Bachmann Lautaro   Parcial AYED

Question 5

Not yet answered

Marked out of 26.00

Flag question

Considerá la función f que calcula el k-ésimo ítem de la n-ésima fila del triángulo de Pascal:
f.n.0=1
f.n.(k+1) = (f.n.k * (n - k)) / (k+1)

Se quiere construir un programa que calcule en r el K-ésimo ítem de la N-ésima fila:
Const N,K : Int;
Var r : Int;
$\{ N > 0 \wedge 0 \leq K \leq N \}$
S
$\{ r = f.N.K \}$

Estructura del programa:

$\{P\}$
S_0
$\{INV\}$
do $B \rightarrow$
$\{INV \wedge B\}$
S_1
$\{INV\}$
od
$\{Q\}$

1. Hallar invariante:

Usemos la tecnica de reemplazar constantes por variables:

$I: r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K$

2. Inicialización: $¿P \Rightarrow I?$

Como falta la variables r, k, procederemos a buscar un S_0 de la forma $r, k := E, F$ para ello asumamos $P: N>0 \wedge 0 \leq K \leq N$ y veamos la wp:

$\downarrow$

$wp.(r,k := E,F).(r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K)$

$\equiv$ { Def. wp asignación }

$E = f.N.F \wedge 0 \leq F \leq K$

$\equiv$ { Elijo $F=0$ }

$E = f.N.0 \wedge 0 \leq 0 \leq K$

$\equiv$ { Suposición $0 \leq K \leq N$ }

$E = f.N.0 \wedge True$

$\equiv$ { Elemento neutro conjunción }

$E = f.N.0$

$\equiv$ { Caso base de f, $f.n.0 = 1$ }

$E = 1$

$\equiv$ { Elijo $E=1$ }

$1 = 1$

$\equiv$ { lógica }

True

Por ende, tenemos que $S_0 \equiv r,k := 1,0$

3. Finalización: $I \wedge \neg B \Rightarrow Q$

Elegimos $B \equiv k \neq K$

$(r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K) \wedge \underline{\neg(k \neq K)}$

$\Rightarrow r = f.N.K$

$\equiv$ { lógica }

$r = f.n.k \wedge 0 < n \leq N \wedge 0 \leq k \leq K \wedge k = K$

$\Rightarrow r = f.N.K$

$\equiv$ { Suponemos antecedente y demostramos consecuente }

$r = f.N.K$

$\equiv$ { Por suposición $k = K$ }

$r = f.N.k$

$\equiv$ { Suposición r }

True

Programa hasta ahora:

{P}

$r, k := 1, 0;$

{INV}

do $k \neq K \rightarrow$

{INV ∧ B}

S_1

{INV}

od

{Q}

4. Cota candidata: $K - k$

5. Cuerpo del bucle: $\{I \wedge B\}\ S_1\ \{I\}$

Podemos probar encontrar una asignación de la forma $r, k := E, k+1$ para ello asumimos $I \wedge B$ $(r = f.N.k \wedge 0 \le k \le K \wedge k \neq K)$ y vemos la wp:

$wp.(r, k := E, k+1).(r = f.N.k \wedge 0 \le k \le K)$

$\equiv$ { Def wp asignación }

$E = f.N.(k+1) \wedge \underline{0 \le k+1 \le K}$

$\equiv$ { Por suposición $0 \le k \le K \wedge k \neq K$ }

$E = f.N.(k+1) \wedge$ True

$\equiv$ { Lógica }

$E = f.N.(k+1)$

$\equiv$ { Def recursiva de f }

$E = (f.N.k * (N-k)) / (k+1)$

$\equiv \{$ Suposicion $r = f.N.k$ $\}$
$E = (r * (N-k)) / (k+1)$
$\equiv \{$ Elijo $E = (r * (N-k)) / (k+1)$ $\}$
$(r * (N-k)) / (k+1) = (r * (N-k)) / (k+1)$
$\equiv \{$ Logica $\}$
True

Por ende, tenemos que $S_1 \equiv r, k := (r * (N-k)) / (k+1), k+1$

6. Demostrar que la cota es positiva: $I \wedge B \Rightarrow t \geq 0$
$r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K \wedge k \neq K$
$\Rightarrow K - k \geq 0$
$\equiv \{$ Suponemos antecedente y demostramos consecuente $\}$
$K - k \geq 0$
$\equiv \{$ Aritmetica $\}$
$K \geq k$
$\equiv \{$ Aritmetica $\}$
$k \leq K$
$\equiv \{$ Por suposicion $0 \leq k \leq K \wedge k \neq K$ $\}$
True

