1. Calcule, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x + 3$ b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ c) $f(x) = \sqrt{6 - x}$

$$a)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)+3-(5x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{5x}+5h\cancel{+3}\cancel{-5x}\cancel{-3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = \boxed{5}$$

$$b)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-(x+h)^2+2(x+h)-(x^3-x^2+2x)}{h}$$

$$= \frac{(x+h)^3-(x+h)^2\cancel{+2x}+2h-x^3+x^2\cancel{-2x}}{h} = \frac{(x+h)^3-(x^2+2xh+h)+2h-x^3+x^2}{h}$$

$$= \frac{(x+h)^3\cancel{-x^2}-2xh-h+2h-x^3\cancel{+x^2}}{h} = \frac{\cancel{x^3}+3.x^2.h+3.x.h^2+h^3-2xh+1h\cancel{-x^3}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(3.x^2+3.x.h.+h^2-2x+1)}{\cancel{h}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} 3.x^2+3.x.h.+h^2-2x+1 = 3.x^2+0+0-2x+1 = \boxed{3x^2-2x+1}$$

c) $f(x) = \sqrt{6 - x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{6-(x+h)} - \sqrt{6-x}}{h}$$

$$\frac{\sqrt{6-(x+h)} - \sqrt{6-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{6-(x+h)} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{6-(x+h)} + \sqrt{6-x}} = \frac{\left(\sqrt{6-(x+h)}\right)^2 - \left(\sqrt{6-x}\right)^2}{h\left(\sqrt{6-(x+h)} + \sqrt{6-x}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{6}\cancel{-x}-h\cancel{-6}\cancel{+x}}{h\left(\sqrt{6-(x+h)} + \sqrt{6-x}\right)} = \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{6-(x+h)} + \sqrt{6-x}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{6-x-h} + \sqrt{6-x}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{6-x-h} + \sqrt{6-x}} = \frac{-1}{\sqrt{6-x-0} + \sqrt{6-x}} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}}$$

2. Determine si la siguiente función es derivable en $x = 0$. En caso afirmativo obtenga $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Veamos si $f(x)$ es continua en 0:

- $f(0) = 0 \Longrightarrow 0 \in \operatorname{Dom} f$ ✓
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ✓
- $f(0) = 0 \wedge \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \Longrightarrow f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ✓

$\therefore$ Podemos afirmar que $f(x)$ es continua en 0.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \Rightarrow f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$\frac{h^2 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \frac{h^{\cancel{2}} . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{\cancel{h}} = h . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\lim_{h \to 0} h . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{0}\right) \quad \underline{\text{indeterminación}}!$$

$\therefore$ $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

3. Sea f la función dada por $f(x) = |5x - 3|$.

   a) Determine $f'^{-}(3/5)$ y $f'^{+}(3/5)$.

   b) Demuestre que no existe $f'(3/5)$.

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{si } 5x - 3 \geq 0 \\ -(5x - 3 & \text{si } 5x - 3 < 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{si } x \geq \frac{3}{5} \\ -(5x - 3) & \text{si } x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$f'^-\left(\tfrac{3}{5}\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f\left(\frac{3}{5}+h\right) - f\left(\frac{3}{5}\right)}{h} \Rightarrow f'\left(\tfrac{3}{5}\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\left(5.\left(\frac{3}{5}+h\right)-3\right) - \left(5.\frac{3}{5}-3\right)}{h}$$

$$\frac{-5.\left(\frac{3}{5}+h\right)+3 - \left(\cancel{5}.\frac{3}{\cancel{5}}-3\right)}{h} = \frac{\cancel{-3}-5h\cancel{+3}-0}{h} = \frac{-5\cancel{h}}{\cancel{h}} = -5$$

$$f'^+\left(\tfrac{3}{5}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(\frac{3}{5}+h\right) - f\left(\frac{3}{5}\right)}{h} \Rightarrow f'\left(\tfrac{3}{5}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{5.\left(\frac{3}{5}+h\right)-3 - \left(5.\frac{3}{5}-3\right)}{h}$$

