

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ

Санкт-Петербург

2013

А. Б. Сергиенко. Цифровая обработка сигналов: Методические указания к выполнению лабораторных работ. — СПб., 2013. 36 с.

Представлены описания пяти компьютерных лабораторных работ, выполняемых при изучении курса «Цифровая обработка сигналов». Работы выполняются в системе MATLAB с использованием специализированных пакетов расширения Signal Processing Toolbox и Communications Toolbox. Описание процесса выполнения работ соответствует версиям MATLAB 7.0 (Release 14) и выше.

Предназначены для студентов факультета радиотехники и телекоммуникаций, обучающихся по программам подготовки бакалавров и магистров по направлениям 210400 «Радиотехника», 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также по программе подготовки специалистов по специальности 210601 «Радиоэлектронные системы и комплексы».

1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В MATLAB

1.1. Задание и указания к выполнению работы

1. Индивидуальное задание

В качестве входного сигнала в данной лабораторной работе рассматривается кусочно-линейный сигнал $u(t)$, заданный параметрами U_k, T_k , как показано на рис. 1.1.

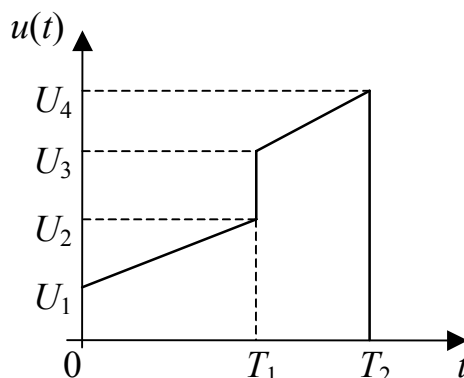


Рис. 1.1

В работе производится фильтрация сигнала дискретным фильтром нижних частот, синтезированным методом билинейного преобразования с использованием прототипов Баттерворта или Чебышева (1-го рода). Исходными данными являются тип АЧХ фильтра, неравномерность его АЧХ в полосе пропускания и подавление сигнала на удвоенной частоте среза.

Параметры сигнала и фильтра являются индивидуальными и выдаются преподавателем в виде таблицы следующего вида.

U_1 , В	U_2 , В	U_3 , В	U_4 , В	T_1 , мс	T_2 , мс	Тип АЧХ (Баттерворта или Чебышева)	Неравномерность АЧХ в полосе пропускания, дБ	Подавление сигнала на удвоенной частоте среза, дБ

2. Указания по выполнению работы

Получаемые по ходу работы графики следует копировать в документ Microsoft Word.

1. Выбрать частоту дискретизации сигнала так, чтобы на его длительности укладывалось 25–40 отсчетов. Сформировать вектор отсчетов сигнала. Получить график дискретного сигнала с помощью функции `stem`.

2. Получить спектр дискретного сигнала с помощью функции `freqz` в диапазоне от нуля до частоты дискретизации. Построить график амплитудного спектра. Определить ширину спектра сигнала по уровню 10% (–20 дБ) от максимума. Если эта частота превышает 0,25 от частоты Найквиста, увеличить частоту дискретизации и повторить пп. 1, 2. Определить затухание ам-

плитудного спектра, достигаемое в районе частоты Найквиста (по уровню последних лепестков спектра).

3. Рассчитать сигнал, восстановленный согласно теореме Котельникова. Для расчета восстановленного сигнала выбрать шаг по времени, равный $1/10 \dots 1/5$ интервала дискретизации. Интервал значений времени, для которых рассчитывается восстановленный сигнал, должен выходить за края сигнала как минимум на 5 интервалов дискретизации. Построить графики дискретного и восстановленного сигнала в общих координатных осях. Определить моменты времени, в которых восстановленный сигнал максимально отклоняется от исходного кусочно-линейного, а также величину этого отклонения.

4. Подобрать минимально необходимый порядок фильтра по заданным требованиям с помощью среды просмотра характеристик, вызываемой функцией `fvtool` (фильтр рассчитывается с помощью функции `butter` или `cheby1`). При этом зафиксировать зависимость подавления сигнала на удвоенной частоте среза от порядка фильтра. Частота среза ФНЧ выбирается равной полосе сигнала по уровню 10% (–20 дБ) от максимума его спектра. Получить графики характеристик полученного фильтра (АЧХ, ФЧХ, групповая задержка, расположение нулей и полюсов, импульсная характеристика).

5. Получить формулу для импульсной характеристики путем разложения функции передачи на простейшие дроби с помощью функции `residuez`. Комплексно-сопряженные пары экспонент объединить, получив окончательную формулу в вещественном виде.

6. Рассчитать выходной сигнал фильтра (с помощью функции `filter`) при пропускании через него полученного в п. 1 дискретного сигнала. Чтобы увидеть затухающий «хвост», присутствующий на выходе после окончания сигнала на входе, увеличить длину входного сигнала в два раза, дополнив его нулями в конце. Получить график выходного сигнала и его амплитудного спектра (функции `stem`, `plot`, `freqz`).

7. Пропустить через фильтр сигнал, представляющий собой сумму сформированного ранее сигнала, дополненного нулями с двух сторон (число нулей с каждой стороны примерно равно длине сигнала), и синусоиды с амплитудой, равной пиковому уровню сигнала и частотой, составляющей примерно $2/3$ от частоты Найквиста. Получить графики входного и выходного сигналов и их амплитудных спектров (функции `stem`, `plot`, `freqz`).

1.2. Содержание отчета

Отчет должен содержать полученные в процессе работы графики и числовые характеристики, а также теоретические формулы, по которым производятся расчеты (за исключением формул, относящихся к синтезу фильтров).

1.3. Используемые средства MATLAB

1. Краткие сведения о MATLAB

MATLAB — интерпретируемый язык программирования, позволяющий осуществлять вычисления как в интерактивном режиме, так и путем запуска программ (*сценариев*, scripts). Работа в интерактивном режиме сводится к набору в командной строке MATLAB необходимых команд:

```
>> sqrt(cos(pi/12)^2 + 1)
ans =
    1.3903
```

MATLAB ориентирован прежде всего на работу с векторами и матрицами. Для ввода векторов и матриц значения перечисляются в квадратных скобках по строкам. Элементы строк разделяются пробелами или запятыми, строки — точкой с запятой:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6]
A =
     1     2     3
     4     5     6
```

Для создания векторов в виде арифметических прогрессий используется символ двоеточия. Конструкция $x1:dx:x2$ означает создание равномерной последовательности чисел с первым элементом $x1$, шагом dx и конечным значением, равным $x2$ или меньшим его не более чем на dx . Если шаг последовательности равен единице, dx можно не указывать: $x1:x2$.

```
>> x1 = 3:0.2:4
x1 =
    3.0000    3.2000    3.4000    3.6000    3.8000    4.0000
```

Операция ' (апостроф) означает эрмитово сопряжение (сочетание транспонирования с комплексным сопряжением):

```
>> x2 = (4:9) '
x2 =
     4
     5
     6
     7
     8
     9
```

Арифметические операции $+$ $-$ $*$ $/$ $^$ выполняются по матричным правилам:

```
>> x1 + x2           % пытаемся сложить строку и столбец – ошибка
??? Error using ==> +
Matrix dimensions must agree.
>> x1 * x2           % умножаем строку на столбец
ans =
    140
>> x2 * x1           % умножаем столбец на строку
```

```
ans =
    12.0000    12.8000    13.6000    14.4000    15.2000    16.0000
    15.0000    16.0000    17.0000    18.0000    19.0000    20.0000
    18.0000    19.2000    20.4000    21.6000    22.8000    24.0000
    21.0000    22.4000    23.8000    25.2000    26.6000    28.0000
    24.0000    25.6000    27.2000    28.8000    30.4000    32.0000
    27.0000    28.8000    30.6000    32.4000    34.2000    36.0000
```

Для выполнения поэлементных арифметических операций над векторами и матрицами перед символом операции добавляется точка: `.* ./ .^`

```
>> x1 .* x2'
ans =
    12.0000    16.0000    20.4000    25.2000    30.4000    36.0000
```

Математические функции обрабатывают матрицы поэлементно:

```
>> exp(x1)
ans =
    20.0855    24.5325    29.9641    36.5982    44.7012    54.5982
```

Доступ к элементам и фрагментам матриц осуществляется путем указания индексов в круглых скобках. Нумерация элементов начинается с единицы, для матриц первый индекс задает номер строки, второй — номер столбца. При задании индексов можно использовать символ `(:)` для задания диапазонов и ключевое слово `end` для ссылки на максимально возможный индекс вдоль данной размерности:

