Resumen Algebra Lineal Parcial 3 (SIN REVISAR) - FAMAF

Profesor: Alejandro Leopoldo Tiraboschi

Lautaro Bachmann

Contents

1 Practico 6

1.1 13

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.
- *a)* Los conjuntos del ejercicio (10).
- *b)* $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- *c)* $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

1.2 Encontrar vector para completar base

1.2.1 Metodo 1

Tirar un vector random (buscando siempre que no sea LD) y verificar que los vectores sean LI

1.2.2 Metodo 2

1. Caracterizar el espacio con ecuaciones.

- $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = (b_1, \ldots, b_n)$
- Transformar esto a matriz y reducir con Gauss

2. Obtener ecuacion implicita del espacio
3. Buscar algun vector x que no cumpla con la definicion

- Por ejemplo, si la condicion del subespacio es que $b_1 = b_3$ entonces tomamos $(0, 0, 1, 0)$, ya que no cumple con esta condicion.

4. Plantear que como el nuevo vector no pertenecea al espacio entonces completa la base

1.3 14)

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

1.3.1 Howto

El unico subespacio de dimension 0 es $\{0\}$

El unico espacio de dimension 3 contenido en $\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{R}^3$

1.4 15)

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

1.5 16)

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

1.5.1 $\mathbb{C}$-espacio vectorial

Cuando trabajamos en este espacio, los escalares de una combinacion lineal puede ser números complejos.

Por ende, con tomar la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es suficiente, ya que los coeficientes que multiplican a esta base y forman el espacio pueden ser complejos, por ende, pueden describir todas las posibles combinaciones lineales.

1.5.2 $\mathbb{R}$-espacio vectorial

Cuando trabajamos en este espacio, los escalares de una combinacion lineal son números reales.

Por ende, debemos contemplar a los números complejos en la base para que esta pueda describir todas las posibles combinaciones lineales. Esto es debido a que necesitamos describir tanto la parte real como la imaginaria de un número.

1.6 17)

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) Los subespacios del ejercicio (8).

b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z,\ w = x + z,\ u = 2x - 3z\}$.

c) $W = \langle (1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.

e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1.6.1 Encontrar base

Corolario 4.4.3. *Sean* A *matriz* $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ *y* R *la MRF equivalente por filas a* A. *Entonces, el espacio fila de* A *es igual al espacio fila de* R *y las filas no nulas de* R *forman una base del espacio fila de* A.

$W = \langle$ filas de A $\rangle = \langle$ filas no nulas de R $\rangle$

El espacio generado por las filas de A, es el el mismo que el espacio generado por las filas no nulas de R. Siendo R la MRF de A

Se hacen sumas y restas pero no permutaciones

1.7 18)

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1) \rangle.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

1.7.1 Encontrar interseccion de subespacios

Para encontrar la interseccion de subespacios podemos encontrar la descripcion implicita de los subespacios y luego definir uno nuevo con la conjuncion de ambas

1.7.2 Encontrar generadores subespacio

1. Pasar a descripcion parametrica
2. Separar el vector de la parametrica en varios vectores hasta tener algo de la forma:

- $\lambda_1(a_1, a_2, a_3) + \cdots + \lambda_n(b_1, b_2, b_3)$
- Los vectores a y b son los generadores del espacio

3. Escribir los generadores

1.7.3 Suma de subespacios

1. Concatenar los generadores de ambos subespacios

- Sean G_{W_1} y G_{W_2} los generadores de W_1 y W_2
- $W_1 + W_2 = \langle G_{W_1}, G_{W_2} \rangle$

2. Encontrar base para $W_1 + W_2$

1.7.4

1.8 19)

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.

c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

d) ⓐ $\{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

e) ⓐ $\{1, \text{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) ⓐ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

2 Practico 7

2.1 1)

(1) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

a) La traza $\text{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ (recordar ejercicio (9) *b)* del Práctico 3)

b) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

c) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$

d) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$

e) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

2.1.1 Sacar escalar determinante

$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$

2.1.2 Howto

1. Chequear si preserva el 0

- $T(0) = 0$

2. Chequear $T(v + \lambda v') = T(v) + \lambda T(v')$

- Cuidado que puede dar falsos positivos. No olvidar chequear (1)

3. Si se complica chequear por separado:

- $T(v + v') = T(v) + T(v')$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

2.2 2)

(2) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$.

a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

2.2.1 Conjugado número complejo

$$z = a + bi$$
$$\overline{z} = a - bi$$

2.2.2 Diferencia entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$

Se cambia a que espacio pertenecen los escalares?

2.3 3)

(3) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$.

a) Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$.

b) Calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T donde en cada coordenada del vector de llegada hay una combinación lineal de x, y, z.

c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. En esta parte del ejercicio escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como columnas.

Observación. En el ejercicio (3) *b)* lo que hicimos fue deducir cuánto vale la transformación lineal en todos los vectores de $\mathbb{K}^3$ a partir de saber cuánto vale la transformación lineal en la base canónica. A partir del valor de T en una base vectores podemos saber el valor de T en todo el espacio. Esto vale para cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales y cualquier base porque las transformaciones lineales respetan combinaciones lineales y todo vector de un espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de una base.

Observación. La matriz del ejercicio (3) *c)* es la matriz de la transformación lineal T con respecto a la base canónica. En el próximo práctico aprenderemos a calcular la matriz de una transformación lineal con respecto a distintas bases.

