Contents

Flujos Y Networks.

Grafos Dirigidos

Definición:

Un Grafo dirigido es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y $E \subseteq V \times V$

diferencia con un grafo no dirigido
E ⊆ V × V

ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.

no es lo mismo (x, y) que (y, x)

Notación:

$$\overrightarrow{xy}.$$

Denotaremos el lado (x, y) como

Vecinos

Pero ahora como podemos tener lados tanto (x, y) como (y, x) deberiamos diferenciar entre “vécinos hacia adelante” y “vécinos hacia atras”

Notación:

$$\begin{aligned}\Gamma^{+}(x) &= \{y \in V | \overrightarrow{xy} \in E\}\\ \Gamma^{-}(x) &= \{y \in V | \overrightarrow{yx} \in E\}\end{aligned}$$

Network

Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple (V, E, c) donde (V, E) es un grafo dirigido y

$$c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$$

$$c(\overrightarrow{xy})$$

En este contexto, se llamará la

“capacidad”

del lado

$$\overrightarrow{xy}.$$

Flujos

Notación para agilizar lecturas de sumatorias

P

Si P es una propiedad que puede ser verdadera o falsa, [P] denota el número 1 si P es verdadera, y 0 si P es falsa.

Supongamos que tenemos una variable x, y queremos sumar una función f(x) sobre todos los x que satisfagan una propiedad P(x)

podemos simplemente escribir x f(x)[P(x)]

$$\sum_x f(x)[P(x)]$$

o incluso

$$\sum f(x)[P(x)]$$

si queda claro que sumamos sobre x.

Notación para funciones sobre lados

Si g es una función definida en los lados y A y B son subconjuntos de vertices, entonces g(A, B) denotará la suma:

$$g(A,B) = \sum_{x,y} [x \in A][y \in B][\overrightarrow{xy} \in E]g(\overrightarrow{xy})$$

in y out

Dada una función g sobre lados y un vértice x, definimos:

outg(x) es todo lo que “sale” de x por medio de g.

ing(x) es todo lo que “entra” a x por medio de g.

$out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
$in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})$

Definición

Dado un network (V, E, c), y un par de vertices s, t $\in$ V, un $\in$ flujo de s a t es una función f : E $\to$ R con las siguientes

propiedades:

$$0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$$

(“feasability”)

inf(x) = outf(x) $\forall$ x $\in$ V $-$ {s, t}. (“conservación”)

$$out_f(s) \geq in_f(s).$$

(s es productor)

(t es consumidor)

$$in_f(t) \geq out_f(t).$$

Explicación

la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien

ni vamos a tranportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.

La segunda propiedad dice que el network no tiene “pérdidas” .

La tercera especifica que s es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.

y la cuarta que t es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.

En algunos libros en vez de 3) se pide directamente

$$in_f(s) = 0$$

y en vez de 4) se pide

$$out_f(t) = 0.$$

en todos los ejemplos que usaremos,

$$\Gamma^-(s) = \Gamma^+(t) = \emptyset$$

s se llama tradicionalmente la "fuente"(source)

y t el "resumidero"(sink).

Valor de un flujo

Definición
Dado un network (V, E, c) el **valor** de un flujo f de s a t es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.

Flujos maximales

Definición
Dado un network N y vertices s, t, **un flujo maximal de s a t** (o "Max flow") es un flujo f de s a t tal que $v(g) \leq v(f)$ para todo flujo g de s a t.

Propiedad
Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y $v(f) = inf(t) - outf(t)$.