Ejercicios 4.4

14. Para cada una de las siguientes funciones determinar

- Las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.
- La ecuación de la recta que es eje de simetría de la parábola.
- Las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$
b) $g(x) = -2x^2 + x + 3$
c) $h(x) = 2x^2 + 2 + 4x$
d) $F(x) = -(x-1)(x+2)$
e) $G(x) = -x^2 - 1$
f) $H(x) = (x-2)^2 + 3$

a) Intersección eje y:

$f(0) = c \Rightarrow f(0) = +4 \Rightarrow (0,+4)$

Intersección eje x:

$a = 1,\ b = -5,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 25 - 4.1.4$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$= \dfrac{5 \pm 3}{2}$

$\dfrac{5+3}{2} = \dfrac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1}} = 4$

$\dfrac{5-3}{2} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = 1$

$x_1 = 4,\quad x_2 = 1$

$(4,0),\ (1,0)$

Coordenada al vertice:

$X_v = \dfrac{-b}{2.a} \rightarrow \dfrac{5}{2}$

$Y_v = \dfrac{-b^2}{4a} + c \rightarrow Y_v = \dfrac{-25}{4} + 4 \rightarrow Y_v = \dfrac{-25+16}{4} = \dfrac{-9}{4}$

$\dfrac{-25+16}{4} = \dfrac{-9}{4}$

c) $h(x) = 2x^2 + 2 + 4x$

$h(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | $a = 2$, $b = 4$, $c = 2$

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 4.2.2$

$x_0 = \frac{-4}{2.2}$

$\Delta = 16 - 16$

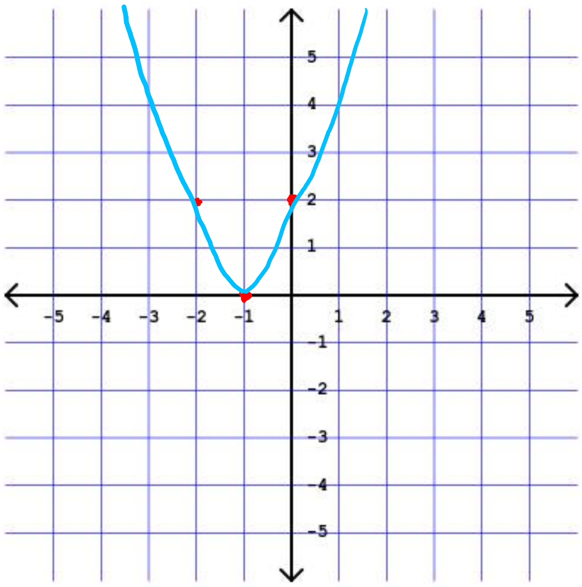
$\Delta = 0 \therefore$ Solo una raiz.

$x_0 = -1$

Toca al eje x pero no lo atraviesa.

$x_0 = x_v \longrightarrow (-1, 0)$

$(0, f(0)) = (0, 2)$



$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$-1 = \frac{0 + x_2}{2}$

$-2 = x_2$

d) $F(x) = -(x-1)(x+2)$

$F(x) = (-x+1)(x+2)$

$F(x) \quad -x^2 - 2x + 1x + 2$

$F(x) \quad -x^2 - x + 2$

$a = -1,\ b = -1,\ c = +2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \cdot -1 \cdot 2$

$= 1 + 8$

$= 9$

$(0, F(0)) = (0, 2)$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot -1}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$$\frac{1+3}{-2} = \frac{4}{\cancel{-2}} = -2$$

$$\frac{1-3}{-2} = \frac{\cancel{-2}}{\cancel{-2}} = 1$$

Intersección eje x = $(-2, 0), (1, 0)$

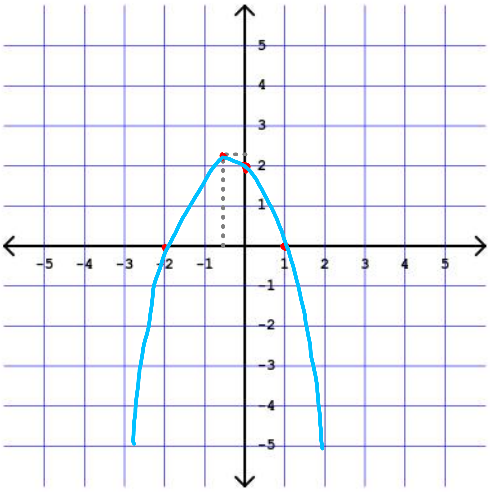
Vertice

$$x_v = \frac{-2+1}{2} \longrightarrow x_v = \frac{-1}{2}$$

$$y_v = \frac{-b^2}{4a} + c \longrightarrow \frac{-1}{-4} + 2 \longrightarrow \frac{1+8}{4} = \frac{9}{4}$$

