Repaso

Cuerpo

Nunca es Vacío

Ejemplos de cuerpos $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$ (p primo)

Definición: un cuerpo es un conjunto F junto con dos operaciones: La suma $(+)$ y el Producto $(\cdot)$

$$\underbrace{+ : F\times F \to F}_{\text{suma}}, \quad \underbrace{\cdot : F\times F \to F}_{\text{Producto}}$$

$$(a,b)\mapsto a+b \qquad (a,b)\mapsto a\cdot b \text{ ó } ab$$

que satisfacen los siguientes axiomas:

1) Asociatividad de la suma
   $(a+b)+c = a+(b+c), \forall a,b,c \in F$.
2) Conmutatividad de la suma
   $a+b = b+a, \forall a,b \in F$
3) Elem. Neutro de la suma
   $\exists\, 0 \in F$ tq' $a+0 = a, \forall a \in F$.
4) el opuesto aditivo
   $\forall a \in F, \exists\, b \in F$, tq' $a+b = 0$
5) Asociatividad de $\cdot$ $(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in F$
6) Conmutatividad de $ab = ba, \forall a,b \in F$
7) Existe $1 \neq 0$ tq' $a\cdot 1 = a, \forall a \in F$.

   Neutro del Producto
8) $\forall a \in F$, tq $a \neq 0$, $\exists\, c \in F$, tq' $a\cdot c = 1$
9) Distributividad
   $a(b+c) = ab+ac, \forall a,b,c \in F$.

Ejemplo: $F_2 = \{0,1\}$ con las operaciones

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Si $1+1 = 1$

$(1+1)+(-1) = 1+(-1)$

$1+(1+(-1)) = 1+(-1)$

$1+0 = 0$

$1 = 0$ ABS!

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$(0+0)$

$0\cdot a = 0, \forall a \in F$, cualquiera sea F cuerpo (Ej)

Aprender

$0a = (0+0)\cdot a = 0a + 0\cdot a$

opuesto

$0a + (-0a) = 0a + (0a + (-0a))$

$0 = 0\cdot a + 0 = 0a$

Recordemos algunas Prop. de los Cuerpos

1) Neutro de la suma (0) y Neutro del Producto (1) son únicos. También, $\forall a \in F$, el opuesto de a es único (se denota $-a$) y si $a \neq 0$, el inverso de a es único (se denota a^{-1})

2) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$

3) $a, b \neq 0$, entonces $ab \neq 0$ y $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

Notación $a, b \in F : b \neq 0$, $ab^{-1} = \frac{a}{b}$, Ejemplo $\frac{1}{a} = 1 \cdot a^{-1}$

Números Complejos

En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, que denotaremos por $\mathbb{C}$, definimos las operaciones

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Notemos que podemos identificar a $\mathbb{R}$ con $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ (Pq no existe imaginario, queda el real.)

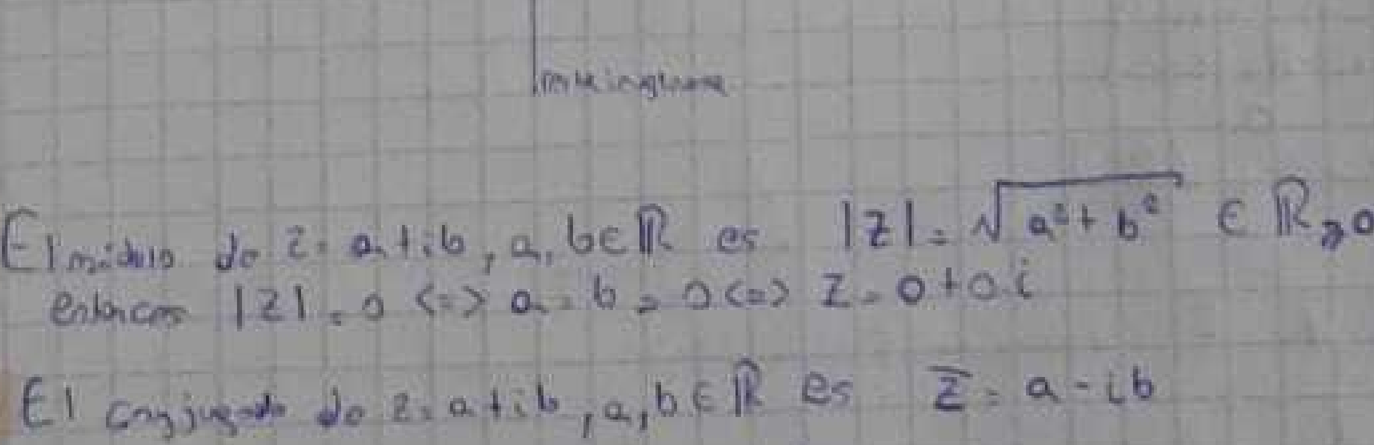
$$\underline{1} = (1,0), \quad i = (0,1) \in \mathbb{C}$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = (a,b), \quad z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib$$

Notación $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$
$i^2 = -1$

el prod. de complejos, devuelve un complejo.

Representación gráfica



- El módulo de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
  entonces $|z| = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0 + 0i$

- El conjugado de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ es $\bar{z} = a - ib$

  Obs. $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$ (i.e. $b = 0$)

Que pasa si $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = (a^2+b^2) + i\underbrace{(a(-b) + ab)}_{0} = a^2 + b^2$
$= |z|^2$
$\rightarrow$ da número real, siempre.

Ag [illegible] Teorico ③

3/4/23

Proposición: Con las operaciones anteriores $\mathbb{C}$ es un cuerpo

Nota: los elem. de $\mathbb{C}$ se llaman números complejos

Idea de la demostración

Las propiedades de asociatividad, conmutatividad (para + y ·) y distributividad se prueban de manera rutinaria

Se verifica también que

$1+0i$

$0 = (0,0)$ es neutro para $+$

$1 = (1,0)$ es neutro para $\cdot$

$0+0i$

el inverso de $z = a+ib$ es $-z = -a-ib$, $a,b \in \mathbb{R}$

Usando la relación $z\bar{z} = |z|^2$, podemos probar que $\forall z = a+ib \neq 0$, $a,b \in \mathbb{R}$.

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Notación $\frac{a+ib}{a'+ib'} = (a+ib)(a'+ib')^{-1}$

$$= (a+ib)\left(\frac{a'}{a'^2+b'^2} - \frac{ib'}{b'^2+a'^2}\right)$$

ejemplo $\frac{1+2i}{2-i}$ ¿Cómo lo expreso en la forma $a+ib$ $a,b \in \mathbb{R}$?

$$= (1+2i)(2-i)^{-1} = (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) = \overbrace{\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)}^{0} + \overbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)}^{1}i$$

$$= 0+1i = i$$

La ecuación x^2+1 no tiene solución en $\mathbb{R}$, pero si tiene solución en $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, de hecho i, $-i$ son dos soluciones de esta ecuación

$z^2 = (a^2-b^2) + i\,2ab$

$a^2-b^2 = 0$ y $2ab = 1$ se hace difícil [illegible]

$b = \pm a \to b = a : 2a^2 = 1$

$a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = b$

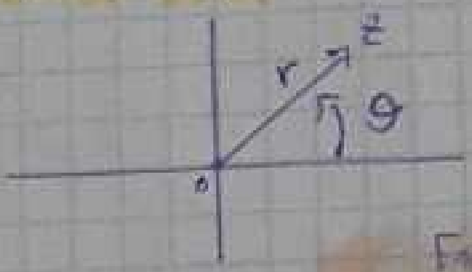
$b = -a : -2a^2 = 1$ ABS!

Identidad de Euler: $e^{i\pi} = -1$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

Forma polar de un complejo $\neq 0$

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$



$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}$ tiene módulo 1

Forma polar

$z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ $\theta \in [0,2\pi)$

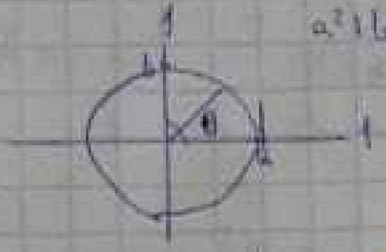
$\frac{z}{r} = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi)$

$|zw| = |z|\,|w|$, $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

$\left|\frac{z}{|z|}\right| = |z|\,\left||z|^{-1}\right| = |z|\,|z|^{-1} = 1$

o ... mirante en clase

Si $z \neq 0$, si $|z| = 1$, $z = a + ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$



$a^2 + b^2 = 1$

$\exists\, \theta \in [0, 2\pi) : a = \cos\theta,\ b = \operatorname{sen}\theta$

$z = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta \equiv e^{i\theta}$

Notación exponencial

$z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\alpha}$

$z \cdot w = \underbrace{(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta)}_{z}\,\underbrace{(\cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha)}_{w}$

$= \cos(\theta + \alpha) + i\,\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$

