



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лабораторный практикум



Санкт-Петербург
2011

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2011

УДК 621.396
ББК 3 841я7
Р15

Авторы: Ю. Г. Антонов, Л. А. Аронов, С. А. Баруздин, А. А. Данилин, М. В. Дмитрюк, М. Т. Иванов, А. Д. Корнеев, А. С. Кривоногов, Ю. Е. Лавренко, Д. О. Москалец, А. Б. Натальин, К. П. Наумов, А. Б. Сергиенко, Д. А. Токарев, В. Н. Ушаков.

Р15 Радиотехнические цепи и сигналы: Лабораторный практикум. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. 148 с.

ISBN 978-5-7629-1102-3

Представлены описания 14 лабораторных работ, выполняемых при изучении курсов цикла «Радиотехнические цепи и сигналы».

Предназначен для студентов факультета радиотехники и телекоммуникаций направлений 210400 «Радиотехника», 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и 211000 «Конструирование и технология электронных средств».

УДК 621.396
ББК 3 841я7

Рецензенты: кафедра электроники и оптической связи СПбГУАП;
доц. В. М. Москалев (ВКА им. А. Ф. Можайского).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-1102-3

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИМПУЛЬСОВ

Цель работы — изучение взаимосвязи структуры сигнала и его спектра на примере анализа периодических последовательностей видео- и радиоимпульсов.

1.1. Теоретические сведения

Гармонический анализ периодических сигналов. Из курса высшей математики известно, что сигнал $s(t)$ (рис. 1.1), имеющий период T и удовлетворяющий на этом периоде условиям Дирихле [1], как правило, выполняющимся в отношении физически реализуемых сигналов, может быть представлен в виде ряда Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n t, \quad (1.1)$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos \omega_n t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \omega_n t dt;$$
$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

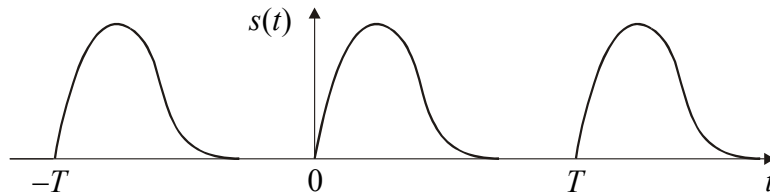


Рис. 1.1

Здесь a_0 , a_n и b_n — коэффициенты разложения, ω_n — круговая частота гармонического колебания с номером n , f_n — его линейная частота. В радиотехнической практике более удобной является следующая форма записи соотношения (1.1):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (1.2)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_n = -b_n / a_n$. Из выражения (1.2) следует, что рассматриваемый периодический сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде суммы бесконечно большого числа гармонических составляющих, частоты которых кратны значению $\omega_1 = 2\pi/T$. Постоянная составляющая $a_0/2$ при этом может рассматриваться как гармоника с нулевой частотой, амплитудой $|a_0|/2$ и начальной фазой 0 или π (в зависимости от знака a_0). Представление (1.2) назы-

вается *вещественной формой* ряда Фурье. Совокупность коэффициентов $|a_0|/2$ и A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) образует амплитудный, а φ_n — фазовый спектры периодического сигнала $s(t)$. Возможный их вид изображен на рис. 1.2, *а*, *б* соответственно.

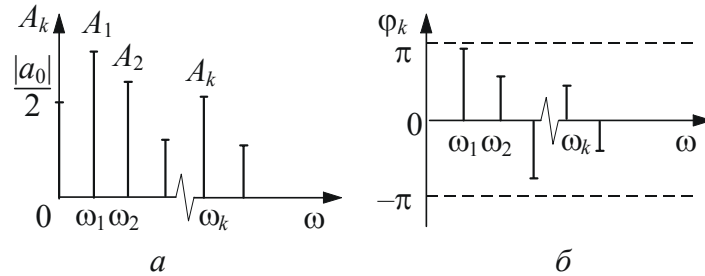


Рис. 1.2

Используя в выражении (1.2) экспоненциальное представление функции $\cos(\omega)$ по формуле Эйлера, легко получить соотношение

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{j\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{-j\omega_n t}. \quad (1.3)$$

Включив в область изменения n целую отрицательную полуось и приняв, что для $n < 0$ справедливы равенства $A_n = A_{-n}$; $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ и $\omega_n = -\omega_{-n}$, формулу (1.3) можно записать в компактном виде

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{j\omega_n t}. \quad (1.4)$$

Наконец, обозначив в соотношении (1.4) $(A_n/2)e^{j\varphi_n}$ через \dot{C}_n и приняв $a_0/2 = C_0$, окончательно получим

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{j\omega_n t}. \quad (1.5)$$

Представление (1.5) называется *комплексной формой* ряда Фурье и, по существу, является разложением вещественного периодического сигнала $s(t)$ в ряд по экспоненциальным функциям с мнимым показателем. Целесообразность введения комплексной формы ряда Фурье обусловлена удобством выполнения математических преобразований при работе со спектрами сигналов. При этом амплитудный и фазовый спектры ($|\dot{C}_n|$ и $\arg \dot{C}_n$ соответственно) периодического сигнала определены на всей вещественной оси частот. Возможный вид амплитудного спектра приведен, в частности, на рис. 1.3.

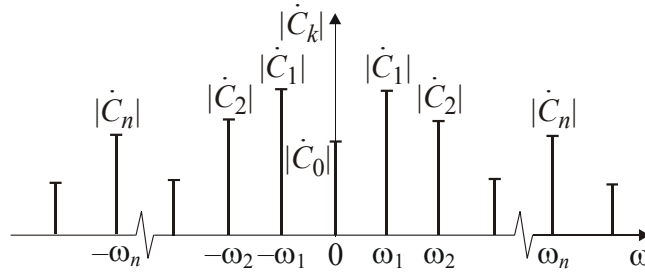


Рис. 1.3

Следует отметить, что значения коэффициентов \dot{C}_n могут быть легко вычислены непосредственно по формуле

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j\omega_n t} dt. \quad (1.6)$$

Таким образом, периодический сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле, имеет линейчатый (дискретный) спектр, расположенный в области неотрицательных частот при использовании вещественной формы ряда Фурье и определенный на всей действительной частотной оси в случае его комплексного представления.

Гармонический анализ непериодических сигналов. Известное из математики обобщение разложения периодического сигнала в ряд Фурье на случай непериодического сигнала $s(t)$ (рис. 1.4) приводит к следующему результату:

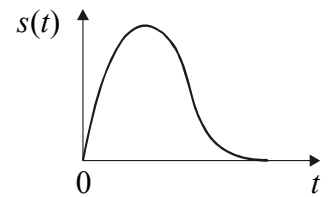


Рис. 1.4

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.7)$$

где $\dot{S}(\omega)$ — спектральная функция сигнала $s(t)$, вычисляемая путем *прямого преобразования Фурье*, а именно:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.7) называется *обратным преобразованием Фурье*. Установлено, что приведенные выражения (1.7) и (1.8) справедливы, если сигнал $s(t)$ на любом конечном интервале времени удовлетворяет условиям Дирихле и является абсолютно интегрируемым на всей временной оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Спектральная функция сигнала $s(t)$ является в общем случае комплексной и может быть записана в экспоненциальной форме

$$\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| \exp[j \arg \dot{S}(\omega)],$$

где $|\dot{S}(\omega)|$ — амплитудный, а $\arg \dot{S}(\omega)$ — фазовый спектры сигнала $s(t)$. Из формулы (1.8) следует, что

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = \operatorname{Re} \dot{S}(\omega) + j \operatorname{Im} \dot{S}(\omega).$$

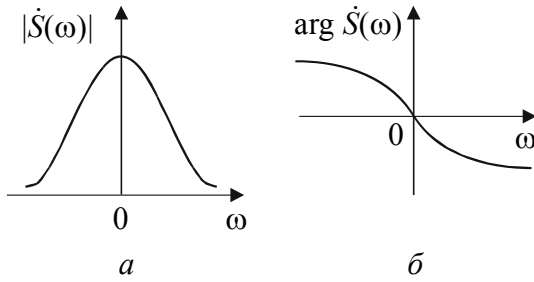


Рис. 1.5

Поскольку первое и второе слагаемые в данном соотношении являются соответственно четной и нечетной функциями частоты, становится очевидным, что амплитудный спектр есть четная, а фазовый — нечетная функции частоты. Возможные структуры этих спектров представлены на рис. 1.5, а, б соответственно.

С использованием указанных свойств спектральной функции $\dot{S}(\omega)$ выражение (1.7) может быть записано в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)| e^{j \arg \dot{S}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} |\dot{S}(\omega)| \right) \cos[\omega t + \arg \dot{S}(\omega)] d\omega.$$

Последнее соотношение наглядно иллюстрирует «физический» смысл спектральной функции $\dot{S}(\omega)$: из него следует, что сигнал $s(t)$, удовлетворяющий названным условиям, может быть представлен в виде суммы бесконечно большого числа гармонических составляющих, частоты которых непрерывно заполняют интервал от 0 до ∞ , начальные фазы задаются функцией $\arg \dot{S}(\omega)$, а амплитуды являются бесконечно малыми и их частотная зависимость описывается законом $|\dot{S}(\omega)|$.

Итак, непериодические сигналы характеризуются непрерывным (сплошным) спектром, причем амплитудный спектр является четной, а фазовый — нечетной функциями частоты.

Связь между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности импульсов. Пусть задан одиночный импульсный сигнал $s(t)$ (см. рис. 1.4) со спектральной функцией $\dot{S}(\omega)$. Пусть имеется также периодическая последовательность импульсов $s_{\Pi}(t)$, сформированная путем повторения исходного импульсного сигнала $s(t)$ с периодом T (см. рис. 1.1, не обращая внимания на обозначение оси ординат). Комплексный спектр периодического сигнала $s_{\Pi}(t)$, согласно соотношению (1.5), характеризуется набором коэффициентов \dot{S}_n , $n \in (-\infty, \infty)$. Ответ на вопрос о связи между спектральной функцией сигнала $s(t)$ и комплексным спектром периодической

последовательности $s_{\Pi}(t)$ имеет важный практический смысл. Указанная связь легко устанавливается. Действительно, с учетом выражений (1.1), (1.2), (1.5) и (1.8) можно записать следующее:

$$\begin{aligned}\dot{C}_n &= \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (A_n \cos \varphi_n + j A_n \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T s_{\Pi}(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \dot{S}(\omega_n).\end{aligned}$$

Данные соотношения свидетельствуют о том, что значения комплексного спектра периодического сигнала $s_{\Pi}(t)$ с точностью до постоянного (размерного) коэффициента $1/T$ совпадают с отсчетами спектральной функции исходного одиночного импульса $s(t)$, взятыми на соответствующих частотах. Другими словами, огибающие амплитудного и фазового дискретных спектров периодического сигнала совпадают по форме с амплитудным и фазовым непрерывными спектрами исходного одиночного импульсного сигнала, что иллюстрируется на рис. 1.6, а, б.

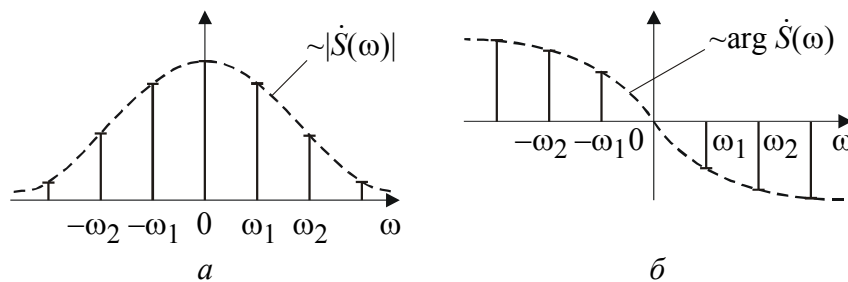


Рис. 1.6

Спектры радиосигналов с амплитудной модуляцией (АМ). Пусть задан некий сигнал $A(t) \geq 0$ (рис. 1.7) со спектральной функцией $\dot{S}_A(\omega)$, модуль которой изображен на рис. 1.8.

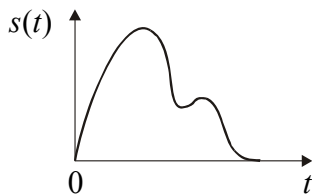


Рис. 1.7

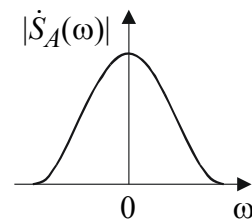


Рис. 1.8

Сигнал $s(t)$ вида $A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где ω_0 и φ_0 — круговая частота и начальная фаза некоторого гармонического колебания, называется радиосигналом с АМ, осуществляемой по закону $A(t)$. При этом, как правило, несущая частота ω_0 радиосигнала $s(t)$ существенно превосходит эффективную ширину спектра модулирующего сигнала $A(t)$, называемого часто видеосигналом.

Возможная структура радиосигнала $s(t)$ изображена на рис. 1.9. Его спектральная функция легко вычисляется:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \dot{S}_A(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \dot{S}_A(\omega + \omega_0).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

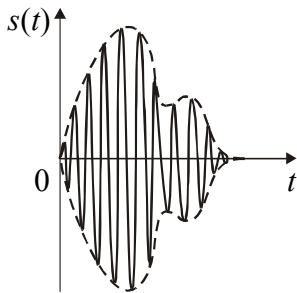


Рис. 1.9

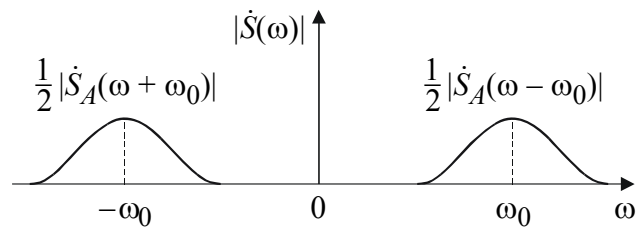


Рис. 1.10

Учитывая сделанное предположение о соотношении частоты ω_0 и ширины спектра видеосигнала $A(t)$, полученное выражение удобно записать в следующей форме:

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} 0,5 e^{j\varphi_0} \dot{S}_A(\omega - \omega_0), & \omega > 0, \\ 0,5 e^{-j\varphi_0} \dot{S}_A(\omega + \omega_0), & \omega < 0. \end{cases}$$

Такая запись позволяет утверждать, что при выполнении указанных условий спектральная функция радиосигнала с АМ пропорциональна спектральной функции исходного видеосигнала, смещенной вдоль частотной оси на значение несущей частоты. Амплитудный спектр радиосигнала $s(t)$ представлен на рис. 1.10.

В случае АМ периодическим видеосигналом $s_{\Pi}(t)$ для нахождения спектра соответствующего радиосигнала $s(t) = s_{\Pi}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ удобно воспользоваться вещественной формой ряда Фурье. Пусть модулирующий сигнал $s_{\Pi}(t) \geq 0$ имеет вид

$$s_{\Pi}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Тогда радиосигнал $s(t)$ может быть записан в следующей форме:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_n)t + \varphi_0 + \varphi_n] + \frac{A_n}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_n)t + \varphi_0 - \varphi_n] \right\},$$

которая наглядно отражает спектральный состав АМ-радиосигнала $s(t)$, представленный в области положительных частот. Возможные структуры амплитудных спектров видео- и радиосигналов $s_n(t)$ и $s(t)$ изображены на рис. 1.11, а, б соответственно.

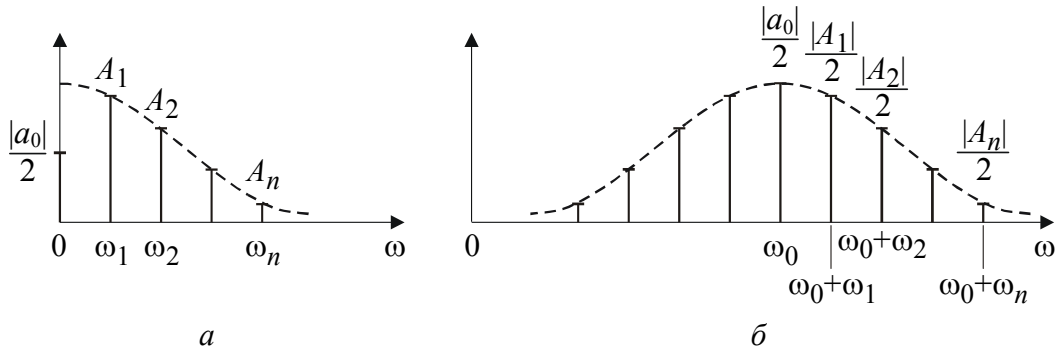


Рис. 1.11

Как легко видеть, характер трансформации спектра при АМ периодическим видеосигналом по существу не отличается от предыдущего случая.

1.2. Описание лабораторной установки

Структурная схема лабораторной установки, необходимой для проведения измерений, представлена на рис. 1.12.

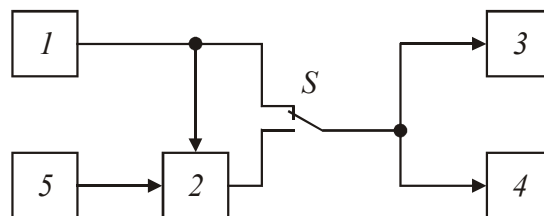


Рис. 1.12

В ее состав входят генератор прямоугольных импульсов 1, амплитудный модулятор 2, осциллограф 3, анализатор спектра 4 и генератор гармонического сигнала 5. Периодическая последовательность прямоугольных видеоимпульсов снимается с выхода генератора 1, а с выхода амплитудного модулятора 2 снимается последовательность радиоимпульсов с прямоугольной огибающей при подаче на его входы периодической последовательности видеоимпульсов (от генератора 1) и высокочастотного гармонического колебания с выхода генератора стандартных сигналов 5. Переключатель S позволяет выбирать для исследования видео- или радиоимпульсы.

1.3. Задание и указания к выполнению работы

Исследование спектров периодических последовательностей видеоимпульсов.

1. Подать на входы осциллографа и анализатора спектра периодическую последовательность видеоимпульсов. Длительность импульса τ следует выбрать равной 10 мкс и регулировкой частоты повторения сигнала $f_{\text{п}} = 1/T$ установить период последовательности, соответствующий скважности $q = 6$ ($q = T/\tau$). Для контроля параметров последовательности и формы сигнала необходимо использовать осциллограф. Далее путем настройки анализатора спектра следует добиться на его экране четкого изображения гармоник анализируемого сигнала. Затем необходимо измерить зависимость амплитуды гармоники A_n от ее номера n . При этом рассмотрению подлежат значения $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ (постоянная составляющая сигнала, или гармоника нулевой частоты, в настоящей работе не исследуется). Для упрощения измерений значения амплитуд A_n можно оценивать непосредственно по шкале, расположенной на экране прибора. Чтобы несколько повысить характерную для такого метода измерений невысокую точность, рекомендуется путем регулировки чувствительности анализатора спектра установить уровень наибольшей амплитуды гармоник ($n = 1$) соответствующим полной высоте шкалы прибора. Результаты измерений полезно свести в таблицу.

2. Аналогичные измерения следует выполнить для случаев периодических последовательностей видеоимпульсов с другими значениями скважности, а именно: $q = 4,5$; $3,5$; 2 . Изменять скважность при этом необходимо, варьируя период последовательности при значении $\tau = 10$ мкс.

Исследование спектров последовательностей радиоимпульсов.

1. Подать на входы осциллографа и анализатора спектра последовательность радиоимпульсов, сформированную на выходе амплитудного модулятора. При этом несущая частота сигнала f_0 берется равной 2,5 МГц, а длительность импульса τ остается прежней (10 мкс). Путем настройки анализатора спектра добиться на его экране четкого изображения гармоник анализируемого сигнала.

2. Радиосигналы с амплитудной модуляцией исследуются лишь для двух значений скважности (6 и 3,5 или 4,5 и 2). Цель измерений, выполняемых с помощью анализатора спектра, как и в предыдущем случае, заключается в определении структуры амплитудного спектра анализируемых сигналов. При этом в результате измерений удобно составить аналогичную таблицу для $n = 1, 2, 3, \dots, 10$, считая центральную частоту спектра радиосигнала соответствующей $n = 0$. Поскольку в настоящей работе не исследуется изменение абсолютного уровня амплитуд гармоник при переходе от одного сигнала к другому, по-прежнему всякий раз целесообразно регулировать чувствительность прибора, используя всю высоту шкалы сетки на экране.

Исследование соотношения между длительностью сигнала и шириной его спектра.

1. Получить на экране анализатора спектра спектр последовательности радиоимпульсов со следующими параметрами: $\tau = 10$ мкс, $f_0 = 2,5$ МГц, $q = 6$.

2. Измерить ширину спектра по уровню нулей его главного лепестка, не прибегая при этом ни к каким расчетам и не пользуясь соответствующими метками, имеющимися в анализаторе спектра. Для решения этой задачи должен быть использован только высокочастотный генератор.

3. Уменьшить вдвое длительность импульса τ и повторно измерить ширину спектра полученного сигнала в соответствии с прежним критерием.

Исходную длительность импульса и результаты измерений необходимо записать. Кроме того, следует зарисовать структуру амплитудного спектра в данном случае, обратив внимание на форму его огибающей. Интересно наблюдать за изменениями в структуре анализируемого спектра при увеличении периода повторения радиоимпульсов.

Содержание отчета

- табличное и графическое представления амплитудных спектров периодических последовательностей видеоимпульсов с параметрами τ и $q = 6; 4,5; 3,5; 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 10$);
- таблицы и графики амплитудных спектров последовательностей радиоимпульсов с параметрами τ, f_0 и $q = 6; 3,5$ или $4,5; 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 10$).

Перечисленные графики амплитудных спектров строятся на основе экспериментальных данных. При их построении необходимо выполнить нормировку значений амплитуд спектральных составляющих по отношению к гармонике с номером $n = 1$.

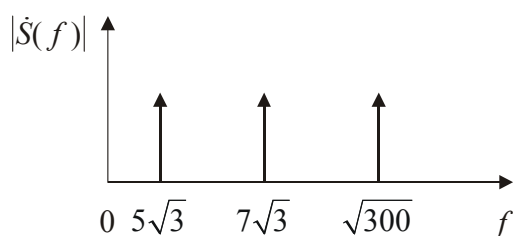
Для сопоставления полученных экспериментальных результатов с расчетными значениями необходимо выполнить следующее:

- определить значения амплитуд и фаз спектральных составляющих ($n = 1, 2, 3, \dots, 10$) периодических последовательностей прямоугольных видеоимпульсов с параметрами τ и $q = 6; 3,5$ или $4,5; 2$, используя с этой целью соотношения (1.2) и (1.4)–(1.6); при этом для упрощения расчетов рекомендуется рассмотреть последовательность, описываемую четной функцией;
- нанести на экспериментальные графики амплитудных спектров последовательностей видеоимпульсов соответствующие расчетные значения, осуществив их аналогичную нормировку.

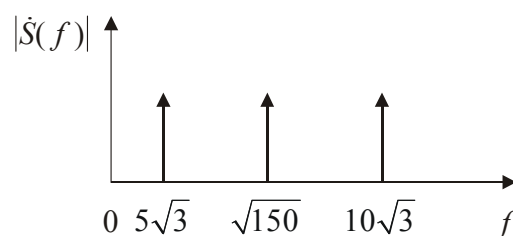
Кроме того, следует построить графики рассчитанных фазовых спектров (2 случая), а также необходимо привести результаты измерений ширины спектра сигнала при различной длительности импульсов с соответствующими выводами.

Контрольные вопросы

1. Как изменяются амплитудный и фазовый спектры импульсного сигнала при его задержке?
2. Как связаны между собой спектральная функция одиночного импульса и спектр периодической последовательности, порожденной данным импульсом?
3. У периодического сигнала изменилась полярность. Что произойдет с его спектром?
4. Изменится ли выражение (1.9), если нарушить принятое при его выводе условие $A(t) \geq 0$ и считать сигнал $A(t)$ биполярным?
5. Как будет выглядеть сигнал типа «меандр» без первой гармоники?
6. Чем отличаются амплитудные спектры двух последовательностей прямоугольных импульсов с одинаковыми периодами повторения T и длительностями импульсов, равными τ и $T - \tau$?
7. Найти период сигнала, спектр которого изображен на рисунке:



а



б

8. Указать вариант скважности периодической последовательности видеоимпульсов, для которой присутствуют все гармоники в спектре.
9. Описать все изменения, происходящие со спектром периодической последовательности прямоугольных импульсов при следующем изменении ее параметров:
 - а) длительность импульсов увеличилась в два раза, все остальные параметры остались без изменений;
 - б) период следования импульсов увеличился в два раза, все остальные параметры остались без изменений;
 - в) длительность и период следования импульсов одновременно уменьшились в два раза, амплитуда осталась без изменений;
 - г) длительность импульсов уменьшилась в два раза, их амплитуда увеличилась в два раза, а период следования остался без изменений.
10. Что понимают под шириной спектра периодической последовательности видео (радио)импульсов? От чего она зависит?
11. Зависит ли ширина спектра от скважности периодической последовательности импульсов?
12. Дана периодическая последовательность прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой U , длительностью импульсов τ и периодом $T = 2\tau$.

Изобразить сравнительные графики модуля спектра заданной последовательности и последовательности, в которой каждый второй видеоимпульс заменен радиоимпульсом с теми же амплитудой и длительностью и частотой заполнения ω_0 .

13. Если сигнал является периодическим, то спектр его дискретен. Справедливо ли обратное утверждение?
14. Всякий ли непериодический сигнал может быть представлен в виде интеграла Фурье?

2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИГНАЛОВ

Цель работы — изучение процедуры синтеза периодических сигналов с помощью ограниченного числа гармонических колебаний.

2.1. Теоретические сведения

В рамках настоящей лабораторной работы целесообразно взглянуть на представление сигнала $s(t)$ тригонометрическим рядом Фурье в вещественной или комплексной форме (см. работу 1) с более общих позиций.

В теории радиотехнических цепей и сигналов часто возникает необходимость представления заданного сигнала $s(t)$, определенного на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$ (в частном случае это может быть и периодический сигнал, тогда $t_1 \rightarrow -\infty$ и $t_2 \rightarrow \infty$), в виде линейной комбинации некоторой системы функций $\{\varphi_i(t)\}$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, а именно:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{C}_i \varphi_i(t), \quad (2.1)$$

где \dot{C}_i — постоянные коэффициенты. Очевидно, с целью устранения избыточности в представлении (2.1) естественно потребовать, чтобы выбранная система функций (базис разложения) являлась линейно независимой, т. е. чтобы ни одна из функций базиса не выражалась в виде линейной комбинации любых других функций. Однако соблюдение данного требования еще не обеспечивает возможности эффективного применения разложения (2.1), что обусловлено сложностью вычисления коэффициентов \dot{C}_i при заданных сигнале $s(t)$ и базисе $\{\varphi_i(t)\}$. Эту возможность создает известная из математики теорема о том, что всякая линейно независимая система функций может быть сделана ортогональной, т. е. такой, для которой справедливо следующее соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|\varphi_i\|^2, & i = j, \end{cases}$$

где $\|\varphi_i\|$ называется нормой функции $\varphi_i(t)$. С другой стороны, доказано, что всякая ортогональная система функций является линейно независимой [1], что и служит основанием рассматривать разложение (2.1) исключительно с использованием ортогональных базисов. Значение коэффициента \dot{C}_n в этом случае вычисляется таким образом:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n(t) dt. \quad (2.2)$$

Ряд (2.1), в котором коэффициенты \dot{C}_i определены в соответствии с формулой (2.2), называется обобщенным рядом Фурье по данной системе функций $\{\varphi_i(t)\}$. Следующий абзац является цитатой из [2].

Выбор наиболее рациональной ортогональной системы функций зависит от цели, преследуемой при разложении сложной функции в ряд. Среди разнообразных задач, требующих разложения сложного сигнала, наиболее важным является: 1) точное разложение на простейшие ортогональные функции; 2) аппроксимация сигналов, процессов или характеристик, когда требуется свести к минимуму число членов ряда при заданной допустимой погрешности. При первой постановке задачи наибольшее распространение получила система основных тригонометрических функций синусов и косинусов. Это объясняется рядом причин. Во-первых, гармоническое колебание является единственной функцией времени, сохраняющей свою форму при прохождении через любую линейную цепь с постоянными параметрами. Во-вторых, разложение сложного сигнала по синусам и косинусам позволяет использовать символический метод, разработанный для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи. По этим, а также и некоторым другим причинам гармонический анализ получил широкое распространение во всех отраслях современной науки и техники. При второй постановке задачи — приближенном разложении функции — применяются разнообразные ортогональные системы функций: полиномы Чебышева, Эрмита, Лагерра, Лежандра, функции Уолша и многие др.

Содержание данной лабораторной работы иллюстрирует процесс формирования (синтеза) некоторых периодических сигналов на основе ограниченного числа гармонических составляющих с частотами, кратными частоте повторения. Амплитуды и фазы гармоник могут варьироваться в необходимых пределах, определяемых структурами спектров соответствующих сигналов. Ниже кратко охарактеризованы исследуемые в работе сигналы и приведены их разложения в ряд Фурье (в вещественной форме).

Периодическое колебание прямоугольной формы (меандр) $s_1(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.1, где $\tau = T/2$. Легко видеть, что в силу четности функции $s_1(t)$ и отсутствия постоянной составляющей ее разложение в ряд Фурье в форме (1.1) будет содержать лишь косинусные компоненты, а именно:

$$s_1(t) = \frac{4E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right), \quad (2.3)$$

где E — амплитуда меандра, $\omega_1 = 2\pi/T$ — круговая частота основной гармоники.

Периодическое колебание пилообразной формы $s_2(t)$ представлено на рис. 2.2. Оно, подобно предыдущему сигналу, не имеет постоянной составляющей и, в отличие от него, является нечетной функцией времени.

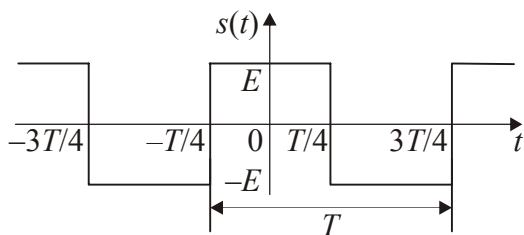


Рис. 2.1

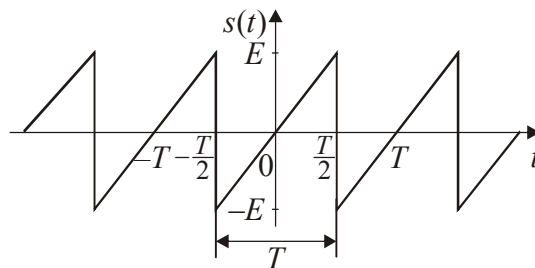


Рис. 2.2

Можно показать, что его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$s_2(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots \right). \quad (2.4)$$

Периодическое колебание треугольной формы $s_3(t)$ изображено на рис. 2.3, особенности его представления рядом Фурье аналогичны случаю 1, а разложение таково:

$$s_3(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots \right). \quad (2.5)$$

Амплитудно-модулированное колебание (АМК) с однотоновой модуляцией $s_4(t)$ имеет следующее аналитическое выражение:

$$s_4(t) = A_0 [1 + m \cos(\Omega t + \Psi)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.6)$$

где A_0 , ω_0 , φ_0 — амплитуда, круговая частота и начальная фаза несущего колебания соответственно; $0 \leq m \leq 1$ — коэффициент амплитудной модуляции; Ω , Ψ — круговая частота и начальная фаза модулирующего гармонического колебания. В частном случае при нулевых значениях параметров Ψ и φ_0 формула (2.6) может быть преобразована к виду

$$s_4(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (2.7)$$

Структура АМК с однотоновой модуляцией изображена на рис. 2.4.

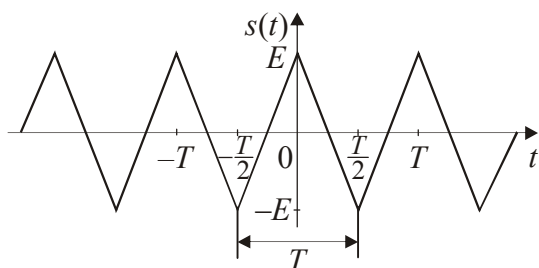


Рис. 2.3

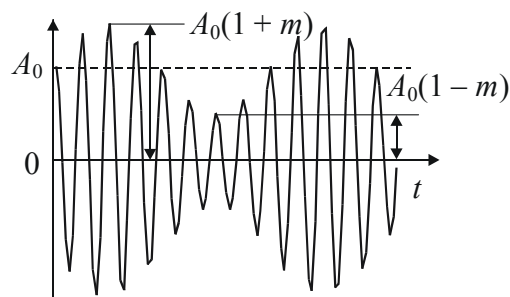


Рис. 2.4

Колебание с однотоновой угловой модуляцией (УМ) $s_5(t)$ в общем случае описывается таким образом:

$$s_5(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \beta \sin(\Omega t + \Psi) + \varphi_0], \quad (2.8)$$

где β — индекс УМ, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в формуле (2.6). В случае УМ (частотной или фазовой) с малой глубиной ($\beta \ll 1$) выражение (2.8) при нулевых значениях начальных фаз Ψ и φ_0 может быть представлено в следующей форме:

$$s_5(t) \approx A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 \beta}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t] + \frac{A_0 \beta}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \pi]. \quad (2.9)$$

Если же условие малости глубины модуляции не выполняется, то колебание с однотоновой УМ может быть разложено в бесконечный ряд:

$$s_5(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_0 J_k(\beta) \cos((\omega_0 + k\Omega)t). \quad (2.10)$$

Возможная структура колебания с однотоновой УМ (2.8) изображена на рис. 2.5.

Периодическая последовательность δ -функций $s_6(t)$, широко используемых в теоретической радиотехнике, представлена на рис. 2.6.

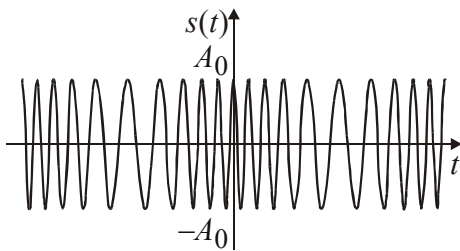


Рис. 2.5

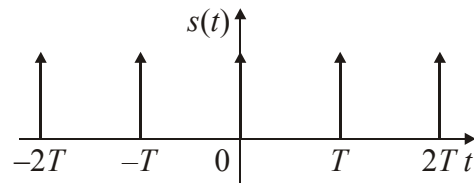


Рис. 2.6

Если следовать критериям, которым должен удовлетворять периодический сигнал, разлагаемый в ряд Фурье, то последовательность $s_6(t)$ в полной мере им не соответствует, поскольку δ -функция представляет собой, по существу, разрыв второго рода [2]. Аналитическое выражение для последовательности $s_6(t)$ имеет вид

$$s_6(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t + kT), \quad (2.11)$$

где T — период последовательности. Однако формальное применение разложения в ряд Фурье в виде (1.1) к рассматриваемой последовательности (2.11) приводит к приемлемому результату, а именно:

$$s_6(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \omega_n t. \quad (2.12)$$

Подобный подход к представлению сигналов рядом и интегралом Фурье используется в теории обобщенных функций, к которым принадлежит, в частности, и δ -функция [2].

Из соотношения (2.12) следует, что переменная составляющая $s_{6\sim}(t)$ периодической последовательности δ -функций $s_6(t)$ может быть записана в виде

$$s_{6\sim}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{T} n t. \quad (2.13)$$

2.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка реализована в виде компьютерной программы, позволяющей синтезировать произвольные периодические сигналы из 12 гармоник путем задания их амплитуд и начальных фаз. Вид экрана программы показан на рис. 2.7.

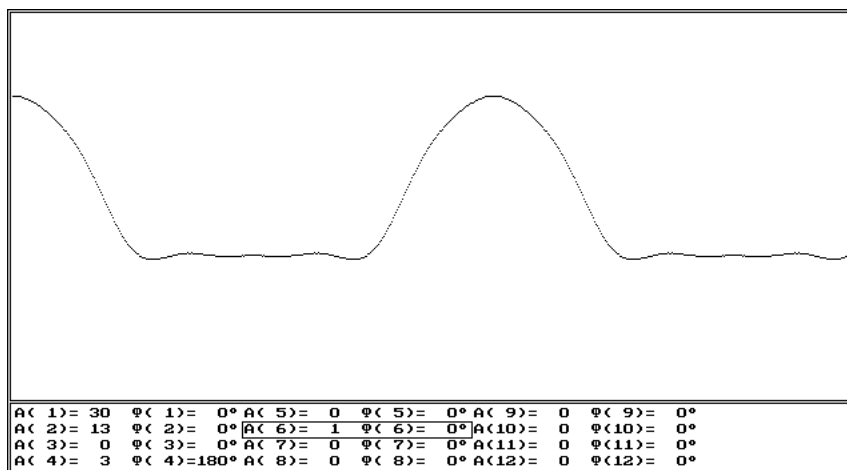


Рис. 2.7

В верхней части экрана отображается график сформированного сигнала, в нижней выводятся амплитуды и фазы гармоник. В каждый момент возможна регулировка параметров только одной гармоники — ее амплитуда и фаза выделены рамкой (на рис. 2.7 это гармоника 6). Для выбора редактируемой гармоники служат следующие клавиши:

- **Tab** — выбор следующей гармоники;
- **Shift + Tab** — выбор предыдущей гармоники;
- **1...9** — выбор гармоники с соответствующим номером.

Для настройки амплитуды и фазы редактируемой гармоники предназначены следующие клавиши:

- **Стрелка вверх** — увеличение амплитуды выбранной гармоники на 1;
- **Стрелка вниз** — уменьшение амплитуды выбранной гармоники на 1;
- **Page Up** — увеличение амплитуды выбранной гармоники на 10;
- **Page Down** — уменьшение амплитуды выбранной гармоники на 10;

- **Стрелка вправо** — увеличение фазы выбранной гармоники на 1° ;
- **Стрелка влево** — уменьшение фазы выбранной гармоники на 1° ;
- **Ctrl + Стрелка вправо** — увеличение фазы выбранной гармоники на 10° ;
- **Ctrl + Стрелка влево** — уменьшение фазы выбранной гармоники на 10° .

Кроме того, для управления программой используются следующие клавиши:

- **Escape** — завершение работы с программой;
- **R** — сброс в исходное состояние, при котором устанавливаются нулевые амплитуды и фазы всех гармоник. С процедуры сброса следует начинать синтез каждого очередного сигнала.

Максимальная амплитуда сформированного сигнала, при которой он помещается на экране, зависит от видеорежима компьютера и для разрешения 640×350 точек составляет примерно 60 единиц.

2.3. Задание и указания к выполнению работы

Цель экспериментальной части программы работы состоит в формировании рассмотренных в 2.1 сигналов $s_1(t) \dots s_6(t)$ с помощью гармонических колебаний, число которых ограничено (в данном случае не более 12) и которые имеют кратные частоты, а также допускают регулировку амплитуд и начальных фаз.

После синтеза каждого сигнала следует зарисовать полученный результат (с соблюдением числа и уровня наблюдаемых пульсаций) и записать установленные при синтезе значения амплитуд и начальных фаз гармоник.

Далее приводятся дополнительные комментарии по поводу синтеза отдельных сигналов.

Последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 2.1). Амплитуду первой гармоники (множитель перед скобкой в (2.3)) следует выбрать исходя из желаемой амплитуды E результирующего сигнала. Следует обратить внимание на то, что в спектре присутствуют только гармоники с нечетными номерами, а множители при косинусах могут быть как положительными, так и отрицательными.

Внимание! При синтезе данного сигнала, помимо конечного результата, следует зарисовать все *промежуточные* этапы: косинусоидальное колебание первой гармоники, сумму первой и третьей гармоник и т. д.

Последовательность пилообразных импульсов (см. рис. 2.2). Данный сигнал по сравнению с предыдущим имеет следующие особенности: во-первых, ненулевую амплитуду в его спектре имеют *все* гармоники, во-вторых, слагаемые ряда Фурье (2.4) представляют собой не косинусы, а *синусы*. Амплитуду первой гармоники, как и в предыдущем случае, следует выбирать исходя из желаемой амплитуды E результирующего сигнала.

Последовательность треугольных импульсов (см. рис. 2.3). Так же, как и последовательность прямоугольных импульсов, данный сигнал содержит только гармоники с нечетными номерами. Следует также обратить внимание на закон зависимости амплитуды от номера гармоники. Амплитуду первой гармоники, как и в предыдущих случаях, следует выбирать исходя из желаемой амплитуды E результирующего сигнала.

Сигнал с гармонической АМ (см. рис. 2.4). Синтез сигнала следует произвести для двух значений коэффициента модуляции: $m = 0,5$ и $m = 1$. В качестве несущего колебания удобно использовать 11-ю гармонику, а частоту модулирующего сигнала Ω сделать равной частоте первой гармоники. Амплитуду несущего колебания A_0 необходимо выбрать так, чтобы синтезированное колебание помещалось на экране. При этом следует исходить из того, что пиковый уровень однотонового АМ-сигнала составляет $A_0(1 + m)$.

Сигнал с гармонической УМ (см. рис. 2.5). Синтез выполняется для двух значений индекса модуляции β : $\beta = 0,2$ и одного из значений, приведенных в таблице, по указанию преподавателя.

$J_k(\beta)$	β				
	1	2	2,4048	3	4
$J_0(\beta)$	0,7652	0,2239	0	-0,2601	-0,3971
$J_1(\beta)$	0,4401	0,5767	0,5191	0,3391	-0,0660
$J_2(\beta)$	0,1149	0,3528	0,4318	0,4861	0,3641
$J_3(\beta)$	0,0196	0,1289	0,1990	0,3091	0,4302
$J_4(\beta)$	0,0025	0,0340	0,0647	0,1320	0,2811
$J_5(\beta)$	0,0002	0,0070	0,0164	0,0430	0,1321
$J_6(\beta)$	0,0000	0,0012	0,0034	0,0114	0,0491

При $\beta = 0,2$ синтез производится по формуле (2.9), при этом, как и в случае синтеза АМ-сигнала, в качестве несущего колебания удобно использовать 11-ю гармонику, а частоту модулирующего сигнала Ω сделать равной частоте первой гармоники. Полезно сначала синтезировать АМ-сигнал с коэффициентом модуляции $m = \beta$, а затем внести в параметры гармоник необходимые изменения, соответствующие различиям между формулами (2.9) и (2.7). Вследствие малого индекса модуляции в данном случае угловая модуляция не видна визуально; наблюдается лишь практически полное исчезновение амплитудной модуляции.

При выборе значения β из таблицы синтез выполняется по точной формуле (2.10), при этом в качестве несущего колебания может использоваться 6-я или 7-я гармоника, а частота модулирующего сигнала Ω , как и раньше, выбирается равной частоте первой гармоники. Значения необходимых для формирования сигнала функций Бесселя с положительными индексами приведены в таблице, а функции с отрицательными индексами связаны с ними следующим образом: $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$.

Значение амплитуды колебаний A_0 следует выбирать таким, чтобы синтезированное колебание помещалось на экране, занимая его большую часть по высоте.

Периодическая последовательность δ -функций (см. рис. 2.6). В точках расположения пиков сформированного сигнала все 12 косинусоидальных колебаний складываются синфазно, поэтому одинаковые амплитуды всех гармоник (см. формулу (2.13)) следует выбрать исходя из максимального уровня сигнала, при котором он укладывается на экране по вертикали.

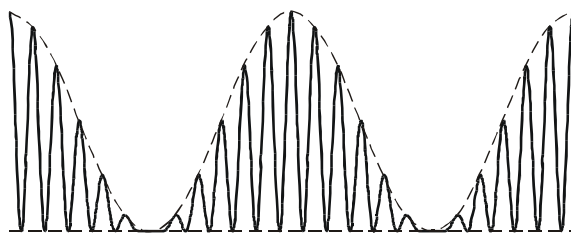
Содержание отчета

- изображения всех синтезированных сигналов;
- изображения всех промежуточных этапов синтеза последовательности прямоугольных импульсов;
- графики амплитудных и фазовых спектров перечисленных ранее сигналов, построенные в соответствии с выражениями, согласно которым осуществлялся синтез; следует ограничиться 12 гармониками;
- вывод одной из формул (2.3), (2.4) или (2.5), соответствующей сигналу, изображение структуры которого фиксировалось на каждом этапе синтеза; вывод делается согласно соотношению (1.1) из описания предыдущей лабораторной работы;
- вывод формулы (2.9), выполненный исходя из выражения (2.8) при условии, что $\beta \ll 1$; указание конкретных значений начальных фаз Ψ и φ_0 в формуле (2.8), которые при указанном условии трансформируют ее в соотношение (2.9).

Контрольные вопросы

1. Если сравнить спектральные представления периодических колебаний прямоугольной и треугольной форм (соотношения (2.3) и (2.5)), то амплитуды соответствующих гармоник в последнем случае убывают с ростом частоты существенно быстрее. Какую качественную трактовку можно дать этому факту?
2. Какую картину следует ожидать на экране осциллографа, если при синтезе АМК согласно выражению (2.7) было взято значение $m > 1$?
3. Является ли АМК с однотоновой модуляцией периодическим сигналом?
4. Синтезированное в соответствии с формулой (2.9) колебание с однотоновой УМ имеет также и некую амплитудную модуляцию. Почему? Как можно уменьшить ее глубину?
5. Чему равно отношение максимальной и минимальной мгновенных частот у синтезированного колебания с однотоновой УМ?

