

# Grafos Greedy

Daniel Penazzi

19 de marzo de 2021

# Tabla de Contenidos

- 1 Greedy (cont.)
  - Error de Greedy
  - Brooks
  - Reordenes
- 2 2COLOR

# Mas sobre Greedy

- En la primera clase dimos un ejemplo de que Greedy no necesariamente colorea un grafo  $G$  con  $\chi(G)$  colores.
- El ejemplo era  $C_6$ , que se puede colorear con 2 colores, pero en un cierto orden de los vértices Greedy usa 3 colores.
- En ese ejemplo Greedy le “erró” por uno.
- Puede “errarle ” por mas? Que tanto mas?
- Veamos un ejemplo con  $n$  par,  $n = 2r$ .
- Tomaremos vertices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

# Mas sobre Greedy

- Los lados son todos los  $v_i v_j$  tales que:
  - 1  $i$  es impar,  $j$  es par y:
  - 2  $j \neq i + 1$ .
- Corremos Greedy en el orden  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
- Empezamos con  $c(v_1) = 0$ .
- $v_2$  no tiene véctinos en el conjunto de vértices anteriores a el, pues el único vértice anterior en el orden es  $v_1$ .
- Asi que Greedy le da el color  $c(v_2) = 0$ .

## Continuando con el ejemplo

- Los vértices anteriores a  $v_3$  son  $v_1$  y  $v_2$ , y  $v_2$  es vecino, así que  $v_3$  no puede tener el color 0. Greedy lo colorea  $c(v_3) = 1$ .
- Los vértices anteriores a  $v_3$  son  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , y  $v_1$  es el único vecino, así que  $v_4$  no puede tener el color 0. Greedy lo colorea  $c(v_4) = 1$ .
- Los vértices anteriores a  $v_5$  son  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ , y entre ellos los que son vecinos son  $v_2$  y  $v_4$ , así que  $v_5$  no puede tener el color 0 ni el 1. Greedy lo colorea  $c(v_5) = 2$ .
- Los vértices anteriores a  $v_6$  son  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$ , y entre ellos los que son vecinos son  $v_1$  y  $v_3$ , así que  $v_6$  no puede tener el color 0 ni el 1. Greedy lo colorea  $c(v_6) = 2$ .

## Continuando con el ejemplo

- Vemos que colorea los 2 primeros con un color, los 4 primeros con 2 colores, los 6 primeros con 3.
- Podríamos poner como hipótesis inductiva que Greedy colorea los primeros  $2i$  vértices con  $i$  colores,
- Además podemos poner dentro de la hipótesis inductiva que para todo  $k \leq 2i$ , el color de  $v_k$  es igual al color de  $v_{k-1}$  si  $k$  es par, y que ese color común es  $\frac{k}{2} - 1$ , pues eso es lo que ocurre en los primeros casos.
- Probemos entonces esta hipótesis, suponiéndola verdadera para  $i$  y probándola para  $i + 1$ .

# Continuando con el ejemplo

- Los vértices anteriores a  $v_{2i+1}$  son  $v_1, v_2, \dots, v_{2i}$ , y entre ellos los que son vecinos de  $v_{2i+1}$  son los  $v_t$  con  $t$  par,  $t \leq 2i$ .
- Por hipótesis inductiva, el color de  $v_t$  con  $t$  par  $\leq 2i$  es  $\frac{t}{2} - 1$ , así que  $v_{2i+1}$  no puede tener ninguno de los colores  $\{\frac{t}{2} - 1 : t = 2, 4, \dots, 2i\} = \{0, 1, \dots, i - 1\}$
- Por lo tanto, Greedy le da el menor color posible:  $c(v_{2i+1}) = i$ .

# Continuando con el ejemplo

- Los vértices anteriores a  $v_{2i+2} = v_{2(i+1)}$  son  $v_1, v_2, \dots, v_{2i+1}$ , y entre ellos los que son vecinos de  $v_{2i+2}$  son los  $v_t$  con  $t$  impar,  $t < 2i$ , pues  $v_{2i+1}$  no es vecino de  $v_{2i+2}$  y los pares tampoco.
- Por hipótesis inductiva, el color de  $v_t$  con  $t$  impar  $\leq 2i$  es  $\frac{t+1}{2} - 1 = \frac{t-1}{2}$ , así que  $v_{2i+2}$  no puede tener ninguno de los colores  $\{\frac{t-1}{2} : t = 1, 3, \dots, 2i-1\} = \{\frac{j}{2} : j = 0, 2, \dots, 2i-2\} = \{0, 1, \dots, i-1\}$
- Por lo tanto, Greedy le da el menor color posible:  $c(v_{2i+2}) = i$ .
- Y hemos probado la hipótesis inductiva.



