Lautaro Bachmann

Ejercicio 2: (20 pts)

a) Calcular los siguientes límites sin usar la regla de L'Hopital:

(I) $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan(2x)}{\operatorname{sen}^2(3x)}$ (II) $\lim_{x \to \infty} \frac{1-2x^3}{5x^3 - x^2 + 3}$

b) Sea $g(x)$ la siguiente función definida a tramos:

$$g(x) \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x-3 & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ x \cdot \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar en que puntos g es discontinua y decir de que tipo es la discontinuidad.

c) (I) Enunciar con precisión el teorema del valor intermedio

(II) Demostrar que hay una solución de la siguiente ecuación en el intervalo dado

$4 - x^4 = 4^x$ en $(0, 1)$

Desarrollo:

2) i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x.\tan(2x)}{sen^2(3x)} \overset{(1)}{=} \dfrac{x.\dfrac{sen(2x)}{\cos(2x)}}{sen^2(3x)}$

$\tan(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ (1)

$= \lim_{x\to 0} x.sen(2x) . \dfrac{sen^2(3x)}{\cos(2x)}$

$= 0 . sen(2.0) . \dfrac{sen^2(3.0)}{\cos(2.0)} = 0.0 . \dfrac{sen^2(0)}{\cos(0)} = 0.\dfrac{0^2}{1} = 0$

Por ende, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x.\tan(2x)}{sen^2(3x)} = 0$

ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-2x^3}{5x^3-x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}-2\right)}{\cancel{x^3}\left(5-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}$

$\infty^n = \infty$ (1)

$\dfrac{a}{\infty} = 0,\ a\in\mathbb{R}$ (2)

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^3}-2}{5-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}} = \dfrac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}-2}{\lim_{x\to\infty} 5-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}} = \dfrac{\frac{1}{\infty^3}-2}{5-\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty^3}}$

$\overset{(1)}{=} \dfrac{\frac{1}{\infty}-2}{5-\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}} \overset{(2)}{=} \dfrac{0-2}{5-0+0} = \dfrac{-2}{5}$

Por ende, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-2x^3}{5x^3-x^2+3} = \dfrac{-2}{5}$

Lautaro Bachmann

b) Primero, procedamos a calcular los límites laterales para $x=-3$

$$\lim_{x\to -3} g(x) = L \iff \lim_{x\to -3^+} g(x) = L \wedge \lim_{x\to 3^-} g(x) = L$$

$$\lim_{x\to -3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} x-3 = -3-3 = -6$$

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(-3)^2-9}{-3+3} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación!}$$

~~$\therefore \nexists \lim_{x\to -3^+}$~~ Anulado

~~Por ende, como uno de los límites laterales de la función no existe, sabemos que g(x) posee una dis~~

Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x^2-9)'}{(x+3)'} = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x}{1} = 2.(-3) = -6$$

$$\therefore \lim_{x\to -3^-} = \lim_{x\to -3^+} = -6 \Rightarrow \lim_{x\to -3} = -6$$

Ahora evaluemos la función en el punto y veamos si coincide con el límite:

$$g(-3) = \lim_{x\to -3} g(x) \Rightarrow 0 = -6 \Rightarrow g(-3) \neq \lim_{x\to -3} g(x)$$

Como la función evaluada en el punto no coincide con el límite la función posee una discontinuidad evitable en $x=-3$, la cual se solucionaría redefiniendo $g(-3) = -6$.

Ahora veamos los limites laterales para $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x-3 = 0-3 = -3$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$ | L'Hopital (1)

$$\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1.x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} = \cancel{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} . \frac{-x^2}{1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} . \frac{-x.x}{1} = \lim_{x\to 0^+} -x = -0 = 0$$

Como los limites laterales son distintos, no existe el limite y la funcion posee una discontinuidad de salto en $x=0$.

c) (I) Sea f una funcion continua en $[a,b]$, el teorema del valor intermedio nos dice que si $f(a)<N<f(b)$ o $f(b)<N<f(a)$ entonces $\exists c: a<c<b / f(c)=N$

II) Primero movemos todos los terminos para el lado izquierdo:

$$4-x^4 = 4^x \Rightarrow -4^x - x^4 + 4 = 0$$ | $f(x) = -4^x - x^4 + 4$

Como la funcion está compuesta por una funcion exponencial, una polinomica y una constante, sabemos que es continua en $\mathbb{R}$ y en consecuencia es continua en $[0,1]$, por lo cual procederemos a aplicar el teorema del valor intermedio, el cual fue enunciado previamente.

Antes que nada veamos si se cumple la segunda condicion para aplicar el teorema:

↓

Elijemos $N=0$:

$f(0) < 0 < f(1) \Rightarrow -4^0 - 0^4 + 4 < 0 < -4^1 - 1^4 + 4$

$\Rightarrow -1 + 4 < 0 < -1 \Rightarrow +3 < 0 < -1$

No se cumple, probemos de la otra forma:

$f(1) < 0 < f(0) \Rightarrow -1 < 0 < 3$

Por ende, como se cumplen ambas hipotesis del teorema sabemos que $\exists c : 0 < c < 1 / f(c) = 0$

Por ende, queda demostrado que ~~la funcion~~ $+4 - x^4 = 4^x$ tiene solucion en el intervalo $(0,1)$