(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $P(n) = $ "$\sum_{K=1}^{n}(a_K + b_K) = \sum_{K=1}^{n} a_K + \sum_{K=1}^{n} b_K$"

Caso base: Veamos si se cumple $P(1)$

$$\sum_{K=1}^{1}(a_K + b_K) = \sum_{K=1}^{1} a_K + \sum_{K=1}^{1} b_K \qquad \text{def. rec. Sumatoria}$$

$$(a_1 + b_1) = a_1 + b_1 \qquad \text{Asoc.}$$

$$a_1 + b_1 = a_1 + b_1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos que $P(J)$ se cumple para cierto $K \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$$

$$\sum_{K=1}^{J+1}(a_K + b_K) = \sum_{K=1}^{J}(a_K + b_K) + (a_{J+1} + b_{J+1}) \qquad \text{def. rec. Sumatoria.}$$

$$\sum_{K=1}^{J+1} a_K + \sum_{K=1}^{J+1} b_K = \sum_{K=1}^{J} a_K + \sum_{K=1}^{J} b_K + (a_{J+1} + b_{J+1}) \qquad \text{Hip. Ind., def. rec. sumatoria}$$

$$\sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} = \sum_{K=1}^{J} a_K + \sum_{K=1}^{J} b_K + (a_{J+1} + b_{J+1}) \qquad \text{Conmutatividad}$$

$$\sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} = \sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción, queda demostrado que $P(J)$ se cumple para todo $J \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $P(n) =$ " $\sum_{J=1}^{n} J = \frac{n(n+1)}{2}$ "

Caso base:

Veamos si $P(1)$ se cumple

$$\sum_{J=1}^{1} J = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(2)}{2}$$ Elem. Neutro

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipótesis Inductiva:

Supongamos que $P(k)$ es cierta para cierto $k \in \mathbb{N}$.

$\therefore$ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$\sum_{J=1}^{k+1} J = \sum_{J=1}^{k} J + k + 1$$ def. rec. sumat.

$$\frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$ Hip. Ind.

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1) + (k+1).2}{2}$$

$$\frac{(k+1).(k+2)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

f) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $P(n) =$ " $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ "

Caso base:

Veamos si $P(0)$ se cumple.

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$$ Elem. Neutro.

$$a^0 = \frac{a^1-1}{a-1}$$ $x^0 = 1$, $a^1 = a$

$$1 = \frac{a-1}{a-1}$$ $\frac{x}{x} = 1$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos $P(J)$ es verdadera para cierto $J \in \mathbb{N}$

$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$

$$\sum_{k=0}^{J+1} a^k = \sum_{k=0}^{J} a^k + a^{J+1}$$ def. rec. sumat., hip. ind

$$\frac{a^{J+1+1}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1}{a-1} + a^{J+1}$$ $x = x^1$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+(a^{J+1}).(a^1-1)}{a-1}$$ $x^n . x^m = x^{n+m}$

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+1}-1+a^{J+1+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$ Conmutatividad.

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1+a^{J+1}+(-a^{J+1})}{a-1}$$ Inverso aditivo

$$\frac{a^{J+2}-1}{a-1} = \frac{a^{J+2}-1}{a-1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción queda demostrado que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$