

Resumen MD2 Filmina 2

Lautaro Bachmann

Contents

Cotas para Greedy	2
Teorema de Brooks	2
Propiedad	2
VIT	2
Very Important Theorem	2
Corolario	2
Consecuencia	2
Grafos bipartitos	3
El problema 2COLOR	3
Teorema	3
Algoritmo 2COLOR para G conexo.	3
Complejidad	3
Corolario	3

Cotas para Greedy

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

Teorema de Brooks

Si G es conexo, entonces $\chi(G) \leq \Delta$, a menos que G sea un ciclo impar o un grafo completo.

Propiedad

Si G es conexo, entonces existe un ordenamiento de los vértices tal que Greedy colorea todos los vértices, salvo uno, con Δ colores o menos.

VIT

Very Important Theorem

Sea $G = (V, E)$ un grafo cuyos vértices están coloreados con un coloreo propio c con r colores $\{0, 1, \dots, r-1\}$. Sea π una permutación de los números $0, 1, \dots, r-1$, es decir, $\pi : \{0, 1, \dots, r-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$ es una biyección. Sea $V_i = \{x \in V : c(x) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, r-1$. Ordenemos los vértices poniendo primero los vértices de $V_{\pi(0)}$, luego los de $V_{\pi(1)}$, etc, hasta $V_{\pi(r-1)}$. (el orden interno de los vértices dentro de cada V_i es irrelevante)

Entonces Greedy en ese orden coloreará G con r colores o menos.

Corolario

Existe un ordenamiento de los vértices de G tal que Greedy colorea G con $\chi(G)$ colores.

Consecuencia

si no podemos obtener $\chi(G)$ polinomialmente, usaremos el VIT para tratar de obtener una aproximación a $\chi(G)$.

No siempre se puede, pero en la práctica suele funcionar bastante bien, dependiendo de cuáles permutaciones se usen.

Grafos bipartitos

Un grafo se dice bipartito si $\chi(G) = 2$.

Es decir, si $G = (V, E)$ entonces existen $X, Y \subseteq V$ tales que:

$$1 \quad V = X \cup Y. \quad 2 \quad X \cap Y = \emptyset$$

$$3 \quad \forall wv \in E \quad (w \in X, v \in Y) \vee (w \in Y, v \in X)$$

El problema 2COLOR

Dado un grafo G , ¿es $\chi(G) \leq 2$?

Teorema

2COLOR es polinomial

Algoritmo 2COLOR para G conexo.

Elegir un vértice x cualquiera.

Correr BFS(x), creando un árbol.

Para cada vértice z , sea $N(z)$ el nivel de z en el árbol BFS(x).

Colorear $c(z) = (N(z) \bmod 2)$.

Chequear si el colorado dado en [4] es propio.

Si lo es, retornar “ $\chi(G) \leq 2$ ”

Si no lo es, retornar “ $\chi(G) > 2$ ”

Complejidad

la complejidad total es $O(m) + O(m) = O(m)$.

Corolario

Sea G un grafo con $\chi(G) \geq 3$.

Como $\chi(G) \geq 3$, el coloreo de 2 colores dado en el algoritmo no puede ser propio.

Conclusión:

$\chi(G) \geq 3$ si y solo si existe un ciclo impar en G .