Práctico 2

Sistemas de ecuaciones

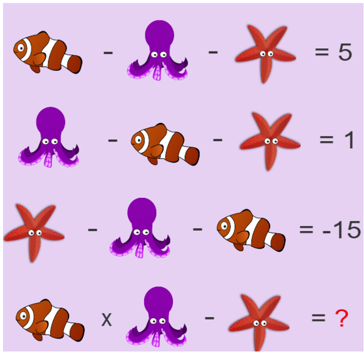
Objetivos.

- Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

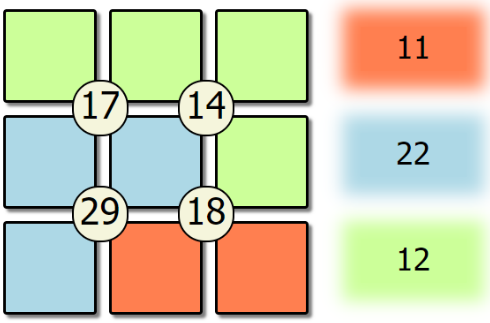
Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Para cada uno de los siguientes problemas, plantee el sistema lineal que le permita resolver el problema e intente resolverlo con las herramientas que posee hasta el momento.

(a)



(b) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el rectángulo de igual color que aparece en la columna de la derecha.



(2) (a) Encontrar un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no nulo que sea ortogonal a los vectores

$$u = (4, -1, 1), \quad v = (2, 1, 1) \quad \text{y} \quad w = (1, 2, 1).$$

¿Hay un único vector con esta propiedad? En caso de que no, ¿Cómo describiría a todos los vectores que satisfacen dicha propiedad?

(b) Decidir si existe un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezca a la intersección de los planos

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + z = 1\},$$
$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 2\},$$
$$P_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = -1\}.$$

(c) Encontrar los coeficientes del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(4) Dar todas las posibles matrices 2×2 con coeficientes reales escalón reducidas por filas.

(5) (a) Encontrar una MERF equivalente por filas a cada una de las siguientes matrices.

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&-i\\2&2\\i&1+i\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\1&4&2&1&5\\3&4&8&1&2\end{bmatrix}$$

(b) Probar que las siguientes matrices son equivalentes por fila.

$$\begin{bmatrix}-1&-2&5&4\\3&6&0&1\\4&8&-6&-3\\-1&-2&2&1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

(6) Para cada una de las MERF del ejercicio 3,
   (a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
   (b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema eventualmente no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema, cuando existan.

(7) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir paramétricamente el conjunto de soluciones e indicar una MERF asociada al sistema.

(a) $\begin{cases}-x-y+4z=0\\x+3y+8z=0\\x+2y+5z=0\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x-3y+5z=0\\2x-3y+z=0\\-y+3z=0\end{cases}$ (c) $\begin{cases}x-z+2t=0\\-x+2y-z+2t=0\\-x+y=0\end{cases}$

(d) $\begin{cases}-x-y+4z=1\\x+3y+8z=3\\x+2y+5z=1\end{cases}$ (e) $\begin{cases}x-3y+5z=1\\2x-3y+z=3\\-y+3z=1\end{cases}$ (f) $\begin{cases}x-z+2t=1\\-x+2y-z+2t=3\\-x+y=1\end{cases}$

Observación. En estos ejemplos vemos que para describir el conjunto de soluciones de un sistema podemos necesitar distintas cantidades de parámetros, dependiendo del sistema. ¿Encuentra alguna relación entre la cantidad de parámetros, incógnitas y unos principales de una MERF asociada?[1]

Observación. Como se habrán dado cuenta los sistemas (a) y (d) tienen la misma matriz asociada ¿Encuentran alguna similaridad entre los conjuntos de soluciones de estos sistemas?

[1]Cuando estudiemos espacios vectoriales veremos que la cantidad de parámetros se corresponde con lo que llamaremos *dimensión* del conjunto de soluciones.

(8) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$

Observación. En estos ejemplos vemos que para describir implícitamente el conjunto de vectores para los cuales el sistema tiene soluciones podemos necesitar distintas cantidades de ecuaciones, dependiendo del sistema. ¿Encuentran alguna relación entre la cantidad de ecuaciones necesarias para describir implícitamente los conjuntos de este ejercicio y la cantidad de incógnitas y unos principales de una MERF asociada?