$= e^{i(\theta + \alpha)}$ ⊛

Fórmula de De Moivre $(e^{i\theta})^m = e^{im\theta}$

demostración Inducción en $m \in \mathbb{N}$, usando ⊛ $\forall m \in \mathbb{N}$

o

$i = e^{i\pi/2}$

$z^2 = i \Rightarrow |z| = 1 \quad z = e^{i\theta}$

$z^2 = e^{i2\theta} \stackrel{?}{=} e^{i\pi/2} = i$

$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k = 0, 1$

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$e^{i\pi/4}, -e^{i\pi/4} \quad \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Alg. [illegible]

3 [illegible]

16 de marzo

Teorema fundamental del álgebra: Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (polinomio), $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$. Entonces P tiene un (todos) raíz en $\mathbb{C}$

$\cdot zw = (a \cdot a' - bb') + i(ab' + ba')$

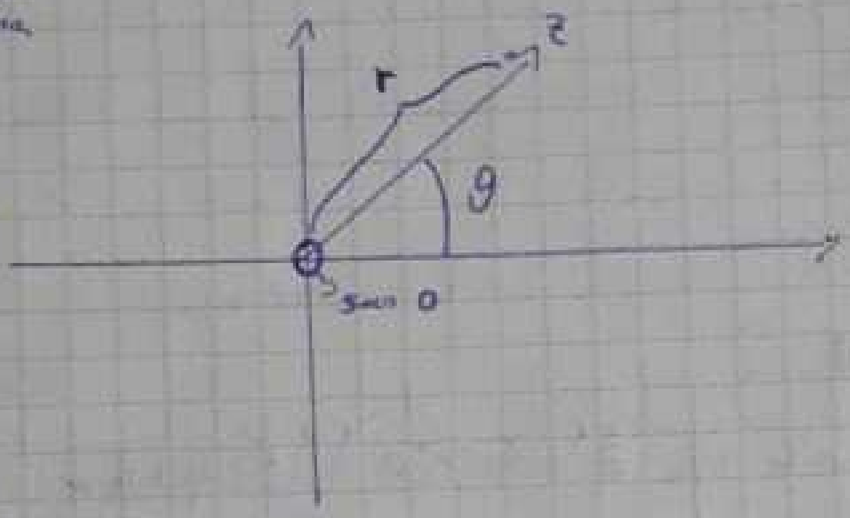
$a = \mathcal{R}e(z)$: Parte real

$b = Im(z)$: Parte imaginaria

$z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$r \in \mathbb{R}_{>0}$



$r = |z|$ módulo de z

θ se llama el Argumento de z

r, θ Coordenadas Polares de $z \neq 0$

$z = a + ib \quad , r = |z| \Rightarrow |\frac{z}{r}| = 1 \Rightarrow \frac{z}{r} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Notación $e = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$z = re^{i\theta}$ [illegible]

Proposición: Sean $z = re^{i\theta}$, $w = r'e^{i\theta'}$ con $r, r' \in \mathbb{R}_{>0}$, $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Entonces

$z \cdot w = r \cdot r' \cdot e^{i(\theta + \theta')}$

Demostración: $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$w = r'e^{i\theta'} = r'(\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta')$

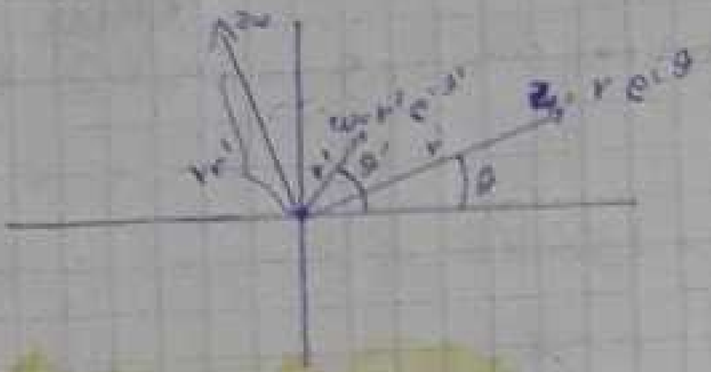
Entonces $z \cdot w = \underbrace{r \cdot r'}_{\text{junta los reales}} \underbrace{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta')}_{\text{junta los complejos}}$

$= r \cdot r' \cdot [(\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\,\theta') + i(\cos\theta \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta')]$ (mult. de complejos)

$= r \cdot r' (\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta'))$ (Por fórmulas trigonométricas para el cos/sen de la suma de dos ángulos)

$= r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$

Generalmente, al multiplicar z y w ($\neq 0$)



- Suma los ángulos $\theta + \theta'$
- Se estira según el valor de r, si es mayor a uno se estira, sino, se achica

Fórmula de De Moivre

$z = r e^{i\theta}$, $m \in \mathbb{N}$

$z^m = r^m e^{im\theta}$

dem Por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$

- Caso base: si $m=1$, no hay nada que probar ya que: $z^1 = z = r^1 e^{i1\theta}$. Es verdadera

Supongamos que vale para $m = k \in \mathbb{N}$

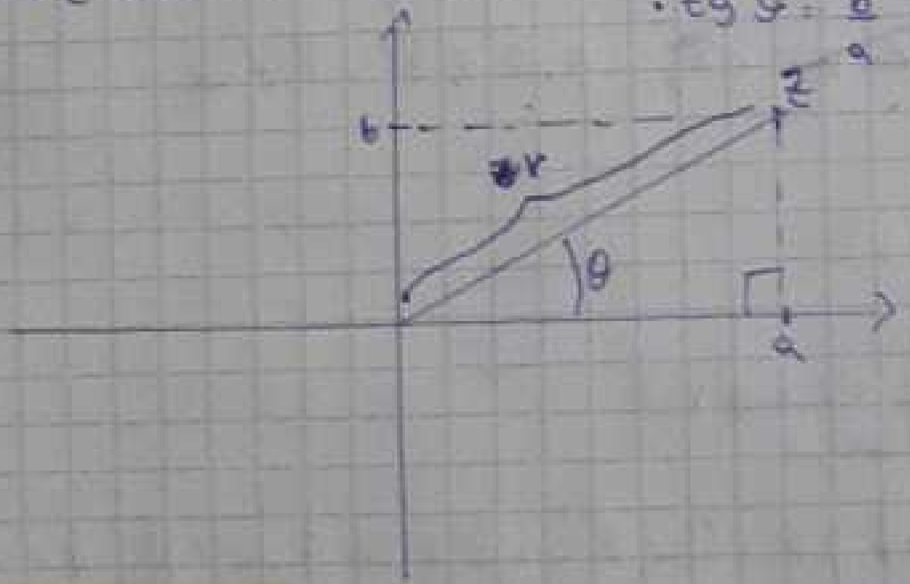
$$z^{k+1} = \underbrace{z^k}_{H.I} \cdot z = \underbrace{r^k \cdot e^{ik\theta}}_{z^k} \cdot \underbrace{r e^{i\theta}}_{z} \underset{\substack{\text{por} \\ \text{la propiedad} \\ \text{anterior}}}{=} r^k \cdot r \cdot e^{i(k\theta + \theta)} \underset{\substack{\text{reacomodo} \\ \text{sacando factor común } \theta}}{=} r^{k+1} \cdot e^{i(k+1)\theta}$$

Con lo cual vale para $k+1$. Luego resulta que la fórmula vale $\forall m \in \mathbb{N}$

Como calcular

$0 \neq z = a+ib = r e^{i\theta}$, r, θ? (es el mismo problema)

- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ ó $\left(\cos\theta = \frac{a}{r} \wedge \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}\right)$



Ejemplos sencillos

- $1 = 1 + 0 \cdot i = e^{i0}$, $i = e^{i\pi/2}$, $\boxed{-1 = e^{i\pi}}$
- $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Una raíz de la unidad en $\mathbb{C}$ es un número, complejo, z: $z^n = 1$, para algún $n \in \mathbb{N}$

Alg. lineal
③ Teoría
16 de marzo

Busquemos las soluciones de esta ecuación.

si z solución $\Rightarrow |z^n| = |1|$ o sea

$1 = |1| = |z^n| = |z|^n$

Como $|z| \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow |z| = 1$

En particular $z \neq 0$

$z = e^{i\theta}, \ 0 \leq \theta < 2\pi$

$z^n = e^{in\theta} = 1 = e^{i \cdot 0} = \cos 0 + (\operatorname{sen} 0) \cdot i$

$\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) = 1 + 0i$

$\begin{cases} \cos n\theta = 1 \\ \operatorname{sen} n\theta = 0 \end{cases}$ $\quad n\theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \dfrac{2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}$

las distintas soluciones de $z^n = 1$ son

$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ 0 \leq k \leq n-1$

hay n soluciones distintas.