## Cont. ejemplo

- Por lo tanto, Greedy colorea el grafo con  $\frac{n}{2}$  colores.
- Por otro lado, podriamos colorear  $c(v_i) = (i \bmod 2)$ .
- Puesto que no hay lados entre vértices  $v_i$  con  $i$  impar, ni hay lados entre vértices  $v_i$  con  $i$  par, ese coloreo es propio.
- Asi que  $\chi(G) = 2$  pero Greedy usa  $\frac{n}{2}$  colores, asi que la diferencia entre  $\chi(G)$  puede ser tan grande como se quiera.
- En el ejercicio 5 del práctico se les pide generalizar este ejemplo para  $n$  impar, e incluso ver que se puede dar un ejemplo en el caso  $n$  par para el cual  $\chi(G) = 2$  pero Greedy usa  $\frac{n}{2} + 1$  colores.

## Cotas para Greedy

- Pero hay alguna cota útiles que podemos obtener, usando Greedy.

### Teorema

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

- Prueba: Cuando Greedy colorea un vértice  $x$ , debe eliminar de consideración todos los colores de los vecinos de  $x$  que esten antes que  $x$  en la lista de vértices.
- En el peor de los casos, todos los vecinos de  $x$  estan antes.
- Asi que en el peor de los casos, Greedy elimina  $d(x)$  colores.
- Como  $d(x) \leq \Delta$ , si tenemos  $\Delta + 1$  colores disponibles siempre habrá un color extra para colorear a  $x$ .QED

# Cotas para Greedy

- ¿Que tan realista es esa cota? ¿Hay grafos para los que  $\chi(G) = \Delta + 1$ ?
- Si, una cantidad infinita.
- Por ejemplo, todos los grafos completos:
  - $\chi(K_n) = n$
  - $\Delta(K_n) = n - 1$
- O los ciclos impares:
  - $\chi(C_{2r+1}) = 3$
  - $\Delta(C_{2r+1}) = 2$
- O bien un grafo con muchas componentes conexas, algunas de ellas que sean ciclos pares y al menos una que sea un ciclo impar.
- O un grafo con muchas componentes conexas todas con menos de  $r$  vertices y una componente conexas que sea un  $K_r$

# Brooks

- Se pueden construir mas ejemplos usando grafos desconexos, obviamente.
- Pero ¿hay algún otro ejemplo **conexo**?
- No:

## Teorema de Brooks (1941)

Si  $G$  es conexo, entonces  $\chi(G) \leq \Delta$ , a menos que  $G$  sea un ciclo impar o un grafo completo.

# Demostración de Brooks

- Sea  $x$  tal que  $d(x) = \delta$ .
- Corramos BFS( $x$ ). (o DFS( $x$ ), el que quieran)
- Cuando BFS( $x$ ) termina, obtiene la componente conexa donde esta  $x$ , pero como  $G$  es conexo, hay una sola componente conexa, así que se obtienen todos los vértices de  $G$ .
- Al correr BFS( $x$ ), se irán incorporando ciertos vértices en cierto orden.
- Ordenemos los vértices de  $G$  en el orden **inverso** al cual fueron incorporados por BFS( $x$ ).
- El orden será  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con  $x_n = x$  porque  $x$  es el primero al correr BFS( $x$ ) así que es el último en el orden inverso.

## Demostración de Brooks (cont.)

- Salvo  $x$ , todos los demás vértices son incorporados a la componente conexa que está construyendo BFS( $x$ ) por un vértice que es vecino y **que ya está**. (lo mismo vale para DFS si prefieren DFS).
- Así que en el orden en que se incorporan los vértices, todo vértice, salvo  $x$ , tiene un vecino **anterior**.
- Entonces, en el orden inverso, tenemos que todo vértice (salvo  $x$ ) tiene un vecino **posterior**.
- Greedy le da el color 0 a  $x_1$ .
- A los demás vértices, Greedy les revisa los colores de los vecinos anteriores.