```
>> x1(4:end)
ans =
     3.6000     3.8000     4.0000
```

Точка с запятой в конце строки подавляет вывод результатов на экран.

2. Расчет комплексного коэффициента передачи дискретного фильтра

Для расчета частотной характеристики дискретного фильтра служит функция `freqz`:

```
[H, f] = freqz(b, a, N, Fs);
```

Здесь `b` — вектор коэффициентов числителя функции передачи, `a` — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, `N` — число рассчитываемых частотных точек, `Fs` — частота дискретизации. Результаты: `H` — вектор значений комплексного коэффициента передачи, `f` — вектор частот, на которых производился расчет. Несколько последних входных параметров можно опустить. Если вызвать функцию без указания выходных параметров, будут построены графики АЧХ и ФЧХ. В конце списка параметров можно добавить строку `'whole'`, тогда будет выбран диапазон частот от нуля до частоты дискретизации, а не до частоты Найквиста, как это принято по умолчанию.

3. Расчет импульсной характеристики дискретного фильтра

Для расчета импульсной характеристики дискретного фильтра служит функция `impz`:

```
h = impz(b, a, N);
```

Здесь b — вектор коэффициентов числителя функции передачи, a — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, N — число рассчитываемых отсчетов импульсной характеристики. Результат h — вектор отсчетов импульсной характеристики. Если вызвать функцию без указания выходного параметра, будет построен график.

4. Расчет рекурсивных ФНЧ билинейным преобразованием

Рассчитываются фильтры Баттерворта, Чебышева первого и второго рода, эллиптические:

```
[b, a] = butter(n, w0);  
[b, a] = cheby1(n, Rp, w0);  
[b, a] = cheby2(n, Rs, w0);  
[b, a] = ellip(n, Rp, Rs, w0);
```

Здесь n — порядок фильтра, R_p — пульсации АЧХ в полосе пропускания (дБ), R_s — подавление сигнала в полосе задерживания, w_0 — частота среза, нормированная к частоте Найквиста. Результатами являются векторы коэффициентов числителя (b) и знаменателя (a) функции передачи.

5. Визуализация характеристик дискретных фильтров

Для этого служит функция `fvtool`, которой передаются векторы коэффициентов числителя (b) и знаменателя (a) функции передачи:

```
fvtool(b, a)
```

Выбор просматриваемых характеристик и управление параметрами анализа производятся с помощью средств графического интерфейса окна, открывающегося после вызова данной функции.

6. Разложение функции передачи дискретного фильтра на простые дроби

Для этого служит функция `residuez`:

```
[r, p, k] = residuez(b, a)
```

Результаты: r — вектор вычетов, p — вектор соответствующих им полюсов, k — вектор коэффициентов целой части функции передачи. Функция передачи представляется (без учета целой части и при отсутствии кратных полюсов) как сумма слагаемых вида

$$\frac{r(k)}{1 - p(k)z^{-1}}.$$

Та же функция осуществляет и обратное преобразование (различение вариантов производится исходя из числа входных параметров):

```
[b, a] = residuez(r, p, k)
```

7. Вывод графиков

Наиболее часто используется функция `plot`:

```
plot(y)
plot(x, y)
```

Во втором варианте строится зависимость $y(x)$. Параметры x и y должны быть векторами одинаковой длины. В первом случае строится зависимость y от номеров элементов вектора, то есть подразумевается $x=1:\text{length}(y)$.

Для построения графиков дискретных сигналов полезна функция `stem`, которая имеет такой же синтаксис. Она строит графики в виде вертикальных «стебельков». Другие полезные функции с аналогичным синтаксисом: `semilogy` (лог. масштаб по вертикали), `semilogx` (лог. масштаб по горизонтали), `loglog` (лог. масштаб по обеим осям).

Для переноса графиков в документы Word следует использовать команду **Copy Figure** из меню **Edit** окна графика. Перед этим целесообразно указать векторный формат копирования, выбрав в том же меню команду **Copy Options** и установив переключатели **Preserve Information** и **Transparent Background**.

8. Вывод нескольких графиков

Вывод нескольких графиков возможен разными способами. 1. Если в команде `plot` параметр y является матрицей, будут построены графики для ее столбцов по отдельности. 2. Команды `hold on` и `hold off` включают и выключают режим сохранения текущего содержимого окна при построении нового графика. 3. Команда `subplot(r, c, n)` делит графическое окно на «клетки» (r строк и c столбцов) и делает текущей «клетку» n (нумерация осуществляется по строкам). 4. Команда `figure` открывает новое графическое окно.

9. Обработка сигнала дискретным фильтром

Для этого используется функция `filter`:

```
y = filter(b, a, x);
```

Здесь b — вектор коэффициентов числителя функции передачи, a — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, x — входной сигнал, y — выходной сигнал.

10. Прочие полезные функции

- `zeros(m, n)` — матрица с m строками и n столбцами, заполненная нулями.
- `ones(m, n)` — матрица с m строками и n столбцами, заполненная единицами.
- `abs(x)` — вычисление модуля, в том числе для комплексных чисел.
- `angle(x)` — вычисление аргумента (фазы) комплексных чисел.

1.4. Контрольные вопросы

1. Оценить по графику ФЧХ групповую задержку, вносимую фильтром в полосе пропускания.
2. Импульсная характеристика фильтра представляет собой сумму экспоненциально затухающих синусоидальных колебаний. Исходя из расположения нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости, оценить период (в отсчетах) этих синусоидальных колебаний.
3. Как будет меняться амплитуда выбросов аналогового сигнала, восстановленного согласно теореме Котельникова, при повышении частоты дискретизации?
4. Как будет примерно выглядеть АЧХ фильтра, если добавить пару нулей функции передачи в указанных точках z -плоскости?
5. Что произойдет с АЧХ фильтра, если заданным образом изменить расположение полюсов функции передачи на z -плоскости?
6. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если в формуле для его функции передачи произвести замену переменной $z \rightarrow z^2$?
7. Как (примерно) изменится расположение полюсов функции передачи на z -плоскости, если аналогичный фильтр синтезировать с меньшей (большей) частотой среза?
8. Как (примерно) будет выглядеть выходной сигнал, если второй линейный фрагмент входного сигнала сделать более длинным (около 50 отсчетов)?
9. Увеличится или уменьшится уровень спектра в районе частоты Найквиста, если отсчеты сигнала брать в два раза реже?
10. Как, исходя из расположения нулей и полюсов функции передачи на комплексной плоскости, можно оценить частоту среза ФНЧ?
11. Как примерно будет выглядеть график частотной зависимости групповой задержки, если изменить ФЧХ фильтра указанным образом?
12. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если у всех полюсов и нулей функции передачи поменять знак: $p_i \rightarrow -p_i$, $z_i \rightarrow -z_i$?
13. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками *комплексного* фильтра, если все полюсы и нули функции передачи заменить на комплексно-сопряженные: $p_i \rightarrow p_i^*$, $z_i \rightarrow z_i^*$?
14. Что произойдет с импульсной и частотной характеристиками фильтра, если в формуле для его функции передачи заменить z на $-z$?

2. ФОРМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

2.1. Задание и указания к выполнению работы

В данной работе исследуется поведение внутреннего состояния фильтра в процессе его работы для разных форм реализации фильтра.

Необходимые данные из работы № 1:

- Вектор отсчетов дискретного сигнала.
- Коэффициенты числителя (b) и знаменателя (a) функции передачи рассчитанного фильтра нижних частот.

Для фильтра нижних частот, рассчитанного в процессе выполнения работы № 1, необходимо исследовать поведение внутреннего состояния в зависимости от времени при различных формах реализации. Исследуются следующие формы реализации:

- прямая;
- каноническая;
- транспонированная прямая.

Для каждой формы реализации производится обработка двух сигналов:

- Дискретного сигнала, полученного в процессе выполнения работы № 1 согласно индивидуальному заданию (для наблюдения затухающего «хвоста» выходного сигнала входной сигнал необходимо дополнить некоторым количеством нулевых отсчетов).
- Дискретного белого гауссова шума с нулевым средним и единичной дисперсией (1000 некоррелированных отсчетов; формируется с помощью функции `randn(1, 1000)`).

Для каждой формы реализации и каждого сигнала необходимо зафиксировать максимальную (по модулю) величину внутреннего состояния фильтра, достигаемую в процессе обработки. По результатам заполняется следующая таблица.

Форма реализации фильтра	Макс. абс. внутреннее состояние	
	Сигнал из инд. задания	Дискретный белый шум
Прямая		
Каноническая		
Транспонированная прямая		

Для унификации расчетов все формы реализации фильтра рассматриваются как реализация в пространстве состояний. Необходимо получить для каждой формы реализации параметры пространства состояний **A**, **B**, **C**, **D** (теоретические формулы см. далее в разделе 2.4). Далее обработка сигнала с сохранением всей истории смены внутреннего состояния системы может производиться с помощью следующего цикла (предполагается, что обрабатываемый сигнал обозначен идентификатором **x**):

