Bachmann Lautaro 44.390.167

Ejercicio 3 *(3.5 pts.)*

(a) *(1.75 Pts.)* Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(b) *(1.75 Pts.)* Calcular el volumen del sólido determinado por la función $z = 4 - y^2$ y con dominio dado por $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2$.
(*Ayuda: para interpretar el resultado graficar la función* z).

a) Primero, procedamos a calcular las derivadas parciales de la funcion para luego calcular el gradiente.

$$f_x(x,y) = (x^3)' + (y^3)' - (3xy)' = 3x^2 + 0 - y.(3x)' = 3x^2 - 3y$$

$$f_y(x,y) = (x^3)' + (y^3)' - (3xy)' = 0 + 3.y^2 - x.(3.y)' = 3y^2 - 3x$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y \,,\, 3y^2 - 3x)$$

Ahora para determinar los puntos criticos veamos para que valores de x e y $\nabla f(x,y) = (0,0)$, es decir $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$, para ello armemos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3y \Rightarrow x^2 = y \\ \Rightarrow 3(x^2) - 3x \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 3x^4 - 3x = 0 \Rightarrow 3x.(x^3 - 1) = 0 \end{array}$$

$$x = 0 \Rightarrow 3.0.(0 - 1) = 0 \Rightarrow 0.(-1) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \therefore \quad x_1 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow 3x.(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow 3.1.(1^3 - 1) = 0 \Rightarrow 3.0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \therefore \quad x_2 = 1$$

Ahora veamos cual es el valor de y en cada caso.

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 = y \Rightarrow 0 = y$$
$$x = 1 \Rightarrow 1^2 = y \Rightarrow 1 = y$$

Por ende, los puntos criticos son $(0,0)$ y $(1,1)$

Bachmann Lautaro 44.390.167

Ahora procedemos a utilizar el test de la derivada segunda. Para ello calculemos $D = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$ para cada punto crítico encontrado.
Primero que nada calculemos las derivadas segundas:

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \Rightarrow f_{xx} = (3x^2)' - (3.y)' = 3(x^2)' - 0 = 3.2x = 6x$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow f_{yy} = (3y^2)' - (3x)' = 6y - 0 = 6y$

$f_{xy}(x,y) = (3x^2)' - (3.y)' = 0 - 3 = -3$

$\therefore D(x,y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 6x \cdot 6y - 9$

Ahora evaluemos D en los puntos críticos:

$D_1(0,0) = 6.0 \cdot 6.0 - 9 = -9 \Rightarrow$

$D_2(1,1) = 6.1 \cdot 6.1 - 9 = 36 - 9 = 27$

Por ende, teniendo en cuenta el test de la derivada segunda, tenemos lo siguiente:

$D_1 < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto silla en $(0,0)$

$D_2 > 0$ y $f_{xx}(1,1) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $(1,1)$

b) Para calcular el volumen del solido determinado por la funcion $z = 4 - y^2$ procedemos a aplicar el teorema de fubini, teniendo en cuenta que el dominio de la funcion está dado por $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2$.

$$\int_0^3 \int_0^2 4 - y^2 \, dy \, dx = \int_0^3 4y - \frac{y}{3} \Big|_0^2 dx = \int_0^3 \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4.0 - \frac{0^3}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^3 8 - \frac{8}{3} - 0 \, dx = \int_0^3 \frac{16}{3} dx = \frac{16}{3} x \Big|_0^3$$

$$= \frac{16.\cancel{3}}{\cancel{3}} - \frac{16.0}{3} = 16 - 0 = 16$$

Por ende, el volumen del solido determinado por la funcion $z = 4 - y^2$ es 16