(3) Espacios Vectoriales

$0 \neq 0' \rightarrow 0'$ es el nulo de vectores

- **Def (3.1.1):** Sea $\mathbb{K}$ cuerpo, un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ esp. vect.) consiste de un conjunto V no vacío, cuyos elementos son llamados vectores, con dos operaciones:
  - $+ : V \times V \to V$ (suma o adición de vectores)
  - $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (producto por escalar)

  Estas deben cumplir las siguientes operaciones

  - S_1 – $v + w = w + v$, $v, w \in V$ (conmutatividad de la suma)
  - S_2 – $(v + w) + u = v + (w + u)$
  - S_3 – $\exists!\, 0' : v + 0' = 0' + v = v$
  - S_4 – $\exists!\, -v : v + (-v) = (-v) + v = 0'$
  - P_1 – $1 \cdot v = v$
  - P_2 – $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$
  - D_1 – $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
  - D_2 – $(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$

- **Propo (3.1.2):**
  - $\lambda \cdot 0' = 0'$
  - $0 \cdot v = 0'$
  - $(-1) v = -v$

- **Def (3.2.1):** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, diremos que $W \subseteq V$ es un subespacio de V si $W \neq \emptyset$ y
  - $\forall\, w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$
  - $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, w \in W : \lambda w \in W$

  - **Obs:** (3.2.2) – $0' \in W$, ya que $0 \cdot w \in W$
    (3.2.3) – $-w \in W$, ya que $(-1) \cdot w \in W$

- **Teo (3.2.4):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp. vect. y $W \subseteq V$ un subespacio, entonces W con las operaciones suma y producto por escalar de V es un espacio vectorial

- **Def (3.2.5):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp. vect., $v_1, \dots, v_n \in V$. Dado $v \in V$, diremos que v es combinación lineal de los v_i si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

- **Teo (3.2.6):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp. vect., el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_n \in V$ es subespacio, es decir:

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

- **Def (3.2.7):** Al subespacio $W \subseteq V$ de las combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_n \in V$ se lo denomina subespacio generado por $v_1, \dots, v_n$ y se denota

$$W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ o } W = \text{gen}\{v_1, \dots, v_n\} \text{ o } W = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$$

- **Teo (3.2.8):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp. vect., entonces la intersección de subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial

- **Teo (3.2.9):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp vect, $v_1, \dots, v_n \in V$, entonces la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a $v_1, \dots, v_n$ es igual a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

- **Def (3.2.10):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp vect y $S_1, \dots, S_n$ subconjuntos de V, se define como suma de los $S_1, \dots, S_n$ a:

$$S_1 + \dots + S_n = \{ s_1 + \dots + s_n : s_i \in S_i, 1 \leq i \leq n \}$$

- **Teo (3.2.11):** La suma de subespacios ($W = W_1 + \dots + W_n$) de V es un subespacio de V

- **Propo (3.2.12):** $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$

3.3 Bases y Dimensiones

- **Def (3.3.1):** Sea V un $\mathbb{K}$ esp vect, S un subconjunto de V, S es linealmente dependiente (LD) si $\exists$ vectores distintos $v_1, \dots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Si lo anterior solo admite la solución trivial ($\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$) entonces el subconjunto es linealmente independiente (LI)

- **Def (3.3.2):** Sea V un espacio vectorial. Una base de V es un conjunto $B \subseteq V$ tal que:
  - B genera a V
  - B es L.I

  - **Obs:** – Base canónica ($\mathbb{K}^n$): $E = \{$vectores con todos 0 excepto un 1$\}$

- **Teo (3.3.3):** Sea V un espacio vectorial generado por $v_1, \dots, v_n$, entonces todo conjunto LI de V contiene a lo más n elementos

  - **Colo (3.3.4):** Dos bases de V tienen la misma cantidad de elementos

- **Def (3.3.5):** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, diremos que n es la dimensión de V si $\exists$ una base de n elementos, y se denota:

$$\dim V = n$$

  - **Obs:** – Si $V = \{0'\} \Rightarrow \dim V = 0$

  - **Colo (3.3.6):** Sea $\dim V = n$:
    - Todo subconjunto de V con más de n elementos es L.D
    - Todo subconjunto de V con menos de n elementos no puede generar a V