6. Каким образом можно синтезировать сигнал вида:



7. Как нужно изменить значения амплитуд и начальных фаз гармоник, чтобы сдвинуть синтезированную последовательность прямоугольных импульсов на $T/4$ вправо? На $5T/4$ вправо?
8. Какой вид примет сигнал с однотоновой АМ, если из него удалить несущее колебание?
9. Какое (какие) из синтезированных колебаний синтезировано с наибольшей точностью? Ответ обосновать.
10. После синтеза последовательности прямоугольных видеоимпульсов с отношением $T/\tau = 2$ выключена первая гармоника. Изобразить получившийся сигнал.
11. В лабораторной работе предусмотрен синтез пилообразного напряжения. Какие изменения нужно внести в соответствующее выражение, чтобы изменить направление наклона «пилы»?
12. После синтеза АМ-колебания уменьшена до уровня боковых гармоник амплитуда несущей гармоники. Изобразить получившийся сигнал.
13. Действительно ли АМК с однотоновой модуляцией содержит в себе три гармонических колебания различных частот или эти составляющие есть математическая абстракция?
14. Каким должен быть набор гармоник для синтеза периодической последовательности «пачек» из двух δ -функций:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(t - kT) + \delta(t - kT - T/4))?$$

15. Найти аналитическую формулу для сигнала, содержащего конечное число гармоник ($n = 1, 2, \dots, N$) с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами.
16. Как изменится периодическая последовательность пилообразных импульсов при инверсии знаков у начальных фаз всех гармоник?

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Цель работы — изучение одномерных функций распределения вероятностей и плотностей вероятностей значений случайных сигналов.

3.1. Теоретические сведения

Случайные сигналы могут быть стационарными и нестационарными.

Для стационарного сигнала усредненные характеристики не зависят от выбора начального отсчета времени. В данной работе рассматриваются стационарные сигналы.

Основной характеристикой случайных сигналов являются функции распределения вероятностей их значений. По функциям распределения могут быть определены все другие характеристики сигнала, в том числе его среднее значение, дисперсия, корреляционная функция, вероятность попадания в заданный интервал значений.

Одномерная функция распределения вероятностей $F(U)$ случайного сигнала $\xi(t)$ есть вероятность того, что значение сигнала не превысит уровень U :

$$F(U) = P(\xi \leq U).$$

Основные свойства функции $F(U)$:

- 1) $0 \leq F(U) \leq 1$, причем $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$;
- 2) $F(U_2) \geq F(U_1)$ при $U_2 > U_1$, т. е. $F(U)$ — неубывающая функция;
- 3) $F(U_2) - F(U_1) = P(U_1 < \xi \leq U_2)$ — вероятность попадания случайного сигнала $\xi(t)$ в полуоткрытый интервал $(U_1, U_2]$.

Для функции распределения $F(U)$, имеющей производную, вводят понятие плотности вероятностей

$$p(U) = \frac{dF(U)}{dU}. \quad (3.1)$$

Основные свойства функции $p(U)$:

- 1) размерность $p(U)$ равна обратной величине размерности случайного сигнала $[p(U)] = [\xi]^{-1}$;
- 2) $p(U) \geq 0$;
- 3) функция распределения определяется выражением

$$F(U) = \int_{-\infty}^U p(U_1) dU_1; \quad (3.2)$$

- 4) вероятность попадания случайной величины в интервал $(U_1, U_1 + dU)$ равна $\int_{U_1}^{U_1+dU} p(U_1) dU_1 = p(U) dU$.

Для исследуемых в работе сигналов предполагается выполнение условия эргодичности. Из него следует, что средние параметры случайного процесса, определенные по множеству реализаций, с единичной вероятностью равны средним параметрам, определенным по одной реализации.

Для таких сигналов одномерная функция распределения $F(U)$ равна отношению времени, в течение которого значения сигналов не превышают заданный уровень U , ко всему времени T измерения сигнала (3.2) (рис. 3.1, а):

$$F(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum \Delta t \{ \xi(t) \leq U \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dots + (t_2 - t_1) + (t_4 - t_3) + \dots}{T}.$$

Указанное свойство используется в измерительном приборе для измерения функции распределения. Структурная схема измерителя приведена на рис. 3.1, в. Опорное напряжение U и случайный сигнал $\xi(t)$ подаются на два входа компаратора (сравнивающего устройства). Если $\xi(t) > U$, напряжение на выходе компаратора равно нулю, а при $\xi(t) \leq U$ оно равно U_m (рис. 3.1, б).

Выход компаратора соединен с интегратором, выполненным в виде RC -цепи. При $\Delta f RC \gg 1$, где Δf — ширина спектра случайного сигнала, напряжение на выходе компаратора равно $U_m F(U)$.

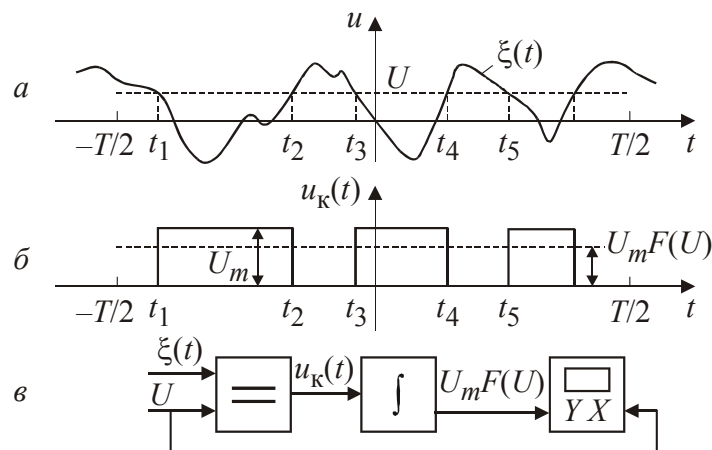


Рис. 3.1

Напряжение с выхода интегратора подается на вход «Y» осциллографа, а опорное напряжение на вход «X». При медленном изменении опорного напряжения U на экране осциллографа появляется изображение $F(U)$ — функции распределения вероятностей значений исследуемого случайного сигнала $\xi(t)$.

Метод измерения плотности вероятности основан на формуле численного дифференцирования функции $F(U)$ (3.1):

$$p(U) = \frac{dF(U)}{dU} \approx \frac{F(U + \Delta U) - F(U)}{\Delta U} \text{ для малых } \Delta U.$$

Если ΔU мало и постоянно, то $p(U)$ пропорционально разности $F(U + \Delta U) - F(U)$, т. е. разности напряжений на выходах двух измерителей функции распределения сигналов $\xi(t)$ при опорных напряжениях $U + \Delta U$ и U соответственно на первом и втором измерителях (рис. 3.2).

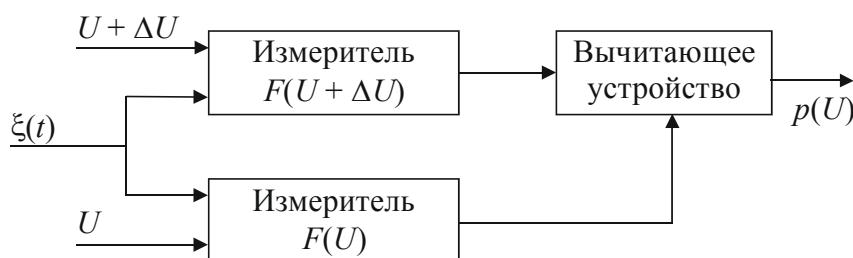


Рис. 3.2

В работе исследуются функции распределения и плотности вероятности для следующих случайных сигналов.

Треугольный сигнал со случайной начальной фазой (рис. 3.3, а). Он имеет равномерное распределение вероятностей значений напряжения (рис. 3.3, б, в), описываемое следующими выражениями:

$$p(U) = \begin{cases} \frac{1}{U_2 - U_1}, & U_1 \leq U \leq U_2, \\ 0, & U \notin [U_1, U_2], \end{cases} \quad F(U) = \begin{cases} 0, & U < U_1, \\ \frac{U - U_1}{U_2 - U_1}, & U_1 \leq U \leq U_2, \\ 1, & U > U_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

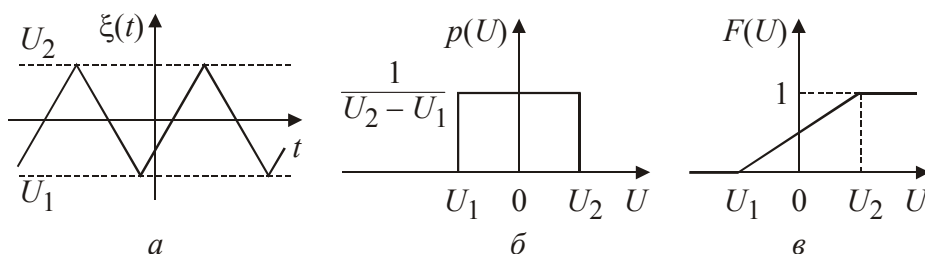


Рис. 3.3

Шум усилителя. Он имеет гауссовскую функцию распределения (рис. 3.4, а, б). Для него

$$p(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(U - U_{\text{ср}})^2}{2\sigma^2}\right], \quad F(U) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{U - U_{\text{ср}}}{\sigma}\right), \quad (3.4)$$

где σ^2 — дисперсия, $U_{\text{ср}}$ — среднее значение напряжения, $\Phi_0(x)$ — интеграл ошибок, значения которого табулированы.

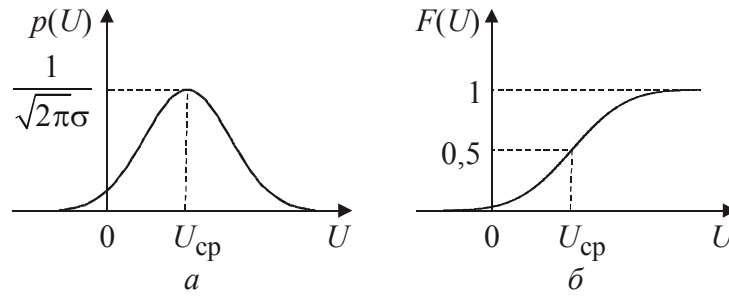


Рис. 3.4

Напряжение $\xi(t)$ на выходе амплитудного детектора. На вход детектора подается сумма двух сигналов: узкополосного шума $\xi_{\text{ш}}(t) = U_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ с гауссовским законом распределения вероятностей значений $\xi_{\text{ш}}$ и детерминированного гармонического сигнала $\xi_0 = U_c \cos \omega_0 t$ с постоянной амплитудой U_c ; $\xi(t)$ — огибающая суммы этих двух сигналов.

Напряжение $\xi(t)$ имеет функцию распределения, соответствующую обобщенному закону Рэлея (рис. 3.5, а, б):

$$p(U) = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ \frac{U}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{U^2 + U_c^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{UU_c}{\sigma^2}\right), & U \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где σ^2 — дисперсия узкополосного шума $\xi_{\text{ш}}(t)$, U_c — амплитуда гармонического сигнала, $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Она табулирована; кроме того, $I_0(0) = 1$; $I_0(x) \rightarrow e^x / \sqrt{2\pi x}$ при $x \rightarrow \infty$.

При $U_c > 3\sigma$ обобщенное распределение Рэлея приближается к гауссовскому распределению (рис. 3.5, а, б).

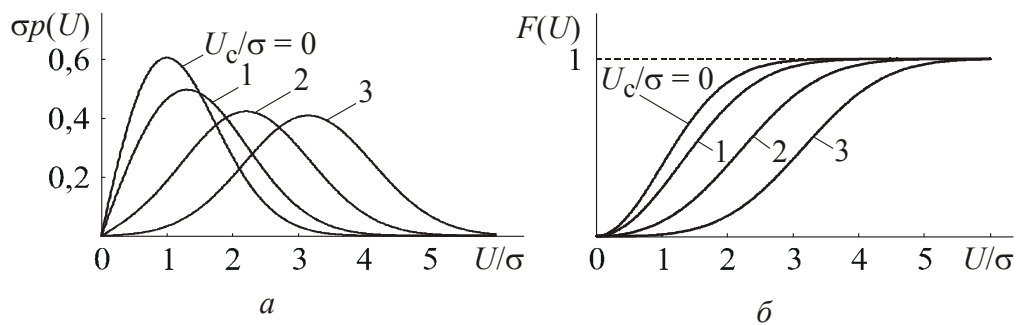


Рис. 3.5

Гармонический сигнал с постоянной амплитудой и случайной фазой. $\xi(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, где U_m и ω — постоянные амплитуда и угловая частота, φ — случайная фаза, распределенная равномерно на интервале $(-\pi, +\pi]$,

т. е. плотность распределения фазы $p_\varphi(\varphi)$ и функция распределения фазы $F_\varphi(\varphi)$ имеют вид:

$$p_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < \varphi \leq \pi, \\ 0, & \varphi \notin (-\pi, +\pi]. \end{cases} \quad F_\varphi(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \leq -\pi, \\ \frac{\varphi + \pi}{2\pi}, & -\pi < \varphi \leq \pi, \\ 1, & \varphi > \pi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Найдем функцию распределения напряжения случайного сигнала $\xi(t)$. Это стационарный сигнал, поэтому можно положить $t = 0$. Тогда $\xi = U_m \cos \varphi$. Из графика функции $\xi(\varphi)$ (рис. 3.6, а) видно, что вероятность события $\xi \leq U$ (для $|U| \leq U_m$) равна вероятности события $Y \in \{(-\pi, -\Phi) \text{ или } (\Phi, \pi)\}$, где $\Phi = \arccos \frac{U}{U_m}$, т. е. $P(\xi \leq U) = P(-\pi < \varphi \leq -\Phi) + P(\Phi < \varphi \leq \pi)$.

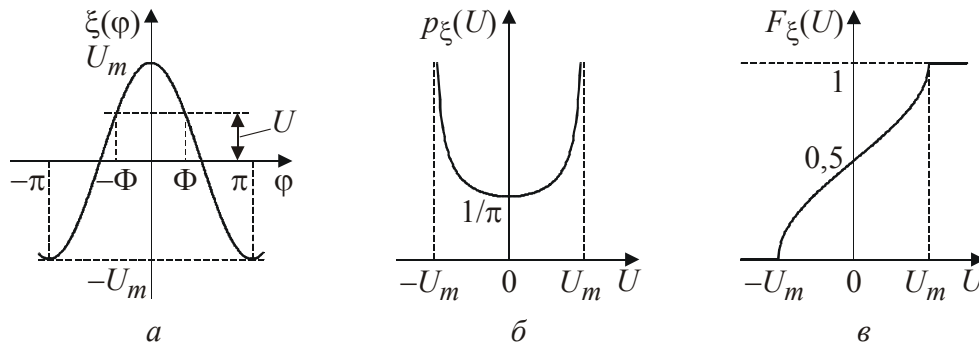


Рис. 3.6

Используя определение функции распределения и выражения (3.6), последнее равенство можно записать в виде

$$F_\xi(U) = F_\varphi(-\Phi) + 1 - F_\varphi(\Phi) = \frac{-\Phi + \pi}{2\pi} + 1 - \frac{\Phi + \pi}{2\pi} = 1 - \frac{\Phi}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{U}{U_m} \right)$$

для $|U| \leq U_m$.

Из рис. 3.6, а видно также, что $F_\xi(U) = \begin{cases} 1, & U > U_m, \\ 0, & 0 < -U_m. \end{cases}$

Плотность распределения вероятностей значений ξ :

$$p_\xi(U) = \frac{dF_\xi(U)}{dU} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{U_m^2 - U^2}}, & |U| < U_m, \\ 0, & |U| \geq U_m. \end{cases} \quad (3.7)$$

Графики функций $F_\xi(U)$ и $p_\xi(U)$ приведены на рис. 3.6, б и 3.6, в.

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей функция распределения суммы независимых случайных величин с близкими значениями дисперсий стремится к гауссовскому закону распределения при увеличении числа слагаемых, независимо от вида функций распределения слагаемых.

Аналитическое выражение для функции распределения суммы сигналов удобно получать через характеристическую функцию.

Характеристическая функция $\theta(x)$ сигнала $\xi(t)$ связана с плотностью распределения вероятностей $p(\xi)$ преобразованием Фурье

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{j\xi x} d\xi; \quad p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) e^{-j\xi x} dx. \quad (3.8)$$

Для суммы случайных величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ характеристическая функция связана с совместной плотностью распределения вероятностей величин

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{jx(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Для независимых случайных величин

$$p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = p(\xi_1) p(\xi_2) \dots p(\xi_n), \quad (3.9)$$

а потому

$$\theta = \theta_1(x) \theta_2(x) \dots \theta_n(x) = \prod_{n=1}^N \theta_n(x), \quad (3.10)$$

где $\theta_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\xi_n x} p(\xi_n) d\xi_n$ — характеристическая функция сигнала $\xi_n(t)$.

Последовательное использование зависимостей (3.10), (3.9) и (3.8) позволяет получить плотность распределения вероятностей суммы независимых сигналов по известным плотностям распределения отдельных слагаемых.

Найдем распределение суммы двух независимых случайных сигналов с одинаковым равномерным распределением. Пусть $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные сигналы с плотностями распределения вероятностей

$$p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2U_m}, & |\xi_1| < U_m, \\ 0, & |\xi_1| \geq U_m; \end{cases} \quad p(\xi_2) = \begin{cases} \frac{1}{2U_m}, & |\xi_2| < U_m, \\ 0, & |\xi_2| \geq U_m. \end{cases}$$

Характеристические функции сигналов ξ_1 и ξ_2 одинаковы и равны

$$\theta_2(x) = \theta_1(x) = \int_{-U_m}^{U_m} e^{jx\xi_1} \frac{1}{2U_m} d\xi_1 = \frac{\sin(U_m x)}{U_m x}.$$

Согласно выражению (3.10) характеристическая функция суммы сигналов

$$\theta(x) = \theta_1(x)\theta_2(x) = \left[\frac{\sin(U_m x)}{U_m x} \right]^2.$$

Плотность распределения вероятностей суммы сигналов

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \theta(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} \left[\frac{\sin(U_m x)}{U_m x} \right]^2 dx = \begin{cases} \frac{2U_m - |\xi|}{(2U_m)^2}, & |\xi| < 2U_m, \\ 0, & |\xi| \geq 2U_m. \end{cases}$$

Зависимости $p(\xi_{1,2})$ и $p(\xi)$ приведены на рис. 3.7.

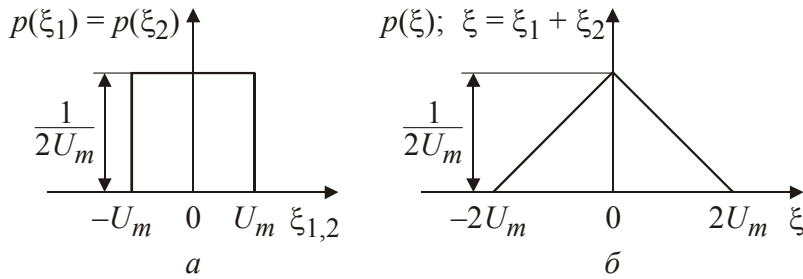


Рис. 3.7

Для сигнала $\xi(t) = \sum_{n=1}^N U_m \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ в виде суммы гармонических колебаний с равными амплитудами $U_m = 1$ и независимыми случайными фазами φ_n , распределенными в интервале $(-\pi, +\pi]$, плотность распределения вероятностей $p(\xi)$ была рассчитана численным методом для числа слагаемых $N = 1, 2, 3, 4$.

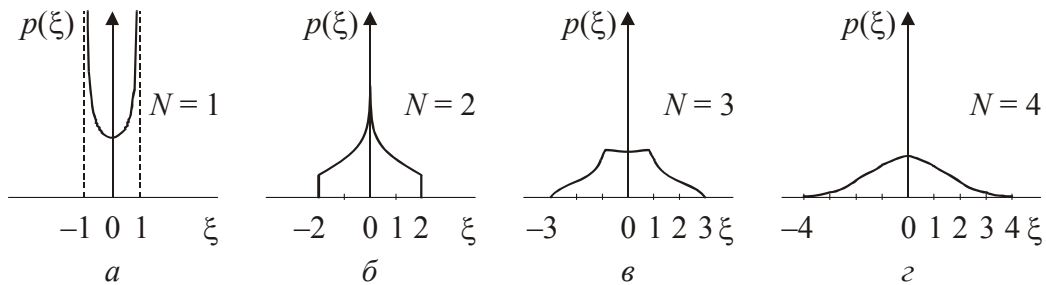


Рис. 3.8

Графики зависимостей $p(\xi)$ приведены на рис. 3.8. Видно, что с увеличением числа слагаемых плотность распределения их суммы стремится к гауссовскому распределению (ср. с рис. 3.4 при $U_{cp} = 0$).

3.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из отдельного макета и двух осциллографов С1–83 (I) и С1–83 (II).

В отдельном макете находятся генератор исследуемых случайных сигналов, а также измерители функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей. Структурная схема макета установки (рис. 3.9) изображена на его передней панели.

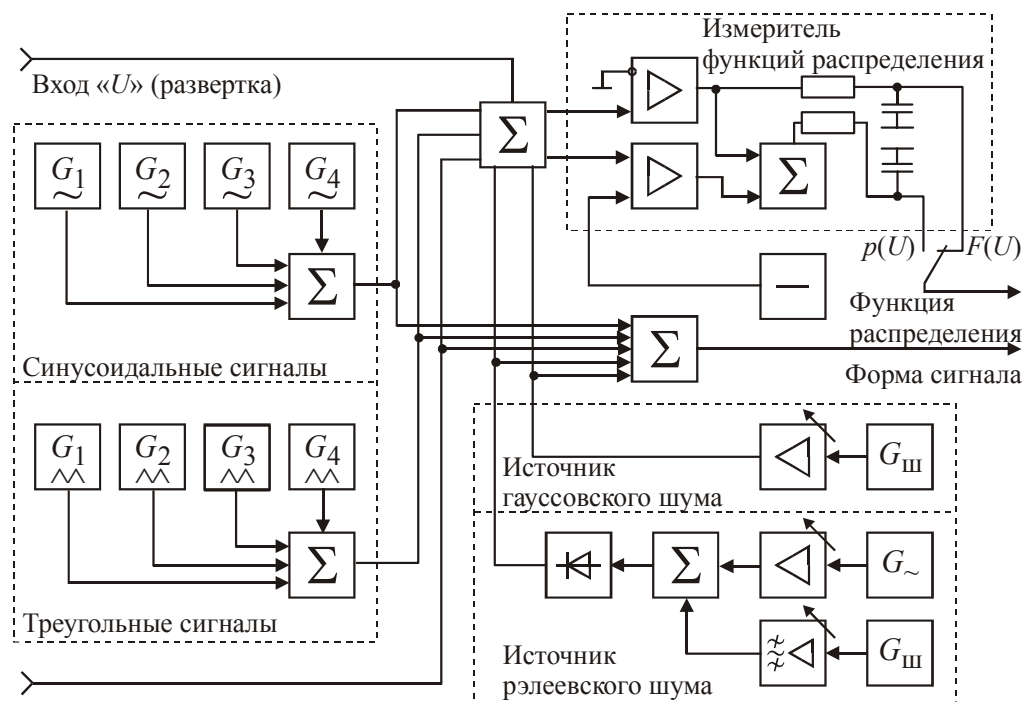


Рис. 3.9

С выхода «—┐» осциллографа С1–83 (I) снимается в качестве опорного пилообразное напряжение горизонтальной развертки и подается в лабораторный макет на «Вход U » для использования в качестве аргумента « U » функции распределения.

Выход «Функция распределения» установки соединяется с входом « Y » осциллографа С1–83 (I). На экране осциллографа появляется изображение функции распределения $F(U)$ или плотности распределения вероятностей $p(U)$. Выбор зависит от положения переключателя « $F(U) — p(U)$ » на передней панели экспериментальной установки.

Выход «Форма сигнала» установки соединяется со входом « Y » осциллографа С1–83 (II), на экране которого наблюдают изображение исследуемого сигнала.

В макете установки имеются следующие источники сигналов:

1. Четыре генератора гармонических колебаний различных частот.
2. Четыре генератора сигналов треугольной формы различных частот.

3. Формирователь шума с распределением по обобщенному закону Рэлея.
4. Генератор шума с гауссовским законом распределения.

Имеется также вход для внешнего сигнала.

Выходы всех источников сигналов подключены через сумматор Σ ко входу измерителя функций распределения. Каждый источник сигнала имеет тумблер включения и регулировку уровня (только часть регуляторов уровня выведена на переднюю панель).

3.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Подготовить установку к измерениям. На осциллографе С1–83 (I) установить коэффициент развертки 0,1 с/дел, коэффициент отклонения 0,2 В/дел. Включить осциллографы и экспериментальную установку. В установке выключить все генераторы (ручки тумблеров — вниз), что соответствует нулевому сигналу на входе измерителя функции распределения; тумблер «Функции распределения» — в положении $F(U)$. На экране С1–83 (I) появится изображение ступенчатой функции

$$F(U) = \begin{cases} 1, & U \geq 0, \\ 0, & U < 0. \end{cases}$$

Регулировкой смещения и коэффициента отклонения осциллографа установить изображение так, чтобы скачок находился в центре экрана и величина скачка была равна 3–4 см.

2. Откалибровать изображение на экране С1–83 (I). Включить генератор треугольного сигнала № 4 (ручка тумблера — вверх). На экране С1–83 (I) переход от $F(U) = 0$ к $F(U) = 1$ будет иметь вид наклонной линии (см. рис. 3.3, в). Точки излома соответствуют минимальному U_1 и максимальному U_2 значениям треугольного сигнала. Измерить расстояние по горизонтали между точками излома — L , дел. На экране осциллографа С1–83 (II) получить изображение треугольного сигнала (см. рис. 3.3, а) и измерить его размах $(U_2 - U_1)$, В. Масштаб по горизонтали для изображения на экране осциллографа С1–83 (I) равен $(U_2 - U_1)/L$, В/дел. Данный масштаб является одинаковым для всех получаемых в дальнейшем графиков функций распределения $F(U)$ и плотностей вероятности $p(U)$.

Переключатель «Функции распределения» в установке перевести в положение « $p(U)$ ». На экране С1–83 (I) появится П-образное изображение, соответствующее равномерному распределению вероятности, характерному для треугольного сигнала (см. рис. 3.3, б).

Если изображение по вертикали занимает ΔL делений, то масштаб изображения $p(U)$ по вертикали составит $1/[(U_2 - U_1)\Delta L]$, (В·дел)⁻¹. Данный

масштаб является одинаковым для всех получаемых в дальнейшем графиков плотностей вероятности $p(U)$.

Определять вертикальный масштаб для графиков функций распределения нет необходимости — он очевиден благодаря предельным свойствам функций распределения ($\lim_{U \rightarrow -\infty} F(U) = 0$ и $\lim_{U \rightarrow \infty} F(U) = 1$).

В дальнейшем коэффициент отклонения осциллографа С1–83 (I) не изменять.

3. Исследовать функции распределения и плотности вероятностей мгновенных значений для следующих сигналов:

- гармонического сигнала № 4 при двух значениях его амплитуды;
- треугольного сигнала № 4 при двух значениях его амплитуды;
- гауссовского шума при двух значениях его дисперсии;
- рэлеевского шума при нулевом и ненулевом значениях амплитуды детерминированного сигнала.

Указанные варьируемые параметры выбрать самостоятельно таким образом, чтобы на графиках было хорошо заметно их влияние на форму функции распределения и плотности вероятности.

Исследование производится следующим образом. В исходном положении все генераторы выключены. Включить генератор исследуемого сигнала. По изображению сигнала на экране С1–83 (II) убедиться, что включен требуемый сигнал. По изображению на экране С1–83 (II) или по вольтметру, подключенному к выходу «Форма сигнала» установки (параллельно входу осциллографа), определить диапазон регулировки уровня исследуемого сигнала (амплитуда для гармонического и треугольного, эффективное значение для шумов). В этом диапазоне выбрать два значения уровня исследуемого сигнала и для каждого из них зарисовать с экрана С1–83 (I) изображения функций $p(U)$ и $F(U)$ с учетом ранее определенных масштабов по осям.

4. Исследовать сходимость к гауссовскому закону распределения суммы независимых случайных сигналов. Выяснить, для какого из двух исходных законов распределения — равномерного (треугольный сигнал) или вида $1 - \frac{1}{\pi} \arccos x$ (гармонический сигнал) — характерна более быстрая сходимость.

Для суммы гармонических сигналов исследование производится следующим образом. В исходном положении все генераторы выключены. Включить генератор синусоидального сигнала № 1 и зарисовать график функции распределения $F(U)$. Затем, не выключая генератор этого сигнала, включить генератор синусоидального сигнала № 2 и зарисовать график функции распределения $F(U)$ для суммы двух синусоидальных сигналов. Далее поочередно дополнительно включить генераторы синусоидальных сигнала-

лов № 3 и № 4, каждый раз зарисовывая графики функции распределения суммарного сигнала.

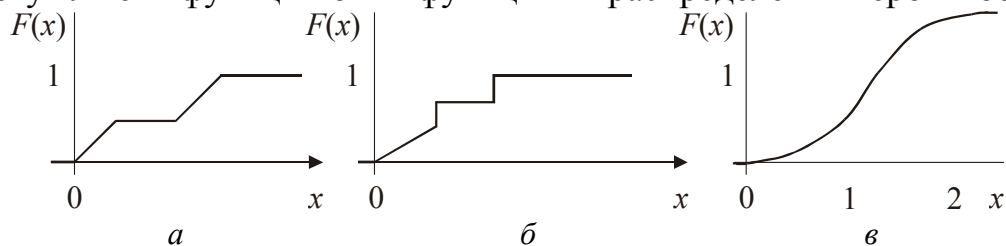
Для суммы треугольных сигналов исследование производится аналогичным образом.

Содержание отчета

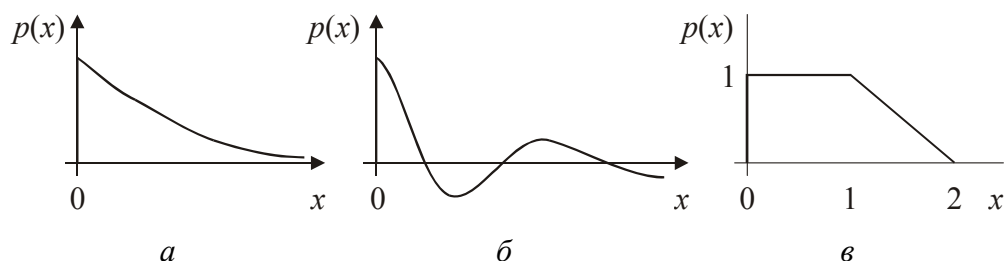
- результаты определения масштабов графиков согласно п. 2;
- графики функций распределения и плотностей вероятностей значений сигналов, исследованных в п. 3.
- анализ соответствия графиков, полученных в п. 3, теоретическим результатам (выражения (3.3)–(3.7)) [4];
- графики функций распределения для последовательных сумм синусоидальных и треугольных сигналов согласно п. 4;
- вывод о скорости сходимости распределения вероятности суммы независимых случайных сигналов к гауссовскому закону.

Контрольные вопросы

1. Как измеряют функцию распределения по одной реализации эргодического случайного процесса?
2. Определить функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание m_x и дисперсию D_x для случайной величины, имеющей заданную преподавателем плотность вероятности $p(x)$.
3. Определить плотность вероятности $p(x)$, математическое ожидание m_x и дисперсию D_x для случайной величины, имеющей заданную преподавателем функцию распределения $F(x)$.
4. Могут ли эти функции быть функциями распределения вероятности?



5. Могут ли эти функции быть функциями плотности вероятности?



6. Как зависит плотность вероятности нормального закона от входящих в нее параметров? Пояснить графически.

7. Как зависит плотность вероятности обобщенного закона Рэлея от параметров U_c и σ ?

8. Плотность распределения случайного сигнала $u(t)$ представлена суммой

$$p(u) = \frac{1}{3}\delta(u) + \frac{1}{3}\delta(u-1) + \frac{1}{3}\delta(u-2).$$

Записать и построить функцию распределения $F(u)$ и определить математическое ожидание и дисперсию $u(t)$. Привести пример реализации $u(t)$.

9. Известно, что плотность распределения суммы двух независимых случайных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ с плотностями распределения $p_u(u)$ и $p_v(v)$ является сверткой

$$p_x(x) = p(u+v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_u(\lambda) p_v(x-\lambda) d\lambda.$$

Рассчитать $p_x(x)$ для заданной преподавателем суммы двух сигналов, исследованных в работе, и сравнить с экспериментальными данными.

10. Реализации случайного процесса $X(t)$ имеют вид $x_i(t) = 2\sin(\omega_0 t + \varphi_i)$, где φ_i — статистически независимые случайные величины, равномерно распределенные в диапазоне от $-\pi$ до π . Записать приближенную формулу для плотности вероятности случайного процесса $y(t) = \sum_{i=1}^{100} x_i(t)$.

11. Может ли функция распределения вероятности:

а) принимать постоянное значение на некотором интервале?

б) иметь скачок в некоторой точке?

Если может, то что можно сказать о данном интервале (точке)?

12. Как измеряется плотность распределения вероятностей в лабораторном макете?

13. Какую роль играют RC -цепочки в составе структурной схемы лабораторного макета?

14. Как будет выглядеть плотность вероятности рэлеевского закона при $\sigma = 0$?

15. Функция распределения стационарного случайного сигнала $u(t)$ представлена в виде смещенной функции Хевисайда:

$$F(u) = \sigma(u-3).$$

Записать и построить соответствующую плотность распределения $p(u)$, определить математическое ожидание и дисперсию сигнала $u(t)$. Привести пример реализации сигнала $u(t)$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Цель работы — изучение частотно-избирательных цепей на основе колебательных контуров. Последовательный и параллельный колебательные контуры часто используются в качестве основного элемента линейных частотно-избирательных цепей (фильтров, резонансных усилителей и т. п.). К основным характеристикам линейных цепей относятся импульсная характеристика $h(t)$ и комплексный коэффициент передачи (частотная характеристика) $\dot{K}(\omega)$. В исследуемых цепях вид этих характеристик полностью определяется резонансной частотой ω_p и добротностью Q контуров, а связь между ними — преобразованиями Фурье.

Исследуются временные и частотные характеристики колебательных контуров, влияние на них активных потерь, взаимосвязь временных и частотных параметров контуров.

4.1. Теоретические сведения

Последовательный колебательный контур (рис. 4.1, а) удобно рассматривать как четырехполюсник. На резонансной частоте ω_p он обладает низким входным сопротивлением и для обеспечения колебательного режима должен подключаться к источнику сигнала с достаточно малым выходным сопротивлением r_Γ , таким, чтобы выполнялось условие $r_0 + r_\Gamma = r \ll \rho$, где $\rho = \sqrt{L/C} = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$ — волновое, или характеристическое сопротивление контура.

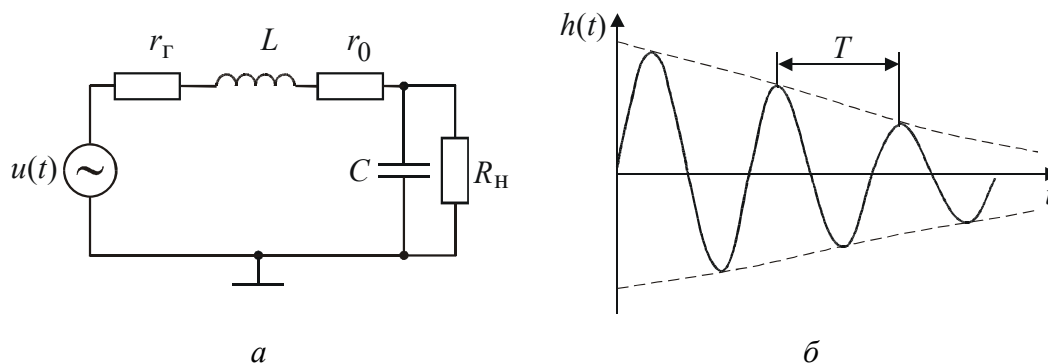


Рис. 4.1

Пренебрегая сопротивлением нагрузки (полагая его достаточно большим, $R_H \gg r$), запишем дифференциальное уравнение для выходного напряжения четырехполюсника $u_C(t)$:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U\sigma(t), \quad (4.1)$$

где в качестве входного воздействия взята взвешенная функция включения $\sigma(t)$ (функция Хевисайда). Однородному дифференциальному уравнению

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad (4.2)$$

соответствует характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

с корнями $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \omega_p$; здесь $\alpha = r/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ («собственная» резонансная частота контура). Решение неоднородного дифференциального уравнения (4.1) ищут в виде суммы решения уравнения (4.2) и так называемого частного решения уравнения (4.1), которое при выбранном входном воздействии оказывается просто константой U :

$$u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + U.$$

Используя очевидные начальные условия $u_C(0) = 0$, $i(0) = 0$, находят константы A_1 и A_2 и записывают решение

$$u_C(t) = U - U(\cos \omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p} \sin \omega_p t) e^{-\alpha t},$$

которое при нормировке к $U = 1$ В становится *безразмерной переходной характеристикой* четырехполюсника $g(t)$. Так как импульсная характеристика $h(t) = dg/dt$, получают

$$h(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_p} e^{-\alpha t} \sin \omega_p t \approx \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_p t \approx \omega_p e^{-t/\tau_k} \sin \omega_p t, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

График $h(t)$ приведен на рис. 4.1, б. В выражении (4.3) приближение сделано в предположении малых потерь, $\alpha \ll \omega_p \approx \omega_0$, а также введена постоянная времени $\tau_k = 2L/r = 2Q_H/\omega_p$ последовательного колебательного контура. Здесь Q_H — нагруженная добротность контура, определяемая соотношением

$$Q_H = \rho/(r_\Gamma + r_0) = \rho/r = \omega_0 L/r \approx \omega_p L/r. \quad (4.4)$$

Комплексный коэффициент передачи последовательного колебательного контура в так называемом приближении малых расстройек рассчитывается просто:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1/i\omega C}{r + j\omega L + 1/i\omega C} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega rC} = \frac{1/LC}{1/LC - \omega^2 + j\omega r/L} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{r}{L}} = \frac{1}{\frac{\omega_0 + \omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} + j \frac{\omega}{\omega_0^2} \frac{r}{L}} \approx \frac{1}{j \frac{r}{\omega_0 L} + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \\
&= \frac{1}{j \frac{1}{Q_H} + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \dot{K}(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{Q_H}{j + 2Q_H \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \approx \frac{Q_H}{j + 2Q_H \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Здесь принято $\omega_0 - \omega = \Delta\omega \ll \omega_p$, $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$ — в приближении малых расстройек.

Комплексный коэффициент передачи может быть также получен в результате применения к импульсной характеристике $h(t)$ прямого преобразования Фурье

$$\dot{K}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.6)$$

Нижним пределом интеграла в выражении (4.6) берут 0, так как импульсная характеристика физически реализуемого четырехполюсника существует только при $t \geq 0$. С использованием введенной постоянной времени $\tau_K = 2L/r = 2Q_H/\omega_p$ результат (4.5) записывается в виде

$$\dot{K}(\omega) \approx \int_0^{\infty} \omega_p e^{-\frac{t}{\tau_K}} \sin \omega_p t e^{-j\omega t} dt = \frac{Q_H}{j + \tau_K \Delta\omega}.$$

АЧХ и ФЧХ цепи определяются выражениями

$$K(\omega) = \frac{Q_H}{\sqrt{1 + (\tau_K \Delta\omega)^2}}, \quad \varphi_K(\omega) = \arctg(\tau_K \Delta\omega) - \frac{\pi}{2}. \quad (4.7)$$

Входное сопротивление последовательного колебательного контура на резонансной частоте мало и равно эквивалентному сопротивлению потерь, $R_{вх} = r$. Поэтому последовательные контуры часто используют как *режесекторные* фильтры для подавления сигнала на резонансной частоте.

Параллельный колебательный контур представляет собой параллельное соединение L и C элементов (рис. 4.2, а). Используют высокодобротные катушки индуктивности и конденсаторы с малыми потерями, причем потерями в конденсаторе в большинстве случаев пренебрегают и собственные потери контура представляют сопротивлением r_0 , отнесенным к индуктивности. Для удобства анализа схемы последовательное соединение r_0 и L пересчитывают в параллельное соединение эквивалентного сопротивления $R_{\omega 0}$ и L , пренебрегая квадратом сопротивления потерь r_0^2 по сравнению с квадра-

том индуктивного сопротивления, $(\omega_p L)^2 \gg r_0^2$. На резонансной частоте параллельный контур имеет достаточно высокое эквивалентное сопротивление $R_{\text{э0}} = \rho^2 / r_0 = \rho Q_0$, где ρ , как и для последовательного контура — волновое или характеристическое сопротивление, равное сопротивлению одной ветви контура на резонансной частоте, $\rho = \sqrt{L/C} \approx \omega_p L = 1/(\omega_p C)$; $Q_0 = \rho / r_0$ — *собственная* (ненагруженная) *добротность* колебательной системы. Для сохранения в контуре колебательного режима добротность должна быть достаточно велика, следовательно, подключаемые к нему сопротивления источника сигнала (генератора) R_{Γ} и нагрузки $R_{\text{н}}$ должны быть большими ($R_{\Gamma}, R_{\text{н}} \geq R_{\text{э0}}$).

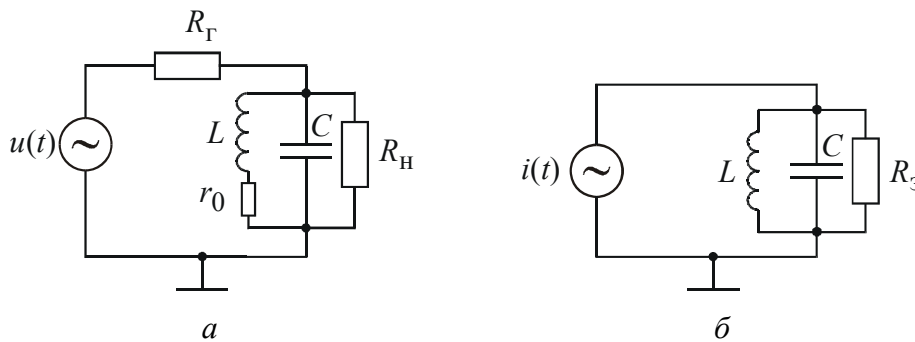


Рис. 4.2

Для исследования временных характеристик параллельного контура источник напряжения $u(t)$ (рис. 4.2, а) заменяют источником тока $i(t) = u(t)/R_{\Gamma}$, а параллельно подключенные к контуру сопротивления R_{Γ} и $R_{\text{н}}$ пересчитывают с учетом $R_{\text{э0}}$ в эквивалентное сопротивление $R_{\text{э}}$ (рис. 4.2, б) в соответствии с равенством $\frac{1}{R_{\text{э}}} = \frac{1}{R_{\Gamma}} + \frac{1}{R_{\text{н}}} + \frac{1}{R_{\text{э0}}}$, где $R_{\text{э}} = \rho Q_{\text{н}}$, $Q_{\text{н}}$ — *нагруженная добротность* параллельного контура. Иногда используют понятие *внешней добротности* $Q_{\text{вн}}$, которая связывает собственную и нагруженную добротности $\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}}$.

Импульсной реакцией или *импульсной характеристикой* параллельного колебательного контура принято называть напряжение $u_{\text{с}}(t)$ при воздействии на контур дельта-импульса тока $\delta_i(t) = \delta_u(t)/R_{\Gamma}$ (при экспериментальном определении импульсной характеристики используют достаточно короткий импульс). Импульсная реакция параллельного контура имеет колебательный характер и может быть записана как

$$h(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{C} (\cos \omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p} \sin \omega_p t) \approx \frac{e^{-\alpha t}}{C} \cos \omega_p t. \quad (4.8)$$

Здесь $\alpha = 1/(2R_3C)$. Приближение (4.8) с учетом того, что $\alpha \ll \omega_p \approx \omega_0$ (напомним, что $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, где ω_0 — «собственная» резонансная частота контура), принимают для высокодобротного контура. Вводят также понятие *постоянной времени* $\tau_k = 2R_3C = 2Q_H / \omega_p$ нагруженного параллельного контура и записывают выражение (4.8) в форме

$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \cos \omega_p t, \quad t \geq 0. \quad (4.9)$$

Из выражений (4.3) и (4.9) следует, что τ_k является *интервалом времени между точками, соответствующими спаду огибающей импульсной характеристики* в $e = 2,72\dots$ (основание натуральных логарифмов) раз.