```
s = zeros(size(B)); % вектор состояния - начальное значение
S = zeros(length(s), length(x)); % история работы - начальное
```

```

                                % значение
for k = 1:length(x)           % цикл по отсчетам сигнала
    S(:,k) = s;               % сохранение истории смены
                                % внутреннего состояния
    y(k) = C*s + D*x(k);      % расчет выходного сигнала
    s = A*s + B*x(k);         % обновление внутреннего состояния
end

```

После выполнения обработки можно построить график зависимости от времени для всех элементов внутреннего состояния:

```
plot(S')
```

или график зависимости максимального абсолютного значения внутреннего состояния от времени:

```
plot(max(abs(S)))
```

Получить значение для записи в таблицу можно, набрав следующую команду:

```
max(max(abs(S)))
```

2.2. Содержание отчета

В отчете должны быть приведены:

1. Структурные схемы исследованных форм реализации дискретного фильтра, построенные для конкретного значения порядка фильтра и с подписанными числовыми значениями всех коэффициентов фильтра.
2. Матрицы числовых значений параметров пространства состояний для всех исследованных форм реализации дискретного фильтра.
3. Таблица максимальных абсолютных значений внутреннего состояния фильтра для всех форм реализации при обработке детерминированного импульса и случайного сигнала.
4. Графики зависимости значений элементов вектора внутреннего состояния фильтра от времени при обработке *детерминированного импульса* для всех форм реализации фильтра. **ВНИМАНИЕ!** Для *случайного сигнала* такие графики приводить в отчете НЕ НУЖНО!
5. Выводы.

2.3. Используемые средства MATLAB

1. Формирование стандартных матриц

Формирование единичной матрицы размером $N \times N$ — `eye(N)`.

Формирование нулевой матрицы размером $M \times N$ — `zeros(M, N)`.

Формирование матрицы размером $M \times N$, заполненной некоррелированными гауссовыми случайными числами с нулевым средним и единичной дисперсией — `randn(M, N)`.

2. Анализ дискретных фильтров

Расчет частотной характеристики дискретного фильтра: функция `freqz` (см. описание работы № 1).

Расчет импульсной характеристики дискретного фильтра: функция `impz` (см. описание работы № 1).

Вызов визуализатора характеристик дискретного фильтра: функция `fvtool(b, a)`. Входные параметры — векторы коэффициентов числителя (b) и знаменателя (a) функции передачи фильтра.

Преобразование параметров пространства состояния в коэффициенты числителя и знаменателя функции передачи фильтра (полезно для контроля правильности формирования параметров A, B, C, D):

$[b, a] = ss2tf(A, B, C, D)$

2.4. Структурные схемы и параметры пространства состояния для различных форм реализации фильтра

В формулах использованы следующие обозначения:

- $I_{m,m}$ — единичная матрица размером $m \times m$;
- $0_{m,n}$ — нулевая матрица, содержащая m строк и n столбцов.

1. Прямая форма (рис. 2.1)

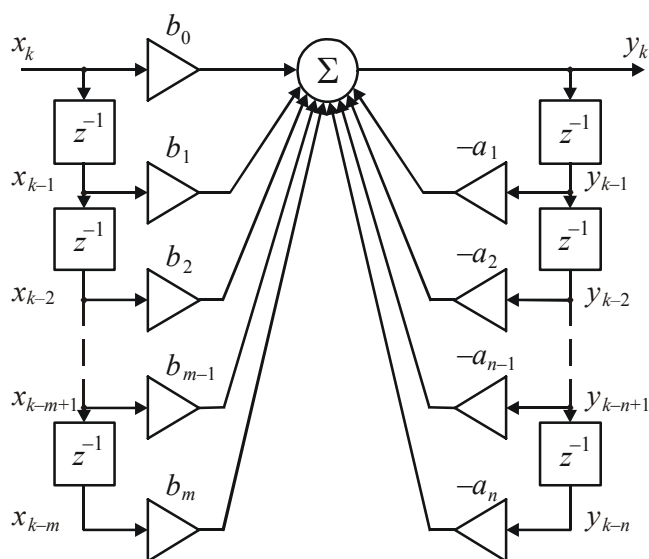


Рис. 2.1

Размер вектора состояния — $m + n$. Параметры пространства состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1, m-1} & 0 & \mathbf{0}_{1, n-1} & 0 \\ \mathbf{I}_{m-1, m-1} & \mathbf{0}_{m-1, 1} & \mathbf{0}_{m-1, n-1} & \mathbf{0}_{m-1, 1} \\ b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ \mathbf{0}_{n-1, m-1} & \mathbf{0}_{n-1, 1} & \mathbf{I}_{n-1, n-1} & \mathbf{0}_{n-1, 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ \mathbf{0}_{m-1, 1} \\ \dots \\ b_0 \\ \dots \\ \mathbf{0}_{n-1, 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \mid -a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_n], \quad D = b_0.$$

2. Каноническая форма (рис. 2.2)

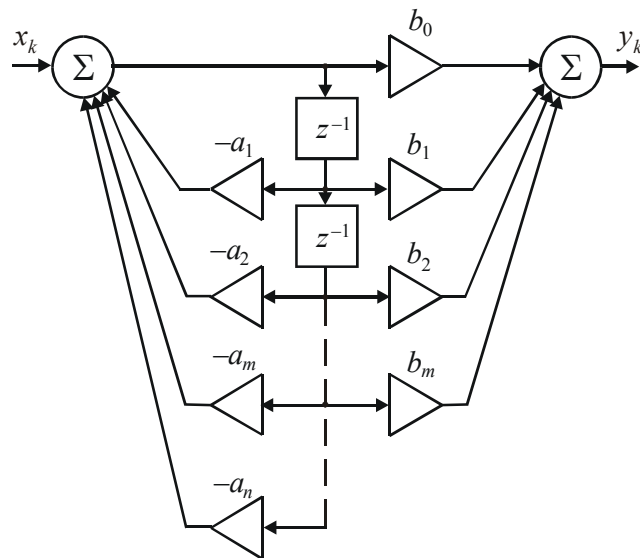


Рис. 2.2

Размер вектора состояния — $\max(m, n)$. Далее считаем m и n равными m , при необходимости считая недостающие коэффициенты нулевыми.

Параметры пространства состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_{m-1} & -a_m \\ \hline & \mathbf{I}_{m-1, m-1} & & \\ & & \mathbf{0}_{m-1, 1} & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline \mathbf{0}_{n-1, 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [b_1 - b_0 a_1 \quad b_2 - b_0 a_2 \quad \dots \quad b_m - b_0 a_m], \quad D = b_0.$$

3. Транспонированная прямая форма (рис. 2.3)

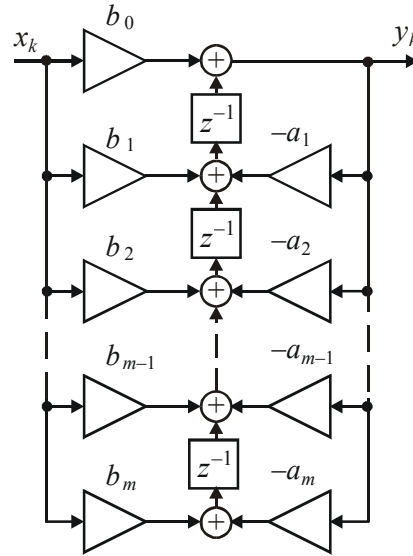


Рис. 2.3

Размер вектора состояния — $\max(m, n)$. Далее считаем m и n равными m , при необходимости считая недостающие коэффициенты нулевыми.

Параметры пространства состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & & \\ & \mathbf{I}_{n-1, n-1} & & \\ & & & \\ -a_n & & & \\ & \mathbf{0}_{1, n-1} & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ \vdots \\ b_n - b_0 a_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & | & \mathbf{0}_{1, n-1} \end{bmatrix}, \quad D = b_0.$$

2.5. Контрольные вопросы

1. На вход ФНЧ с единичным коэффициентом передачи в полосе пропускания и частотой среза, равной 0,2 от частоты Найквиста, поступает дискретный белый шум с единичной дисперсией. Оценить дисперсию выходного случайного процесса.

2. На вход фильтра с заданной формой реализации подается дискретный белый шум с единичной дисперсией. Как определить дисперсию случайного сигнала в заданной точке структурной схемы?

3. Исходя из коэффициентов функции передачи фильтра, пояснить результаты, полученные при анализе сигналов внутри схемы, соответствующей канонической реализации фильтра.

4. Почему для канонической реализации пиковое значение внутренних состояний оказывается намного больше, чем для прямой схемы?

5. Определить функцию передачи между двумя указанными точками структурной схемы фильтра.

6. Как изменятся параметры пространства состояний, если внести в структурную схему фильтра указанные изменения?

7. Получить функцию передачи для фильтра, представленного в пространстве состояний: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [2 \quad 1]$, $D = 1$.

8. Чему равна функция передачи для фильтра, представление которого в пространстве состояний задается преподавателем?

9. Получить параметры пространства состояний \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D для фильтра, структурная схема которого задана преподавателем.

10. Две системы с параметрами состояния \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , D_1 и \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 , D_2 соответственно соединены каскадно. Определить параметры состояния \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D для системы в целом.

11. Две системы с параметрами состояния \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , D_1 и \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 , D_2 соответственно соединены параллельно. Определить параметры состояния \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D для системы в целом.

12. Две системы с параметрами состояния \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , D_1 и \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 , D_2 соответственно использованы для создания системы с обратной связью (система 1 — канал прямой передачи, система 2 — канал обратной связи). Определить параметры состояния \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D для системы в целом.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Задание и указания к выполнению работы

Необходимые данные из работы № 1: коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи рассчитанного фильтра (а и b).

1. Формирование случайного сигнала и теоретический расчет его СПМ

Исследуемый случайный сигнал в данной работе формируется путем пропускания дискретного белого шума через фильтр, полученный на основе фильтра, рассчитанного в работе № 1.

Формирование входного белого шума. Сформировать матрицу некоррелированных гауссовых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, содержащую $N=1024$ строк (число отсчетов сигнала) и $K=10$ столбцов (число реализаций случайного процесса) (вызов функции: `randn(N, K)`). Таким образом, мы получили 10 реализаций дискретного белого шума по 1024 отсчета в каждой.

Модификация рассчитанного в л/р № 1 фильтра заключается в формировании узких пиков в его АЧХ, для чего полюсы его функции передачи приближаются к единичной окружности. Процедура модификации следующая:

1. Получить нули и полюсы функции передачи с помощью функции `tf2zp`.

2. Модифицировать значения полюсов, сохранив исходные значения их фаз, а значения модулей увеличив таким образом, чтобы расстояние от полюса до единичной окружности уменьшилось в 10 раз (формулу для расчета получить самостоятельно).

3. Получить новые значения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя с помощью функции `zp2tf`.

Формирование окрашенного шума. Далее пропускаем полученный ранее белый шум через модифицированный фильтр, формируя тем самым коррелированный выходной шум (функция `filter` обрабатывает матричный сигнал по столбцам, так что обрабатывать отдельные реализации сигнала в цикле нет необходимости).