Obs: $i = e^{i\pi/2} = e^{i 2\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ raíces cuartas: $1, -1, i, -i$

$i^4 = 1$ (de hecho $i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$)

Calcular: $\underbrace{i^{57}}_{\text{...}} = i^{14 \cdot 4 + 1} = \underbrace{(i^4)^{14}}_{i^4 = 1} \cdot i = 1^{14} \cdot i = i$

Sistema de ecuaciones lineales

Def. Un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en un cuerpo F es una colección:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$\underset{m}{\text{ecuaciones}} \times \overset{\text{incógnitas}}{n}$

Una solución del sistema es una n-upla $X = (x_1, \dots, x_n)$ tq $X_i = x_i$ satisfacen todas las ecuaciones del sistema

- Si el método llega a una contradicción (EJ: $0 = 1$), entonces el sistema NO tiene solución, Sistema incompatible.

21 de marzo

Sistema de ecuaciones lineales

• simetría, reflexividad y transitividad.

• sea F cuerpo (eg: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, ...)

Un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dado $a_{ij} \in F$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. $b_i \in F$, $1 \leq i \leq m$.

• El sistema (*) se dice homogéneo si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Una solución de (*) es una m-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ $x_i \in F$ tq' satisface todas las ecuaciones.

Obs: Si el sistema es homogéneo, siempre admite al menos una solución: $(0, 0, \ldots, 0)$, esta es llamada la solución trivial.

Una combinación lineal de las ecuaciones de (*) es una ecuación que se obtiene de las dadas multiplicando cada una por un escalar (elemento del cuerpo F) y luego sumándolas:

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + c_2(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) =$$
$$= c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m$$

En otras palabras:

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \cdots + c_m a_{m1})x_1 + (c_1 a_{21} + \cdots + c_m a_{m2})x_2 + \cdots + (c_1 a_{1m} + \cdots +$$
$$c_m a_{mn})x_n = c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m$$

dado otro sistema:

$$(**)\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + \cdots + a'_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Decimos que (**) es equivalente a (*) si toda ecuación del (**) es combinación lineal de las ecuaciones de (*) y recíprocamente toda ecuación (*) es combinación lineal de las ecuaciones de (**).

Obs: Esto define una relación de equivalencia entre sistemas lineales con n incógnitas.

Proposición: Dos sistemas (*) y (**) (Dos sistemas de ecuaciones) equivalentes, tienen el mismo conjunto de soluciones.

Dem: Por simetría (condición de ser equivalentes), basta probar que si (★) y (★★) son equivalentes, entonces toda solución de (★) es solución de (★★).

Para esto, recordamos que toda ecuación de (★★) es de la forma:

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \dots + c_m a_{m1}) x_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}) x_n = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m$$

Para ciertos $c_1, \dots, c_m \in F$. Luego es claro que si $(x_1, \dots, x_n)$ es solución de (★), entonces satisface esta ecuación.

Definición: Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una matriz $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo F, es una función

$$A : \underbrace{\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}_{\text{pares ordenados}} \to F$$

Representaremos a una matriz A como un ordenación rectangular:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & \vdots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $A_{ij} = A(i,j)$ $\forall\, 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$.

$A_{ij} \in F$ $\forall i,j$. A_{ij}: fila i / columna j

↳ coeficiente de A

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_{12} = -1$

$$F^{m \times n} = \{ A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to F \text{ matriz} \}$$

• Matriz Columna: es de la forma $\begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} \in F^{m \times 1}$

Sea un sistema de ecuaciones con coeficientes en F

$$\begin{cases} A_{11} x_1 + \dots + A_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{m1} x_1 + \dots + A_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

A este sistema le asociamos dos matrices: ~~Una fija con las X~~

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{con } A \in F^{\overset{\text{fil. col}}{m \times n}},\ Y \in F^{m \times 1}$$

Notación: Indicaremos al sistema como

$$AX = Y, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n \times 1}$$

Alg. cuarto
⑥ Tema

21 de marzo

Obs: Combinaciones lineales de ecuaciones ≡ Combinaciones lineales de filas (coef a coef).

Vamos a considerar las siguientes operaciones elementales por filas.

$$e : A \rightsquigarrow e(A)$$

donde e es una operación elemental

1) Multiplicar una fila de A por $c \in F$, $c \neq 0$
2) A la fila i le sumo c veces la fila j, $i \neq j$, $c \in F$
3) Permutar dos filas.

23 de marzo

$$A \in F^{m \times n},\quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{ij} \in F$$

Operación elemental por filas e

$$A \rightsquigarrow e(A)$$

Operación elemental por fila : e, $A \rightsquigarrow e(A)$

1) e: multiplicar una fila de A por un escalar $c \in F$, $c \neq 0$
2) e: reemplazar la (fila i) F_i por $F_i + cF_j$, $c \in F$, $j \neq i$
3) e: permutar / intercambiar (fila i) F_i con F_j

Proposición: Sean A y $B \in F^{m \times n}$. Supongamos que $B = e(A)$, donde e es una operación elemental por filas.

Entonces existe una op. elemental por filas e' del mismo tipo que e, tq! $A = e'(B)$

Dem. Consideremos cada caso posible de aplicar e (1), 2), 3))

1) $\to$ e es de tipo 1). $B = e(A)$, e es multiplicar $F_i \cdot c$, $c \neq 0$. Como $c \neq 0$ tiene inverso $\Rightarrow c^{-1} \cdot c = 1$. Sea e' la op. elemental de tipo 1) ($F_i \cdot c^{-1}$, $c \neq 0$) Entonces $e'(B) = A$

2) Si e es de tipo 2) $e: F_i \to F_i + cF_j$, $c \in F$, $i \neq j$. Sea e': $F_i \to F_i + (-c)F_j$, e' es op. elemental del mismo tipo que e y $e'(B) = A$.

3) Si e es de tipo 3) e $F_i \leftrightarrow F_j$ Entonces $e(B) = A$.

Definición: $A, B \in F^{m \times n}$ Decimos que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A mediante un número finito de operaciones elementales por filas, es decir

$$B = e_k(e_{k-1}(\cdots e_2(e_1(A))\cdots))$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A \xrightarrow{F_1: F_1 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -7 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 (-1/7) F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4/7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4/7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B$ es equivalente por filas a A.

Proposición: la equivalencia por filas define una relación de equivalencia en $F^{m \times n}$

Dem: Hay que mostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: A es equivalente por filas a A, pues $A = e(A)$ con $e: F_i \cdot c$, $c = 1 \neq 0$
$B = A$

Simétrica: Por la proposición anterior, si $B = e_k(\cdots e_2(e_1(A)\ldots)$ Existen op. elementales por filas $e_k', e_{k-1}', \ldots, e_2', e_1'$ tq:
$e_1'(e_2'(\cdots e_k'(B)) = A \therefore A \equiv B$

Transitividad: Supongamos que B equivalente a A y C equivalente a B. Queremos ver que C equivalente a A.

$$C = e_K(e_{K-1}(\cdots e_2(e_1(B))\cdots) = e_K(e_{K-1}\cdots(e_1(\underbrace{\tilde{e}_\ell(\tilde{e}_{\ell-1}(\cdots(\tilde{e}_1(A))\cdots)}_{B}$$

Esto muestra que C equivalente a A.

Recordemos: $A \in F^{m \times n}$ sistema de ecuaciones homogéneas

$$Ax = 0 \quad \begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Teorema: Sean $A, B \in F^{m \times n}$. Si A y B son equivalentes por fila, entonces los sistemas $Ax = 0$ y $Bx = 0$ son equivalentes.

Recordemos: Dos sistemas son equivalentes si cada ecuación de uno de ellos es combinación lineal del otro.

Dem: Por hipótesis $B = e_K(e_{K-1}(\cdots e_2(e_1(A))\cdots)$ con $e_1, \ldots, e_K$ op. elem. por filas. Basta probar el enunciado cuando

$$B = e(A) \quad e \text{ op. elem. por filas}$$

Distinguimos los distintos tipos para e

Tipo 1) $e: F_i \to cF_i; c \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow F_i \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ cA_{i1} & \cdots & cA_{in} \\ \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Alg. Lin.
⑦ Teorema
23 de marzo

El sistema $BX=0$ es

$$A_{11}x_1+\dots+A_{1n}x_n=0$$
$$i\to cA_{i1}x_1+\dots+cA_{in}x_n=0$$
$$\vdots$$
$$A_{m1}x_1+\dots+A_{mn}x_n=0$$

• La i-ésima ecuación de $BX=0$ es la i-ésima ecuación de $AX=0$ multiplicada por c, y las otras ecuaciones son las de $AX=0$.

$\therefore$ $AX=0$ y $BX=0$ son equivalentes, pues $A=e'(B)$, e' $F_i\to c^{-1}F_i$

En $BX=0$, si $j\neq i$ la ecuación j de $BX=0$

$0\cdot Ec_1+\dots+1Ec_j+\dots+0Ec_m(A)$

si $j=i$ $\quad 0Ec_1(A)+\dots+cEc_i+\dots+\overset{0}{}Ec_m(A)=0$

Los demás tipos de op. elem. se tratan de manera similar

$B=e(A)$

e tipo 2) F_i F_i+cF_j, $i\neq j$ • Corresponde a sumar a la ecuación i de $AX=0$ c veces la ec. j, y las demás no cambian.

e tipo 3) $F_i\leftrightarrow F_j$. La r-ésima ecuación no cambia si $r\neq i,j$. La i-ésima ecuación de $BX=0$ es la j-ésima ec. de $AX=0$ y viceversa.