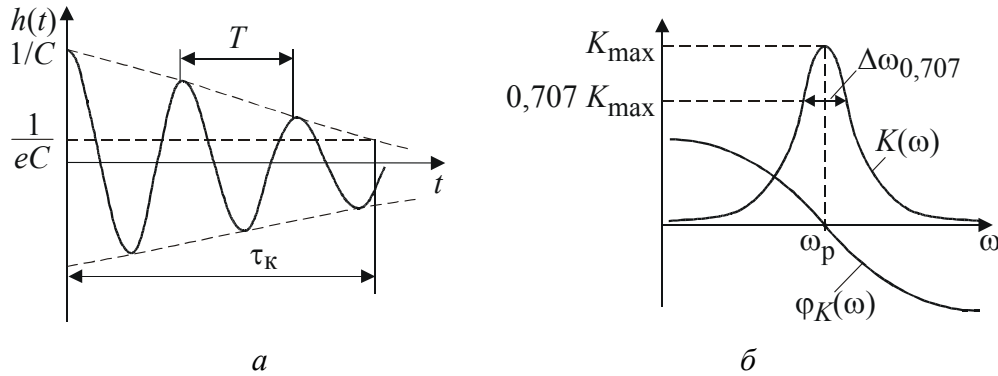


Рис. 4.3

Из выражения (4.6) следует, что при безразмерном $\dot{K}(\omega)$ размерностью $h(t)$ является 1/с. При определении импульсной характеристики параллельного колебательного контура было принято воздействие в виде дельта-импульса тока, а в качестве реакции — напряжение на контуре, поэтому размерностью $\dot{K}(\omega)$ здесь будет Ом — размерность отношения $\dot{U}(\omega) / \dot{I}(\omega) = \dot{z}(\omega)$, — а размерностью $h(t)$ будет Ом/с = 1/Ф, что поясняет присутствие в выражениях (4.8) и (4.9) множителя 1/С. Комплексный коэффициент передачи параллельного колебательного контура записывается как

$$\dot{K}(\omega) = \dot{K}(\omega_p + \Delta\omega) = \frac{R_3}{(1 - j2Q_H \frac{\Delta\omega}{\omega_p})} = \frac{R_3}{(1 - j\tau_k \Delta\omega)}, \quad (4.10)$$

где $\Delta\omega = \omega_p - \omega$ — абсолютная расстройка, как и для последовательного колебательного контура. Можно показать, что если $\Delta\omega_{0,707}$ — полоса заграж-

дения контура на уровне 0,707 от максимума АЧХ, то $Q_H = \omega_p / \Delta\omega_{0,707}$ — добротность контура, практически совпадающая с нагруженной добротностью контура, определенной через временные характеристики. Из выражения (4.10) определяют АЧХ и ФЧХ цепи (рис. 4.3, б)

$$K(\omega) = \frac{R_3}{\sqrt{1 + (\tau_k \Delta\omega)^2}}, \quad \varphi_K(\omega) = \arctg(\tau_k \Delta\omega). \quad (4.11)$$

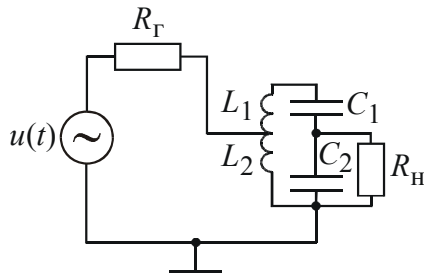


Рис. 4.4

Снизить влияние сопротивлений $R_Г$ и $R_Н$ на колебательный контур можно, используя так называемое *частичное включение* контура: генератор и нагрузка подключаются к отводу катушки индуктивности и к части емкостной ветви (рис. 4.4) контура. Используют *коэффициенты включения*

$$m = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad n = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

При подключении источника напряжения $u(t)$ к части индуктивной ветви контура он может быть заменен генератором тока $i'(t) = \frac{u(t)}{m} \frac{m^2}{R_Г} = m i(t)$, подключенным к контуру вида рис. 4.2, б. В этом случае комплексная частотная характеристика приобретает вид

$$\dot{K}(\omega) = \frac{mnR'_3}{1 - jQ'_H \frac{2\Delta\omega}{\omega_p}},$$

где $Q'_H = \frac{R'_3}{\rho}$ — эквивалентная нагруженная добротность,

$R'_3 = \frac{\rho^2}{r_0 + r_Г + r_Н}$ — эквивалентное сопротивление контура с учетом собственных и внешних потерь, $r_0 = \frac{\rho^2}{R_{30}}$ — собственные потери контура (от ко-

эффициентов включения не зависят), $r_Г = \frac{m^2 \rho^2}{R_Г}$, $r_Н = \frac{n^2 \rho^2}{R_Н}$ — пересчитан-

ные с учетом частичного включения сопротивления генератора и нагрузки. Подбором коэффициентов включения удастся обеспечить требуемую полосу пропускания контура и расчетное эквивалентное сопротивление. Это особенно важно при использовании параллельного контура в качестве нагрузки в резонансных усилителях и генераторах.

Подбором коэффициентов включения удастся обеспечить требуемую полосу пропускания контура и расчетное эквивалентное сопротивление. Это особенно важно при использовании параллельного контура в качестве нагрузки в резонансных усилителях и генераторах.

4.2. Описание лабораторной установки

Макет установки (рис. 4.5) включает в себя исследуемые частотно-избирательные цепи с согласующими каскадами и коммутирующие элементы.

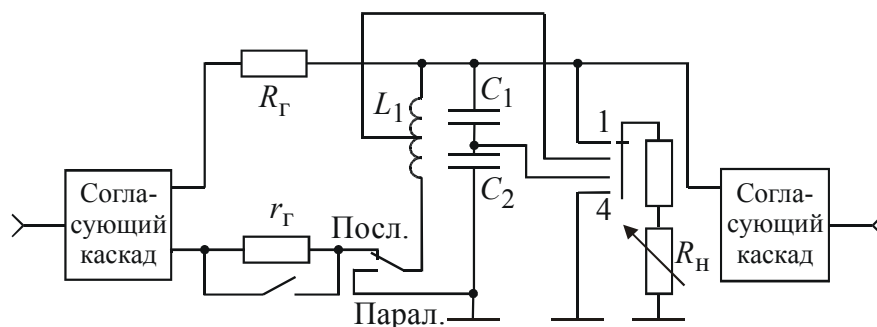


Рис. 4.5

На вход макета подают прямоугольные видеоимпульсы — для исследования временных функций и гармонические сигналы — для исследования АЧХ. Поскольку выходное сопротивление используемых генераторов довольно большое (десятки или сотни ом), они подключаются к исследуемым цепям через согласующий каскад с низким выходным сопротивлением. На параллельный контур сигнал подается через большое сопротивление R_{Γ} , что реализует эквивалентный источник тока.

Выходной каскад имеет высокое входное и низкое выходное сопротивления при коэффициенте передачи, равном единице. Этот каскад исключает влияние измерительных приборов на исследуемые цепи.

В макете предусмотрен переключатель вида контура (последовательный — параллельный) и два активных сопротивления нагрузки. Одно ($r_{\text{н}}$) предназначено для включения в последовательный контур. Второе (переменный резистор $R_{\text{н}}$) может подключаться как к полному контуру, так и к его части с коэффициентом включения $p_L = 0,7$ (отвод от индуктивности) или с коэффициентом включения $p_C = 0,5$ (частичное включение в емкостную ветвь). Выходное напряжение снимается с емкостной ветви контура.

4.3. Задание и указания к выполнению работы

Включить питание макета и используемых приборов. Установить конденсатор переменной емкости в среднее положение, нагрузочный резистор отключить от контура.

Для исследования импульсных характеристик к входу макета подключить выход генератора импульсов, к выходу — вход «У» осциллографа. Для измерения частотных характеристик использовать высокочастотный генератор синусоидальных сигналов и вольтметр переменного тока.

Исследование импульсных характеристик колебательных контуров.

1. Установить генератор прямоугольных импульсов в положение внутреннего запуска, нажав клавишу «Запуск». Длительность импульса возбуждения цепи $\tau = 0,1 \dots 0,3$ мкс, частота повторения импульсов $3 \cdot 10^5$ Гц, амплитуда импульсов около 10 В (выход генератора 1:1, множитель — 0,3).

2. Подать синхроимпульс положительной полярности от выхода синхронизации генератора импульсов на вход внешней синхронизации осциллографа. Установить на экране осциллографа, работающего в ждущем режиме, неподвижное изображение реакции цепи на входной импульс. Для этого отрегулировать уровень синхронизации.

3. Измерения начать с исследования импульсной реакции последовательного контура без добавочного резистора r (он должен быть замкнут переключателем). Резистор нагрузки R_n при этом должен быть отключен. Подобрать коэффициент отклонения K_0 , В/дел, в канале «Y» и коэффициент развертки K_p , мкс/дел, в канале «X» так, чтобы осциллограмма импульсной реакции занимала бы большую часть экрана.

4. Измерить параметры импульсной реакции (постоянную времени контура τ_k и длительность *квазипериода* колебаний T). Постоянную времени τ_k определить в виде интервала времени, в течение которого огибающая импульсной реакции *уменьшится* в $e = 2,72 \dots$ раз. Для этого:

а) найти сечение *огibaющей* $h(t)$ по уровню $1/e$ от максимума и подсчитать количество делений экрана, укладываемое между максимумом и найденным сечением; умножив его на коэффициент развертки K_p , получить значение τ_k ;

б) оценить длительность *квазипериода* колебаний: выбрать на экране достаточно большой временной интервал и подсчитать количество квазипериодов, укладываемых в него. Разделив интервал на полученное число, найти квазипериод T и значение резонансной частоты $f_p = 1/T$.

5. Включить добавочный резистор r . При этом добротность контура снизится и постоянная времени импульсной реакции уменьшится. Измерить τ_k для этого случая. Частоту (или квазипериод) измерять не надо — в пределах погрешности измерений она изменяться не будет.

6. Переключить макет в режим параллельного контура и измерить постоянную времени аналогичным образом. Затем исследовать влияние сопротивления нагрузки R на постоянную времени контура. Для этого установить переменный резистор в среднее положение, подключить нагрузку к полному контуру и измерить τ_k . Повторить измерения для частичного включения нагрузки в индуктивную и емкостную ветви контура.

7. Результаты измерений (6 значений постоянной времени) свести в таблицу.

Исследование частотных характеристик колебательных контуров.

1. Подключить к входу макета высокочастотный генератор, выбрать диапазон частот в районе 200...600 кГц. Установить режим непрерывной генерации (отсутствие модуляции).

2. К выходу макета подключить вольтметр, установить шкалу вольтметра 1 В.

3. Измерить резонансную частоту и полосу пропускания контура по уровню 0,707 от максимума. Для этого:

а) определить максимум АЧХ и зафиксировать по шкале генератора значение резонансной частоты f_p ;

б) подобрать амплитуду генератора так, чтобы выходное напряжение составило бы на резонансной частоте 1 В;

в) плавно перестраивая генератор в обе стороны от резонансной частоты, найти точки $f_{0,707}$, где выходное напряжение равняется 0,707 В, и зафиксировать эти частоты. Модуль их разности и есть полоса пропускания контура.

4. Измерить резонансные частоты и полосы пропускания последовательного и параллельного контуров для случаев, указанных в п. 3. Результаты свести в таблицу.

Расчет добротности колебательных контуров.

1. Используя данные измерений постоянных времени и резонансных частот контуров, по формуле $Q = \pi f_p \tau_k$ рассчитать собственную и нагруженную добротности параллельного и последовательного контуров. Используя результаты измерений полос пропускания и резонансных частот контуров, по формуле $Q = f_p / \Delta f_{0,707}$ рассчитать эквивалентные добротности контуров. Сопоставить результаты расчетов.

2. По полученным данным рассчитать сопротивления нагрузки, подключенные к контуру. Для последовательного контура определить дополнительное сопротивление r_n , полагая что в первом варианте (с закороченным r_n) найдена собственная добротность Q_0 , а во втором — нагруженная добротность контура Q_n .

3. Используя вытекающее из (4.4) соотношение

$$r_n = \rho \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_0} \right) = 2\pi f_p L \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_0} \right)$$

и указанное на макете значение индуктивности, рассчитать значение добавочного сопротивления r_n .

4. Провести аналогичные расчеты сопротивления нагрузки для параллельного контура. Расчетные формулы для этого вывести, используя результаты первого измерения как данные о собственной, а второго — нагруженной добротности.

Содержание отчета

- схемы исследуемых цепей;
- таблицы с данными измерений постоянных времени, резонансных частот и полос пропускания контуров;
- результаты расчетов и графики импульсной и амплитудно-частотной характеристик для одного из контуров.

Контрольные вопросы

1. Каким образом связаны друг с другом постоянная времени контура τ_k и добротность Q ?
2. Чем отличаются нагруженная и собственная добротности контура?
3. Как изменятся резонансная и импульсная характеристики параллельного колебательного контура при уменьшении индуктивности в 4 раза? Эквивалентное сопротивление потерь считать неизменным.
4. Добротность (определение). Способы оценки добротности контура (2 способа).
5. Как определить добротность контура по графику его импульсной характеристики?
6. Сопротивление нагрузки параллельного контура увеличили в 4 раза. Как изменилась добротность контура?
7. При снятии импульсной характеристики $h(t)$ в лабораторном макете в качестве тестового сигнала (δ -функции) используют видеоимпульсы длительностью 0,1...0,2 мкс; оценить точность экспериментального определения $h(t)$ в лабораторной работе со спектральной и временной точек зрения.
8. Каким образом можно измерять коэффициенты включения контура?
9. Каким образом подключаемые к контуру сопротивления влияют на импульсную и частотную характеристики?
10. Что позволяет уменьшить влияние подключаемых к контуру сопротивлений?
11. Используя данные эксперимента, оценить разность «собственной» резонансной частоты ω_0 колебательного контура и резонансной частоты ω_p .
12. Сравнить импульсные характеристики, АЧХ, ФЧХ и значение добротности для параллельных контуров с параметрами (R, L, C) и $(R/2, C/2, 2L)$.
13. Дать определение коэффициентов включения контуров. Для чего используют частичное включение контуров?
14. Указать «идеальный» коэффициент включения, при котором избирательные свойства контура не ухудшаются. Возможно ли его применение в реальных устройствах?
15. Как определить добротность по параметрам амплитудно-частотной характеристики колебательного контура?

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ АМПЛИТУДНО-MОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Цель работы — изучение частотных характеристик одиночного колебательного контура и системы из двух связанных колебательных контуров; изучение преобразований амплитудно-модулированных колебаний при прохождении через данные избирательные цепи.

5.1. Теоретические сведения

Частотные характеристики радиотехнических систем являются важнейшими характеристиками, которые выдерживаются в процессе проектирования и поддерживаются при их эксплуатации. Рациональное распределение единого для всех радиосистем частотного диапазона проводится с учетом реализуемости фильтрующих цепей в приемных устройствах, что позволяет одновременно работать множеству радиотехнических систем. Использование в приемных устройствах фильтров с АЧХ, близкой к идеальной (П-образной), позволяет максимально повысить число одновременно работающих радиосистем. Так, при построении узкополосных приемников, у которых полоса пропускания много меньше несущей частоты, в качестве преселектора (фильтрующих входных цепей) широкое применение нашли фильтры на основе двух, трех и более связанных контуров или на основе коаксиальных резонаторов, эквивалентная схема которых в области рабочих частот совпадает со схемой связанных контуров. Применение большего количества контуров, работающих в связке, позволяет добиться лучшего коэффициента прямоугольности АЧХ фильтра.

Неравномерность АЧХ и отклонение от линейного закона ФЧХ фильтрующих цепей в полосе пропускания приводит к искажению спектра сигнала и, соответственно, формы самого сигнала при его прохождении через цепь. В частности, в работе будут рассмотрены примеры различных искажений амплитудно-модулированного колебания (АМК) при прохождении его через избирательную цепь.

Рассмотрим схему параллельного колебательного контура (рис. 5.1).

Комплексный коэффициент передачи цепи записывается следующим образом:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{j\omega L}{j\omega L + R(1 - \omega^2 LC)}. \quad (5.1)$$

Для удобства работы с формулой упростим ее, ограничившись рассмотрением частотной характеристики контура вблизи резонансной частоты $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, т. е. ограничимся частотами ω , для ко-

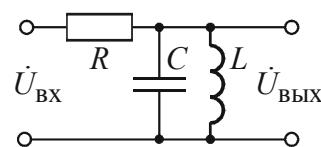


Рис. 5.1

торых относительное отклонение от ω_0 много меньше единицы. Также учтем, что добротность параллельного контура $Q = R/\rho = R\sqrt{C/L}$, где $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура. Несложные преобразования формулы (5.1) приводят к следующему выражению:

$$\dot{K}(\varepsilon) \cong \frac{1}{1 + j2Q\varepsilon}$$

где $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/\omega_0$. Запишем выражения для АЧХ и ФЧХ колебательного контура:

$$|\dot{K}(\varepsilon)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2\varepsilon^2}}, \quad \varphi(\varepsilon) = \arg(\dot{K}(\varepsilon)) = -\arctg(2Q\varepsilon) \cong -2Q\varepsilon$$

и построим соответствующие графики (рис. 5.2, 5.3) для $Q = 100$.

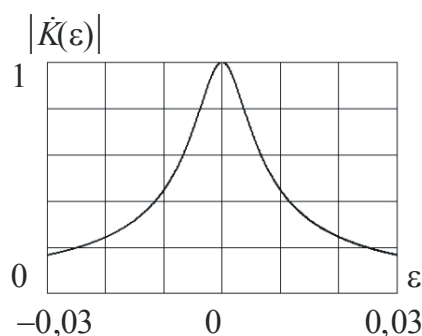


Рис. 5.2

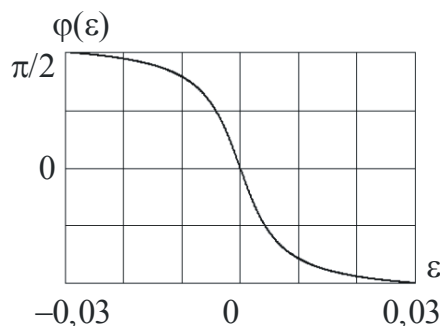


Рис. 5.3

Из полученных выражений и построенных графиков видно, что при $\varepsilon \leq 1/(2Q)$ АЧХ примерно равна единице, а ФЧХ является линейно убывающей функцией от частоты. При $\varepsilon \geq 1/(2Q)$ значительно уменьшается коэффициент передачи цепи.

Рассмотрим схему системы контуров с емкостной связью (рис. 5.4). Система представляет собой 2 идентичных параллельных колебательных контура, соединенных между собой конденсатором с емкостью $C_{св}$ (в практически важных случаях значение емкости связи примерно в добротность раз меньше значения емкости контура). Обозначим через \dot{Z}_K сопротивление параллельного колебательного контура (рис. 5.5).

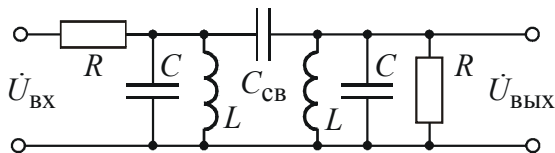


Рис. 5.4

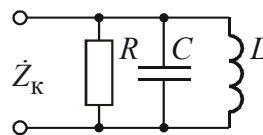


Рис. 5.5

С учетом ранее принятых обозначений и сделанных упрощений выражение для \dot{Z}_K можно записать как $\dot{Z}_K = R/(1 + j2Q\varepsilon)$.

Комплексный коэффициент связи для системы связанных контуров (ССК), очевидно, будет

$$\dot{K}_{ССК}(\varepsilon) = \frac{\dot{Z}_k^2}{R \left(2\dot{Z}_k + \frac{1}{jC_{св}\omega_0(1+\varepsilon)} \right)} \cong \frac{\dot{K}^2(\varepsilon)}{2\dot{K}(\varepsilon) - j\frac{1-k}{Qk}}, \text{ где } k = \frac{C_{св}}{C_{св} + C}. \quad (5.2)$$

Последнее равенство написано с учетом того же приближения: $\varepsilon \ll 1$. Параметр k называется коэффициентом связи связанных контуров и меняется в пределах от нуля до единицы.

Характер АЧХ и ФЧХ системы связанных контуров сильно зависит от коэффициента связи и добротности контуров. Для практически важных случаев добротность контуров много больше единицы и составляет десятки, сотни и даже тысячи единиц. При сильной связи, т. е. когда $k \rightarrow 1$ и, соответственно, $Qk \gg 1$, формула упрощается и переходит в выражение для одиночного колебательного контура с коэффициентом $1/2$: $\dot{K}_{ССК}(\varepsilon) = \dot{K}(\varepsilon)/2$. Это происходит из-за большой емкости связи, так что можно рассматривать колебательные контуры как параллельно соединенные. Тем самым они образуют новый контур со значением индуктивности, в 2 раза меньшим, и со значением емкости, в 2 раза большим, при этом резонансная частота не меняется.

При слабой связи, т. е. когда $k \rightarrow 0$ и, соответственно, $Qk \ll 1$, формула преобразуется: $\dot{K}_{ССК}(\varepsilon) = jQk\dot{K}^2(\varepsilon)$. Таким образом, комплексный коэффициент передачи ССК выражается через квадрат комплексного коэффициента передачи одиночного контура с амплитудным множителем jQk . Полоса пропускания ССК сужается по отношению к колебательному контуру, и значительно увеличивается степень подавления колебаний при отстройке частоты от резонансной. Максимальный коэффициент передачи, наблюдаемый на резонансной частоте, много меньше единицы.

На практике наибольший интерес представляет случай так называемой критической связи между контурами, т. е. когда $Qk = 1$, или близкий к нему случай. Комплексный коэффициент передачи ССК при критической связи

$$\dot{K}_{ССК}(\varepsilon) = \frac{\dot{K}(\varepsilon)}{2 - j\frac{1}{\dot{K}(\varepsilon)}} = \frac{1}{2(1 + j2\varepsilon Q) - j(1 + j2\varepsilon Q)^2}.$$

В этом случае максимум АЧХ несколько смещается вниз по частоте, в полосе пропускания АЧХ становится максимально плоской, а вне полосы пропускания происходит существенное подавление колебаний. Максимальное значение сохраняется равным 0,5. При уменьшении коэффициента связи полоса пропускания становится уже и максимальное значение уменьшается пропорционально значению коэффициента. С ростом коэффициента связи полоса пропускания увеличивается, меняется характер АЧХ: появляются 2

максимума и минимум. Максимальные значения АЧХ сохраняются равными 0,5, а минимальное зависит от значения коэффициента связи, причем оно тем меньше, чем больше коэффициент. С увеличением значения емкости связи средняя частота фильтра на основе ССК уменьшается. На рис. 5.6 и 5.7 приведены графики АЧХ и ФЧХ системы связанных контуров при различных значениях коэффициента связи (кривая 1 — 0,03, 2 — 0,01, 3 — 0,003).

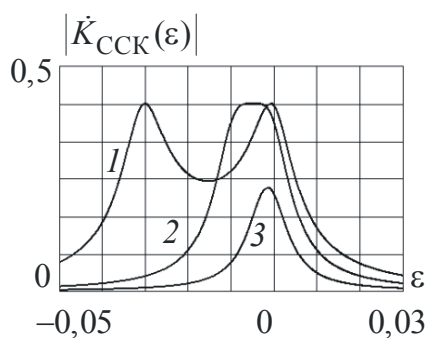


Рис. 5.6

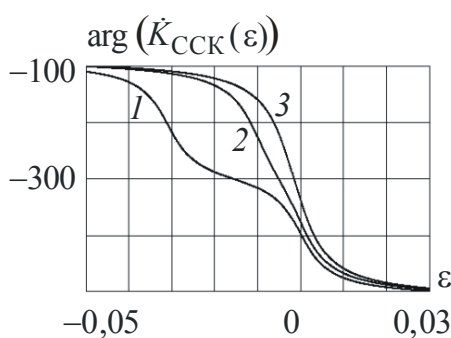


Рис. 5.7

ФЧХ в полосе пропускания сохраняется близкой к линейной в случаях, когда $Qk \leq 1$. При невыполнении этого условия фильтр на основе ССК будет вносить существенные фазовые искажения.

Амплитудно-модулированное колебание с тональной модуляцией показано на рис. 5.8 и имеет следующую математическую форму записи:

$$s(t) = A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + \frac{Am}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t) + \frac{Am}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t), \quad (5.3)$$

где A — амплитуда несущего колебания; m — коэффициент амплитудной модуляции; Ω — частота модулирующего колебания; ω_0 — частота несущего колебания. В выражении (5.3) для краткости записи начальные фазы модулирующего и несущего колебаний приняты равными нулю.

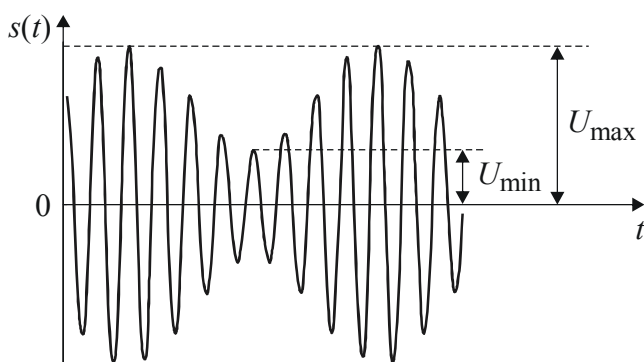


Рис. 5.8

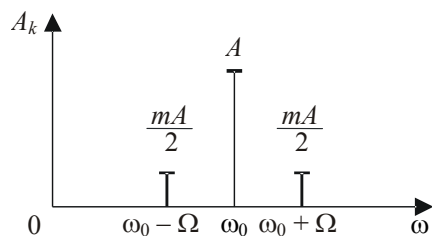


Рис. 5.9

В соответствии с формулой (5.3) спектр АМК дискретный и состоит из трех гармонических колебаний на частотах ω_0 , $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ с соответст-

вующими амплитудами A , $Am/2$ и $Am/2$ и нулевыми начальными фазами. На рис. 5.9 изображен амплитудный спектр АМК.

На выходе линейной цепи при поступлении на ее вход гармонического колебания будет наблюдаться гармоническое колебание, отличающееся от входного колебания амплитудой и фазой. В силу свойств линейных цепей можно рассматривать прохождение любых гармонических колебаний независимо друг от друга. Таким образом, при поступлении на вход фильтра АМК выходной сигнал будет представлять собой сумму трех гармоник, при этом из-за преобразований амплитуд и фаз гармоник не всегда выходное колебание будет описываться формулой (5.3). Последнее означает, что на выходе цепи будет наблюдаться искаженное АМК, строго говоря, это уже будет не АМК. Для минимизации степени искажений необходимо, чтобы спектр сигнала был сосредоточен внутри полосы пропускания фильтра.

Выражение для выходного сигнала фильтра, представляющего собой колебательный контур, при поступлении на его вход АМК имеет вид

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t) = & A|\dot{K}(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \arg(\dot{K}(\omega_0))) + \\ & + \frac{Am}{2}|\dot{K}(\omega_0 + \Omega)|\cos((\omega_0 + \Omega)t + \arg(\dot{K}(\omega_0 + \Omega))) + \\ & + \frac{Am}{2}|\dot{K}(\omega_0 - \Omega)|\cos((\omega_0 - \Omega)t + \arg(\dot{K}(\omega_0 - \Omega))). \end{aligned} \quad (5.4)$$

При использовании в качестве фильтра ССК в выражении (5.4) достаточно заменить $\dot{K}(\omega)$ на $\dot{K}_{\text{ССК}}(\omega)$.

В качестве примера рассмотрим случай прохождения АМК через одиночный колебательный контур, когда несущая частота колебания совпадает с резонансной частотой контура. В этом случае коэффициенты $|\dot{K}(\omega_0 + \Omega)|$ и $|\dot{K}(\omega_0 - \Omega)|$ равны, а фазы $\arg(\dot{K}(\omega_0 + \Omega))$ и $\arg(\dot{K}(\omega_0 - \Omega))$ равны по модулю и противоположны по знаку. Фаза несущего колебания $\arg(\dot{K}(\omega_0)) = 0$. В этом случае выходное колебание будет описываться формулой (5.3) и представлять собой АМК с другим коэффициентом амплитудной модуляции $m_{\text{вых}} = m|\dot{K}(\omega_0 + \Omega)|/|\dot{K}(\omega_0)|$, как это следует из формулы (5.4).

Таким образом, коэффициент амплитудной модуляции выходного АМК изменяется пропорционально величине $|\dot{K}(\omega_0 + \Omega)|$.

5.2. Описание лабораторной установки

Лабораторный макет (рис. 5.10) содержит 2 идентичных колебательных контура и переключатель, с помощью которого 2 контура соединяются между собой через переменный конденсатор. Сигнал от внешнего источника поступает на вход первого контура. Выходной сигнал регистрируется либо на

выходе первого контура, либо на выходе второго контура в зависимости от положения переключателя.

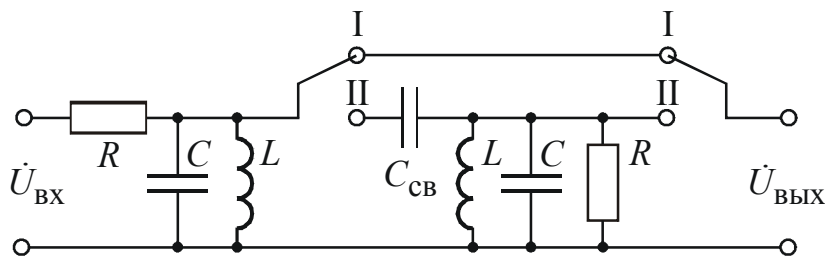


Рис. 5.10

Структурная схема лабораторной установки (рис. 5.11) содержит генератор сигналов низкочастотный ГСН, генератор сигналов высокочастотный ГСВ, генератор импульсов ГИ, макет, двухлучевой осциллограф и спектроанализатор СА.

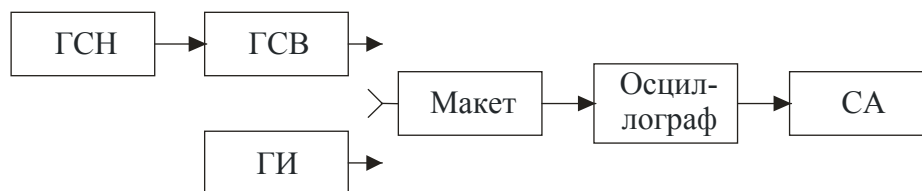


Рис. 5.11

ГСН является источником гармонических колебаний, используемых для осуществления модуляции ГСВ. Для этого низкочастотное колебание подается на вход «Внешняя модуляция» высокочастотного генератора. Таким образом на выходе высокочастотного генератора формируется амплитудно-модулированное колебание.

ГИ формирует короткие (относительно длительности импульсной характеристики) импульсы с большой амплитудой, которые используются для исследования импульсной характеристики фильтров.

Двухлучевой осциллограф используется для формирования осциллограмм входных и выходных сигналов. СА предназначен для отображения амплитудного спектра входных и выходных сигналов.

АЧХ в работе исследуется с помощью спектроанализатора. Для этого на вход частотно-избирательной цепи подаются «короткие» импульсы «большой» амплитуды. Длительность импульсов должна быть много меньше длительности импульсной характеристики цепи, а амплитуда достаточно большой, чтобы можно было наблюдать отклик цепи без искажений его шумами приборов. Отклик цепи на такой импульс близок к импульсной реакции цепи. Импульсы должны поступать на вход цепи периодически, чтобы импульсную реакцию можно было наблюдать на экране осциллографа, а период следования импульсов подбирается таким, чтобы отклики цепи не перекрывались во времени, но в то же время шли достаточно часто для удобства их наблюдения.

Как известно, преобразование Фурье от импульсной реакции дает комплексный коэффициент передачи. Спектроанализатор, на который поступают отклики цепи на импульсное воздействие, отображает амплитудный спектр этих откликов, по форме соответствующий модулю комплексного коэффициента передачи цепи, т. е. ее АЧХ. Так как импульсы поступают периодически, то спектр сигнала дискретный. В силу того, что импульсы поступают относительно редко, расстояние между гармониками мало и при надлежащем выборе полосы пропускания радиофильтра спектроанализатора на его экране видна лишь огибающая, полностью соответствующая АЧХ исследуемой цепи.

Спектроанализатор показывает амплитудный спектр сигнала в логарифмическом масштабе. Он отображает мощность гармоник в специальных единицах измерения — дБм (децибел по отношению к 1 мВт; в англоязычной литературе — dBm). Это единица измерения мощности сигнала. Она показывает, на сколько децибел мощность сигнала больше 1 мВт. Зная мощность сигнала в ваттах, ее легко представить в единицах дБм согласно следующей формуле:

$$P_{[\text{дБм}]} = 10 \lg \left(\frac{P_{[\text{Вт}]}}{0,001} \right) = 10 \lg (P_{[\text{мВт}]}).$$

5.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Исследование амплитудно-частотной характеристики одиночного колебательного контура.

Установить переключатель на макете (рис. 5.10) в положение I, чтобы снимать сигнал с одиночного параллельного колебательного контура. Подать на вход макета с помощью импульсного генератора короткие (~ 1 мкс) импульсы большой амплитуды (~ 15 В), редко следующие друг за другом (частота 10 кГц). Выход макета подключить к осциллографу. Сигнал с контрольного выхода осциллографа подать на спектроанализатор для анализа АЧХ цепи. Для удобного наблюдения АЧХ цепи рекомендуется установить следующие параметры: полоса обзора 300 кГц, центральная частота 450 кГц, уровень -35 дБм, полоса пропускания радиофильтра 3 кГц, полоса пропускания видеофильтра 100 кГц, масштаб по вертикали 5 дБ/дел.

Зарисовать форму АЧХ одиночного колебательного контура, соблюдая масштаб по осям, определить резонансную частоту и полосу пропускания (по уровню -3 дБ) колебательного контура.

С помощью осциллографа наблюдать импульсную характеристику колебательного контура.

2. Исследование амплитудно-частотной характеристики системы связанных контуров.

Установить переключатель на макете в положение II, чтобы снимать сигнал с системы связанных контуров (т. е. со второго колебательного конту-

ра). Используя ту же схему включения, исследовать АЧХ цепи для системы связанных контуров.

Зарисовать 3 формы АЧХ системы связанных контуров, соблюдая масштаб по осям, для случаев минимальной связи (значение емкости связи минимальное), максимальной связи (значение емкости связи максимальное) и критической связи (значение емкости подбирается так, чтобы полоса пропускания была максимальной при отсутствии провала (локального минимума) у АЧХ). Сохранить положение ручки переменного конденсатора до п. 4. Для всех трех случаев определить центральную частоту и полосу пропускания (по уровню -3 дБ) ССК.

С помощью осциллографа наблюдать импульсную характеристику ССК.

3. Исследование прохождения АМК с тональной модуляцией через колебательный контур.

Переключить тумблер в положение I для исследования одиночного колебательного контура. Установить частоту высокочастотного генератора равной резонансной частоте контура. На вход «Внешняя модуляция» подать гармонический сигнал от низкочастотного генератора, чтобы осуществить амплитудную модуляцию. Установить частоту его колебаний 1 кГц. Наблюдать на первом канале осциллографа АМК с выхода высокочастотного генератора и добиться регулировкой амплитуды модулирующего (низкочастотного) колебания, чтобы коэффициент амплитудной модуляции m лежал в пределах от 0,4 до 0,6. Значение m определить по осциллограмме (см. рис. 5.8), используя формулу

$$m = (U_{\max} - U_{\min}) / (U_{\max} + U_{\min}),$$

где U_{\max} и U_{\min} — максимальное и минимальное значения огибающей АМК. На втором канале осциллографа наблюдать АМК с выхода макета. Увеличение частоты модулирующего колебания будет приводить к уменьшению коэффициента амплитудной модуляции на выходе колебательного контура. Снять зависимость коэффициента амплитудной модуляции АМК на выходе макета от частоты модулирующего колебания. Рекомендуется использовать следующие частоты модулирующего колебания: 1, 4, 8, 16, 24, 32, 40, 48 и 56 кГц. В процессе снятия зависимости контролировать коэффициент амплитудной модуляции на входе макета и при необходимости подстраивать его.

4. Исследование прохождения АМК с тональной модуляцией через систему связанных контуров.

Переключить тумблер в положение II для исследования системы связанных контуров. Добиться критической связи между контурами (в п. 2 это уже должно было быть сделано). Установить частоту высокочастотного генератора равной средней частоте пропускания фильтра на основе связанных кон-

туров. Следуя указаниям п. 3, снять зависимость коэффициента амплитудной модуляции АМК на выходе макета от частоты модулирующего колебания.

Повторить этот пункт для наибольшего значения емкости связи между контурами (не забыть подстроить среднюю частоту высокочастотного генератора).

5. Исследование искажений АМК с тональной модуляцией при прохождении через систему связанных контуров.

Переключить тумблер в положение II для исследования системы связанных контуров. Установить наибольшее значение емкости связи между контурами. Установить частоту высокочастотного генератора равной средней частоте пропускания фильтра на основе связанных контуров. На вход «Внешняя модуляция» подать гармонический сигнал от низкочастотного генератора, чтобы осуществить амплитудную модуляцию (в п. 4 все перечисленное уже должно было быть сделано). Установить частоту его колебаний ~ 28 кГц. Наблюдать на первом канале осциллографа АМК с выхода высокочастотного генератора и добиться регулировкой амплитуды модулирующего (низкочастотного) колебания, чтобы коэффициент амплитудной модуляции m лежал в пределах от 0,9 до 1. На втором канале осциллографа наблюдать АМК с выхода макета. Зарисовать осциллограмму выходного АМК с перемодуляцией, соблюдая масштаб по осям. Увеличивать частоту высокочастотного колебания до появления на экране осциллографа биений и зафиксировать найденную частоту в протоколе. Зарисовать осциллограмму выходного сигнала, соблюдая масштаб по осям. Теперь уменьшать частоту высокочастотного колебания до повторного появления на экране осциллографа биений и зафиксировать найденную частоту в протоколе. Зарисовать осциллограмму выходного сигнала, соблюдая масштаб по осям.

Содержание отчета

- краткие теоретические сведения, включая цель работы, схемы, характеристики одиночного колебательного контура и системы связанных контуров, математическую модель сигнала на входе и выходе линейной цепи, схему лабораторного макета и структурную схему лабораторной установки с кратким описанием;
- табличное и графическое представления амплитудно-частотных характеристик одиночного колебательного контура и системы связанных контуров на основании экспериментальных данных. Амплитудно-частотные характеристики необходимо построить в линейном масштабе, отнормировав их к максимальному значению АЧХ при максимальном коэффициенте связи;
- расчет добротности одиночного колебательного контура и сравнение с измеренным значением;

- расчет значений минимального, критического и максимального коэффициентов связи ССК по результатам сопоставления расчетной и экспериментальной АЧХ;
- амплитудный спектр АМК на входе схемы. График амплитудного спектра по оси абсцисс изобразить в том же масштабе, что и графики АЧХ;
- табличное и графическое представления зависимостей коэффициента модуляции АМК на выходе макета от частоты модулирующего колебания на основании экспериментальных данных (3 зависимости: для колебательно-го контура, ССК с критической связью и ССК с максимальной связью);
- расчет зависимостей коэффициента модуляции АМК на выходе макета от частоты модулирующего колебания для колебательного контура, ССК с критической связью и ССК с максимальной связью;
- рисунки осциллограмм сигнала на выходе ССК с максимальной связью при поступлении на вход АМК с коэффициентом амплитудной модуляции, близким к единице, и частотой модулирующего колебания ~ 10 кГц. Рисунки представить для случаев, когда несущая частота АМК совпадает со средней частотой ССК, и когда несущая частота отстроена вверх и вниз от средней частоты пропускания ССК;
- расчет сигнала на выходе ССК с максимальной связью при поступлении на вход АМК с коэффициентом амплитудной модуляции, близким к единице, и частотой модулирующего колебания ~ 28 кГц. Графики представить для случаев, когда несущая частота АМК совпадает со средней частотой ССК, и когда несущая частота отстроена вверх и вниз от средней частоты пропускания ССК. Графически сопоставить экспериментальные и расчетные данные;
- выводы о частотных характеристиках колебательного контура и ССК, влиянии частотно-избирательных цепей на прохождение АМК через них.

Контрольные вопросы

1. Привести выражение для радиосигнала с тональной амплитудной модуляцией, построить его график для двух значений коэффициента амплитудной модуляции, равных единице и двойке.
2. Привести схемы и записать выражения для комплексного коэффициента передачи колебательного контура и системы связанных контуров. Как будут меняться графики АЧХ и ФЧХ при изменении добротности контуров и емкости связи между контурами?
3. Вывести формулу (5.2), т. е. выразить комплексный коэффициент передачи системы связанных контуров через комплексный коэффициент передачи одиночного контура.

4. В каких случаях сигнал на выходе колебательного контура и системы связанных контуров при поступлении на их входы АМК будет представлять собой АМК?
5. Как зависит коэффициент амплитудной модуляции АМК с тональной модуляцией на выходе ССК от частоты модулирующего колебания (несущая частота АМК совпадает со средней частотой пропускания ССК)? Почему?
6. Как влияет рассогласование несущей частоты АМК и средней частоты пропускания ССК на прохождение АМК с тональной модуляцией? С помощью векторной диаграммы объяснить возникающие искажения и происхождение угловой модуляции.
7. Что станет с АМК, если фаза одной из боковых гармоник изменится на π радиан? Можно ли называть получившееся колебание амплитудно-модулированным?
8. Почему комплексный коэффициент передачи ССК при коэффициенте связи, стремящемся к единице, равен коэффициенту передачи колебательного контура с коэффициентом $\frac{1}{2}$?
9. Какая величина имеет единицу измерения дБм? Записать формулы пересчета этой величины в амплитуду и мощность гармонического сигнала.
10. Как измерить АЧХ с помощью генератора коротких импульсов и спектроанализатора? Какие ограничения накладываются на параметры коротких импульсов и спектроанализатора?
11. Привести схему и вывод выражений для частотной и импульсной характеристик параллельного одиночного колебательного контура.
12. Привести схему и вывод выражений для частотной и импульсной характеристик последовательного одиночного колебательного контура.
13. По заданному преподавателем графику АЧХ построить зависимость выходного коэффициента модуляции от частоты модулирующего сигнала. Считать, что на вход цепи подается однтональный АМ-сигнал с несущей частотой, равной резонансной частоте цепи, и коэффициентом модуляции 0,5.
14. Может ли в линейной цепи коэффициент модуляции на выходе быть больше, чем на входе?
15. В каких случаях возможна перемодуляция АМ-колебания на выходе избирательной цепи, если на входе ее нет?
16. К какому значению стремится $m_{\text{вых}}(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow 0$?
17. В чем проявляются искажения АМ-колебаний при их прохождении через избирательные цепи?
18. Если сигнал является периодическим, то спектр его дискретен. Справедливо ли обратное утверждение (на примере АМК с тональной модуляцией)?

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Цель работы — изучение частотных и временных характеристик случайных процессов, их взаимосвязи и преобразования при прохождении через линейную цепь.

6.1. Теоретические сведения

Вероятностные характеристики случайных процессов. Случайными называют сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Их характеристики могут быть только статистическими, т. е. иметь вероятностный вид. В радиоэлектронике все сигналы, несущие информацию, а также большинство помех и шум являются случайными.

По отношению к случайной величине, изменяющейся во времени, например мгновенному значению напряжения случайного сигнала $u(t)$, применяют термин *случайный процесс*. Этот термин объединяет случайные сигналы, помехи и шумы. Конкретный вид части случайного процесса на ограниченном интервале времени (например, в виде записи в запоминающем осциллографе) называют его *реализацией*.

Большинство случайных процессов, встречающихся на практике, с достаточной точностью можно считать стационарными и эргодическими.

Случайный процесс называется *стационарным* в широком смысле, если его двухмерная плотность вероятности удовлетворяет условию $p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2, \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. При этом одномерная плотность вероятности от времени не зависит: $p_1(x_1, t_1) = p_1(x_1)$.

Случайный процесс называется *эргодическим*, если любая его характеристика, полученная статистическим усреднением по множеству реализаций, совпадает с такой же характеристикой, полученной усреднением по времени одной реализации достаточно большой длины.

Отклонения случайного процесса $u(t)$ от его среднего значения \bar{u} (постоянной составляющей, рис. 6.1, а) называют *флуктуациями* (рис. 6.1, б)

$$\xi(t) = u(t) - \bar{u}. \quad (6.1)$$

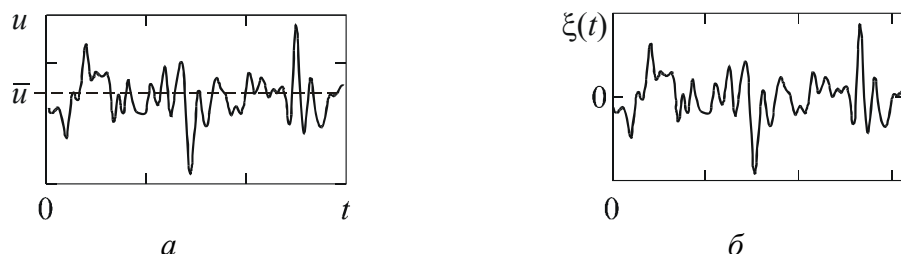


Рис. 6.1

При исследовании стационарных эргодических процессов основной интерес представляют свойства их флуктуаций $\xi(t)$, для описания которых вводят корреляционную функцию (КФ) флуктуаций и спектральную плотность мощности.

Корреляционно-спектральный анализ случайных процессов. Корреляционная функция $R(\tau)$ является мерой статистической связи между мгновенными значениями случайного процесса, разделенными интервалом времени τ . Иными словами, она позволяет оценить, насколько существенно в среднем успеет измениться значение флуктуаций за время τ по сравнению с наблюдаемым мгновенным значением в исходный момент времени t . Для стационарного эргодического процесса КФ определяется соотношением

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt, \quad (6.2)$$

где $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ — мгновенные значения флуктуаций соответственно в моменты t и $t + \tau$; $2T$ — длина реализации, на которой производится усреднение. Знак τ может быть любым. Чтобы лучше уяснить физический смысл этого выражения, рассмотрим следующую операцию предельного перехода.

Возьмем реализацию случайного процесса (рис. 6.2) длиной $2T$ и выберем на ней отсчетные моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , следующие с равным шагом. Зададимся интервалом времени τ и определим мгновенные значения: $\xi(t_1), \xi(t_1 + \tau); \xi(t_2), \xi(t_2 + \tau); \xi(t_3), \xi(t_3 + \tau)$ и т. д. Затем вычислим сумму

$$\xi(t_1)\xi(t_1 + \tau) + \xi(t_2)\xi(t_2 + \tau) + \xi(t_3)\xi(t_3 + \tau) + \dots \quad (6.3)$$

и разделим ее на длину реализации $2T$ (в этом и заключается операция усреднения). Чтобы перейти к определению (6.2), надо брать моменты t_1, t_2, t_3 с бесконечно малым шагом dt , а длину реализации $2T$ устремить к бесконечности. В результате получим одно значение КФ для выбранного значения τ . Если процесс во времени изменяется медленно, то за интервал τ его мгновенные значения существенно не изменятся (как, например, на рис. 6.2).