7. Demostrar que la cota disminuye: $\{I \wedge B \wedge t = T\}\ S_1\ \{t < T\}$
$\{r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K \wedge k \neq K \wedge K - k = T\}$
$r, k := (r * (N-k)) / (k+1), k+1$
$\{K - k < T\}$
$\equiv \{$ Asumimos precondicion y vemos la wp $\}$
$wp.(r, k := (r * (N-k)) / (k+1), k+1)).(K - k < T)$
$\equiv \{$ Def wp asignacion $\}$
$K - (k+1) < T$

$\equiv \{ \text{Aritmetica} \}$

$K - k - 1 < T$

$\equiv \{ \text{Suposicion } T \}$

$K - k - 1 < K - k$

$\equiv \{ \text{Aritmetica/logica} \}$

True

Resultado Final:

$\{ N < 0 \wedge 0 \leq K \leq N \}$

$r, k := 1, 0;$

$\{ I : r = f.N.k \wedge 0 \leq k \leq K \}$

do $k \neq K \rightarrow$

$\{ I \wedge k \neq K \}$

$r, k := (r * (N - k)) / (k + 1), k + 1$

$\{ I \}$

od

$\{ r = f.N.K \}$

Question 6
Not yet answered
Marked out of 35.00
Flag question

Considerando que 2^i no es una expresión del lenguaje de programación, derivá el programa y respondé:

Const N: Int, A: Array[0,N) of Int;
Var r : Bool;
$\{ N \geq 0 \}$
S
$\{ r = \langle \forall i : 0 \leq i < N : A.(N - (i + 1)) \leq 2^i \rangle \}$

1. Encontrar invariante:
Usemos la tecnica de reemplazar constante por variable y tomar termino de conjuncion.
$I: r = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N$
Basandonos en el invariante podemos intuir que $B \equiv n \neq N$
Cota candidata: $N - n$
Cuerpo del bucle
Para ver si hace falta fortalecer pasamos directo al cuerpo del bucle.
Veamos si podemos encontrar un S_1 de la forma $r, n := E, n+1$.

$\langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge n \neq N$
$\Rightarrow wp.(r, n := E, n+1).(r = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N)$
$\equiv$ { Def wp asignacion }
$E = \langle \forall i : 0 \leq i < (n+1) : A.((n+1)-(i+1)) \leq 2^i \rangle \wedge \underline{0 \leq (n+1) \leq N}$
$\equiv$ { Suposicion $0 \leq n \leq N \wedge n \neq N$ }
$E = \langle \forall i : 0 \leq i < (n+1) : A.((n+1)-(i+1)) \leq 2^i \rangle$
$\equiv$ { Aritmetica }
$E = \langle \forall i : 0 \leq i < n \vee i = n : A.(n-i) \leq 2^i \rangle$
$\equiv$ { Particion de rango y rango unitario }
$E = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-i) \leq 2^i \rangle \wedge A.(n-n) \leq 2^n$
Como no podemos hacer nada más hay que fortalecer el invariante.

Encontrar invariante:
$I: r = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge K = 2^n$
$B \equiv n \neq 0$

Cuerpo del bucle:

Vamos directo al cuerpo del bucle para ver si ahora que fortalecimos el invariante podemos hacer algo.

Veamos si podemos encontrar un S_1 de la forma $r, n, k := E, n+1, F$

Asumamos $r = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^\wedge i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge k = 2^\wedge n \wedge n \neq 0$

y veamos la wp:

$wp.(r, n, k := E, n+1, F).($

$\quad r = \langle \forall i : 0 \leq i < n : A.(n-(i+1)) \leq 2^\wedge i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge k = 2^\wedge n)$

$\equiv$ { Def wp asignacion }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i < n+1 : A.(n+1-(i+1)) \leq 2^\wedge i \rangle \wedge \underline{0 \leq n+1 \leq N} \wedge F = 2^\wedge(n+1)$

$\equiv$ { Suposicion $0 \leq n \leq N \wedge n \neq 0$ }

$E = \langle \forall i : 0 \leq i < n+1 : A.(n+1-(i+1)) \leq 2^\wedge i \rangle \wedge F = 2^\wedge(n+1)$