  - **Lema (3.3.7):** Sea $S \subseteq V$ L.I y $v \in V$ que no pertenece a S, $S \cup \{v\}$ es L.I

- **Teo (3.3.8):** Sea V espacio vectorial de dim n, S_0 un subconjunto L.I. Entonces $\exists\, v_1, \dots, v_m \in V : S_0 \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ es base de V

  - **Colo (3.3.9):** Se puede completar bases de subespacios

  - **Colo (3.3.10):** Si $V \neq \{0'\} \Rightarrow \dim V > 0$

- Teo(3.3.12): Sea $V \neq \{0\}$ espacio vectorial y S un conjunto infinito de generadores de V, entonces existe un subconjunto B de S que es una base de V

- Teo(3.3.13): Sean W_1, W_2 subespacios de dim finita, entonces W_1+W_2 es de dimensión finita y

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

3.4 Dimensiones de Subespacios

- Def(3.4.1): Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$:
  - El vector fila i es el vector $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$, y el espacio fila de A es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores fila de A
  - El vector columna j es el vector $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$, y el espacio columna de A es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores columna de A

- Teo(3.4.2): Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $P \in \mathbb{K}^{m \times m}$ matriz invertible y $B = PA$. Entonces el espacio fila de A es igual al espacio fila de B

- Corolario(3.4.3): Sea $A, R \in \mathbb{K}^{m \times n}$, siendo R la MRF equivalente por filas a A. Entonces, el espacio fila de R es igual al espacio fila de A y las filas no nulas de R forman una base de espacio fila de A

- Coro(3.4.4): Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces A es invertible $\Leftrightarrow$ las filas de A son una base de $\mathbb{K}^n$

- Teo(3.4.5): Sean $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{K}^n$, $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, A la matriz con filas $w_1, \dots, w_m$ y R una MRF equivalente por filas a A (sin permutación de filas). Si $i_1, i_2, \dots, i_r$ son las filas no nulas de R, entonces $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_r}$ es una base de W

- Teo(3.4.6): Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces son equivalentes
  - A es invertible
  - A es equivalente por filas a Id.
  - A es producto de matrices elementales
  - El sistema $AX = Y$ tiene única solución $\in \mathbb{K}^{n \times 1}$ [illegible] matriz Y
  - El sistema homogeneo $AX = 0$ solo admite la solución trivial
  - $\det A \neq 0$.
  - Las filas de A son L.I
  - Las columnas de A son L.I

④ Transformaciones Lineales

- **Def (4.1.1):** Sean V y W dos $\mathbb{K}$ esp vect, una Transformación lineal (T.L) de V a W es una función $T: V \to W$ tal que
  - $T(v + v') = T(v) + T(v')$
  - $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

  - **Obs:**
    - T.L $\Leftrightarrow T(\lambda v + v') = \lambda T(v) + T(v')$
    - T.L $\Leftrightarrow T(0) = 0'$
    - $T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$ (T.L conserva combinaciones lineales)

- **Teo (4.1.3):** Sea V, W $\mathbb{K}$ esp vect. de dim finita, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada de V, $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ cualquiera, $\exists!$ T.L $T: V \to W$ tal que,

$$T(v_j) = w_j, \; j = 1, \dots, n$$

4.2 Nucleo e Imagen

- **Def (4.2.1):** Sean V, W $\mathbb{K}$ esp vect, $T: V \to W$ T.L, se definen
  - $Im(T) := \{w \in W : \exists v \in V, T(v) = w\} = \{T(v) : v \in V\}$ (Imagen $\subseteq W$)
  - $Nu(T) := \{v \in V : T(v) = 0\}$ (Núcleo $\subseteq V$)

- **Teo (4.2.2):** $Im(T) \subseteq W$ y $Nu(T) \subseteq V$ son subespacios

- **Def (4.2.3):**
  - El rango de T es la $\dim(Im(T))$
  - La nulidad de T es la $\dim(Nu(T))$

  - **Obs (4.2.4):** Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$ es T.L

- **Def (4.2.5):** $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \to Av$ T.L es la transformación lineal asociada a A o la transformación lineal inducida por A

