Bachmann Lautaro 44.390.167

Ejercicio 1 *(3.5 pts.)*

(a) *(1.75 Pts.)* Determinar el polinomio de Taylor de orden $n = 3$ y centrado en $a = 2$ de la función $f(x) = \ln(x)$. Utilizar el polinomio calculado para dar un valor aproximado de $\ln(2.5)$ *(basta con dejar expresada la fórmula)* y estimar el error que se comete con dicha aproximación.

(b) *(1.75 Pts.)* Dar el dominio de la función vectorial $r(t) = (\ln(1-t^2), \sqrt{1+t}, -e^{2t})$ y determinar el vector tangente a la imagen de r para $t = 0$.

Primero procederemos a calcular las derivadas de f hasta el 4^{to} orden para luego evaluar cada una de ellas en 2.

$$f(x) = \ln(x) \implies f(2) = \ln(2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \implies f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \implies f''(2) = \frac{-1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \implies f'''(2) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{8}} = \frac{1}{4}$$

$$f''''(x) = 2.-3.x^{-4} = \frac{-6}{x^4} \implies f''''(2) = \frac{6}{2^4} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{16}_{8}} = \frac{3}{8}$$

Teniendo en cuenta los anteriores cálculos procedamos a realizar el polinomio de Taylor

$$T_{3,2}(x) = \ln(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}.(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}.(x-2)^3 + \frac{f''''(2)}{4!}.(x-2)^4$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}.\frac{-1}{4}.(x-2)^2 + \frac{1}{3!}.\frac{1}{4}.(x-2)^3$$

Ahora procedemos a evaluar el polinomio en $2{,}5 = 5/2$

$$T_{3,2}(2{,}5) = \ln(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right) + \frac{1}{2}.\frac{-1}{4}.\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \frac{1}{3!}.\frac{1}{4}.\left(\frac{5}{2}-2\right)^3$$

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{1} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.\frac{-1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\downarrow$

Bachmann Lautaro 44.390.167

$$= \ln(2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192}$$

$$= \ln(2) + \frac{48-6+1}{192} = \ln(2) \frac{43}{192}$$

$$\therefore T_{3,2}(2{,}5) = \ln(2) \frac{43}{192}$$

Ahora procederemos a estimar el error mediante la formula de Lagrange.

$$R_{3,2}(x) = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (x-2)^4 \right|$$

$$\Rightarrow R_{3,2}(2{,}5) = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (2{,}5-2)^4 \right| = \left| \frac{f''''(t)}{4!} \cdot (0{,}5)^4 \right| \quad \text{con } t \in (2, 2.5)$$

Ahora procederemos a hallar un valor para t

$$|f''''(t)| = \left| \frac{-6}{x^4} \right|$$

$f''''(t)$ es una función decreciente, por lo cual es posible acotarla, teniendo en cuenta que $t \in (2, 2.5)$, tenemos que $\frac{6}{t^4} < \frac{6}{2^4}$.

$$\therefore R_{3,2}(2{,}5) < \left| \frac{f''''(2)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right| \Rightarrow R_{3,2}(2{,}5) < \left| \frac{-6}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \right|$$

$$\Rightarrow R_{3,2}(2{,}5) < \left| \frac{-6}{2^8 \cdot 4!} \right| \Rightarrow R_{3,2}(2{,}5) < \frac{6}{2^8 \cdot 4!}$$

Por ende, el error que se comete al aproximar $\ln(2{,}5)$ con $T_{3,2}(2{,}5)$ es menor a $\frac{6}{2^8 \cdot 4!}$.

Bachmann Lautaro 44.390.167

b) Como el el dominio de una función vectorial está formado por la intersección de los dominios de las funciones coordenadas, procedamos a calcular dichos dominios.

Sean $f_1 = \ln(1-t^2)$, $f_2 = \sqrt{1+t}$, $f_3 = -e^{2t}$, tenemos lo siguiente:

$Dom(f_1) = 1-t^2 > 0 = -t^2 > -1 = t^2 < 1 = -1 < t < 1 = (-1,1)$

$Dom(f_2) = 1+t \geq 0 = t \geq -1 = [-1, \infty)$

$Dom(f_3) = (-\infty, \infty)$

∴ tenemos que:

$$Dom(f) = \bigcap_{i=1}^{n} Dom(f_i) = Dom(f_1) \cap Dom(f_2) \cap Dom(f_3)$$
$$= (-1,1) \cap [-1,\infty) \cap (-\infty, \infty) = (-1,1)$$

Por ende, tenemos que $Dom(f) = (-1, 1)$

Ahora para determinar el vector tangente a la imagen de r cuando $t=0$, calculemos $r'(t)$ derivando "coordenada a coordenada" y evaluemosla en 0.

$$f_1' = \ln'(1-t^2) \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{1-t^2} \cdot -2x = \frac{-2x}{1-t^2}$$

$$f_2' = ((1+t)^{1/2})' \cdot (1+x)' = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2} \cdot 1 = \frac{(1+x)^{-1/2}}{2}$$

$$f_3' = (e^{2x})' \cdot (2x)' = -e^{2x} \cdot 2$$

$$\therefore \quad r'(t) = \left(\frac{-2t}{1-t^2}, \frac{(1+t)^{-1/2}}{2}, -2 \cdot e^{2t} \right)$$

$$\Rightarrow r'(0) = \left(\frac{-2 \cdot 0}{1-0}, \frac{(1+0)^{-1/2}}{2}, -2 \cdot e^{2 \cdot 0} \right) = \left(0, \frac{1}{2}, -2 \right)$$

Por ende, el vector tangente a la imagen de r cuando $t=0$ es $(0, 1/2, -2)$.