Lautaro Bachmann

Tarea 8

1. (50 pts) Encontrar el resto de dividir 323^{5843} por 13.
2. (50 pts) Probar **usando congruencias** que todo número de la forma $4^{2n} - 7^n$ es divisible por 9, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1)

$$323^{5843} \equiv r \ (13)$$

$$323 \equiv -2 \ (13)$$

Como 323 es congruente a -2, por simetria

$$323^{5843} \equiv r \ (13) \iff (-2)^{5843} \equiv r \ (13)$$

Ahora busquemos una forma de que la base de la potencia sea 1 o -1, para que de esta forma se facilite la resolución.
Para ello hay que encontrar algún número que sea resultado de una potencia con base 2 y que tenga un resto de 1 o -1 al ser dividido por 13.

multiplos del 13			
13.2	13.3	13.4	13.5
26	39	52	65

Potencias base 2						
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
4	8	16	32	64	128	256

$$64 = 13.5 - 1 \Rightarrow 64 \equiv -1 \ (13) \Rightarrow 2^6 \equiv -1 \ (13)$$

Veemos cuanto es 5843 dividido 6

$$5843 = 6 . 973 + 5$$

$$\therefore \quad (-2)^{5843} \equiv r \ (13) \equiv ((-2)^6)^{973} . (-2)^5 \equiv r \ (13)$$

Como $(-2)^6$ es congruente a -1 modulo 13, por simetria

$$(-1)^{973} . (-2)^5 \equiv r \ (13)$$

$$-1 \ . -32 \equiv r \ (13)$$

$$-1 \ . -6 \equiv r \ (13)$$

$$6 \equiv r \ (13) \Rightarrow 6 \equiv 6 \ (13)$$

reflexividad

Por lo tanto, el resto de dividir 323^{5843} por 13 es igual a 6.

2)

$$4^{2n} - 7^n \equiv ?\ (9)$$
$$(4^2)^n - 7^n \equiv ?\ (9)$$
$$16^n - 7^n \equiv ?\ (9) \qquad 16 \equiv 7\ (9),\ \text{por simetría}$$
$$\cancel{7^n} - \cancel{7^n} \equiv ?\ (9)$$
$$0 \equiv 0\ (9) \qquad \text{Por reflexividad}$$

∴ como $4^{2n} - 7^n$ es congruente a 0, queda demostrado que todo número de la forma $4^{2n} - 7^n$ es divisible por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.