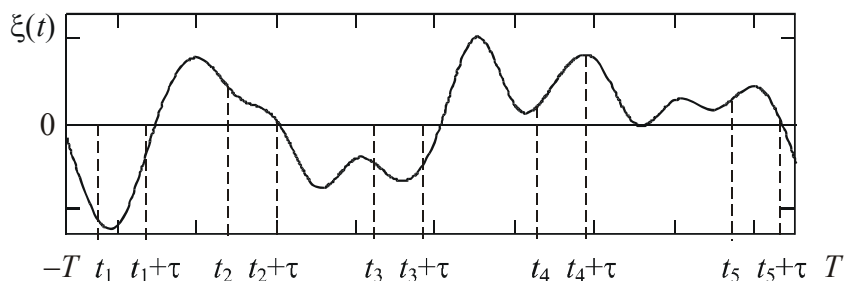


Рис. 6.2

Поэтому с большой вероятностью сомножители $\xi(t_i)$, $\xi(t_i + \tau)$ в сумме (6.3) окажутся с одним знаком; большинство слагаемых будут положительными, и в результате вычисленное значение $R(\tau)$ окажется существенно больше нуля.

При более быстром изменении значений процесса во времени или при значительном увеличении интервала τ статистическая связь между значениями $\xi(t_i)$ и $\xi(t_i + \tau)$ ослабевает, их знаки с равной вероятностью могут оказаться как одинаковыми, так и разными. В результате сумма (6.3) и значение $R(\tau)$ стремятся к нулю.

Функция $R(\tau)$ достигает максимума при $\tau = 0$. Значение $R(0) \geq R(\tau)$ соответствует средней мощности флуктуаций (дисперсии): $R(0) = \sigma^2$.

Чтобы располагать характеристикой временных свойств процесса, не зависящей от его мощности, КФ нормируют:

$$r(\tau) = R(\tau)/R(0), \quad (6.4)$$

где $r(\tau)$ — коэффициент корреляции, или нормированная КФ. Его основные свойства:

$$r(0) = 1; r(-\tau) = r(\tau); |r(\tau)| \leq r(0); r(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Подчеркнем четность функций $R(\tau) = R(-\tau)$ и $r(\tau) = r(-\tau)$. Конкретный вид $R(\tau)$ и $r(\tau)$ однозначно определяется свойствами рассматриваемого случайного процесса, но с увеличением $|\tau|$ обе функции стремятся к нулю, хотя и не всегда монотонно (например, в виде затухающих колебаний).

Спектральная плотность мощности (СПМ) флуктуаций случайного процесса есть функция $W(\omega)$, описывающая распределение *средней* мощности флуктуаций по частоте. Физический смысл СПМ состоит в следующем: $W(\omega)$ представляет собой *среднюю* мощность флуктуаций, приходящуюся на полосу частот 1 рад/с (или $1/(2\pi)$ Гц) при заданной частоте $\omega = 2\pi f$.

Формально $W(\omega)$ определяют, усредняя квадраты модулей спектральных плотностей напряжения большого числа реализаций случайного процесса:

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{T}, \quad (6.6)$$

где $\dot{S}(\omega)$ — спектральная функция реализации с длительностью T :

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^T s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Эта операция возможна благодаря тому, что *любая «состоявшаяся» реализация есть детерминированный сигнал*. В (6.6) черта сверху означает усреднение *по множеству реализаций*. Заметим, что непосредственное усреднение спектральных функций $\dot{S}(\omega)$ приводит к нулевому результату из-за

случайности и независимости фаз спектральных составляющих в различных реализациях. Функция $W(\omega)$, как и $|\dot{S}(\omega)|$, является четной, $W(\omega) = W(-\omega)$.

В соответствии с теоремой Винера—Хинчина корреляционная функция и СПМ связаны преобразованиями Фурье:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.7)$$

Принимая во внимание четность функций $R(\tau)$ и $W(\omega)$, соотношения (6.7) можно представить в виде

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{W(\omega)}{\pi} \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (6.8)$$

где $F(\omega) = W(\omega)/\pi$ — «односторонняя» спектральная плотность мощности, существующая только при $\omega \geq 0$.

Примерный вид СПМ и нормированных КФ для широкополосного и узкополосного случайных процессов приведен на рис. 6.3 и 6.4 соответственно, которые одновременно иллюстрируют соотношения (6.4), (6.5).

Эффективной шириной функции СПМ называют значение

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{W_{\text{max}}} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{1}{F_{\text{max}}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (6.9)$$

Определения $\Delta\omega_{\text{эф}}$ поясняет рис. 6.3, а: площадь штрихового прямоугольника должна быть равна площади под графиком функции СПМ, что следует из формулы (6.9).

На практике $\Delta\omega_{\text{эф}}$ обычно измеряют на уровне 0,5 от максимального значения СПМ, что удобнее. При этом $\Delta\omega_{\text{эф}0,5}$ получается несколько меньше, чем $\Delta\omega_{\text{эф}}$, но близкой к ней.

Ширину КФ (*интервал корреляции* τ_k) определяют как

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau, \quad (6.10)$$

а измеряют по уровню 0,5 от ее максимального значения (рис. 6.3, б). КФ узкополосного процесса имеет колебательный характер, поэтому время корреляции в таком случае приближенно определяют по ее огибающей (рис. 6.4, б).

В силу свойств преобразований Фурье (6.7), (6.8) время корреляции и ширина СПМ находятся в обратной зависимости: $\tau_k \sim 2\pi/\Delta\omega_{\text{эф}}$, или

$\tau_k \sim 1/\Delta f_{\text{эф}}$, т. е. широкополосному случайному процессу соответствует малый интервал корреляции и наоборот.

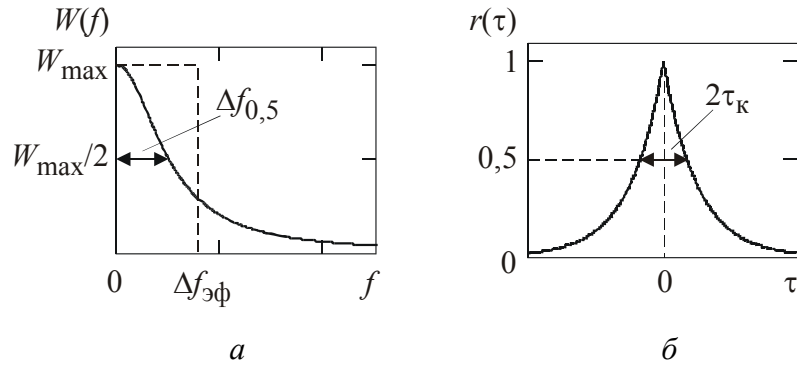


Рис. 6.3

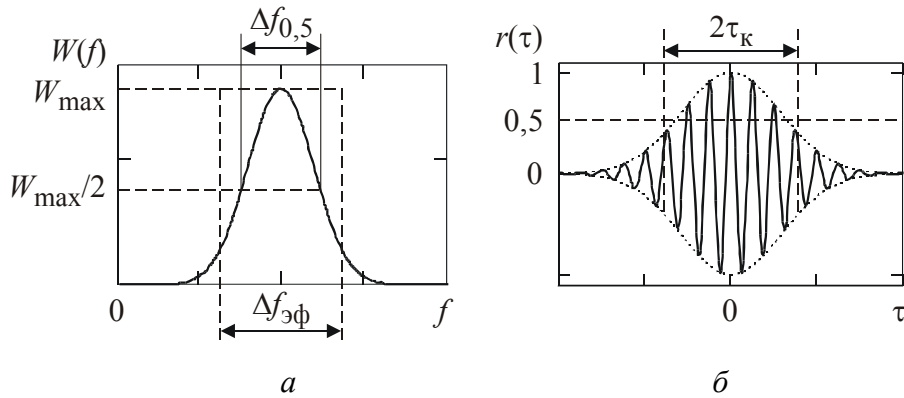


Рис. 6.4

Характеристики случайного процесса на выходе линейной цепи можно определить, используя спектральный или временной подход. При спектральном подходе функцию СПМ выходного процесса находят, умножая входную спектральную плотность мощности на *коэффициент передачи по мощности*. Этот коэффициент равен квадрату модуля комплексного коэффициента передачи цепи. Поэтому

$$W_{\text{вых}}(\omega) = W(\omega) |\dot{K}(\omega)|^2, \quad (6.11)$$

где $W_{\text{вых}}(\omega)$, $W(\omega)$ — СПМ на выходе и входе цепи соответственно; $\dot{K}(\omega)$ — комплексный коэффициент передачи. Справедливость (6.11) вытекает непосредственно из определения функции СПМ. Далее, используя соотношения (6.7) или (6.8), находят $R_{\text{вых}}(\tau)$ — КФ выходного процесса.

При временном подходе по известным КФ входного процесса и импульсной характеристике цепи $h(t)$ определяют КФ процесса на выходе

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) B_h(\tau - \lambda) d\lambda \quad (6.12)$$

как свертку $R(\tau)$ и $B_h(\tau)$ — КФ импульсной характеристики цепи $h(t)$, причем

$$B_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt.$$

Справедливость выражения (6.12) следует из справедливости принципа суперпозиции для линейной цепи: выходные значения случайного процесса $\xi_{\text{вых}}(t)$ можно найти методом интеграла наложения, зная входные значения $\xi(t)$ и импульсную характеристику $h(t)$. Затем, подставив $\xi_{\text{вых}}(t)$ в общую формулу (6.2), получим (6.12). Далее, используя соотношения (6.7) или (6.8), находим $W_{\text{вых}}(\omega)$.

В радиоэлектронике часто приходится иметь дело с прохождением случайных процессов через линейные цепи (колебательные контуры, фильтры и т. п.), полосы пропускания которых значительно меньше ширины функции СПМ входного сигнала. Для упрощения расчетов в этих случаях реальный входной шум без большой погрешности заменяют математической моделью — белым шумом. *Белый шум* — это случайный процесс, спектральная плотность мощности которого $W(\omega)$ постоянна на всех частотах: $W(\omega) = W_0$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Значение W_0 выбирают равным значению СПМ реального входного шума в области полосы пропускания исследуемой цепи.

Легко показать, что для белого шума $R(\tau) = W_0\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, откуда следуют соотношения:

$$W_{\text{вых}}(\omega) = W_0 |\dot{K}(\omega)|^2, \quad R_{\text{вых}}(\tau) = W_0 B_h(\tau), \quad (6.13)$$

имеющие непосредственное отношение к настоящей лабораторной работе.

Наблюдение и измерение параметров случайных процессов с помощью осциллографа и анализатора спектра. Люминофор экранов осциллографа и анализатора спектра обладает определенной «памятью», послесвечением: зафиксированная за период развертки прибора осциллограмма отрезка процесса не сразу исчезает; на нее накладывается осциллограмма следующего отрезка и т. д., так что наблюдается, в сущности, сумма осциллограмм, соответствующих различным отрезкам наблюдаемого сигнала (для анализатора спектра — СПМ этих отрезков); иногда это свойство, аналогичное свойству инерционности подвижной части электромеханического прибора, используют для приближенного усреднения (интегрирования) поступающего на осциллограф сигнала. Например, в режиме автозапуска развертки и при подаче на осциллограф непрерывного случайного сигнала распределение яркости «шумовой дорожки» по Y-оси экрана будет примерно соответствовать функции плотности распределения случайного процесса (известное правило «трех сигм» для оценки дисперсии нормального случайного процесса). Аналогично

объясняется наблюдение на экране спектроанализатора именно усредненной СПМ.

Особый интерес представляет используемая в настоящей лабораторной работе возможность непосредственного наблюдения и оценки на экране осциллографа КФ случайного процесса. Если выбрать длительность развертки в пределах нескольких интервалов корреляции τ_k , подать на Y-вход осциллографа исследуемый сигнал, установить ждущий режим развертки осциллографа и отрегулировать уровень запуска развертки так, чтобы запуск происходил только от достаточно больших выбросов процесса (рис. 6.5, а), то изображение на экране $\xi'(t)$ будет с точностью до постоянного множителя повторять КФ процесса, $\xi'(t) \sim R(t)$. При этом начальный участок осциллограммы совпадает с формой КФ практически точно, а по мере увеличения t расхождение увеличивается.

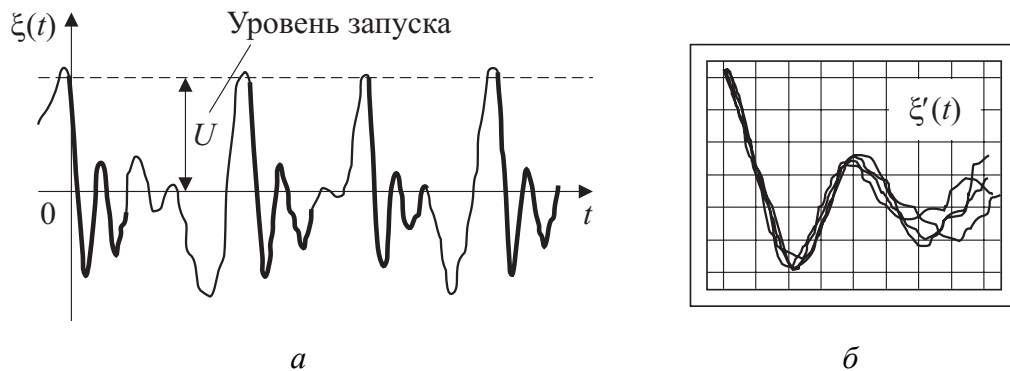


Рис. 6.5

На рис. 6.5, а представлена реализация случайного процесса $\xi(t)$. На рис. 6.5, б показана наблюдаемая осциллограмма $\xi'(t)$, сформированная наложением нескольких осциллограмм, соответствующих выделенным жирной линией на рис. 6.5, а отрезкам случайного процесса $\xi(t)$ и являющаяся их средним, или математическим ожиданием, поскольку для эргодических процессов КФ (6.2), полученная усреднением по времени, совпадает с корреляционной функцией, полученной усреднением по реализациям с помощью оператора математического ожидания $R(\tau) = M[\xi(t)\xi(t-\tau)]$.

При запуске развертки осциллографа в момент времени t_0 уровнем U значение $\xi(t_0) = U$ становится детерминированным и дальнейшее поведение процесса определяется условной плотностью вероятности

$$p_{\xi}(\xi, t_0 + \tau | \xi = U, t_0) = \frac{p_2(\xi = U, t_0; \xi, t_0 + \tau)}{p_{\xi}(\xi = U, t_0)},$$

или, сразу положив $t_0 = 0$,

$$p_{\xi}(\xi, \tau |_{\xi(0)=U}) = \frac{p_2(\xi(0)=U; \xi, \tau)}{p_{\xi}(\xi(0)=U)} = \frac{p_2(U, \xi, \tau)}{p_U(U)}. \quad (6.14)$$

Полагая процесс $\xi(t)$ гауссовским, запишем при $\xi(0) = U$ его двумерную плотность вероятности

$$p_2(\xi, U, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{\xi^2 - 2Ur(\tau)\xi + U^2}{2\sigma^2[1-r^2(\tau)]}\right],$$

где $r(\tau)$ — коэффициент корреляции, определенный выражением (6.2), σ^2 — дисперсия процесса, а плотность вероятности в знаменателе выражения (6.14)

$$p_U(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{U^2}{2\sigma^2}\right].$$

Тогда условная плотность вероятности (6.14) определится как

$$p_{\xi}(\xi, \tau |_{\xi(0)=U}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2[1-r^2(\tau)]}} \exp\left[-\frac{[\xi - Ur(\tau)]^2}{2\sigma^2[1-r^2(\tau)]}\right]. \quad (6.15)$$

Формула (6.15) описывает гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $Ur(\tau)$ и дисперсией $\sigma^2[1-r(\tau)]$.

Следовательно, наблюдаемая на экране осциллограмма $\xi'(t)$ с точностью до постоянного множителя будет повторять КФ процесса $\xi(t)$, $\xi'(t) \sim Ur(\tau) = UR(t)/R(0)$. Начальный участок осциллограммы совпадает с формой КФ практически точно, так как дисперсия $\sigma^2[1-r(0)] = 0$; далее, осциллограмма переходит в обычную шумовую дорожку, поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2[1-r(t)] = \sigma^2$. Практически этот предел достигается при значении t , составляющем от одного до двух-трех интервалов корреляции τ_k процесса $\xi(t)$.

6.2. Описание лабораторной установки

Установка (рис. 6.6) состоит из лабораторного макета и подключенных к нему осциллографа и анализатора спектра.

Лабораторный макет включает в себя генератор шума, набор фильтров (RC , RLC и ФНЧ с почти прямоугольной АЧХ) и коррелятор, позволяющий измерять нормированные КФ сигналов. Коррелятор реализует операцию, описываемую выражением (6.2), и его структурная схема содержит линию задержки на время τ , перемножитель и стрелочный прибор, выполняющий также функцию интегратора. Измерение КФ производится по точкам, для чего время τ задержки линии можно изменять от 0 до 9,9 мкс с шагом 0,1 мкс.

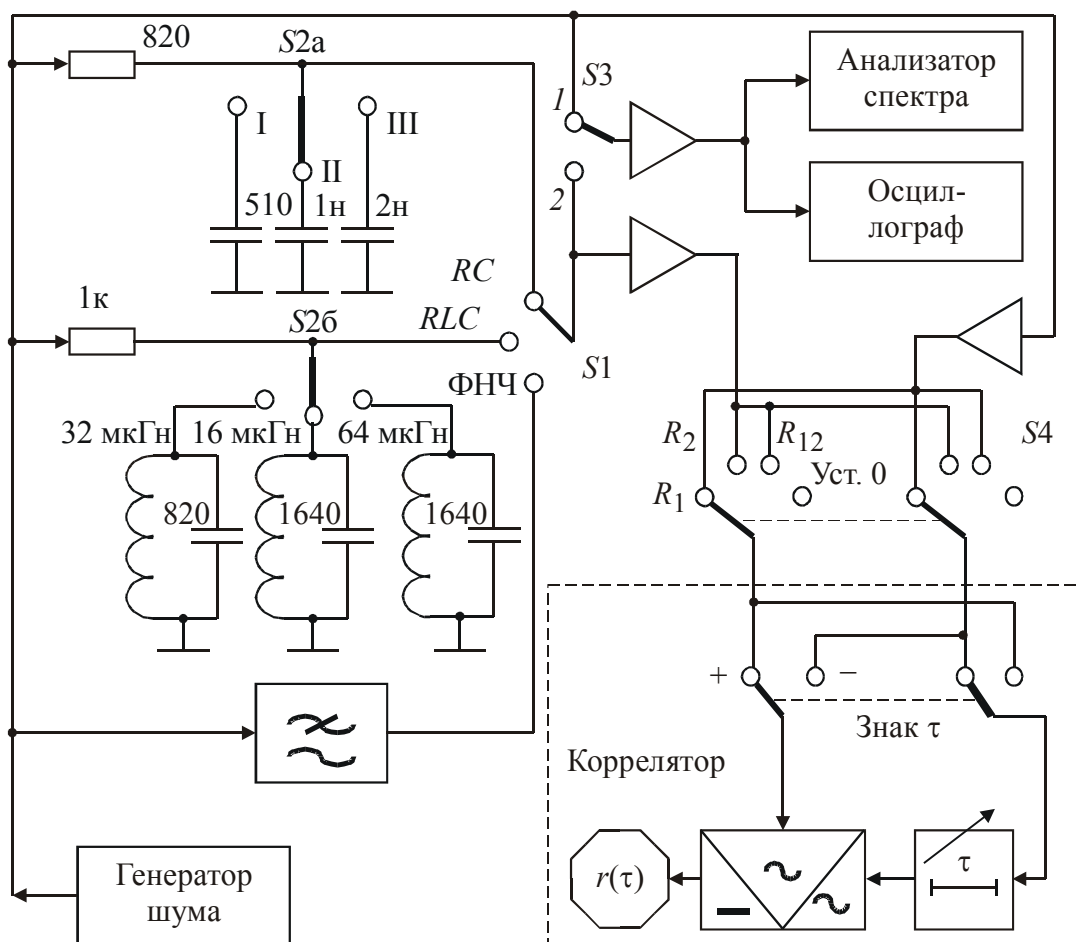


Рис. 6.6

Переключатель $S1$ макета позволяет выбрать вид исследуемой цепи; $S2$ — выбрать параметры выбранной цепи (кроме ФНЧ), $S3$ — подключать осциллограф и анализатор спектра ко входу (положение 1) или выходу (положение 2) исследуемой цепи.

Переключатель $S4$ определяет род работы коррелятора. В положении R_1 он измеряет КФ входного, R_2 — выходного процессов.

6.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Измерить функцию СПМ и нормированную КФ процесса, создаваемого генератором шума на входе фильтров; наблюдать форму КФ на экране осциллографа.

Для измерения функции СПМ:

- а) входной кабель анализатора спектра подключить к гнезду «Анализатор спектра» макета. Включить питание макета и анализатора;
- б) переключатель $S3$ макета поставить в положение 1;
- в) на анализаторе спектра установить режим измерения спектра мощности;

г) совместить отметку нулевой частоты с началом координатной сетки экрана, а регуляторами полосы обзора и усиления установить удобное для наблюдения изображение спектра. Оно будет примерно соответствовать рис. 6.3, а. Изображение зарисовать.

Измерить ширину функции СПМ по уровню 0,5 от максимума в области положительных частот с помощью частотных меток.

Для измерения нормированной КФ:

а) произвести установку нуля измерителя КФ; для этого переключатель $S4$ поставить в положение «Уст. 0» и ручкой «Уст. 0» добиться нулевых показаний стрелочного прибора;

б) КФ входного шума измерить, поставив переключатель $S4$ в положение R_1 . Перед измерением произвести нормировку КФ. Для этого переключатель «Задержка τ » поставить в положение «0» и ручкой «Усиление 1» установить стрелку прибора на деление «+1» (правый конец шкалы), что будет соответствовать значению $r(0)=1$. Затем, переключая задержку τ с шагом 0,1 мкс, снять правую часть КФ (до уровня значений $\sim 0,1$). Построить график. Определить время корреляции τ_k по уровню 0,5. Проконтролировать выполнение соотношения $\tau_k \sim 1/\Delta f_{эф}$.

Для наблюдения осциллограмм КФ:

а) входной кабель осциллографа подключить к гнезду «Осциллограф» макета. Включить осциллограф. Регулятором «Усиление Y » установить размер изображения по вертикали примерно равным половине диаметра экрана;

б) установить ждущий режим развертки осциллографа;

в) длительность развертки выбрать в пределах $(2 \dots 5)\tau_k$;

г) уровень запуска генератора развертки осциллографа выбрать так, чтобы запуск производился только достаточно большими положительными выбросами шума (рис. 6.5, а). Сравнить форму КФ и время корреляции, измеренные по осциллограмме и с помощью коррелятора.

Измерение функции СПМ, КФ и наблюдение осциллограмм в последующих пунктах задания удобно производить одновременно.

2. Измерить функцию СПМ, КФ и наблюдать осциллограммы КФ на выходе RC -фильтра RCI .

Переключить переключатель $S3$ макета в положение 2; $S1$ — в положение « RC », $S2$ — в положение I.

На экране анализатора спектра появится изображение функции СПМ выходного сигнала, ширина которой значительно меньше, чем у входного, который, следовательно, можно считать белым шумом. Зарисовать форму спектра и измерить его ширину на уровне 0,5. Это удобно делать, увеличив масштаб изображения по частоте. Коэффициент передачи RC -фильтра $K(\omega)=1/(1+j\omega RC)$, поэтому вид функции СПМ подчиняется зависимости

$W_{\text{вых}}(\omega) = W_0 / \left[1 + (\omega RC)^2 \right]$. Точное значение эффективной ширины спектра $\Delta f_{\text{эф}} = 1/(4RC)$, а значение, измеренное на уровне 0,5: $\Delta f_{0,5} = 1/(2\pi RC)$. Значения R в омах и C в пико- либо нанофарадах (если рядом с цифрой стоит «н») приведены на рис. 6.6. Сопоставить измеренные и расчетные значения.

Измерение $r(\tau)$ выходных процессов производят в положении « R_2 » переключателя $S4$. Перед измерением провести нормировку КФ, как в п. 1, но ручкой «Усиление 2». Снять $r(\tau)$, построить график, измерить τ_k .

Обратить внимание на изменение ширины КФ, дать этому объяснение.

Импульсная характеристика RC -фильтра, существующая при $t \geq 0$, равна $h(t) = (1/(RC))e^{-t/(RC)}$, поэтому при воздействии на вход белого шума $R_{\text{вых}}(\tau) = (W_0/(2RC))e^{-|\tau|/(RC)}$ и $\tau_k = 1,4 RC$.

Сопоставить измеренные и расчетные значения.

Наблюдаемые осциллограммы КФ должны представлять собой затухающую экспоненту. Зарисовать их, измерить τ_k и сопоставить с измеренными с помощью коррелятора.

Перечисленные измерения выполнить для фильтров RC_{II} , RC_{III} , при этом каждый раз нормировать КФ ручкой «Усиление 2». Эти фильтры имеют относительно большие постоянные времени ($RC_{III} > RC_{II} > RC_I$). Объяснить изменения $\Delta f_{\text{эф}}$ и τ_k .

3. Измерить функцию СПМ, КФ и наблюдать осциллограммы КФ на выходе колебательного контура RLC_I .

Перевести переключатель $S1$ макета в положение « RLC », $S2$ — в положение I. На экране анализатора спектра появится изображение функции СПМ на выходе контура. Огибающая спектра должна соответствовать форме возведенной в квадрат АЧХ контура с максимумом на частоте резонанса.

Зарисовать изображение, измерить частоту максимума и эффективную ширину функции СПМ на уровне 0,5 от максимума.

Комплексный коэффициент передачи колебательного контура $K(\omega) = 1 / \left[1 + j(\omega - \omega_0)/\alpha \right]$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота, $\alpha = 1/(2RC)$ — коэффициент затухания. Поэтому при воздействии на его вход белого шума вид функции СПМ на выходе должен подчиняться зависимости $W_{\text{вых}}(\omega) = W_0 / \left[1 + (\omega - \omega_0)^2 / \alpha^2 \right]$. Точное значение эффективной ширины спектра $\Delta f_{\text{эф}} = \alpha/4$, а ширина, измеренная по уровню 0,5: $\Delta f_{0,5} = \alpha/(2\pi)$.

Сопоставить измеренные и расчетные значения. Номинальные значения R в килоомах, L в микрогенри и C в пикофарадах приведены на рис. 6.6.

Измерить нормированную КФ выходного процесса, предварительно произведя нормировку ручкой «Усиление 2»; построить график, измерить τ_k .

Полоса пропускания контура столь мала, что на его выход проходят компоненты входного спектра с частотами, мало отличающимися от резонансной. На выходе образуется типичный узкополосный процесс, который может быть представлен в виде синусоиды с медленно меняющимися по случайному закону амплитудой и фазой. Образование этого процесса можно также объяснить суммированием откликов контура с импульсной характеристикой, имеющей колебательный характер $h(t) = \alpha \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t$, $t \geq 0$, на выбросы входного шума. В данном случае $B_h(t) = h(t)$, что, в соответствии с (6.11), определяет и форму КФ выходного шума $R_{\text{вых}}(\tau) = \alpha W_0 \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 \tau$ в виде затухающей косинусоиды с периодом $2\pi/\omega_0$, подобно показанной на рис. 6.4, б.

Нормированную КФ измерять до уровня 0,1; измерение τ_k произвести по огибающей. Сопоставить измеренные и расчетные значения. Зарисовать осциллограммы и сравнить их вид с измеренной $r(\tau)$.

Перечисленные измерения выполнить для цепей RLC_{II} и RLC_{III} .

Контур RLC_{II} имеет меньшее значение коэффициента затухания α по сравнению с RLC_I , а контур RLC_{III} настроен на вдвое меньшую частоту ω_0 . Объяснить происходящие в связи с этим изменения функции СПМ и формы КФ.

4. Измерить функцию СПМ, нормированную КФ и наблюдать осциллограммы КФ шума на выходе ФНЧ с АЧХ, близкой к прямоугольной. Перевести переключатель $S1$ макета в положение «ФНЧ».

Данный фильтр имеет коэффициент передачи по мощности, близкий к 1 и почти одинаковый для всех спектральных составляющих вплоть до частоты среза Ω_{max} .

При воздействии на вход белого шума функция СПМ выходного сигнала имеет вид:

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \begin{cases} W_0, & |\omega| \leq |\Omega_{\text{max}}|; \\ 0, & |\omega| > |\Omega_{\text{max}}|. \end{cases}$$

Зарисовать огибающую спектра на экране и определить $\Delta f_{0,5}$. Она совпадает с частотой среза F_{max} .

КФ выходного процесса $R_{\text{вых}}(\tau) = W_0 (\Omega_{\text{max}} / \pi) \text{sinc}(\Omega_{\text{max}} \tau)$, нормированная КФ $r(\tau) = \sin(2\pi F_{\text{max}} \tau) / (2\pi F_{\text{max}} \tau)$, так как преобразованием Фурье от прямоугольной функции является функция вида $\text{sinc } x = \sin x / x$. Расчетная

ширина КФ по огибающей составляет $\tau_k \approx 2,8/\Omega_{\max}$. Моменты перехода КФ через нуль кратны $2\pi/\Omega_{\max} = 1/F_{\max}$.

Измерить нормированную КФ, построить график, определить τ_k . Сравнить полученные результаты с расчетными.

Зарисовать осциллограммы КФ выходного шума. Сопоставить их с измеренной с помощью коррелятора $r(\tau)$.

Содержание отчета

- краткие теоретические сведения о характеристиках случайных процессов;
- структурная схема лабораторной установки;
- таблицы результатов измерений, расчетные значения, графики экспериментальных зависимостей и рисунки осциллограмм, необходимые пояснения к ним;
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Дать определение корреляционной функции $R(\tau)$ стационарного эргодического процесса. Какие свойства случайного процесса она описывает? Что такое нормированная корреляционная функция (коэффициент корреляции)? Назвать ее основные свойства.
2. Какие свойства случайных процессов описывает функция спектральной плотности мощности $W(\omega)$? В чем заключается ее физический смысл? Какова размерность $W(\omega)$?
3. Как определить мощность случайного процесса на выходе линейной цепи?
4. Объяснить принцип измерения нормированной КФ в лабораторной установке.
5. В каком соотношении между собой находятся интервалы корреляции шума на входе и выходе линейной цепи?
6. Сравнить время корреляции и эффективную полосу для идеальных ФНЧ с частотами среза Ω_1 и Ω_2 , если $\Omega_1 > \Omega_2$. На вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 .
7. Сравнить время корреляции и эффективную полосу для идеальных полосовых фильтров с параметрами:
 - а) средняя частота полосы пропускания $\omega_1 > \omega_2$, полоса пропускания $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$;
 - б) $\omega_1 = \omega_2$, $\Delta\omega_1 > \Delta\omega_2$.На вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 .

8. Вычислить корреляционную функцию случайного сигнала на выходе полосового фильтра с прямоугольной АЧХ; центральная частота фильтра ω_0 , полоса пропускания $\Delta\omega$, на входе шум с функцией корреляции $R(\tau) = W_0\delta(\tau)$. Как влияет на результат ФЧХ фильтра?
9. Вычислить корреляционную функцию случайного сигнала на выходе низкочастотного фильтра с прямоугольной АЧХ; полоса пропускания $\Delta\omega$, на входе шум с функцией корреляции $R(\tau) = W_0\delta(\tau)$. Как влияет на результат ФЧХ фильтра?
10. На входе полосового фильтра с прямоугольной АЧХ, центральной частотой ω_0 и полосой пропускания $\Delta\omega$ действует нормальный шум с функцией корреляции $R(\tau) = W_0\delta(\tau)$. Найти распределение шума на выходе.
11. На основании данных эксперимента показать выполнение соотношения $\Delta\omega_{\text{эф}} \tau_k \approx 2\pi$ для входного и выходных шумовых сигналов.
12. Привести и пояснить соотношения, обосновывающие возможность наблюдения корреляционных функций случайных сигналов на экране осциллографа при непосредственной подаче шума на вход канала «У».
13. Случайная величина φ принимает значения $\pi/4$ и $-\pi/4$ с вероятностями 0,5. Найти ковариационную функцию случайного процесса $x(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Является ли данный процесс стационарным?
14. Дать определение эффективной ширины $\Delta\omega_{\text{эф}}$ функции СПМ. Как измеряют $\Delta\omega_{\text{эф}}$ на практике?
15. Что такое интервал корреляции случайного процесса? Как его измеряют на практике?
16. Как определяют характеристики случайного процесса на выходе линейной цепи при: а) спектральном подходе; б) временном подходе?
17. Какой вид имеют функция СПМ и нормированная КФ шума на выходе RC-фильтра нижних частот? Что в них изменится, если постоянную времени $\tau = RC$: а) увеличить; б) уменьшить?
18. Объяснить зависимости времени корреляции от параметров цепи: для RC-фильтра — от постоянной времени, для колебательного контура — от полосы пропускания и резонансной частоты.
19. Какие сигналы называют случайными? Привести примеры случайных сигналов. Что означает термин «случайный процесс»? Что такое реализация случайного процесса? Является ли она случайным сигналом?

7. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

7.1. Теоретические сведения

Согласованная фильтрация детерминированных сигналов. Задача об оптимальной фильтрации детерминированного сигнала может быть сформулирована следующим образом. Пусть на вход фильтра поступает аддитивная смесь $s_{\text{вх}}(t)$ детерминированного сигнала $s_1(t)$, который нужно обнаружить, и стационарного нормального центрированного белого шума $n_1(t)$ с двусторонней спектральной плотностью мощности W_0 .

Выходной сигнал линейного фильтра $s_{\text{вых}}(t)$ также будет представлять собой аддитивную смесь сигнала $s_2(t)$ и шума $n_2(t)$ с дисперсией σ_2^2 .

Требуется найти такой *линейный* фильтр, который обеспечит в некоторый момент времени t_0 максимальное отношение сигнал/шум на выходе:

$$C/\text{Ш}_{\text{вых}} = \frac{|s_2(t)|_{\max}}{\sigma_2} = \frac{|s_2(t_0)|}{\sigma_2} \rightarrow \max. \quad (7.1)$$

Временные и частотные характеристики согласованного фильтра. Детерминированная составляющая отклика фильтра в момент t_0 представляет собой свертку обнаруживаемого сигнала $s_1(t)$ с импульсной характеристикой фильтра $h(t)$:

$$s_2(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau. \quad (7.2)$$

Для произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство Коши—Буняковского:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left| \int_a^b f^2(x)dx \right| \cdot \left| \int_a^b g^2(x)dx \right|, \quad (7.3)$$

причем равенство достигается только в том случае, если функции $f(x)$ и $g(x)$ пропорциональны друг другу.

Применив неравенство (7.3) к правой части формулы (7.2), получим:

$$|s_2(t_0)| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_0 - \tau)d\tau}.$$

Равенство будет достигаться, если

$$h(t_0 - \tau) = As_1(\tau), \quad (7.4)$$

где A — постоянный коэффициент, имеющий размерность $\text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Гц}/\text{В}$ (импульсная характеристика имеет размерность частоты, т. е. $1/\text{с}$). Выполнив замену переменной $t = t_0 - \tau$, формулу (7.4) можно переписать в виде

$$h(t) = As_1(t_0 - t). \quad (7.5)$$

Фильтр, обладающий такой импульсной характеристикой, называется *согласованным* фильтром для сигнала $s_1(t)$. Как видно из (7.5), импульсная характеристика согласованного фильтра представляет собой сдвинутую на t_0 и зеркально перевернутую во времени копию входного сигнала, что на примере треугольного импульса иллюстрирует рис. 7.1.

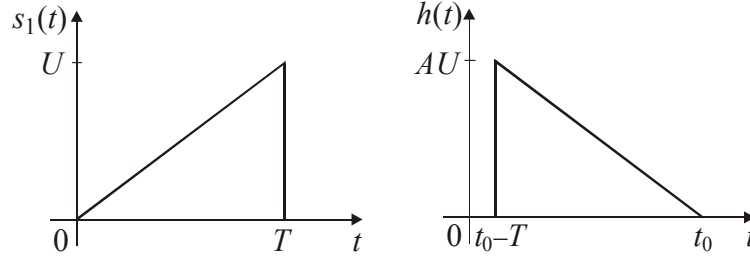


Рис. 7.1

Коэффициент передачи согласованного фильтра представляет собой преобразование Фурье от импульсной характеристики (7.5) и может быть легко определен с помощью свойств преобразования Фурье:

$$\dot{K}(\omega) = A\dot{S}_1^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Отношение сигнал/шум на входе и выходе согласованного фильтра.

Поскольку шум на входе $n_1(t)$ является белым и, следовательно, его дисперсия бесконечно велика, отношение сигнал/шум на входе согласованного фильтра, рассчитываемое аналогично (7.1), равно нулю. Для расчета выходного отношения сигнал/шум необходимо предварительно определить вид полезного выходного сигнала.

Подставив в интеграл свертки выражение (7.5) для импульсной характеристики согласованного фильтра, получим:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')As_1(t_0 - t + t')dt' = A \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t')As_1(t' - (t - t_0))dt' = AB_{s_1}(t - t_0),$$

где $B_{s_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_1(t - \tau)dt$ — корреляционная функция сигнала $s_1(t)$.

Поскольку максимальное значение корреляционной функции детерминированного сигнала достигается при $\tau = 0$ и равно его энергии E_1 , максимальное значение сигнала на выходе согласованного фильтра достигается при $t = t_0$ и равно AE_1 .

Дисперсия выходного шума может быть рассчитана в частотной области с использованием равенства Парсеваля:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 A^2 |\dot{S}_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} W_0 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_1(\omega)|^2 d\omega = W_0 A^2 E_1.$$

Окончательное выражение для выходного отношения сигнал/шум имеет вид

$$C/Ш_{\text{вых}} = \frac{AE_1}{\sqrt{W_0 A^2 E_1}} = \sqrt{\frac{E_1}{W_0}}.$$

Итак, отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра не зависит от формы обрабатываемого сигнала, а определяется лишь его *энергией* и спектральной плотностью мощности входного белого шума.

Применение согласованных фильтров.

1. Повышение разрешения по дальности в локационных системах. В радиолокационных системах передатчик излучает зондирующий импульс, который доходит до цели, отражается от нее и, многократно ослабленный, в смеси с шумом поступает на вход приемника.

Обнаружение цели сводится к обнаружению отраженного сигнала, а определение расстояния до цели — к измерению задержки между зондирующим и отраженным импульсами.

Так как форма излучаемого импульса известна, для обнаружения отраженного сигнала нужно использовать согласованный фильтр, позволяющий максимизировать отношение сигнал/шум на выходе.

Для разрешения двух близко расположенных целей необходимо, чтобы два отраженных сигнала воспринимались отдельно. Поэтому желательно иметь выходной сигнал согласованного фильтра в виде как можно более узкого пика. Этого можно достичь уменьшением длительности излучаемого импульса, одновременно увеличив его амплитуду, чтобы обеспечить неизменность энергии. Однако действовать так бесконечно нельзя — электрическая прочность элементов выходного каскада передатчика имеет предел.

Но существует и иной путь решения проблемы. Поскольку выходной сигнал согласованного фильтра связан преобразованием Фурье с энергетическим спектром обнаруживаемого сигнала, узкий пик на выходе согласованного фильтра можно получить, расширив спектр сигнала. Как известно, эффективная ширина спектра сигнала и его длительность связаны *соотношением неопределенности*: $B = \Delta t_{\text{эф}} \Delta f_{\text{эф}} \geq 1$, где произведение эффективных значений ширины спектра и длительности B называют *базой* сигнала.

Сигналы, для которых соотношение неопределенности близко к равенству, называются *простыми*. Однако, поскольку ширина спектра определяется внутриимпульсной структурой сигнала, существуют сигналы с базой, много большей единицы, которые называются *сложными*.

Таким образом, разрешение по дальности можно повысить, используя сложные сигналы.

2. Скрытая передача сигналов. Тот факт, что отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра определяется лишь энергией полезного сиг-

нала и не зависит от его формы, позволяет «замаскировать» сигнал, «спрятать» его в шумах.

Действительно, если сильно уменьшить амплитуду полезного сигнала, соответственно увеличив при этом его длительность, чтобы сохранить энергию постоянной, сигнал перестанет визуально выделяться на фоне шумов.

Однако, если сигнал имеет небольшую базу, такая «маскировка» во временной области приведет к сильному сужению спектра сигнала. Так как энергия остается неизменной, на тех частотах, где сосредоточен спектр сигнала, его спектральная плотность будет значительно превышать (по модулю) спектральную плотность шума. Такой сигнал может быть легко обнаружен в спектральной области.

Если же одновременно с удлинением сигнала ввести внутриимпульсную модуляцию, можно избежать сужения спектра и «скрыть» сигнал под шумами как во временной, так и в спектральной области. Таким образом, скрытная передача может осуществляться с помощью сложных сигналов.

3. Примеры сложных сигналов. К применяемым на практике сложным радиосигналам относятся частотно-модулированные и фазоманипулированные радиосигналы.

Для частотно-модулированных сигналов одним из наиболее распространенных сигналов является сигнал с линейной ЧМ (ЛЧМ). Мгновенная частота и фаза радиоимпульса с ЛЧМ при $|t| \leq T/2$ определяются равенствами:

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma t, \quad \psi(t) = \int \omega(t) dt = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2},$$

так что ЛЧМ-сигнал представляется выражением

$$s(t) = U \cos \left\{ \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2} \right\}, \quad |t| \leq T/2.$$

Примерный график ЛЧМ-сигнала, законы изменения его частоты и начальной фазы показаны на рис. 7.2.

Особенностью ЛЧМ-сигнала является возможность *управлять его базой*, при постоянной длительности импульса регулируя *девиацию частоты*, равную $\gamma T/2$. При значениях базы $T \Delta f_{\text{эф}} > 100$ спектр ЛЧМ-радиоимпульса хорошо аппроксимируется финитной функцией частоты с прямоугольной огибающей:

$$|\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)| = U \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}, \quad \omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{2} \right],$$

а $\Delta\omega_{\text{эф}}$ радиоимпульса при этих значениях базы совпадает с удвоенной девиацией частоты: $\Delta\omega_{\text{эф}} \approx \gamma T$.

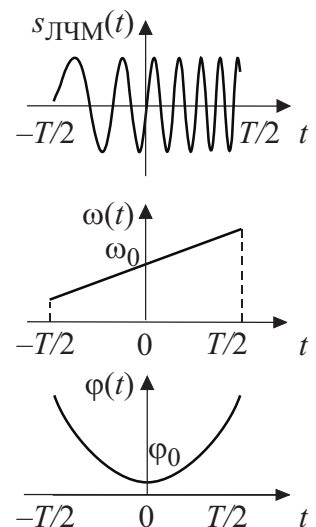


Рис. 7.2

Корреляционная функция ЛЧМ-сигнала при большой базе приближенно определяется следующим образом [3]:

$$B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) \approx \frac{U^2 T}{2} \frac{\sin\left(\frac{\gamma T \tau}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\right)}{\frac{\gamma T \tau}{2}} \cos(\omega_0 \tau), \quad |\tau| \leq T. \quad (7.6)$$

Одним из распространенных примеров фазоманипулированных радиосигналов являются коды Баркера. График видеосигнала, представляющего закон манипуляции для 13-элементного кода Баркера, показан на рис. 7.3, а, а его корреляционная функция — на рис. 7.3, б. Штрихами на рис. 7.3, б изображен график корреляционной функции прямоугольного импульса с такими же длительностью и энергией.

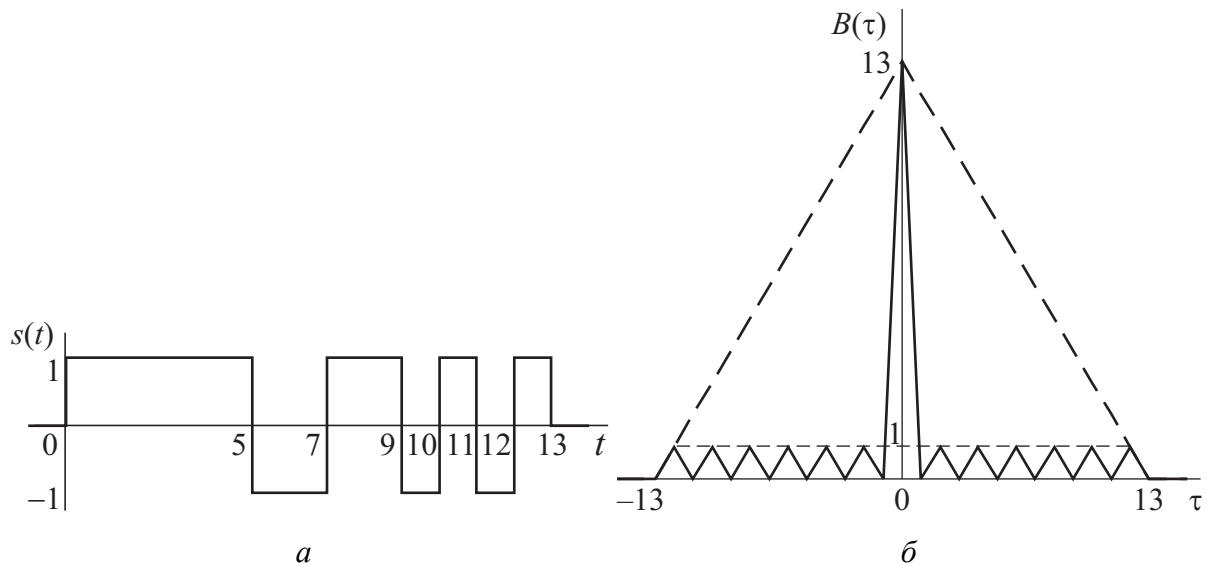


Рис. 7.3

Из рисунка видно, что корреляционная функция представляет собой узкий пик, окруженный боковыми лепестками малого уровня. Коды Баркера обеспечивают минимально возможный относительный уровень боковых лепестков, равный $1/N$, где N — число элементов кода. К сожалению, такие коды существуют лишь для длин 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 и 13 элементов.

