

# Complejidad de Edmonds-Karp

Daniel Penazzi

23 de abril de 2021

# Tabla de Contenidos

- 1 Enunciado del teorema y primera parte de la prueba
  - Lados Críticos
  - $d, b$
  - Lema de las distancias
- 2 Acotando número de eventos de criticalidad
  - Caso lado se saturó en el paso  $k$
  - Caso lado se vació en el paso  $k$
- 3 Parte final

# Edmonds-Karp

- En la clase pasada vimos que Edmonds y Karp propusieron una modificación al algoritmo de Ford-Fulkerson que consiste en buscar los caminos aumentantes **de menor longitud** entre todos los caminos aumentantes.
- Como para hacer eso se usa BFS, decimos que  $EK=FF+BFS$ .
- Nos quedaba para hoy demostrar que EK es un algoritmo polinomial.
- El teorema y otros como el son una parte muy importante de la materia.
- El algoritmo es obviamente importante, pero uno de los objetivos de la materia es justamente mostrar ejemplos de teoremas de cálculo de complejidad de algoritmos complejos.

# Complejidad de Edmonds-Karp

## Teorema de Edmonds-Karp

La complejidad del algoritmo de Edmonds-Karp es  $O(nm^2)$

- Prueba:
- Para facilitar la prueba, supondremos que si en el network esta el lado  $\overrightarrow{xy}$ , entonces no esta el lado  $\overrightarrow{yx}$ .
- Esta propiedad no es restrictiva, como se puede ver en un ejercicio del práctico.
- La prueba contiene varias definiciones, propiedades y lemas internos.

# Prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

- Si  $f_0, f_1, f_2, \dots$ , etc son los flujos parciales producidos al correr Edmonds-Karp, entonces queremos ver que hay una cantidad finita de ellos, y dar una cota para ese número.
- Como la búsqueda y construcción de cada camino aumentante se hace con BFS, cada incremento del flujo tiene complejidad  $O(m)$ .
- Así que si probamos que sólo puede haber  $O(nm)$  flujos aumentantes, tendremos una prueba de la complejidad de Edmonds-Karp:  $O(nm) \cdot O(m) = O(nm^2)$ .
- Para ello necesitamos una definición clave.

# Lados críticos

## Definición

Diremos que un llado  $\overrightarrow{xy}$  se vuelve crítico durante la construcción de uno de los flujos intermedios (digamos,  $f_{k+1}$ ) si para la construcción de  $f_{k+1}$  pasa una de las dos cosas siguientes:

- 1 Se usa el lado en forma forward, saturandolo (es decir  $f_k(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ , pero luego  $f_{k+1}(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ )
- 2 O se usa el lado en forma backward, vaciandolo (es decir  $f_k(\overrightarrow{xy}) > 0$  pero  $f_{k+1}(\overrightarrow{xy}) = 0$ ).

# continuación prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

- En cada construcción de un camino aumentante al menos un lado se vuelve crítico.
- Pues la única diferencia entre Edmonds-Karp y Ford-Fulkerson es sólo cómo se elige el camino.
- El problema es que un lado puede volverse crítico **muchas veces**.
- Se satura, se vacía un poco, vuelve a saturarse, se vacía completamente, vuelve a llenarse un poco, vuelve a vaciarse completamente, etc.
- Veamos cuántas veces puede pasar esto.

# distancias

## Definición

Dados vértices  $x, z$  y flujo  $f$  definimos a la distancia entre  $x$  y  $z$  relativa a  $f$  como la longitud del menor  $f$ -camino aumentante entre  $x$  y  $z$ , si es que existe tal camino, o infinito si no existe o 0 si  $x = z$ .

La denotaremos como  $d_f(x, z)$ .

