Final discreta 2019

Parte Teórica (30 pts.)

1. (*10 pts.*) Para $n \geq 0$, definir en forma recursiva $n!$.
2. (*10 pts.*) Definir a divide a b y probar que $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b+c$.
3. (*10 pts.*) Sea m un entero positivo y x_1, x_2, y_1, y_2 enteros tales que $x_1 \equiv x_2(m)$, $y_1 \equiv y_2(m)$, entonces $x_1y_1 \equiv x_2y_2(m)$.

1) $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$

2) Relación "divide a"

Sean a y b enteros, $b \neq 0$, decimos que a divide a b, o que a es un divisor de b si b pued escribirse de la siguiente forma:

$$b = a \cdot q \text{ con } q \in \mathbb{Z}$$

3) $x_1 \equiv x_2 (m) \Rightarrow m | x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = m \cdot q \quad (1)$

$y_1 \equiv y_2 (m) \Rightarrow m | y_1 - y_2 \Rightarrow y_1 - y_2 = m \cdot q' \quad (2)$

Queremos probar que $x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 (m)$, para ello veamos si cumple con la definición de congruencia, es decir $m | (x_1 y_1 - x_2 y_2)$.

$$
\begin{aligned}
x_1 y_1 - x_2 y_2 &= x_1 y_1 \overbrace{+ x_2 y_1 - x_2 y_1}^{0} - x_2 y_2 \\
&= (x_1 - x_2) y_1 + (y_1 - y_2) x_2 \\
&\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} m \cdot q \cdot y_1 + m \cdot q' \cdot x_2 \\
&= m \underbrace{(q \cdot y_1 + q' \cdot x_2)}_{Q} \Rightarrow m \cdot Q \Rightarrow m | x_1 y_1 - x_2 y_2
\end{aligned}
$$

Por ende, cumple con la definición de congruencia.

4. (*24 pts.*)

a) (*7 pts.*) Usando el teorema de Fermat encontrar a entero con $0 \leq a < 19$ tal que $5^{440} \equiv a\,(19)$.

b) (*7 pts.*) Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que: $m^3 = 15n^3$.

c) (*10 pts.*) Probar por inducción que

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$.

a) $5^{440} \equiv a\,(19) \Rightarrow$ como $(19,5)=1 \Rightarrow 19$ y 5 son coprimos.

$\therefore$ como 5 y 19 son coprimos y 19 es primo, podemos usar el teorema de Fermat, el cual nos dice lo siguiente:

$$a^{p-1} \equiv 1\,(p)$$

$\therefore\ 5^{18} \equiv 1\,(19)$

$5^{440} \equiv a\,(19) \Rightarrow (5^{18})^{24} \cdot 5^{8} \equiv a\,(19)$

$\Rightarrow 1 \cdot 5^{8} \equiv a\,(19) \Rightarrow (5^2)^4 \equiv a\,(19)$

$\Rightarrow 6^4 \equiv a\,(19) \Rightarrow (6^2)^2 \equiv a\,(19) \Rightarrow (-2)^2 \equiv a\,(19)$

$\Rightarrow 4 \equiv a\,(19) \Rightarrow a = 4$ por reflex.

$440 \,\lfloor 18$
$-36 \quad 24$
$\ \ 80$

24×18: $192 + 24\_ = 432$

$440 = 24 \cdot 18 + 8$

$5^2 \equiv 6\,(19)$

$6^2 \equiv -2\,(19)$

b) (*7 pts.*) Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que: $m^3 = 15n^3$.

Supongamos que existen enteros no nulos, m y n tq $m^3 = 15n^3$

$m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \Rightarrow m^3 = p_1^{3 \cdot e_1} \cdot p_2^{3e_2} \cdots p_k^{3e_k}$

$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \Rightarrow n^3 = p_1^{3 \cdot r_1} \cdot p_2^{3r_2} \cdots p_k^{3r_k}$

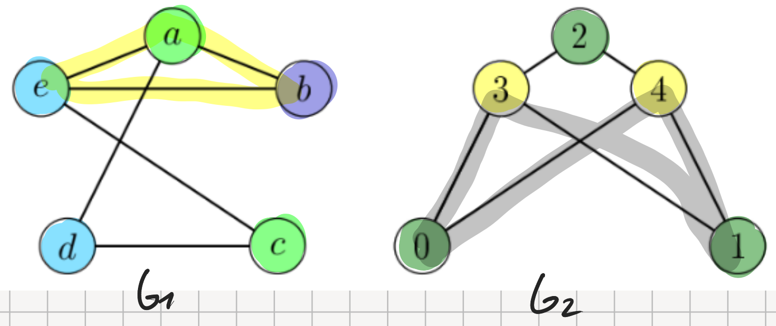
$15 = 5^1 \cdot 3^1$

$\therefore$ como $m^3 = 15n^3 \Rightarrow p_1^{3 \cdot e_1} \cdot p_2^{3e_2} \cdots p_k^{3e_k} = 3^{1+r_1} \cdot 5^{1+r_2} \cdot p_1^{3 \cdot r_3} \cdot p_2^{3r_4} \cdots p_k^{3r_k}$

Por ende, como los exponentes del miembro derecho son divisibles por 3, sin embargo, los del izquierdo no lo son, llegamos a un absurdo, el cual vino de suponer que existen m y n tq $m^3 = 15n^3$.