Hemos visto que dos sistemas equivalentes tienen las mismas soluciones. Combinando esto con el Teorema anterior:

Corolario $A,B\in F^{m\times n}$ son equivalentes por filas, entonces los sistemas homogéneos $AX=0$ y $BX=0$ tienen las mismas soluciones.

Repaso Teoría 28 de marzo

$AX=0$; $A\in F^{m\times n}$

B equivalente por filas a A, entonces el sistema tiene las mismas soluciones que $BX=0$

Queremos encontrar alguna matriz B que sea "simple" de modo que el sistema $BX=0$ se pueda resolver fácilmente.

Definición. Una matriz R se dice reducida por filas (MRF) si satisface las siguientes condiciones:

1) El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de R es igual a 1
2) Si el primer coeficiente no nulo de una fila de R está en la columna j, entonces todos los demás coeficientes

de la columna j son 0.

Ejemplos:

1) La matriz identidad $n\times n$. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es MRF

2) Las matrices $A = \begin{array}{c} \text{colum.} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A no cumple 1), B no cumple 2) No son MRF.

Obs. $A \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ MRF , $B \xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Definición: El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de una matriz A se dice un coef. principal de A. Si A es MRF los coef. principales son todos 1's.

Teorema: Sea $A \in F^{m\times n}$. Entonces existen operaciones elementales por filas $e_1, \dots, e_k$ tales que $e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\dots)) = \underline{R}$ es MRF. En particular A es equivalente por filas (siempre) a una MRF.

Dem: Si $A=0$ no hay nada que probar. Supongamos que la primera fila no nula de A es la fila i, $1\leq i \leq m$. (i.e. $F_l = 0 \ \forall l < i$)

Entonces A es de la pinta: $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{ij} & 0 \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow F_i$ Sea A_{ij} el primer coeficiente no nulo de la fila i (F_i)

puede tener 0 hasta llegar (i,j)

$\uparrow$

C_j: columna j

Sea e_1: multiplicar a la F_i por A_{ij}^{-1} $(\neq 0)$ (vale pues $A_{ij}\neq 0$ y F cuerpo).

Obtenemos: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \leftarrow F_i$

$\uparrow C_j$

$F_l - A_{lj}\cdot F_i$

Ahora, para cada $l > i$, tq $A_{lj}\neq 0$, sea e_l la op. el. e_l: reemplazar F_l por $\cancel{A_{lj}F_i}$

Obtenemos, luego de aplicar e_l's: $A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ * & & 0 & & * \\ * & & 0 & & * \end{pmatrix} \leftarrow i$

Si todas las filas F_i de A' son nulas, entonces A' MRF. Sino, sea F_ℓ $i<\ell\leq m$ la siguiente fila no nula de A'. Repetimos el procedimiento anterior. Si A'_{tj}, es el primer coef. no nulo de A' (obs: $j'\neq j$) multiplicamos F_t por A'^{-1}_{tj}, y obtenemos

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & & \vdots & & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \end{array} \qquad (A'_1)_{tj'} = 1$$

Ahora, para cada $1\leq \ell\leq m$, tq' el coef. $\ell j'$ de A'_1 sea no nulo (si hubiera alguno) hacemos el reemplazar F_ℓ por $F_\ell - (A'_1)_{\ell j'}\cdot F_t$

Obtenemos una matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 - 0 & 1 & - 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 1 \cdot 0 & - 0 \\ 1 \; 0 & 0 & 1 \\ & | & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \\ \end{array}$

Esto no altera lo que habíamos conseguido en la fila i. El primer coef. no nulo de cada uno (coef $\neq 0$ es 1) y todos los demás en su columna son 0.

Iterando este proceso, obtenemos una Matriz Reducida por Filas (MRF).

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 19 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+4F_3]{F_1+2F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/19 \\ 0 & 1 & 0 & -18/19 \\ 0 & 0 & 1 & 24/19 \end{pmatrix}}_{R}$ MRF

$Ax=0 \;?\!\longleftrightarrow Rx=0$

$x_1 - 9/4\, x_4 = 0 \qquad (9/9\,t,\ 9/13\,t,\ -19/14\,t)$

$x_2 - 18/19\, x_4 = 0 \qquad t\in\mathbb{R}$

$x_3 - 24/19\, x_4 = 0$

Definición: Sea $R\in F^{m\times n}$. Decimos que R es escalón reducida por filas (MERF) si cumple las siguientes condiciones:

1) R es MRF

2) Las filas nulas de R deben estar al final, es decir, ninguna fila nula de R precede (está antes) a una fila no nula (la anterior)

3) Si R tiene r filas no nulas, sea para cada $1\leq i\leq r$. Sea k_i, $1\leq k_i\leq m$ tq' dicho primero de la

Si todas las filas F_i de A' son nulas, entonces A' MRF. Sino, sea F_t $i<t\le m$ la siguiente fila no nula de A'. Repetimos el procedimiento anterior. Si $A'_{tj'}$, es el primer coef. no nulo de A' (obs. $j'\neq j$) multiplicamos F_t por $A'^{-1}_{tj'}$, y obtenemos

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 1 & * & & \\ * & & 0 & * & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow t \\ \\ \end{matrix} \qquad (A'_1)_{tj'} = 1$$

Ahora, para cada $1\le l\le m$, tq el coef. $l_{j'}$ de A'_1 sea no nulo (si hubiera alguno) hacemos el Reemplazar F_l por $F_l-(A'_1)_{lj'}\cdot F_t$

Obtenemos una matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 0-0 & 1 - & 0 \\ 0 & 1-0 & -0 \\ * & 0 & * \\ & 1 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow t \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Esta matriz bajo las filas [illegible] en la fila i. El primer coef. no nulo es uno (coef $\neq 0$ es 1) y todos los demás en su columna son 0.

Iterando este proceso, obtenemos una Matriz Reducida por Filas (MRF).

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2 F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 19 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+4F_3]{F_1+2F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/19 \\ 0 & 1 & 0 & -18/19 \\ 0 & 0 & 1 & 24/19 \end{pmatrix}}_{R}$ MRF

$Ax=0 \iff Rx=0$

$x_1 - 9/19\, x_4 = 0$ $\qquad (9/19\,t,\ 9/19\,t,\ -19/19\,t)$

$x_2 - 18/19\, x_4 = 0$ $\qquad t\in\mathbb{R}$

$x_3 - 24/19\, x_4 = 0$

Definición: Sea $R\in F^{m\times n}$. Decimos que R es escalón reducida por filas (MERF) si cumple las siguientes condiciones:

1) R es MRF

2) Las filas nulas de R (si hay) están al final, o sea, Ninguna fila nula de R precede (está antes) a una fila no nula

3) Si R tiene r filas no nulas, sea para cada $1\le i\le r$. Sea k_i, $1\le k_i\le m$ tq el primer no nulo de la fila

↳ está en la columna K_i

entonces $K_1 < K_2 < \dots < K_r$.

Ej) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $K_1 = 2$ ~~K_2~~ es MERF

4) $x - y = \alpha(3x+y) + \beta(\dots)$

$x - y = 3ax + ya + bx + 6y$

$1 \cdot x + (-1)y = x(3a+b) + y(a+b)$

$\begin{cases} 3a+b = 1 \\ a+b = -1 \end{cases}$

Corolario: Toda matriz $A \in F^{m \times n}$ es equivalente por filas a una MERF.

Dem. Resulta del lema anterior, toda MRF es equivalente a una MERF, mediante operaciones de filas.

Sup. que $R \in F^{m \times n}$ MERF, veamos cuáles son las soluciones del sistema homogéneo $Rx = 0$. Si R tiene r filas no nulas (∴ r ...) En particular $r \leq m$. Dijimos que los coeficientes principales correspondientes están en las columnas $K_1, \dots, K_r$.

$\{1, \dots, n\} = \{K_1, \dots, K_r\} \cup J$, $J = \{1 \leq i \leq m : i \neq K_j \ \forall j = 1, \dots, r\}$

El sistema $Rx = 0$ se escribe en la forma

$$(\ast) \begin{cases} x_{K_1} + \sum_{j \in J} R_{1j} x_j = 0 \\ x_{K_2} + \sum_{j \in J} R_{2j} x_j = 0 \\ \vdots \\ x_{K_r} + \sum_{j \in J} R_{rj} x_j = 0 \end{cases}$$

∴ Las soluciones se obtienen dando valores arbitrarios a x_j, $j \in J$ y poniendo

$(\ast)$ $x_{K_i} = -\sum_{j \in J} R_{ij} x_j$

Obs: Si $r = n$, entonces $J = \emptyset$ y la única solución será la trivial $x_{K_1} = 0 = \dots = x_{K_n}$

Teorema: Si $A \in F^{m \times n}$ tq $m < n$, entonces el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.