## Notación

Dado un vértice  $x$  denotamos

$$d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$$

y

$$b_k(x) = d_{f_k}(x, t).$$



# distancias

- Es decir,  $d_k(x)$  es la longitud del menor  $f_k$ -camino aumentante entre  $s$  y  $x$  y  $b_k(x)$  es la longitud del menor  $f_k$ -camino aumentante entre  $x$  y  $t$ .
- Estas distancias  $d_k, b_k$  tienen algunas propiedades que demostraremos a continuación.
- Las propiedades no son **exactamente** iguales para ambas, ni la demostración, pero son similares.
- Haremos las pruebas correspondientes a  $d_k$  y dejamos como ejercicio hacer las pruebas correspondientes a  $b_k$ .

# Prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

## Definición

Dado un flujo  $f$  y un vértice  $x$ , diremos que un vértice  $z$  es un vecino  $f$ FF de  $x$  si pasa alguna de las siguientes condiciones:

- $\vec{xz} \in E$  y  $f(\vec{xz}) < c(\vec{xz})$  o:
- $\vec{zx} \in E$  y  $f(\vec{zx}) > 0$ .

## Observación trivial:

Si  $z$  es un  $f_k$ FF vecino de  $x$ , entonces  $d_k(z) \leq d_k(x) + 1$

# Prueba de la observación trivial

- Si no existe  $f_k$ -camino aumentante entre  $s$  y  $x$ , entonces  $d_k(x) = \infty$  y el lema es obvio.
- Supongamos entonces que existen  $f_k$ -caminos aumentantes entre  $s$  y  $x$ , y tomemos de entre todos ellos, alguno con longitud mínima.
- Llamemosle  $P$  a ese camino. Por lo tanto, la longitud de  $P$  es  $d_k(x)$
- Como  $z$  es  $f_k$ FF vecino de  $x$ , si tomamos  $Q$  el camino que consiste en agregar  $z$  al final de  $P$ , tenemos que  $Q$  es un  $f_k$ -camino aumentante entre  $s$  y  $z$ .
- La longitud de  $Q$  es igual a la longitud de  $P$  mas uno, es decir,  $d_k(x) + 1$ .

# Prueba de la observación trivial

- $Q$  es UN  $f_k$ -camino aumentante entre  $s$  y  $z$ .
- Por lo tanto la MENOR longitud posible entre TODOS los  $f_k$ -caminos aumentantes entre  $s$  y  $z$  será menor o igual que la longitud de  $Q$ .
- Dado que la menor longitud posible entre todos los  $f_k$ -caminos aumentantes entre  $s$  y  $z$  es  $d_k(z)$  y la longitud de  $Q$  es  $d_k(x) + 1$ , hemos probado que  $d_k(z) \leq d_k(x) + 1$ .
- Nota: obviamente tambien existe una propiedad trivial para los  $b_k$ , que dejamos como ejercicio.

# Las distancias $d, b$ no disminuyen

## Lema de las distancias

Las distancias definidas anteriormente no disminuyen a medida que  $k$  crece.

Es decir,  $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$  y  $b_k(x) \leq b_{k+1}(x) \forall x$

- Prueba: Lo demostraremos para  $d$ , dejamos como ejercicio la prueba para  $b$ .
- La prueba es por contradicción, suponiendo que no es cierto.
- Sea  $A = \{y : d_{k+1}(y) < d_k(y)\}$ .
- Si el lema es cierto,  $A$  es vacío, así que asumamos que  $A \neq \emptyset$  y lleguemos a una contradicción.
- Como  $A \neq \emptyset$ , tiene algún elemento.

# Continuación de prueba de que las distancias no disminuyen

- Pero en vez de tomar cualquier elemento de  $A$ , tomaremos el “mas chico”.
- ¿“mas chico” respecto de qué metrica?
- Respecto de  $d_{k+1}$ , es decir, tomaremos  $x \in A$  tal que:

$$d_{k+1}(x) = \text{Min}\{d_{k+1}(y) : y \in A\}$$

- Como  $x \in A$  entonces  $d_{k+1}(x) < d_k(x)$  ( $\dagger$ ).
- En particular,  $d_{k+1}(x) < \infty$ , asi que existe un  $f_{k+1}$  camino aumentante entre  $s$  e  $x$ , y de entre todos ellos tomamos uno de la menor longitud.

