Contents

Cotas para Greedy

χ (G) $\leq$ $+$ 1

Teorema de Brooks

Si G es conexo, entonces χ (G) $\leq$, a menos que G sea un ciclo impar o un grafo completo.

Propiedad

Si G es conexo, entonces existe un ordenamiento de los vértices tal que Greeedy colorea todos los vértices, salvo uno, con colores o menos.

VIT

Very Important Theorem

Sea G = (V, E) un grafo cuyos vértices estan coloreados con un coloreo propio c con r colores $\{0, 1, \ldots, r - 1\}$. $\{0, - 1\}$. Sea π una permutación de los números 0, 1, ..., r $-$ 1, es decir, $- \pi : \{0, 1, \ldots, r - 1\} \to \{0, 1, \ldots, r - 1\}$ es una biyección. $\{0$, Sea Vi $= - 1\}$ $\to \{0, - 1\}$ $\{x \in V : c(x) = i\}$, i = 0, 1, ..., r $-$ 1. $\{x \in i\}$, $-$ Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de V π (0), luego los de V π (1),etc, hasta V π (r $-$ 1). (el orden interno de los vértices dentro de cada V π (i) es irrelevante)

Entonces Greedy en ese orden coloreará G con r colores o menos.

Corolario

Existe un ordenamiento de los vértices de G tal que Greedy colorea G con χ (G) colores.

Consecuencia

si no podemos obtener χ (G) polinomialmente, usaremos el VIT para tratar de obtener una aproximación a χ (G).

No siempre se puede, pero en la practica suele funcionar bastante bien, dependiendo de cuales permutaciones π se usen.

Grafos bipartitos

Un grafo se dice bipartito si χ (G) = 2.

Es decir, si G = (V, E) entonces existen X, Y $\subseteq$ V tales que:

1 V = X   Y.   2 X   Y =

3 wv $\in$ E   (w $\in$ X, v $\in$ Y)   (w $\in$ Y, v $\in$ X)

El problema 2COLOR

Dado un grafo G, ¿es χ (G) $\leq$ 2?

Teorema

2COLOR es polinomial

Algoritmo 2COLOR para G conexo.

Elegir un vértice x cualquiera.

Correr BFS(x), creando un arbol.

Para cada vértice z, sea N(z) el nivel de z en el arbol BFS(x).

Colorear c(z) = (N(z) mod 2).

Chequear si el colorario dado en [4] es propio.

Si lo es, retornar " χ (G) $\leq$ 2"

Si no lo es, retornar " χ (G) $>$ 2"

Complejidad

la complejidad total es O(m) + O(m) = O(m).

Corolario

Sea G un grafo con χ (G) $\geq$ 3.

Como χ (G) $\geq$ 3, el coloreo de 2 colores dado en el algoritmo no $\geq$ puede ser propio.

Conclusión:

χ (G) $\geq$ 3 si y solo si existe un ciclo impar en G.