Dem: Como vimos antes, existe $R \in F^{m \times n}$ MERF tq los sistemas $Ax = 0$ y $Rx = 0$ son equivalentes y tienen la misma solución. Las soluciones de $Rx = 0$ están dadas por $(\ast)$. Si R tiene r filas no nulas $\Rightarrow r \leq m < n$, entonces ∴ $J \neq \emptyset$

Sea $j \in J$, dando a x_j el valor $1 \neq 0$ obtenemos una solución no trivial.

x_j, $j \in J$ variables independientes

$x_{K_1}, \dots, x_{K_r}$ variables dependientes

Corolario: Sea $A \in F^{n \times n}$, entonces el sistema homogéneo $Ax = 0$ admite sólo la solución trivial, si y sólo si A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n$, ...

I_n

Dem. ($\Leftarrow$) Si A equivalente a I_n, entonces $Ax=0$ y $I_nx=0$ tienen las mismas soluciones.

Entonces podemos considerar el sistema $I_nx=0$ como:

$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0 \end{cases}$ Por lo tanto, solo admite solución trivial. $x_1=\dots=x_n=0$.

no tiene variables independientes

($\Rightarrow$) Sea R MERF equivalente a A. Por hipótesis, $Rx=0$ solo admite la solución trivial porque $Rx=0$ es equivalente a $Ax=0$.

Entonces, digamos que R tiene r filas no nulas y sean $1\leq k_1<\dots<k_r\leq n$ tq el coef. principal de la fila i está en la col. k_i

$\therefore \{k_1,\dots,k_r\}=\{1,\dots,n\}$ $(J=\emptyset)$

Como $1\leq k_1<\dots<k_r\leq n \Rightarrow r=n$

o sea que $R\in F^{n\times n}$ MERF no tiene filas nulas. La condición sobre k_i: $1\leq k_1<k_2<\dots<k_n\leq n$ fuerza $k_i=i$ $\forall i=1,\dots,n$.

$\therefore R=I_n$ (por la condición de ser reducida por filas) $\square$ fin de teorema.

Consideremos un sistema general $Ax=Y$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\in F^{m\times 1}$. $A\in F^{m\times n}$

El método para resolverlo es análogo al anterior, pero realizando operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema

$\widetilde{A}=(A\mid Y)$. Si obtenemos a partir de A una matriz MERF $R\in F^{m\times n}$, mediante op. elementales, entonces las mismas operaciones aplicadas a $\widetilde{A}$ nos darían $(R\mid Z)$, $Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}\in F^{m\times 1}$

Siendo r, $1\leq k_1<\dots<k_r\leq m$ y J como antes, las soluciones están dadas por:

$$x_{k_1}=z_1-\sum_{j\in J} R_{1j}x_j$$
$$\vdots$$
$$x_{k_r}=z_r-\sum_{j\in J} R_{rj}x_j$$

La condición necesaria y suficiente para que haya solución es

$\begin{vmatrix} 0=z_{r+1} \\ \vdots \\ 0=z_m \end{vmatrix}$ $\leftarrow$ Provienen de las filas nulas de R

Ejemplo: Busquemos todos los posibles $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tq el sistema $\begin{cases} x-z=y_1 \\ x-y+z=y_2 \\ 2x-y=y_3 \end{cases}$ $Ax=Y$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $(A|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 1 & -1 & 1 & y_2 \\ 2 & -1 & 0 & y_3 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & -1 & 2 & y_2-y_1 \\ 0 & -1 & 2 & y_3-2y_1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & -1 & 2 & y_2-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-y_1-y_2 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)F_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & y_1-y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1-y_2+y_3 \end{array}\right)}_{\text{RMERF} \qquad Z}$$

$$\begin{cases} x - z = y_1 \\ y - 2z = y_1 - y_2 \\ 0 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

∴ El sistema $Ax = Y$ tiene solución si y ~~solo si~~ solo si

$$\boxed{-y_1 - y_2 + y_3 = 0}$$

Si este es el caso, las soluciones están determinadas por:

$x = y_1 + z$ $\qquad\qquad \{(y_1+t,\ y_1-y_2+2t,\ t) \ t \in F\}$

$y = y_1 - y_2 + 2z$

$z =$ variable libre. $z = t \in F$

Por ejemplo el sistema tiene solución si $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y las soluciones son

$$\{(1+t,\ 1+2t,\ t)\ t \in F\}$$

Definición: Sean $A \in F^{m\times k}$, $B \in F^{k\times n}$. El producto $C = AB$ se define como la matriz $C \in F^{m\times n}$

$A \in F^{m\times k}$, $B \in F^{k\times m}$. Se define el producto $AB \in F^{m\times n}$ en la forma

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il} B_{lj} \qquad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m \end{matrix}$$

OBS AB solo está definido si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B

Ejemplos

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB$ no está definido

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & +1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in F^{2\times 4}$

$(AB)_{11} = 1\,1 + 0\cdot 1 + (-2)\cdot(1) = 3$

3) $A \in F^{m\times n}$, $X \in F^{n\times 1}$, Está definido $AX \in F^{m\times 1}$. De manera que $AX = Y$, resulta un sistema de ecuaciones pues el coeficiente de AX en la fila i es

$$A_{i1}X_1 + \dots + A_{in}X_n$$

Proposición: Sean $A\in F^{m\times k}$, $B\in F^{k\times t}$, $C\in F^{t\times n}$. Entonces $(AB)C$ y $A(BC)$ están definidas y son iguales.

Dem. $AB\in F^{m\times t}$, $C\in F^{t\times n} \Rightarrow (AB)C$ está def y es $m\times n$

$A\in F^{m\times k}$, $BC\in F^{k\times n} \Rightarrow A(BC)$ está def y es $m\times n$.

$[(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{t} (AB)_{il}\, C_{lj} = \sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{s=1}^{k} A_{is} B_{sl}\right) C_{lj}$ Por prop. de la op. en F^n

$= \sum_{s=1}^{k} A_{is}\left(\sum_{l=1}^{t} B_{sl} C_{lj}\right) = \sum_{s=1}^{k} A_{is}(BC)_{sj} = [A(BC)]_{ij}$

Proposición $A\in F^{m\times m}$, entonces

$$I_m A \overset{(*)}{=} A = A I_m$$

dem. Veamos $(*)$: $\forall\, 1\le i\le m,\ 1\le j\le m$

$$(I_m A)_{ij} \underset{def}{=} \sum_{l=1}^{m} (I_m)_{il}\, A_{lj} = (I_m)_{ii}\, A_{ij} = A_{ij}$$

Ejemplo: $0_{m\times n}\, A = 0_{m\times k}$

$A\, 0_{k\times u} = 0_{n\times u}$

Repaso:

$A\in F^{m\times k}$, $B\in F^{k\times n}$

$AB\in F^{m\times n}$, $(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il} B_{lj}$

$(AB)C = A(BC)$, $I_m A = A = A I_k$

Obs. El Prod. No es conmutativo, incluso cuando están definidos AB y BA.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ $BA\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$

La traspuesta de $A\in F^{m\times k}$, es $A^t\in F^{k\times n}$

$(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots\\A_{21}&&\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots\\A_{12}&&\end{pmatrix}$

Obs. $A\in F^{m\times k}$, $B\in F^{k\times m}$. Entonces la fila i de AB es la combinación lineal

$$(A)_{i1}F_1(B) + A_{i2}F_2(B) + \cdots + A_{ik}F_k(B)$$

$F_j(B)$: j-ésima fila de B.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Definición. Una matriz elemental $n \times n$ es una matriz $E = e(I_n)$, donde e es una operación elemental por filas

Ejemplo. $n=2$

Tipo I: $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c \neq 0$

Tipo II: $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \in F$

Tipo III. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$F = F_2 = \mathbb{Z}_2$ ¿cuántas hay?

$n \cdot 1 + n(n-1) + 1 + \binom{n}{2}$ $\quad |F - \{0\}|$

Teorema. Sea $A \in F^{m \times n}$ y sea e una op. elem. por fila.

Entonces. $e(A) = E\,A$, donde $E = e(I_m) \in F^{m \times m}$

Demostración. Sean $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Comparemos los coef. i,j de cada lado. Distinguimos los distintos tipos de op. elemental.

- e de tipo 1: e: multiplicar la fila r por $c \neq 0$.

