Lautaro Bachmann

Ejercicio 1 *(3 pts.)*

(a) *(1.5 Pts.)* Dibuje y calcule el área de la región **encerrada** por los gráficos de las siguientes funciones: $f(x) = (x^2-1)^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.

Primero veamos las raices de cada función:

$f(x) = (x^2-1)^2 = ((x-1).(x+1))^2 \Rightarrow$ las raices de $f(x)$ son 1 y -1

$g(x) = (1-x^2) \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow \sqrt{1} = x \Rightarrow \pm 1 = x \Rightarrow$ Sus raices son 1 y -1

Ahora veamos en que punto intersecan con el eje y:

$f(0) = (0^2-1)^2 = (-1)^2 = 1$

$g(0) = (1-0^2) = 1$

Hagamos las tablas de valores:

x	f(x)
$-\frac{3}{4}$	$49/256$
$-1/2$	$9/16$
$-1/4$	$225/256$
$1/4$	$225/256$
$1/2$	$9/16$
$3/4$	$49/256$

$f(x) = (x^2-1)^2$,

$f\left(\frac{-3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{(-3)^2}{4^2}-1\right)^2 = \left(\frac{9}{16}-1\right)^2 = \left(\frac{9-16}{16}\right)^2 = \left(\frac{-7}{16}\right)^2 = \frac{49}{256}$

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{(-1)^2}{2^2}-1\right) = \left(\frac{1}{4}-1\right)^2 = \frac{(-3)^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

$f\left(\frac{-1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{(-1)^2}{4^2}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{16}-1\right)^2 = \left(\frac{-15}{16}\right)^2 = \frac{225}{256}$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

x	g(x)
$-\frac{3}{4}$	$7/16$
$-1/2$	$3/4$
$-1/4$	$15/16$
$1/4$	$15/16$
$1/2$	$3/4$
$3/4$	$7/6$

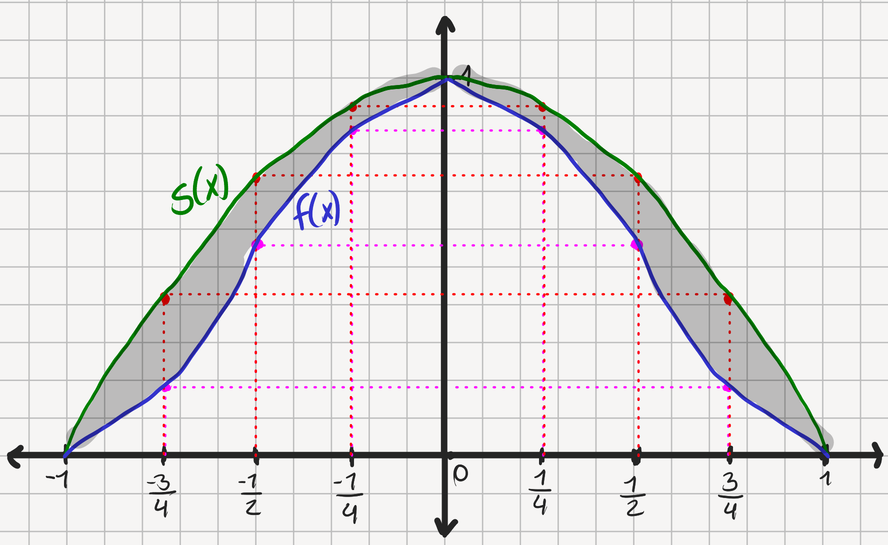
$g(x) = 1-x^2$

$g\left(\frac{-3}{4}\right) = g\left(\frac{3}{4}\right) = 1-\frac{(-3)^2}{4^2} = 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$g\left(\frac{-1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{(-1)^2}{2^2} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$g\left(\frac{-1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = 1-\frac{(-1)^2}{4^2} = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Ahora grafiquemos:



$\therefore$ teniendo en cuenta el grafico sabemos que para hallar el area sombreada tenemos que calcular $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, ya que $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx - \int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{15} = \frac{20-16}{15} = \frac{4}{15}$$

$\therefore$ el area entre $f(x)$ y $g(x)$ es de $\frac{4}{15}$

$$\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} x^2\,dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 1-(-1) - \frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4-2x^2+1\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1} 2x^2\,dx + \int_{-1}^{1} 1\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - 2.\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) + x\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{(-1)}{5} - 2.\left(\frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3}\right) + 1-(-1)$$

$$= \frac{2}{5} - 2.\frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + \frac{2}{1} = \frac{6-20+30}{15}$$

$$= \frac{16}{15}$$

(b) *(1.5 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}\,dx.$

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+B.x^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B).x^2+A+Cx}{x(x^2+1)} \implies \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B).x^2+A+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\implies x^2+3x+2 = (A+B).x^2+A+Cx$$

Lautaro Bachmann

a) *(2 Pts.)* Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n$$

i)

Sea $a_n = n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ y $a_n = f(n)\ \forall n \geq n_0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

Por teorema de relación entre límite de funciones y sucesiones, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n.\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

L'hopital

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+1}}{-n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2+1}.-n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = g(h(x))$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h'(x) = -n^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}.-n^{-2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.\frac{-1}{n^2} = \frac{-1}{n^2+\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}}$$

$$= \frac{-1}{n^2+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} n.\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Por ende, por teorema de relación entre límite de funciones y sucesiones, como $\lim_{n\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n.\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^{\cancel{2}}-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{+2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+n} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[\cancel{2}]{n^{\cancel{2}}}.\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}$$

$$= 2.\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = 2.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 2.\left(\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\right) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+1}\right) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{1}{1+1}\right) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n = 1$$

(b) *(1.5 Pts.)* Utilice algún criterio de convergencia y determine si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n^{1/3}}{n^3+3n}}^{a_n} \qquad \frac{n^{1/3}}{n^3}$$

Sea $a_n = \frac{n^{1/3}}{n^3+3n}$, $b_n = \frac{n^{1/3}}{n^3}$, como ambas estan compuestas por el cociente de polinomios positivos, podemos afirmar que son series de terminos positivos.