Квазиоптимальная фильтрация детерминированных сигналов. Во многих случаях точная реализация согласованного фильтра оказывается сложной, а подчас и неразрешимой задачей. В таких ситуациях можно выбрать относительно узкий класс *физически и конструктивно реализуемых* фильтров и отыскать в пределах этого класса значения параметров, обеспечивающие максимальное отношение сигнал/шум на выходе. Разумеется, это отношение сигнал/шум окажется заведомо хуже, чем при использовании согласованного фильтра. Однако при обработке сигналов простой формы про-

игрыш может быть невелик. Выбранный указанным образом фильтр называется *квазиоптимальным*.

Рассмотрим конкретный пример — отыщем квазиоптимальный фильтр для обработки прямоугольного импульса с амплитудой U и длительностью T . Класс рассматриваемых фильтров ограничим простейшими интегрирующими RC -цепями. У такой цепи имеется единственный параметр — постоянная времени $\tau = RC$, которую и нужно оптимизировать.

Принимая во внимание, что максимальное значение полезного сигнала достигается в момент времени $t_0 = T$, можно получить выражение для отношения сигнал/шум на выходе квазиоптимального фильтра:

$$C/Ш_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{U^2 T}{W_0}} \sqrt{\frac{2\tau}{T}} (1 - e^{-T/\tau}). \quad (7.7)$$

Первый множитель в правой части (7.7) представляет собой отношение сигнал/шум на выходе *согласованного* фильтра. Следовательно, оставшаяся часть является безразмерным множителем, характеризующим проигрыш квазиоптимального фильтра согласованному. Как видно из (7.7), этот проигрыш зависит от соотношения между постоянной времени и длительностью импульса.

Численные методы позволяют определить, что максимальное значение характеризующего проигрыш согласованному фильтру множителя равно 0,9025, при этом данное значение достигается при $\tau/T = 0,7959$.

Как отмечалось ранее, форма импульсной характеристики согласованного фильтра повторяет форму обрабатываемого сигнала, перевернутого во времени. Поэтому разумно предположить, что от интегрирующей RC -цепи можно получить меньший проигрыш согласованному фильтру при обработке не прямоугольного, а *треугольного* несимметричного импульса (на рис. 7.4 приведены графики такого импульса и импульсной характеристики RC -цепи).

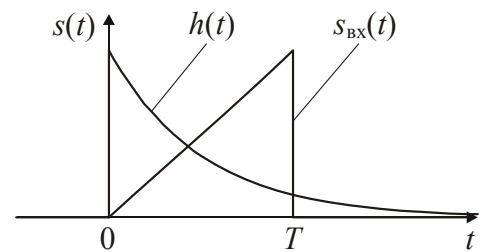


Рис. 7.4

Расчет отношения сигнал/шум на выходе в данном случае дает:

$$C/Ш_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{U^2 T}{3W_0}} \sqrt{\frac{6\tau}{T}} \left(1 - \frac{\tau}{T} (1 - e^{-T/\tau}) \right). \quad (7.8)$$

Первый множитель в (7.8) представляет собой отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра, а оставшаяся часть характеризует проигрыш согласованному, также зависящий от отношения τ/T . Для треугольного импульса максимальное значение множителя, характеризующего потери, составляет 0,9841. Указанное значение достигается при $\tau/T = 0,4653$.

Следует отметить, что незначительный проигрыш согласованному фильтру в рассмотренных примерах был получен лишь благодаря простой форме обрабатываемых сигналов. Для сложных сигналов реализовать квази-оптимальные фильтры в виде простых цепей и обеспечить при этом малый проигрыш согласованному фильтру не представляется возможным.

7.2. Описание компьютерной программы

Вид окна компьютерной программы «Оптимальная фильтрация сигналов» (**lab_filter.exe**) показан на рис. 7.5.

Примечание. Выполняемое в программе моделирование процессов фильтрации основано на дискретной обработке сигналов, поэтому все приводимые в данном описании физические единицы измерения являются условными и используются исключительно для представления параметров сигналов и фильтров в наглядном виде.

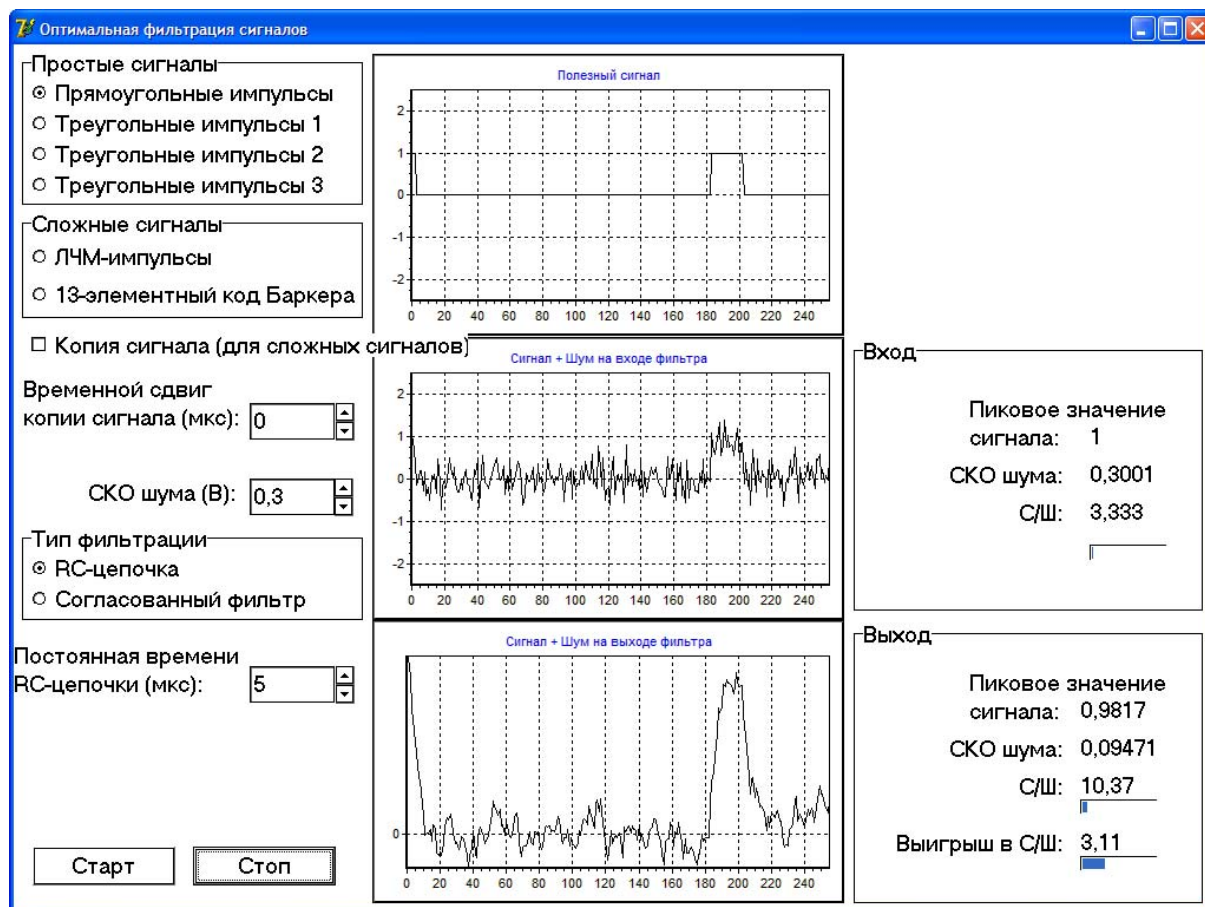


Рис. 7.5

В окне имеются следующие элементы управления:

- Переключатели **Простые сигналы** и **Сложные сигналы** позволяют выбирать тип используемого сигнала из числа следующих вариантов:

- **Прямоугольные импульсы:** генерируются периодические прямоугольные импульсы с амплитудой 1 В, длительностью 20 мкс и периодом повторения 200 мкс.
- **Треугольные импульсы 1:** генерируются периодические *несимметричные* треугольные импульсы (вертикальный фронт *справа*) с амплитудой 1 В, длительностью 20 мкс и периодом повторения 200 мкс.
- **Треугольные импульсы 2:** генерируются периодические *несимметричные* треугольные импульсы (вертикальный фронт *слева*) с амплитудой 1 В, длительностью 20 мкс и периодом повторения 200 мкс.
- **Треугольные импульсы 3:** генерируются периодические *симметричные* треугольные импульсы с амплитудой 1 В, длительностью 20 мкс и периодом повторения 200 мкс.
- **ЛЧМ-импульсы:** генерируются периодические ЛЧМ-импульсы с амплитудой 1 В, длительностью 100 мкс, центральной частотой 105 кГц, шириной спектра 200 кГц и периодом повторения 200 мкс.
- **13-элементный код Баркера:** генерируются периодические импульсы, представляющие собой двуполярный 13-элементный код Баркера с амплитудой 1 В, длительностью 65 мкс и периодом повторения 200 мкс.
- Флажок **Копия сигнала** позволяет включить режим формирования двух сдвинутых копий сигнала. Данный флажок действует только для сложных сигналов.
- Поле ввода **Временной сдвиг копии сигнала** позволяет задавать сдвиг по времени между копиями сложного сигнала (в микросекундах; значение должно быть целым числом). Кнопки со стрелками, расположенные в правой части поля, изменяют значение с шагом 1 мкс.
- Поле ввода **СКО шума** позволяет задавать уровень шума, генерируемого на входе фильтра (задается среднеквадратическое значение в вольтах). Кнопки со стрелками, расположенные в правой части поля, изменяют значение с шагом 0,1 В.

Примечание. Генерируемый шум имеет нормальное распределение, его спектральная плотность мощности (СПМ) равномерна в полосе частот 0...500 кГц, выше частоты 500 кГц СПМ шума равна нулю.

- Переключатель **Тип фильтрации** позволяет выбрать тип используемого фильтра:
 - **RC-цепочка:** используется простейший фильтр нижних частот в виде интегрирующей RC-цепочки.
 - **Согласованный фильтр:** используется фильтр, согласованный с выбранным в данный момент сигналом.
- Поле ввода **Постоянная времени RC-цепочки** позволяет задавать постоянную времени RC-фильтра нижних частот (в микросекундах). Кнопки со

стрелками, расположенные в правой части поля, изменяют значение с шагом 1 мкс.

- Кнопки **Старт** и **Стоп** служат для запуска и остановки процесса моделирования.

В центральной части окна расположены три графика, которые в реальном времени показывают следующие сигналы:

- Верхний график — полезный сигнал на входе фильтра.
- Средний график — смесь сигнала и шума на входе фильтра.
- Нижний график — смесь сигнала и шума на выходе фильтра.

В правой части окна расположены информационные панели **Вход** и **Выход**, отображающие статистическую информацию о входном и выходном сигналах соответственно. Отображаются следующие данные:

- **Пиковое значение сигнала:** максимальное значение полезного сигнала на входе или выходе фильтра (в вольтах).
- **СКО шума:** среднеквадратическое значение шума на входе или выходе фильтра (в вольтах).
- **С/Ш:** отношение сигнал/шум на входе или выходе фильтра (по уровню).
- **Выигрыш в С/Ш:** коэффициент увеличения отношения сигнал/шум (по уровню) на выходе фильтра по сравнению со входом.

7.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Исследование зависимости отношения сигнал/шум на выходе от уровня шума на входе согласованного фильтра. Для всех шести типов сигналов измерить зависимость выходного отношения сигнал/шум от СКО входного шума. Режим фильтрации — «Согласованный фильтр». Флажок «Копия сигнала» должен быть *снят*. СКО входного шума увеличивать до тех пор, пока выходное отношение С/Ш не станет меньше единицы. Результаты занести в таблицу.

СКО шума, В	С/Ш _{ВЫХ}					ЛЧМ- импульсы	Код Баркера
	Прямо- угольные импульсы	Треугольные импульсы					
		1	2	3			

2. Исследование квазиоптимальной фильтрации. Для сигналов «Прямоугольные импульсы», «Треугольные импульсы 1» и «Треугольные импульсы 2» измерить зависимость выходного пикового уровня сигнала и выходного отношения сигнал/шум от постоянной времени интегрирующей RC-цепочки. Кроме того, необходимо измерить зависимость СКО выходного шума (для сигнала любого типа) от постоянной времени интегрирующей RC-цепочки. Режим фильтрации — «RC-цепочка». Флажок «Копия сигнала» должен быть *снят*. СКО входного шума 0,3 В. Постоянную времени RC-

цепочки изменять от 1 до 30 мкс. Результаты занести в таблицу. Кроме того, для каждого из указанных сигналов необходимо измерить отношение сигнал/шум на выходе *согласованного* фильтра.

τ , мкс	СКО _{вых} , В	Прямоугольные импульсы		Треугольные импульсы 1		Треугольные импульсы 2	
		$S_{\text{вых max}}$, В	С/Ш _{вых}	$S_{\text{вых max}}$, В	С/Ш _{вых}	$S_{\text{вых max}}$, В	С/Ш _{вых}

3. Исследование скрытной передачи сигнала. Используемые сигналы — «ЛЧМ-импульсы» и «Код Баркера». Режим фильтрации — «Согласованный фильтр». Флажок «Копия сигнала» должен быть *снят*. Следует установить значение СКО входного шума равным нулю и постепенно увеличивать его до тех пор, пока сигнал не перестанет визуально выделяться на фоне шума. Установленный уровень шума, а также отношение С/Ш на входе и выходе согласованного фильтра занести в таблицу.

Сигнал	СКО _{вх} , В	С/Ш _{вх}	С/Ш _{вых}
ЛЧМ-импульсы			
Код Баркера			

4. Исследование разрешающей способности по времени при использовании сложных сигналов. Используемые сигналы — «ЛЧМ-импульсы» и «Код Баркера». Режим фильтрации — «Согласованный фильтр». СКО входного шума равно нулю (шум отключен). При выполнении данного пункта необходимо *установить* флажок «Копия сигнала». Следует установить значение временного сдвига копии сигнала равным нулю и постепенно увеличивать его до тех пор, пока провал между двумя пиками в выходном сигнале согласованного фильтра не достигнет нулевого уровня. Записать полученное значение отдельно для ЛЧМ-импульсов и для кода Баркера.

Содержание отчета

- графики рассматриваемых в работе сигналов и их КФ. Для построения КФ ЛЧМ-импульса использовать приближенное выражение (7.6), для остальных сигналов рассчитать КФ самостоятельно. Параметры сигналов для расчета см. в 7.2;
- по п. 1 из 7.3 — графики зависимостей $C/Ш_{\text{вых}}$ от СКО входного шума для всех сигналов. Совместно с экспериментальными графиками привести теоретические зависимости, рассчитав отношение $C/Ш_{\text{вых}}$ по формуле $C/Ш_{\text{вых}} = \sqrt{E/W_0}$, где E — энергия полезного сигнала (параметры сигналов для расчета см. в 7.2); W_0 — двусторонняя СПМ белого шума, рассчитываемая как $W_0 = \sigma_n^2 / (2f_{\text{max}})$; σ_n — СКО шума; $f_{\text{max}} = 500$ кГц — верхняя граничная частота в спектре шума, моделируемого в данной работе;
- по п. 2 из 7.3 — таблица экспериментальных данных и графики зависимости $C/Ш_{\text{вых}}$ от τ для трех сигналов, использовавшихся в данном пункте.

Для каждого из трех сигналов указать оптимальное значение τ , а также рассчитать проигрыш квазиоптимального фильтра согласованному фильтру;

- по п. 3 из 7.3 — таблица экспериментальных данных; для каждого из двух сигналов, использовавшихся в данном пункте, рассчитать отношение $(C/\Pi_{\text{вых}})/(C/\Pi_{\text{вх}})$ и сравнить его с базой сигнала, равной 20 для ЛЧМ-импульса и 13 для кода Баркера;
- по п. 4 из 7.3 — для каждого из двух сигналов, использовавшихся в данном пункте, необходимо рассчитать отношение длительности импульса к измеренному временному сдвигу и сравнить полученное значение с базой сигнала, равной 20 для ЛЧМ-импульса и 13 для кода Баркера;
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи о согласованной фильтрации детерминированного сигнала?
2. Как связаны комплексный коэффициент передачи и импульсная характеристика согласованного фильтра с видом исходного сигнала?
3. Пояснить режим компенсации начальных фаз гармонических составляющих в спектре обрабатываемого сигнала при согласованной фильтрации.
4. Что понимают под отношением сигнала к шуму на входе и выходе согласованного фильтра?
5. Что называют квазиоптимальным фильтром?
6. Пояснить (качественно), почему зависимости $C/\Pi_{\text{вых}}$ от постоянной времени RC -цепи, полученные в п. 2 из 7.3, имеют максимум.
7. Почему для сигнала «Треугольные импульсы 1» квазиоптимальный фильтр дает заметно лучшие результаты, чем для сигнала «Треугольные импульсы 2»?
8. Пояснить сущность принципа скрытной передачи сигналов.
9. Почему скрытность передачи не будет достигнута при использовании сигналов простой формы?
10. Каким образом использование сигналов с большой базой позволяет улучшить разрешение по времени?
11. Ширина главного пика корреляционной функции ЛЧМ-импульса, согласно формуле (7.6), равна $2/\Delta f$, однако разрешение по времени, измеренное для ЛЧМ-импульсов в п. 4 из 7.3, дает заметно меньшее значение. Как это можно объяснить?

8. СИНТЕЗ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Цель работы — изучение принципов дискретизации и восстановления сигналов на основе теоремы Котельникова.

8.1. Теоретические сведения

В дискретных устройствах обработки и передачи сигналов возникает необходимость замены непрерывного сигнала $s(t)$ (рис. 8.1, а) совокупностью его дискретных значений $s(nT)$ (рис. 8.2, а). Эти значения называют *отсчетами*. Обычно отсчеты берут через одинаковые интервалы времени длительностью T . Она выбирается исходя из верхней граничной частоты $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ спектра исходного сигнала (рис. 8.1, б).

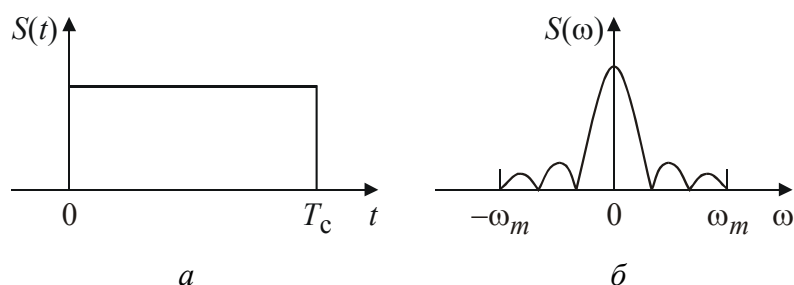


Рис. 8.1

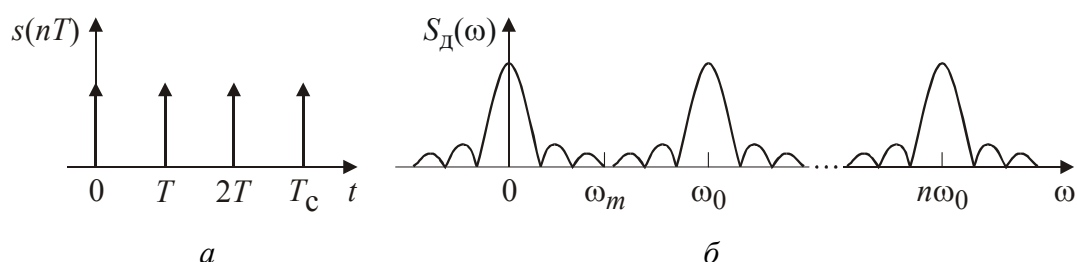


Рис. 8.2

В соответствии с теоремой В. А. Котельникова сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен частотой f_m , полностью определяется своими отсчетами, взятыми через интервал времени $T \leq 1/(2f_m)$. В этом случае сигнал $s(t)$ может быть представлен рядом Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kt) \frac{\sin \omega_m(t - kT)}{\omega_m(t - kT)}. \quad (8.1)$$

Ряд Котельникова представляет собой бесконечную сумму функций вида

$$f_k(t) = \frac{\sin \omega_m(t - kT)}{\omega_m(t - kT)}. \quad (8.2)$$

Эти функции сдвинуты на $T = 1/(2f_m)$ друг относительно друга, а их максимальные значения равны отсчетам сигнала $s(kT)$. Функция $f_k(t)$ называется *отсчетной функцией*. Ряд Котельникова, как и ряд Фурье, являются примерами ортогональных разложений. Для ряда Котельникова базисной системой ортогональных функций служит множество функций вида (8.2). Для сигнала длительностью T_c общее число отсчетов $n = T_c/T = 2f_m T_c$. Эта величина называется числом степеней свободы сигнала, или его *базой*.

В природе нет сигналов, которые имеют одновременно ограниченные длительность и спектр. Однако в инженерных расчетах достаточно учитывать лишь ту часть спектра, в которой сосредоточено 80...95 % энергии сигнала. Поэтому на практике большинство сигналов можно считать сигналами с ограниченным спектром.

Достоинства ортогонального разложения Котельникова следующие. Во-первых, базисная система ортогональных функций выбрана так, что в любой отсчетный момент kT все составляющие ряда обращаются в нуль, кроме одной, равной u_k . Во-вторых, коэффициенты ряда нет необходимости вычислять: они равны значениям сигнала в отсчетные моменты kT . В-третьих, относительно проста аппаратная реализация как дискретизации непрерывного сигнала в импульсную последовательность, так и последующего его восстановления (синтеза).

Если бы имелось устройство, вырабатывающее сдвинутые на T копии функций $f_k(t)$, то для восстановления исходного сигнала достаточно было бы умножить их на соответствующие отсчеты $s(kT)$, а результат просуммировать.

Таким устройством может служить идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с частотой среза ω_m . Частотная характеристика ИФНЧ (рис. 8.3, б)

$$K_{\text{ИФНЧ}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

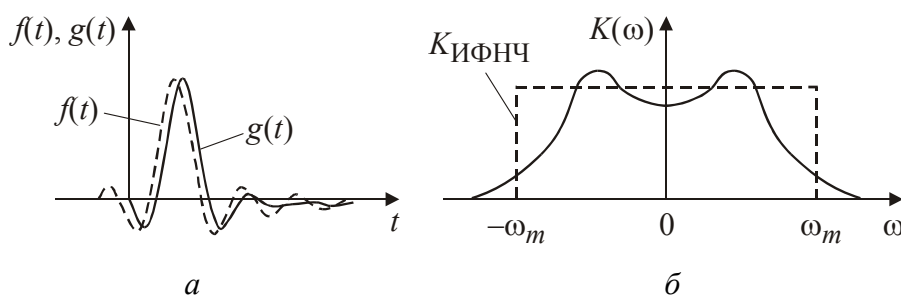


Рис. 8.3

Импульсная характеристика ИФНЧ $g(t)$ совпадает по форме с функцией $f(t)$ (рис. 8.3, а). Если на вход ИФНЧ подать периодическую последовательность δ -импульсов с периодом T , то на его выходе возникнет периодическая

последовательность откликов вида $\sin(\omega_m(t - kT))/(\omega_m(t - kT))$. Подавая на ИФНЧ вместо δ -импульсов дискретизированный сигнал $s(kT)$, получим на его выходе сумму (8.1), т. е. восстановленный сигнал $s(t)$.

Спектр дискретизированного сигнала $S_d(\omega)$ представляет собой периодически повторенный с периодом $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_m$ (размноженный) спектр исходного сигнала $\dot{S}(\omega)$ (рис. 8.2, б). Идеальный ФНЧ с частотой среза ω_m выделяет только один участок спектральной плотности, в пределах которого спектр $\dot{S}_d(\omega)$ совпадает со спектром исходной функции $\dot{S}(\omega)$. Следовательно, форма выходного сигнала ИФНЧ будет повторять форму исходного сигнала. Сигнал восстановится по его дискретным отсчетам.

Если частота дискретизации ω_0 выбрана меньше, чем $2\omega_m$, то получим частичное наложение (перекрывание) участков размноженного исходного спектра. В результате такого наложения спектр исказится и после выделения идеальным ФНЧ участка спектра $[-\omega_m; \omega_m]$ выходной сигнал будет несколько отличаться от исходного. Если же частота дискретизации выбрана больше, чем $2\omega_m$, наложения спектра не произойдет, сигнал на выходе ИФНЧ восстановится без искажения. Технически не всегда возможно применить большую частоту дискретизации. Чтобы предотвратить искажения из-за перекрывания спектров, возможные в таком случае, предварительно (до дискретизации) ограничивают спектр исходного сигнала. Для этого сигнал пропускают через ФНЧ с такой частотой среза $f_{гр}$, чтобы удовлетворялись условия теоремы Котельникова ($\omega_0 \geq 2 \cdot 2\pi f_{гр}$). Вследствие ограничения спектра форма сигнала, конечно, изменится, но эти искажения будут меньшими, чем из-за перекрывания спектров.

Если, как это чаще всего бывает на самом деле, спектр исходного непрерывного сигнала строго в нуль не обращается, то при любом выборе частоты дискретизации составляющие спектра дискретизированного сигнала будут перекрываться. Если такой сигнал подвергнуть восстановлению с помощью ИФНЧ, то фильтр восстановит его с искажениями. Они обусловлены как тем, что «отрезана» часть спектра исходного сигнала выше ω_m , так и тем, что на основной спектр, около нулевой частоты, накладываются «хвосты» от соседних спектральных составляющих. Уменьшить эти искажения можно, пропустив сигнал перед дискретизацией через ФНЧ с частотной характеристикой, близкой к прямоугольной. Эта мера является весьма полезной и в случае, когда производится дискретизация сигнала в присутствии широкополосного шума. При прохождении через ФНЧ шумовая составляющая, а следовательно, и ошибка дискретизации, уменьшаются.

Создать последовательность δ -импульсов технически невозможно. Реальные дискретизирующие импульсы имеют малую, но все же конечную длительность (рис. 8.4).

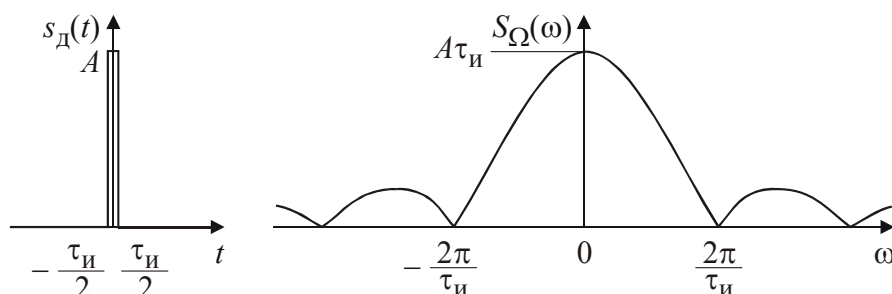


Рис. 8.4

Спектр сигнала при дискретизации этими импульсами, $\dot{S}_{\text{др}}(\omega)$, не является простым повторением копий исходного спектра. Можно доказать, что этот спектр равен произведению двух спектров (рис. 8.5): $\dot{S}_{\text{др}}(\omega) = \dot{S}_d(\omega) \dot{S}_\Omega(\omega)$, где $\dot{S}_d(\omega)$ — спектр сигнала, дискретизированного δ -импульсами (рис. 8.2, а); $\dot{S}_\Omega(\omega)$ — спектр реального дискретизирующего прямоугольного импульса.

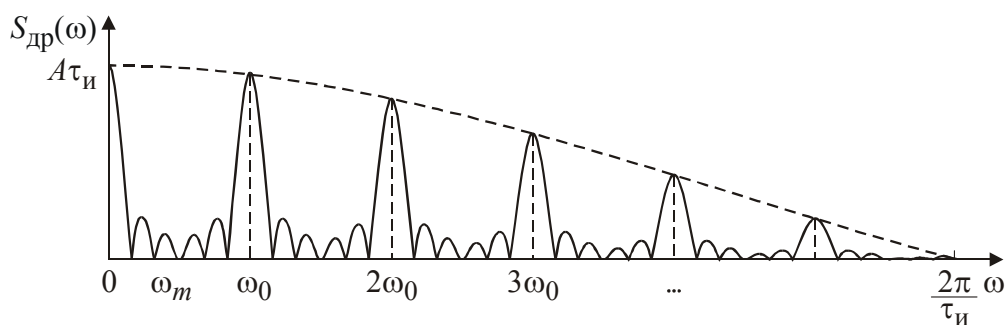


Рис. 8.5

Если длительность прямоугольного импульса дискретизации мала по сравнению с интервалом дискретизации T , то его спектр оказывается широким и в пределах $-\omega_m < \omega < \omega_m$ можно считать, что $\dot{S}_\Omega(\omega) \approx 1$. В этом случае центральная часть спектра $\dot{S}_{\text{др}}(\omega)$ повторит по форме спектр исходного сигнала и замена δ -импульса реальным коротким импульсом не вызовет ошибок восстановления.

Еще одним источником ошибки является неидеальная фильтрация при восстановлении. Идеальная прямоугольная форма частотной характеристики ФНЧ практически не может быть реализована; для сглаживания используют фильтры с приблизительно прямоугольными характеристиками $K_{\text{н.ф}}$, очень часто применяют просто RC -фильтры, имеющие монотонно спадающую характеристику. Импульсная характеристика последних весьма отличается от

требуемых функций вида $\sin x/x$. На выходе такого фильтра, помимо центральной части спектра, появятся дополнительные составляющие, вызванные неполным подавлением соседних его участков. Вследствие этого восстановленный сигнал будет отличаться по форме от исходного. Главный метод борьбы с этими погрешностями состоит в увеличении частоты дискретизации.

Используя полосовой фильтр с идеальной частотной характеристикой $K_{\text{п.ф}}(\omega)$, можно выделить один из участков спектра со средней частотой $n\omega_0$ (рис. 8.2, б), где $n = 1, 2, \dots$, и сформировать радиоимпульс с частотой заполнения $n\omega_0$ и огибающей, совпадающей с исходным сигналом. Этот радиоимпульс имеет полосовой спектр вблизи средней частоты $\omega_{\text{ср}} = n\omega_0$ шириной $2\omega_m$. Ортогональное разложение для него имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k \frac{2\pi}{2\omega_m}\right) \frac{\sin \omega_m \left(t - k \frac{2\pi}{2\omega_m}\right)}{\omega_m \left(t - k \frac{2\pi}{2\omega_m}\right)} \cos \omega_{\text{ср}} \left(t - k \frac{2\pi}{2\omega_m}\right),$$

т. е. базисная система включает в себя совокупность функций, каждая из которых есть модулированное колебание с несущей частотой $\omega_{\text{ср}}$ и огибающей вида (8.2). Импульсная реакция полосового фильтра $g_{\text{п.ф}}(t)$ приблизительно соответствует такой функции (рис. 8.6). Получается, что отсчеты для радиоимпульсов берутся с интервалом T , определяемым шириной спектра огибающей ω_m , а не максимальной частотой в спектре радиоимпульса $n\omega_0 = \omega_m$.

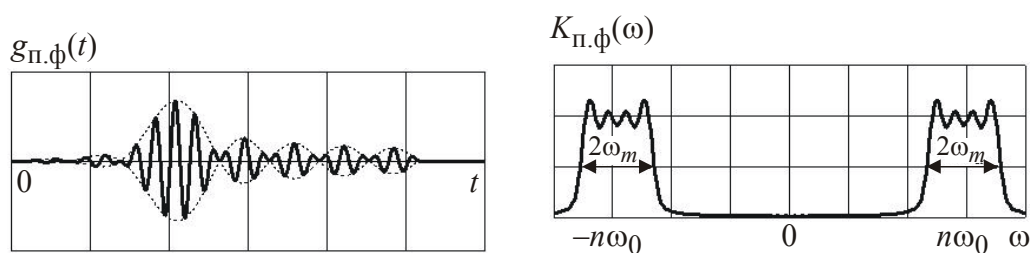


Рис. 8.6

При подобном представлении радиосигнала необходимо выбрать частоту дискретизации так, чтобы несущая частота оказалась кратной ей. С целью уменьшения ошибок восстановления дискретизированного сигнала, возникающих по причинам, изложенным ранее, в реальных устройствах частота дискретизации выбирается равной не $2f_m$, как следует из теоремы Котельникова, а в $2 \dots 5$ раз больше.

8.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка включает в себя: лабораторный макет с генератором импульсов, дискретизатором и набором фильтров, осциллограф, анализатор спектра.

8.3. Задание и указания к выполнению работы

В данной работе исследуется восстановление дискретизированных исходных сигналов прямоугольной формы, гауссовской формы и формы вида $\sin x/x$.

1. Получить и зарисовать импульсную характеристику и модуль комплексного коэффициента передачи:

- а) для RC -фильтра;
- б) для ФНЧ;
- в) для полосового фильтра (ПФ).

Для этого необходимо подать на вход фильтра последовательность импульсов малой длительности. Тогда осциллограмма будет приближенно соответствовать импульсной характеристике, а спектр сигнала на выходе фильтра — модулю комплексного коэффициента передачи.

2. Получить и зарисовать осциллограммы и спектры сигналов, подлежащих дискретизации. Номера исследуемых сигналов задаются преподавателем.

3. Получить и зарисовать осциллограммы и спектры дискретизированных сигналов для двух частот дискретизации — 22 и 44 кГц.

4. Получить и зарисовать осциллограммы и спектр восстановленных сигналов. Восстановление производить с помощью всех фильтров поочередно для двух частот дискретизации — 22 и 44 кГц.

5. Наблюдать на осциллографе результат восстановления гармонического колебания при плавном изменении частоты исходного сигнала. Зарисовать ряд качественно различающихся осциллограмм и указать частоты исходного сигнала, при которых эти осциллограммы получены.

6. Исследовать процесс восстановления гармонического колебания с частотой, равной $f_d/2$, при изменении начальной фазы последовательности дискретизирующих импульсов. Зарисовать осциллограммы для трех различных вариантов указанной начальной фазы.

Содержание отчета

Теоретические материалы:

1. Для «идеального» ФНЧ с частотой среза $f_m = 11$ кГц определить минимальную длительность прямоугольного импульса — такую, чтобы при его дискретизации и последующем восстановлении передавались все состав-

ляющие спектра с амплитудами, большими 0,1 от максимальной, т. е. 3 лепестка функции $\dot{S}(\omega)$.

2. Определить частоту дискретизации, минимально необходимую при использовании фильтра, указанного в п. 1 ($f_m = 11$ кГц).

3. Изобразить синтезируемые сигналы и их дискретные отсчеты, следующие через 1/22 мс (45,45 мкс) и 1/44 мс (22,73 мкс):

а) видеоимпульс прямоугольной формы с длительностью, рассчитанной в п.1;

б) радиоимпульс прямоугольной формы с несущей частотой $f_{cp} = 44$ кГц и длительностью, рассчитанной в п.1;

в) гармонический сигнал с частотой $f_{cp} = 11$ кГц.

4. Построить спектр сигнала, указанного в п.3а.

Экспериментальные материалы:

1. Блок-схема лабораторной установки.

2. Импульсные и амплитудно-частотные характеристики фильтров.

3. Осциллограммы и спектрограммы дискретизированных и восстановленных сигналов.

4. Выводы по полученным результатам.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать теорему Котельникова и пояснить ее смысл.
2. В чем состоит отличие сигналов с ограниченным спектром от реально существующих сигналов?
3. Каким образом синтезируют радиоимпульс по дискретным отсчетам видеоимпульса? Каким условиям должно удовлетворять значение частоты дискретизации ω_0 в этом случае?
4. Какими способами можно уменьшить погрешности при восстановлении сигналов?
5. В чем польза предварительной (до дискретизации) фильтрации непрерывного сигнала с помощью ФНЧ?
6. Как будет выглядеть спектр дискретизированного сигнала при использовании отсчетных импульсов вида $\text{sinc}(3\pi t/T)$, где T — период дискретизации?
7. Определить необходимую крутизну спада АЧХ ФНЧ (дБ/кГц), обрабатывающего сигнал со следующими характеристиками: $f_{\text{верх}} = 20$ кГц, $f_{\text{дискр}} = 48$ кГц, подавление мешающего сигнала не менее 80 дБ.
8. Указать допустимые частоты дискретизации для выделения сигнала полосовым фильтром. Параметры сигнала и фильтра следующие: $f_{\text{верх}} = 40$ кГц, $f_0 = 200$ кГц, $\Delta f_{\text{ф}} = 90$ кГц.

9. Спектр сигнала сосредоточен в полосе $0 \dots 15$ кГц. Необходимо после дискретизации и восстановления получить радиосигнал со средней частотой 100 кГц. Перечислить все возможные варианты значения частоты дискретизации сигнала.
10. Дискретизация и немедленное (без передачи сигнала) восстановление континуального сигнала принципиально невозможны без определенных информационных потерь (шум дискретизации, например). Тем не менее, дискретные сигналы все шире используются в радио- и телекоммуникационной технике. Почему?
11. Найти спектр сигнала, дискретизированного симметричными треугольными импульсами длительностью T , следующими с периодом $4T$.
12. Сигнал $s(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 t)$ подвергнут дискретизации с периодом, равным 1, и затем восстановлен линейной интерполяцией отсчетов. Определить спектр результирующего сигнала.
13. Каким способом восстанавливают исходный непрерывный сигнал по его дискретным отсчетам? Какую АЧХ и импульсную характеристику имеет: а) идеальный ФНЧ? б) идеальный ПФ?
14. Как будет выглядеть спектр дискретизированного сигнала, если частота дискретизации в 2 раза больше минимально возможной?
15. Для восстановления континуального сигнала можно использовать полосовой или низкочастотный фильтр с прямоугольной АЧХ. Какие требования при этом предъявляются к ФЧХ восстанавливающего фильтра?
16. Известно, что конечность длительности импульса дискретизации неизбежно вызывает ошибки при восстановлении континуального сигнала. Какая форма импульса дискретизации является с этой точки зрения оптимальной?
17. Как повлияет на точность восстановления сигнала выбор частоты дискретизации: а) $\omega_0 < 2\omega_m$? б) $\omega_0 > 2\omega_m$?

9. ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

9.1. Теоретические сведения

Суть цифровой обработки сигналов состоит в том, что *физический* сигнал (напряжение, ток и т. д.) преобразуется в последовательность *чисел* (о представлении непрерывного сигнала его дискретными отсчетами см. лабораторную работу 8), которая затем подвергается *математическим* преобразованиям в вычислительном устройстве. Одной из наиболее распространенных операций, которые производятся на цифровой элементной базе, является линейная дискретная фильтрация, в процессе которой входная последовательность отсчетов $\{x(k)\}$ преобразуется в выходную последовательность отсчетов $\{y(k)\}$.

Алгоритм дискретной фильтрации. В случае аналоговых линейных цепей с постоянными параметрами для анализа прохождения любого сигнала достаточно знать результат прохождения элементарного импульса в виде дельта-функции. Для линейных дискретных фильтров с постоянными параметрами также можно ввести в рассмотрение единичную импульсную функцию:

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Выходная реакция на единичный импульс $x_0(k)$ называется *импульсной характеристикой* дискретного фильтра и обозначается $h(k)$. Как и в случае линейных цепей с постоянными параметрами, знание импульсной характеристики позволяет проанализировать прохождение через дискретный фильтр любого сигнала. Выходной сигнал линейного, стационарного и физически реализуемого фильтра может быть рассчитан через дискретную линейную свертку:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^k x(m)h(k-m). \quad (9.2)$$

При реализации вычислений в дискретном фильтре могут быть использованы данные двух типов:

- только что поступивший и некоторое количество предыдущих отсчетов *входного* сигнала: $x(k), x(k-1), \dots, x(k-m)$;
- некоторое количество вычисленных ранее отсчетов *выходного* сигнала: $y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)$.

Таким образом, в общем случае очередной выходной отсчет $y(k)$ вычисляется по формуле

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) + b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) + \dots + b_n y(k-n), \quad (9.3)$$

где b_i и a_j — постоянные коэффициенты. Равенство (9.3) называют *алгоритмом дискретной фильтрации*, ему соответствует структурная схема *прямой формы* реализации дискретного фильтра, показанная на рис. 9.1.

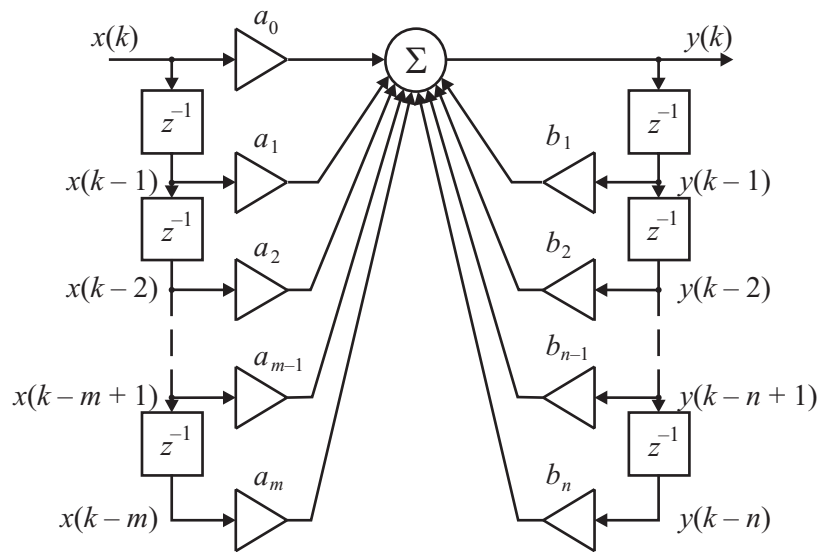


Рис. 9.1

Максимальное из чисел m и n определяет *порядок* фильтра.

Различают *нерекурсивные* фильтры, не использующие для расчетов предыдущие выходные отсчеты (все $b_i = 0$), и *рекурсивные* фильтры, которые эти отсчеты используют.

Если перегруппировать слагаемые в (9.3) таким образом, чтобы входные отсчеты были с одной стороны от знака равенства, а выходные — с другой, получим традиционную форму записи *разностного уравнения*:

$$\begin{aligned} y(k) - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) - \dots - b_n y(k-n) = \\ = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Метод z -преобразования. Удобным способом анализа дискретных последовательностей является z -преобразование. Смысл его заключается в том, что последовательности отсчетов $\{x(k)\}$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , определяемая следующим образом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}. \quad (9.5)$$

Функция $X(z)$ определена там, где ряд (9.5) сходится. Ниже приведен пример расчета z -преобразования для некоторых часто встречающихся на практике дискретных сигналов.

1. *Единичная импульсная функция* (9.1):

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Функция $X_0(z)$ сходится на всей комплексной плоскости.

2. Единичный скачок

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 1, & k \geq 0. \end{cases} \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (9.6)$$

(для расчета использована формула суммы бесконечной геометрической прогрессии). Этот ряд сходится при $|z^{-1}| < 1$, т. е. при $|z| > 1$.

3. Дискретная показательная функция

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ a^k, & k \geq 0. \end{cases} \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1-az^{-1}}. \quad (9.7)$$

Данный ряд сходится при $|az^{-1}| < 1$, т. е. при $|z| > |a|$.

Дискретное z -преобразование очень простым образом связано с преобразованиями Лапласа и Фурье. Рассмотрим последовательность $\{x(k)\}$, определенную при $k \geq 0$, и сопоставим ей временной сигнал в виде набора дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT), \quad (9.8)$$

где T — интервал дискретизации. Вычислим преобразование Лапласа для сигнала (9.8):

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT)e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-pt} dt.$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством δ -функции, получим

$$S(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-pkT}.$$

Эта формула переходит в формулу (9.5), определяющую z -преобразование, если выполнить подстановку $z = e^{pT}$.

Таким образом, взаимное соответствие между z -преобразованием $X(z)$ и преобразованием Лапласа $S(p)$ описывается следующим образом:

$$X(z) = S\left(\frac{1}{T} \ln z\right), \quad S(p) = X(e^{pT}).$$

Похожими формулами описывается и связь z -преобразования $X(z)$ с преобразованием Фурье $\dot{S}(\omega)$:

$$X(z) = \dot{S}\left(\frac{1}{jT} \ln z\right), \quad \dot{S}(\omega) = X(e^{j\omega T}). \quad (9.9)$$

Столь тесная связь z -преобразования с преобразованиями Фурье и Лапласа обуславливает и подобие свойств этих преобразований.

Свойства z -преобразования.

1. *Линейность.* Z -преобразование, согласно определению (9.5), является линейной комбинацией отсчетов последовательности, поэтому оно подчиняется принципу суперпозиции:

$$\begin{aligned} \text{если } \{x_1(k)\} &\leftrightarrow X_1(z) \text{ и } \{x_2(k)\} \leftrightarrow X_2(z), \\ \text{то } \{ax_1(k) + bx_2(k)\} &\leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned}$$

2. *Z -преобразование задержанной последовательности.* Если z -преобразование последовательности $\{x(k)\}$ равно $X(z)$, то z -преобразование последовательности, задержанной на k_0 тактов ($y(k) = x(k - k_0)$), будет иметь вид: $Y(z) = X(z)z^{-k_0}$. Именно поэтому элементы задержки на рис. 9.1 обозначены символами z^{-1} .

