Lautaro Bachmann

Ejercicio 1. (20 puntos)

a) Resolver y graficar el conjunto de soluciones de la desigualdad

$$\frac{|x-6|}{x+2} < x-1$$

b) Dada la funcion $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, responder las sig. preguntas, justificando las respuestas:

i) ¿Es f inyectiva?

ii) Calcular la imagen de f. ¿Es suryectiva?

iii) ¿Es f biyectiva?

iv) ¿Es necesario restringir el dominio de f para que resulte inyectiva? En caso afirmativo mostrar como hacerlo.

v) Indicar el dominio y el conjunto de llegada para que f sea biyectiva y calcular su inversa.

Desarrollo:

a) Teniendo en cuenta la definicion de valor absoluto resolvemos utilizando casos.

Caso 1: $x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$

$$\frac{x-6}{x+2} < x-1 \Rightarrow \frac{x-6}{x+2} - x+1 < 0 \Rightarrow \frac{x-6+(-x+1).(x+2)}{x+2} < 0$$

$\downarrow$

$$\frac{x-6+(-x+1)\cdot(x+2)}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{x-6-x^2-2x+1x+2}{x+2}<0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{6}-x^2\cancel{+2x}\cancel{-2x}-4}{x+2}<0$$

$$\begin{array}{l|l} -x^2-4 & x+2 \\ \hline & -x \end{array}$$

Lautaro Bachmann

b) i) Para ver si es inyectiva veamos si es par:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{2+(-x)^2} = \frac{1}{2+x^2} \Rightarrow \frac{1}{2+(-1)^2 \cdot x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

Por ende, la funcion no es inyectiva, ya que $f(-x) = f(x)$ y para que una funcion sea inyectiva tiene que cumplir que si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, y esta funcion no lo cumple.

ii) ~~Teniendo en cuenta que la funcion tiene una asintota vertical en~~

Teniendo en cuenta que la funcion es par y que

$f(0) = \frac{1}{2+0^2} = \frac{1}{2}$ → punto maximo de la funcion

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2+\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

∴ sabemos que $im(f) = [\frac{1}{2}, 0)$

Por ende, la funcion no es suryectiva ya que $im(f) \neq \mathbb{R}$, es decir, la imagen no es igual al conjunto de llegada de la funcion.

iii) Como la funcion no es ni inyectiva ni suryectiva entonces tampoco es biyectiva.

↓

iv) Si, es necesario restringir el dominio de f.

Como la funcion es par podemos restringir su dominio a los reales positivos, es decir, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

v) Para que f sea biyectiva debe estar definida de la siguiente manera: $f:(0,\infty)\to\left(\frac{1}{2},0\right)$

Ahora calculemos la inversa.

$$f(f^{-1}(x))=x \Rightarrow \frac{1}{2+(f^{-1}(x))^2}=x \Rightarrow 1=x.\left(2+[f^{-1}(x)]^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=2+[f^{-1}(x)]^2 \Rightarrow \frac{1}{x}-2=[f^{-1}(x)]^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}-2}=\pm f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{x}-2}$$

Por ende, ~~como el~~ la inversa de f es $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{x}-2}$

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes, cuyo texto se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.