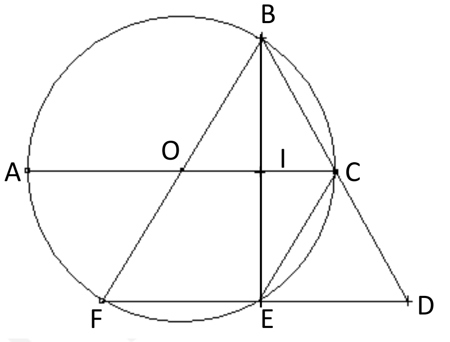
Thème : CONFIGURATIONS DU PLAN

LEÇON : ANGLES

A - SITUATION D’APPRENTISSAGE

A la recherche d’un logo pour le club mathématique du collège, une élève de la classe de quatrième propose à ses camarades le motif ci-contre.
Elle donne les précisions suivantes :
- Le point O est le centre du cercle ;
- Les droites (AI) et (FD) sont parallèles ;
- Les droites (OF) et (CE) sont parallèles.

Le meilleur élève de la classe affirme que dans cette figure, plusieurs angles ont la même mesure que l’angle $\widehat{AOF}$.
Fouettés dans leur orgueil, les autres élèves s’organisent pour trouver tous les angles de même mesure que l’angle $\widehat{AOF}$.



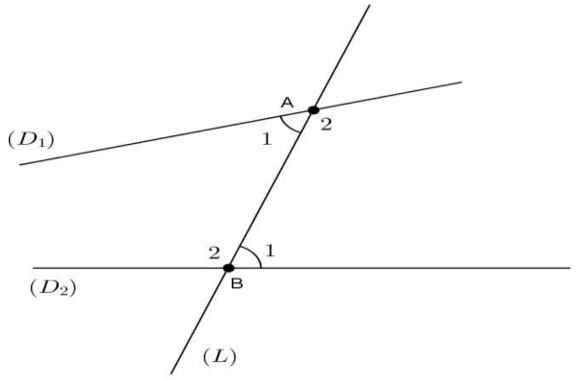
B. CONTENU DE LA LEÇON

I. ANGLES ALTERNES – INTERNES

1) Présentation

Sur la figure ci-contre, la droite (L) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en A et en B.

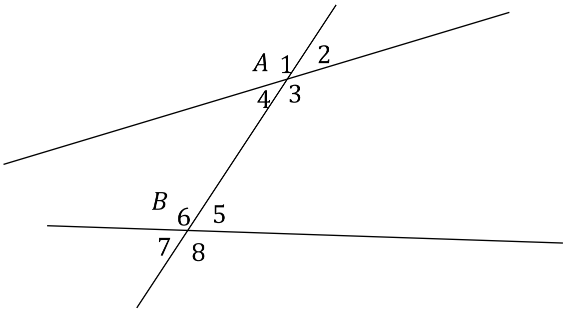
- Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont des ***angles alternes-internes.***
- Les angles $\hat{A}_2$ et $\hat{B}_2$ sont des ***angles alternes-internes***



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, la droite (AB) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement

en A et en B. Cite deux angles alternes-internes.



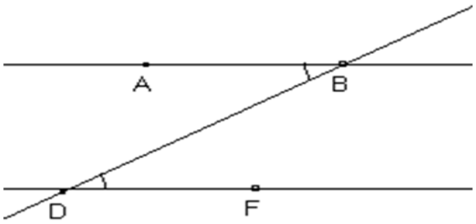
Corrigé

- Les angles $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_5}$ sont alternes-internes.
- Les angles $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_6}$ sont alternes-internes.

2) Propriétés

Propriété 1

Si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



Les droites (AB) et (DF) sont parallèles.
La droite (BD) est sécante à (AB) et à (DF)

Données : $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDF}$ sont deux angles alternes-internes. | (AB) // (DF)

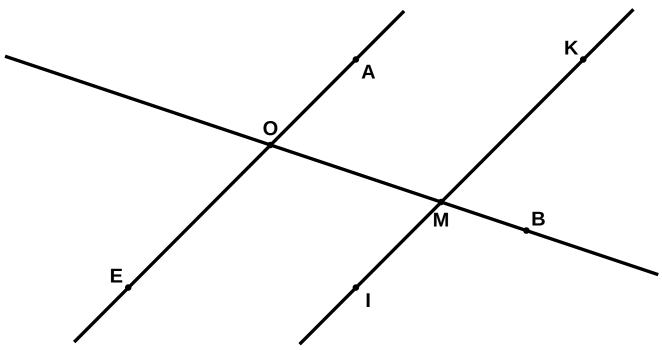
Conclusion : $mes\ \widehat{ABD} = mes\ \widehat{BDF}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (KI) sont parallèles. La droite (OM) est sécante aux droites (AE) et (KI) respectivement en O et M.

1) Justifie que les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ ont la même mesure.

2) Justifie que les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ ont la même mesure.



