

# Flujos Y Networks. MDII 2021

Daniel Penazzi

7 de abril de 2021

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Herramientas matemáticas
  - Grafos Dirigidos
  - Networks (redes)
  - Flujos

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej
  - 1 TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.
  - 2 Agua, gas, electricidad, llamadas telefónicas, etc
- Y tenemos ciertos productores que producen esos bienes.
- Queremos llevar esos bienes de los productores a los consumidores.

# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red seria una red de carreteras, pej.
- En el caso de los bienes de [2] será una red de cañerías de agua, o cañerías de gas, o cables de electricidad o teléfono.
- El problema que vamos a abordar no es construir esas redes, o resolver un problema de producción de los productores.
- Esos son problemas importantes, pero nuestro objetivo ahora es otro problema, tambien muy importante.

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.
- Hay dos cosas a modelizar:
  - 1 La red de transporte
  - 2 El “flujo” de bienes a través de esa red.

Empecemos con la red:

### Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:  
 $E \subseteq V \times V$
- Es decir, ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.
- Esto significa que no es lo mismo  $(x, y)$  que  $(y, x)$
- Pero además que pueden existir AMBOS lados.

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde  $x$  a  $y$  que al revés.
- Pej, podría ser imposible ir de  $y$  a  $x$ , si la red es una red de calles, y las calles son de sentido único.
- En ese caso en nuestro grafo dirigido existirá el lado  $(x, y)$  pero no el  $(y, x)$ .
- Pero incluso cuando se puede mandar en ambas direcciones podemos necesitar diferenciar.

- ## Notación:

Denotaremos el lado  $(x, y)$  como  $\overrightarrow{xy}$ .



## Vecinos hacia adelante y hacia atrás

- En los grafos no dirigidos, teníamos al conjunto de vecinos  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$ .
- Pero ahora como podemos tener lados tanto  $(x, y)$  como  $(y, x)$  deberíamos diferenciar entre “véminos hacia adelante” y “véminos hacia atrás”

### Notación:

En un grafo dirigido, definimos:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid \overrightarrow{xy} \in E\}$$

y :

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid \overrightarrow{yx} \in E\}$$

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.
- Y ademas esas capacidades máximas no tendrán porqué ser uniformes.
- Pej un cierto caño podrá transportar 1000 litros de agua y otro 3400.
- La definición que modela esto es la de **network**(redes, en castellano, pero voy a usar la palabra en ingles)

# Network

## Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple  $(V, E, c)$  donde  $(V, E)$  es un grafo dirigido y  $c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$

- En este contexto,  $c(\overrightarrow{xy})$  se llamará la "capacidad" del lado  $\overrightarrow{xy}$ .
- La idea, como dijimos antes, es que esto simboliza que no podemos mandar mas de  $c(\overrightarrow{xy})$  "bienes" por el lado  $\overrightarrow{xy}$ , sean cuales sean esos bienes.

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.
- Este año la dejaré dentro de la de flujo.
- De todos modos, una aclaración que conviene hacer ahora es que para simplificar el modelo, es practica común asumir que hay **un sólo productor** y **un sólo consumidor**
- En un ejercicio del práctico se les pedirá ver que esto no es una limitación, es decir, si pueden resolver problemas con un sólo productor y un sólo consumidor, entonces es fácil realizar una modificación que permita resolver el problema de múltiples productores o consumidores.

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?
- Buena, una de ellas es la relacionada con la capacidad: no deberíamos mandar mas litros de agua que lo que el caño puede aguantar.
- Otra de ellas tiene que ver con cosas realísticas: tiene sentido hablar de mandar 4 litros de agua, o incluso 0 litros de agua, pero no mandar -10 litros de agua por un caño.
- Entonces vamos a incluir en la definición de flujo como una función  $f$  sobre los lados tal que  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$ .

## Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias engorrosas.
- Por lo que usaremos una notación común para resolver esto:
- Si  $P$  es una propiedad que puede ser verdadera o falsa,  $[P]$  denota el número 1 si  $P$  es verdadera, y 0 si  $P$  es falsa.
- Para qué sirve esto?

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable  $x$ , y queremos sumar una función  $f(x)$  sobre todos los  $x$  que satisfagan una propiedad  $P(x)$

- En vez de escribir

$$\sum_{x:P(x)} f(x)$$

- podemos simplemente escribir  $\sum_x f(x)[P(x)]$  o  $\sum_x [P(x)]f(x)$

- o incluso  $\sum f(x)[P(x)]$  si queda claro que sumamos sobre  $x$ .

