(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $P(n) =$ " $\sum_{K=1}^{n}(a_K+b_K) = \sum_{K=1}^{n} a_K + \sum_{K=1}^{n} b_K$ "

Caso base: Veamos si se cumple $P(1)$

$$\sum_{K=1}^{1}(a_K+b_K) = \sum_{K=1}^{1} a_K + \sum_{K=1}^{1} b_K \qquad \text{def. rec. sumatoria}$$

$$(a_1+b_1) = a_1 + b_1 \qquad \text{Asoc.}$$

$$a_1 + b_1 = a_1 + b_1 \quad \checkmark$$

Hipotesis Inductiva:

Supongamos que $P(J)$ se cumple para cierto $K \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \quad P(J) \Rightarrow P(J+1)$$

$$\sum_{K=1}^{J+1}(a_K+b_K) = \sum_{K=1}^{J}(a_K+b_K) + (a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{def. rec. Sumatoria.}$$

$$\sum_{K=1}^{J+1} a_K + \sum_{K=1}^{J+1} b_K = \sum_{K=1}^{J} a_K + \sum_{K=1}^{J} b_K + (a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{Hip. Ind., def. rec. sumatoria}$$

$$\sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} = \sum_{K=1}^{J} a_K + \sum_{K=1}^{J} b_K + (a_{J+1}+b_{J+1}) \qquad \text{Conmutatividad}$$

$$\sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} = \sum_{K=1}^{J} a_K + a_{J+1} + \sum_{K=1}^{J} b_K + b_{J+1} \quad \checkmark$$

Por principio de inducción, queda demostrado que $P(J)$ se cumple para todo $J \in \mathbb{N}$.