ tales que $AB = BA$ entonces

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j\, B^{k-j}.$$

(b) Probar que si A y B son matrices nilpotentes tales que que $AB = BA$, entonces $A + B$ es nilpotente. ¿Es cierta la afirmación si quitamos la hipótesis $AB = BA$?

(24) a Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que la matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definida por

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1 \end{cases}$$

satisface $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$ (una matriz con estas propiedades se llama *nilpotente de grado* n).

Ayudas.

(3) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(11a) Recurrir a la definición de que A sea invertible.

(b) Mostrar que si $a_{ii} \neq 0$ para todo i entonces una MERF de A es I_n. Para ver que A^{-1} es triangular superior, usar Corolario 2.6.3 y pensar ¿qué tipo de matrices son las matrices elementales que corresponden a las operaciones por fila realizadas a una triangular superior?

(14b) ¿Qué podemos decir del sistema $AX = 0$?

(15a) Deducir del Ejercicio 11 Pr 2 (o Corolario 2.4.6) que $BX = 0$ tiene soluciones no nulas. ¿Cómo concluimos el ejercicio?

(b) Deducir del Ejercicio 11 Pr 2 (o de la dem. de un Corolario visto en Clase sist. de ec. lineales 3) que si R_A es una MERF de A entonces R_A debe tener filas nulas. Ver que existe Z tal que $R_ABX = Z$ no tiene solución. ¿Cómo concluimos el ejercicio?

(20c) Para dar un ejemplo de matriz ortogonal que no sea unitaria, pruebe poniendo $\begin{bmatrix} a & -i \\ i & a \end{bmatrix}$ y encuentre un valor de a que sirva.

24) Pruebe por inducción en k que $A^k = \begin{cases} 1 & i = j + k \\ 0 & i \neq j + k \end{cases}$.

[5] Se pueden usar estas matrices E^{ij} en general para probar que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ conmuta con toda matriz de $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_n$, para algún $c \in \mathbb{K}$.