## Demostración de Brooks (cont.)

- Pero si tomamos un vértice  $x_i$  con  $1 < i < n$ , entonces  $x_i$ , por lo que dijimos antes, tiene al menos a un vértice posterior que es vecino de  $x$ .
- Lo cual quiere decir que no todos sus vecinos están antes que él en el orden.
- Entonces  $x_i$  tiene a lo sumo  $d(x_i) - 1$  vecinos anteriores, con lo cual Greedy elimina a lo sumo esa cantidad de colores.
- Como  $d(x_i) - 1 \leq \Delta - 1$ , entonces si tenemos  $\Delta$  colores disponibles, siempre habrá uno sobrante para colorear  $x_i$ . (siempre que  $i < n$ )
- Resumamos esto, que es importante más allá del resto de la prueba.

# Demostración de Brooks (cont.)

## Propiedad

Si  $G$  es conexo, entonces existe un ordenamiento de los vértices tal que Greedy colorea todos los vértices, salvo uno, con  $\Delta$  colores o menos.

- Bueno, nos queda por colorear  $x$ .
- Si  $G$  no es regular, es trivial.
- Pues  $d(x) = \delta$  y  $\delta < \Delta$  si  $G$  no es regular.
- Entonces para colorear  $x$  Greedy elimina a lo sumo  $d(x) = \delta$  colores, y como  $\delta < \Delta$ , le queda al menos un color para colorear  $x$ .
- Queda el caso regular, y sólo un vértice. (observemos que tanto los ciclos impares como los completos son regulares, y es en esta parte donde usaremos que  $G$  no es uno de ellos).
- Pan comido, no?
- No. Lo dejamos para la semana que viene.



- Greedy depende del orden en que se corra los vértices.
- Una estrategia consistiría en correr Greedy en algún orden, luego en otro, luego en otro, etc, y quedarse con el mejor coloreo posible.
- Quizas no sea  $\chi(G)$  pero habria alguna esperanza de tener un coloreo aunque sea aproximado.
- En general si uno simplemente busca reordenes al azar, es muy difícil encontrar uno que funcione bien.
- Otra posible estrategia seria ir reordenando los vértices de forma tal de asegurarnos de nunca empeorar el coloreo.
- ¿esto es posible?
- Si, gracias al siguiente teorema.

## VIT

## Very Important Theorem (VIT)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo cuyos vértices están coloreados con un coloreo propio  $c$  con  $r$  colores  $\{0, 1, \dots, r-1\}$ .

Sea  $\pi$  una permutación de los números  $0, 1, \dots, r-1$ , es decir,  $\pi : \{0, 1, \dots, r-1\} \mapsto \{0, 1, \dots, r-1\}$  es una biyección.

Sea  $V_i = \{x \in V : c(x) = i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1$ .

Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de  $V_{\pi(0)}$ , luego los de  $V_{\pi(1)}$ , etc, hasta  $V_{\pi(r-1)}$ . (el orden interno de los vértices dentro de cada  $V_{\pi(i)}$  es irrelevante)

Entonces Greedy en ese orden coloreará  $G$  con  $r$  colores o menos.

# Prueba del VIT

- Por inducción. Sea  $W_i = V_{\pi(0)} \cup V_{\pi(1)} \cup \dots \cup V_{\pi(i-1)}$ .
- La hipótesis inductiva será que Greedy no usa mas de  $i$  colores para colorear  $W_i$ .
- Como  $W_r = V$ , si probamos la hipótesis inductiva probamos el teorema.
- Caso base:  $i = 1$ . (por lo tanto  $V_{\pi(i-1)} = V_{\pi(0)}$ )
  - Los vértices de  $V_{\pi(0)}$  tienen todos el mismo color ( $\pi(0)$ ) así que no puede haber ningún lado entre esos vértices.
  - Por lo tanto, Greedy los coloreará a todos con el color 0.
- Listo el caso base.

