Lautaro Bachmann

Tarea 4:

1) Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando operaciones elementales. Indicar en cada caso que operaciones y que propiedades del determinante se usan.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ Decir además para que valores de x la matriz C es inversible.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta el teorema que nos dice que el determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal, tenemos que $\det(A) = 2.2.2.2 = 16$

b) Para resolver este ejercicio procederemos a aplicar operaciones elementales por fila hasta llegar a una matriz identidad.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} = Id_n$$

Teniendo en cuenta el teorema que nos dice que el determinante cambia de signo cuando se intecambian filas y el teorema que nos dice que $\det(Id_n) = 1$, tenemos que:

$\det(B) = -\det(C) \overset{(1)}{\Rightarrow} \det(B) = -(-\det(D))$

$\Rightarrow \det(B) = \det(D) \overset{(2)}{\Rightarrow} \det(B) = 1$

$\therefore$ El determinante de B es 1.

$\det(C) = -\det(D)$ (1)

$D = Id_n \Rightarrow \det(D) = 1$ (2)

c) Procederemos a realizar operaciones elementales por fila hasta llegar a una matriz triangular, ya que por teorema (★) $A \xrightarrow{F_r + t F_s} B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$, con $t \in \mathbb{K}$ y $r \neq s$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}}_{C} \xrightarrow{F_4 - \frac{1}{2}F_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{D} \xrightarrow{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{E}$$

$$\overset{(★)}{\Rightarrow} \det(C) = \det(D) = \det(E)$$

Como E es una matriz triangular, por el teorema mecionado en el primer ejercicio sabemos que su determinante es igual al producto de su diagonal, por lo tanto tenemos que:

$$\det(C) = \det(E) = 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot x - \frac{1}{2} = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 6x - 3$$

∴ el determinante de C es $6x - 3$.

Ahora veamos para que valores de x la matriz es inversible.

Por teorema: C es invertible $\Leftrightarrow \det(C) \neq 0$

En base a esto busquemos los valores de x que hacen que el determinante sea 0.

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Por ende, C es inversible $\forall x$ tal que $x \neq \frac{1}{2}$.