$$\frac{5.\left(\frac{3}{5}+h\right)-3 - \left(\cancel{5}.\frac{3}{\cancel{5}}-3\right)}{h} = \frac{3+5h-3-0}{h} = \frac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = 5$$

$$f'^-\left(\tfrac{3}{5}\right) = -5 \land f'^+\left(\tfrac{3}{5}\right) = 5 \Rightarrow f'^-\left(\tfrac{3}{5}\right) \neq f'^+\left(\tfrac{3}{5}\right) \Rightarrow \nexists\, f'\left(\tfrac{3}{5}\right)$$

b) Como hemos probado que las derivadas laterales existen, sin embargo, no son iguales, queda demostrado que $f'\left(\frac{3}{5}\right)$ no existe.

4. a) Use las definiciones de las derivadas laterales para calcular $f'^-(4)$ y $f'^+(4)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \quad (\infty, 0] \\ 5 - x & 0 < x < 4 \quad (0, 4) \\ \dfrac{1}{5-x} & x \ge 4 \quad [4,5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$

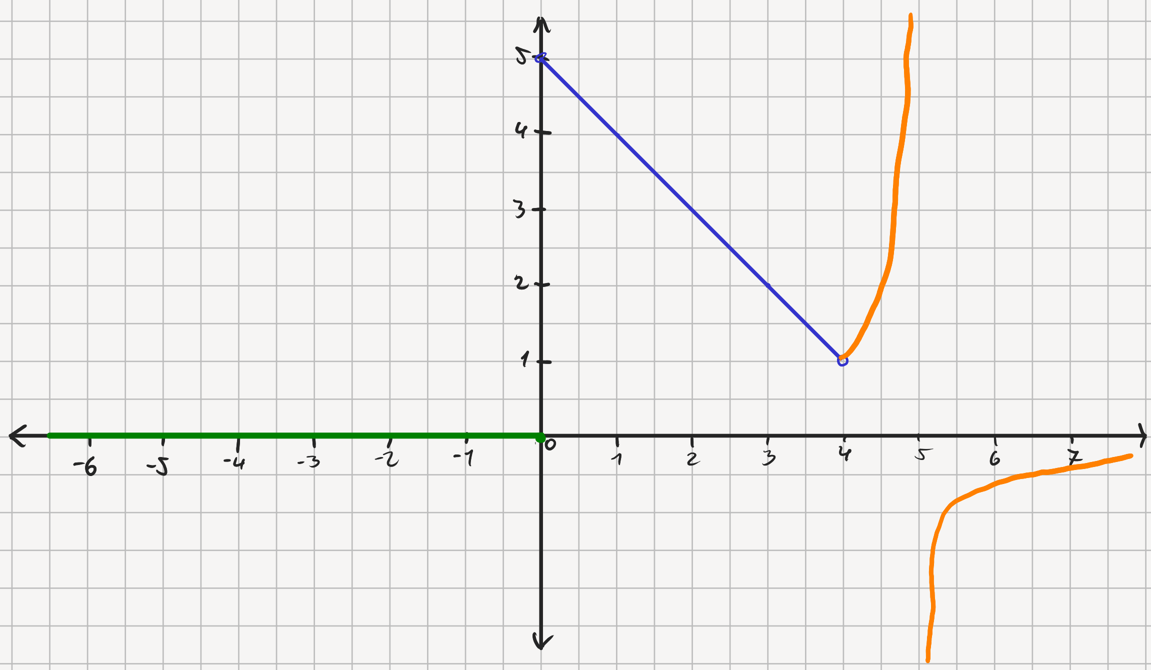
$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.\frac{2}{1} = 2$$

b) Determine el dominio de f. $\mathrm{Dom} f = (\infty, 5) \cup (5, \infty)$

c) Trace la gráfica de f.

d) ¿En qué puntos del dominio f es discontinua? 0, 5

e) ¿Dónde f no es derivable? 5, 0, 4



5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

a) $f(x) = x^7 - 5x^3 + 1$
b) $f(x) = (x^2 - x)^4$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$
e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
h) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
i) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