3. *Z -преобразование свертки последовательностей.* Свертке дискретных последовательностей, которая рассчитывается согласно (9.2), соответствует произведение их z -преобразований.

Обратное z -преобразование. Соответствие между дискретной последовательностью чисел и ее z -преобразованием является взаимно-однозначным. Формула перехода от z -преобразования к последовательности чисел называется обратным z -преобразованием и формально записывается следующим образом:

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z)z^{k-1} dz,$$

где интеграл берется по произвольному замкнутому контуру в области сходимости функции $X(z)$, охватывающему все ее полюсы.

Практическое вычисление обратного z -преобразования обычно производится над дробно-рациональными функциями переменной z и может быть выполнено разложением функции $X(z)$ на простые дроби. Приведем несложный пример:

$$X(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1} = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}. \quad (9.10)$$

Из сравнения слагаемых (9.10) с примерами z -преобразований (9.6) и (9.7) видно, что первое слагаемое соответствует скачку с амплитудой, равной 2, а второе — дискретной показательной функции $-(1/2)^k$, $k \geq 0$. Итак, искомая последовательность имеет вид

$$x(k) = \begin{cases} 2 - 2^{-k}, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Системная функция дискретного фильтра. Применим z -преобразование к уравнению дискретной фильтрации (9.2). Так как это

уравнение представляет собой дискретную свертку, то результатом будет являться произведение z -преобразований:

$$Y(z) = X(z) H(z).$$

Функция $H(z)$, равная отношению z -преобразований выходного и входного сигналов и представляющая собой z -преобразование импульсной характеристики фильтра, называется *системной функцией* дискретного фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}.$$

Комплексный коэффициент передачи. Чтобы получить комплексный коэффициент передачи (частотную характеристику) дискретного фильтра, воспользуемся формулой (9.9):

$$\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k T}. \quad (9.11)$$

Из (9.11) видно, что частотная характеристика дискретного фильтра является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $2\pi/T$.

Физическая реализуемость. Применив z -преобразование к обеим частям разностного уравнения (9.4), получим

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_n z^{-n}) = \\ = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}). \end{aligned}$$

Отсюда легко получить вид системной функции:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_n z^{-n}}. \quad (9.12)$$

Таким образом, системная функция *физически реализуемого* дискретного фильтра может быть представлена в виде отношения полиномов по отрицательным степеням переменной z при наличии ненулевого свободного члена в знаменателе.

Устойчивость. При отсутствии входного сигнала в дискретном фильтре могут существовать *свободные колебания*. Их вид зависит от начальных условий, т. е. значений, хранящихся в элементах памяти фильтра (линиях задержки на рис. 9.1) в момент отключения входного сигнала. Фильтр называется *устойчивым*, если при любых начальных условиях свободные колебания являются затухающими, т. е. при $x(k) = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0.$$

Любой сигнал на выходе линейного стационарного фильтра представляет собой линейную комбинацию его задержанных во времени импульсных характеристик. Поэтому для затухания свободных колебаний необходимо, чтобы была затухающей импульсная характеристика фильтра $h(k)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0.$$

Можно показать, что для устойчивого дискретного фильтра полюсы системной функции (9.12) должны находиться внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости.

Резонатор второго порядка. Так называется рекурсивный фильтр второго порядка, по своим частотным свойствам являющийся аналогом одиночного колебательного контура. Его АЧХ обладает следующими свойствами:

- на нулевой частоте и на максимальной рабочей частоте дискретной системы, равной половине частоты дискретизации, АЧХ равна нулю;
- на некоторой частоте ω_0 АЧХ имеет максимум, равный 1.

Можно показать, что системная функция фильтра, удовлетворяющего указанным требованиям, может быть записана в виде

$$H(z) = \frac{1+b_2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(1-b_2)\cos(\omega_0 T)z^{-1}-b_2z^{-2}},$$

где T — период дискретизации, а оставшийся параметр b_2 регулирует полосу пропускания (и, следовательно, «добротность» резонатора). Фильтр будет устойчивым при $|b_2| < 1$.

9.2. Описание компьютерной программы

Вид окна компьютерной программы «Дискретная фильтрация сигналов» (`lab_discrfilter.exe`) показан на рис. 9.2.

Примечание. Выполняемое в программе моделирование процессов фильтрации основано на дискретной обработке сигналов, поэтому все приводимые в данном описании физические единицы измерения являются условными и используются исключительно для представления параметров сигналов и фильтров в наглядном виде.

В окне имеются следующие элементы управления:

- Переключатели **Входной сигнал** и **Непрерывный входной сигнал** позволяют выбирать тип используемого сигнала из числа следующих вариантов:
 - **Одиночный импульс:** генерируется дискретный одиночный импульс $x_0(k)$ (см. (9.1)), т. е. один отсчет со значением, равным единице. Последующие отсчеты входного сигнала равны нулю. Данный сигнал генерируется однократно, перед началом его формирования устанавливается нулевое начальное состояние фильтра.
 - **Ступенька:** генерируется последовательность отсчетов, равных единице (см. (9.6)). Данный сигнал генерируется однократно, перед началом его формирования устанавливается нулевое начальное состояние фильтра.

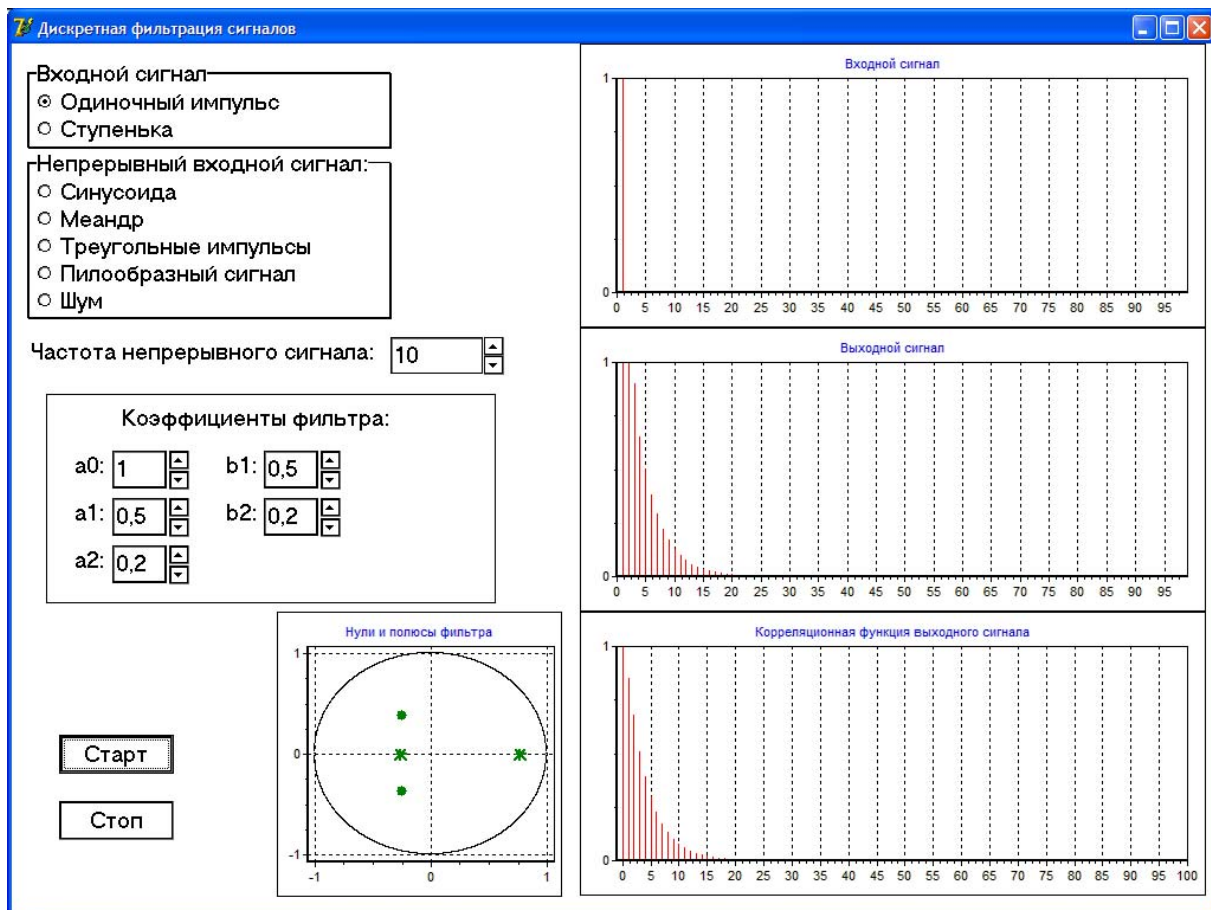


Рис. 9.2

- **Синусоида:** генерируются дискретные отсчеты гармонического сигнала. Данный сигнал является периодическим, его частота задается в поле ввода **Частота непрерывного сигнала**. Амплитуда сигнала равна единице.
- **Меандр:** генерируются дискретные отсчеты меандра (последовательности прямоугольных импульсов со скважностью 2). Данный сигнал является периодическим, его частота задается в поле ввода **Частота непрерывного сигнала**. Амплитуда сигнала равна единице.
- **Треугольные импульсы:** генерируются дискретные отсчеты периодической последовательности симметричных треугольных импульсов. Данный сигнал является периодическим, его частота задается в поле ввода **Частота непрерывного сигнала**. Амплитуда сигнала равна единице.
- **Пилообразный сигнал:** генерируются дискретные отсчеты периодической последовательности несимметричных треугольных импульсов (вертикальный фронт справа, наклонный участок является возрастающим). Данный сигнал является периодическим, его частота задается в поле ввода **Частота непрерывного сигнала**. Амплитуда сигнала равна единице.

- **Шум:** генерируется дискретный белый шум — последовательность случайных чисел, не коррелированных друг с другом и имеющих нормальное распределение вероятности с нулевым средним значением и дисперсией, равной единице.
- Поле ввода **Частота непрерывного сигнала** позволяет задавать частоту периодических сигналов (значение должно быть целым числом; единицы измерения частоты являются условными, частоте дискретизации соответствует значение 250, поэтому максимально допустимое значение частоты сигнала равно 125). Кнопки со стрелками, расположенные в правой части поля, изменяют значение с шагом, равным единице.
- Группа полей ввода **Коэффициенты фильтра** позволяет задавать коэффициенты дискретного рекурсивного фильтра второго порядка. Обозначения коэффициентов соответствуют представлению системной функции фильтра в виде $H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}$. Значения должны представлять собой числа с одним десятичным разрядом после запятой. Кнопки со стрелками, расположенные в правой части полей, изменяют значения с шагом 0,1.
- Кнопки **Старт** и **Стоп** служат для запуска и остановки процесса моделирования. При выборе непериодических сигналов (**Одиночный импульс** и **Ступенька**) при щелчке на кнопке **Старт** осуществляется один цикл моделирования (рассчитывается 100 отсчетов входного и выходного сигналов), использовать кнопку **Стоп** при этом не нужно. При выборе периодических сигналов щелчок на кнопке **Старт** запускает процесс моделирования, который продолжается до щелчка на кнопке **Стоп**, при этом графики сигналов на экране обновляются каждые 0,5 с.

В нижней части окна расположен график расположения нулей (кружки) и полюсов фильтра (звездочки) на комплексной плоскости. Сплошной линией показана единичная окружность. Изображение обновляется при каждом изменении значений коэффициентов фильтра.

В правой части окна расположены три графика, которые в реальном времени показывают следующие сигналы:

- Верхний график — сигнал на входе фильтра.
- Средний график — сигнал на выходе фильтра.
- Нижний график — нормированная корреляционная функция выходного сигнала.

9.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Исследование нерекурсивного фильтра второго порядка. Для реализации нерекурсивного фильтра второго порядка установить следующие зна-

чения коэффициентов: $b_1 = b_2 = 0$. Оставшиеся значения a_0 , a_1 и a_2 определяют свойства исследуемого фильтра.

Зарисовать расположение нулей и полюсов и измерить АЧХ на перечисленных ниже частотах для одного из указанных преподавателем набора коэффициентов фильтра:

- а) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1$;
- б) $a_0 = -1, a_1 = 2, a_2 = -1$;
- в) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$;
- г) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1$;
- д) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$;
- е) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = -3$;
- ж) $a_0 = 1, a_1 = 1,2, a_2 = 1$;
- з) $a_0 = 1, a_1 = -1,6, a_2 = 1$;
- и) $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = -1$;
- к) $a_0 = 1, a_1 = -1,4, a_2 = 0,5$;
- л) $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0,5$.
- м) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0,5$;
- н) $a_0 = 1, a_1 = 0,5, a_2 = 0,5$.

Значения АЧХ занести в таблицу.

F	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$ K(f) $													

Методика измерения амплитудно-частотных характеристик фильтров. АЧХ фильтров измеряется по точкам, путем варьирования частоты входного синусоидального сигнала и измерения амплитуды сигнала на выходе. Амплитуда входной синусоиды равна единице, поэтому амплитуда выходного сигнала равна значению АЧХ на данной частоте.

2. Исследование рекурсивного фильтра первого порядка. Для реализации рекурсивного фильтра первого порядка установить следующие значения коэффициентов: $a_0 = 1, a_1 = a_2 = b_2 = 0$. Оставшееся значение b_1 , которое по указанию преподавателя выбирается из диапазона $0,5 \dots 0,9$, определяет свойства исследуемого фильтра.

Измерить «постоянную времени» фильтра τ (в отсчетах). Импульсная характеристика рекурсивного фильтра первого порядка является экспоненциальной, под «постоянной времени» понимается число отсчетов, за которое она затухает до уровня $1/e \approx 0,37$. Для измерения этой величины следует вывести график импульсной характеристики (выбрать сигнал **Одиночный импульс** и щелкнуть на кнопке **Старт**) и, увеличив масштаб необходимого

фрагмента графика, определить, между какими отсчетами достигается указанный уровень. Для увеличения масштаба следует растянуть мышью рамку на графике *слева направо, сверху вниз*. Для возврата к исходному масштабу следует растянуть мышью рамку на графике по диагонали *в любом из других направлений* (например, *справа налево, сверху вниз*). Кроме того, можно перемещать график без изменения его масштаба при нажатой *правой* кнопке мыши.

Зарисовать расположение нулей и полюсов и измерить АЧХ на указанных ниже частотах. Значения АЧХ занести в таблицу.

f	1	5	10	15	20	40	60	80	100	105	110	115	120	124
$ K(f) $														

3. Исследование устойчивости рекурсивного фильтра второго порядка. Коэффициенты нерекурсивной части фильтра устанавливаются следующими: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$. Значение коэффициента b_1 оставить тем же, что и в п. 2. Изменяя коэффициент b_2 , необходимо определить диапазон его значений ($b_{2 \min} \dots b_{2 \max}$), соответствующий устойчивому фильтру, а также определить границу ($b_{2 \text{ кратн. пол.}}$), разделяющую области вещественных и комплексных полюсов фильтра.

Измерения производятся при синусоидальном входном сигнале, частота сигнала может быть произвольной. Устойчивость фильтра определяется по виду выходного сигнала и расположению полюсов на комплексной плоскости:

- **устойчивый фильтр:** выходной сигнал представляет собой дискретные отсчеты синусоиды, полюсы лежат внутри единичной окружности;
- **фильтр находится на грани устойчивости:** хотя бы один из полюсов лежит на единичной окружности, в выходном сигнале могут появиться нарушения синусоидальной структуры, но он сохраняет периодичность и стабильную амплитуду;
- **неустойчивый фильтр:** хотя бы один из полюсов лежит *снаружи* единичной окружности, выходной сигнал перестает быть даже похож на синусоиду, его уровень резко возрастает (для предотвращения переполнений в программе реализован ограничитель уровня выходного сигнала на уровне ± 100).

Полученные данные занести в таблицу.

b_1	$b_{2 \min}$	$b_{2 \text{ кратн. пол.}}$	$b_{2 \max}$

4. Исследование резонатора второго порядка. Для реализации резонатора второго порядка установить следующие значения коэффициентов:

$a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и указанную преподавателем комбинацию значений коэффициентов b_1 и b_2 , выбираемых из следующих наборов значений:

- $b_1 \in \{0,0; 0,5; 1,0; 1,5\}$;
- $b_2 \in \{-0,7; -0,8; -0,9\}$.

Определить параметры импульсной характеристики фильтра: постоянную времени затухания огибающей τ и период колебаний T (в отсчетах). Данные занести в таблицу.

b_1	b_2	τ , отсчеты	T , отсчеты

Зарисовать импульсную характеристику, расположение нулей и полюсов и измерить АЧХ примерно на 15 частотах, выбранных самостоятельно в диапазоне от 1 до 124. Значения частоты должны быть расположены ближе друг к другу в окрестностях той частоты, где АЧХ принимает максимальное значение, и реже — в удаленных от пика АЧХ частотных диапазонах. Значения АЧХ занести в таблицу.

f	1	...	124
$ K(f) $			

5. Исследование преобразования шума в дискретном фильтре. Для исследованного в п. 4 фильтра выбрать входной сигнал **Шум** и зарисовать нормированную корреляционную функцию выходного сигнала.

Содержание отчета

Примечание. Теоретические графики АЧХ и ФЧХ во всех случаях рассчитываются как модуль и фаза комплексного коэффициента передачи дискретного фильтра, определяемого согласно (9.11) и (9.12).

1. По п. 1:

- совместно построенные экспериментальный и теоретический графики АЧХ исследованного фильтра;
- теоретический график ФЧХ исследованного фильтра;
- изображение расположения на комплексной плоскости нулей и полюсов системной функции исследованного фильтра.

2. По п. 2:

- экспериментальное и теоретическое значения «постоянной времени» исследованного фильтра (теоретическое значение «постоянной времени» определять исходя из формулы импульсной характеристики данного фильтра: $h(k) = (b_1)^k = \exp(k \ln(b_1))$, $k \geq 0$, откуда $\tau = -1/\ln(b_1)$);
- совместно построенные экспериментальный и теоретический графики АЧХ исследованного фильтра;

- теоретический график ФЧХ исследованного фильтра;
- изображение расположения на комплексной плоскости нулей и полюсов системной функции исследованного фильтра.

3. По п. 3:

значение b_1 и диапазон значений b_2 , при которых фильтр является устойчивым. Следует также указать области значений b_2 , в которых полюсы системной функции принимают вещественные и комплексные значения.

4. По п. 4:

- экспериментально измеренные и теоретически рассчитанные значения постоянной времени затухания огибающей и периода колебаний импульсной характеристики фильтра. Теоретические значения рассчитываются по следующим формулам:

$$\tau = \frac{2}{\ln(-b_2)}, \quad T = \frac{2\pi}{\arccos\left(\frac{b_1}{1-b_2}\right)};$$

- совместно построенные экспериментальный и теоретический графики АЧХ исследованного фильтра;
- теоретический график ФЧХ исследованного фильтра;
- изображение расположения на комплексной плоскости нулей и полюсов системной функции исследованного фильтра.

5. По п. 5:

изображение нормированной корреляционной функции выходного сигнала для исследованного фильтра.

6. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое системная функция дискретного фильтра? Какой вид она имеет для физически реализуемого фильтра?
2. Записать выражение для алгоритма дискретной фильтрации и пояснить его.
3. Как рассчитывается комплексный коэффициент передачи дискретного фильтра?
4. Каково условие устойчивости дискретного фильтра?
5. Как зависит вид ИХ фильтра второго порядка от типа полюсов (вещественные/комплексные) системной функции?
6. Какие выводы можно сделать о влиянии коэффициентов b_1 и b_2 рекурсивного фильтра второго порядка на скорость затухания и частоту колебаний ИХ этого фильтра?

7. На примере указанного преподавателем фильтра из числа исследованных в данной работе объяснить, как связано расположение нулей и полюсов системной функции на комплексной плоскости с формой АЧХ фильтра.
8. При каких соотношениях между коэффициентами b_1 и b_2 полюсы функции передачи дискретного фильтра второго порядка будут вещественными?
9. При каких соотношениях между коэффициентами b_1 и b_2 полюсы функции передачи дискретного фильтра второго порядка будут комплексными?
10. При каких соотношениях между коэффициентами b_1 и b_2 функция передачи дискретного фильтра второго порядка будет иметь кратный полюс?
11. При каких комбинациях значений коэффициентов b_1 и b_2 дискретный фильтр второго порядка будет устойчивым?
12. При каких значениях коэффициента b_1 дискретный фильтр первого порядка будет устойчивым?
13. Может ли нерекурсивный дискретный фильтр быть неустойчивым? Почему?
14. Может ли импульсная характеристика рекурсивного дискретного фильтра иметь конечную длительность?

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ЦЕПИ

Цель работы — изучение преобразования гармонического колебания в нелинейной безынерционной цепи и анализ такого преобразования с использованием кусочно-линейной и квадратичной аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента.

10.1. Теоретические сведения

Для преобразования и обработки сигналов наряду с линейными цепями широко применяются нелинейные цепи. Для *линейных* цепей справедлив принцип суперпозиции, который в общем виде математически выражается следующим образом:

$$L[s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t)] = L[s_1(t)] + L[s_2(t)] + \dots + L[s_n(t)], \quad (10.1)$$

где L — оператор, характеризующий преобразование сигнала $s(t)$ цепью.

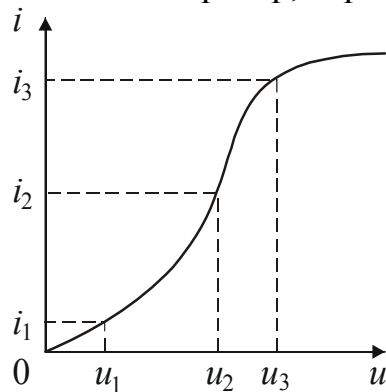


Рис. 10.1

Радиотехническая цепь является *нелинейной*, если в ее состав входят один или несколько элементов, для которых соотношение (10.1) несправедливо, т. е. параметры которых, а следовательно, и вид оператора L зависят от уровня входного сигнала. Простейшим примером нелинейного элемента является полупроводниковый диод, типичная вольт-амперная характеристика (ВАХ) $i = f(u)$ которого показана на рис. 10.1. Если предположить, что оператор L в формуле (10.1) выражает зависимость $i = f(u)$, то очевидно, что это соотношение не будет

выполняться: именно, напряжению u_1 соответствует ток i_1 , напряжению u_2 — ток i_2 , но соответствующий напряжению $u_3 = u_1 + u_2$ ток $i_3 \neq i_1 + i_2$.

Различают *резистивные* (сопротивления) и *реактивные* (индуктивности и емкости) нелинейные элементы. Например, полупроводниковый диод при теоретическом анализе часто считают резистивным нелинейным элементом.

Здесь существенным является то обстоятельство, что ВАХ резистивного нелинейного элемента $i = f(u)$ не содержит в явном виде времени. Физически это означает *безынерционность* резистивного нелинейного элемента, т. е. мгновенно следующее за изменением внешнего входного воздействия установление выходной реакции. Кроме диодов, к резистивным нелинейным элементам при анализе часто относят биполярные и полевые транзисторы, электровакуумные приборы (лампы) и т. д.

К *инерционным* нелинейным элементам относятся нелинейные реактивные элементы. Примером такого элемента служит *варикап* — специальный полупроводниковый диод, используемый как конденсатор с электрически

управляемой емкостью. Связь между током и напряжением на нелинейной емкости выражается формулой

$$i = \frac{dq}{dt} = C(u) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(u)}{du} \frac{du}{dt},$$

в которую время входит явно.

Эквивалентная схема любого полупроводникового или электровакуумного элемента содержит так называемые *собственные (паразитные)* емкости и индуктивности. Поэтому безынерционных нелинейных элементов, строго говоря, не существует. Это представление удобно для теоретического анализа преобразований радиосигналов в нелинейных цепях. Соответствие такой модели по своим свойствам реальному элементу определяется частотным диапазоном, в котором будет работать содержащее элемент анализируемое устройство. При этих условиях такие радиотехнические преобразования сигналов, как некоторые виды усиления, модуляцию, детектирование, преобразование частоты, генерацию, чаще всего считают безынерционными нелинейными.

Неприменимость принципа суперпозиции существенно усложняет анализ воздействия сигнала на нелинейную цепь, так как выходной сигнал не может быть представлен в виде суммы реакций на элементарные входные сигналы, как это делается при анализе воздействия сигнала на линейную цепь. В связи с этим неправомерно вычисление спектра выходного сигнала $\dot{S}_{\text{вых}}(\omega)$ по формуле $\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}(\omega)\dot{K}(\omega)$ или вычисление временного отклика с помощью интеграла Дюамеля.

Аппроксимация нелинейных характеристик. Теоретический анализ позволяет определить лишь общий вид ВАХ нелинейного элемента, и практическая ценность таких характеристик для исследования поведения реальных нелинейных элементов в радиотехнических схемах невелика; практически полезные ВАХ, как правило, получают экспериментально. Однако эксперимент дает, по существу, табличное представление характеристики, в то время как для анализа и расчетов необходимо *аналитическое*, в виде формулы, представление ВАХ. Используются различные способы аппроксимации — замены таблично (а иногда и аналитически) заданной характеристики функциями, приближенно отражающими поведение реальной ВАХ нелинейного двухполюсника в представляющем интерес диапазоне изменения аргумента. При выборе вида аппроксимирующих функций учитывают требуемую точность результата, пределы изменения входного воздействия и удобство выбранной функции для аналитических расчетов. Наиболее распространенными видами аппроксимации являются *полиномиальная, кусочно-линейная и экспоненциальная*. После решения задачи аппроксимации отклик нелинейной системы на заданное воздействие описывается нелинейным дифференциаль-

ным уравнением, которое решается аналитически или численно. Далее рассматривается кусочно-линейная аппроксимация, теоретические сведения о полиномиальной аппроксимации, также используемой в данной работе, приведены в описании лабораторной работы 11.

Кусочно-линейная аппроксимация. В некоторых случаях (например, если $u(t)$ изменяется в достаточно больших пределах) ВАХ нелинейного элемента аппроксимируют двумя или более отрезками прямых.

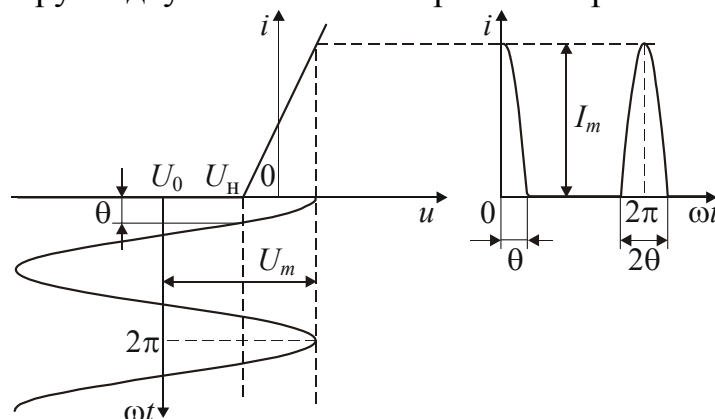


Рис. 10.2

Пример чаще всего встречающегося варианта кусочно-линейной аппроксимации ВАХ показан на рис. 10.2. Аппроксимирующее выражение записывается следующим образом:

$$i = \begin{cases} S(u - U_H), & u \geq U_H, \\ 0, & u < U_H. \end{cases} \quad (10.2)$$

Здесь константа S — *крутизна* линейной части аппроксимирующей функции, U_H — координата «начала» линейно возрастающей ветви ВАХ (напряжение отсечки).

Воздействие гармонического колебания на безынерционный нелинейный элемент. Рассмотрим воздействие на нелинейный элемент гармонического колебания в сумме со «смещением», задающим рабочую точку:

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1). \quad (10.3)$$

Обратимся к рис. 10.2, иллюстрирующему типичное взаимное расположение ВАХ и сигнала (10.3), начальную фазу которого примем равной нулю ($\varphi_1 = 0$). Ток в цепи появляется только при $u > U_H$ и является периодической последовательностью импульсов:

$$i(t) = \begin{cases} S(U_0 + U_m \cos \omega_1 t - U_H) = S U_m \left(\cos \omega_1 t - \frac{U_H - U_0}{U_m} \right), & |\omega_1 t - 2k\pi| \leq \theta, \\ 0, & |\omega_1 t - 2k\pi| > \theta. \end{cases} \quad (10.4)$$

Введенный в выражение (10.4) параметр θ называется *углом отсечки*. Физический смысл угла отсечки иллюстрирует рис. 10.2 — очевидно, что по координате $\omega_1 t$ (линейная текущая фаза) косинусоидальный импульс тока имеет длительность 2θ . При $\omega_1 t = 2k\pi \pm \theta$ ток в цепи равен нулю; из уравнения

$$SU_m \left(\cos \theta - \frac{U_H - U_0}{U_m} \right) = 0$$

следуют часто используемые соотношения:

$$\cos \theta = \frac{U_H - U_0}{U_m}, \quad (10.5)$$

$$i(t) = SU_m (\cos \omega_1 t - \cos \theta), \quad \cos \omega_1 t \geq \cos \theta. \quad (10.6)$$

Максимального значения I_m импульс тока достигает при $\omega_1 t = 2k\pi$, поэтому

$$I_m = SU_m (1 - \cos \theta), \quad SU_m = \frac{I_m}{1 - \cos \theta}. \quad (10.7)$$

Используя полученные соотношения, найдем коэффициенты разложения периодической (с периодом $T = 2\pi/\omega_1$) функции (10.6) в ряд Фурье в синусно-косинусном представлении

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t).$$

Так как функция четная, коэффициенты $b_k \equiv 0$. Коэффициенты a_k вычисляются по формуле

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \cos k\omega_1 t \, dt = \frac{2}{\omega_1 T} \int_{-\theta}^{\theta} i(t) \cos k\omega_1 t \, d(\omega_1 t).$$

Используя четность подынтегрального выражения, формулы (10.6), (10.7) и соотношение $\omega_1 T = 2\pi$, перепишем последний интеграл:

$$a_k = \frac{2I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} \int_{-\theta}^{\theta} (\cos \omega_1 t - \cos \theta) \cos k\omega_1 t \, d(\omega_1 t).$$

Коэффициенты a_k для $k > 0$ являются амплитудами гармонических составляющих тока $i(t)$; постоянная составляющая $I_0 = a_0/2$. Интегрирование дает формулу для амплитуды k -й гармоники:

$$I_k = I_m \frac{2(\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta)}{k\pi(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}.$$

Приведем явные выражения для амплитуд некоторых гармоник:

$$I_0 = I_m \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)} = SU_m \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi},$$

$$I_1 = I_m \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)} = SU_m \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi},$$

$$I_2 = I_m \frac{2\sin^3 \theta}{3\pi(1 - \cos \theta)} = SU_m \frac{2}{3\pi} \sin^3 \theta.$$

Часто используются нормированные к I_m значения I_k , или *коэффициенты Берга*

$$\alpha_k(\theta) = \frac{I_k(\theta)}{I_m}, \quad I_k = \alpha_k(\theta)I_m,$$

а также *функции Берга*

$$\gamma_k(\theta) = \frac{I_k}{SU_m}, \quad I_k = \gamma_k(\theta)SU_m.$$

Графики $\alpha_k(\theta)$ и $\gamma_k(\theta)$ для $k = 0, 1, 2, 3$ приведены на рис. 10.3 и 10.4. Вид графиков указывает на возможность оптимизации процедуры нелинейного преобразования, так как при заданной ВАХ (фиксированном U_H) угол отсечки θ в соответствии с формулой (10.5) регулируется выбором амплитуды U_m и смещения U_0 .

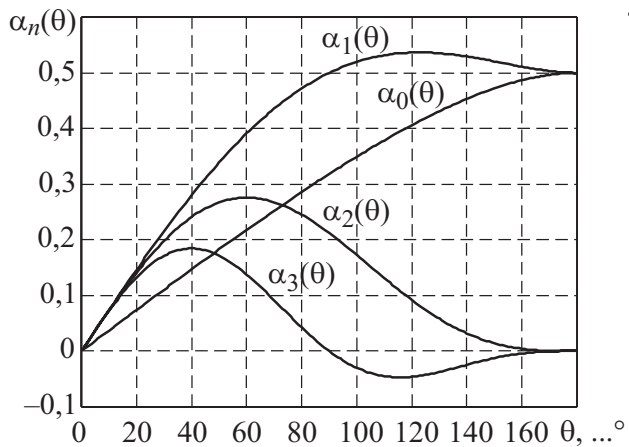


Рис. 10.3

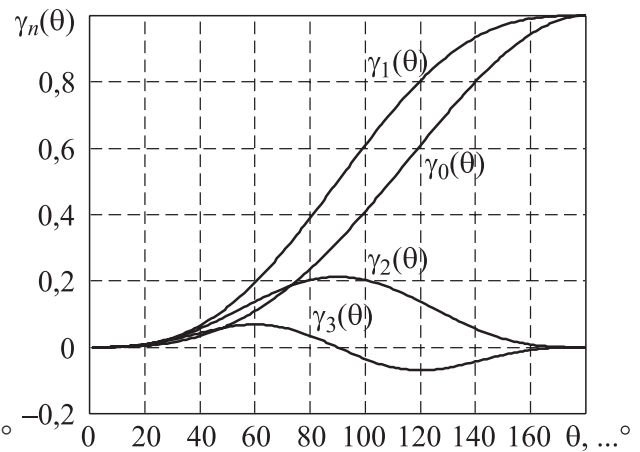


Рис. 10.4

Коэффициенты и функции Берга связаны друг с другом соотношением

$$\gamma_k(\theta) = (1 - \cos \theta)\alpha_k(\theta).$$

Таким образом, ток в цепи нелинейного двухполюсника при гармоническом воздействии представляется суммой постоянной I_0 и гармонических с амплитудами I_1, I_2, I_3, \dots и частотами $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$, кратными частоте приложенного напряжения, составляющих, т. е. *рядом Фурье*.

10.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка включает в себя лабораторный макет со встроенным вольтметром, высокочастотный генератор, осциллограф и анализатор спектра. Лабораторный макет содержит электронные блоки, выполненные на базе операционных усилителей и реализующие операции суммирования напряжения E_0 от встроенного регулируемого источника и электрических колебаний от внешнего источника (генератора) и нелинейного преобразования за счет введения в схему полупроводникового диода, имеющего нелинейную ВАХ. Также имеется встроенный в макет полосовой фильтр с резонансной частотой 200 кГц, через который можно пропустить преобразованные нелинейным элементом колебания с помощью переключателя $S1.1$, и нелинейный элемент с квадратичной амплитудной характеристикой. Выходное напряжение подается одновременно на осциллограф и анализатор спектра, что позволяет проводить измерения во временной и частотной областях. Для измерения амплитудной характеристики нелинейного элемента (зависимости напряжения на выходе от напряжения на входе) в макете имеется встроенный вольтметр, который в зависимости от положения переключателя $S1.2$ позволяет измерить постоянное напряжение до нелинейного элемента или после него.

Для удобства проведения измерений ток, протекающий через нелинейный элемент, преобразуется в напряжение посредством пропускания его через резистивный элемент, затем напряжение усиливается. Таким образом, амплитудная характеристика блока нелинейного преобразования в точности совпадает по форме с ВАХ нелинейного элемента. К макету подключен спектроанализатор с входным сопротивлением 50 Ом, с помощью которого определяются амплитуды гармонических составляющих напряжения. Измерив эти амплитуды, легко найти (согласно закону Ома) амплитуды гармоник тока, протекающего через указанное сопротивление.

10.3. Задание и указания к проведению работы

1. Снять амплитудную характеристику нелинейного элемента. Для этого изменять напряжение смещения, подаваемое от источника регулируемого напряжения E_0 , и измерять с помощью встроенного вольтметра попарно напряжения на входе и выходе нелинейного элемента. Во время измерений

следует проконтролировать, чтобы колебания от внешнего источника не подавались.

2. Измерить амплитуды гармонических составляющих выходного тока через сопротивление нагрузки (50 Ом), возникающих при воздействии на нелинейный элемент гармонического колебания при различных углах отсечки θ . Для этого:

а) подать на вход сумматора макета (вместе с источником регулируемого смещения E_0) напряжение гармонического колебания с частотой 100 кГц от высокочастотного генератора;

б) выходное напряжение с нелинейного элемента подать на осциллограф и анализатор спектра;

в) получить устойчивое изображение выходного сигнала на экранах осциллографа и анализатора спектра;

г) поддерживая постоянной амплитуду входного гармонического колебания, изменять напряжение смещения E_0 и измерять с помощью осциллографа половину длительности импульса тока в нелинейной цепи τ и пиковое значение напряжения на резисторе $U_{\text{пик}}$; одновременно с помощью анализатора спектра измерять амплитуды A_k трех первых гармоник выходного напряжения; все данные (значения τ , A_k , $U_{\text{пик}}$) записывать в таблицу для 10...15 значений $\tau \in [0, T/2]$, где T — период входного гармонического колебания с частотой 100 кГц.

3. Наблюдать действие полосового фильтра на форму и спектральный состав выходного напряжения. (В настоящем пункте демонстрируется реализация умножителя частоты на 2.) Для этого:

а) изменением напряжения смещения E_0 добиться *максимума второй гармоники* выходного напряжения и при установленном значении E_0 измерить и записать значения τ , A_k , $U_{\text{пик}}$;

б) включить переключателем $S1.1$ полосовой фильтр, настроенный на частоту 200 кГц, и зарисовать форму напряжения, наблюдаемую на экране осциллографа.

4. Используя нелинейный элемент с квадратичной амплитудной характеристикой (квадратор), построить умножитель частоты на 2 без применения полосового фильтра. Для этого отключить полосовой фильтр и подобрать такое напряжение смещения E_0 , чтобы на выходе квадратора осталась только вторая гармоника протекающего через нелинейный элемент тока. Записать значение этого напряжения.

5. Построить ВАХ нелинейного элемента по измеренным значениям амплитудной характеристики, при этом значения тока рассчитывать как отношение выходного напряжения к сопротивлению нагрузки 50 Ом (входное со-

противление спектроанализатора). Выполнить кусочно-линейную аппроксимацию снятой ВАХ нелинейного элемента и определить напряжение отсечки U_H и крутизну S (в миллиамперах на вольт) наклонной ветви.

6. Рассчитать по экспериментальным данным величины углов отсечки θ , используя формулу

$$\theta = \frac{\pi\tau}{T}.$$

7. Рассчитать амплитуды гармоник тока I_k по измеренным значениям A_k .

8. Произвести нормировку амплитуд I_k гармонических составляющих тока в цепи к максимальному значению тока $I_m = U_{\text{пик}}/R$ ($R = 50 \text{ Ом}$). Функции $\alpha_k(\theta) = \frac{I_k(\theta)}{I_m}$ представить в виде графиков в масштабе, удобном для сравнения с графиками рис. 10.3. Объяснить их различие.

9. Вычислить угол отсечки по данным п. 3а и сравнить его с углом отсечки, обеспечивающим максимальное значение амплитуды второй гармоники тока в нелинейной цепи по графику рис. 10.3. Объяснить их различие.

Содержание отчета

- схема макета, в которой производились измерения;
- таблицы измерений и расчетных результатов;
- рисунок формы напряжения по п. 3б;
- сравнительные графики расчетных и экспериментально снятых коэффициентов А. И. Берга $\alpha_k(\theta)$;
- объяснение полученных результатов и выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. В чем состоят особенности анализа нелинейных цепей?
2. Перечислить основные способы аппроксимации характеристик нелинейных цепей.
3. Дать определение угла отсечки, в каких случаях используется это понятие?
4. В чем различие между коэффициентами и функциями Берга? Как необходимо организовать эксперимент, чтобы непосредственно измерить коэффициенты Берга?
5. При каких углах отсечки $\alpha_3(\theta) < 0$? Как интерпретировать это обстоятельство?
6. Описать методику экспериментального определения графиков коэффициентов Берга.

7. Описать методику экспериментального определения графиков *функций* Берга.
8. Может ли нелинейный элемент работать в линейном режиме? Если да, то чему равен в этом случае угол отсечки?
9. Нелинейный элемент имеет ВАХ с ограничением, и на выходе появляются ограниченные cos-импульсы тока. Рассчитать амплитуды гармоник выходного тока, используя коэффициенты Берга.
10. Изобразить взаимное положение ВАХ нелинейного элемента и входного гармонического сигнала при углах отсечки $\theta = 0, 90, 180^\circ$.
11. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована кусочно-нелинейно: прямой $i = 0$ при $u \leq 0$ и параболой $i = a_2 u^2$ при $u > 0$. На нелинейный элемент подано гармоническое напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega_1 t)$. Найти амплитуды гармоник тока I_0, I_1, I_2 . Можно ли при этом воспользоваться коэффициентами Берга?
12. Пользуясь графическим представлением коэффициентов Берга, найти спектр сигнала, заданного преподавателем.
13. Как с помощью нелинейного элемента осуществить умножение частоты? Нарисовать схему умножителя частоты. Как обеспечить наиболее эффективный режим ее работы?
14. При некоторых углах отсечки значения коэффициентов и функций Берга для третьей и более высоких гармоник могут принимать отрицательные значения. Что это означает?
15. Каким образом в лабораторной установке можно регулировать угол отсечки?

11. НЕЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА

Цель работы — исследование основных нелинейных радиотехнических устройств и функциональных преобразований сигналов в этих устройствах.

11.1. Теоретические сведения

В целом ряде радиотехнических устройств необходимо использовать нелинейные элементы.

Аппроксимация нелинейных характеристик. Для анализа и расчетов схем, содержащих нелинейные элементы, необходимо **аналитическое**, в виде формулы, представление нелинейной ВАХ. Используются различные способы **аппроксимации** — замены таблично (иногда и аналитически) заданной характеристики функциями, приближенно отражающими поведение реальной ВАХ нелинейного двухполюсника в представляющем интерес диапазоне изменения аргумента. При выборе вида аппроксимирующих функций учитывают требуемую точность результата, пределы изменения входного воздействия и удобство выбранной функции для аналитических расчетов. Наиболее распространенными видами аппроксимации являются *полиномиальная, кусочно-линейная и экспоненциальная*. Для простейшего качественного анализа работы основных нелинейных радиотехнических устройств удобна *полиномиальная аппроксимация*. Теоретические сведения о *кусочно-линейной* аппроксимации, также используемой в данной работе, приведены в описании лабораторной работы 10.

Полиномиальная аппроксимация. Пусть $i = f(u)$ (см. рис. 10.1) является графически заданной (экспериментально снятой) ВАХ. Будем искать представление этой характеристики в виде ряда Маклорена

$$i = f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + \dots \quad (11.1)$$

Ограничиваясь n членами ряда: $i = f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{n-1} u^{n-1}$, запишем, используя график, систему уравнений:

$$i_1 = f(u_1) = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \dots + a_{n-1} u_1^{n-1},$$

$$i_2 = f(u_2) = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \dots + a_{n-1} u_2^{n-1},$$

$$i_3 = f(u_3) = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + \dots + a_{n-1} u_3^{n-1},$$

...

$$i_n = f(u_n) = a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \dots + a_{n-1} u_n^{n-1}.$$

Решая полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, получим ВАХ полупроводникового диода, аппроксимированную полиномом $(n - 1)$ -й степени на участке $u \in [u_1, u_n]$.

Спектральный состав тока в цепи с нелинейным сопротивлением. Пусть ВАХ нелинейного сопротивления аппроксимирована полиномом третьей степени:

$$i(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad (11.2)$$

где a_1, a_2, a_3 — размерные коэффициенты.

Подадим на нелинейное сопротивление постоянное напряжение смещения и сумму двух гармонических колебаний

$$u(t) = E_0 + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t. \quad (11.3)$$

Подставив сумму (11.3) в полином (11.2) и производя элементарные тригонометрические преобразования, определим амплитуды гармоник тока:

$$\begin{aligned} i(t) \sim & \left(a_1 E_0 + a_2 \left(\frac{1}{2} U_1^2 + \frac{1}{2} U_2^2 + E_0^2 \right) + a_3 \left(\frac{3}{2} U_1^2 E_0 + \frac{3}{2} U_2^2 E_0 + E_0^3 \right) \right) + \\ & + \left(a_1 U_1 + 2a_2 U_1 E_0 + \frac{3}{4} a_3 U_1^3 + \frac{3}{2} a_3 U_1 U_2^2 + 3a_3 U_1 E_0^2 \right) \cos \omega_1 t + \\ & + \left(a_1 U_2 + 2a_2 U_2 E_0 + \frac{3}{4} a_3 U_2^3 + \frac{3}{2} a_3 U_1^2 U_2 + 3a_3 U_2 E_0^2 \right) \cos \omega_2 t + \\ & + \left(\frac{1}{2} a_2 U_1^2 + \frac{3}{2} a_3 U_1^2 E_0 \right) \cos(2\omega_1 t) + \left(\frac{1}{2} a_2 U_2^2 + \frac{3}{2} a_3 U_2^2 E_0 \right) \cos 2\omega_2 t + \\ & + \left(\frac{1}{4} a_3 U_1^3 \right) \cos(3\omega_1 t) + \left(\frac{1}{4} a_3 U_2^3 \right) \cos 3\omega_2 t + \\ & + \left(a_2 U_1 U_2 + \frac{5}{2} a_3 U_1 U_2 E_0 \right) (\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t) + \\ & + \left(\frac{3}{4} a_3 U_1 U_2^2 \right) (\cos(\omega_1 + 2\omega_2)t + \cos(\omega_1 - 2\omega_2)t) + \\ & + \left(\frac{3}{4} a_3 U_1^2 U_2 \right) (\cos(2\omega_1 + \omega_2)t + \cos(2\omega_1 - \omega_2)t). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Спектр тока в цепи богат гармониками. При нелинейности элемента, требующей для аппроксимации полинома более высокой степени, число гармонических составляющих в спектре возрастает. Спектр тока содержит в общем случае гармоники с комбинационными частотами $m\omega_1 \pm n\omega_2$, причем m и n представляют целые числа, максимальные значения которых в сумме не превосходят степени аппроксимирующего полинома. Еще более сложная картина получается при подаче на нелинейную цепь радиосигналов, имеющих богатый спектральный состав.

