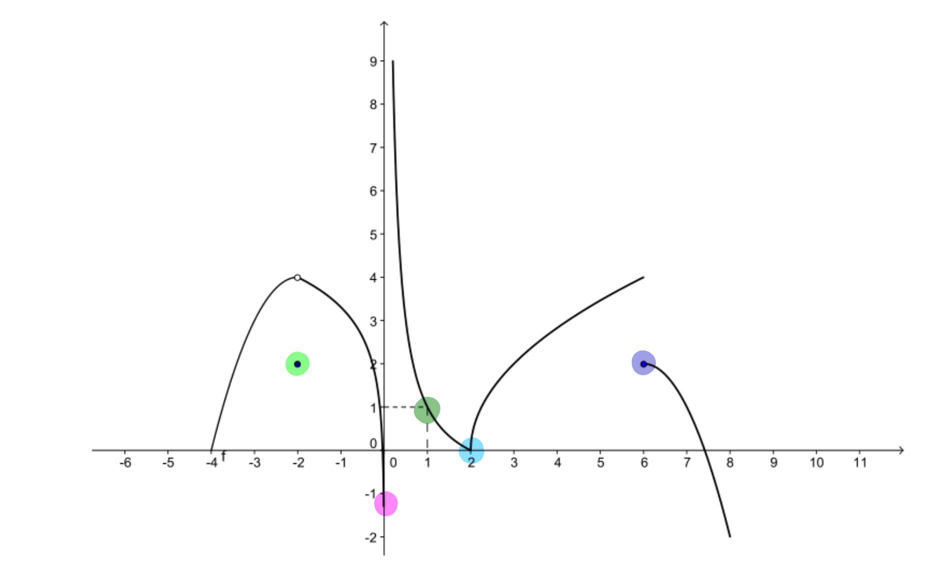
2. Determine si la función g, del ejercicio 9 de la Guía 3, es continua en $x = 1, 2, 6, -2, 0$ y justifique su respuesta.



¿Es $g(x)$ continua en $a=1$?

$a \in Dom(g(x))$ ✓

$\exists \lim_{x \to a} g(x)$ ✓

$g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$ ✓

¿Es $g(x)$ continua en $a=6$?

No, ya que se puede observar una discontinuidad de salto, lo cual significa que los limites laterales no son iguales.

¿Es $g(x)$ continua en $a=-2$?

No, ya que se puede observar una discontinuidad evitable, es decir, $g(a) \neq \lim_{x \to a} g(x) \vee \nexists g(a)$.

¿Es $g(x)$ continua en $a=0$?

No, ya que se puede observar una discontinuidad esencial, lo cual nos dice que uno de los limites laterales de $g(x)$ tiende al infinito, mas concretamente, el limite por derecha

3. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función dada es continua en el valor indicado.

a) $f(x) = (x + 2x^3)^4$ en $x = -1$

b) $f(t) = \dfrac{t^2}{(t+1)^3}$ en $t = 2$

a) • $a \in \text{Dom } f(x)$: si, ya que el dominio de los polinomios es $\mathbb{R}$

• $\exists \lim_{x\to -1} f(x)$: $\lim_{x\to -1} f(x) = (-1+2.(-1)^3)^4 = (-1-2)^4 = (-3)^4 = 81$ ✓

• $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$ ✓

b) • $a \in \text{Dom } f(t)$: $\text{Dom } f(t) = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$ $\therefore a \in \text{Dom } f(t)$ ✓

• $\exists \lim_{t\to 2} f(t) = \dfrac{2^2}{(2+1)^3} = \dfrac{4}{3^3} = \dfrac{4}{27}$ ✓

• $f(2) = \lim_{t\to 2} f(t)$ ✓

Solución elegante:

a) Como la suma y producto de funciones continuas, es otra funcion continua, todo polinomio es continuo en $\mathbb{R}$

b) Un cociente entre polinomios será continuo en todos los puntos donde no se anule el denominador, en este caso, $f(t)$ es continua en todos los puntos menos -1, por ende, $f(t)$ es continua en $t=2$.

4. Justifique por qué la función $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$ e indique qué propiedades de la continuidad de funciones utiliza.

Para que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[-4,4]$, tiene que cumplir lo siguiente:

• $f(x)$ es continua en $(-4,4)$:

Si, ya que el dominio de $\sqrt{16-x^2}$ es $[-4,4]$, y como las raices son continuas dentro de su dominio $\Rightarrow f(x)$ es continua en $(-4,4)$.