# Continuación de prueba de que las distancias no disminuyen

- Observemos que  $x \neq s$  pues  $x \in A$  y  $s \notin A$  (pues  $d_k(s) = d_{k+1}(s) = 0$ )
- Así que ese camino no es el camino formado sólo por el vértice  $s$ .
- Concluimos que debe existir un vértice  $z \neq x$  inmediatamente anterior a  $x$  en ese camino.
- Veamos que propiedades tienen  $z$ ,  $x$  y lleguemos a la contradicción.
- Primero, observemos que como  $z$  es el vecino inmediatamente anterior a  $x$  en un  $f_{k+1}$  camino aumentante, entonces  $x$  es un  $f_{k+1}$  FF vecino de  $z$ .
- Recordemos esto para mas adelante.

# Continuación de prueba de que las distancias no disminuyen

- Como  $d_{k+1}(x)$  es la menor de las distancias  $d_{k+1}$  de elementos de  $A$ , deducimos que cualquier elemento que tenga  $d_{k+1}$  menor que  $d_{k+1}(x)$ , no puede estar en  $A$ .
- $z$  forma parte de un  $f_{k+1}$  camino aumentante de menor longitud entre  $s$  y  $x$ , el fragmento de ese camino que va de  $s$  a  $z$  es un  $f_{k+1}$  camino aumentante de longitud **mínima** entre  $s$  y  $z$ .
- Como  $z$  esta justo antes de  $x$ , concluimos que  $d_{k+1}(z) = d_{k+1}(x) - 1$ . (★)
- Entonces  $d_{k+1}(z) = d_{k+1}(x) - 1 < d_{k+1}(x)$ , así que por lo que dijimos al principio de esta página,  $z \notin A$ .
- Concluimos que  $d_k(z) \leq d_{k+1}(z)$  (‡)



# Continuación de prueba de que las distancias no disminuyen

Poniendo todo junto:

$$\begin{aligned}
 d_k(x) &\stackrel{(\dagger)}{>} d_{k+1}(x) \\
 &\stackrel{(\star)}{=} d_{k+1}(z) + 1 \\
 &\stackrel{(\dagger)}{\geq} d_k(z) + 1
 \end{aligned}$$

- Es decir,  $d_k(x) > d_k(z) + 1$  ( $\square$ ).
- Por la observación trivial, esto implica que  $x$  no es  $f_k$ FF vecino de  $z$ .

# Continuación de prueba de que las distancias no disminuyen

- Entonces, la situación es:
  - $x$  no es  $f_k$  FF vecino de  $z$ , pero
  - $x$  es  $f_{k+1}$  FF vecino de  $z$  (por lo que dijimos en el “Recordemos” de unas páginas atrás)
- ¿Cómo puede pasar esto?
- La única forma en la que esto puede pasar es que el  $f_k$  camino aumentante que usamos para construir  $f_{k+1}$  sea un camino aumentante que pase primero por  $x$  y luego por  $z$ .
- Expliquemos un poco mas esto, considerando los dos casos posibles, según sea que  $\overrightarrow{xz} \in E$  o que  $\overrightarrow{zx} \in E$ :

## Caso $\overrightarrow{xz}$ es lado.

- Si  $\overrightarrow{xz} \in E$ , entonces:
  - 1  $x$  no es  $f_k$ FF vecino de  $z$  implica que  $f_k(\overrightarrow{xz}) = 0$ .
  - 2  $x$  es  $f_{k+1}$ FF vecino de  $z$  implica que  $f_{k+1}(\overrightarrow{xz}) > 0$
- 1) y 2) implican que  $f_{k+1}(\overrightarrow{xz}) > f_k(\overrightarrow{xz})$
- Esto sólo puede pasar si al construir  $f_{k+1}$  ENVIAMOS flujo por el lado  $\overrightarrow{xz}$ .
- Por lo tanto el camino pasó primero por  $x$  y luego por  $z$ .