Эти эффекты используются для осуществления *амплитудной модуляции, гетеродинирования и детектирования*.

Амплитудная модуляция заключается в изменении амплитуды несущего гармонического колебания с частотой ω_0 по закону модулирующего сигнала. Однотональное амплитудно-модулированное (АМ) колебание записывают как

$$u(t) = U(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad (11.5)$$

где $m = U_\Omega / U$ — коэффициент амплитудной модуляции, U — амплитуда немодулированного несущего колебания, U_Ω — амплитуда отклонения модулированного колебания от значения U .

Перепишав выражение (11.5) в виде

$$u(t) = U \cos \omega_0 t + \frac{mU}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{mU}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t, \quad (11.6)$$

получаем представление однотонового АМ-колебания в виде суммы трех гармоник: несущей с частотой ω_0 и двух боковых (верхней и нижней) с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ соответственно.

Схема устройства для формирования АМ-колебаний с помощью нелинейного элемента представлена на рис. 11.1.

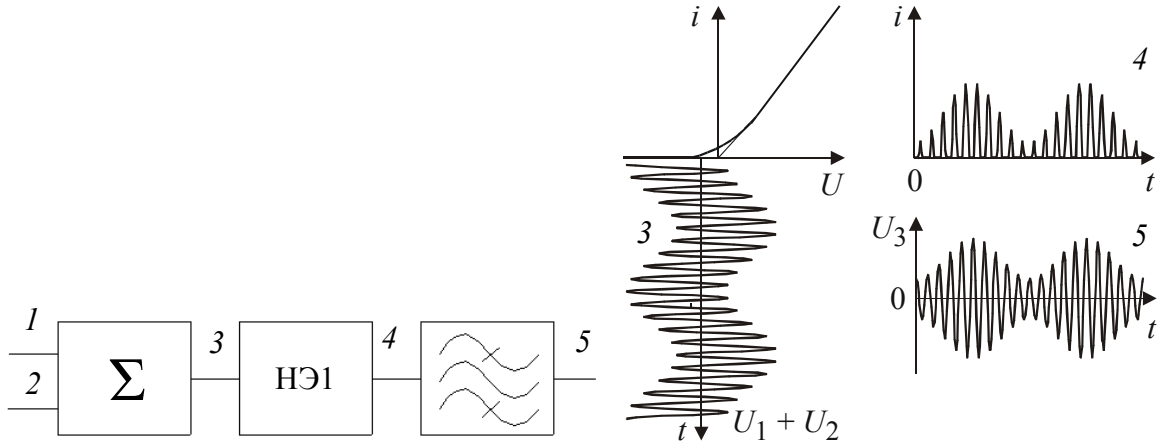


Рис. 11.1

Рис. 11.2

На рис. 11.2 представлены временные диаграммы сигналов, которые отражают этапы преобразований в амплитудном модуляторе. Пусть ВАХ нелинейного элемента представлена полиномом вида (11.1), тогда, учитывая результаты (11.3) и вводя обозначения $\omega_1 = \omega_0$ и $\omega_2 = \Omega$, выделим спектральные составляющие с частотами ω_0 , $\omega_0 \pm \Omega$, сумма которых в соответствии с (11.6) и представляет тональное АМ-колебание. Выделяя из спектра сигнала 4 эти составляющие с помощью полосового фильтра — параллельного колебательного контура, настроенного на частоту ω_0 и имеющего полосу записания не меньше, чем 2Ω , получим напряжение с амплитудной модуляцией. Коэффициент модуляции

$$m = \frac{U_\Omega}{U} = \frac{2 \left(a_2 U_\Omega + \frac{5}{2} a_3 U_\Omega E_0 \right)}{a_1 + 2a_2 E_0 + \frac{3}{4} a_3 U^2 + \frac{3}{2} a_3 U_\Omega^2 + 3a_3 E_0^2}. \quad (11.7)$$

Из выражения (11.7) следует, что огибающая полученного АМ-колебания *не воспроизводит* закон модуляции, так как m зависит от U_Ω *нелинейно*. Но при квадратичной ($a_3 = 0$) ВАХ коэффициент модуляции

$$m = \frac{U_\Omega}{E_0 + \frac{a_1}{2a_2}}. \quad (11.8)$$

В этом случае закон модуляции *воспроизводится без искажений*.

Гетеродинирование состоит в *переносе спектра сигнала по частоте* без изменения структуры спектра. Гетеродинирование также осуществляется с использованием нелинейного элемента и может быть реализовано с помощью схемы, показанной на рис. 11.1.

Пусть $u(t)$ — сигнал, подлежащий гетеродинированию, а ω_c — средняя частота его спектра; $u_r(t) = U_r \cos \omega_r t$ — колебание, создаваемое вспомогательным генератором (гетеродином). Тогда полосовой фильтр должен быть настроен на частоту $\omega_r \pm \omega_c$ и иметь полосу пропускания, равную ширине спектра сигнала $u(t)$. Для получения минимального числа нежелательных продуктов преобразования характеристика нелинейного элемента должна быть близка к квадратичной, тогда спектр выходного сигнала будет содержать только составляющие ω_r , ω_c , $\omega_r \pm \omega_c$, которые легко отфильтровать. Нелинейных искажений перенесенного на частоту $\omega_r \pm \omega_c$ сигнала при этом нет.

Амплитудное детектирование заключается в *выделении из радиосигнала его огибающей* и восстановлении, таким образом, модулирующего сигнала. Рассмотрим преобразование однотонового АМ-колебания нелинейным двухполосником с *квадратичной* ВАХ:

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2. \quad (11.9)$$

Подставив в (11.9) выражение входного высокочастотного напряжения $u(t) = U_\Omega \cos \omega_0 t$:

$$\begin{aligned} i &= a_0 + a_1 U_\Omega \cos \omega_0 t + a_2 U_\Omega^2 \cos^2 \omega_0 t = \\ &= a_0 + a_1 U_\Omega \cos \omega_0 t + \frac{a_2}{2} U_\Omega^2 + \frac{a_2}{2} U_\Omega^2 \cos 2\omega_0 t, \end{aligned}$$

выделим постоянную составляющую тока $I_0 = a_0 + a_2 U_\Omega^2 / 2$ и, вычитая из нее ток покоя a_0 , найдем *характеристику детектирования квадратичного детектора*:

$$I_d = \frac{a_2}{2} U_\Omega^2. \quad (11.10)$$

Характеристика детектирования (11.10) оказывается параболической. При таком детектировании возникают заметные искажения: при тональной АМ ток в цепи

$$I_d = \frac{a_2}{2} U_{\Omega}^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 = \frac{a_2}{2} U_{\Omega}^2 + a_2 m U_{\Omega}^2 \cos \Omega t + \frac{a_2}{2} m^2 U_{\Omega}^2 \cos 2\Omega t,$$

помимо постоянной составляющей, от которой легко избавиться с помощью, например, разделительного конденсатора, содержит гармонику с частотой Ω и создающее искажения колебание на частоте 2Ω . Если же модуляция осуществляется *сложным* (содержащим много гармоник) сигналом, то, кроме гармоник на частотах $k\Omega$, возникают и комбинационные колебания, приводящие к дополнительным искажениям полезного сигнала. Такой детектор, выделяющий квадрат огибающей амплитудно-модулированного колебания, называют *квадратичным*.

Схема устройства, с помощью которого осуществляют квадратичное детектирование сигналов, имеет ту же структуру, что и описанные ранее устройства (см. рис. 11.1). Только у сумматора задействован один вход из двух и вместо полосового фильтра используют фильтр нижних частот.

Применение нелинейного элемента с характеристикой, аппроксимированной кусочно-линейной зависимостью (см. 10.1), позволяет построить амплитудный детектор, выделяющий сигнал, прямо пропорциональный амплитуде огибающей амплитудно-модулированного колебания. Кусочно-линейная аппроксимация характеристики нелинейного элемента адекватна в случае использования схемы при достаточно больших уровнях сигнала, при этом реализуется режим детектирования, называемый *линейным*. В этом смысле и говорят о линейности процедуры детектирования, которая является *принципиально нелинейной* операцией.

На рис. 11.3 приведены временные диаграммы, поясняющие работу амплитудного детектора.

Со спектральной точки зрения все три рассмотренных процесса — *модуляция, детектирование и гетеродинирование* — являются частными случаями преобразования спектра, сводящегося к его переносу по оси частот. При амплитудной модуляции спектр модулирующего сигнала (обычно низкочастотный) переносится в область высоких частот. При детектировании спектр модулированного радиосигнала переносится в область нулевой частоты. Гетеродинирование — промежуточный случай (спектр радиосигнала сдвигается в заданную область по оси частот).

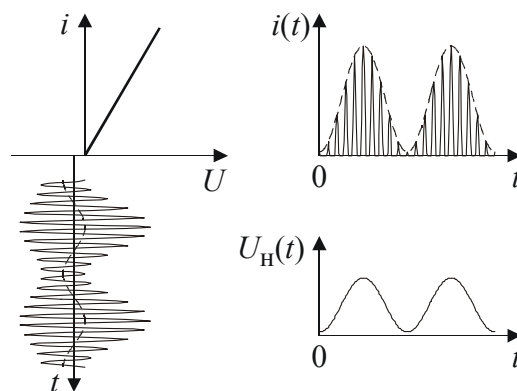


Рис. 11.3

11.2. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из трех генераторов, осциллографа, анализатора спектра и лабораторного макета. Функциональная схема макета приведена на рис. 11.4.

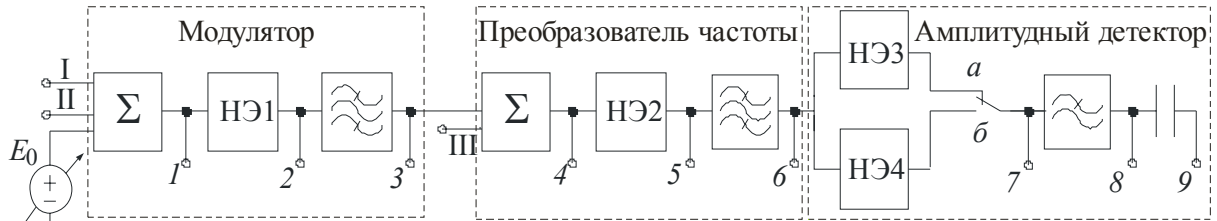


Рис. 11.4

На входы I и II лабораторного макета подаются модулирующее и несущее колебания с генератора 1 и генератора 2 соответственно. На вход III подается сигнал гетеродина. С помощью переключателя $S1$ на вход 1 осциллографа можно подать одно из трех входных колебаний (I, II, III). Переключателем $S2$ осуществляется выбор контрольной точки (одной из девяти), сигнал с которой подается на канал 2 осциллографа и спектроанализатор. Переключателем $S3$ выбирается один из нелинейных элементов (НЭ3 или НЭ4) в блоке детектирования. С помощью ручки A регулируется уровень постоянной составляющей E_0 на входе; ее значение отображается на приборе, расположенном на передней панели макета. Лабораторный макет содержит также два сумматора, два полосовых фильтра и фильтр нижних частот, амплитудно-частотные характеристики которых приведены на лицевой стороне макета. Характеристика НЭ1, НЭ2 и НЭ3 — квадратичная с коэффициентом $a_2 = 7,5$, НЭ4 — кусочно-линейная (10.2) с параметрами $U_H = 0$ и $S = 1$.

11.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Исследование амплитудной модуляции. Для получения амплитудной модуляции необходимо подать сумму несущего и модулирующего колебаний и постоянной составляющей на НЭ1. Для этого к входам I и II лабораторного макета подключить источники гармонического сигнала (генератор 1 и генератор 2) и установить на них частоты $f_0 \approx 1,7$ МГц и $f_\Omega \approx 15$ кГц. Установить амплитуды колебаний $U_{f_0} \approx 7$ В и $U_\Omega \approx 7$ В. Задать уровень постоянной составляющей $E_0 \approx 0,5$ В. Контроль значений амплитуд осуществляется по каналу 1 осциллографа, постоянной составляющей — по прибору на передней панели.

Зарисовать сигнал (канал 2 осциллографа) и его спектр после сумматора, т. е. в контрольной точке 1 (выбор контрольной точки осуществляется переключателем $S2$). Записать значения амплитуд несущего и модулирующего колебаний и постоянной составляющей (измерить по шкале осциллографа), а

также записать значения мощностей тех же гармоник, измеренные с помощью спектроанализатора. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 1 МГц, полоса обзора 2 МГц, полоса пропускания радиофильтра 3 кГц, полоса пропускания видеофильтра 300 Гц (полосы пропускания радиофильтра и видеофильтра при следующих измерениях должны оставаться такими же).

Зарисовать сигнал и его спектр после НЭ1, т. е. в контрольной точке 2. Записать значения мощностей гармоник. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 2 МГц, полоса обзора 4 МГц. Чтобы подробнее рассмотреть составляющие спектра на несущей частоте, установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 1,7 МГц, полоса обзора 200 кГц.

Для контрольной точки 3 произвести измерения, аналогичные измерениям в точке 2.

2. Исследование гетеродинирования. Для осуществления гетеродинирования на второй НЭ2 необходимо подать сумму сформированного в п.1 АМ-колебания и сигнала гетеродина. Для этого к входу III лабораторного макета подключить источник гармонического сигнала (генератор 3) и установить на нем следующие параметры: $f_r \approx 1,5 \text{ МГц}$, $U_r \approx 7,5 \text{ В}$.

Зарисовать спектр сигнала после сумматора, т. е. в контрольной точке 4. Записать значения мощностей гармоник. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 1,5 МГц, полоса обзора 3 МГц.

Зарисовать спектр сигнала после НЭ2, т. е. в контрольной точке 5. Записать значения мощностей гармоник. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 2 МГц, полоса обзора 4 МГц. Чтобы подробнее рассмотреть составляющую спектра на разностной частоте сигнала и гетеродина, установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 200 кГц, полоса обзора 400 кГц.

Для контрольной точки 6 произвести измерения, аналогичные измерениям в точке 5.

3. Исследование квадратичного детектирования. Для осуществления квадратичного детектирования необходимо подать полученное при гетеродинировании АМ-колебание на НЭ3. Для этого установить тумблер S3 в положение а.

Зарисовать сигнал и его спектр после НЭ3, т. е. в контрольной точке 7. Записать значения мощностей гармоник. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 250 кГц, полоса обзора 500 кГц.

Зарисовать сигнал и его спектр после полосового фильтра и конденсатора, т. е. в контрольных точках 8 и 9. Записать значения мощностей гармоник. Для удобного наблюдения спектра установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 250 кГц, полоса обзора 500 кГц. Чтобы подробнее рассмотреть низкочастотную составляющую спектра, установить следующие параметры спектроанализатора: центральная частота 25 кГц, полоса обзора 50 кГц.

4. Исследование линейного детектирования. Для осуществления линейного детектирования установить тумблер в положение б, чтобы снимать продетектированный сигнал с выхода НЭ4. Измерения проводить аналогично п. 3.

5. Исследование линейного и квадратичного детектирования при модуляции сигнала пилообразным напряжением. Не меняя параметров сигнала гетеродина и несущего колебания, включить режим пилообразного напряжения для генератора, формирующего модулирующее напряжение, и установить частоту повторения 500 Гц. Зарисовать напряжение в точке 9 для двух режимов детектирования: квадратичного и линейного (тумблер S3).

6. Обработка и анализ результатов измерения. По измеренным значениям мощностей гармоник рассчитать их амплитуды, учитывая, что входное сопротивление спектроанализатора 50 Ом.

Зная амплитуды гармоник на входе нелинейных элементов, характеристики нелинейных элементов и АЧХ фильтров, рассчитать амплитуды гармоник на выходе каждого функционального узла: модулятора (точка 3), преобразователя частоты (точка 6) и детектора (точка 9). Принять, что АЧХ фильтров вне полосы пропускания по уровню 0,1 равна нулю. Сравнить расчетные значения амплитуд гармоник с экспериментально полученными.

Сравнить сигналы и их спектры на выходе линейного и квадратичного детекторов. Объяснить различия.

Содержание отчета

- краткие положения теории и схемы устройств, использованных для осуществления рассмотренных нелинейных преобразований радиосигналов;
- графики (рисунки) форм и спектров исследованных сигналов;
- объяснение полученных результатов;
- выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит особенность воздействия двух колебаний на нелинейную цепь?

2. Как с помощью нелинейного сопротивления осуществить амплитудную модуляцию?
3. Что такое детектирование? Какие виды детектирования существуют?
4. Что такое гетеродинирование и как оно осуществляется? Что такое «инверсия спектра»?
5. На нелинейный элемент, ВАХ которого аппроксимирована полиномом 4-й степени, подается напряжение в виде суммы двух гармонических колебаний с частотами, указанными преподавателем. Какие частоты могут содержаться в спектре тока, протекающего через нелинейный элемент?
6. Что означает условие отсутствия отсечки при анализе изучаемых в лабораторной работе процессов на основе полиномиальной аппроксимации? Привести примеры. Использовался ли режим с отсечкой при настройке аппаратуры в ходе работы?
7. Возможна ли амплитудная модуляция в устройстве с нелинейным элементом, ВАХ которого аппроксимирована полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_3 u^3$?
8. Пояснить процедуру амплитудной модуляции со спектральной точки зрения.
9. Пояснить процедуру гетеродинирования со спектральной точки зрения.
10. Пояснить процедуру АМ-детектирования со спектральной точки зрения.
11. К чему приведет отличие вольт-амперной характеристики нелинейного элемента от квадратичной при гетеродинировании?
12. При разработке радиоприемника необходимо обеспечить перенос частоты входного сигнала, которая может лежать в диапазоне 88...108 МГц, на промежуточную частоту, равную 10 МГц. В каком диапазоне должна изменяться для этого частота гетеродина?
13. Что общего между амплитудной модуляцией, гетеродинированием и детектированием?
14. Как осуществляется амплитудное детектирование?

12. ИССЛЕДОВАНИЕ *RC*-АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Цель работы — изучение условий самовозбуждения колебаний в автогенераторах с частотно-зависимой обратной связью.

12.1. Теоретические сведения

RC-автогенераторы, представляющие собою комбинацию активных четырехполюсников (усилителей) и *RC*-цепей, играющих роль элементов обратной связи, используются на частотах ниже единиц мегагерц. Основное их преимущество — малые габариты.

Структурная схема автогенератора приведена на рис. 12.1, *а*.

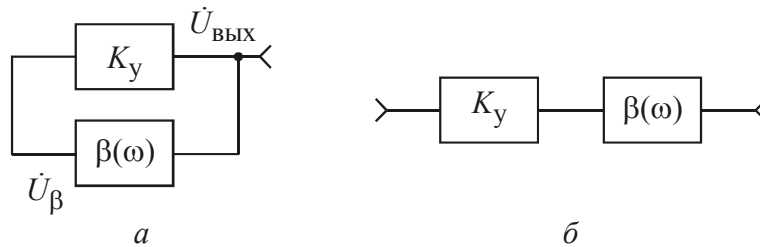


Рис. 12.1

В *RC*-автогенераторах в качестве активного четырехполюсника обычно используется широкополосный усилитель с характеристикой $K_y(\omega) = \text{const}$, а в качестве четырехполюсника цепи обратной связи — набор частотно-зависимых *RC*-цепей. Комплексная частотная характеристика четырехполюсника цепи обратной связи имеет вид: $\dot{\beta}(\omega) = \frac{U_\beta}{U_{\text{вых}}} = \beta(\omega)e^{j\varphi_\beta(\omega)}$.

Принципиальные схемы исследуемых автогенераторов приведены на рис. 12.2. На рис. 12.2, *а*, *б* изображены схемы автогенераторов, в цепи обратных связей которых включены фазосдвигающие *RC*-цепи, на рис. 12.2, *в* — *RC*-генератор, цепь обратной связи которого образована мостом Вина.

В соответствии с частотным критерием устойчивости Найквиста возможность возникновения колебаний в *RC*-генераторах определяется по характеру изменения комплексной частотной характеристики разомкнутого тракта устройства (рис. 12.1, *б*): $\dot{H}(\omega) = \dot{\beta}(\omega)K_y = H(\omega)e^{j\varphi_H(\omega)}$, где $H(\omega) = \beta(\omega)K_y$, $\varphi_H(\omega) = \varphi_\beta(\omega) + \varphi_{K_y}$ — амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики разомкнутого тракта автогенератора, $\varphi_{K_y} = 0$ для неинвертирующего усилителя и $\varphi_{K_y} = \pi$ для инвертирующего усилителя (рис. 12.3, *б*; 12.4, *б*; 12.5, *б*).

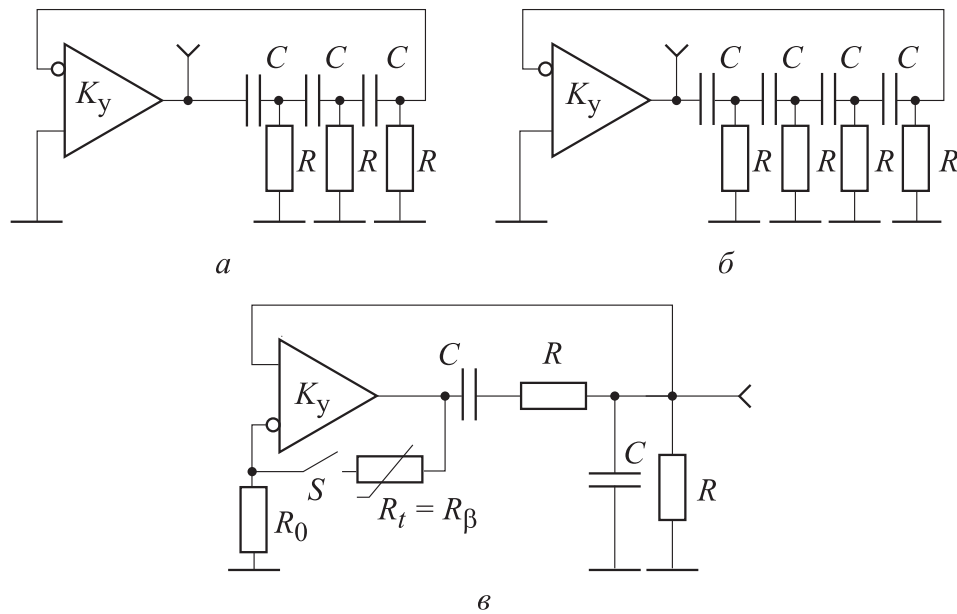


Рис. 12.2

Комплексная частотная характеристика разомкнутого тракта устройства $\dot{H}(\omega) = \text{Re}[\dot{H}(\omega)] + j \text{Im}[\dot{H}(\omega)]$ изображается на комплексной плоскости в виде вектора, конец которого при изменении частоты опишет кривую, называемую *годографом Найквиста* (рис. 12.3, в; 12.4, в; 12.5, в). Если годограф Найквиста охватывает на комплексной плоскости точку $(1, j0)$, то в замкнутом устройстве возникнут колебания. Отсюда следует, что для обеспечения условия самовозбуждения автогенератора на частоте генерации ω_0 необходимо выполнение условий *баланса фаз* и *баланса амплитуд*:

$$\varphi_H(\omega_0) = \varphi_B(\omega_0) + \varphi_K = m2\pi, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.1)$$

$$\dot{H}(\omega_0) = \beta(\omega_0)K_y > 1 \quad \text{при } \text{Im}[\dot{H}(\omega_0)] = 0. \quad (12.2)$$

Комплексная частотная характеристика разомкнутого тракта автогенератора с трехзвенной фазосдвигающей цепью в четырехполюснике обратной связи (рис. 12.3, а) запишется в виде

$$\dot{H}(\omega) = -\dot{\beta}(\omega)K_y = -\frac{(\omega RC)^3}{((\omega RC)^3 - 5\omega RC) + j(1 - 6(\omega RC)^2)}K_y. \quad (12.3)$$

Частота возникающих в RC -генераторе колебаний ω_0 определится из выражения (12.3) с учетом условий (12.1), (12.2) при $\text{Im}[\dot{H}(\omega_0)] = 0$:

$$\omega_0 RC = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6}RC},$$

а значение коэффициента передачи усилителя, при достижении которого в генераторе начнут возникать колебания, определится из неравенства (12.2) с учетом выражения (12.3) в виде

$$K_y > \frac{-1}{\beta(\omega_0)} = -\frac{(\omega_0 RC)^3 - 5\omega_0 RC}{(\omega_0 RC)^3} = -\frac{(\omega_0 RC)^2 - 5}{(\omega_0 RC)^2} = -\frac{\frac{1}{6} - 5}{\frac{1}{6}} = 29.$$

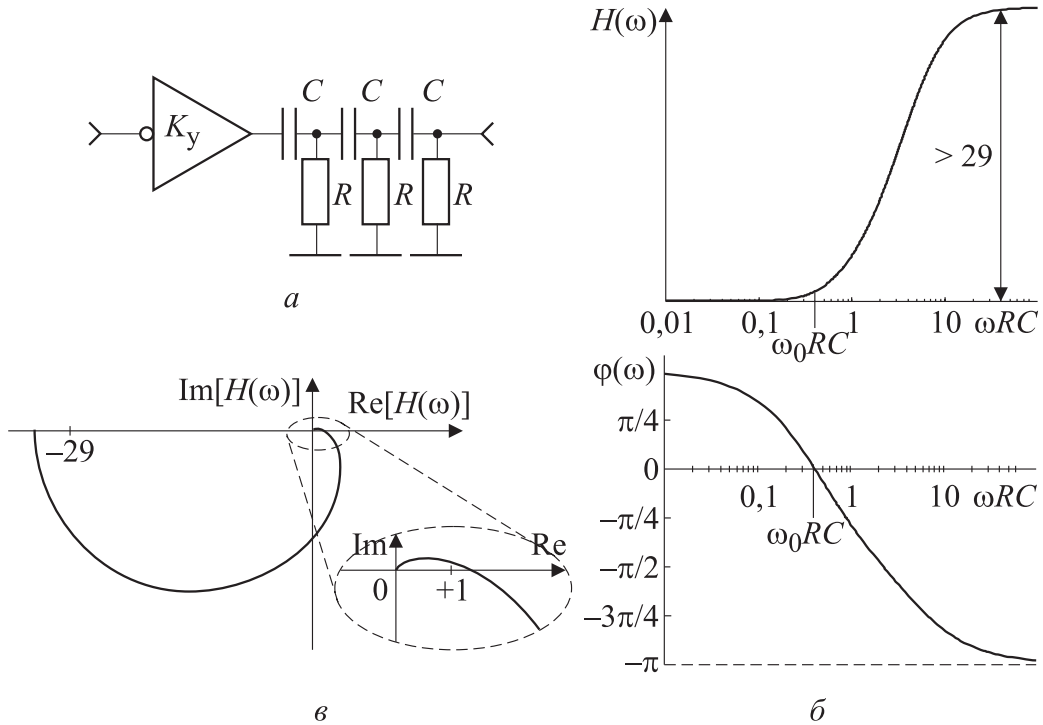


Рис. 12.3

Комплексная частотная характеристика разомкнутого тракта автогенератора с четырехзвенной фазосдвигающей цепью в четырехполюснике обратной связи (рис. 12.2, б; 12.4, а) запишется в виде выражения

$$\dot{H}(\omega) = -\dot{\beta}(\omega)K_y = -\frac{(\omega RC)^4 K_y}{((\omega RC)^4 - 15(\omega RC)^2 + 1) + j(7\omega RC - 10(\omega RC)^3)}. \quad (12.4)$$

Частота возникающих в генераторе колебаний ω_0 определится из выражения (12.4) и условия (12.2) при $\text{Re}[\dot{H}(\omega_0)] = 0$ в виде

$$\omega_0 RC = \sqrt{\frac{7}{10}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{7}{10}} \frac{1}{RC},$$

а коэффициент усиления усилителя — из условия

$$K_y > \frac{-1}{\beta(\omega_0)} = -\frac{(\omega_0 RC)^4 - 15(\omega_0 RC)^2 + 1}{(\omega_0 RC)^4} = -\frac{\frac{49}{100} - 15 \cdot \frac{7}{10} + 1}{\frac{49}{100}} = \frac{901}{49} \approx 18,4.$$

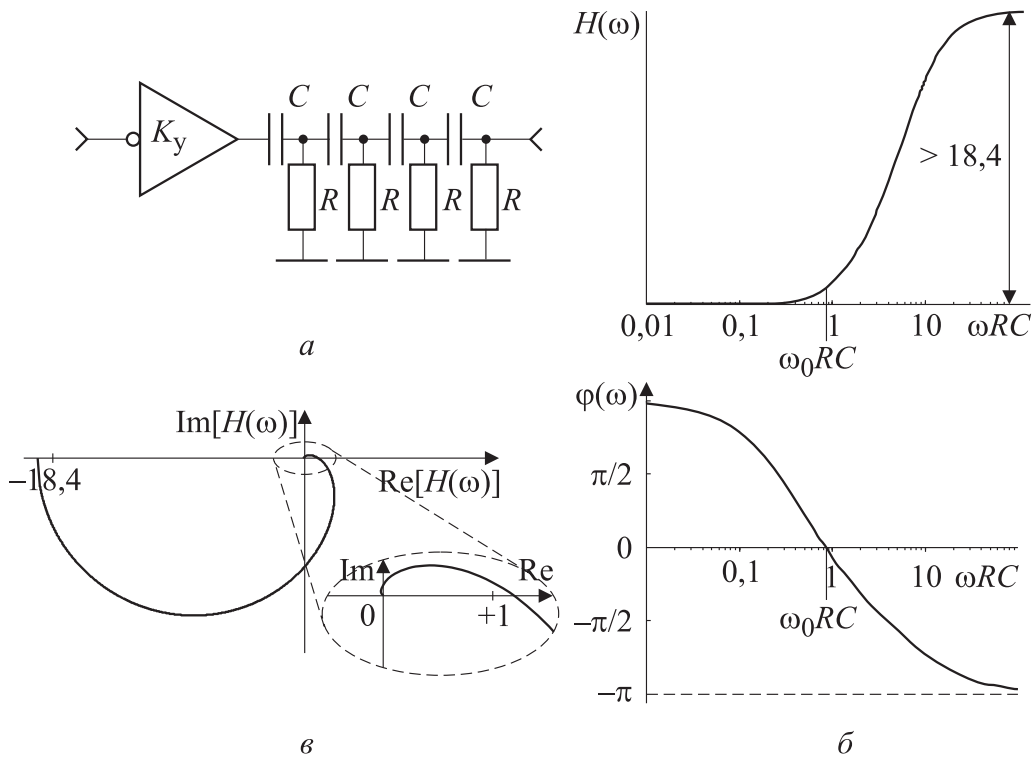


Рис. 12.4

Необходимость использования в RC -генераторах усилителей с различными коэффициентами передачи объясняется различными коэффициентами передачи четырехполосников обратной связи на частотах генерации. В четырехзвенной цепи четырехполосника обратной связи фазовый сдвиг $\Delta\varphi_n$ в каждом звене составляет на частоте генерации 45° , а в трехзвенной цепи — $\Delta\varphi_n = 60^\circ$. Эти условия определяют меньшее ослабление сигнала в четырехзвенной цепи по сравнению с трехзвенной.

Коэффициент передачи разомкнутого тракта автогенератора с мостом Вина (рис. 12.5, а) определится с помощью выражения

$$\dot{H}(\omega) = -\dot{\beta}(\omega)K_y = \frac{1}{3 + j\left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)}K_y.$$

Частота, на которой возникнет самовозбуждение, определится из условия $\omega_0 RC - \frac{1}{\omega_0 RC} = 0$:

$$(\omega_0 RC)^2 = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Коэффициент передачи цепи обратной связи на этой частоте $\beta(\omega_0) = \frac{1}{3}$. Коэффициент передачи усилителя должен быть выбран достаточным для

компенсации ослабления сигнала в цепи обратной связи и в соответствии с условием (12.2) отвечать неравенству $K_y > 3$.

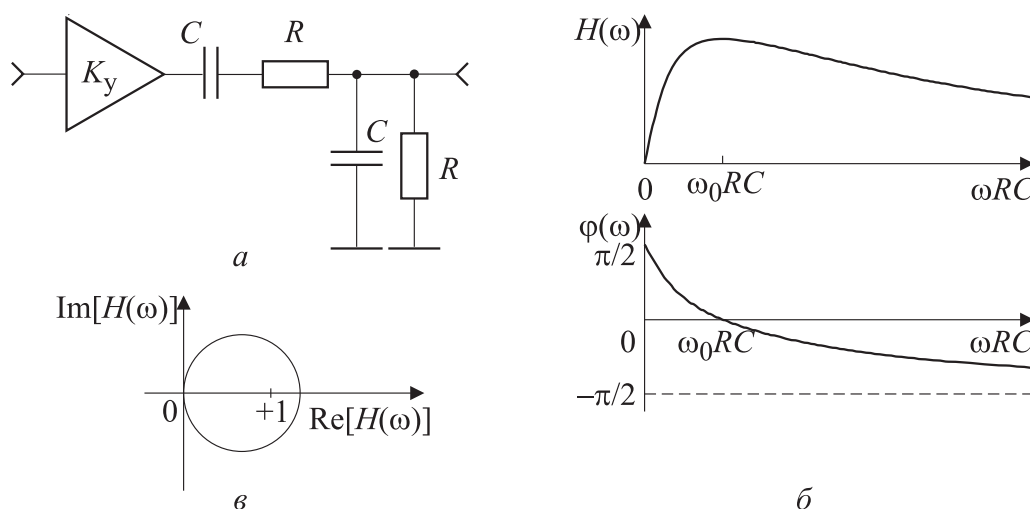


Рис. 12.5

Амплитуда установившихся в автогенераторе колебаний ограничивается нелинейностью самого усилителя. Если коэффициент усиления разомкнутого тракта автогенератора $H(\omega_0)$ заметно больше трех, то форма генерируемых колебаний может существенно отличаться от синусоидальной.

Для уменьшения этих искажений применяют автоматическую регулировку коэффициента передачи усилителя K_y , осуществляемую, например, с помощью инерционного нелинейного терморезистора R_t с отрицательной зависимостью сопротивления от приложенного к нему напряжения, включаемого в цепь отрицательной обратной связи (рис. 12.2, в). Уменьшение сопротивления резистора R_t приводит к увеличению коэффициента передачи

цепи отрицательной обратной связи: $\beta_{\text{отр}} = \frac{R_0}{R_0 + R_t}$ и, следовательно, к

уменьшению коэффициента передачи усилителя, определяемого выражением

$K_y = \frac{K_0}{1 + \beta_{\text{отр}} K_0}$, где K_0 — коэффициент усиления усилителя без обратной

связи.

Уменьшение коэффициента передачи усилителя приводит к уменьшению искажений колебаний.

12.2. Описание лабораторной установки

Установка (рис. 12.6) содержит генератор сигналов низкой частоты (НЧ), двухлучевой осциллограф с двумя отдельными входами, «Усилитель У1» и «Усилитель У2» и экспериментальный макет.

2. Для исследования частотных и фазовых характеристик цепей обратной связи автогенераторов отключить усилитель ($S3$ — в положение 3) и подать на вход цепей обратной связи сигнал с генератора, подключив его к разъему $P1$. Для контроля входного сигнала подключить первый канал осциллографа к разъему $P2$. Второй канал осциллографа подключить к выходу цепи обратной связи (разъем $P3$).

3. Исследовать АЧХ и ФЧХ трех цепей обратной связи:

- а) трехзвенной RC -цепи,
- б) четырехзвенной RC -цепи,
- в) моста Вина (при среднем значении сопротивления $R3$).

Измерения производятся для 7 значений частот, указанных на макете. Выбор исследуемой цепи производится с помощью переключателя $S2$.

Измерение АЧХ производится путем определения (с помощью осциллографа) амплитуд входного $U_{вх}$ и выходного $U_{вых}$ напряжения. Модуль коэффициента передачи рассчитывается затем как $U_{вых} / U_{вх}$.

Для снятия ФЧХ цепей обратной связи следует измерять относительный сдвиг гармонических колебаний на экране осциллографа. С этой целью осу-

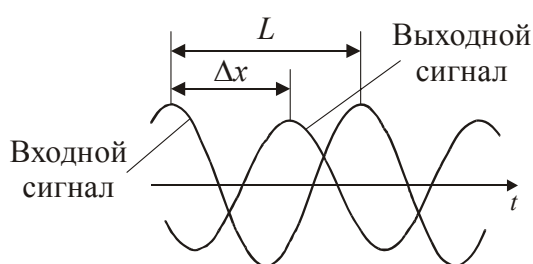


Рис. 12.7

ществить синхронизацию осциллографа по колебанию, подаваемому в канал I. Для повышения точности измерений коэффициенты усиления в каналах I и II осциллографа следует выбрать такими, чтобы амплитуды входного и выходного колебаний на экране были примерно одинаковыми. Начало отсчета установить по изображению

колебания, снятого с выхода генератора (канал I), и измерить следующие величины (рис. 12.7):

- L — зависящее от частоты расстояние (в клетках) между ближайшими минимумами (максимумами) входного или выходного колебания;
- Δx — расстояние (также в клетках) между минимумами (максимумами) входного и выходного колебаний исследуемой цепи. При этом левый рассматриваемый максимум должен обязательно принадлежать *входному* сигналу, а правый — *выходному* (см. рис. 12.7).

Фазовый сдвиг (в градусах), вносимый исследуемой цепью, рассчитывается затем по формуле $\Delta\varphi = 360 \frac{\Delta x}{L}$.

4. Отключить генератор НЧ и, изменяя коэффициент усиления усилителя с помощью резистора $R4$, определить коэффициент усиления усилителя, при котором возникают колебания в трехзвенном и четырехзвенном автогенераторах и в генераторе с мостом Вина. Переключатель $S3$ при этом должен быть установлен в положение 2 для трех- и четырехзвенной цепей обратной

связи и в положение I — для моста Вина. Шкала переменного резистора R_4 проградуирована непосредственно в значениях коэффициента усиления.

5. Для всех трех автогенераторов определить частоту колебаний, с помощью осциллографа измеряя их период. Для автогенератора с мостом Вина измерить частоту колебаний для двух случаев — при $R_{3\min}$ и $R_{3\max}$.

6. В автогенераторе с мостом Вина установить с помощью резистора R_4 коэффициент усиления немного выше порогового значения, при котором возникают колебания, добившись при этом заметного отклонения формы колебаний от синусоидальной. Подключить цепь автоматической регулировки усиления (переключатель S_1 — замкнуть). Зарисовать форму генерируемых сигналов с АРУ и без нее.

Содержание отчета

- таблицы значений и графики измеренных АЧХ и ФЧХ цепей обратной связи;
- значения пороговых коэффициентов усиления, при которых возникают колебания в автогенераторах;
- частоты колебаний автогенераторов;
- рисунки, иллюстрирующие влияние цепи автоматической регулировки усиления на форму генерируемых колебаний;
- теоретический расчет частоты, на которой выполняется баланс фаз, если в качестве цепи обратной связи используется:
 - 1) трехзвенная RC -цепь с $R_1 = 1,5$ кОм, $C_1 = 0,01$ мкФ;
 - 2) четырехзвенная RC -цепь с $R_2 = 1,5$ кОм, $C_2 = 0,01$ мкФ;
 - 3а) мост Вина с $R_3 = 1$ кОм, $C_3 = 3$ мкФ;
 - 3б) мост Вина с $R_3 = 1,2$ кОм, $C_3 = 3$ мкФ;
- результаты сравнения теоретических результатов с экспериментальными;
- выводы по полученным результатам.

Контрольные вопросы

1. Что такое осциллограф? В чем состоит сущность частотного критерия устойчивости Найквиста?
2. С какой целью в цепь обратной связи включается терморезистор?
3. Чем определяется частота генерации автогенераторов? Привести пример.
4. Определить частоту генерации для автогенератора, у которого переставлены местами резисторы и конденсаторы по сравнению с рис. 12.2, а или 12.2, б (по указанию преподавателя). Считать, что RC -звенья не влияют друг на друга.

5. Определить возможную частоту генерации и необходимый тип усилителя (инвертирующий или неинвертирующий) по ФЧХ разомкнутой цепи, заданной преподавателем.
6. Объяснить методику измерения ФЧХ цепи обратной связи. Как при этом должна осуществляться синхронизация осциллографа?
7. Роль пассивной цепи (четырёхполюсника) обратной связи в автогенераторе состоит в обеспечении баланса фаз на частоте генерации. Можно ли использовать в качестве четырёхполюсников обратной связи Г-образные LC - и CL -цепи?
8. Какой фазовый сдвиг на некоторой фиксированной частоте ω_0 может обеспечить одно Г-образное RC -звено? два последовательно включенных таких звена?
9. Фазосдвигающая цепь является линией задержки. Записать ФЧХ идеальной (неискажающей форму сигнала) линии задержки.
10. Как по АЧХ и/или ФЧХ 3-звенной (4-звенной, моста Вина) RC -цепи определить возможную частоту генерации?
11. Линия задержки является фазосдвигающей цепью. Определить фазовый сдвиг, вносимый идеальной (неискажающей форму сигнала) линией задержки на 1 мкс на частоте 0,5 МГц.
12. Почему сигнал, генерируемый RC -автогенератором, отличается по форме от гармонического? Какие меры принимаются для улучшения формы сигнала (на примере макета и по данным эксперимента)?

13. ИССЛЕДОВАНИЕ LC-АВТОГЕНЕРАТОРА

Цель работы — изучение условий возникновения и стабильного существования электрических колебаний в автогенераторе с узкополосными цепями обратной связи.

13.1. Теоретические сведения

В радиотехнике генератором называют устройство, преобразующее энергию источника питания (чаще всего источника постоянного тока) в энергию колебаний как периодических, так и непериодических. Генератор состоит из активного элемента (усилителя) и цепи обратной связи, с помощью которой выходной сигнал усилителя подается на его же вход, так что при выполнении определенных условий в цепи будут существовать незатухающие электрические колебания. Знание амплитудной характеристики (АХ) усилителя, АЧХ и ФЧХ цепи обратной связи дает возможность определить параметры генерируемых колебаний. В лабораторной работе рассматривается режим гармонических колебаний.

Схема автогенератора (рис. 13.1) состоит из усилителя с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega)$ и цепи обратной связи с комплексным коэффициентом передачи $\dot{\beta}(\omega)$.

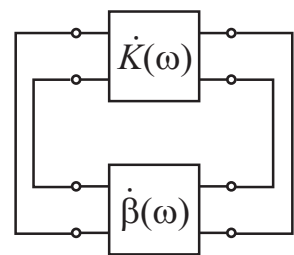


Рис. 13.1

Для существования колебаний в рассматриваемой системе, находящейся в стационарном режиме, необходимо выполнение энергетического баланса: расходуемая в резистивных элементах цепи энергия должна равняться энергии, доставляемой с помощью усилителя от источника питания. Если доставляемая в цепь энергия меньше расходуемой, то колебания в системе затухают. При обратном же неравенстве колебания нарастают. Отсюда следует, что колебания с установившейся конечной амплитудой возможны только в нелинейной системе, когда есть механизм авторегулирования расходуемой на колебания энергии. Иными словами, усиление колебаний в цепи должно зависеть от амплитуды этих колебаний так, чтобы при увеличении амплитуды колебаний усиление уменьшалось, и наоборот. Таким образом, автогенератор является принципиально нелинейным устройством.

Пусть автоколебательная система возбуждена и находится в стационарном режиме генерации гармонического сигнала $u(t)$ на частоте ω_r ; входным сигналом с комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$ для усилителя служит выходной сигнал цепи обратной связи с комплексной амплитудой $\dot{K}(\omega_r)\dot{\beta}(\omega_r)\dot{U}_{вх} = \dot{U}_{вх}$. Следовательно, в стационарном режиме выполняется условие $\dot{K}(\omega_r)\dot{\beta}(\omega_r) = 1$. Из этого условия с учетом $\dot{K}(\omega) = K(\omega)e^{j\varphi_K(\omega)}$ и $\dot{\beta}(\omega) = \beta(\omega)e^{j\varphi_\beta(\omega)}$ получим:

$$K(\omega_r)\beta(\omega_r) = 1, \quad (13.1)$$

$$\varphi_K(\omega_r) + \varphi_\beta(\omega_r) = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13.2)$$

Соотношения (13.1) и (13.2) определяют соответственно так называемые балансы амплитуд и фаз, характеризующие стационарный режим работы автогенератора с внешней обратной связью: необходимо, чтобы на генерируемой частоте полное усиление при обходе кольца обратной связи составляло единицу (баланс амплитуд), а полный фазовый сдвиг при обходе кольца обратной связи был равен 0 или кратен 2π (баланс фаз).

Коэффициент передачи пассивного четырехполюсника не зависит от амплитуды колебаний. Нелинейность автоколебательной системы проявляется здесь снижением коэффициента передачи K (коэффициента усиления), происходящим параллельно с нарастанием амплитуды колебаний $U_{ог}(t)$. Когда коэффициент усиления достигнет значения $K = 1/\beta(\omega_r)$, дальнейший рост амплитуды колебаний $U_{уст}$ прекратится (рис. 13.2).