Теоретический расчет СПМ. СПМ входного белого шума является константой, при прохождении через линейную стационарную систему СПМ меняется пропорционально квадрату АЧХ. Поэтому теоретическую СПМ выходного шума можно рассчитать как

$$W(\omega) = W_0 |K(\omega)|^2 = W_0 |H(e^{j\omega T})|^2 = W_0 \left| \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_m e^{-j\omega m T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-j\omega n T}} \right|^2,$$

где W_0 — СПМ входного белого шума, а T — интервал дискретизации.

Для расчета комплексной частотной характеристики фильтра можно воспользоваться функцией `freqz`. Для облегчения сопоставления различных оценок СПМ следует при теоретическом расчете задать число частотных точек (третий входной параметр функции `freqz`) равным $N/2$. При расчете принять $W_0 = 1$, $f_d = 2$, $T = 1/f_d = 0,5$ (то есть используется нормировка частотной оси, при которой частота Найквиста равна единице).

Построить график теоретической СПМ (вертикальная ось — в децибелах), при построении принудительно задать диапазон значений по вертикальной оси от -25 до $+25$ дБ. По графику определить амплитуды пиков спектра (A , в децибелах), их частоты (f_0) и ширину каждого пика (Δf) по уровню -10 дБ от его максимума. Результаты занести в таблицу следующего вида:

Метод анализа	Пик 1			Пик 2			Пик 3			...
	A	f_0	Δf	A	f_0	Δf	A	f_0	Δf	
Теоретическая СПМ										
Периодограмма										
Метод Даньелла										
Метод Уэлча, 512/256										
Метод Уэлча, 256/128										
Метод Уэлча, 128/64										
Авторегрессионный метод										

Замечание. Если пики спектра оказываются плохо выраженными, так что между ними нет падения СПМ до уровня -10 дБ, получить указания о дальнейших действиях у преподавателя.

2. Периодограмма

Периодограмма — это оценка СПМ случайного процесса путем вычисления спектра мощности единственной его реализации. Необходимо рассчитать периодограммы для всех реализаций выходного шума. Это можно сделать с помощью функции быстрого преобразования Фурье `fft`. От полученного с ее помощью результата необходимо вычислить квадрат модуля, а затем разделить полученную величину на число отсчетов в сигнале (N), чтобы перейти от энергетического спектра к спектру мощности. Функция `fft` обрабатывает матричный сигнал по столбцам, так что организовывать цикл по реализациям нет необходимости.

БПФ дает спектр, рассчитанный для сетки частот из N точек, начинающейся с нуля и имеющей частотный шаг $1/N$ от частоты дискретизации. Таким образом, для вещественного сигнала БПФ даст полный период спектра, состоящий из двух симметричных половин. Чтобы оставить только полосу частот от нуля до частоты Найквиста, необходимо оставить в матрице результатов БПФ только $N/2$ первых строк. Сетка частот после этого может быть рассчитана как $(0:N/2-1)/N*2$.

Построить график периодограммы, усредненной по реализациям. Вертикальная ось — в децибелах. По графику определить частоты пиков спектра

и ширину каждого пика по уровню -10 дБ от его максимума. Результаты занести в приведенную ранее таблицу.

Построить график относительного разброса периодограмм (для каждой частоты вычисляется среднеквадратический разброс, затем он делится на периодограмму, усредненную по реализациям). Вертикальный масштаб — линейный, в относительных единицах.

3. Периодограмма Даньелла

Периодограмма Даньелла — это периодограмма, подвергнутая фильтрации *вдоль частотной оси* для уменьшения изрезанности. В данной работе осуществляется простое усреднение значений по пяти точкам. Это эквивалентно пропусканию (*в частотной области!*) периодограмм, полученных в предыдущем пункте, через нерекурсивный фильтр с импульсной характеристикой вида $\{0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0,2\}$. Это можно сделать с помощью вызова функции фильтрации: `filter(ones(1,5)/5, 1, ...)`. Необходимо получить периодограммы Даньелла для всех реализаций выходного случайного процесса.

Построить график периодограммы Даньелла, усредненной по реализациям. Вертикальная ось — в децибелах. По графику определить частоты пиков спектра и ширину каждого пика по уровню -10 дБ от его максимума. Результаты занести в приведенную ранее таблицу.

Построить график относительного разброса периодограмм Даньелла (для каждой частоты вычисляется среднеквадратический разброс, затем он делится на периодограмму Даньелла, усредненную по реализациям). Вертикальный масштаб — линейный, в относительных единицах.

4. Периодограмма Уэлча

Метод Уэлча называется также методом усреднения модифицированных периодограмм. Смысл его состоит в следующем. Реализация делится на перекрывающиеся фрагменты одинаковой длины, каждый фрагмент умножается на весовую функцию (окно), после этого для каждого фрагмента вычисляется периодограмма. Наконец, периодограммы, полученные для всех фрагментов, усредняются.

Необходимо с помощью функции `pwelch` получить периодограммы Уэлча для всех реализаций выходного случайного процесса при нескольких комбинациях параметров анализа:

а) длина фрагмента — 512 отсчетов, перекрытие соседних фрагментов — 256 отсчетов (3 фрагмента);

б) длина фрагмента — 256 отсчетов, перекрытие соседних фрагментов — 128 отсчетов (7 фрагментов);

в) длина фрагмента — 128 отсчетов, перекрытие соседних фрагментов — 64 отсчета (15 фрагментов).

Построить графики периодограмм Уэлча, усредненных по реализациям, отдельно для каждого варианта параметров анализа. Вертикальная ось — в децибелах. По каждому графику определить частоты пиков спектра и ширину каждого пика по уровню –10 дБ от его максимума. Результаты занести в приведенную ранее таблицу.

Построить графики относительного разброса периодограмм Уэлча отдельно для каждого варианта параметров анализа (для каждой частоты вычисляется среднеквадратический разброс, затем он делится на периодограмму Уэлча, усредненную по реализациям). Вертикальный масштаб — линейный, в относительных единицах.

5. Авторегрессионный анализ

Смысл авторегрессионных методов спектрального анализа состоит в следующем. Используется модель формирования случайного процесса, при которой дискретный белый шум пропускается через «чисто рекурсивный» фильтр (фильтр, у которого в нерекурсивной части присутствует только коэффициент $b_0 = 1$). Чтобы найти коэффициенты полинома знаменателя функции передачи этого формирующего фильтра, по реализации случайного процесса оценивается его корреляционная функция, и по ее отсчетам находятся коэффициенты предсказывающего фильтра (предсказывающий фильтр характеризуется тем, что при пропускании через него случайного процесса мы получаем оценку следующего отсчета процесса, имеющую минимально возможную дисперсию). Коэффициенты предсказывающего фильтра совпадают с искомыми коэффициентами рекурсивной части формирующего фильтра. Далее, как указано в п. 1, определяется СПМ, соответствующая модели формирования случайного процесса:

$$W(\omega) = W_0 \frac{1}{\left| 1 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-j\omega nT} \right|^2},$$

где W_0 — СПМ белого шума, поступающего на вход формирующего фильтра, n — порядок авторегрессионной модели.

Необходимо с помощью функции `psov` получить для первой реализации случайного процесса авторегрессионные оценки СПМ для разных порядков модели — от 1 до удвоенного порядка фильтра, использованного для формирования случайного сигнала в п. 1.

Вывести все оценки на одном графике (вертикальная ось — в децибелах), сделать вывод о том, как зависит форма получаемого спектра от соотношения между порядком формирующего фильтра и порядком авторегрессионной модели.

При порядке модели, равном порядку фильтра, использованного для формирования случайного сигнала в п. 1, получить (также с помощью функции `psov`) авторегрессионные оценки СПМ для всех реализаций случайного процесса.

Построить график авторегрессионной оценки СПМ, усредненной по реализациям. Вертикальная ось — в децибелах. По графику определить частоты пиков спектра и ширину каждого пика по уровню -10 дБ от его максимума. Результаты занести в приведенную ранее таблицу.

Построить график относительного разброса авторегрессионной оценки СПМ (для каждой частоты вычисляется среднеквадратический разброс, затем он делится на авторегрессионную оценку СПМ, усредненную по реализациям). Вертикальный масштаб — линейный, в относительных единицах.

3.2. Содержание отчета

В отчете должны быть приведены:

1. Заполненная таблица с результатами измерений амплитуд, частот и ширины спектральных пиков.
2. Графики СПМ и разброса ее оценок по всем пунктам работы.
3. Выводы.

3.3. Используемые средства MATLAB

1. Генерирование случайных чисел с нормальным распределением

Для генерирования случайных чисел с нормальным распределением служит функция `randn`:

```
x = randn(R, C);
```

Здесь R — число строк, C — число столбцов генерируемой матрицы случайных чисел x . Элементы матрицы являются некоррелированными случайными числами с нормальным распределением, имеющими нулевое среднее значение и единичную дисперсию.

2. Взаимные преобразования между коэффициентами полиномов числителя и знаменателя функции передачи и наборами нулей и полюсов

Указанные преобразования реализуются функциями `tf2zp` и `zp2tf`:

```
[z,p,k] = tf2zp(b,a)
```

```
[b,a] = zp2tf(z,p,k)
```

Здесь b — вектор коэффициентов числителя функции передачи, a — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, z — вектор нулей функции передачи, p — вектор полюсов функции передачи, k — коэффициент усиления (скаляр).

3. Расчет комплексного коэффициента передачи дискретного фильтра

Для расчета частотной характеристики дискретного фильтра служит функция `freqz`:

```
[H, f] = freqz(b, a, N, Fs);
```

Здесь b — вектор коэффициентов числителя функции передачи, a — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, N — число рассчитываемых частотных точек, F_s — частота дискретизации. Результаты: h — вектор значений комплексного коэффициента передачи, f — вектор частот, на которых производился расчет. Несколько последних входных параметров можно опустить. Если вызвать функцию без указания выходных параметров, будут построены графики АЧХ и ФЧХ. В конце списка параметров можно добавить строку 'whole', тогда будет выбран диапазон частот от нуля до частоты дискретизации, а не до частоты Найквиста, как это принято по умолчанию.

4. Обработка сигнала дискретным фильтром

Для этого используется функция `filter`:

```
y = filter(b, a, x);
```

Здесь b — вектор коэффициентов числителя функции передачи, a — вектор коэффициентов знаменателя функции передачи, x — входной сигнал, y — выходной сигнал.

Если входной сигнал является матрицей, она обрабатывается по столбцам.

5. Дискретное преобразование Фурье

Функция `fft` вычисляет дискретное преобразование Фурье, используя (по возможности) быстрый алгоритм (БПФ):

```
y = fft(x);
```

Можно указать во втором аргументе размерность преобразования: `y = fft(x, N)`, при этом сигнал приводится к указанному размеру N путем усечения или добавления нулей.

Если входной сигнал является матрицей, она обрабатывается по столбцам.

6. Оценка СПМ методом Уэлча

Оценка СПМ методом Уэлча вычисляется функцией `pwelch`:

```
[Pxx, f] = pwelch(x, window, noverlap, nfft, fs)
```

Входные параметры имеют следующий смысл:

- x — входной сигнал (одномерный вектор; многоканальный сигнал в виде матрицы не допускается);
- `window` — вектор отсчетов весовой функции, он определяет длину фрагментов, на которые делится сигнал. В качестве данного параметра можно задать число, тогда будет использовано окно Хэмминга указанной длины. По умолчанию используется окно Хэмминга, а длина фрагментов выбирается так, чтобы число фрагментов оказалось равно восьми;

- `noverlap` — величина перекрытия соседних фрагментов (в отсчетах). По умолчанию фрагменты перекрываются на 50% своей длины;
- `nfft` — размерность ДПФ, используемого при вычислении периодограмм фрагментов. Использовать величину меньше длины фрагмента не имеет смысла. Величина, превышающая длину фрагмента, позволяет увеличить число рассчитанных частотных точек, но не дает новой информации, так как по существу означает интерполяцию данных. По умолчанию размерность ДПФ равна длине фрагментов, округленной вверх до ближайшей степени двойки (но не менее 256);
- `fs` — частота дискретизации сигнала (в герцах).

Чтобы использовать значения по умолчанию, необходимо указать при вызове пустую матрицу (`[]`) в качестве соответствующего параметра.

Результаты работы функции: `Pxx` — вектор рассчитанных оценок СПМ, `f` — вектор частот, которым соответствуют элементы вектора `Pxx`.

7. Оценка СПМ авторегрессионным ковариационным методом

Оценка СПМ авторегрессионным ковариационным методом вычисляется функцией `pcov`:

```
[Pxx, f] = pcov(x, p, nfft, fs)
```

Входные параметры имеют следующий смысл:

- `x` — входной сигнал (одномерный вектор; многоканальный сигнал в виде матрицы не допускается);
- `p` — порядок авторегрессионной модели;
- `nfft` — размерность ДПФ, используемого при вычислении оценки СПМ. По умолчанию размерность ДПФ равна 256;
- `fs` — частота дискретизации сигнала (в герцах).
- Результаты работы функции:
- `Pxx` — вектор рассчитанных оценок СПМ;
- `f` — вектор частот, которым соответствуют элементы вектора `Pxx`.

8. Функции статистического анализа

Для вычисления среднего значения, дисперсии и среднеквадратического отклонения используются следующие функции:

```
m_x          = mean(x); % среднее значение
sigma2_x     = var(x);  % дисперсия
sigma_x      = std(x);  % среднеквадратическое отклонение
```

Если `x` является матрицей, соответствующие статистические параметры вычисляются для каждого ее столбца.

9. Транспонирование матрицы

Для транспонирования матрицы служит оператор `'` (`Y = X.'`).

Для эрмитава сопряжения матрицы служит оператор `'` (`Y = X'`).

3.4. Контрольные вопросы

1. Почему относительный разброс оценок возрастает в полосе задерживания фильтра?
2. Пояснить сущность авторегрессионного метода спектрального анализа.
3. Пояснить сущность метода Даньелла. Как изменились бы графики, если бы сглаживание производилось по большему числу точек?
4. Пояснить сущность метода Уэлча.
5. К каким нежелательным эффектам приводит чрезмерное увеличение порядка авторегрессионной модели?
6. Предположим, что авторегрессионная модель строилась для порядка $p = 40$. Как примерно будет выглядеть полученная оценка СПМ?
7. Как изменятся дисперсия оценки спектра и частотное разрешение, если при использовании метода Уэлча:
 - а) при сохранении длины выборки увеличивается число фрагментов сигнала с уменьшением их длины?
 - б) при сохранении длины фрагментов сигнала и их перекрытия увеличивается число фрагментов за счет увеличения длины выборки?
8. Две синусоиды имеют частоты 300 Гц и 320 Гц. Частота дискретизации равна 10 кГц. Чему (примерно) равна длина выборки, необходимая для раздельного наблюдения двух частотных пиков?
9. Как примерно будет выглядеть в рассмотренном случае зависимость ошибки предсказания от порядка АР-модели?
10. Оценка СПМ получается следующим образом:
 - а) Оцениваем фрагмент КФ сигнала
 - б) По оценке КФ получаем оценку СПМ.Какому из методов, рассмотренных в данной работе, результаты этой процедуры могут быть эквивалентны?
11. При использовании метода Уэлча имеющуюся выборку данных можно использовать по-разному:
 - а) выборка разбивается на *большее* число фрагментов *меньшей* длины;
 - б) выборка разбивается на *меньшее* число фрагментов *большой* длины.Как это скажется на параметрах получаемых спектральных оценок?
12. Как размер окна сглаживания в методе Даньелла повлияет на параметры спектральных оценок?
13. При используемом в данной работе способе реализации метода Даньелла спектральные пики оказываются несколько смещенными. С чем это связано и как можно устранить это смещение?

4. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

4.1. Задание и указания к выполнению работы

1. Общая информация

В работе производится синтез ФНЧ различными методами. При этом используются следующие данные из работы № 1:

- Частота среза фильтра F_c ;
- Частота дискретизации сигнала F_s ;
- Неравномерность АЧХ в полосе пропускания A_{pass} ;
- Подавление сигнала в полосе задерживания A_{stop} ;
- Частота нижней границы полосы задерживания F_{stop} , равная частоте среза, умноженной на 1,1.

Внимание: начало полосы задерживания в данной работе — не удвоенная частота среза, как в работе № 1, а частота среза, умноженная на 1,1 (таким образом, ширина переходной зоны составляет 10% от полосы пропускания фильтра).

Синтез выполняется с помощью графической среды **Filter Design and Analysis Tool**. Для ее запуска необходимо набрать в главном окне MATLAB команду `fdatool`.

Переключатель **Response Type** оставить в положении по умолчанию — **Lowpass** (ФНЧ).

Для переноса необходимых графиков в документ Word следует щелкнуть в панели инструментов среды FDATool на кнопке **Full View Analysis** или выбрать команду меню **View > Filter Visualization Tool**. Откроется окно визуализатора характеристик фильтров, в котором можно копировать графики в буфер обмена с помощью команды меню **Edit > Copy Figure**.

2. Метод билинейного преобразования. Исследование зависимости ширины переходной зоны от порядка рекурсивного фильтра

Установить переключатель **Design Type** в положение **IR** (рекурсивные фильтры). Для четырех стандартных способов аппроксимации прямоугольных АЧХ (Баттерворта (**Butterworth**), Чебышева 1 и 2 рода (**Chebyshev Type I, II**) и эллиптических (**Elliptic**)) выполнить следующие действия.

Переключатель **Filter Order** установить в положение ручного задания порядка фильтра (**Specify Order**). В разделе **Frequency Specifications** задать частоту дискретизации (**Fs**) и частоту среза фильтра (**Fpass**). В разделе **Magnitude Specifications** при необходимости задать параметры, набор которых зависит от типа АЧХ и может включать величину неравномерности АЧХ в полосе пропускания (**Apass**) и подавление сигнала в полосе задерживания (**Astop**).

Собственно синтез фильтра производится щелчком на кнопке **Design Filter**.

Для разных значений порядка синтезируемого фильтра измерить зависимость ширины переходной зоны от порядка фильтра n . Ширина переходной зоны ΔF определяется как разность между нижней границей полосы задерживания F_{stop} (на этой частоте подавление сигнала достигает указанного в задании значения) и верхней границей полосы пропускания F_{pass} (на ней коэффициент передачи фильтра падает до указанного в задании значения неравномерности АЧХ): $\Delta F = F_{\text{stop}} - F_{\text{pass}}$.

Порядок фильтра следует изменять от 2 до значения, при котором будут выполняться предъявляемые к фильтру требования, то есть ширина переходной зоны составит не более 10% от частоты среза. Для АЧХ Баттерворта требуемая величина порядка фильтра оказывается существенно большей, чем для остальных типов АЧХ, поэтому не следует проводить измерения для всех значений порядка подряд. Целесообразно сначала определить требуемый порядок фильтра, а затем выбрать набор из примерно 10 значений порядка, для которых и выполнить необходимые измерения.

Измерения частот производятся по графику АЧХ с использованием средств масштабирования графика.

Частотные характеристики фильтра в процессе измерений задаются следующим образом:

- Для фильтров *Баттерворта*, *Чебышева 1 рода* и *эллиптического*: в поле **Fc** (для фильтра Баттерворта) или **Fpass** (для остальных двух типов) раздела **Frequency Specifications** указывается частота среза синтезируемого ФНЧ, для разных значений порядка фильтра измеряется нижняя граница полосы задерживания F_{stop} .
- Для фильтра *Чебышева 2 рода*: в поле **Fstop** раздела **Frequency Specifications** указывается нижняя граница полосы задерживания синтезируемого ФНЧ (то есть частота среза, умноженная на 1,1), для разных значений порядка фильтра измеряется верхняя граница полосы пропускания F_{pass} , определяемая по уровню допустимой неравномерности, указанному в задании.

Результаты занести в следующую таблицу.

Фильтр Баттерворта		Фильтр Чебышева 1 рода		Фильтр Чебышева 2 рода		Эллиптический фильтр	
$F_{\text{pass}} = F_c$		$F_{\text{pass}} = F_c$		$F_{\text{stop}} = 1,1 F_c$		$F_{\text{pass}} = F_c$	
n	F_{stop}	n	F_{stop}	n	F_{pass}	n	F_{stop}
2		2		2		2	
4		3		3		3	
...		

Для каждого типа АЧХ сохранить графики АЧХ, ФЧХ, импульсной характеристики и расположения нулей и полюсов для последнего (максимального) значения порядка фильтра (то есть для минимального значения порядка, при котором выполняются заданные требования к АЧХ).

В отчете по данным из таблицы построить (в общих осях) 4 графика зависимости ширины переходной зоны от порядка фильтра для всех типов АЧХ.

3. Синтез с использованием окон

а) Исследование зависимости уровня боковых лепестков, пульсаций в полосе пропускания и частоты среза от параметра β окна Кайзера

Установить переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выбрать метод синтеза с использованием окон (**Window**). Задать автоматический расчет порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Minimum order**) и задать требуемые значения в разделах **Frequency Specifications** и **Magnitude Specifications**. Синтезировать фильтр, записать порядок получившегося фильтра (он отображается в поле **Order** раздела **Current Filter Information** в левом верхнем углу окна среды FDATool), сохранить графики его АЧХ, импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости.

Задать ручной выбор порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и установить порядок фильтра, получившийся при автоматическом его выборе. Меняя параметр β окна Кайзера (поле **Beta** в разделе **Options**) в диапазоне от 0,5 до 5 с шагом 0,5, измерить следующие параметры получающегося в результате синтеза фильтра: уровень боковых лепестков АЧХ, неравномерность АЧХ в полосе пропускания, частота среза фильтра по уровню -3 дБ. Измерения производятся по графику АЧХ с использованием средств масштабирования графика.

Результаты занести в следующую таблицу.

β	Уровень боковых лепестков, дБ	Неравномерность АЧХ в полосе пропускания, дБ	Частота среза по уровню -3 дБ, Гц (или кГц)
0,5			
1,0			
1,5			
2,0			
2,5			
3,0			
3,5			
4,0			
4,5			
5,0			

В отчете привести использованный порядок фильтра и изобразить полученные зависимости в виде графиков.

б) Исследование зависимости ширины переходной зоны от порядка фильтра

Задать ручной выбор порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и установить порядок фильтра, получившийся при

автоматическом его выборе. Измерить по графику АЧХ частоту начала полосы задерживания (F_{stop}) для трех значений порядка фильтра: исходного (автоматически выбранного), увеличенного и уменьшенного в два раза по сравнению с исходным значением. Результаты занести в следующую таблицу.

Порядок фильтра	Начало полосы задерживания, Гц (или кГц)	Ширина переходной зоны, Гц (или кГц)
$N_{\text{опт.}}/2$		
$N_{\text{опт.}}$		
$2 N_{\text{опт.}}$		

4. Синтез по минимаксному критерию (метод Ремеза). Исследование зависимости величины пульсаций АЧХ от весовых коэффициентов частотных диапазонов

Установить переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выбрать минимаксный метод синтеза (**Equiripple**). Задать автоматический расчет порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Minimum order**) и задать требуемые значения в разделах **Frequency Specifications** и **Magnitude Specifications**. Синтезировать фильтр, записать порядок получившегося фильтра, сохранить графики его АЧХ, импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости.

Задать ручной выбор порядка фильтра (переключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и установить порядок фильтра, получившийся при автоматическом его выборе. Меняя весовой коэффициент оптимизационного алгоритма для полосы задерживания (поле **Wstop** в разделе **Magnitude Specifications**) в диапазоне от 1 до значения, при котором будут выполняться требования к подавлению сигнала в полосе задерживания, измерить следующие параметры получающегося в результате синтеза фильтра: уровень боковых лепестков АЧХ и неравномерность АЧХ в полосе пропускания. Измерения производятся по графику АЧХ с использованием средств масштабирования графика. Набор значений **Wstop** выбрать самостоятельно; лучше использовать приблизительно экспоненциальную последовательность вида 1, 2, 4, ...

Результаты занести в следующую таблицу.

Wstop	Уровень боковых лепестков, дБ	Неравномерность АЧХ в полосе пропускания, дБ
1		
2		
4		
...		

В отчете привести использованный порядок фильтра и изобразить полученные зависимости в виде графиков.

5. Синтез путем минимизации среднеквадратической ошибки