## Caso $\overrightarrow{zx}$ es lado.

- Si  $\overrightarrow{zx} \in E$ , entonces:
  - 1  $x$  no es  $f_k$ FF vecino de  $z$  implica que  $f_k(\overrightarrow{zx}) = c(\overrightarrow{zx})$ .
  - 2  $x$  es  $f_{k+1}$ FF vecino de  $z$  implica que  $f_{k+1}(\overrightarrow{zx}) < c(\overrightarrow{zx})$
- 1) y 2) implican que  $f_{k+1}(\overrightarrow{zx}) < f_k(\overrightarrow{zx})$ .
- Eso sólo puede pasar si al construir  $f_{k+1}$  hubo una DISMINUCIÓN de flujo en el lado  $\overrightarrow{zx}$ .
- Esto último sólo puede pasar si se usó BACKWARDS.
- Para usarse backward, el camino debe haber pasado primero por  $x$  y luego por  $z$ .

# Conclusión de prueba de que las distancias no disminuyen

- En cualquiera de los casos, significa que para pasar de  $f_k$  a  $f_{k+1}$  usamos un camino aumentante  $P$  de la forma  $s \dots xz \dots t$  (o  $s \dots \overleftarrow{xz} \dots t$  en el caso backward).
- Como estamos usando Edmonds-Karp, ese camino es de longitud mínima.
- Por lo tanto,  $d_k(z) = d_k(x) + 1$ .
- Pero, por  $\square$ , teníamos  $d_k(x) > d_k(z) + 1$ .
- Entonces  $d_k(x) > d_k(z) + 1 = d_k(x) + 1 + 1$  implica  $0 > 2$ , absurdo.

# continuación prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

- Ahora estamos en condiciones para acotar cuantas veces puede un lado volverse crítico.
- Supongamos que un  $\overrightarrow{xy}$  se vuelve crítico en el paso  $k$  y luego en el paso  $r$  con  $r > k$ .
- Tenemos que analizar dos casos: se vuelve crítico en el paso  $k$  porque se saturó, o se vuelve crítico en el paso  $k$  porque se vació.
- Analicemos primero el caso en que se saturó en el paso  $k$ , es decir se usa forward.

- Como se saturó en el paso  $k$ , entonces:
  - Para construir  $f_{k+1}$  se debe usar un  $f_k$  camino aumentante de la forma  $s...xy....t$ .
  - Como estamos usando Edmonds-Karp, ese camino es de longitud mínima.
  - Por lo tanto  $d_k(y) = d_k(x) + 1$ . (i)
- Para que se vuelva a volver crítico en el paso  $r$ , deben pasar una de dos cosas:
  - Se vuelve crítico en el paso  $r$  porque se vacía.
  - Se vuelve crítico en el paso  $r$  porque vuelve a saturarse.
- Para que ocurra el segundo caso, debe haberse vaciado ANTES aunque sea un poco, si no es imposible que vuelva a saturarse.

# continuación caso $\overrightarrow{xy}$ se saturó en el paso $k$

- Entonces, en cualquiera de estos casos, deducimos que existe  $\ell$  con  $r \geq \ell > k$  tal que el flujo en  $\overrightarrow{xy}$  **disminuye** al pasar de  $f_\ell$  a  $f_{\ell+1}$ , ya sea vaciándose completamente o un poco.
- Esto implica que para construir  $f_{\ell+1}$  se usa un  $f_\ell$  camino aumentante de la forma  $s \dots \overleftarrow{yx} \dots t$ .
- **Como estamos usando Edmonds-Karp**, ese camino es de longitud mínima.
- Por lo tanto  $d_\ell(x) = d_\ell(y) + 1$ . (ii)



