

## Práctico 1

VECTORES EN  $\mathbb{R}^n$ **Objetivos.**

- Aprender las operaciones básicas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma implícita y paramétrica.

## EJERCICIOS

Los ejercicios con el símbolo (a) tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

**Vectores y producto escalar.**

- (1) Dados  $v = (-1, 2, 0)$ ,  $w = (2, -3, -1)$  y  $u = (1, -1, 1)$ , calcular:

- (a)  $2v + 3w - 5u$ ,
- (b)  $5(v + w)$ ,
- (c)  $5v + 5w$  (y verificar que es igual al vector de arriba).

- (2) Calcular los siguientes productos escalares.

- (a)  $\langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle$ ,
- (b)  $\langle (4, -1), (-1, 2) \rangle$ .

- (3) Dados  $v = (-1, 2, 0)$ ,  $w = (2, -3, -1)$  y  $u = (1, -1, 1)$ , verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u \rangle = -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle$$

- (4) Probar que

- (a)  $(2, 3, -1)$  y  $(1, -2, -4)$  son ortogonales.
- (b)  $(2, -1)$  y  $(1, 2)$  son ortogonales. Dibujar en el plano.

- (5) Encontrar

- (a) un vector no nulo ortogonal a  $(3, -4)$ ,
- (b) un vector no nulo ortogonal a  $(2, -1, 4)$ ,
- (c) vectores  $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\{w_1, w_2, w_3\}$  es una base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  donde  $w_1 = (1, 1, 1)$ , utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

- (6) Encontrar la longitud de los vectores.

- (a)  $(2, 3)$ ,
- (b)  $(t, t^2)$ ,
- (c)  $(\cos \phi, \sin \phi)$ .

- (7) Calcular  $\langle v, w \rangle$  y el ángulo entre  $v$  y  $w$  para los siguientes vectores.

- (a)  $v = (2, 2)$ ,  $w = (1, 0)$ ,
- (b)  $v = (-5, 3, 1)$ ,  $w = (2, -4, -7)$ .

- (8) Sean  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  y  $e_3 = (0, 0, 1)$  los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Verificar que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

- (9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados  $v, w, u \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

(a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle.$$

(b) Si  $\langle v, w \rangle = 0$ , es decir si  $v$  y  $w$  son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle.$$

### Rectas.

- (10) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores  $\overrightarrow{vw}$  y  $\overrightarrow{xy}$  son equivalentes y/o paralelos.
- (a)  $v = (1, -1)$ ,  $w = (4, 3)$ ,  $x = (-1, 5)$ ,  $y = (5, 2)$ .
  - (b)  $v = (1, -1, 5)$ ,  $w = (-2, 3, -4)$ ,  $x = (3, 1, 1)$ ,  $y = (-3, 9, -17)$ .
- (11) Sea  $R_1$  la recta que pasa por  $p_1 = (2, 0)$  y es ortogonal a  $(1, 3)$ .
- (a) Dar la descripción paramétrica e implícita de  $R_1$ .
  - (b) Graficar en el plano a  $R_1$ .
  - (c) Dar un punto  $p$  por el que pase  $R_1$  distinto a  $p_1$ .
  - (d) Verificar si  $p + p_1$  y  $-p$  pertenecen a  $R_1$ .
- (12) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.
- (a)  $R_2$ : recta que pasa por  $p_2 = (0, 0)$  y es ortogonal a  $(1, 3)$ .
  - (b)  $R_3$ : recta que pasa por  $p_3 = (1, 0)$  y es paralela al vector  $(1, 3)$ .
- (13) Calcular, numérica y gráficamente, las intersecciones  $R_1 \cap R_2$  y  $R_1 \cap R_3$ .
- (14) Sea  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$  una recta en  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $p$  y  $q$  dos puntos por los que pasa  $L$ .
- (a) ¿Para qué valores de  $c$  puede asegurar que  $(0, 0) \in L$ ?
  - (b) ¿Para qué valores de  $c$  puede asegurar que  $\lambda q \in L$ ? donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (c) ¿Para qué valores de  $c$  puede asegurar que  $p + q \in L$ ?
- (15) Sea  $L$  una recta en  $\mathbb{R}^2$ . Probar que  $L$  pasa por  $(0, 0)$  si y sólo si pasa por  $p + \lambda q$  para todo par de puntos  $p$  y  $q$  de  $L$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Observación.** El Ejercicio (15) nos dice que las rectas que pasan por el origen son cerradas por la suma y la multiplicación por escalares. Los subconjuntos que satisfacen esta propiedad se llaman “subespacios vectoriales” y serán nuestro objeto de estudio más adelante.

**Ejercicios de repaso.** Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (16) Dados  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , probar que si  $\langle v, w \rangle = 0$ , es decir si  $v$  y  $w$  son ortogonales, entonces

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en  $\mathbb{R}^2$ ?

- 
- (17) ① Sean  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , probar usando solo la definición explícita del producto escalar en  $\mathbb{R}^2$  que

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad (\text{Desigualdad de Schwarz}).$$

- (18) Sea  $v_0 = (2, -1, 1)$ .

(a) Describir paramétricamente el conjunto  $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 0\}$ .

(b) Describir paramétricamente el conjunto  $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 1\}$ .

(c) ¿Qué relación hay entre  $P_1$  y  $P_2$ ?

- (19) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

(a)  $\pi_1$ : el plano que pasa por  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, -2, 0)$ .

(b)  $\pi_2$ : el plano que pasa por  $(1, 2, -2)$  y es perpendicular a la recta que pasa por  $(2, 1, -1)$ ,  $(3, -2, 1)$ .

(c)  $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0); s, t \in \mathbb{R}\}$ .

- (20) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano  $\pi_3$  del ejercicio (19c)? Describir la intersección en cada caso.

(a)  $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$ ,

(b)  $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$ ,

(c)  $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$ ,

(d)  $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$ .

#### AYUDAS

- (17) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.