  - **Obs (4.2.6):** Sea $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por
    $$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n, \dots, a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n)$$
    con a_{ij}, entonces
    $$T(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
    Es decir, T es la T.L asociada a la matriz $A = [a_{ij}]$

  - **Propo (4.2.7):**
    - $Nu(T)$ es igual al conjunto de soluciones de $AX = 0$
    - $Im(T)$ es el conjunto $b \in \mathbb{K}^m$ para los cuales $AX = b$ tiene solución

- **Teo (4.2.8):** Sean V, W $\mathbb{K}$ esp vect, $T: V \to W$ T.L, entonces

(Teo de la dimensión) $\dim V = \dim(Im\, T) + \dim(Nu\, T)$

- **Def:** Sea $A^{m \times n}$, el rango fila es la dimensión del subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por las filas de A. El rango columna es la dimensión del subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por las columnas de A.

- Teo(4.2.9): Sea $A^{m\times n}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces
  rango fila(A) = rango columna(A)

- Def(4.2.10): Sea $A^{m\times n}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces el **rango** de es el rango fila/columna de A

4.3 Isomorfismos de espacios vectoriales

- Def(4.3.1): Sea $T: V \to W$ T.L
  - T es epimorfismo/suryectiva si $Im(T) = W$
  - T es monomorfismo/inyectiva si dados $v_1, v_2 \in V$ y $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$
  - T es isomorfismo/biyectiva si es suryectiva e inyectiva

  - Propo(4.3.2): T es mono/inyectiva $\Leftrightarrow Nu\, T = \{0\}$

  - Propo(4.3.3): - T es mono/inyectiva $\Leftrightarrow$ T de un conjunto L.I es L.I
    - T es epi/suryectiva $\Leftrightarrow$ T de generadores de V es generadores de W

- Def(4.3.4): Sea $T: V \to W$ iso/biyectiva, entonces $T^{-1}: W \to V$ es una LI iso/biyectiva

  - Propo(4.3.6): T es iso/biyectiva $\Leftrightarrow$ T de una base de V es una base de W

  - Colo(4.3.7): Sea $T: V \to W$ iso/biyectiva, entonces $\dim V = \dim W$

- Teo(4.3.8): Sea $T: V \to W$ T.L, con $\dim V = \dim W$, equivale
  - T es iso/biyectiva
  - Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V, entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es base de W

4.4 Álgebra de transformaciones lineales

- Teo(4.4.1): Sean V y W esp. vect. sobre $\mathbb{K}$, $T, S: V \to W$ transformaciones y $\alpha \in \mathbb{K}$.
  Entonces, $T+S$ y αT son T.L de V en W

  - Colo(4.4.2): Sean V y W esp. vect sobre $\mathbb{K}$. Entonces

4.5 Coordenadas

- **Def (4.5.1):** Sea V un esp vect de dimensión finita, una **base ordenada** es una sucesión finita de vectores L.I. que generan a V y en la que tiene importancia el orden de los vectores.

  - **Propo (4.5.2):** Sea V un esp vect de dimensión finita, $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada, entonces para cada $v \in V$ existen únicos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que

    $$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

- **Def (4.5.3):** Sea V esp vect, $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, entonces, x_i es la **i-ésima coordenada de v** y se define

  $$[v]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

  También se puede describir en una matriz [illegible], la **matriz de v en la base B**:

  $$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  - **Propo (4.5.4):**
    - $[v + w]_B = [v]_B + [w]_B$
    - $[\lambda v]_B = \lambda [v]_B$

4.6 Matriz de una transformación lineal

- **Def (4.6.1):** Sean V y W esp vect de dim finita con base ordenada $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ y $B'=\{w_1, \dots, w_m\}$ resp., $T: V \to W$ LI tal que

  $$T v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

  a A, la matriz $m \times n$ definida por $[A]_{ij} = a_{ij}$, se denomina la **matriz de T respecto a las bases B y B'**, y se denota

  $$[T]_{BB'} = A$$

  - Si $T: V \to V$, $[T]_{BB}$ también se denota $[T]_B$

  - **Propo (4.6.2):** $[T]_{BB'} [v]_B = [T(v)]_{B'}$
  - **Cob (4.6.3):** $[v]_B = [Id]_{B'B} [v]_{B'}$