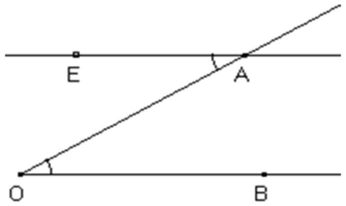
Corrigé

1) Les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{OMI}$ ont la même mesure

2) Les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{OMK}$ ont la même mesure

<u>Propriété 2</u>

Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.



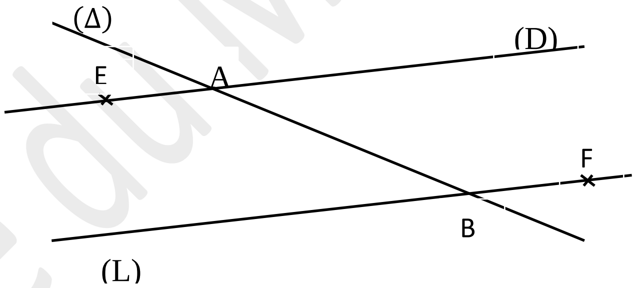
La droite (AO) est sécante à (AE) et à (OB)

<u>Données</u> : $\widehat{\text{EAO}}$ et $\widehat{\text{AOB}}$ sont deux angles alternes-internes. | mes $\widehat{\text{EAO}}$ = mes $\widehat{\text{AOB}}$

<u>Conclusion</u>: (EA)//(OB)

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, la droite (Δ) est sécante aux droites (D) et (L) respectivement en A et en B.
De plus les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ ont la même mesure.
Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles.



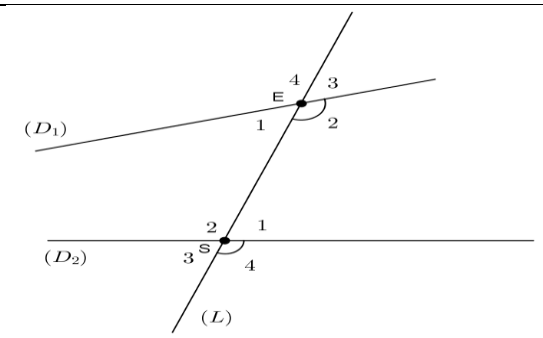
Solution

Les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ sont des angles alternes-internes formés par les droites (D) et (L) et la sécante (Δ).
De plus, les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABF}$ ont la même mesure.
Donc, les droites (D) et (L) sont parallèles.

II. ANGLES CORRESPONDANTS

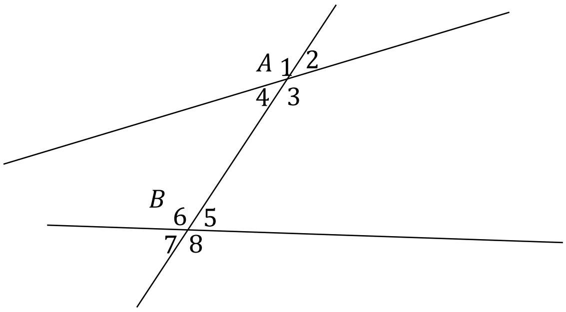
1) Présentation

Sur la figure ci-contre, la droite (L) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en E et en S.
- Les angles $\widehat{E_2}$ et $\widehat{S_4}$ sont des angles correspondants.
- $\widehat{S_1}$ et $\widehat{E_3}$ sont des angles correspondants ;
- $\widehat{S_2}$ et $\widehat{E_4}$ sont des angles correspondants ;
- $\widehat{S_3}$ et $\widehat{E_1}$ sont des angles correspondants.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, la droite (AB) est sécante aux droites (D_1) et (D_2) respectivement en A et en B. Cite tous les angles correspondants.



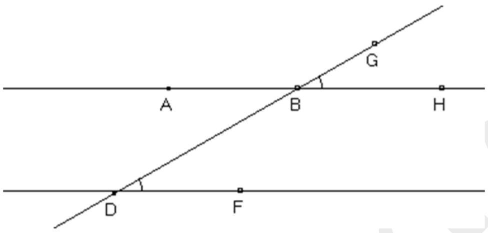
Corrigé

- Les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_6}$ sont deux angles correspondants.
- Les angles $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_7}$ sont deux angles correspondants.

2) <u>Propriétés</u>

<u>Propriété 1</u>

Si deux angles correspondants sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



Les droites (AB) et (DF) sont parallèles.
La droite (BD) est sécante à (AB) et à (DF).

<u>Données</u> : $\widehat{BDF}$ et $\widehat{HBG}$ sont deux angles correspondants. (AB) / / (DF)

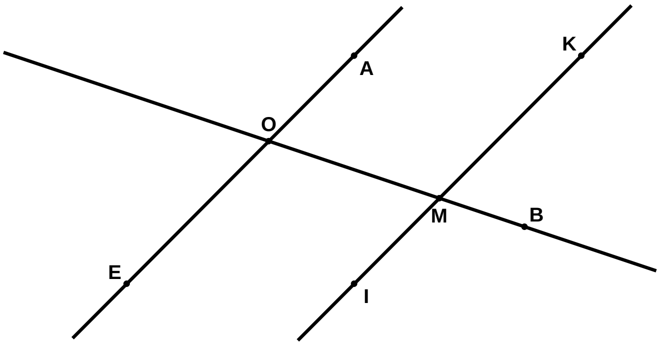
<u>Conclusion</u> : mes $\widehat{BDF}$ = mes $\widehat{HBG}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (KI) sont parallèles. La droite (OM) est sécante aux droites (AE) et (KI) respectivement en O et en M.

