第10章

1. 对于函数 $f(x,y)=25x^2+y^2$，计算.

a. 在初始点 $c=(0.6,4)$ 处的梯度向量.

b. 在初始点 $(0.6,4)$ 处的标准化向量.

c. 如果取步长为0.5，那么按照梯度下降法，初始点随向量c的方向下降，计算在下一步迭代的点的位置.

d. 如果取步长为0.5，梯度下降方向是 $(1,0)^T$，计算下一步迭代点的位置.

解：a. $\frac{\partial f}{\partial x}=50x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$，

函数 $f(x,y)$ 在初始点 $c=(0.6,4)$ 处的梯度向量为 $(30,8)^T$.

b. 函数 $f(x,y)$ 在初始点 $(0.6,4)$ 处的标准化向量为

$$\left(\frac{30}{\sqrt{30^2+8^2}},\frac{8}{\sqrt{30^2+8^2}}\right)^T=\left(\frac{15\sqrt{241}}{241},\frac{4\sqrt{241}}{241}\right)^T=(0.96\ \ 0.26)^T$$

c. 由a知 向量c方向为 $(30,8)$ 步长0.5，按照梯度下降法，

下一步迭代点位置为

$$(0.6,4)^T-0.5\times(30,8)^T=(-14.4,0)^T$$

d. 步长0.5，梯度下降方向是 $(1,0)^T$，下一步迭代点的位置为

$$(0.6,4)^T-0.5\times(1,0)^T=(0.1,4)^T$$

3. 根据随机梯度下降法的定义，写出最小化问题

$$\min_{P^*,Q^*} J(R;P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{(u,i)\in k}(r_{ui}-p_u^T q_i)^2$$

中参数 P.Q 的更新公式

解：$$\frac{\partial J}{\partial p_u} = -\sum_{i:(u,i)\in k} q_i \left(r_{ui}-\sum_{j=1}^{k} p_{uj}^T \cdot q_{ji}\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = -\sum_{u:(u,i)\in k} p_u \left(r_{ui}-\sum_{j=1}^{k} p_{uj}^T \cdot q_{ji}\right)$$

根据随机梯度下降的定义.

$$p_{uj}^{(t+1)} = p_{uj}^{(t)} + \epsilon\left(r_{ui}^{(t)}-\sum_{j=1}^{k} p_{uj}^{(t)T} q_{ji}^{(t)}\right)\cdot q_{ji}^{(t)}$$

$$q_{ji}^{(t+1)} = q_{ji}^{(t)} + \epsilon\left(r_{ui}^{(t)}-\sum_{j=1}^{k} p_{uj}^{(t)T}\cdot q_{ji}^{(t)}\right)\cdot p_{uj}^{(t)}$$

5. 设矩阵分解的重构误差函数为

$$J(R;P,Q)=\frac{1}{2}\sum_{(u,i)\in K}(r_{ui}-p_u^T q_i)^2,$$

其中，r_{ui}是用户u对项目i的真实评分. $\hat{r}_{ui}$ ~~是~~ $=p_u^T q_i$是模型的估计值，K为评分矩阵R中能够观测到评分的用户-项目对，即$K=\{(u,i)\mid r_{ui}\neq 0\}$.

a. 证明：$J(R;P,Q)$不是关于P和Q的~~函数~~凸函数.

b. 计算：$\frac{\partial J}{\partial p_{ui}}$ 和 $\frac{\partial J}{\partial q_{ji}}$

c. 当我们使用随机梯度下降算法学习参数时，写出参数p_{uj}和参数q_{ji}的更新规则.

解：a.

假设损失函数J为凸函数，则存在唯一最优解。
设最优解为 P_0, Q_0，即当 P, Q 取值为 P_0, Q_0 时，J取得唯一最小值。
当 P, Q 取值为 $-P_0, -Q_0$ 时，与 ~~单~~ P, Q 取值为 P_0, Q_0 J值相同。
J最小值点不唯一，因此与假设矛盾，J不为凸函数。

b. $$\frac{\partial J}{\partial p_{uj}} = -\sum_i (r_{ui} - p_u^T q_i) q_{ji}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_{ji}} = -\sum_u (r_{ui} - p_u^T q_i) p_{uj}.$$

c. $$p_{uj}^{(t+1)} \leftarrow p_{uj}^{(t)} + \epsilon \quad (r_{ui} - p_u^T q_i) q_{ji}$$

$$q_{ji}^{(t+1)} \leftarrow q_{ji}^{(t)} + \epsilon \quad (r_{ui} - p_u^T q_i) p_{uj}.$$

第11章

1. 将下列条件改写成整数规划的约束，保证两个不等式中至少有一个成立.

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \le 4,\quad 3x_1-x_2-x_3+x_4 \le 3$$

其中 $x_j \ge 0$，$j=1,\cdots,4$，并且每一个变量都是整数.

解：引入 0-1 变量 w_1、w_2

$$w_1=\begin{cases}1, & x_1+x_2+x_3+x_4\le 4\\ 0, & x_1+x_2+x_3+x_4>4\end{cases} \qquad w_2=\begin{cases}1, & 3x_1-x_2-x_3+x_4\le 3\\ 0, & 3x_1-x_2-x_3+x_4>3\end{cases}$$

和足够大的正数 M，则对应约束可以改写为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 \le 4+M(1-w_1) & ①\\ 3x_1-x_2-x_3+x_4 \le 3+M(1-w_2) & ②\\ w_1+w_2\ge 1 & ③\\ w_i\in\{0,1\},\ i=1,2 & ④\end{cases}$$

具体的，在 $w_1=1$ 时，约束①可以保证 $x_1+x_2+x_3+x_4\le 4$ 成立.