## Prueba del VIT (Cont.)

- Supongamos la hipótesis cierta para  $i$  y probemosla para  $i + 1$ .
- es decir, probemos que Greedy colorea  $W_{i+1}$  con a lo sumo  $i + 1$  colores.
- Supongamos que no es cierto.
- Entonces, Greedy debe usar al menos  $i + 2$  colores, lo que significa que existe al menos un vértice  $x$  que esta coloreado con el color  $i + 1$  (porque empezamos a colorear desde 0).
- Para distinguir el coloreo que da Greedy del coloreo original que llamamos  $c$ , llamaremos al coloreo dado por Greedy en este orden por  $g$ .
- Es decir, estamos diciendo que existe  $x$  tal que  $g(x) = i + 1$ .

## cont. prueba VIT

- Cuando Greedy colorea un vértice, le da el **menor** color posible que no cause conflicto con los vértices anteriormente coloreados.
- Por lo tanto si  $g(x) = i + 1$ , entonces debe haber vecinos  $v_k$  de  $x$ ,  $k = 0, 1, \dots, i$ , anteriores a  $x$  en el orden, tales que  $g(v_k) = k$ .
- Observemos que  $W_{i+1} = W_i \cup V_{\pi(i)}$  y que los vértices de  $W_i$  estan antes en el orden que los de  $V_{\pi(i)}$ , por lo tanto Greedy los coloreará primero.
- Por hipotesis inductiva, Greedy coloreará esos vértices de  $W_i$  con a lo sumo  $i$  colores.
- Por la forma que colorea Greedy, esos colores son  $0, 1, \dots, i - 1$ .
- Como  $g(x) = i + 1$ , lo anterior implica que  $x \notin W_i$ .
- $x$  debe por lo tanto estar en  $V_{\pi(i)}$ .

## cont. prueba VIT

- Pero  $g(v_i) = i > i - 1$ , así que  $v_i$  tampoco puede estar en  $W_i$  y debe estar en  $V_{\pi(i)}$ .
- Ahora bien, los  $v_k$  eran todos vecinos de  $x$ , así que tenemos que  $v_i$  es vecino de  $x$ .
- Pero ambos están en  $V_{\pi(i)}$ .
- Es decir, son vecinos entre sí y están en  $V_{\pi(i)}$ , pero por la definición de  $V_{\pi(i)}$ , debe ser  $c(x) = c(v_i) = \pi(i)$ , absurdo pues  $c$  era un coloreo propio.
- Fin prueba VIT.

## Corolario

Existe un ordenamiento de los vértices de  $G$  tal que Greedy colorea  $G$  con  $\chi(G)$  colores.

- Prueba: Por definición  $\chi(G)$  es el menor  $k$  tal que existe un coloreo propio con  $k$  colores de  $G$ .
- Sea  $c$  un coloreo propio de  $G$  con  $k = \chi(G)$  colores.
- Sea  $V_i = \{x \in V : c(x) = i\}, i = 0, 1, \dots, k - 1$ .
- Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de  $V_0$ , luego los de  $V_1$ , etc.
- Por el VIT, Greedy en ese orden no usa mas de  $k$  colores.
- Dado que no hay coloreo propio con menos de  $k$  colores, Greedy usa exactamente  $k$  colores. Fin.

# Consecuencia

- Podríamos entonces simplemente ordenar con todos los ordenes posibles y correr Greedy para obtener  $\chi(G)$ .
- Pero dado que hay  $n!$  ordenes posibles, este algoritmo no es polinomial.
- Pero al menos, si no podemos obtener  $\chi(G)$  polinomialmente, usaremos el VIT para tratar de obtener una aproximación a  $\chi(G)$ .
- No siempre se puede, y hay grafos contruidos especialmente para hacer fracasar a VIT, pero en la practica suele funcionar bastante bien, dependiendo de cuales permutaciones  $\pi$  se usen.
- Parte del proyecto involucrá el VIT.



