

3. [Valor del Ejercicio: 25 pto(s)]

Dadas las siguientes funciones

```
concatena :: [[a]] -> [a]
concatena [] = [] --- (1)
concatena (xs:xss) = xs ++ (concatena xss) --- (2)
```

```
sum :: [Int] -> Int
sum [] = 0 --- (3)
sum (x:xs) = x + sum xs --- (4)
```

```
cuenta :: [[Int]] -> Int
cuenta [] = 0 --- (5)
cuenta (xs:xss) = (sum xs) + (cuenta xss) --- (6)
```

demuestre por inducción la siguiente propiedad

$$\text{sum (concatena xss)} = (\text{cuenta xss}).$$

Ayuda: Pueden usar sin demostrar la propiedad vista en clase:

$$\text{sum (xs ++ ys)} = \text{sum xs} + \text{sum ys} \quad \text{--- (7).}$$

Se debe indicar claramente la resolución del caso base, la hipótesis inductiva y la resolución del caso inductivo. Utilizar la notación vista en clase, subrayando y justificando cada paso.

Caso base: Se reemplaza a xss por una lista vacía ([]).

$$\text{sum (concatena xss)} = (\text{cuenta xss}) \quad \textbf{(HI)}$$

$$\begin{aligned} \text{sum (concatena [])} &= (\text{cuenta []}) \\ &\equiv \{\text{Por (1) y (5)}\} \\ &\quad \text{sum []} = 0 \\ &\equiv \{\text{Por (3)}\} \\ &\quad 0 = 0 \\ &\equiv \{\text{Por reflexividad del =}\} \\ &\quad \text{True} \end{aligned}$$

Caso inductivo: Se reemplaza a xss por una lista no vacia (xs:xss).

$$\text{sum (concatena xss) = (cuenta xss) (HI)}$$

$$\begin{aligned} \text{sum (concatena (xs:xss))} &= (\text{cuenta (xs:xss)}) \\ &\equiv \{\text{Por (2)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sum (xs ++ (concatena xss))} &= (\text{cuenta (xs:xss)}) \\ &\equiv \{\text{Por (6)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sum (xs ++ (concatena xss))} &= (\text{sum xs}) + (\text{cuenta xss}) \\ &\equiv \{\text{Por (7), xs:=xs; ys:=concatena xss }\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{sum xs}) + \text{sum (concatena xss)} &= (\text{sum xs}) + (\text{cuenta xss}) \\ &\equiv \{\text{Por HI}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{sum xs}) + (\text{cuenta xss}) &= (\text{sum xs}) + (\text{cuenta xss}) \\ &\equiv \{\text{Por reflexividad del =}\} \end{aligned}$$

True