- **Def (4.6.4):** Sea V esp vect de dim finita, B y B' bases ordenadas, la matriz $P = [Id]_{B'B}$ es llamada la **matriz de cambio de base** de la base B' a la base B

- **Teo (4.6.5):** Sea V y W un esp vect de dim n y m, con bases ordenadas B y B', entonces $\kappa: L(V,W) \to M_{m \times n}(\mathbb{K})$ definida $T \mapsto [T]_{BB'}$ es un isomorfismo de esp vect

- **Teo (4.6.6):** Sean V, W y Z esp vect, B, B' y B'' bases ordenadas, $T: V \to W$ y $U: W \to Z$

  $$[UT]_{BB''} = [U]_{B'B''} [B]_{BB'}$$

- Colo(4.6.7): La matriz cambio de base $P = [Id]_{B'B}$ es invertible y su inversa es $P^{-1} = [Id]_{BB'}$

- Colo(4.6.8): Sea V esp vect, B base ordenada y $T, U: V \to V$ operadores lineales, entonces
  - $[UT]_B = [U]_B [T]_B$
  - Si $Id: V \to V$ es op. lineal, entonces $[Id]_B = I$
  - Si T es invertible, entonces $[T]_B$ es una matriz invertible y $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$

- Teo(4.6.9): Sea V un esp vect, B y B' bases ordenadas, T op. lineal. Entonces, si P es la matriz cambio de base de B' a B, se cumple que

$$[T]_{B'} = P^{-1} [T]_B P \text{, es decir } [T]_{B'} = [Id]_{BB'} [T]_B [Id]_{B'B}$$

- Def(4.6.10): Sea V esp vect, T op. lineal. El determinante de T es el determinante de la matriz T en alguna base de V.

4.7 Operadores diagonizables

- Def(4.7.1): Sea V esp vect y T op. lineal. Un valor propio o autovalor de T es un escalar λ tal $\exists\, v \neq 0 \in V / T(v) = \lambda v$. Si λ es un autovalor de T, entonces
  - Cualquier vect tal que $T(v) = \lambda v$ se llama vector propio o autovector asociado a λ
  - $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ La colección de estos autovectores se llama espacio propio o autoespacio asociado a λ

- Teo(4.7.2): Sea V esp vect y $T: V \to V$ una aplicación lineal. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces V_λ es sub. esp. de V

- Teo(4.7.3): Sea V esp vect, $T: V \to V$ una aplicación lineal. Sean $v_1, \dots, v_n$ autovectores de T con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos entre sí. Entonces, $v_1, \dots, v_n$ son l.i.

- Colo(4.7.4): Si $\dim V = n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V

- Def(4.7.5): Sea V esp vect y $T: V \to V$, el polinomio característico de T es

$$\chi_T(x) = \det(x\,Id - T)$$

- Propo(4.7.7): Sea $\dim V = n$, entonces λ es autovalor $\Leftrightarrow$ λ es raíz del polinomio carcT

- Def(4.7.8): Sea V esp vect, $T: V \to V$ t.l., diremos que T es diagonalizable si existe una base de V de autovectores de T

- Propo(4.7.9): Sea $\dim V = n$, una base de de autovectores $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Entonces,
  - $Nu(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$
  - $Im(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$

- Propo(4.7.10): Sea T un op. lineal diagonalizable sobre un esp vect V. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los autovalores distintos de T. Entonces, el polinomio característico de T es

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k} \text{, con } d_i = \dim V_{\lambda_i}$$

4.8 Operadores simétricos en $\mathbb{R}^n$

- **Def (4.8.1):** Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^n$, T es un operador simétrico si la matriz de T en la base canónica es simétrica ($[T]_\varepsilon^t = [T]_\varepsilon$)

- **Teo (4.8.2):** Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja (teo fundamental del álgebra)

  - **Coro (4.8.3):** Si p es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces

$$p(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

- **Teo (4.8.5):** Sea T un operador simétrico de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor real de T

- **Teo (4.8.6):** Sea A matriz simétrica $n \times n$. Entonces existe $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una BON de $\mathbb{R}^n$ de autovectores de A