Vertice

$$\left(\frac{-1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

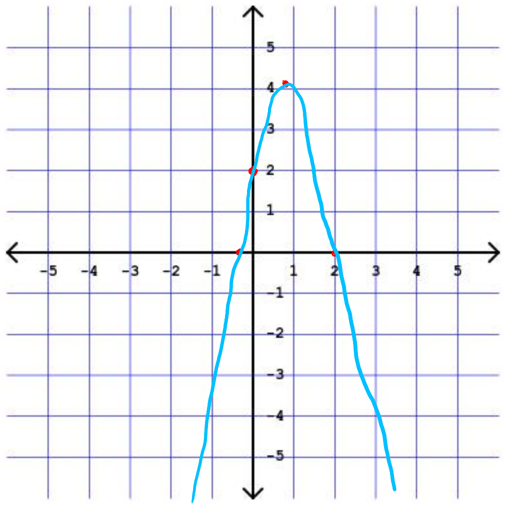


15. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + bx + 2$ corta al eje x en $-\frac{1}{3}$ y 2.

a) Dar las coordenadas del vértice del gráfico de f.

b) Calcular el valor de b.

c) Dibujar el gráfico de f.



$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{-\frac{1}{3} + 2}{2}$$

$$\frac{+5}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x_v = \frac{5}{6}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{-b}{2 \cdot -3}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{-b}{-6}$$

$$\frac{5 \cdot \cancel{-6}^{-1}}{1\cancel{6}} = -b$$

$$-5 = -b$$

$$5 = b$$

$$y_v = \frac{-b^2}{4a} + c$$

$$= \frac{-25}{-12} + 2$$

$$= \frac{+25 + 24}{12}$$

$$y_v = \frac{49}{12}$$

$$(0, f(0)) = (0, 2)$$

17. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina una parábola que pasa por los puntos $(0,2)$ y $(4,2)$, y su vértice tiene coordenadas $(x_v, 0)$.

a) Calcular la coordenada x_v del vértice de la parábola.
b) Calcular los coeficientes a, b y c.
c) Indicar si f tiene dos raíces distintas, una o ninguna.
d) Con la información obtenida, esbozar el gráfico de la parábola.

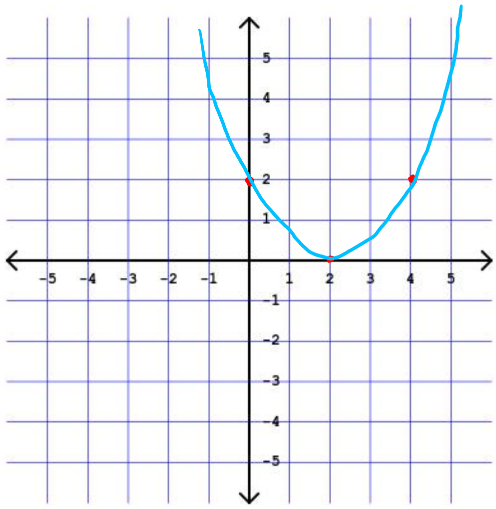
b)

Como $(x, f(x)) = (0, f(0)) = (0, 2)$ $\therefore$

$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = a.0 + b.0 + c$

$2 = c$

d)



Como $(x, f(x)) = (4, f(4)) = (4, 2)$ $\therefore$

$f(4) = 2 \Rightarrow 2 = a.4^2 + b.4 + 2$

$0 = a.16 + b.4$

$-4b = a.16$

$b = \dfrac{a.\cancel{16}^{\,4}}{\cancel{-4}} = b = -4a$

$b = -4a$

$b = -4.\dfrac{1}{2}$

$b = \dfrac{-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{1}}$

$b = -2$

$y_v = 0 \Rightarrow y_v = \dfrac{-b^2}{4a} + c$

$0 = \dfrac{-(-4a)^2}{4.a} + 2$

$-2 = -\dfrac{\cancel{16}^{\,4} \cancel{a^2}^{\,a}}{\cancel{4}_{1}.\cancel{a}} = \dfrac{-\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{-4}_{2}} = a \simeq a = \dfrac{1}{2}$

a)

$X_v = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

$X_v = \dfrac{0 - 4}{2}$

$X_v = -2$

Como sabemos que el vertice tiene coordenadas $(x_v, 0)$, sabemos que $y_v = 0$, $\therefore$ gracias a calcular el eje de simetria con la anterior formula, es posible afirmar que el vertice se encuentra ubicado en las coordenadas $(-2, 0)$.