• Es continua por derecha en -4.

$$f(-4) = \lim_{x \to -4^+} f(x) \Rightarrow -4\sqrt{16-(-4)^2} = -4\sqrt{16-(-4)^2} \checkmark$$

• Es continua por izquierda en 4.

$$f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x) \Rightarrow 4\sqrt{16-(4)^2} = -4\sqrt{16-(4)^2} \checkmark$$

5. Determine, en caso de que los haya, en qué puntos es discontinua la función f. En cada caso, indique si se trata de una discontinuidad evitable, de salto o esencial.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

c) $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a) Es continua, ya que los polinomios son continuas en $\mathbb{R}$.

b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 2] \cup (2, \infty)$

Veamos el limite de $f(x)$ cuando x tiende a 2.

$$\lim_{x \to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = L \wedge \lim_{x \to 2^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$ $\therefore$ hay un discontinuidad de salto cuando $x = 2$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ Continua para $(-\infty,2) \cup (2,\infty)$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = L \iff \lim_{x\to 2^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to 2^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \iff \lim_{x\to 2} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to 2} f(x) = \infty$$

$\therefore \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ la función posee una discontinuidad esencial, ya que los limites laterales tienden al infinito.

6. *a)* Determine la constante c para la cual la función g resulta continua en $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

b) Grafique g con el valor c obtenido en el ítem anterior.

$$\lim_{x\to 4} f(x) = L \iff \lim_{x\to 4^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to 4^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 - c = 4^2 - c$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} cx + 20 = c.4 + 20$$

Para que exista limite y $g(x)$ sea continua ambos limites laterales deben ser iguales

$\therefore \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow 4^2 - c = c.4 + 20$

$-c - 4c = -16 + 20 \Rightarrow -5.c = 4 \Rightarrow c = \frac{-4}{5}$

Veamos como termina el límite con $c = \frac{-4}{5}$

$\lim_{x\to 4} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to 4^+} f(x) = L$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 - \left(\frac{-4}{5}\right) = 4^2 + \frac{4}{5} = 16 + \frac{4}{5} = \frac{80+4}{5} = \frac{84}{5}$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{-4}{5}x + 20 = \frac{-4}{5}.4 + 20 = \frac{-16}{5} + 20 = \frac{-16+100}{5} = \frac{84}{5}$

$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{-4}{5}x + 20 = \frac{-4}{5}.4 + 20 = \frac{-16}{5} + 20 = \frac{-16+100}{5} = \frac{84}{5}$

$\therefore \quad c = \frac{-4}{5} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 4} f(x)$

$4 \in \mathrm{Dom}\, f(x)$ ✓

$f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) \Rightarrow \frac{-4}{5}.4 + 20 = \frac{84}{5} \Rightarrow \frac{-16}{5} + 20 = \frac{84}{5} \Rightarrow \frac{-16+100}{5} = \frac{84}{5}$

$\Rightarrow \frac{84}{5} = \frac{84}{5}$

$\therefore$ podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $a=4$ si $c = \frac{-4}{5}$.

7. Determine el dominio de f en los distintos casos y decida si existe una función F continua cuyo dominio es todo el conjunto $\mathbb{R}$ y que satisface $F(x) = f(x)$ si x está en el dominio de f. ¿Cómo está definida F, en caso de que exista?.

a) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t^3+3t^2+7}}{t+2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

a) $\text{Dom} f = \{t \in \mathbb{R} / t \neq -2\}$, ya que -2 cancela el denominador.
Veamos si existe límite para cuando t tiende a -2

$$\lim_{t\to -2} f(t) = L \iff \lim_{t\to -2^-} f(t) = L \ \wedge \ \lim_{t\to -2^+} f(t) = L$$

$$\lim_{t\to -2^-} f(t) = \frac{\sqrt[3]{(-2)^3+3.4+7}}{-2+2} = \frac{\sqrt[3]{(-2)^3+3.4+7}}{0} \Rightarrow \nexists \lim_{t\to -2^-} f(t)$$

$$\lim_{t\to -2^+} f(t) = \frac{\sqrt[3]{(-2)^3+3.4+7}}{-2+2} = \frac{\sqrt[3]{(-2)^3+3.4+7}}{0} \Rightarrow \nexists \lim_{t\to -2^+} f(t)$$

$\therefore$ existe una discontinuidad esencial y además no existe $F(x)$ que sea continua.

b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

$\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$
Veamos si existe límite para x que tiende a -1.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1^3}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1^2)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} x^2-x+1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2-x+1 = -1^2+1+1 = 1+1+1 = 3$$

$\therefore$ Existe $F(x) = f(x)$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$, y se define de la sig. manera:

$$F(x) \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ $= \dfrac{x^2 - 2x - 4x + 8}{x^2 - 1x - 4x + 4} = \dfrac{x(x-2) + 4(x+2)}{x(x-1) + 4(x+1)} = \dfrac{(x-2).(x-4)}{(x-1).(x-4)}$

$\therefore \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \dfrac{(-4-2).\cancel{(-4+4)}}{(-4-1).\cancel{(-4+4)}} = \dfrac{-4-2}{-4-1} = \dfrac{-6}{-5} = \dfrac{+6}{5}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(1-2).(1+4)}{(1-1).(1+4)} = \dfrac{1.5}{0.5} = \dfrac{5}{0} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

$\therefore$ existe una discontinuidad esencial y ademas no existe $F(x)$ que sea continua, sin embargo podemos extender la función para que sea continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

8. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay una solución de la ecuación en el intervalo dado:

a) $x^3 - 3x = -1$ en $(0, 1)$
b) $x^5 - 2x^2 - x - 3 = 0$ en $(-2, 3)$
c) $x^3 + 2x = x^2 + 1$ en $(0, 1)$

a) Tomemos el intervalo cerrado $[0,1]$:

- $f(x)$ es un polinomio, por ende es continua en $\mathbb{R}$ $\therefore$ también es continua en $[0,1]$

Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, somos capaces de usar TVI.