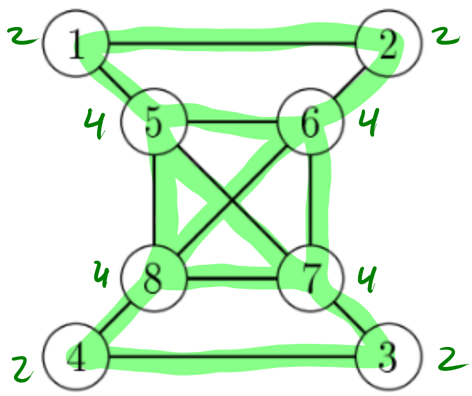
7. (*14 pts.*)

a) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



G_1 y G_2 no son isomorfos, ya que G_1 posee un 3-ciclo, sin embargo, G_2 al ser bipartito, solo posee ciclos de longitud impar, por ende, resulta imposible encontrar una función biyectiva que cumpla con la definición de isomorfismo de grafos.

b) Encontrar una caminata euleriana en el siguiente grafo.



6. (*16 pts.*) Dada la ecuación de congruencia

$$25\,x \equiv 10\,(35),$$

hallar todas las soluciones en el intervalo [30, 65]. Hacerlo con el método usado en la teórica. No usar resultados del práctico.

$(35,25)=5 \Rightarrow 5 \mid 10$ $\therefore$ tiene solución

$25x \equiv 10\,(35) \Rightarrow \frac{25}{5}x \equiv \frac{10}{5}\left(\frac{35}{5}\right) = 5x \equiv 2\,(7)$

$(7,5)=1 \Rightarrow 1 = s.5 + t.7$ con $s,t \in \mathbb{Z}$

$1 = 3.5 + 2.7 \Rightarrow 3.5 \equiv 1\,(7)$

Por ende, 3 es el IM de 5 en este caso.

$5x \equiv 2\,(7) \Rightarrow 3.5x \equiv 3.2\,(7) \Rightarrow x \equiv 6\,(7) \Rightarrow x \equiv -1\,(7)$

Por lo tanto las soluciones a la ecuación tienen la forma $x = 7k-1,\ k \in \mathbb{Z}$

Ahora veamos las soluciones para x tq $30 \leq x \leq 65$

$30 \leq x \leq 65 \Rightarrow 30 \leq 7k-1 \leq 65 \Rightarrow 31 \leq 7k \leq 66$

$\Rightarrow \frac{31}{7} \leq k \leq \frac{66}{7} \Rightarrow 4{,}42 \leq k \leq 9{,}42$

$\Rightarrow$ como $k \in \mathbb{Z}$ $5 \leq k \leq 9$

Por ende, el conjunto de soluciones es el siguiente:

$CS = \{7k-1 / 5 \leq k \leq 9\}$

$= \{7.5-1, 7.6-1, 7.7-1, 7.8-1, 7.9-1\}$

$= \{34, 41, 48, 55, 62\}$

$\therefore$ el conjunto $\{34, 41, 48, 55. 62\}$ contiene todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[30, 65]$

5. (*16 pts.*) Tenemos una mini biblioteca con 14 libros distintos.

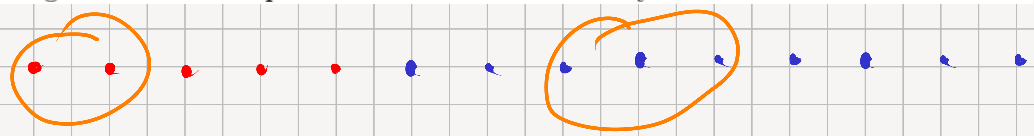
a) (*4 pts.*) De cuántas formas pueden elegirse 3 libros?

a) Como es necesario elegir 3 libros entre 14, podemos asumir que no es relevante el orden, y que no hay repeticion.

Por lo cual, para saber la cantidad de formas que existen de elegir 3 libros entre 14, podemos utilizar una seleccion no ordenada sin repeticion.

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{(14-3)!\,3!} = \frac{14.13.12.\cancel{11!}}{\cancel{11!}\,3!} = \frac{14.13.12}{3!} \text{ formas.}$$

b) (*4 pts.*) De los libros 5 son de matemática y 9 son de física ¿de cuántas formas puedo elegir 5 libros tal que 2 sean de matemática y 3 de física?



$$\binom{5}{2} \cdot \binom{9}{3}$$

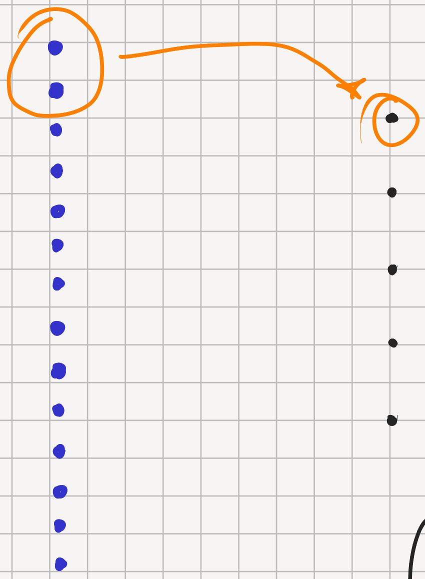
$$\frac{5!}{3!\;2!} \cdot \frac{9!}{6!\;3!}$$

$$\frac{5!}{12} \cdot \frac{9!}{6!.6}$$

$$\frac{5!\;9!}{72.6!}$$

c) (*4 pts.*) Hay 5 personas y se quiere regalar 2 libros a cada una ¿cuántas posibilidades hay?

$$\binom{14}{2}$$



$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{14}{2} \cdot 5 = \frac{14!}{12!\,2!} \cdot 5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!}\,2!} \cdot 5$$

$$\Rightarrow \frac{14 \cdot 13}{2!} \cdot 5 \text{ formas}$$

d) (*4 pts.*) ¿De cuántas formas pueden distribuirse los libros entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 libros?

$\binom{14}{7}$

$\binom{2}{1} = 2$

$\binom{14}{7} \cdot 2$

Es una muy buena pregunta.