Contents

1 Subespacios vectoriales

1.1 Base de un espacio

Una base es un conjunto de vectores que:

- Son linealmente independientes: Ningún vector en la base puede ser escrito como combinación lineal de los otros.
- Generan el subespacio: Cualquier vector en el subespacio puede ser escrito como combinación lineal de los vectores en la base.

1.2 Dimensión de un Subespacio

La dimensión de un subespacio es la cantidad de vectores en una base del subespacio.

2 Transformaciones Lineales, Núcleo e Imagen

2.1 Transformaciones Lineales

2.1.1 Definición

Una **transformación lineal** es una función entre dos espacios vectoriales que preserva las operaciones de suma y multiplicación por un escalar.

2.1.2 Ejemplos Comunes

- Rotaciones
- Reflexiones
- Proyecciones

2.1.3 Matrices y Transformaciones

Cualquier transformación lineal puede ser representada por una matriz. Si T es una transformación lineal de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, existe una matriz A tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

2.2 Núcleo

2.2.1 Definición

El **núcleo** (o **kernel**) de una transformación lineal T, denotado como $\text{Ker}(T)$, es el conjunto de todos los vectores en el espacio de partida que son mapeados al vector cero en el espacio de llegada.

2.3 Imagen

2.3.1 Definición

La **imagen** (o **rango**) de una transformación lineal T, denotada como $\text{Im}(T)$, es el conjunto de todos los vectores en el espacio de llegada que son la imagen de algún vector en el espacio de partida.

2.4 Conexión entre Núcleo e Imagen

El núcleo y la imagen de una transformación lineal proporcionan información crucial sobre la estructura y propiedades de la transformación.

---

3 Isomorfismos en Álgebra Lineal

3.1 ¿Qué es un Isomorfismo?

Un **isomorfismo** es una función entre dos espacios vectoriales que preserva la estructura de los mismos.

3.2 Propiedades de un Isomorfismo

Para que una función $f : V \to W$ sea un isomorfismo, debe cumplir:

- **Biyectividad**: Debe ser inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva (cubre todo W).
- **Linealidad**: Debe respetar la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

3.3 Importancia de los Isomorfismos

Si existen isomorfismos entre dos espacios vectoriales V y W, decimos que son **isomorfos** y esencialmente tienen la misma estructura.

3.4 Ejemplos de Isomorfismos

- **Isomorfismo trivial**: La identidad, $id : V \to V$, es siempre un isomorfismo.
- **Matrices invertibles**: Si A es una matriz invertible de $n \times n$, la transformación lineal asociada $T_A(x) = Ax$ es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y sí misma.

3.5 Conclusión

Los isomorfismos son herramientas fundamentales en álgebra lineal porque nos permiten transferir problemas y soluciones entre diferentes espacios vectoriales.

4 Matriz de una Transformación Lineal

4.1 Coordenadas

Las coordenadas son un sistema para describir la posición de un punto en el espacio utilizando números.

4.1.1 Sistema de Coordenadas

- **Sistema de Coordenadas Cartesianas:** Describe la posición de un punto con respecto a ejes perpendiculares (x, y, z, etc.).

4.1.2 Base y Coordenadas de un Vector

- **Base:** Conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio vectorial.
- **Coordenadas de un Vector:** Representación de un vector como una combinación lineal de los vectores base.

4.2 Transformación Lineal

Una transformación lineal es una función entre dos espacios vectoriales que preserva la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

4.2.1 Propiedades

- **Linealidad:** Si T es una transformación lineal, entonces para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y escalar c:

4.3 Matriz de una Transformación Lineal

La matriz de una transformación lineal es una forma de representar esta transformación utilizando una matriz.

4.3.1 Encontrar la Matriz de una Transformación

1. **Base Canónica:** Utiliza la base estándar del espacio.
2. **Aplicar la Transformación:** Aplica la transformación a cada vector de la base.
3. **Columnas de la Matriz:** Las imágenes de los vectores base bajo la transformación se convierten en las columnas de la matriz.

4.3.2 Ejemplo

Supongamos una transformación T en $\mathbb{R}^2$ donde $T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. La matriz de T sería:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.4 Diagonalización

4.4.1 Definición

Diagonalizar una matriz significa encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

4.4.2 ¿Por qué Diagonalizar?

La diagonalización simplifica muchas operaciones con matrices, como calcular potencias y exponentes de matrices.

4.4.3 Proceso de Diagonalización

1. **Encontrar los valores propios (eigenvalores):** Resolver el polinomio característico.
2. **Encontrar los vectores propios (eigenvectores):** Resolver para cada eigenvalor λ.
3. **Formar las matrices D y P:** D contiene los eigenvalores en su