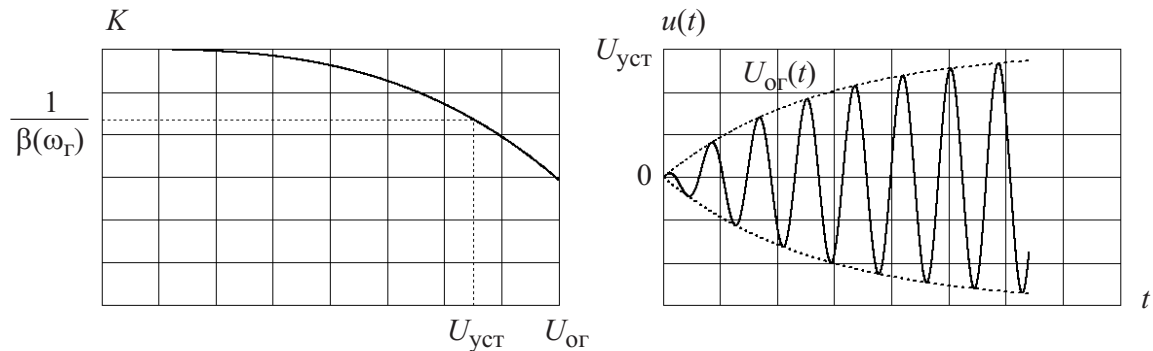


Рис. 13.2

Обозначим коэффициент усиления, зависящий не только от частоты, но и от амплитуды входного сигнала, как $K(U_{вх}, \omega)$. При подаче питания на схему, т. е. в момент, когда $U_{вх} = 0$, самовозбуждение автоколебательной системы возможно, если $K(0, \omega_r)\beta(\omega_r) > 1$. При $K(0, \omega_r)\beta(\omega_r) \leq 1$ самовозбуждения не будет, так как нет необходимой компенсации потерь.

Амплитудной характеристикой усилителя называется зависимость амплитуды выходного напряжения усилителя от амплитуды входного напряжения. Наклон амплитудной характеристики определяет коэффициент усиления усилителя. При достаточно большой амплитуде колебаний на входе усилителя выходные колебания будут искажены по форме из-за нелинейных искажений. Тогда для анализа цепей часто оказывается удобной несколько иная характеристика: амплитудная характеристика по первой гармонике, представляющая собой отношение амплитуды первой гармоники выходного колебания к амплитуде гармонического колебания на входе нелинейной цепи.

Анализ работы автогенератора сводится к решению нелинейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, общий метод решения

которого неизвестен. В математической физике решение подобных уравнений ищут, опираясь на физические предпосылки, связанные с особенностями исследуемого объекта. С соответствующими допущениями анализ автогенератора в стационарном режиме работы можно провести с использованием условий баланса амплитуд, баланса фаз и амплитудной характеристики по первой гармонике.

Схема автогенератора (рис. 13.3) состоит из усилителя, колебательного контура и линии задержки (ЛЗ).

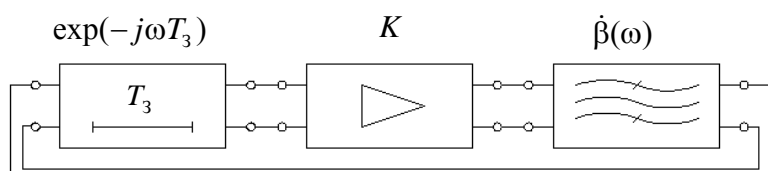


Рис. 13.3

Для упрощения анализа, не теряя общности рассуждений, будем считать усилитель частотно-независимым (что наблюдается на практике при построении генераторов вплоть до сверхвысокочастотных колебаний частотой свыше 1 ГГц). Параллельный колебательный контур вблизи резонансной частоты имеет комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + j2Q\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2\varepsilon^2}} e^{-j \arctg(2Q\varepsilon)}, \quad (13.3)$$

где Q — добротность колебательного контура; $\varepsilon = (\omega - \omega_p)/\omega_p$ — относительное отклонение частоты от резонансной $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Формула (13.3) справедлива вблизи резонансной частоты, т. е. когда $\varepsilon \ll 1$, но этого приближения вполне достаточно для анализа автогенератора, так как при больших отклонениях частоты от резонансной коэффициент передачи стремится к нулю и колебания в системе становятся невозможными. Комплексный коэффициент передачи линии задержки $\dot{K}_{ЛЗ}(\omega) \exp(-j\omega T_3)$.

Запишем условие баланса фаз (13.2) для приведенной схемы:

$$-\arctg\left(2Q \frac{\omega_r - \omega_p}{\omega_p}\right) - \omega_r T_3 = 2\pi k, \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (13.4)$$

Уравнение (13.4) в символьном виде не решается, но ответ легко найти, используя графический метод. Перепишем уравнение

$$\arctg\left(2Q \frac{\omega_r - \omega_p}{\omega_p}\right) = 2\pi k - \omega_r T_3, \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (13.5)$$

и построим графики левой и правой его частей в функции от частоты ω_r . Пересечение двух графиков дает искомую частоту ω_r , при которой выполняется равенство (13.5). Очевидно, при $T_3 = 0$ частота генерации равна резонансной

частоте контура. Таким образом, исходя из условия баланса фаз, определяется частота (их может быть несколько), на которой возможна генерация. Для возникновения колебаний на частоте генерации необходимо выполнение условия баланса амплитуд.

Запишем применительно к данной схеме условие баланса амплитуд

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega_r - \omega_p}{\omega_p} \right)^2}} K(U_c, \omega_r) = 1 \quad (13.6)$$

и найдем тот коэффициент усиления, при котором справедливо равенство (13.6):

$$K(U_c, \omega_r) = \sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega_r - \omega_p}{\omega_p} \right)^2}.$$

Зная коэффициент усиления в замкнутой петле автогенератора и амплитудную характеристику усилителя по первой гармонике, легко найти амплитуду колебаний в установившемся режиме.

13.2. Описание лабораторной установки

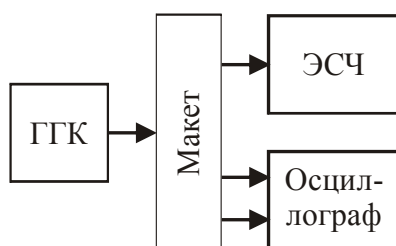


Рис. 13.4

Установка (рис. 13.4) состоит из лабораторного макета, двухлучевого осциллографа, электронно-счетного частотомера ЭСЧ и генератора гармонических колебаний ГГК. Лабораторный макет (рис. 13.5) представляет собой автогенератор, включающий в себя усилитель с регулируемым коэффициентом усиления, параллельный колебательный контур и линию задержки ЛЗ.

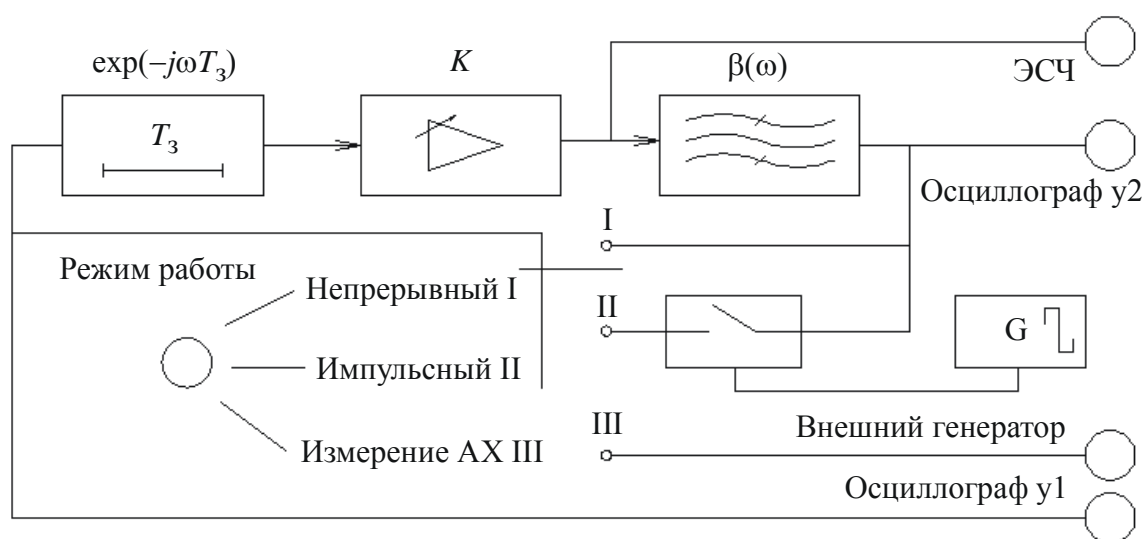


Рис. 13.5

Макет может работать в трех режимах: непрерывном, импульсном и в режиме измерения АХ, АЧХ и ФЧХ. В непрерывном режиме петля обратной связи замкнута и при выполнении необходимых условий в цепи возникают колебания, для измерения частоты которых используется ЭСЧ. В режиме измерения АХ, АЧХ и ФЧХ петля обратной связи рвется и получается четырехполюсник, на вход которого подается сигнал от генератора гармонических колебаний. С помощью двухлучевого осциллографа одновременно наблюдаются сигналы на входе и выходе разомкнутой петли, по которым легко определяются АХ и частотные характеристики цепи. Импульсный режим предназначен для наблюдения процесса самовозбуждения с помощью осциллографа. Под действием импульсного сигнала срабатывает ключ, который замыкает и размыкает петлю обратной связи.

Задержка регулируется с помощью переключателя. Она дополнительно ослабляет амплитуду сигнала, так как не является идеальной.

13.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Исследование АЧХ и ФЧХ разомкнутой петли автогенератора. Подключить высокочастотный генератор к макету. Установить переключатель в положение «Измерение АХ» (III). Подключить двухканальный осциллограф к макету так, чтобы на его экране одновременно наблюдать гармоническое колебание на входе и выходе цепи. ЭСЧ подсоединить к входу макета для контроля частоты колебаний. Установить нулевое время задержки и любой коэффициент усиления в диапазоне значений от 8 до 12 и записать его. Измерения следует проводить в режиме малого уровня сигнала, чтобы амплитудную характеристику усилителя можно было считать линейной. Для настоящего макета амплитуда входного сигнала не должна превышать 0,5 В. Меняя частоту генератора, найти резонансную частоту колебательного контура (около 480 кГц), входящего в цепь обратной связи автогенератора. Измерить амплитуды колебаний на входе и выходе разомкнутой петли и время задержки (опережения) между ними на частотах вблизи резонанса. Составить таблицу амплитудных коэффициентов передачи и фазового сдвига цепи на различных частотах. Измерения должны проводиться на 11 частотах с шагом около 20 кГц: 5 значений частоты ниже резонанса и 5 выше. Амплитудные коэффициенты передачи цепи вычисляются как отношение амплитуд выходного колебания к входному, а фазовый сдвиг — как время задержки выходного колебания относительно входного, отнесенное к периоду колебаний и умноженное на коэффициент 2π .

2. Исследование АХ по первой гармонике разомкнутого тракта на частоте выполнения условия баланса фаз. Установить тот коэффициент усиления, при котором измерялись АЧХ и ФЧХ. В режиме «Измерение АХ» установить ту частоту высокочастотного генератора, на которой отсутствует

фазовый сдвиг между выходным и входным колебаниями. На этой частоте измерить амплитуды выходного и входного колебаний для 10 значений амплитуды входного колебания от 0,5 до 3 В. Составить таблицу коэффициентов передачи для различных значений амплитуды входного колебания. Построить график АХ. Увеличение амплитуды входного колебания будет приводить к небольшому фазовому сдвигу между входным и выходным колебаниями, что обусловлено влиянием паразитных реактивностей, присущих нелинейным элементам. Подобрать амплитуду и частоту входного колебания так, чтобы амплитуда выходного колебания была равна амплитуде входного колебания, а фазовый сдвиг между выходным и входным колебаниями отсутствовал. Записать значения частоты и амплитуды входного колебания.

3. Исследование параметров генерируемых колебаний. Оставить тот коэффициент усиления, при котором измерялись АЧХ и ФЧХ. Установить «Непрерывный» режим работы макета, повернув переключатель. Тем самым замыкается петля обратной связи и создаются условия для возникновения колебаний в цепи. Наблюдать колебания автогенератора с помощью осциллографа. Измерить с помощью осциллографа и частотомера соответственно значения амплитуды и частоты генерируемых колебаний. Снять зависимость (в 10 точках) амплитуды генерируемых колебаний от коэффициента усиления, изменяя его значения от минимума до максимума.

4. Исследование автогенератора с линией задержки в петле обратной связи. Установить время задержки, равное 0,1 мкс, и любой коэффициент усиления в диапазоне значений от 11 до 12 и записать его. Повторить измерения согласно пп. 1–3.

Содержание отчета

- краткие теоретические сведения, включая цель работы, схему автогенератора, математические выражения для частотных характеристик разомкнутой петли автогенератора и условий баланса амплитуд и фаз, схему лабораторного макета и структурную схему лабораторной установки с кратким описанием;
- расчет и графики АЧХ и ФЧХ разомкнутой петли автогенератора на основании знания его схемы;
- расчетные значения частоты генерации автогенератора с линией задержки и без нее;
- табличное и графическое представления экспериментально полученных АЧХ и ФЧХ разомкнутой петли автогенератора с линией задержки и без нее. Отметить на графиках точки, соответствующие частоте колебаний, измеренной в пп. 3 и 4;
- табличное и графическое представления экспериментально полученных АХ по первой гармонике и коэффициента передачи разомкнутой петли ав-

тогенератора с линией задержки и без нее на частоте выполнения условия баланса фаз. Отметить на графиках точки, соответствующие амплитуде колебаний, измеренной в пп. 3 и 4;

- табличное и графическое представления экспериментально полученных значений амплитуды колебаний в зависимости от коэффициента усиления для автогенератора с линией задержки и без нее;
- выводы, включающие в себя: расчетные и экспериментальные значения амплитуды колебаний и генерируемой частоты автогенератора, влияние на эти значения линии задержки, включаемой в петлю обратной связи.

Контрольные вопросы

1. Почему автогенератор является принципиально нелинейным устройством? Можно ли хотя бы теоретически построить автогенератор с использованием только линейных устройств?
2. За счет какого механизма в цепи автогенератора устанавливаются колебания постоянной амплитуды? Откуда возникают колебания сразу после подачи питания на схему автогенератора?
3. Что называют амплитудной характеристикой по первой гармонике усилителя? Как, зная амплитудную характеристику разомкнутой петли автогенератора на частоте выполнения баланса фаз, определить амплитуду колебаний автогенератора? Для чего при этом требуется условие выполнения баланса фаз?
4. По заданным преподавателем графикам АЧХ и ФЧХ разомкнутой петли автогенератора и заданному значению коэффициента усиления усилителя определить, возникнут или не возникнут в цепи колебания, и если да, то на какой частоте?
5. Возникнут ли колебания в цепи, если на вход усилителя с единичным коэффициентом усиления подать сигнал с его же выхода через идеальную линию задержки? Каковы частоты генерации?
6. Записать выражения для условий баланса амплитуд и фаз. Каков физический смысл этих условий?
7. Возможно ли построить автогенератор, используя реактивную обратную связь?
8. Каким образом обеспечивается условие роста амплитуды в начале процесса самовозбуждения?
9. Как влияет на частоту автогенератора включение линии задержки в петлю обратной связи? Качественно построить график зависимости частоты автогенератора от времени задержки. При каких значениях времени задержки генерация будет отсутствовать, если коэффициент усиления усилителя равен двум (колебательный контур считать идеальным)?

14. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМОВОЗБУЖДЕНИЯ LC-АВТОГЕНЕРАТОРА

Цель работы — изучение условий и процесса самовозбуждения автогенератора с цепью узкополосной задержанной обратной связи.

14.1. Теоретические сведения

В радиотехнике генератором называют устройство, преобразующее энергию источника питания (чаще всего источника постоянного тока) в энергию электрических колебаний. Колебания могут быть как периодическими, так и непериодическими. Последние представляют собой случайный процесс, называемый шумовым сигналом; в таком случае говорят, что речь идет о генераторе шума. Периодические же колебания могут быть как гармоническими (в форме синусоиды), так и в виде последовательности сигналов другой формы (прямоугольной, треугольной, пилообразной и т. д.). Форма колебаний определяется частотными характеристиками цепи обратной связи. В данной работе исследуется генератор, цепь обратной связи которого реализуется в виде LC-цепи, входящей в параллельный колебательный контур.

Из теории цепей с обратной связью известно, что коэффициент передачи такой цепи $\dot{K}'(\omega) = \frac{\dot{K}(\omega)}{1 - \dot{K}(\omega)\dot{\beta}(\omega)}$, где $\dot{K}(\omega)$ — коэффициент передачи канала прямой передачи (КПП, или четырехполюсника, который должен быть охвачен обратной связью); $\dot{\beta}(\omega)$ — коэффициент передачи канала (четырехполюсника) обратной связи, КОС. Оба эти коэффициента передачи удобно представить в комплексной форме, через модуль и фазу: $\dot{K}(\omega) = |\dot{K}(\omega)| e^{j\varphi_K(\omega)}$, $\dot{\beta}(\omega) = |\dot{\beta}(\omega)| e^{j\varphi_\beta(\omega)}$, где $\varphi_K(\omega)$ — фазовый сдвиг в четырехполюснике КПП, $\varphi_\beta(\omega)$ — фазовый сдвиг в четырехполюснике КОС. Тогда, опуская для простоты записи аргумент у фазовых сдвигов, получим

для $\dot{K}'(\omega) = \frac{|\dot{K}(\omega)| e^{j\varphi_K}}{1 - |\dot{K}(\omega)| |\dot{\beta}(\omega)| e^{j(\varphi_K + \varphi_\beta)}}$. Если $\varphi_K + \varphi_\beta = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$),

то реализуется *положительная* обратная связь, если $\varphi_K + \varphi_\beta = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), то реализуется *отрицательная* обратная связь.

В качестве четырехполюсника КПП может использоваться усилительный каскад на биполярном или полевом транзисторе. При включении его по схеме с общим эмиттером (или общим истоком) получается инвертирующий, т. е. вносящий фазовый сдвиг $\varphi_K = \pi$, усилитель. Следовательно, для получения положительной обратной связи фаза φ_β также должна быть равна π . При положительной обратной связи $|\dot{K}'(\omega)|$ всегда больше, чем $|\dot{K}(\omega)|$. При при-

ближении произведения $|\dot{K}(\omega)| |\dot{\beta}(\omega)|$ к единице $|\dot{K}'(\omega)|$ стремится к бесконечности. При этом бесконечно малые напряжения на входе транзистора вызывают конечные напряжения на выходе, т. е. схема работает как генератор. Далее будет показано, что при выполнении этого условия генератор будет генерировать колебания с постоянной амплитудой. Поэтому данное условие называется *балансом амплитуд*. Условие, обеспечивающее положительную обратную связь ($\varphi_K + \varphi_\beta = 2\pi$), называется *балансом фаз*.

Для более детального анализа процессов в автогенераторе (АГ) рассмотрим емкостную трехточечную схему (так называемую схему Колпитца), которая используется в лабораторном макете. На рис. 14.1 приведена эта схема с учетом только цепей высокой частоты (цепи питания исключены).

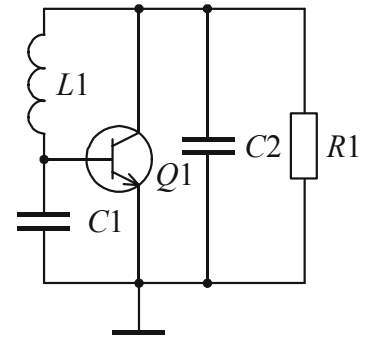


Рис. 14.1

Элементы $L1$, $C1$ и $C2$ образуют параллельный колебательный контур, $R1$ — нагрузочный резистор, в сопротивление которого включены сопротивления потерь элементов контура и потери, вносимые базовой и коллекторной цепями транзистора. На резонансной частоте ω_0 справедливо следующее уравнение для реактивных сопротивлений элементов контура: $j(X_L + X_{C1} + X_{C2}) = 0$, или

$$j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C_1} + \frac{1}{j\omega_0 C_2} = j \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_2} \right) = 0.$$

Пусть комплексные амплитуды напряжений на контуре (на конденсаторе $C2$) и между базой и эмиттером (на конденсаторе $C1$) есть соответственно $\dot{U}_{кэ}$ и $\dot{U}_{бэ}$ ($\dot{U}_{бэ}$ является напряжением обратной связи). Четырехполюсник обратной связи образован катушкой индуктивности $L1$ и конденсатором $C1$.

Его комплексный коэффициент передачи $\dot{\beta}(\omega) = \frac{\dot{U}_{бэ}}{\dot{U}_{кэ}} = \frac{X_{C1}}{X_L + X_{C1}}$, но из предыдущего уравнения $X_L + X_{C1} = -X_{C2}$ и коэффициент обратной связи $\dot{\beta} = -\frac{C_2}{C_1}$. Знак «минус» означает, что фаза напряжения $\dot{U}_{бэ}$ повернута на 180° по отношению к фазе напряжения $\dot{U}_{кэ}$. Знак «минус» будет сохраняться до тех пор, пока $|X_L|$ больше, чем $|X_{C1}|$, т. е. пока цепочка $L1$, $C1$ имеет индуктивную реакцию. Меняя $\dot{\beta}$, можно менять условия самовозбуждения АГ (изменяя значение знаменателя в выражении для $\dot{K}'(\omega)$).

Напряжение между коллектором и эмиттером определяется крутизной ВАХ транзистора $S = di_k / du_{бэ}$, где i_k — коллекторный ток транзистора:

$u_{кэ} = S R_1 u_{бэ}$. (Крутизна S не является постоянной величиной; она зависит от постоянной составляющей напряжения $u_{бэ}$).

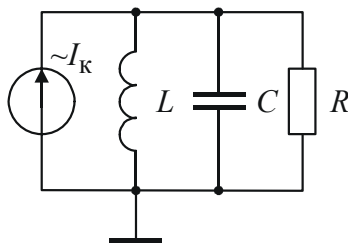


Рис. 14.2

Для дальнейшего анализа заменим схему (рис. 14.1) на эквивалентную (рис. 14.2). Вместо транзистора включим источник тока, соответствующий переменной составляющей коллекторного тока $i_k = S u_{бэ}$. ВАХ транзистора (как биполярного, так и полевого) мало зависят от напряжения на коллекторе (стоке), поэтому ток коллектора определяется, в основном, напряжением $u_{бэ}$. Цепочку $L1, C1$ заменим

эквивалентной индуктивностью L , конденсатор $C2$ — конденсатором C , резистор $R1$ — резистором R .

Ток источника i_k обуславливает в ветвях схемы токи i_L, i_C, i_R . Очевидно, что справедливо уравнение

$$S u_{бэ} = i_L + i_C + i_R.$$

Учитывая, что $u_{бэ} = \beta u_{кэ}$, $i_L = \frac{1}{L} \int u_{кэ} dt$, $i_C = C \frac{du_{кэ}}{dt}$, $i_R = \frac{u_{кэ}}{R}$, продифференцируем уравнение для токов по времени и получим дифференциальное уравнение *второго порядка* относительно $u_{кэ}$ следующего вида (далее индекс «кэ» опущен):

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{S\beta}{C} \frac{du}{dt}.$$

Уже отмечалось, что S нелинейно зависит от постоянной составляющей напряжения $u_{бэ}$, а, стало быть, и от времени, поэтому записанное уравнение является приближенным.

Однако, пока будем считать ее постоянной. Принимая во внимание, что $1/(LC) = \omega_0^2$ (ω_0 — резонансная частота контура АГ), перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{(1 - S\beta R)}{RC} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Решение этого уравнения (с учетом предположения о малых потерях в контуре, так что $(1 - S\beta R)/(2CR) \ll \omega_0$):

$$u(t) = U \exp\left[-\frac{1 - S\beta R}{2CR} t\right] \cos \omega_0 t.$$

Очевидно, что рост напряжения на контуре возможен только в том случае, когда произведение $S\beta R$ больше единицы.

В начале процесса, пока амплитуда напряжения на контуре заметно меньше напряжения питания коллекторной цепи, крутизна остается практически постоянной. При дальнейшем росте амплитуды, ввиду нелинейности ВАХ транзистора, крутизна начинает уменьшаться и процесс роста заканчивается установлением «баланса амплитуд», когда выполняется равенство $S\beta R = 1$, после чего амплитуда напряжения на контуре остается постоянной (этот режим называется стационарным, как и значение крутизны, при котором он устанавливается — S_c). Очевидно, что значение S_c зависит от β и R . Обозначим постоянную времени процесса через α , тогда $\alpha = (S\beta R - 1)/(2RC)$. Наблюдая на экране осциллографа процесс установления колебаний напряжения на выходе автогенератора, можно измерить значение α . Оно будет *различным на разных участках* процесса нарастания.

Так как значения β , R и C постоянны, изменения α зависят только от крутизны характеристики транзистора. По измеренным значениям α можно найти значения крутизны на разных участках процесса. Необходимо отметить, что измеренная таким образом крутизна является так называемой *крутизной по первой гармонике* S_1 , так как транзистор работает с отсечкой коллекторного тока, а резонансный контур автогенератора имеет высокую добротность и узкую полосу пропускания и отфильтровывает только первую гармонику коллекторного тока. Тогда $S_1 = (1 - 2\alpha RC)/(\beta R)$. Для стационарного режима $S_{1c} = 1/(\beta R)$.

Рассмотрим теперь влияние на процесс самовозбуждения дополнительного фазового сдвига, вносимого какой-либо дополнительной фазосдвигающей цепью (фазовращатель, линия задержки, отрезок кабеля), включенной между базой транзистора и цепью, соединяющей $L1$ и $C1$. Очевидно, что в этом случае фаза напряжения $\dot{U}_{бэ}$ будет больше 180° на величину фазового набега, вносимого фазовращателем. Следовательно, теперь условие баланса фаз будет выполняться на другой частоте, на которой сдвиг фаз в точке соединения $L1$ и $C1$ будет меньше 180° . Так как фазовые характеристики имеют отрицательный наклон, эта частота будет *меньше*, чем частота в случае отсутствия фазовращателя. На этой (отличной от резонансной) частоте коэффициент передачи транзистора $\dot{K}(\omega) = |\dot{Z}| \exp(j\varphi_Z)$, где $|\dot{Z}| = R/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_Z)}$

и $\varphi_Z = \operatorname{arctg} \frac{R(X_L + X_{C1} + X_{C2})}{X_{C2}(X_L + X_{C1})}$. Очевидно, что на резонансной частоте

$|\dot{Z}| = R$ и $\varphi_Z = 0$. Определим условие баланса фаз при наличии фазовращателя, который дает сдвиг фаз, равный $-\varphi_T$. Коэффициент передачи транзистора (с учетом поворота фазы на 180°) $\dot{K}(\omega) = S |\dot{Z}| \exp[j(\varphi_Z - \pi)]$, и произведение

$$\dot{\beta} \dot{K} = |\dot{\beta}| \exp[-j(\varphi_T + \pi)] \cdot |\dot{K}| \exp[j(\varphi_Z - \pi)] = |\dot{\beta} \dot{K}| \exp[-j(\varphi_T - \varphi_Z + 2\pi)].$$

Очевидно, что новым условием баланса фаз будет $\varphi_Z = \varphi_T$. Оценим значение частоты, которую будет генерировать автогенератор при дополнительном фазовом сдвиге. Пусть эта частота $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Полагая, что добротность контура автогенератора высока, приближенное выражение для новой частоты генерации можно представить как $\omega = \omega_0 - \varphi_T / (2\beta RC_2)$. Значение $|\dot{Z}|$ при сдвиге частоты и при росте φ_T будет по отношению к R уменьшаться, что потребует увеличения крутизны S для сохранения значения α и приведет к замедлению скорости возрастания амплитуды колебаний. Если же произведение $S \beta |Z|$ станет меньше единицы, то самовозбуждение будет вообще невозможным.

14.2. Описание лабораторной установки

Установка состоит из лабораторного макета и подключенных к нему осциллографа и электронно-счетного частотомера (ЭСЧ). Лабораторный макет включает в себя генератор прямоугольных импульсов, с помощью которого периодически включается и выключается автогенератор (на каскад периодически подается напряжение питания); сам автогенератор вместе с аттенюатором (делитель напряжения R_2 , R_3) и линией задержки (выполняющей роль фазовращателя), включенными в цепь обратной связи; цепь, вырабатывающую сигнал синхронизации осциллографа; источник питания.

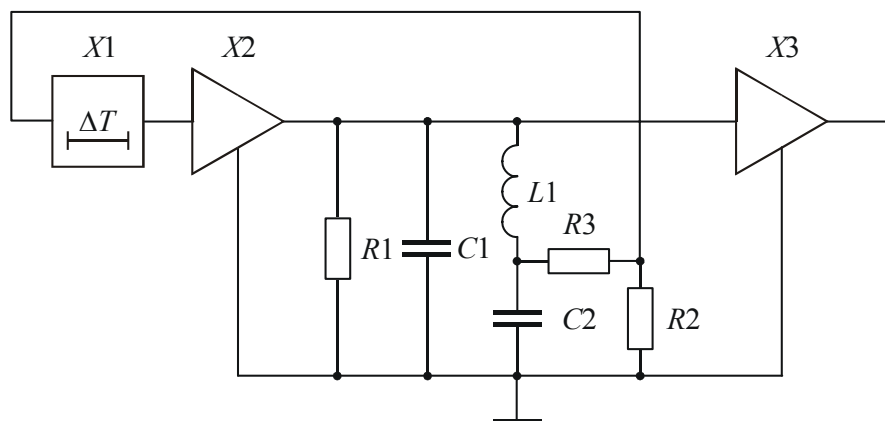


Рис. 14.3

Затухание аттенюатора и задержка регулируются с помощью переключателей, расположенных на лицевой стенке макета. Несколько упрощенная схема макета показана на рис. 14.3.

14.3. Задание и указания к выполнению работы

1. Подключить осциллограф и ЭСЧ к макету в соответствии с надписями на передней панели макета. Включить макет и измерительные приборы, ус-

тановить переключатели аттенюатора и фазовращателя на нуль, включить импульсный режим работы и с помощью регулировки уровня синхронизирующего сигнала соответствующей ручкой на осциллографе (в режиме ждущей развертки, если таковая есть у используемого прибора; в противном случае — воспользоваться ручкой «стабильность») получить осциллограмму процесса нарастания амплитуды колебаний АГ. Примерный вид осциллограммы приведен на рис. 14.4.

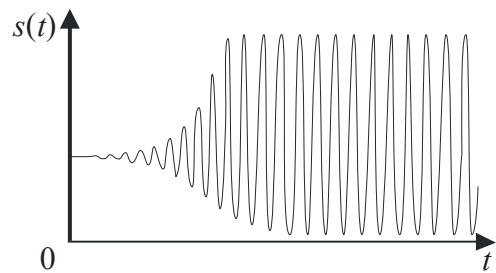


Рис. 14.4

После этого тумблером на передней панели макета переключить режим его работы на непрерывный и измерить частоту генерируемого сигнала.

Из рис. 14.4 видно, что в начале процесса самовозбуждения наблюдается экспоненциальный рост амплитуды колебаний, затем он замедляется и в установившемся состоянии прекращается. Значения наблюдаемых амплитуд в моменты t_1 и t_2 можно определить как $U_1 = U_m \exp(\alpha_1 t_1)$ и $U_2 = U_m \exp(\alpha_2 t_2)$. Здесь U_m есть некая постоянная. Если брать отсчеты амплитуд так, чтобы t_2 и t_1 отличались на время, равное одному периоду (берутся значения соседних амплитуд в верхней части осциллограммы, измеряемые относительно нулевого значения) $T = 1/f_0$, где f_0 — частота, измеренная при непрерывном режиме работы, можно предположить, что α_1 и α_2 почти не отличаются друг от друга. Тогда значение α можно определить как $\alpha = f_0 \ln(U_2/U_1)$. По известному α находится значение крутизны по первой гармонике:

$$S_1 = \frac{1 - 2RCf_0 \ln(U_2/U_1)}{\beta R}.$$

В ходе выполнения работы измеряются:

- частота колебаний автогенератора,
- значения α в начале процесса установления, в его середине и в конце.

Указанные измерения производятся для всех комбинаций положений переключателей аттенюатора и фазовращателя. Переключатель аттенюатора проградуирован в децибелах, переключатель фазовращателя — в микросекундах. Если время задержки T_3 измерено в микросекундах, а частота f_0 — в мегагерцах, то произведение $2\pi f_0 T_3$ дает фазу в радианах. Значение β , которое подставляется в выражение для S_1 , складывается из двух составляющих: $\beta_0 = C_2/C_1$ и $\beta_{ат}$, определяемой положением переключателя аттенюатора. Таким образом, значение β (в децибелах): $\beta = \beta_0 + \beta_{ат}$.

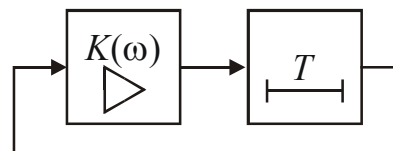
Значения β_0 , R , C приведены на лицевой панели макета.

Содержание отчета

- расчетные значения S_1 для всех измерений, при которых наблюдается самовозбуждение (по три значения для каждого измерения), и значения отклонения частоты (расчетные и измеренные);
- блок-схема макета (в соответствии с рис. 14.3);
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Перечислить возможные механизмы генерации колебаний.
2. Какое условие должно быть выполнено, чтобы в цепи обеспечивалась положительная обратная связь?
3. Нарисовать схему Колпитца («емкостная трехточка») и обосновать топологию подключения реактивных цепей к активному элементу (транзистору).
4. Нарисовать схему Хартли («индуктивная трехточка») и обосновать топологию подключения реактивных цепей к транзистору.
5. Каким образом обеспечивается условие роста амплитуды в начале процесса самовозбуждения?
6. Почему из двух решений дифференциального уравнения автогенератора выбирается только одно?
7. Как зависит скорость нарастания амплитуды колебания автогенератора от следующих параметров:
 - а) коэффициента передачи цепи обратной связи;
 - б) коэффициента передачи активного элемента (транзистора);
 - в) нагруженной добротности резонансного контура;
 - г) характеристического сопротивления резонансного контура.
8. Как выглядит уравнение «баланса фаз» для автогенератора с линией задержки между резонансным контуром и входом активного элемента?
9. Понятие баланса фаз и амплитуд.
10. Почему при увеличении времени задержки в лабораторном макете колебания сначала пропадают, а при приближении времени задержки к 2 мкс возникают снова?
11. Определить вторую из возможных частот генерации для схемы генератора, изображенной на рисунке. Усилитель инвертирующий. Линия задержки идеальная, $T_{ЛЗ} = 5$ мкс.
12. Качественно описать процесс установления колебаний в автогенераторе.



ОПИСАНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ АППАРАТУРЫ

1. Описание пользовательского интерфейса осциллографов GWInstek GOS-653G и GWInstek GOS-620

Внешний интерфейс данных осциллографов представлен следующими основными группами элементов управления:

- **VERTICAL** — установка коэффициента отклонения и пр.;
- **HORIZONTAL** — установка коэффициента развертки и пр.;
- **TRIGGER** — установка параметров синхронизации.

1. Группа **VERTICAL** содержит следующие элементы управления:

- **VOLTS/DIV** — коэффициент отклонения по вертикали;
- **POSITION** — вертикальное смещение луча осциллографа;
- **VAR.** — плавная регулировка масштаба отображения по вертикали. В процессе выполнения лабораторных работ данный регулятор должен быть защелкнут в крайнем правом положении;
- **GND** — кнопка, включающая режим отображения уровня «земли» (нулевого уровня);
- **AC/DC** — кнопка переключения режима отображения постоянной составляющей входного сигнала:
 - кнопка нажата (режим **DC**, «открытый вход»), постоянная составляющая при обработке сигнала сохраняется;
 - кнопка отжата (режим **AC**, «закрытый вход»), постоянная составляющая из входного сигнала удаляется.

Группа **VERTICAL** разделена на две одинаковые части, соответствующие каналам 1 и 2. Переключатель **MODE** позволяет выбрать режим отображения сигналов:

- **CH1** — отображение входного сигнала канала 1;
- **CH2** — отображение входного сигнала канала 2;
- **DUAL** — отображение входных сигналов обоих каналов одновременно;
- **ADD** — отображение суммы сигналов, поступающих на оба входа.

2. Группа **HORIZONTAL** содержит следующие элементы управления:

- **A TIME/DIV** — установка коэффициента развертки;
- **SWP.VAR.** — установка горизонтального масштаба (работает только при нажатой кнопке **SWP.UNCAL.**, если она имеется). Во всех лабораторных работах кнопка **SWP.UNCAL.** должна быть отжата, а регулятор **SWP.VAR.** должен находиться в крайнем правом положении;
- **X10 MAG** — кнопка десятикратного увеличения горизонтального масштаба;

- кнопка отжата — нормальный режим работы;
- кнопка нажата — десятикратное увеличение. При измерении временных параметров сигнала множитель на шкале **A TIME/DIV** в этом режиме должен быть поделен на 10.

3. Группа **TRIGGER** содержит следующие элементы управления:

- **LEVEL** — установки уровня срабатывания синхронизации;
- **LOCK** — кнопка блокировки измерения уровня синхронизации;
- **HOLDOFF** — грубый выбор интервала синхронизации. Данный регулятор позволяет выбирать между синхронизацией по огибающей и по высокочастотным составляющим сигнала;
- **AUTO, NORM, SINGLE** — кнопки включения соответственно автоматического, нормального и однократного режимов синхронизации;
- **COUPLING** — режим работы входных цепей блока синхронизации:
 - **AC** — связь по переменному напряжению;
 - **HF REJ** — связь с подавлением высокочастотных составляющих;
 - **TV** — синхронизация в телевизионном режиме;
 - **DC** — связь по напряжению с учетом постоянной составляющей сигнала.

Во всех лабораторных работах используются режимы **AC** или **DC**;

- **SOURCE** — выбор источника сигнала синхронизации:
 - **CH1** — сигнал канала 1;
 - **CH2** — сигнал канала 2;
 - **LINE** — синхронизация от питающей сети;
 - **EXT** — синхронизация от отдельного внешнего сигнала, подаваемого на специальный вход;
- **TRIG.ALT.** — кнопка, позволяющая при синхронизации от каналов 1 и 2 (при наличии на них сигналов) переключать режим синхронизации между **CH1** и **CH2**;
- **SLOPE** — кнопка переключения полярности сигнала синхронизации.

Для перемещения луча осциллографа по горизонтали используется ручка **◀POSITION▶**, расположенная вблизи группы **HORIZONTAL**.

На задней панели осциллографа расположен контрольный выход, на который выводится сигнал, соответствующий изображению на экране. Сигнал с этого выхода может быть подан на спектроанализатор, что удобно при анализе сигнала одновременно в спектральной и временной областях.

2. Инструкция по работе с генератором сигналов GWInstek GFG-8219A

1. Включить питание генератора (кнопка **POWER**).
2. Выбрать режим генерации синусоидальных сигналов (кнопка \sim). По умолчанию выбран режим генерации пилообразного сигнала.
3. Установить частоту генерируемого сигнала. Для этого:
 - а) выбрать частотный диапазон: **1** — единицы герц, **10** — десятки герц, **100** — сотни герц, **1k** — единицы килогерц, и т. д. до единиц мегагерц;
 - б) ручкой **FREQUENCY** установить точное значение частоты, пользуясь показаниями ЖК-дисплея. Обратить внимание на то, что на дисплее отображается множитель частоты: **m** — мГц, **k** — кГц, **M** — МГц.
4. Установить амплитуду генерируемого сигнала. Для этого:
 - а) ручкой **AMPL** установить приемлемое или заданное в работе значение амплитуды, пользуясь показаниями осциллографа, спектроанализатора или вольтметра;
 - б) для уменьшения амплитуды в 10 раз (на 20 дБ) нажать кнопку **ATT-20dB**. Для дополнительного уменьшения амплитуды в 10 раз (еще на 20 дБ) потянуть ручку **AMPL** на себя.
5. В некоторых лабораторных работах используется режим генерирования модулированного сигнала. Для использования этого режима:
 - а) подключить источник модулирующего колебания к входу **VCF/MOD Input**, расположенному на *задней* панели генератора;
 - б) нажать кнопки **MOD ON** (включить модуляцию) и **MOD EXT** (внешняя модуляция);
 - в) ручкой **MOD/DEPTH (SWEEP/RATE)** выбрать вид модуляции:
 - ручка отжата «на себя» — амплитудная модуляция;
 - ручка в исходном (нажатом) положении — частотная модуляция;
 - г) вращением ручки **MOD/DEPTH (SWEEP/RATE)** установить требуемый коэффициент модуляции, пользуясь показаниями осциллографа или спектроанализатора. Следует помнить, что на коэффициент модуляции генерируемого сигнала также влияет изменение амплитуды модулирующего колебания.

3. Инструкция по работе с анализатором спектра GWInstek GSP-827

1. Включить питание анализатора спектра.
2. Установить диапазон частот анализа. Для этого:
 - а) нажать кнопку **Частота** на панели прибора;
 - б) нажать кнопку **F2**, чтобы установить начальную частоту диапазона. Ввести значение начальной частоты, набрав на цифровой панели нужное число (набираемые цифры отображаются при этом на экране). Затем нажать кнопку, соответствующую единицам измерения (ГГц, МГц, кГц);

- в) нажать кнопку **F3**, чтобы установить конечную частоту диапазона. Ввести значение конечной частоты, набрав на цифровой панели нужное число (набираемые цифры отображаются при этом на экране). Затем нажать кнопку, соответствующую единицам измерения (**ГГц**, **МГц**, **кГц**).
3. Установить диапазон амплитуд. Для этого:
- а) нажать кнопку **Уровень**.
 - б) нажать кнопку **F1**, чтобы установить верхнюю границу диапазона амплитуд. Ввести значение верхней границы диапазона, набрав на цифровой панели нужное число. Затем нажать кнопку, соответствующую единицам измерения (**dBm**, **dBmV**, **dBuV**);
 - в) нажать кнопку **F2**, чтобы установить цену деления по шкале амплитуд. Каждое нажатие кнопки меняет цену деления в циклическом порядке: $10\text{ dB} \rightarrow 5\text{ dB} \rightarrow 2\text{ dB} \rightarrow 1\text{ dB} \rightarrow 10\text{ dB}$;
 - г) нажатием кнопки **F3** выбрать единицы измерения. Каждое нажатие кнопки меняет единицы измерения в циклическом порядке: $\text{dBm} \rightarrow \text{dBuV} \rightarrow \text{dBmV} \rightarrow \text{dBm/Hz}$.
4. Задать разрешающую способность по частоте. Для этого:
- а) нажать кнопку **Полоса проп.**, чтобы выбрать режим задания полосы пропускания радио- и видеофильтров, используемых при анализе;
 - б) нажатием кнопки **F1** добиться режима ручной установки полосы пропускания радиофильтра (**RBW Manu**). Затем установить полосу пропускания радиофильтра равной 3 кГц (это значение приемлемо при выполнении всех лабораторных работ), нажав последовательно кнопку **3** и кнопку **кГц/dBuV**;
 - в) нажатием кнопки **F2** добиться режима автоматической установки полосы пропускания видеофильтра (**VBW Auto**). Анализатор спектра автоматически подберет значение полосы пропускания видеофильтра с учетом установленной полосы обзора.

Возможные дополнительные действия при работе с анализатором спектра.

5. Возвращение к исходным установкам:
- а) нажать кнопку **Сист.**;
 - б) нажать кнопку **F6 (More/Еще)**;
 - в) нажать кнопку **F2 (System Preset/Вернуться к предустановкам)**.
6. Получение усредненного спектра:
- а) нажать кнопку **Об. спектра.**;
 - б) нажатием кнопки **F4** добиться режима **AVG On/Усреднение Вкл.** При этом число, указываемое в области кнопки **F4**, соответствует количест-

ву усреднений. Количество усреднений меняется плавным вращением колеса-манипулятора при выбранном режиме усреднения (после нажатия кнопки **F4**).

Замечание. Режим усреднения рекомендуется включить. Количество усреднений задать равным 10. Это увеличит стабильность картинки и точность измерений. Однако снимать показания следует ТОЛЬКО после установления стабильной спектральной картины.

7. Измерение уровня с помощью маркера:

- а) нажать кнопку **Маркер**;
- б) кнопкой **F1** включить маркер (**Marker ON**);
- в) кнопкой **F2** выбрать режим **Normal** (выбор в данном случае осуществляется между *нормальным* маркером и *дельта*-маркером);
- г) колесом-манипулятором перемещать маркер по частотам. При этом в правом верхнем углу экрана отображаются частота и уровень точки положения маркера (масштаб по амплитуде всегда *логарифмический* и соответствует выбранным единицам измерения — см. п. 3).

После завершения лабораторной работы обязательно выключить приборы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов М. Т., Сергиенко А. Б., Ушаков В. Н. Теоретические основы радиотехники: Учеб. пособие / Под ред. В. Н. Ушакова. — 2-е изд. — М.: Высш. шк., 2008.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2003.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: Дрофа, 2006.
4. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

Содержание

1. Исследование спектров периодических последовательностей импульсов...	3
2. Гармонический синтез сигналов.....	14
3. Исследование функций распределения и плотностей вероятности значений случайных сигналов	23
4. Исследование характеристик частотно-избирательных цепей на основе колебательных контуров.....	35
5. Исследование прохождения амплитудно-модулированных сигналов через избирательные цепи	45
6. Преобразование случайных процессов в линейных цепях	56
7. Оптимальная фильтрация сигналов	70
8. Синтез сигналов по дискретным отсчетам	81
9. дискретная фильтрация сигналов	89
10. Преобразование гармонического колебания в нелинейной безынерционной цепи	102
11. Нелинейные радиотехнические устройства	111
12. Исследование RC -автогенераторов	120
13. Исследование LC -автогенератора.....	132
14. Исследование процесса самовозбуждения LC -автогенератора.....	136
Описания используемой аппаратуры	143
Список литературы	147

Радиотехнические цепи и сигналы

Лабораторный практикум

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать 17.05.11. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. 9,25.

Тираж 110 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5