Contents

0.0.1 Codificación 1
0.0.2 Decodificación 2

Para entender cómo codificar y decodificar utilizando una matriz generadora G y una matriz chequeadora H, veamos un ejemplo detallado basado en la teoría de códigos lineales.

0.0.1 Codificación

1. **Definir la matriz generadora** G:

   Una matriz generadora G de un código lineal de longitud n y dimensión k es una matriz $k \times n$ cuyas filas forman una base para el subespacio vectorial que define el código.

   Ejemplo: Supongamos que tenemos un código lineal C con $n = 7$ y $k = 4$. Una posible matriz generadora G podría ser:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Codificación del mensaje**:

   Para codificar un mensaje m, representado como un vector de longitud k, se multiplica m por la matriz generadora G.

   Ejemplo: Supongamos que queremos codificar el mensaje $m = (1, 0, 1, 1)$.

$$c = m \cdot G = (1, 0, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$$

   Así, el código resultante es $c = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$.

0.0.2 Decodificación

1. **Definir la matriz chequeadora H**:

   La matriz chequeadora H de un código lineal es una matriz $(n-k) \times n$ tal que $H \cdot G^T = 0$, donde G^T es la transpuesta de G.

   Para encontrar H, si G está en forma sistemática $[I_k|P]$, entonces H se puede escribir como $[-P^T|I_{n-k}]$.

   Ejemplo: Para el G dado, podemos encontrar H.

   G en forma sistemática es:

   $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces, P es:

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Y H es:

   $$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Decodificación del código recibido**:

   Supongamos que recibimos el vector $r = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$. Para verificar si hay errores, calculamos el síndrome $s = H \cdot r^T$.

   $$s = H \cdot r^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que el síndrome $s \neq 0$, significa que hay un error. El vector s indica la posición del error.

Comparando s con las columnas de H, encontramos que $s = (1, 1, 0)$ corresponde a la posición 5 (la quinta columna de H es $(1, 1, 0)$).

Por lo tanto, el bit en la posición 5 está en error. Corregimos el error:

$$r = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \implies r' = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$$

El código corregido es $r' = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$, que coincide con el código original c.

Estos pasos ilustran cómo usar las matrices G y H para codificar y decodificar mensajes en códigos lineales.