Flujos Y Networks. MDII 2021

Daniel Penazzi

7 de abril de 2021

Tabla de Contenidos

Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien”que ciertos consumidores quieren. Pej
  1. TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.
  2. Agua, gas, electricidad, llamadas telefónicas, etc
- Y tenemos ciertos productores que producen esos bienes.
- Queremos llevar esos bienes de los productores a los consumidores.

Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red seria una red de carreteras, pej.
- En el caso de los bienes de [2] será una red de cañerias de agua, o cañerias de gas, o cables de electricidad o teléfono.
- El problema que vamos a abordar no es construir esas redes, o resolver un problema de producción de los productores.
- Esos son problemas importantes, pero nuestro objetivo ahora es otro problema, tambien muy importante.

El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.
- Hay dos cosas a modelizar:
  1. La red de transporte
  2. El “flujo”de bienes a través de esa red.

Grafos Dirigidos

Empecemos con la red:

Definición:

Un Grafo dirigido es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es: $E \subseteq V \times V$
- Es decir, ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.
- Esto significa que no es lo mismo (x, y) que (y, x)
- Pero ademas que pueden existir AMBOS lados.

$(x, y)/(y, x)$

- ¿Por qué estamos diferenciando (x, y) de (y, x)?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde x a y que al revez.
- Pej, podria ser imposible ir de y a x, si la red es una red de calles, y las calles son de sentido único.
- En ese caso en nuestro grafo dirigido existirá el lado (x, y) pero no el (y, x).
- Pero incluso cuando se puede mandar en ambas direcciones podemos necesitar diferenciar.

$(x, y)/(y, x)$

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerias, y tenemos un caño entre x e y, quizás podria ser tal que podamos mandar agua tanto de x a y como de y a x.
- Pero si estamos mandando agua desde x a y, entonces no podemos simultaneamente mandar agua desde y a x.
- Nos conviene modelar el grafo de forma tal que existan tanto los lados (x, y) como (y, x) para que cuando mandemos agua, sepamos si estamos mandando desde x a y o al revés.
- Los lados los escribiremos como (x, y) pero tambien como:

Notación:

Denotaremos el lado (x, y) como $\boxed{\overrightarrow{xy}}$.

Vecinos hacia adelante y hacia atras

- En los grafos no dirigidos, teniamos al conjunto de vecinos $\Gamma(x) = \{y \in V | xy \in E\}$.
- Pero ahora como podemos tener lados tanto (x, y) como (y, x) deberiamos diferenciar entre “vécinos hacia adelante” y “vécinos hacia atras”

Notación:

En un grafo dirigido, definimos:

$$\boxed{\Gamma^{+}(x) = \{y \in V | \overrightarrow{xy} \in E\}}$$

y :

$$\boxed{\Gamma^{-}(x) = \{y \in V | \overrightarrow{yx} \in E\}}$$

De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de $\Gamma^{+}(x)$ son los “vécinos hacia adelante” y los de $\Gamma^{-}(x)$ son los “vécinos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.
- Y ademas esas capacidades máximas no tendrán porqué ser uniformes.
- Pej un cierto caño podrá transportar 1000 litros de agua y otro 3400.
- La definición que modela esto es la de network(redes, en castellano, pero voy a usar la palabra en ingles)

Network

Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple (V, E, c) donde (V, E) es un grafo dirigido y $\boxed{c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}}$

- En este contexto, $\boxed{c(\overrightarrow{xy})}$ se llamará la "capacidad" del lado $\boxed{\overrightarrow{xy}.}$
- La idea, como dijimos antes, es que esto simboliza que no podemos mandar mas de $c(\overrightarrow{xy})$ "bienes" por el lado $\overrightarrow{xy}$, sean cuales sean esos bienes.

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.
- Este año la dejaré dentro de la de flujo.
- De todos modos, una aclaración que conviene hacer ahora es que para simplificar el modelo, es practica común asumir que hay un sólo productor y un sólo consumidor
- En un ejercicio del práctico se les pedirá ver que esto no es una limitación, es decir, si pueden resolver problemas con un sólo productor y un sólo consumidor, entonces es fácil realizar una modificación que permita resolver el problema de múltiples productores o consumidores.

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?
- Buena, una de ellas es la relacionada con la capacidad: no deberiamos mandar mas litros de agua que lo que el caño puede aguantar.
- Otra de ellas tiene que ver con cosas realísticas: tiene sentido hablar de mandar 4 litros de agua, o incluso 0 litros de agua, pero no mandar -10 litros de agua por un caño.
- Entonces vamos a incluir en la definición de flujo como una función f sobre los lados tal que $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$.

Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias engorrosas.
- Por lo que usaremos una notación común para resolver esto:
- Si P es una propiedad que puede ser verdadera o falsa, $[P]$ denota el número 1 si P es verdadera, y 0 si P es falsa.
- Para qué sirve esto?

Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable x, y queremos sumar una función $f(x)$ sobre todos los x que satisfagan una propiedad $P(x)$
- En vez de escribir
$$\sum_{x:P(x)} f(x)$$
- podemos simplemente escribir $\boxed{\sum_x f(x)[P(x)]}$ o $\sum_x [P(x)] f(x)$
- o incluso $\boxed{\sum f(x)[P(x)]}$ si queda claro que sumamos sobre x.

