Bachmann Lautaro

Tarea 2:

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

1. Calcule a_3 y a_4 usando recursión. (30 pts)
2. Pruebe por inducción que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (70 pts)

1. $a_3 = (3-2)a_{3-1} + 2(3-1)a_{3-2}$

$a_3 = 1.\, a_2 + 2(2)\, a_1$ — Por def. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$a_3 = 1.\, 2 + 4.\, 1$ — elemento neutro

$a_3 = 2+4$

$a_3 = 6$

$a_4 = (4-2)a_{4-1} + 2(4-1)\, a_{4-2}$

$a_4 = 2.\, a_3 + 2(3)\, a_2$ — $a_3 = 6$, $a_2 = 2$

$a_4 = 2.6 + 6.2$

$a_4 = 12 + 12$

$a_4 = 24$

2. Casos base: Veamos si la propiedad se cumple cuando $n=1$ ó $n=2$.

$a_1 = 1!$	Por def.	$a_2 = 2!$	Por def.
$1 = 1!$	Por def. factorial	$2 = 2!$	Def. rec. de factorial
$1 = 1$		$2 = 2\cdot(2-1)!$	
		$2 = 2.\, 1!$	$1! = 1$
		$2 = 2.1$	elem. neutro
		$2 = 2$	

Hipótesis inductiva:

Supongamos que para cierto $k \in \mathbb{N}$ se cumple la propiedad

$$\boxed{a_k = k!}$$

$\therefore$ si se cumple para $n = k \Rightarrow$ se cumple para $n = k+1$

$$a_{k+1} = (k+1)!$$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1-2)\, a_{k+1-1} + 2\,(k+1-1)\, a_{k+1-2} && \text{Por def. rec.} \\
&= (k-1) \cdot a_k + 2 \cdot k \cdot a_{k-1} && \text{hipótesis inductiva} \\
&= (k-1) \cdot k! + 2 \cdot k \cdot (k-1)! && \text{def. rec. factorial} \\
&= (k-1) \cdot k! + 2 \cdot k! && \text{Distributividad} \\
&= (k-1+2) \cdot k! \\
&= (k+1) \cdot k! && \text{def. rec. factorial} \\
&= (k+1)!
\end{aligned}
$$

$\therefore$ por principio de inducción queda demostrado que la propiedad se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.