Ahora procederemos a aplicar el criterio de comparación en el limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{1/3}}{n^3+3n}}{\frac{n^{1/3}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^{1/3}}}{n^3+3n}}{\frac{\cancel{n^{1/3}}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3+3n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}}{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}+\frac{3\cancel{n}}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{\infty^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

Veamos si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge :

$$b_n = \frac{n^{1/3}}{n^3} = n^{1/3} \cdot n^{-3} = n^{-8/3} = \frac{1}{n^{8/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}} \text{ converge}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{1} = \frac{1-9}{3} = \frac{-8}{3}$$

Criterio de serie p con $p>1$ (1)

Por ende, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3+3n}$ es convergente.

Lautaro Bachmann

Ejercicio 3 *(3.5 pts.)*

a) *(1.5 Pts.)* Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}3^n}(3x-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}3^n}\cdot(3x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}\cancel{3^n}}\cdot\cancel{3}^{n}(x-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}\cdot(x-\frac{1}{3})^n \Rightarrow c_n = \frac{1}{n^{1/4}},\ a=\frac{1}{3}$$

Como $c_n \neq 0\ \forall n\geq 1$, podemos aplicar criterio del cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{1/4}}}{\frac{1}{n^{1/4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}}{(n+1)^{1/4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/4}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^{1/4} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}\right)^{1/4} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ por criterio del cociente como $0<L<\infty \Rightarrow R=\frac{1}{L}=\frac{1}{1}=1$

Es decir, el radio de convergencia es $R=1$.

Ahora veamos el intervalo de convergencia:

Calculemos el extremo izquierdo del intervalo y veamos si la serie converge en dicho extremo:

$$a-R = \frac{1}{3}-1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}\left(\frac{-2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}\cdot(-1)^n$$

$$\frac{-2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}} = -1$$

Veamos si es posible aplicar criterio para series alternantes:

- Comprobemos si el límite es igual a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/4}} = \frac{1}{\infty^{1/4}} = \frac{1}{\infty} = 0\ ✓$$

- Comprobemos si c_n es decreciente y positiva:

$c_n \geq c_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n^{1/4}} > \frac{1}{(n+1)^{1/4}}$, lo cual es cierto, ya que $n^{1/4} < (n+1)^{1/4} \Rightarrow \frac{1}{n^{1/4}} > \frac{1}{(n+1)^{1/4}}$

Como c_n está formado por el cociente de dos polinomios positivos, podemos afirmar que $c_n > 0\ \forall n\geq 1$

Por ende, como c_n cumple con los anteriores ítems, por criterio de series alternantes llegamos a que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ converge (y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$ también converge)

Ahora hagamos lo mismo con el otro extremo:

$$a+R=\frac{1}{3}+1=\frac{1+3}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}\cdot 1^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}\overset{(1)}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4}}\text{ diverge}$$

$\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}=1$

Criterio de serie p con $p<1$ (1)

Finalmente, como en el extremo izquierdo del intervalo la serie converge y en el extremo derecho la serie diverge, tenemos que el intervalo de convergencia es $I=\left[\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\right)$

(b) *(2 Pts.)* Represente la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ como una serie de potencias centrada en $a=-3$ y halle el radio de convergencia.

Vamos a aplicar el teorema que nos dice que $\forall x$ en el intervalo de convergencia de una serie de potencias, la serie define una función cuyo dominio es el intervalo de convergencia

$f(x)=g'(x)$ con $g(x)=\frac{-1}{x}$

Veamos si $\frac{-1}{x}$ puede ser representado mediante una serie geometrica, es decir, hay que hallar un r tal que $\frac{1}{1-r}=\frac{-1}{x}$:

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-\frac{x^{-1}}{1}+C$$
$$=\frac{-1}{x}$$

$$\frac{-1}{x}=\frac{-1}{x-(-3)+(-3)}=\frac{-1}{(x+3)-3}=\frac{-1}{-3\left(-\frac{(x+3)}{3}+1\right)}=\frac{+1}{3}\cdot\frac{1}{-\frac{(x+3)}{3}+1}=\frac{+1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{(x+3)}{3}}\quad\therefore\ r=\frac{(x+3)}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{x}=\frac{+1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}r^{n}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{3}\right)^{n}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{n}}{3^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot(x+3)^{n}$$

$\therefore\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot(x+3)^{n}$, sin embargo, lo que nos interesa es $g'(x)$.

como $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot(x+3)^{n}$ es una serie geometrica, sabemos que su $R=1$

$\Rightarrow$ la serie es derivable y continua en el intervalo $(-3-1,-3+1)=(-4,2)$

Por ende, tomemos la derivada de $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot(x+3)^{n}$

Por teo. $\rightarrow$ $h'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n(x-a)^{n-1}\Rightarrow g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{3^{n+1}}(x+3)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+3)^{n-1}$

Finalmente, la representación de $f(x)$ como serie de pot. es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+3)^{n-1}$