Notación para funciones sobre lados

- Otra cosa que permita agilizar la notación es, dada una función g cualquiera definida sobre los lados (g en general va a ser o bien las capacidades o bien el flujo) extender la notación "$g(\overrightarrow{xy})$" para tomar en cuenta conjuntos de vértices y no sólo 2 vértices individuales.

Notación:

Si g es una función definida en los lados y A y B son subconjuntos de vertices, entonces $g(A, B)$ denotará la suma:

$$\boxed{g(A,B) = \sum_{x,y} [x \in A][y \in B][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})}$$

- Con la notación usual esto seria:

$$g(A,B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \overrightarrow{xy} \in E}} g(\overrightarrow{xy})$$

- Por eso preferimos usar la notación “[]”aunque cuando uno lo escribe a mano ya sea en papel o en el pizarrón probablemente no sea necesario.

in y out

Notación:

Dada una función g sobre lados y un vértice x, definimos:

$$
\begin{aligned}
out_g(x) = g(\{x\}, V) &= \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy}) \\
in_g(x) = g(V, \{x\}) &= \sum_y [y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] g(\overrightarrow{yx})
\end{aligned}
$$

- Es decir $out_g(x)$ es todo lo que "sale" de x por medio de g.
- Es decir, $in_g(x)$ es todo lo que "entra" a x por medio de g.

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - y
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)]$,
- podemos escribir:
- $\boxed{out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))}$
- $\boxed{in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})}$
- Ahora estamos listos para definir flujo desde un productor (que denotaremos s) a un consumidor (que denotaremos t).
- El hecho que uno sea productor y el otro consumidor se verá reflejado en la definición.

Flujos

Definición

Dado un network (V, E, c), y un par de vertices $s, t \in V$, un *flujo* de s a t es una función $f : E \mapsto \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\boxed{0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.}$ ("feasability")
2. $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$ ("conservación")
3. $\boxed{out_f(s) \geq in_f(s).}$ (s es productor)
4. $\boxed{in_f(t) \geq out_f(t).}$ (t es consumidor)

Explicación de la definición de flujo

- Como habiamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a tranportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.
- La segunda propiedad dice que el network no tiene “pérdidas” .
- es decir que cualquier vértice que no sea ni s ni t no consume ni produce bienes.
- (o en una interpretación alternativa, produce exactamente lo mismo que consume)

Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que s es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que t es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.
- En algunos libros en vez de 3) se pide directamente $\boxed{in_f(s) = 0}$ y en vez de 4) se pide $\boxed{out_f(t) = 0.}$
- Podriamos definirlo asi porque en todos los algoritmos que veamos, los flujos que efectivamente construyamos van a tener esa propiedad.
- Ademas que en todos los ejemplos que usaremos, $\boxed{\Gamma^-(s) = \Gamma^+(t) = \emptyset}$

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, asi que lo dejamos asi.
- s se llama tradicionalmente la “fuente”(source)
- y t el “resumidero”(sink).
- Estos nombres vienen de pensar el network como una red de cañerias de agua.
- En algunos libros la propiedad [4] no se incluye en la definición. (veremos que se deduce de las otras tres).

Valor de un flujo

Definición

Dado un network (V, E, c) el *valor* de un flujo f de s a t es:

$$\boxed{v(f) = out_f(s) - in_f(s)}$$

- Es decir, el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.
- Veremos luego que $v(f)$ tambien es igual a $in_f(t) - out_f(t)$, es decir, la cantidad neta de bienes consumidos.
- Intuitivamente, si en el medio no se pierde nada por la propiedad 2), lo que llega a t debería ser igual a lo que sale de s.
- Esto se puede demostrar con una pequeña cuenta que haremos luego, pero primero:

Flujos maximales

Definición

Dado un network N y vertices s, t, un flujo maximal de s a t (o "Max flow") es un flujo f de s a t tal que $v(g) \leq v(f)$ para todo flujo g de s a t.

- El problema que queremos resolver es:
- Dado un network, encontrar un flujo maximal en el network
- Y obviamente queremos un algoritmo polinomial que lo resuelva.

Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” valor de un flujo maximal.
- A veces esto se llama el maxvalue.
- De la definición no es claro que exista un flujo maximal.
- pero probaremos mas adelante que siempre existe.

Una propiedad chiquita

Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$.

Prueba:

$$\begin{aligned} f(V,V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[\overrightarrow{xy} \in E] \\ &= \sum_{x} \sum_{y} f(\overrightarrow{xy})[y \in \Gamma^{+}(x)] \\ &= \sum_{x} out_f(x) \end{aligned}$$

Para que las cosas no se vean tan amontonadas, no escribiremos las condiciones del tipo "$[x \in V]$"es decir asumiremos que nuestras variables, x, y estan en V. sigue->

continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
f(V,V) &= \sum_{y,x} [\overrightarrow{yx} \in E] \\
&= \sum_{x} \sum_{y} f(\overrightarrow{yx})[y \in \Gamma^{-}(x)] \\
&= \sum_{x} in_f(x)
\end{aligned}
$$

sigue->

finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que $\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x)$.
- Por la propiedad 2) de flujos, $out_f(x) = in_f(x)$ para todo $x \neq s, t$.
- Esto último dice que en la igualdad $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$ se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a s y t.
- Con lo cual nos queda la igualdad
- $out_f(s) + out_f(t) = in_f(s) + in_f(t)$
- es decir, $in_f(t) - out_f(t) = out_f(s) - in_f(s) = v(f) \geq 0$.
- QED