$\frac{1}{3} - 1 = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3}$

a) $f'(x) = 7 \cdot x^6 - 5 \cdot 3 \cdot x^2 + 0 = 7x^6 - 15x^2$

b) $h(x) = f(g(x)),\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3,\ g'(x) = 2 \cdot x - 1$

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow h'(x) = 4 \cdot (x^2-x)^3 \cdot 2 \cdot x - 1$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = x^2,\ g(x) = (x+1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x,\ g'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot 1 = 2x+2$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - x^2 \cdot 2x+2}{(x+1)^4}$

$= \frac{2x \cdot (x^2+2x+1) - (x^2 \cdot (2x+2))}{(x+1)^4} = \frac{2x^3+4x^2+2x-(2x^3+2x^2)}{(x+1)^4}$

$= \frac{\cancel{2x^3}+4x^2+2x\cancel{-2x^3}-2x^2}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x}{(x+1)^4} = \frac{2x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)} \cdot (x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$-\frac{1}{2}$

$g(x) = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x$

$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - \left(x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{x^2+2}$

$x^2+2 - x^2$

$= \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\frac{\cancel{x^2}+2\cancel{-x^2}}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2} \cdot (x^2+2)}$

6. Calcule la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \underbrace{(1+x^2)}_{F(x)}\underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{g(x)}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $F'(x) = 2.x \quad , \quad g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x) = F(x).\ g(x) \Rightarrow f'(x) = F'(x).g(x) + F(x).g'(x)$

$= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \cancel{(1+x^2)}. \dfrac{1}{\cancel{1+x^2}} = \underbrace{2x}_{G(x)} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{h(x)} + 1$

$f''(x) = G'(x).h(x) + G(x).h'(x) + 0 = 2.\operatorname{arctg} x + 2x.\dfrac{1}{1+x^2}$

$= 2.\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{(1+x^2).2.\operatorname{arctg} x + 2x}{1+x^2}$

$= \dfrac{(2+2x^2).\operatorname{arctg} x + 2x}{1+x^2} = \dfrac{2.\operatorname{arctg} x + 2x^2.\operatorname{arctg} x + 2x}{1+x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$F(x) = \sqrt{x} \ , \ g(x) = 1-x^2 \Rightarrow g'(x) = 0-2x = -2x$

$F'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h(x) = F(g(x)) \Rightarrow h'(x) = F'(g(x)).g'(x) = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}.-\cancel{2}x = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \dfrac{t(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{t'(x).h(x) - t(x).h'(x)}{h(x)^2} = \dfrac{1.\sqrt{1-x^2} - \left(x.\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1\cancel{+x^2}\cancel{+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x^2).\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2} - x^2.\sqrt{1-x^2}}$

7. Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = \sqrt{3-x}$ en los puntos (-1,2), (2,1) y (-6,3).

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{3-x}} \cdot -1 = \frac{-1}{2.\sqrt{3-x}}$$

Punto (-1,2): $y = f'(-1).(x-(-1)) + f(-1) \Rightarrow 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3+1}} . (x+1) + \sqrt{3+1} = \frac{-1}{4}.(x+1)+2$

$= \frac{-1}{4}x \; \frac{-1}{4} + 2 = \frac{-1}{4}x \; \frac{-1+8}{4} = \frac{-1}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow Q(x) = \frac{-1}{4}x + \frac{7}{4}$

Punto (2,1): $y = f'(2).(x-(2)) + f(2) \Rightarrow y = \frac{-1}{2.\sqrt{3-2}}.(x-2) + \sqrt{3-2} = \frac{-1}{2}.(x-2)+1$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 2 \Rightarrow Q(x) = \frac{-1}{2}x + 2$

Punto (-6,3): $y = f'(-6).(x+6) + f(-6) \Rightarrow y = \frac{-1}{2\sqrt{3+6}}.(x+6) + \sqrt{3+6} = \frac{-1}{2.3}.(x+6)+3$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{6}.(x+6)+3$

8. ¿Para qué valores de x son paralelas las tangentes de $y = \overbrace{x^2}^{g(x)}$ e $y = \overbrace{x^3}^{h(x)}$?