(9) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

(a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

(b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) determinar para cuales a, el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ admite solución. Para tales valores de a, calcular las soluciones del sistema.

(10) (a) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes, estudiando sus soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

(b) ⓐ Mostrar que las siguientes matrices no son equivalentes por fila.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son números reales.

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones dependiendo de que $m > n$, $m = n$ ó $m < n$? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(12) Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ (no necesariamente distintos).

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n-1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \quad \dots \quad , p(\lambda_n) = b_n,$$

y dar la matriz ampliada del sistema (en el Práctico 4 volverá a aparecer).

(b) Dar una condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución.

(13) (a) Sean $u = (1, 2, 1)$, $v = (-1, 1, 2)$ y $w = (1, 1, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Decidir si existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales[2] que

$$xu + yv + zw = (0, 0, 0).$$

(b) Sean $u = (1, 2, 1)$, $v = (-1, 1, 2)$ y $w = (1, 1, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Decidir si existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales[3] que

$$xu + yv + zw = (1, 2, 3).$$

En caso de existir, ¿cuántas ternas (x, y, z) satisfacen lo pedido?

(14) Dar todas las posibles matrices 2×3 con coeficientes reales escalón reducidas por filas.

(15) Repita el ejercicio (7) pero con el sistema: $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

(16) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) o (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución.

(a) $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x + 2y = b_2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x - 2y = b_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ 3x + y + 4z = b_2 \\ -x + 3y + 2z = b_3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + 2z + w = b_1 \\ 2x + 2y + z - w = b_2 \\ 3x + y + 3z = b_3 \end{cases}$

(17) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2021 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2022 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2023 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2120 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

(b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

[2]Más adelante, en el contexto de espacios vectoriales, veremos que este problema nos pregunta sobre la *(in)dependencia lineal* de los vectores u, v y w.

[3]Más adelante, en el contexto de espacios vectoriales, veremos que este problema nos pregunta sobre si un vector pertenece o no al espacio generado por los vectores u, v y w, o dicho de otro modo, si se puede escribir como *combinación lineal* de ellos.

(18) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución unica, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + ky - z &= 1 \\ -x + y + k^2 z &= -1 \\ x + ky + (k-2)z &= 2 \end{cases}$$

(19) (a) En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo.

(i) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

(b) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes pero poseen el mismo conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

(c) a Probar que si dos sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas homogéneos tienen las mismas soluciones entonces son equivalentes.

Observación: Sabemos del teórico que dos sistemas equivalentes poseen las mismas soluciones. Los incisos (b) y (c) de este ejercicio tratan de echar luz sobre la recíproca de este enunciado, es decir, ¿es cierto que si dos sistemas poseen las mismas soluciones entonces son equivalentes? El inciso (b) nos dice que no, en el caso en que el conjunto de soluciones es vacío. Afortunadamente, este es el único caso en que no vale. Vale en general que si dos sistemas poseen el mismo conjunto de soluciones, y este es no vacío, entonces son equivalentes. Sin embargo, la demostración requiere de herramientas más avanzadas de la materia. El inciso (c) es un caso particular que sale "a mano".

(20) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(21) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Ayudas

(10b) Recordar que si dos sistemas $(A|Y)$ y $(B|Z)$ son equivalentes entonces tienen las mismas soluciones. Pensar en el caso homogéneo.

(19c) El ejercicio se traduce en ver que si los sistemas $Ax = 0$ y $Bx = 0$ poseen las mismas soluciones entonces A es equivalente por filas a B. Para ver esto, podemos obtener una MERF R equivalente por filas a A y una MERF R' equivalente por filas a B, entonces $Rx = 0$ y $R'x = 0$ poseen las mismas soluciones (¿por qué?). Mostrar entonces que, si R y R' son MERF 2×2 y $Rx = 0$ y $R'x = 0$ poseen las mismas soluciones entonces debe suceder que $R = R'$. Para esto último, analice los distintos conjuntos de soluciones de las MERF del Ejercicio 4.