# continuación caso $\overrightarrow{xy}$ se saturó en el paso $k$

Entonces:

$$\begin{aligned}d_\ell(t) &= d_\ell(x) + b_\ell(x) \\&= d_\ell(y) + 1 + b_\ell(x) \quad \text{por (ii)} \\&\geq d_k(y) + 1 + b_k(x) \quad \text{porque las distancias no disminuyen} \\&= d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) \quad \text{por (i)} \\&= d_k(t) + 2\end{aligned}$$

## Caso $\overrightarrow{xy}$ se vacia en el paso $k$

- Este análisis era si el lado  $\overrightarrow{xy}$  se volvía crítico en el paso  $k$  porque se saturaba.
- Supongamos ahora que se vuelve crítico en ese paso porque se vacía.
- El análisis es similar:
  - Como se vacía, existe un camino (de longitud mínima) de la forma  $s \dots \overleftarrow{yx} \dots t$  que se usa para pasar de  $f_k$  a  $f_{k+1}$ .
  - Por lo tanto  $d_k(x) = d_k(y) + 1$ . (iii)
- Para poder volver a ser crítico en el paso  $r$ , debe o bien volverse a vaciar, o bien saturarse.

## Caso $\overrightarrow{xy}$ se vacia en el paso $k$

- (iii) y (iv) son iguales a (i) y (ii), sólo que con  $x$  e  $y$  intercambiados.
  - Por lo tanto podemos deducir  $d_\ell(t) \geq d_k(t) + 2$  de la misma forma que lo que hicimos con el caso en que se saturaba en el paso  $k$ , simplemente intercambiando  $x$  e  $y$  en la prueba.
  - Así que también en este caso concluimos que
$$d_r(t) \geq d_\ell(t) \geq d_k(t) + 2$$
- Concluimos que en cualquiera de los casos, luego de que un lado se vuelve crítico, para que pueda volverse crítico otra vez, la distancia entre  $s$  y  $t$  debe aumentar en al menos 2.

# finalización prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

- Como la distancia entre  $s$  y  $t$  puede ir desde un mínimo de 1 a un máximo de  $n - 1$
- concluimos que **un lado puede volverse crítico un máximo de  $O(\frac{n}{2}) = O(n)$  veces.**
- Como cada camino aumentante que se usa en Edmonds-Karp tiene al menos un lado que se vuelve crítico,
- entonces el total de flujos intermedios está acotado por  $O(mn)$ , pues hay  $m$  lados y cada uno se puede volver crítico a lo sumo  $O(n)$  veces.
- Como cada construcción de un flujo tiene complejidad  $O(m)$ , concluimos que la complejidad de Edmonds-Karp es  $O(m) * O(mn) = O(nm^2)$ . Fin

# Observación prueba de la complejidad de Edmonds-Karp

- Si en el final se pide esta prueba y uds NUNCA usan la propiedad que define Edmonds-Karp, se les descontarán muchos puntos.
- Es decir, vayan a la prueba y vean que en varios lados decimos “como estamos usando Edmonds-Karp”
- La prueba depende mucho del calculo exacto de ciertas distancias.
- Eso se puede hacer porque Edmonds-Karp usa BFS.
- y es en esos lados de la prueba que una prueba similar con DFS fallaría.
- Y por eso tenemos los ejemplos que dimos la clase pasada con FF+DFS no terminando nunca o demorando mucho

# Existencia de flujos maximales

- Dado que hemos probado que Edmonds-Karp siempre termina, y dado que produce un flujo maximal,
- entonces tambien hemos probado que en todo network siempre existe al menos un flujo maximal.
- Este hecho, como habia dicho antes, se puede probar con subsucesiones y el teorema de Bolzano-Weierstrass
- Pero ahora tienen una prueba “algorítmica” del mismo