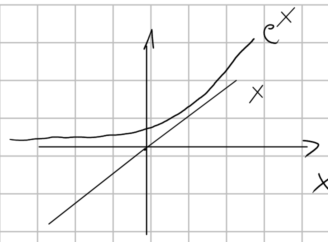
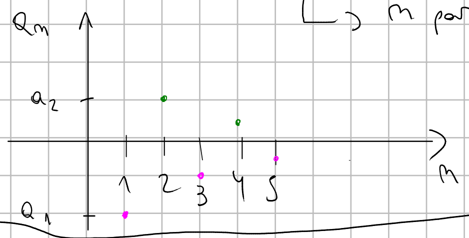
Ejercicio 2c

$a_n = \frac{(-1)^n \, n}{e^n}$ → n impares → $-\frac{n}{e^n}$

→ n par → $\frac{n}{e^n}$





iii) a_n es alternante.

ii) No puedo decir que es positiva o negativa, porque es alternante.

i) Para mostrar que está acotada vemos que:

- cuando n impar $a_n = -\frac{n}{e^n} < 0$ para cualquier n impar

Veamos que $a_n = \frac{-n}{e^n}$ es creciente:

sea $f = -\frac{x}{e^x}$, $f' = -\frac{(e^x - e^x x)}{(e^x)^2} \overset{?}{>} 0$, $(e^x)^2 > 0 \Rightarrow$ basta ver que

$-e^x(1-x) > 0 \Rightarrow e^x(1-x) < 0 \Rightarrow 1-x < 0 \Rightarrow 1 < x$ se cumple $\Rightarrow$

mostramos que f es creciente y $a_n = f(n)$ es creciente, con n impar

$\Rightarrow$ si a_n con n impar es creciente y $a_n < 0 \Rightarrow$ está acotada por arriba por 0 y por abajo por $a_1 = -1/e$

- cuando n par $a_n = \frac{n}{e^n} > 0$ para cualquier n par

Veamos que $a_n = \frac{n}{e^n}$ es decreciente:

sea $f = \frac{x}{e^x}$, $f' = \frac{(e^x - e^x x)}{(e^x)^2} \overset{?}{<} 0$, $(e^x)^2 > 0 \Rightarrow$ basta ver que

$e^x(1-x) < 0 \Rightarrow 1-x < 0 \Rightarrow 1 < x$ se cumple $\Rightarrow$

mostramos que f es decreciente y $a_n = f(n)$ es decreciente, con n par

$\Rightarrow$ si a_n con n par es decreciente y $a_n > 0 \Rightarrow$ está acotada por abajo por 0 y por arriba por $a_2 = 2/e^2$

- Luego $\forall n$ la sucesión a_n está acotada por arriba por a_2 y por abajo por a_1.

iv) Para ver que converge, uso el siguiente teorema.

Teorema 1: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. (26)

Si muestro que el lim|a_n|=0, entonces muestro que a_n converge y además que converge a 0.

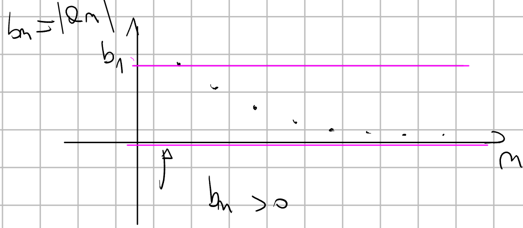
$$|(-1)^n| = 1$$

$$b_n = |a_n| = |(-1)^n| \left|\frac{n}{e^n}\right| = \frac{n}{e^n}$$

Sea $f = \frac{x}{e^x}$, $f' = \frac{e^x - xe^x}{e^{x^2}} \overset{?}{<} 0$ (☆ se muestra otra forma de ver que b_n es decreciente)

$e^x(1-x) < 0$, $1-x < 0$ $\quad 1 < x \Rightarrow$ mostramos que f es decreciente.

Luego b_n es decreciente. Como $b_n = |a_n| \geq 0 \Rightarrow b_n$ está acotada por abajo por 0 y por arriba por $b_1 = 1/e$.



$\Rightarrow b_n$ es decreciente y b_n está acotada por abajo $\Rightarrow$ uso el siguiente teorema (ii)

Teorema 2:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{b_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 = \inf(\{b_n\})$

$\Rightarrow b_n$ converge y $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf(\{b_n\})$

Ahora debo ver que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ para usar el teorema 1.

$b_n = \frac{n}{e^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n}$; $\to f = \frac{x}{e^x}$ $\quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \to 0$

$\Rightarrow b_n = f(n)$ uso teorema y si $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y

por el teorema 1, $\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$.

$\Rightarrow a_n$ converge ✓

Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones). (27)

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

$b_n = |a_n|$

$b_{n+1} \overset{?}{<} b_n$ decrecer

$\phantom{b_{n+1}} >$ crecer

$b_{n+1} \overset{?}{<} b_n$ decrece?

$\frac{n+1}{e^{n+1}} \overset{?}{<} \frac{n}{e^n} \Rightarrow (n+1)e^n < n e^{n+1}$

$n+1 < ne$

$\frac{n+1}{n} < e$

$1 + \frac{1}{n} < e$ ✓ $\Rightarrow$ b_n decrece $n \geq 1$

Ejercicio 3 f)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{1}{1}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{n=1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}}_{n=2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}}_{n=3} + \dots +$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{2(j-1)-1}} \boxed{- \cancel{\frac{1}{2(j-1)+1}}}}_{n=j-1} + \underbrace{\boxed{\cancel{\frac{1}{2j-1}}} \boxed{- \frac{1}{2j+1}}}_{n=j}\Bigg) =$$

$$2j-2+1 = (2j-1)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right) = \frac{1}{2}$$