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ c A_{rj} & i = r \end{cases}$$

$$E = e(I) \quad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ c\,\delta_{rk}, & i = r \end{cases} \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} \overset{\text{Def de prod}}{=} \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} c\,\delta_{rk} A_{kj} = c A_{rj}, & i = r \end{cases}$$

- e de tipo 2: e: Reemplazar fila r por $F_r + c\,F_s$, $r \neq s$

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + c A_{sj}, & i = r \end{cases} \qquad \text{si } E = e(I), \quad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ \delta_{rk} + c\,\delta_{sk} & i = r \end{cases}$$

$$(EA)_{ij} \overset{(\text{def prod})}{=} \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij} & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj} & i = r \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk} A_{kj} + c \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk} A_{kj} = A_{rj} + c A_{sj}$$

$\therefore e(A) = EA.$

e tipo 3: Permutar fila r y la fila s. (Ej. mirar el caso)

Corolario: Sean $A, B \in F^{m\times n}$. Entonces son equivalentes:

i) B es equivalente por filas a A

ii) $B \overset{(*)}{=} E_l E_{l-1} \cdots E_2 E_1 A$, donde E_i son matrices elementales ($E_1, \dots, E_l \in F^{m\times m}$ son matrices elementales).

dem: i) equivale (significa) que $B = e_l(e_{l-1} \cdots e_2(e_1(A)) \cdots)$ $e_1, \dots, e_l$ op. elementales. si tomamos $E_i = e_i(I)$

Por el teorema anterior: $(A) \Leftrightarrow B = E_l(\cdots E_2 E_1 A)$ □

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \underset{e_1}{\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2}} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{-1/2 F_2} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} = R$$

$R = \cdots E_2 E_1 A$. E_i?

$E_1 = e_1(I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_2 = e_2(I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3 = e_3(I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$E_4 = e_4(I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad R = \overbrace{E_4 E_3 E_2 E_1}^{\text{importa el orden}} A$

Comentario: e: op. elem. Sabemos que $\exists\, \tilde{e}$ o.e. del mismo tipo que e tq $\tilde{e}(e(A)) = e(\tilde{e}(A)) = A$, $\forall A$. Aplicado esto a $I = A \Rightarrow \tilde{E}E = E\tilde{E} = I$.

Definición: Sea $A \in F^{n\times n}$ una inversa a izquierda de A es una matriz $B \in F^{n \times n}$:

$$BA = I_n.$$

Una inversa a derecha de A es una matriz $C \in F^{n\times n}$ tq, $AC = I_n$.

Si B es inversa a izq y a derecha, B se dice inversa de A y A se dice (en tal caso) invertible.

Lema: Supongamos que A tiene inversa a izquierda B e inversa a derecha C. Entonces, $B = C$.

dem. $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$ □

Cor. Si A invertible, su inversa es única. Se denota A^{-1}

Proposición: Sea $A \in F^{n\times n}$

1) A invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

2) A, B invertibles $\Rightarrow AB$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dem. 1) Tenemos $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Luego, A es inversa de A^{-1}, entonces A^{-1} es invertible.

2) Hacemos el prod:

$$(AB)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

esto prueba 2)

Teórico

Sea $A \in F^{n\times n}$ invertible $A^{-1}A = I_n = A \cdot A^{-1}$. Se deduce que el producto de matrices invertibles es invertible.

Teorema. Si $E \in F^{n\times n}$ es una matriz cuadrada elemental, entonces E es invertible y E^{-1} es una matriz elemental del mismo tipo que E.

Dem. $E = e(I_n)$, donde e op. elem. por filas.

Sea $\tilde{e}$ la op. elem. inversa de e y sea $\tilde{E} = \tilde{e}(I_n) \rightarrow$ es una matriz elemental

$$\tilde{E}E = \underbrace{\tilde{e}(E)}_{\text{resultado anterior}} = \tilde{e}e(I) = I$$

Análogamente $E\tilde{E} = I$. Por lo tanto E es invertible y $E^{-1} = \tilde{E}$. $\square$

Ejemplo 1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E^{-1}$

Corolario. Sean $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales. Entonces el prod. $E_1 \ldots E_k$ es invertible y
$(E_1 \ldots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1}$.

Teorema. Sea $A \in F^{n\times n}$. Son equivalentes:

i) A es invertible

ii) A equivalente por filas a I_n.

iii) A es prod. de matrices elementales

Dem.: Notemos primero lo siguiente. Si $R \in F^{n\times n}$ MERF, R invertible si y solo si R es la identidad ($R = I_n$), si y solo si R no tiene filas nulas.

Sea R MERF tq' A equivalente por filas a R

$$(*) \quad A = E_k \cdots E_2 E_1 R \; ; \; E_k, \ldots, E_1 \text{ matrices elementales}$$

i) $\Rightarrow$ ii) tenemos $R = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} A$

A invertible $\Rightarrow$ R invertible $\Rightarrow$ $R = I_n$. Por lo tanto vale ii)

ii) $\Rightarrow$ iii) si $A \sim I_n$, $R = I_n$ y resulta (sigue) de $(*)$ que A es prod. de matrices elementales

iii) $\Rightarrow$ i) si $A = E_k \cdots E_1$, E_i elementales $\Rightarrow$ A invertible (cor. anterior).

Corolario: Sea $A \in F^{n \times n}$ invertible. Si $e_1, \ldots, e_k$ op. el. por filas tq' $e_k(\cdots e_2(e_1(A)) \cdots) = I_n$ entonces $e_k(\cdots e_2(e_1(I_n)) \cdots) = A^{-1}$

Dem. Sean $E_1, \ldots, E_k$ las matrices elem. correspondientes a $e_1, \ldots, e_k$. Entonces

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

$$\underbrace{E_k \cdots E_2 \underbrace{E_1}_{e_1(I_n)}}_{(e_k(\cdots(e_2(e_1(I_n)))\cdots)} = A^{-1}$$

Obtenemos el siguiente método para calcular A^{-1} cuando exista:

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \underset{MERF}{R}$$

$$\quad | I_n \qquad | I_1 \qquad | I_2$$

Si R es la identidad entonces, por columna, a la inversa de A la consigo

$$I \xrightarrow{e_1} I_1 \xrightarrow{e_2} I_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{e_k} A^{-1}$$

Corolario: $A, B \in F^{m \times n}$. Entonces A equivalente por filas a B si y sólo si $B = PA$, donde $P \in F^{m \times m}$ invertible

dem. $\Rightarrow$ $B = \underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{P \text{ invertible}} A$, E_i elementales $m \times m$

$\Leftarrow$ P invertible y $B = PA = E_k \cdots E_1 A$

$P = E_k \cdots E_2 E_1$ $\Rightarrow$ B equivalente a A.

E_i elementales

Teorema. $A \in F^{n\times n}$. Son equivalentes:

i) A invertible

ii) $Ax=0$ sólo admite solución trivial

iii) Para todo $Y \in F^{n\times 1}$, el sistema $AX=Y$ admite solución.

dem. Sea R MERF, $n\times n$, A equivalente a R

$A = PR$, P invertible $n\times n$ y además $Ax=0$ y $Rx=0$ tienen las mismas soluciones

Sabemos A invertible $\Leftrightarrow R = I_n \Leftrightarrow Rx=0$

admite sólo la solución trivial

$\therefore$ i) $\Rightarrow$ iii) Sea $Y \in F^{n\times 1}$

A invertible, puedo tomar $X = A^{-1}Y \in F^{n\times 1}$. $AX = A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = Y$

Luego $X = A^{-1}Y$ es solución $Ax = Y$

iii) $\Rightarrow$ i) Sea R MERF tq $A = PR$, P invertible. Tomemos $Y = P\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}$

$AX = Y$ tiene sol. X

$PRX = P\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \underset{P \text{ invertible}}{\Rightarrow} X$ solución de $Rx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore R$ No tiene filas nulas $\Rightarrow R = I_n \Rightarrow A$ invertible $\square$

Corolario. $A \in F^{n\times n}$ tq A es invertible a izquierda (derecha) $\Rightarrow A$ es invertible

dem. S.P. A invertible a izq $\Rightarrow Ax=0$ sólo admite solución trivial $\left((\text{Si } BA = I_n) \Rightarrow X = BAX = B0 = 0\right)$

Si A invertible a derecha, digamos $AC = I_n \Rightarrow C$ invertible a izq $\Rightarrow C$ invertible.

y $C^{-1} = A$ invertible $\square$

Determinante:

$A \in F^{n\times n}$, para cada $1 \leq i, j \leq n$, denotamos por $A(i|j)$ a la matriz $\overset{(n-1)\times(n-1)}{}$ que se obtiene de A suprimiendo la fila i y la columna j

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A(1|1) = d$, $A(2|2) = a$, $A(1|2) = c$, $A(2|1) = b$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A(2|3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Def: $A \in F^{n \times n}$. Se define $\det(A)$, el determinante de A, de manera recurrente, como sigue:

Si $n=1$, $\det(A) = A \in F$

Si $n>1$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1)$

Ejemplo $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a \underbrace{\det A(1|1)}_{d} + (-1)^{2+1} c \underbrace{\det A(2|1)}_{b} = ad - cb$$

$n \geq 1$

Definición $A \in F^{n \times n}$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det(i|1)$, donde $A(i|1)$ es la matriz obtenida de suprimir la fila i columna 1.

Definición $\det A(i|j)$ menor ij de A.

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ {cofactor ij de A}

$C = (C_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ = matriz de cofactores

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$.

Def. $A \in F^{n \times n}$ se dice triangular superior si $A_{ij} = 0$ $\forall i > j$

y triangular inferior si $A_{ij} = 0$ $\forall i < j$

Proposición Si $A \in F^{n \times n}$ triangular superior, entonces el determinante de A $(\det(A)) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$

Demostración Por inducción sobre el tamaño de la matriz (n). $n \in \mathbb{N}$

Si $n=1$, el resultado es claro.