# Grafos bipartitos

- Un grafo se dice bipartito si  $\chi(G) = 2$ .
- El nombre viene de que si  $\chi(G) = 2$  entonces tenemos un coloreo propio con 2 colores, y los vértices se “parten” en dos partes, (una de un color, otra de otro) de forma tal que los lados son únicamente entre vértices de partes distintas.
- Es decir, si  $G = (V, E)$  entonces existen  $X, Y \subseteq V$  tales que:
  - 1  $V = X \cup Y$ .
  - 2  $X \cap Y = \emptyset$
  - 3  $wv \in E \Rightarrow (w \in X, v \in Y) \vee (w \in Y, v \in X)$
- De hecho esta es otra definición posible, excepto que no es equivalente a la primera en el caso  $E = \emptyset$ .
- A veces se toma como definición de bipartito esa definición, que equivale a decir  $\chi(G) \leq 2$ .

# El problema 2COLOR

- El problema 2COLOR es:
  - Dado un grafo  $G$ , ¿es  $\chi(G) \leq 2$ ?
- En realidad para todo  $k$  existen problemas  $k$ COLOR: “Dado un grafo  $G$ , ¿es  $\chi(G) \leq k$ ?” pero por ahora nos concentraremos en el caso  $k = 2$ .
- Queremos saber si se puede resolver el problema 2COLOR con un algoritmo polinomial.
- Esto suele abreviarse diciendo “2COLOR es polinomial”
- El algoritmo de buscar todos los coloreos posibles con 2 colores y ver si alguno es propio tiene complejidad  $O(2^n m)$  así que no nos sirve.
- Greedy es polinomial pero vimos un ejemplo donde  $G$  es bipartito pero Greedy lo colorea con  $\frac{n}{2}$  colores, así que no nos sirve.

## Teorema

### 2COLOR es polinomial

- Prueba: Recordemos el concepto de nivel en un arbol con raiz:
- En un arbol con raiz  $x$  definimos el nivel de un vértice  $z$  de acuerdo con su distancia a  $x$ , es decir:
  - Dado que es un arbol, es conexo, así que entre dos vértices cualesquiera hay al menos un camino.
  - Puesto que es un arbol, no tiene ciclos, por lo tanto entre dos vértices cualesquiera hay UN SOLO camino. (si hubiera 2, crearían un ciclo).
- Por lo tanto, tomamos el único camino entre  $z$  y  $x$ , contamos cuantos lados hay en ese camino, y ese es el **nivel** de  $z$  en el arbol.

- Pej,  $x$  tiene nivel 0. Sus vecinos en el arbol tienen nivel 1. Los vecinos de los vecinos, nivel 2, etc.
- Observemos que  $\chi(G) \leq 2$  si y solo si  $\chi(C) \leq 2$  para toda componente conexa  $C$  de  $G$ , pues al no haber caminos entre componentes conexas, cada componente conexa se puede colorear por separado.
- Por lo tanto para ver que 2COLOR es polinomial basta dar un algoritmo polinomial que determine si  $\chi(G) \leq 2$  para el caso  $G$  conexo.
- Si  $G$  es conexo, tanto  $BFS(x)$  como  $DFS(x)$  encuentran todos los vertices de  $G$ , y como explicamos la clase pasada, si se agregan los lados entre un vértice que ya estaba agregado y los vértices que ese vértice agregó se obtiene un arbol.
- Usaremos concretamente BFS.

## Algoritmo 2COLOR para $G$ conexo.

- 1 Elegir un vértice  $x$  cualquiera.
- 2 Correr BFS( $x$ ), creando un arbol.
- 3 Para cada vértice  $z$ , sea  $N(z)$  el nivel de  $z$  en el arbol BFS( $x$ ).
- 4 Colorear  $c(z) = (N(z) \bmod 2)$ .
- 5 Chequear si el colorario dado en [4] es propio.
- 6 Si lo es, retornar " $\chi(G) \leq 2$ "
- 7 Si no lo es, retornar " $\chi(G) > 2$ "

# Complejidad

- Tenemos que probar que ese algoritmo es correcto (es decir, siempre da la respuesta correcta) y que es polinomial.
- Empezemos por lo segundo:
  - Crear  $\text{BFS}(x)$  es  $O(m)$ .
  - Los niveles y el coloreo asociado se pueden ir calculando a medida que hacemos  $\text{BFS}(x)$ , basicamente, si un vértice  $u$  que está en el arbol agrega a un vértice  $v$  que no está, entonces coloreamos a  $v$  con 1 si el color de  $u$  era 0 y con 0 si el color de  $u$  era 1.
  - Asi que el coloreo es “gratis”, su complejidad esté metida dentro de la complejidad  $O(m)$  de construir BFS.
  - Chequear que un coloreo sea propio es  $O(m)$ .
  - Asi que la complejidad total es  $O(m) + O(m) = O(m)$ .
- Ahora la correctitud:

# Correctitud

- Obviamente si la respuesta que devuelve el algoritmo es " $\chi(G) \leq 2$ ", entonces esa respuesta es correcta, pues el algoritmo sólo devuelve esa respuesta si efectivamente el coloreo con 2 colores propuestos es un coloreo propio.
- Así que nos queda ver que cuando devuelve la respuesta " $\chi(G) > 2$ ", esa respuesta es correcta.
- Lo que tenemos que probar es que si devuelve " $\chi(G) > 2$ " entonces no hay **ningún** coloreo con 2 colores.
- Observeemos que esa respuesta es devuelta sólo si **ese coloreo particular del algoritmo** no es propio.
- Entonces tenemos que probar que si **ese** coloreo no es propio, **ningún otro** coloreo con 2 colores es propio.

## Correctitud (cont.)

- Supongamos entonces que el coloreo no es propio.
- Esto implica que existen  $z, y$  ( $z \neq y$ ) tales que  $c(z) = c(y)$  pero  $zy$  es un lado en  $G$ .
- Sea  $z_0 z_1 \dots z_k$  el único camino entre  $x$  y  $z$  en el arbol BFS ( $z_0 = x, z_k = z$ ).
- Sea  $y_0 y_1 \dots y_j$  el único camino entre  $x$  e  $y$  en el arbol BFS ( $y_0 = x, y_j = y$ ).
- Entonces  $k$  es igual al nivel de  $z$  y  $j$  igual al nivel de  $y$ .
- Por lo tanto  $c(z) = (k \bmod 2)$  y  $c(y) = (j \bmod 2)$
- Como  $c(z) = c(y)$  concluimos que  $(k \bmod 2) = (j \bmod 2)$ , es decir son ambos pares o ambos impares.
- Por lo tanto la suma  $k + j$  es PAR.



# Correctitud (cont.)

- Esos dos caminos comienzan igual (con  $x$ ) pero terminan distinto (con  $z \neq y$ ).
- En algun lado hay un último vértice en común entre esos dos caminos.
- Sea  $w$  ese último vértice en común.
- Los caminos son iguales hasta ahí, así que existe  $p$  con  $z_0 = y_0, z_1 = y_1, \dots, z_p = y_p = w$
- Teniendo en cuenta que  $xy$  es un lado en  $G$  y que  $z_k = z, y_j = y$ , entonces en  $G$  tenemos el ciclo  
 $C : wz_{p+1}z_{p+2}\dots z_{k-1}zyy_{j-1}\dots y_{p+1}w.$

# Correctitud(cont.)

- Veamos cuantos vértices hay en ese ciclo
  - 1  $w$ , suma 1.
  - 2 los  $z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_{k-1}$  son  $k - p$ .
  - 3 Los  $y, y_{j-1}, \dots, y_{p+1}$  son  $j - p$ .
- El total son  $1 + k - p + j - p = k + j - 2p + 1$ .
- Como vimos antes que  $k + j$  es par y  $2p$  es par, entonces  $k + j - 2p$  es par.
- Por lo tanto  $k + j - 2p + 1$  es IMPAR.
- Entonces  $G$  tiene adentro un ciclo impar, por lo tanto  $\chi(G) \geq 3 > 2$  y la respuesta es correcta.
- Fin prueba.

## Corolario (de la prueba)

- Sea  $G$  un grafo con  $\chi(G) \geq 3$ .
- Corramos el algoritmo sobre  $G$ .
- Como  $\chi(G) \geq 3$ , el coloreo de 2 colores dado en el algoritmo no puede ser propio.
- En la demostración de la correctitud del algoritmo vimos que en este caso, podemos construir un ciclo impar en  $G$ .
- **Conclusión:**  $\chi(G) \geq 3 \Rightarrow$  existe un ciclo impar en  $G$ .
- Como ya sabiamos la implicación para el otro lado, podemos decir que  $\chi(G) \geq 3$  si y solo si existe un ciclo impar en  $G$ .