Observación. Para la resolución de los siguientes ejercicios se debe tener en cuenta la proposición 5.2.7 y el ejemplo 5.2.8 de las notas de la materia, versión 2024. Recordemos brevemente el resultado:

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matriz asociada. Entonces

- *El núcleo de T es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.*
- *La imagen de T es el conjunto de los $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución*

Por lo tanto, resolviendo $AX = b$ con un b genérico obtenemos una descripción de la imagen de T y haciendo $b = 0$ obtenemos una descripción del núcleo de T.

Por supuesto, que si solo nos piden comprobar si un vector está en el núcleo de una transformación lineal, no es necesario resolver el sistema, basta verificar que el vector es solución de $AX = 0$.

2.3.1 Howto

2.3.1.1 a) y b)

1. Representar como combinacion de los vectores base

- $xe_1 + ye_2 + ze_3$

2. Usar propiedades de las transformaciones lineales para llegar a $T(e_1), \dots, T(e_3)$
3. Reemplazar y resolver

2.3.1.2 c)

1. Armar matriz con $T(e_i)$ como columnas

- Esto es basicamente lo mismo que plantear el resultado del (b) como una matriz que representa a un sistema de ecuaciones

2.4 4)

(4) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

a) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas.

b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 1, 1)$, $(-5, 1, 1)$.

c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

d) Dar un conjunto de generadores del núcleo y la imagen de T.

e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 3)$.

2.4.1 b)

Para que pertenezca al nucleo se tiene que dar que $T(v) = 0$. Así que basta con chequear esto para cada uno de los vectores

2.4.2 c)

- Obtener nucleo: resolver $AX = 0$
- Obtener imagen: resolver $AX = b$ con $b \in \mathbb{R}^m$

2.4.3 d)

Pasar los conjuntos de soluciones anteriores a su version parametrica y extraer de ahí los generadores

2.4.4 e)

Ver si los vectores cumplen con la condicion de la imagen - $b_3 - b_1 - 3b_2 = 0$

2.5 5)

(5) Sea $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

b) Dar una base del núcleo y de la imagen de T y decir cuál es la dimensión de cada uno.

c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.

2.5.1 a)

1. Resolver $AX = b$
2. Ver soluciones $AX = 0$ para obtener el nucleo
3. Ver soluciones $AX = b$ para obtener la imagen

(6) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen. Describir ambos subespacios implícitamente y encontrar una base de cada uno de ellos.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

Figure 1: 3b

2.6 6)

(7) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen. Describir ambos subespacios implícitamente y encontrar una base de cada uno de ellos.

a) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.

b) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \mathrm{tr}(A)$.

c) $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{bmatrix}$.

d) $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x + 1)p(x)$.

(8) Sea $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + \\ + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d)$$

a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Decir cuáles de los siguientes polinomios están en la imagen:

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad q(x) = x^3, \quad r(x) = (x - 1)(x - 1)$$

2.7 9)

(9) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

a) Probar que T es un epimorfismo.

b) Dar la dimensión del núcleo de T.

c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A? Como en el ejercicio (4) *a)* pensamos a los vectores como columnas.

2.7.1 Howto

suryectiva = sobreyectiva

2.7.2 Probar que T es un epimorfismo

Para probar que T es un epimorfismo hay que demostrar que T es suryectiva/sobreyectiva

Sea $T : V \to W$

$$Im(T) = W \Rightarrow \text{ T es suryectiva } \Rightarrow \text{ T es epimorfismo}$$

2.7.3 Tamaño de matrices

$$A_{\text{alto}\times\text{ancho}}$$

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = C_{m\times q}$$
$$\Leftrightarrow n = p$$

(10) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios (6) y (7) son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

Figure 2: 4b

2.8 10)

2.8.1 Howto

Sea $T : V \to W$:

$$\begin{gathered} Im(T) = W \Rightarrow \text{ T es sobreyectiva y epimorfismo} \\ Nu(T) = 0 \Rightarrow \text{ T es inyectiva y monomorfismo} \\ \text{es epimorfismo y monomorfismo } \Rightarrow \text{ es isomorfismo} \end{gathered}$$

(11) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas (como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas). Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

a) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ y $\dim \mathrm{Nu}(T) = 2$.

b) T inyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (3, -1, 0)$.

d) $e_1 \in \mathrm{Im}(T)$ y $(-5, 1, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$.

e) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$.

3 Practico 8

3.1 1)

(1) Dar las coordenadas del polinomio $2x^2 + 10x - 1 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, x + 1, x^2 + x + 1\}.$$

3.1.1 Howto

1. Expresar el polinomio como la combinacion lineal de los miembros de $\mathcal{B}$

$$2x^2 + 10x - 1 = a \cdot 1 + b \cdot (x+1) + c \cdot (x^2 + x + 1)$$

2. Hallar el valor de a, b y c armando un sistema de ecuaciones
3. $[p(x)]_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$

3.2 2)

(2) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

3.2.1 Howto

Mismo procedimiento que en el ejercicio anterior pero con matrices.

(3) *a)* Dar una base del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.

b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.

c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item anterior.

3.3 4)

(4) Escribir las matrices de las siguientes transformaciones lineales respecto de las bases canónicas de los espacios involucrados.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

c) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.

3.3.1 Howto

1. Armar matriz de la siguiente forma dependiendo la dimension del espacio

$$\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

3.3.2 Dimensiones de la matriz de una transformacion lineal

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Input} \\ = \dim V}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}}\right\} \begin{matrix}\text{Output} \\ = \dim W\end{matrix}$$