Supongamos que $n>1$. Tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det \overbrace{A(i|1)}^{(n-1)\times(n-1)}$$

Por Hip. inductiva, el resultado vale para estas submatrices del tipo $A(i|1)$, $i=1, \dots, n$.

$A(1|1) = \begin{pmatrix} A_{22} & * \\ 0 & A_{nn} \end{pmatrix} \therefore \det(A) = A_{22} \cdots A_{nn}$

Por hipótesis, $A_{i1} = 0 \ \forall i > 1$

Luego:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot A_{11} \cdot \det A(1|1) = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn} \ \square$$

Ejemplos: 1) $\det(I_n) = 1$, $\det(-I_n) = (-1)^n$, $\det(c I_n) = c^n$

2) $R \in MERF(n \times n) \Rightarrow R$ triangular superior

$$\det(R) = \begin{cases} 0, & \text{si } R \text{ tiene una fila nula} \\ 1, & \text{si } R = I. \end{cases}$$

(lo pongo porque me ayuda entender como calcular el determinante de una matriz cuadrada y aplicar las op. elem)

Teorema: $A \in F^{n \times n}$, y sean e ops. elem por filas y $B = e(A)$

Entonces:

1) Si e: "multiplicar fila r por $c \in F - \{0\}$", $\det(B) = c \det(A)$

2) Si e: "sumar a F_r c veces F_s, $r \neq s$, $c \in F^n$", $\det(B) = \det(A)$

3) Si e_1: "permutar F_r y F_s, $r \neq s$" $\det(B) = -\det(A)$

Dem: Caso por caso por inducción sobre n.

1) $A \xrightarrow{cF_r} B$. $B(i|1) = \begin{cases} e(A(i|1)) & \text{si } i \neq r \\ A(r|1) & i = r \end{cases}$

Además $B_{i1} = \begin{cases} A_{i1}, & i \neq r \\ c A_{r1}, & i = r \end{cases}$

Por Hip. Inductiva, $\det \overset{e_1}{B}(i|1) = \begin{cases} c \det A(i|1), & \text{si } i \neq r \\ \det A(r|1), & \text{si } i = r \end{cases}$

Luego:

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1)$$

$$= (-1)^{r+1} B_{r1} \cdot \det B(r|1) + \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1)$$

$= (-1)^{r+1} c A_{r1} \det A(r|1) + \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} c \det A(i|1)$

$= c\left((-1)^{r+1} A_{r1} \det A(r|1) + \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} \det (i|1)\right) = c \det(A)$

Obs: El caso 1), tenemos usado si $c=0$

$\tilde{e}$: sumar a una fila una múltiple de otra

2) $A \xrightarrow{F_r = F_r + cF_s} B \quad r \neq s$

$B_{i1} = \begin{cases} A_{i1} & , i \neq r \\ A_{r1} + cA_{s1} & , i = r \end{cases} \qquad B(i|1) = \begin{cases} \tilde{e}(A(i|1)), & i \neq r \\ A(r|1) & , i = r \end{cases}$

$\therefore \det(B) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1) + (-1)^{r+1} B_{r1} \det B(r|1)$

$= \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} \overbrace{\det A(i|1)}^{HI} + (-1)^{r+1}(A_{r1} + cA_{s1}) \cdot \det A(r|1)$

$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1)$ ↑ No sirve

2) Usaremos los siguientes lema:

Lema: $A, B, C \in F^{n \times n}$ tq A, B sólo difieren en una fila, y C sólo difiere de A y B en la misma fila que es la suma de la fila de A y la fila de B

$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r + \tilde{F}_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

Entonces, $\det C = \det A + \det B$

Demostración: Inducción sobre $n \geq 1$. Si $n=1$, es claro. $C = A + B$

Si $n > 1$

$\det C = \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} C_{i1} \det C(i|1) + (-1)^{r+1} C_{r1} \det C(r|1)$

$$= \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} \left[\det A(i|1) + \det B(i|1) \right] + (-1)^{r+1} (A_{r1} + B_{r1}) \det A(r|1)$$

$C(i|1)$ sólo dif. de $A(i|1)$ y $B(i|1)$ en una fila que es la suma de las filas corresp. de estas

$$= \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1) + \sum_{i \neq r} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1) + (-1)^{r+1} A_{r1} \det A(r|1) + (-1)^{r+1} B_{r1} \cdot \det A(r|1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1)$$

$= \det A + \det B$. Esto prueba el lema.

Obs. No es cierto que en general $\det(A+B) = \det A + \det B$

Ej. Dar un ejemplo. (e.g. tomando triangulares superiores).

Veamos 3). "Permutar dos filas (r, s, con $r \neq s$)" $B = e(A)$, $\det(B) = -\det(A)$.

Notemos que permutar F_r y F_s ($r < s$)

Equivale a realizar una sucesión de $2(s-r)-1$ permutaciones de filas consecutivas.

$$\begin{array}{cccc}
F_1 & \vdots & \vdots & \\
F_r & F_r & F_s & F_s \\
 & \to F_{s-1} & \to F_r & \to F_{r+1} \\
F_s & F_s & F_{s-1} & \vdots \\
 & & & F_{s-1} \\
F_n & F_n & F_n & F_r \\
 & & & F_n \\
\multicolumn{3}{c}{s-r} & s-r-1
\end{array}$$

Si probamos 3) en el caso en que las filas son consecutivas, como cada permutación aporta un (-1), finalmente

$$\det B = (-1)^{2(s-r)-1} \det(A) = -\det(A).$$

Supongamos que las filas son consecutivas, digamos r y $r+1$

~~det(B)~~ Hacemos inducción en el tamaño de la matriz (n). Si $n=1$, No hay nada que probar, si $n>1$

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} \det B(i|1) + (-1)^{r+1} B_{r1} \det B(r|1) + (-1)^{r+2} B_{r+1\,1} \det B(r+1|1)$$

$i \neq r, r+1$ $B(i|1)$ se obtiene de $A(i|1)$ permutando dos filas consecutivas.

Por H.I $\det B(i|1) = -\det A(i|1)$

$B_{r1} = A_{r+1,1}$, $B(r|1) = A(r+1|1)$

$$\begin{array}{ll} A & B(r|1) \\ F_1 & F_1 \\ \vdots & \vdots \\ F_r & F_{r-1} \\ F_{r+1} & F_{r+1} \leftarrow \text{fila } r \\ \vdots & \vdots \\ F_n & F_n \end{array}$$

$$= \sum_{i \neq r, r+1} (-1)^{i+1} A_{i1} (-1) \det A(i|1) + (-1)^{r+1} A_{r+1,1} \det A(r+1|1) + (-1)^{r+2} A_{r1} \det A(r|1)$$

$$= (-1) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1)$$

Vimos: $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_i + cF_i' \\ F_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_i \\ F_m \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_i' \\ F_m \end{pmatrix}$

Lema: $A \in F^{n\times n}$ Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det A = 0$

dem: Permutando filas podemos suponer que $F_1 = F_2$. Por inducción en n. Si $n=1$, es verdadero por vaciedad de hipótesis

Si $n>1$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1)$

$A_{11} = A_{21}$, $A(1|1) = A(2|1)$ y $\forall i > 2$: $A(i|1)$ tiene $F_1 = F_2$

$\det A = A_{11}\det A(1|1) - \underbrace{A_{21}}_{= A_{11}} \underbrace{\det A(2|1)}_{= \det(1|1)} + \sum_{i>2} (-1)^{i+1} A_{i1} \underbrace{\det A(i|1)}_{=0 \text{ Por Hip. inductiva}}$

Se cancelan $=0$.

Dem de la parte 2) del teorema

2) $A \xrightarrow{F_r + cF_s} B$ $c\in F$, $\det B = \det A$

$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_r + cF_s \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

$\det B = \underbrace{\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{c\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_s \\ \vdots \\ F_s \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}}_{0 \text{ Por lema}} \begin{matrix} \leftarrow r \\ \leftarrow s \end{matrix}$ Por lema anterior.

$= \det A$.

Lema: Si $A \in F^{n\times n}$ tiene una fila nula $\Rightarrow \det A = 0$.

dem: Inducción sobre n. Si $n=1$, $A=0$, $\det A = A = 0$

Si $n>1$ $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \det A(i|1)$

Si la fila $r = 0$, entonces $\Rightarrow A_{r1} = 0$ y $A(i|1)$ tiene una fila nula para todo $i \neq r$

HI $\Rightarrow \det A = 0$ $\square$ porque $A_{r,1} = 0$ ó $\det(c1\,1) = 0$.

Lema. Sea $E = e(I_n)$ matriz elemental

1) Si $e: cF_r \Rightarrow \det E = c$
2) Si $e: F_r \to F_r + cF_s$, $r \neq s \Rightarrow \det E = 1$
3) Si $e: F_r \leftrightarrow F_s$, $\Rightarrow \det E = -1$

Dem. Usamos que $\tilde{e}(E) = I_n$ y $\det(I_n) = 1$ - donde $\tilde{e}$: op. el inverso de e. Luego aplicamos el Teorema anterior.