Para que sean paralelas sus pendientes han de ser iguales, por ende, sus derivadas deben de ser iguales. Definamos:

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$
$$h(x) = x^3 \Rightarrow h'(x) = 3.x^2$$

∴ podemos utiliza una ecuación para encontrar el valor de x para que $g'(x)$ y $h'(x)$ sean iguales, y que por ende, las pendientes de sus rectas sean paralelas.

tomemos $x = a \Rightarrow g'(a) = h'(a) \Rightarrow 2.a = 3.a^2 \Rightarrow 2 = \frac{3.a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} \Rightarrow \frac{2}{3} = a$

Ahora verifiquemos: $2.\frac{2}{3} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = 3.\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

$a = 0 \Rightarrow 2.0 = 3.0^2 \Rightarrow 0 = 0$ ∴ las pendientes tambien son iguales.

∴ las tangentes de $y = x^2$ e $y = x^3$ son paralelas cuando $x = \frac{2}{3}$ y $x = 0$.

9. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$. ¿Ocurre lo mismo con la tangente a $g(x) = 1/x^2$ en $(a, 1/a^2)$?

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

Punto $\left(a, \frac{1}{a}\right)$: $R(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \Rightarrow y = \frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$

Ahora veamos el punto de corte entre $R(x)$ y $f(x)$ usando una ecuación.

$$\frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{-x+a}{a^{\cancel{2}}}\right) \cdot \cancel{a}x + \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a}x = \frac{1}{\cancel{x}} a\cancel{x} \Rightarrow x \cdot \frac{(-x+a)}{a} + x = a$$

$$\frac{-x(x-a)}{a} = a - x \Rightarrow \frac{-x}{a} = \frac{\cancel{a-x}}{\cancel{-(a-x)}} \Rightarrow -\frac{x}{a} = -1 \Rightarrow -x = -a \Rightarrow x = a$$

$\therefore$ como $x = a$ es la única solución a la ecuación, podemos afirmar que las funciones solo se cortan en $\left(a, \frac{1}{a}\right)$.

b) $g(x) = x^{-2} \Rightarrow g'(x) = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

Ec. recta en $\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$: $y = g'(a)(x-a) + g(a) \Rightarrow R(x) = \frac{-2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2}$

Ahora hacemos una ecuación para descubrir en que puntos se cruzan $g(x)$ y $R(x)$

$$\frac{-2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-2(x-a)}{a^{\cancel{3}}} \cdot \cancel{a} \cdot x^2 + \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \cancel{a^2} \cdot x^2 = \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot a^2 \cdot \cancel{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2(x-a)}{a} + x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 = \frac{+2x^2(x-a)}{a} \Rightarrow (x+a) \cdot (x-a) = \frac{+2x^2(x-a)}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+a) \cdot \cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}} = \frac{2x^2}{a} \Rightarrow x + a = \frac{2x^2}{a} \Rightarrow \frac{x+a}{x^2} = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{(x+a)}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2} \cdot a = \frac{2}{\cancel{a}} x^2 \cdot \cancel{a}$$

$$\Rightarrow (x+a) \cdot a = 2x^2 \Rightarrow ax + a^2 = 2x^2 \Rightarrow -2x^2 + ax + a^2 = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - ax - a^2$$

$$\Rightarrow a = 2,\ b = -a,\ c = -a^2 \Rightarrow \Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 2(-a)^2 = a^2 + 4 \cdot 2 \cdot a^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-(-a) \pm \sqrt{9a^2}}{2 \cdot 2} = \frac{a \pm 3a}{4} \begin{cases} \frac{a+3a}{4} = a \\ \frac{a-3a}{4} = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ Podemos decir que no ocurre lo mismo, ya que cuenta con 2 soluciones.