

Leandro Brechmann

Ejercicio 1. (20 puntos)

a) Resolver y graficar el conjunto de soluciones de la desigualdad

$$\frac{|x-6|}{x+2} < x-1$$

b) Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , responder las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

i) ¿Es  $f$  inyectiva?

ii) Calcular la imagen de  $f$ . ¿Es suryectiva?

iii) ¿Es  $f$  biyectiva?

iv) ¿Es necesario restringir el dominio de  $f$  para que resulte inyectiva? En caso afirmativo mostrar como hacerlo.

v) Indicar el dominio y el conjunto de llegada para que  $f$  sea biyectiva y calcular su inversa.

Desarrollo:

a) Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto resolverlo utilizando casos.

$$\text{Caso 1: } x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

$$\frac{x-6}{x+2} < x-1 \Rightarrow \frac{x-6}{x+2} - x + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x-6 + (-x+1) \cdot (x+2)}{x+2} < 0$$

↓

$$\frac{x-6 + (-x+1) \cdot (x+2)}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{x-6 - x^2 - 2x + 1x + 2}{x+2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 - 2x - 4}{x+2} < 0 \quad \left| \begin{array}{l} -x^2 - 4 \quad | \quad x+2 \\ -x \end{array} \right.$$


---





b) i) Para ver si es inyectiva veamos si es par:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{2+(-x)^2} = \frac{1}{2+x^2} \Rightarrow \frac{1}{2+(-1)^2 \cdot x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

Por ende, la función no es inyectiva, ya que  $f(-x) = f(x)$  y para que una función sea inyectiva tiene que cumplir que si  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , y esta función no lo cumple.

ii) ~~Teniendo en cuenta que la función tiene una asíntota vertical en~~  
 Teniendo en cuenta que la función es par y que  $f(0) = \frac{1}{2+0^2} = \frac{1}{2} \rightarrow$  punto máximo de la función

~~$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2+0^2} = \frac{1}{2} = 0$$~~

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2+\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\therefore \text{ sabemos que } \text{im}(f) = \left[ \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Por ende, la función no es suryectiva ya que  $\text{im}(f) \neq \mathbb{R}$ , es decir, la imagen no es igual al conjunto de llegada de la función.

iii) Como la función no es ni inyectiva ni suryectiva entonces tampoco es biyectiva.



iv) Si, es necesario restringir el dominio de  $f$ .

Como la función es par podemos restringir su dominio a los reales positivos, es decir,  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

v) Pero que  $f$  sea biyectiva debe estar definida de la siguiente manera:  $f: (0, \infty) \rightarrow (\frac{1}{2}, \infty)$

Ahora calculemos la inversa.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{1}{2 + (f^{-1}(x))^2} = x \Rightarrow 1 = x \cdot (2 + [f^{-1}(x)]^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2 + [f^{-1}(x)]^2 \Rightarrow \frac{1}{x} - 2 = [f^{-1}(x)]^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x} - 2} = \pm f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$$

Por ende, ~~como~~ la inversa de  $f$  es  $f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$



Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes, cuyo texto se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.

*(Signature)*

REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR  
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS  
MINISTERIO DEL INTERIOR, DEFENSA PÚBLICA Y VIVIENDA

Apellido / Surname  
BACHMANN

Nombre / Name  
LAUTARO RON

Sexo / Sex  
M

Nacionalidad / Nationality  
ARGENTINA

Exemplar  
A

Fecha de nacimiento / Date of birth  
01 AGO 2002

Fecha de emisión / Date of issue  
09 AGO 2016

Fecha de vencimiento / Date of expiry  
09 AGO 2031

Documento / Document  
44.390.167

*Lautaro*  
FIRMA IDENTIFICADORA SUBSCRIPCIÓN

