

# Resumen MD2 Filmina 2

Lautaro Bachmann

## Contents

Cotas para Greedy . . . . .	2
Teorema de Brooks . . . . .	2
Propiedad . . . . .	2
VIT . . . . .	2
Very Important Theorem . . . . .	2
Corolario . . . . .	2
Consecuencia . . . . .	2
Grafos bipartitos . . . . .	3
El problema 2COLOR . . . . .	3
Teorema . . . . .	3
Algoritmo 2COLOR para G conexo. . . . .	3
Complejidad . . . . .	3
Corolario . . . . .	3

## Contents

## Cotas para Greedy

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

## Teorema de Brooks

Si  $G$  es conexo, entonces  $\chi(G) \leq \Delta$ , a menos que  $G$  sea un ciclo impar o un grafo completo.

## Propiedad

Si  $G$  es conexo, entonces existe un ordenamiento de los vértices tal que Greedy colorea todos los vértices, salvo uno, con  $\Delta$  colores o menos.

## VIT

### Very Important Theorem

Sea  $G = (V, E)$  un grafo cuyos vértices están coloreados con un coloreo propio  $c$  con  $r$  colores  $\{0, 1, \dots, r-1\}$ . Sea  $\pi$  una permutación de los números  $0, 1, \dots, r-1$ , es decir,  $\pi : \{0, 1, \dots, r-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$  es una biyección. Sea  $V_i = \{x \in V : c(x) = i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de  $V_{\pi(0)}$ , luego los de  $V_{\pi(1)}$ , etc, hasta  $V_{\pi(r-1)}$ . (el orden interno de los vértices dentro de cada  $V_i$  es irrelevante)

Entonces Greedy en ese orden coloreará  $G$  con  $r$  colores o menos.

## Corolario

Existe un ordenamiento de los vértices de  $G$  tal que Greedy colorea  $G$  con  $\chi(G)$  colores.

## Consecuencia

si no podemos obtener  $\chi(G)$  polinomialmente, usaremos el VIT para tratar de obtener una aproximación a  $\chi(G)$ .

No siempre se puede, pero en la práctica suele funcionar bastante bien, dependiendo de cuáles permutaciones se usen.

## Grafos bipartitos

Un grafo se dice bipartito si  $\chi(G) = 2$ .

Es decir, si  $G = (V, E)$  entonces existen  $X, Y \subseteq V$  tales que:

$$1 \quad V = X \cup Y. \quad 2 \quad X \cap Y = \emptyset$$

$$3 \quad \forall wv \in E \quad (w \in X, v \in Y) \vee (w \in Y, v \in X)$$

## El problema 2COLOR

Dado un grafo  $G$ , ¿es  $\chi(G) \leq 2$ ?

### Teorema

2COLOR es polinomial

### Algoritmo 2COLOR para $G$ conexo.

Elegir un vértice  $x$  cualquiera.

Correr BFS( $x$ ), creando un árbol.

Para cada vértice  $z$ , sea  $N(z)$  el nivel de  $z$  en el árbol BFS( $x$ ).

Colorear  $c(z) = (N(z) \bmod 2)$ .

Chequear si el colorario dado en [4] es propio.

Si lo es, retornar “ $\chi(G) \leq 2$ ”

Si no lo es, retornar “ $\chi(G) > 2$ ”

### Complejidad

la complejidad total es  $O(m) + O(m) = O(m)$ .

### Corolario

Sea  $G$  un grafo con  $\chi(G) \geq 3$ .

Como  $\chi(G) \geq 3$ , el coloreo de 2 colores dado en el algoritmo no puede ser propio.

### Conclusión:

$\chi(G) \geq 3$  si y solo si existe un ciclo impar en  $G$ .