Установить переключатель **Design Method** в положение **FIR** (нерекурсивный фильтр) и выбрать метод синтеза по минимуму среднеквадратической ошибки (**Least-squares**). Задать ручное указание порядка фильтра (пере-

ключатель **Filter Order** в положении **Specify order**) и ввести значение порядка фильтра, полученное при автоматическом выборе порядка для минимаксного метода ранее в п. 3. Задать требуемые значения в разделе **Frequency Specifications**. Постепенно увеличивая значение весового коэффициента для полосы задерживания (поле **Wstop** в разделе **Magnitude Specifications**), добиться того, чтобы уровень боковых лепестков удовлетворял требованиям к подавлению сигнала в полосе задерживания. Сохранить графики АЧХ фильтра, его импульсной характеристики и расположения нулей на комплексной плоскости. Измерить по графику АЧХ и записать следующие значения:

- Порядок фильтра;
- Уровень пульсаций АЧХ в полосе пропускания (в децибелах);
- Частоту среза по уровню -3 дБ;
- Частоту начала полосы задерживания.

6. Сохранение результатов синтеза

В завершение работы следует сохранить сеанс среды FDATool (команда меню **File** ➤ **Save session** или **Save session as**).

4.2. Содержание отчета

В отчете должны быть приведены:

1. Исходные данные для синтеза ФНЧ (частота среза фильтра, начало полосы задерживания, частота дискретизации сигнала, неравномерность АЧХ в полосе пропускания, подавление сигнала в полосе задерживания);
2. Указанные выше графики АЧХ, ФЧХ, импульсных характеристик, расположения нулей/полюсов для синтезированных фильтров. **Внимание!** Перед каждым набором характеристик должен быть четко указан *порядок* получившегося фильтра;
3. Заполненные таблицы и построенные по этим данным графики;
4. Числовые значения параметров синтезированных фильтров, значения которых было указано зафиксировать;
5. Выводы.

4.3. Используемые средства MATLAB

В данной работе используется графическая среда синтеза и анализа фильтров (**Filter Design and Analysis Tool**, FDATool). Для ее запуска необходимо набрать в главном окне MATLAB команду `fdatool`.

Переключатель **Response Type** оставить в положении по умолчанию — **Lowpass** (ФНЧ).

Для переноса необходимых графиков в документ Word следует щелкнуть в панели инструментов среды FDATool на кнопке **Full View Analysis** или выбрать команду меню **View** ➤ **Filter Visualization Tool**. Откроется окно

визуализатора характеристик фильтров, в котором можно копировать графики в буфер обмена с помощью команды меню **Edit > Copy Figure**.

4.4. Контрольные вопросы

1. Получить формулу для бесконечной ИХ идеального дискретного ФВЧ (ФЧХ считать равной нулю на всех частотах).

2. Получить формулу для бесконечной ИХ *комплексного* фильтра с идеальной *односторонней* полосой пропускания с шириной, равной половине частоты Найквиста (коэффициент передачи равен 1 на частотах от 0 до $\pi/(2T)$, и нулю на отрицательных частотах от $-\pi/T$ до нуля и на положительных частотах от $\pi/(2T)$ до π/T).

3. Получить функцию передачи, структурную схему и ИХ дискретного фильтра, полученного билинейным преобразованием *дифференцирующей* RC-цепочки.

4. Почему не всегда можно использовать рекурсивные фильтры?

5. Какие из синтезированных фильтров обеспечивают бесконечное затухание сигнала на частоте Найквиста и почему?

6. При каких условиях фильтр Чебышева второго рода будет иметь нулевой коэффициент передачи на частоте Найквиста?

7. Можно ли в нерекурсивном фильтре получить нулевой коэффициент передачи на частоте Найквиста?

8. Для каких фильтров (рекурсивных или нерекурсивных) крутизна АЧХ в переходной зоне от полосы пропускания к полосе задерживания оказывается больше?

9. Какие типы симметрии (I, II, III, IV) могут иметь нерекурсивные фильтры, синтезируемые в данной лабораторной работе?

10. Чем отличаются параметры фильтров с симметричными импульсными характеристиками, у одного из которых в середине характеристики имеется один максимальный по величине отсчет, а у другого — два одинаковых отсчета максимального уровня?

11. При сохранении всех требований к АЧХ синтезируемого ФНЧ (границы полос пропускания и задерживания, допустимые уровни пульсаций в полосах пропускания и задерживания) повышаем частоту дискретизации, на которой работает система. Что произойдет с требуемым порядком фильтра?

12. Почему именно метод Ремеза дал минимальный порядок фильтра при синтезе нерекурсивных фильтров?

13. По графикам АЧХ, заданным преподавателем, определить, какими методами могли быть синтезированы данные фильтры.

14. Как по графику АЧХ можно различить фильтры, синтезированные путем минимизации p -нормы отклонения АЧХ от заданной при $p = 2$ и $p = \infty$?

15. Какими методами могли быть синтезированы эти два нерекурсивных фильтра:

а) ФНЧ имеет пульсации, уровень которых как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания возрастает при приближении к частоте среза;

б) ФНЧ имеет пульсации, величина которых в пределах полосы пропускания и в пределах полосы задерживания постоянна (хотя их величина в этих двух полосах не обязательно совпадает)?

16. При синтезе нерекурсивного ФНЧ по минимаксному критерию используется весовая функция, равная 1 в полосах пропускания и задерживания и нулю в переходной зоне между ними. Как повлияет изменение ширины этой переходной зоны на АЧХ получаемого фильтра?

17. При синтезе нерекурсивного ФНЧ по минимаксному критерию была использована весовая функция, равная 1 в полосе пропускания, 10 в полосе задерживания и нулю в переходной зоне между ними. После выполнения синтеза неравномерность АЧХ в полосе пропускания оказалась равной $\pm 0,5$ дБ. Чему равно (в децибелах) подавление сигнала в полосе задерживания?

18. При синтезе нерекурсивного ФНЧ по минимаксному критерию была использована весовая функция, равная 1 в полосе пропускания, 100 в полосе задерживания и нулю в переходной зоне между ними. После выполнения синтеза подавление сигнала в полосе задерживания оказалась равным 60 дБ. Чему равна (в децибелах) неравномерность АЧХ в полосе пропускания?

19. При синтезе нерекурсивного ФНЧ по минимаксному критерию необходимо добиться, чтобы АЧХ в полосе пропускания не отклонялась от единицы более чем на 0,01, а подавление сигнала в полосе задерживания было не менее 60 дБ. Чему могут быть равны весовые коэффициенты для полос пропускания и задерживания?

5. АДАПТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

5.1. Задание и указания к выполнению работы

Для выполнения данной лабораторной работы необходимо получить у преподавателя исходные данные: 4 отсчета импульсной характеристики используемого канала связи:

k	0	1	2	3
$h(k)$				

1. Формирование сигнала

1. Сформировать последовательность из 2048 случайных чисел, с равной вероятностью принимающих значения $+1$ и -1 (наиболее удобно воспользоваться функцией `randsrc`).

2. Пропустить сигнал через канал связи с заданной импульсной характеристикой (функция `filter`).

3. К искаженному сигналу добавить дискретный белый шум, дисперсия которого выбирается равной $0,01$ от средней мощности (среднего квадрата) сигнала (СКО шума — $0,1$ от СКО сигнала). Средняя мощность сигнала после канала связи равна его исходной мощности (единица), умноженной на энергию импульсной характеристики (сумму квадратов модулей ее отсчетов).

2. Идентификация канала связи

Для идентификации импульсной характеристики канала связи используются объекты адаптивных фильтров.

При решении задачи идентификации в качестве входного сигнала адаптивного фильтра используется исходный цифровой сигнал, а в качестве образцового — сигнал, прошедший через канал связи и искаженный добавлением шума.

Необходимо исследовать поведение алгоритмов LMS и RLS, задавая поочередно два варианта длины фильтра 4 и 8 (во втором случае наблюдаются эффекты, связанные с избыточным порядком фильтра).

Для алгоритма LMS необходимо выполнить следующее:

- определить предельное значение размера шага μ , при котором алгоритм сходится, и сравнить его с теоретической оценкой $\mu_{\max} = 2/(\sigma_x^2 N)$, где σ_x^2 — средний квадрат входного сигнала фильтра, N — длина фильтра. Факт сходимости определять по графику зависимости ошибки фильтрации от номера шага.
- построить графики зависимости ошибки фильтрации и ошибки оценки канала в установившемся режиме от величины μ . Ошибку фильтрации определять как средний квадрат последних 256 значений сигнала ошибки. Ошибку оценки канала определять как среднюю (за последние 256 тактов)

сумму квадратов разностей между истинными отсчетами импульсной характеристики и коэффициентами адаптивного фильтра.

Для алгоритма RLS необходимо выполнить следующее:

- измерить ошибку фильтрации, определяемую как средний квадрат последних 256 значений сигнала ошибки.
- измерить ошибку оценки канала как среднюю (за последние 256 тактов) сумму квадратов разностей между истинными отсчетами импульсной характеристики и коэффициентами адаптивного фильтра.

Для всех рассматриваемых вариантов привести графики зависимости ошибки фильтрации от номера шага, а также значения коэффициентов фильтра, достигнутые по завершении обработки сигнала.

3. Компенсация искажений, вносимых каналом связи

При решении задачи компенсации искажений, вносимых каналом связи (это задача обратной идентификации), в качестве входного сигнала адаптивного фильтра используется сигнал, прошедший через канал связи и искаженный добавлением шума, а в качестве образцового — исходный цифровой сигнал с некоторой задержкой.

Для алгоритма LMS необходимо выполнить следующее:

- при длине фильтра, равной 16, и задержке фильтрации, равной 9, определить предельное значение размера шага μ , при котором алгоритм сходится, и сравнить его с теоретической оценкой $\mu_{\max} = 2/(\sigma_x^2 N)$, где σ_x^2 — средний квадрат входного сигнала фильтра, N — длина фильтра. Факт сходимости определять по графику зависимости ошибки фильтрации от номера шага.
- при тех же параметрах фильтра построить график зависимости ошибки фильтрации в установившемся режиме от величины μ . Ошибку фильтрации определять как средний квадрат последних 256 значений сигнала ошибки.
- получить зависимость среднего квадрата ошибки фильтрации от длины фильтра. Для исходной длины выбрать значение μ равным половине от максимально допустимого. В остальных случаях изменять μ обратно пропорционально длине фильтра. Задержку фильтрации выбирать равной половине длины фильтра плюс единица. Ошибку фильтрации определять как средний квадрат последних 1024 значений сигнала ошибки.
- получить зависимость среднего квадрата ошибки фильтрации от вносимой фильтром задержки. Длину фильтра при этом взять равной 16. Ошибку фильтрации определять как средний квадрат последних 1024 значений сигнала ошибки.

Привести следующие графики:

- зависимости выходного сигнала фильтра от номера шага (строится точками) для одного из вариантов, при которых алгоритм сходится;

- график коэффициентов фильтра для одного из вариантов, при которых алгоритм сходится;
- график зависимости ошибки фильтрации от μ ;
- график зависимости ошибки фильтрации от длины фильтра;
- график зависимости ошибки фильтрации от вносимой задержки.

5.2. Содержание отчета

В отчете должны быть приведены:

1. Импульсная характеристика канала связи.
2. Указанные выше графики и числовые значения.
3. Выводы.

5.3. Используемые средства MATLAB

1. Объекты адаптивных фильтров

При наличии версии не младше чем MATLAB 6.5 SP1 рекомендуется пользоваться объектами адаптивных фильтров. Создаются объекты путем вызова функций-конструкторов:

```
ha = adaptfilt.lms(1, mu);
ha = adaptfilt.rls(1, lambda);
```

Здесь:

- 1 — длина создаваемого фильтра;
- mu — размер шага μ для алгоритма LMS;
- lambda — коэффициент забывания λ в алгоритме RLS. Должен лежать в диапазоне 0...1. Отсутствие забывания соответствует $\lambda = 1$. При вызове конструктора RLS-фильтра параметр lambda можно опустить, его значение по умолчанию равно 1.

После создания объекта ha его можно использовать для фильтрации сигнала следующим образом:

```
[y, e] = filter(ha, x, d);
```

Здесь:

- x — вектор отсчетов входного сигнала;
- d — вектор отсчетов образцового сигнала;
- y — вектор отсчетов выходного сигнала;
- e — вектор отсчетов сигнала ошибки.

Получить текущие значения коэффициентов адаптивного фильтра можно следующим образом:

```
w_new = ha.coefficients;
```

2. Формирование случайных символов из заданного алфавита

Для формирования случайных символов из заданного алфавита служит функция randsrc, имеющая следующий синтаксис:

```
x = randsrc(m, n, alphabet);
```

Здесь:

- m — число строк генерируемой матрицы;
- n — число столбцов генерируемой матрицы;
- `alphabet` — вектор возможных значений генерируемого сигнала.

Сформированная матрица x содержит значения, выбираемые из вектора `alphabet` с равной вероятностью. Параметр `alphabet` можно опустить, по умолчанию его значение равно `[-1 1]`.

5.4. Контрольные вопросы

1. На что влияет значение коэффициента забывания в RLS-алгоритме?
2. Объяснить зависимость ошибки фильтрации от величины шага μ для LMS-алгоритма.
3. Оценить по графику зависимости ошибки фильтрации от μ для LMS-алгоритма, чему был равен среднеквадратический уровень входного сигнала.
4. Объяснить зависимость ошибки фильтрации от вносимой задержки для LMS-алгоритма.
5. От каких факторов зависит скорость сходимости LMS-алгоритма?
6. Как можно качественно объяснить тот факт, что значение μ_{\max} обратно пропорционально длине фильтра?
7. Объяснить форму графика зависимости дисперсии ошибки от длины фильтра.
8. Как (примерно) будет выглядеть зависимость $e(k)$ для RLS-алгоритма при $\lambda = 1$ в п. 2 (идентификация канала связи)?
9. Чему будут (в среднем) равны коэффициенты RLS-фильтра в конце сигнала в первой части работы при $\lambda = 1$?
10. Чем объясняется возрастание ошибки для RLS-алгоритма при $\lambda \rightarrow 1$ (первый раздел работы)?
11. Объяснить причины возрастания уровня ошибки при малых и больших значениях μ для LMS-алгоритма.
12. Объяснить форму графика зависимости ошибки фильтрации от вносимой задержки в п. 3 (компенсация искажений, вносимых каналом связи).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
2. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. 2-е изд. / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
3. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. А. Б. Сергиенко. — 2-е изд., испр. — М.: Техносфера, 2007.
4. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
5. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. — М.: Мир, 1988.
6. Б. Уидроу, С. Д. Стирнз. Адаптивная обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1989.
7. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 816 с.

Содержание

1. Основы моделирования дискретной обработки сигналов в MATLAB	3
2. Формы реализации дискретных фильтров	10
3. Спектральный анализ дискретных случайных процессов	16
4. Синтез дискретных фильтров	24
5. Адаптивные фильтры.....	31
Список рекомендуемой литературы.....	35