Evaluemos la función en los extremos del intervalo:

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(1) = 1 - 3 = -2$$

El TVI nos dice que si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a) < N < f(b)$ ó $f(b) < N < f(a) \Rightarrow \exists c, a < c < b \mid f(c) = N$

Ahora tomemos que $N = -1 \Rightarrow f(b) < -1 < f(a) \Rightarrow -2 < -1 < 0$

$\therefore$ somos capaces de afirmar que existe un $c \in (0,1)$, tal que $f(c) = -1$

Por ende, queda demostrado que la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo dado.

$\overbrace{2.2}^{4}$ $\overbrace{.2}^{8}$ $\overbrace{.2}^{16}$ $\overbrace{.2}^{32}$

$\overbrace{3.3}^{9}$ $\overbrace{.3}^{27}$ $\overbrace{.3}^{81}$ $\overbrace{.3}^{243}$

$b)$ $\overbrace{x^5 - 2x^2 - x - 3}^{f(x)} = 0$ en $(-2, 3)$

Tomemos el intervalo cerrado $[-2,3]$

Evaluemos la función en los extremos del intervalo.

$f(-2) = (-2)^5 - 2(-2)^2 - (-2) - 3 = -32 - 2.4 + 2 - 3 = -32 - 8 - 1 = -41$

$f(3) = 3^5 - 2.3^2 - 3 - 3 = 243 - 18 - 6 = 243 - 24 = 219$

Por TVI sabemos que $f(a) < N < f(b) \Rightarrow \exists c,\ a < c < b \,/\, f(c) = N$

$\therefore f(-2) < 0 < f(3) \Rightarrow -41 < 0 < 219 \Rightarrow \exists c,\ -2 < c < 3 \,/\, f(c) = N$

Por ende, queda demostrado que existe una solución para la ecuación en el intervalo dado.

$c)$ $x^3 + 2x = x^2 + 1$ en $(0, 1)$ $\quad x^3 + 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2x = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

Tomemos el intervalo cerrado $[0,1]$ y evaluemos la función en sus extremos.

$f(0) = 0 \quad ; \quad f(1) = \cancel{1} - \cancel{1} + 2 = 2$

Como la función es un polinomio $\Rightarrow$ es continua en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es continua en $[0,1]$

$\therefore$ por TVI sabemos que como $\underbrace{0}_{f(0)} < 1 < \underbrace{2}_{f(1)} \Rightarrow \exists c,\ 0 < c < 1 \,/\, f(c) = 1$

$\therefore$ Queda demostrado que la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo dado.

9. Empleando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 0$.

$a)$ $f(x) = \ln(x) - \operatorname{sen}(x)$, en $[1, \pi/2]$. $\qquad b)$ $f(x) = 2^x + x - 2$, en $[0, 1]$.

b) Tenemos el intervalo $[0,1]$

como la función es un polinomio $\Rightarrow$ es continua en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es continua en $[0,1]$

Ahora evaluemos la función en los extremos del intervalo:

$f(0) = 1 + 1 - 2 = 0 \quad ; \quad f(1) = 2 + \cancel{1} - \cancel{2} = 2$

$\therefore$ por TVI sabemos que como $0 \leq 0 \leq 2 \Rightarrow \exists c,\ 0 \leq 0 \leq 1 \,/\, f(c) = 0$

Por ende queda demostrado que existe un número c tal que $f(c) = 0$.

10. Determine si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass en el intervalo indicado. De ser así, indique cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo que alcanza la función:

a) $f(x) = \cos x$, en $[-\pi/3, \pi/2]$.

b) $f(x) = \tan x$, en $[0, \pi]$ con $f(\pi/2) = 0$.

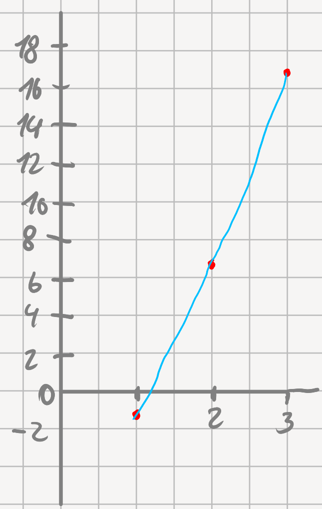
c) $f(x) = 1 - 2x^2$, en $[1, 3]$.

c) • El intervalo es cerrado.

• La función es continua en el intervalo: Es polinomio.

Evaluemos la función en los extremos del intervalo.

$f(1) = 1-2.1 = -1$; $f(2) = 1-2.4 = 7$ $f(3) = 1-2.9 = 17$



El valor máximo que alcanza la función en el intervalo dado es 17, y el mínimo es -1.