Además, como el vertice minimo de la parábola interseca al eje x, podemos decir que el discriminante de la ecuación de f da como resultado 0.

$a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$\Delta = 4 - \cancel{4}^{2} . \frac{1}{\cancel{2}_{1}} . 2$

$\Delta = 4 - 2.2 \longrightarrow \Delta = 4 - 4 = 0$

c) f tiene dos raices reales e iguales.

18. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2x$ tiene vértice en $(1, 1)$.

a) Dar los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.

b) Calcular el valor de a.

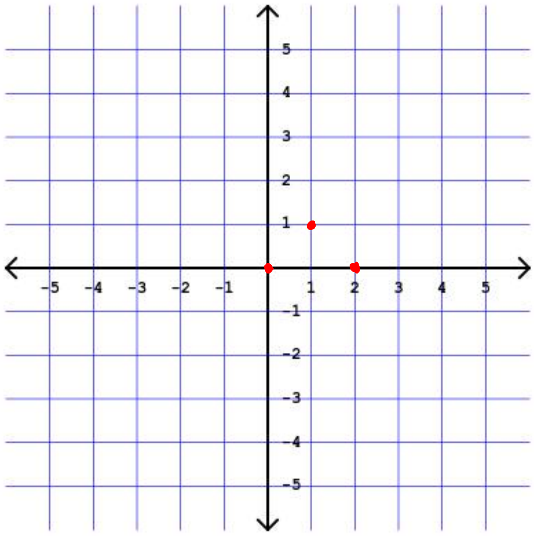
c) Trazar el gráfico de f.

Intersección eje y :

$(0, f(0)) \longrightarrow (0,0)$

$f(0) = a.0 + 2.0$

$f(0) = 0$



Debido a que el punto la intersección de la función con el eje y, posee un valor de y menor al vertice, podemos asumir que a es negativa, ya que si a < 0 las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

$x_v = \frac{-b}{2a}$

$1 = \frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}a}$

$1 = \frac{-1}{a}$

$a = -1$

$x_v = \frac{x_1 - x_2}{2}$

$1 = \frac{x_1 - 0}{2}$

$1.2 = x_2$

$2 = x_2$ $\therefore$ $(2,0)$ es un punto de la parabola.

Como ya conocemos el valor del eje de simetria y el valor de la intersección de la parabola con el eje y, podemos averiguar el valor de otro punto utilizando la anterior formula y usando el mismo valor de y que posee X1

19. Determinar el dominio de las siguientes funciones y realice su gráfico:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<3 \\ x+1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

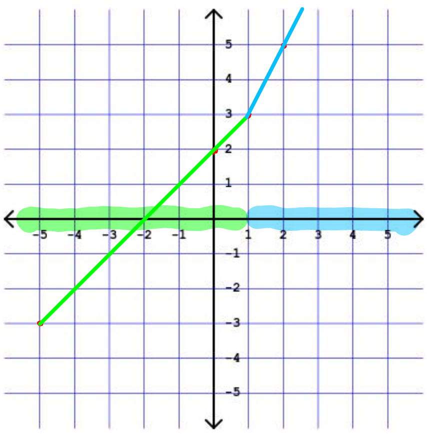
c) $h(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

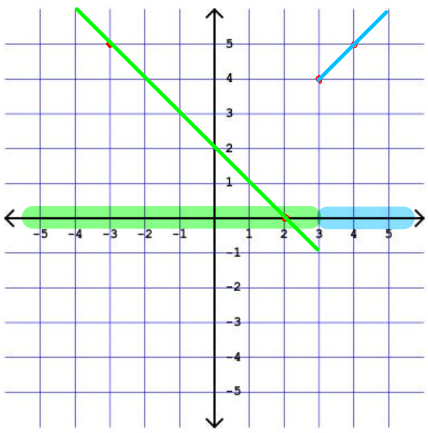
d) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

e) $h(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<-1 \\ x & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

g) $g(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<-2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } -2\leq x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$





20. Considerar la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 4 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } 4 \leq x \leq 7 \\ x^2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

a) evaluar $f(-10), f(4), f(\frac{9}{2}), f(\frac{31}{5}), f(7)$ y $f(10)$.

b) determinar el dominio de f y realizar su gráfico.

Menor a 4

$f(-10) = -4$

si $4 \leq x \leq 7$

$f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

$f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{6}_{1}} = 3$

$f\left(\frac{31}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{5} = \frac{62}{15}$

$f(7) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}$

$x > 7$

$f(10) = 10^2 = 100$