## Notación para funciones sobre lados

- Otra cosa que permita agilizar la notación es, dada una función  $g$  cualquiera definida sobre los lados ( $g$  en general va a ser o bien las capacidades o bien el flujo) extender la notación " $g(\overrightarrow{xy})$ " para tomar en cuenta conjuntos de vértices y no sólo 2 vértices individuales.

### Notación:

Si  $g$  es una función definida en los lados y  $A$  y  $B$  son subconjuntos de vertices, entonces  $g(A, B)$  denotará la suma:

$$g(A, B) = \sum_{x,y} [x \in A][y \in B][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$



- Con la notación usual esto seria:

$$g(A, B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \overrightarrow{xy} \in E}} g(\overrightarrow{xy})$$

- Por eso preferimos usar la notación “[]” aunque cuando uno lo escribe a mano ya sea en papel o en el pizarrón probablemente no sea necesario.

# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

$$in_g(x) = g(V, \{x\}) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] g(\overrightarrow{yx})$$

- Es decir  $out_g(x)$  es todo lo que “sale” de  $x$  por medio de  $g$ .
- Es decir,  $in_g(x)$  es todo lo que “entra” a  $x$  por medio de  $g$ .

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
- $in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})$
- Ahora estamos listos para definir flujo desde un productor (que denotaremos  $s$ ) a un consumidor (que denotaremos  $t$ ).
- El hecho que uno sea productor y el otro consumidor se verá reflejado en la definición.

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes **propiedades:**

- ①  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$  (“feasability”)
- ②  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$  (“conservación”)
- ③  $out_f(s) \geq in_f(s).$  ( $s$  es productor)
- ④  $in_f(t) \geq out_f(t).$  ( $t$  es consumidor)

## Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a transportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.
- La segunda propiedad dice que el network no tiene "pérdidas".
- es decir que cualquier vértice que no sea ni  $s$  ni  $t$  no consume ni produce bienes.
- (o en una interpretación alternativa, produce exactamente lo mismo que consume)

# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que  $t$  es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.
- En algunos libros en vez de 3) se pide directamente  $in_f(s) = 0$  y en vez de 4) se pide  $out_f(t) = 0$ .
- Podríamos definirlo así porque en todos los algoritmos que veamos, los flujos que efectivamente construyamos van a tener esa propiedad.
- Además que en todos los ejemplos que usaremos,  $\Gamma^-(s) = \Gamma^+(t) = \emptyset$

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.
- **s se llama tradicionalmente la “fuente”(source)**
- **y t el “resumidero”(sink).**
- Estos nombres vienen de pensar el network como una red de cañerías de agua.
- En algunos libros la propiedad [4] no se incluye en la definición. (veremos que se deduce de las otras tres).

# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el **valor** de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

- Es decir, **el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.**
- Veremos luego que  $v(f)$  también es igual a  $in_f(t) - out_f(t)$ , es decir, la cantidad neta de bienes consumidos.
- Intuitivamente, si en el medio no se pierde nada por la propiedad 2), lo que llega a  $t$  debería ser igual a lo que sale de  $s$ .
- Esto se puede demostrar con una pequeña cuenta que haremos luego, pero primero:



# Flujos maximales

## Definición

Dado un network  $N$  y vertices  $s, t$ , un flujo maximal de  $s$  a  $t$  (o "Max flow") es un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  tal que  $v(g) \leq v(f)$  para todo flujo  $g$  de  $s$  a  $t$ .

- El problema que queremos resolver es:
- Dado un network, encontrar un flujo maximal en el network
- Y obviamente queremos un algoritmo polinomial que lo resuelva.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” **valor** de un flujo maximal.
- A veces esto se llama el maxvalue.
- De la definición no es claro que exista un flujo maximal.
- pero probaremos mas adelante que siempre existe.

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy}) [\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy}) [y \in \Gamma^+(x)] \\
 &= \sum_x out_f(x)
 \end{aligned}$$

Para que las cosas no se vean tan amontonadas, no escribiremos las condiciones del tipo " $[x \in V]$ " es decir asumiremos que nuestras variables,  $x, y$  estan en  $V$ . sigue->

# continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{y, x} [\overrightarrow{yx} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{yx}) [y \in \Gamma^-(x)] \\
 &= \sum_x in_f(x)
 \end{aligned}$$

sigue->

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .
- Con lo cual nos queda la igualdad
- $out_f(s) + out_f(t) = in_f(s) + in_f(t)$
- es decir,  $in_f(t) - out_f(t) = out_f(s) - in_f(s) = v(f) \geq 0$ .
- QED