在 $w_2=1$ 时约束②可以保证 $3x_1-x_2-x_3+x_4\le 3$ 成立.

~~约束③保证了 w~~ 约束③和约束④保证了 w_1 与 w_2 至少有一个为1，因此保证了两个不等式中至少有一个成立.

3. 装箱问题是要选择集合的最大成本子集合，其中没有两个集合具有相同的元素。

输入：全集 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

子集簇 $S=\{S_i \mid S_i \subset U, 1 \le i \le m\}$

成本 $C=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$

请将装箱问题用整数规划问题的形式表达出来。

解：引入 0-1 变量 w_i

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{取子集 } S_i \\ 0, & \text{不取子集 } S_i \end{cases}, \quad (1 \le i \le m.)$$

和 0-1 变量 $\alpha_{u_k i}$

$$\alpha_{u_k i} = \begin{cases} 1, & u_k \text{ 元素在子集 } S_i \text{ 中} \\ 0, & u_k \text{ 元素不在子集 } S_i \text{ 中} \end{cases} \quad (1 \le k \le n, \quad 1 \le i \le m)$$

求最大成本子集合，则目标函数为 $\max \sum_{i=1}^{m} w_i c_i$

约束条件为两个集合中不存在相同的元素，等价于：

任一元素在最大成本子集合的个数不超过1个。

形式化表达为 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{u_k i} w_i \le 1 \quad (1 \le k \le n)$

综上，装箱问题可形式化为

$$\max \sum_{i=1}^{m} w_i c_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{m} \alpha_{u_k i} w_i \le 1$$

$$w_i \in \{0, 1\}$$

$$1 \le i \le m$$

$$1 \le k \le n$$

5、设 x 和 y 都是整数：

a. 怎样保证 $x+y\le 3$，$2x+5y\le 12$，或两个条件都满足呢？

b. 怎样保证~~当~~当 $x\le 2$，$y\le 3$？

解：a. 引入 0-1 变量 w_1, w_2.

$$w_1=\begin{cases}1, & x+y\le 3\\ 0, & x+y>3\end{cases} \qquad w_2=\begin{cases}1, & 2x+5y\le 12\\ 0, & 2x+5y>12\end{cases}$$

和足够大的正数 M，则对应约束可以改写为

$$\begin{cases} x+y\le 3+M(1-w_1) & ① \\ 2x+5y\le 12+M(1-w_2) & ② \\ w_1+w_2\ge 1 & ③ \\ w_i\in\{0,1\},\ i=1,2 & ④ \end{cases}$$

具体的，在 $w_1=1$ 时，约束①可以保证 $x+y\le 3$ 成立。

在 $w_2=1$ 时，约束②可以保证 $2x+5y\le 12$ 成立。

约束③、④，则保证 w_1 和 w_2 中至少一个为 1，因此保证了 $x+y\le 3$ 或 $2x+5y\le 12$。

b. 引入 0-1 变量 w_1, w_2

$$w_1=\begin{cases}1, & x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases} \qquad w_2=\begin{cases}1, & y\le 3\\ 0, & y>3\end{cases}$$

和足够大的正数 M，则对应约束可以改写为

$$\begin{cases} x\le 2+M(1-w_1) & ① \\ y\le 3+M(1-w_2) & ② \\ \cancel{w_1+w_2=2}\ \ w_1\le w_2 & ③ \\ w_i\in\{0,1\},\ i=1,2 & ④ \end{cases}$$

（此处有两种理解，只要当 $x\le 2$，$y\le 3$，应是 $w_1\le w_2$，只有当 $x\le 2$，$y\le 3$ 应是 $w_2\le w_1$）

具体的，在 w_1、w_2 为 1 时，约束①、②分别保证 $x\le 2$，$y\le 3$ 成立。

约束③、④则保证 ~~w_1 和 w_2 同时均为 1，保证了 $x\le 2$，$y\le 3$~~ 只要当 $x\le 2$，$y\le 3$.

7. 给定下面的整数规划问题。

Maximize: $Z = 3x_1 + x_2$

Subject to: $2x_1 - x_2 \le 6$

$x_1 + x_2 \le 4$

$0 \le x_i$ and $x_i \in Z$ for $i = 1$ to 2

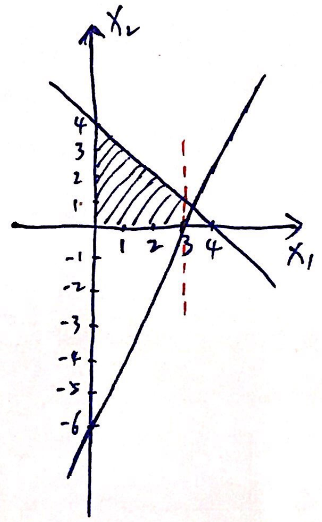
a. 请找出该整数规划问题的两个有效的不等式约束.

b. 找出整数规划问题的可行域

c. 找出整数规划问题的凸包.

d. 使用线性规划方法,解决该整数规划问题.

解:a. 由约束条件可得



由有效不等式定义可知
该整数规划问题的有效不等式约束为 $\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$.

b. 可行域为{(0,0), (0,1) (0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)
(2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)}

c. 由凸包定义知. 整数规划问题的凸包为 $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$.

d. 目标函数为 $z=3x_1+x_2$

求 $\max z=3x_1+x_2$

由凸包作为约束范围，当 $x_1=3$ $x_2=1$ 时，目标函数取得最大值 $\max z=10$.