Lema. Sean $A, E \in F^{n\times n}$ tq' E elemental. Entonces vale el $\det(EA) = \det E \cdot \det A$.

dem. Tenemos $EA = e(A)$, si $E = e(I_n)$. El resultado sigue del teorema anterior, junto con el lema que determina $\det E$.

tipo 1: $e: cF_r$ $\det(EA) = \det e(A) = c\det(A) = \overbrace{\det E}^{c} \cdot \det A$.

tipo 2 y 3: Ej. Lema

Corolario. $A \in F^{n\times n}$; $E_1, \dots, E_k \in F^{n\times n}$ elementales.

$$\det(E_k E_{k-1} \cdots E_1 A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(A) \quad \square$$

Teorema. $A \in F^{n\times n}$. Entonces A es invertible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Dem $\Rightarrow$ Como A invertible $\Rightarrow A = E_k \cdots E_1$, E_i elementales.

Por corolario anterior: $\det A = \underbrace{\det(E_k) \cdots \det(E_1)}_{\neq 0}$ pues por lema, $\det E_i \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sup. que $\det A \neq 0$. Sea R una MERF tq' $R = E_k \cdots E_1 A$, E_i elementales

$\Rightarrow \det R = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(A) \neq 0 \Rightarrow R$ No tiene filas nulas

Por corolario ant.

Teorema: $A, B \in F^{n\times n} \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Dem: Si A invertible. $A = E_k \cdots E_1$, E_i elementales.

$$\det(AB) = \det(E_k \cdots E_1 B) \underset{\text{Por Cor. anterior}}{=} \underbrace{\det E_k \cdots \det E_1}_{\det A} \cdot \det B$$

A no invertible. sabremos $\det(A) = 0$, Basta Probar que $\det(AB) = 0$

Si $\det(AB) \neq 0 \Rightarrow AB$ es invertible. Entonces $\exists C \in F^{n\times n}$ $A\underbrace{BC}_{\text{inversa de } A} = I_n$ inversa de $A = BC$

Defin. $A \in F^{m\times n}$. $A^t \in F^{n\times m}$

A^t: traspuesta de A.

$A \in F^{n\times n} \Rightarrow A^t \in F^{n\times n}$

Propiedades. $A \in F^{m\times k}$, $B \in F^{k\times n}$

1) $(A^t)^t = A$

2) $(AB)^t = B^t A^t$

3) si $k=m$. A invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible.

Dem: 1) Ej.

2) $(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} \overset{def}{=} \sum_{l=1}^{k} A_{jl} B_{li}$

3) $AA^{-1} = I = A^{-1}A \Rightarrow (AA^{-1})^T = I^T = (A^{-1}A)^T$

$(A^t)_{ij} = A_{ji}$ * $(A^t)^t = A$ * $(AB)^t = B^t A^t$ * A invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Lema. $E \in F^{n\times n}$ elemental, entonces E^t también es elemental del mismo tipo que E.
Además $\det(E) = \det(E^t)$

dem. Veamos los distintos casos.

E tipo 1. $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & c & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $c \in F - \{0\}$, $E^t = E$, y en este caso $\det(E) = \det(E^t) = c$

E tipo 2: $E = \begin{array}{c} \\ r \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ c & \ddots & \cdot & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $E^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, elemental, $\det E = \det(E^t) = 1$

E tipo 3 $E = \begin{array}{c} \\ r \rightarrow \\ s \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $(E^t)_{rs} = E_{sr} = 1 = E_{rs}$

$(E^t)_{sr} = E_{rs} = 1 = E_{sr}$

Obs. $A, B \in F^{n \times n}$ $\det(AB) = \underbrace{\det(A) \cdot \det(B)}_{\text{escalares}} = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA)$

Teorema $A \in F^{n \times n}$, entonces $\det(A) = \det(A^t)$

dem. Si A No es invertible $\Rightarrow \det(A) = 0$ y A^t tampoco invertible

$\therefore \det(A) = 0 = \det(A^t)$.

Si A es invertible : $A = E_k \cdots E_2 E_1$, donde $E_1, \dots, E_k$ son matrices elementales $n \times n$.

entonces $A^t = E_1^t \cdot E_2^t \cdots E_k^t$

$\det(A^t) = \det(E_1^t) \det(E_2^t) \cdots \det(E_k^t) =$ Por lema anterior $\det(E_1) \cdots \det(E_k)$

$= \det(A)$.

Notar que la columna j (fila j) de A^t es la fila j (columna j) de A. Todo lo que probamos se traduce, por teorema anterior, a un enunciado sobre las columnas $k_1 \dots k_n$

$(\text{teorema})^t$: 1) $A \xrightarrow{ck_i} B$, $\det B = c \det A$

2) $A \xrightarrow{k_r + ck_s} B$, $\det(B) = \det(A)$

3) $A \xrightarrow{k_r \leftrightarrow k_s} B$, $\det(B) = -\det(A)$

$(\text{teorema } 2)^t$. $A \in F^{n \times n}$

1) Si A tiene columna nula $\Rightarrow \det(A) = 0$

2) Si A tiene dos columnas iguales $\Rightarrow \det(A) = 0$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5 & -2 & i & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \underset{\sqrt{2}\,k_4}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & i & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$

columna 4

$\Rightarrow \det(A) = 0$!!!

2) $A = \begin{pmatrix} \text{Este ejemplo NO} \end{pmatrix}$

Cofactor ij de A. $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Por def. $\det A = \sum_{i=1}^{n} C_{i1} A_{i1}$

La matriz de cofactores de A es $C = (C_{ij})$

$C = Cof(A)$

Ej $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $Cof(A) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

es hacer el determinante de cada valor de la matriz

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Cof(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ $adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Def. La matriz adjunta de A se define como $Adj(A) = Cof(A)^t$

Teorema $A \in F^{n \times n}$. El $\det(A)$ se puede calcular con la misma fórmula por su expansión por cualquier columna ó fila de A.

Es decir:

1) Expansión por la columna j:

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$

2) expansión por la fila i:

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$

Dem. 1) sea k_j la j-ésima col. de A

$A = (k_1 k_2 \dots k_n)$ Sea $B = (k_j\ k_1\ k_2 \dots k_n)$

$\det A = (-1)^{j-1} \det B$

$B_{i1} = A_{ij}$, $B(i|1) = A(i|j) = \sum (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j)$ ✓

2) Usaremos que $\det A = \det(A^t)$. la desarrollo por la columna i usando que vale 1)

$$\det(A) = \det(A^t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A^t)_{ji} \det A^t(j|i)$$

$$(A^t)_{ji} = A_{ij} \quad A^t(j|i) = A(i|j)^t \quad = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det\left(A(i|j)^t\right)$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ i & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Desarrollo $\det(A)$ por la segunda col.

$$\det(A) = (-1)^{2+2} \cdot 1 \det\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = i\sqrt{2} + i = i(\sqrt{2}+1)$$

Teorema: $A \in F^{n \times n}$. Entonces

$$\sum_{l=1}^{n} C_{li} A_{lj} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

(C_{li} cofactor l,i)

Dem:

$j = i$: $\sum_{l=1}^{n} A_{li} C_{li} = \det(A)$ es teorema anterior parte 1) (desarrollo por la columna i)

$j \neq i$ Sea $B = (k_1 \ldots \underset{i}{k_j} \ldots \underset{j}{k_j} \ldots k_n)$, donde $A = (k_1 \ldots k_n) \Rightarrow \det B = 0$, pues tiene dos columnas iguales

Desarrollando $\det B$ por la columna i:

$$0 = \det B = \sum_{l=1}^{n} B_{li} \underbrace{C_{li}}_{} = \sum_{l=1}^{n} A_{lj} C_{li}$$

El cofactor l,i de B es igual al $\underbrace{\text{cofactor } l,i \text{ de } A}_{C_l}$ □

Teorema. $A \in F^{n \times n}$. Entonces $Adj(A) \cdot A = \det A \, I_n$.

dem: Sean $1 \leq i, j \leq n$, calculamos

$$(Adj(A) A)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} Adj(A)_{il} A_{lj} = \sum_{l=1}^{n} C_{li} A_{lj} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{anterior}}}{=} \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Corolario. $A \in F^{n \times n}$ inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Adj(A)$$

obs: $cB = \begin{pmatrix} cB_{11} & cB_{12} & \cdots & cB_{1n} \\ cB_{21} & \cdots & & cB_{2n} \\ cB_{n1} & \cdot & & cB_{nn} \end{pmatrix}$

$\det(cB) = c^n \det B$

Dem. Calculemos: Teorema

$$\frac{1}{\det A} \cdot \left[Adj(A) \cdot A \right] = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[\det(A) \cdot I_n \right] = I_n$$

Luego $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)$. $\square$