1) Justifie que les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ ont la même mesure.

2) Justifie que les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ ont la même mesure.

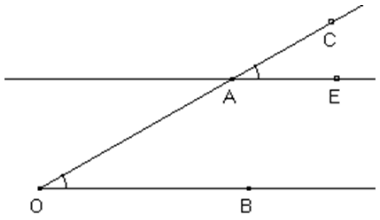


Corrigé

1) Les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et la sécante commune (OM). Donc les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{KMB}$ ont la même mesure.
2) Les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles $\widehat{EOM}$ et $\widehat{IMB}$ ont la même mesure.

Propriété 2

Si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants de même mesure, alors elles sont parallèles.



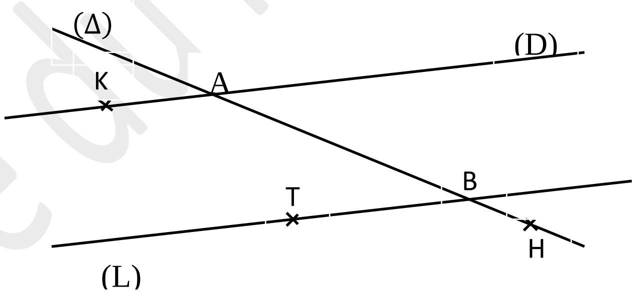
La droite (AO) est sécante à (AE) et à (OB).

Données : $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BOA}$ sont deux angles correspondants. mes $\widehat{CAE}$ = mes $\widehat{BOA}$

Conclusion : (EA)//(OB)

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, la droite (Δ) est sécante aux droites (D) et (L) respectivement en A et en B.
De plus, les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ ont la même mesure.
Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles.



Corrigé

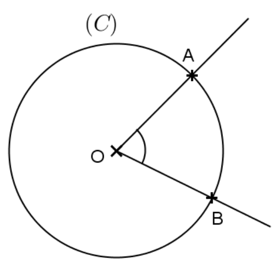
Les angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ sont deux angles correspondants formés par les droites (D) et (L) et la sécante (Δ). De plus les deux angles $\widehat{KAB}$ et $\widehat{TBH}$ ont la même mesure.
Donc, les droites (D) et (L) sont parallèles.

III. ANGLE AU CENTRE

1) Définition

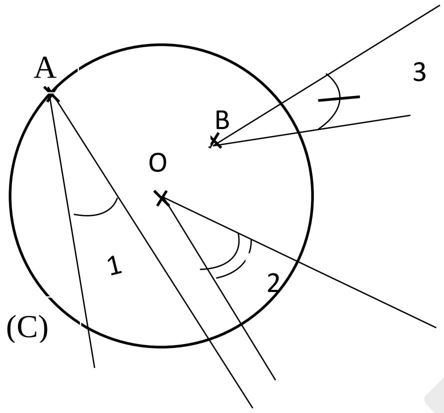
On appelle *angle au centre* d'un cercle, tout angle ayant pour sommet le centre de ce cercle.

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points distincts de (C).
$\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle (C).



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
Parmi les angles 1 ; 2 et 3, quel est l'angle au centre. Justifie ta réponse.



Corrigé

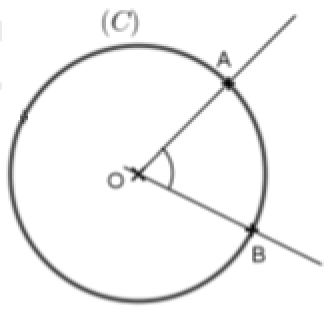
• L'angle 1 n'est pas un angle au centre car son sommet A n'est pas le centre du cercle.
• L'angle 3 n'est pas un angle au centre car son sommet B n'est pas le centre du cercle.
• L'angle 2 est un angle au centre car son sommet O est le centre du cercle.

2) Arc intercepté par un angle au centre

Présentation

(C) est un cercle de centre O.
A et B sont deux points de (C).
- Les points A et B déterminent deux parties du cercle appelées ***arcs de cercle***.
- Lorsque [AB] n'est pas un diamètre de (C), l'arc le plus court est noté $\boldsymbol{\widehat{AB}}$ et l'arc le plus long est noté $\boldsymbol{\breve{AB}}$**.**

On dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ ou l'arc $\widehat{AB}$ est intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.



3) Longueur d'un arc de cercle

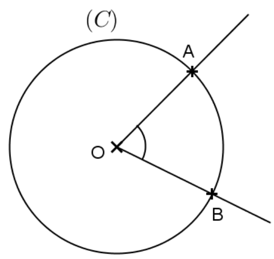
Propriété

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Remarque

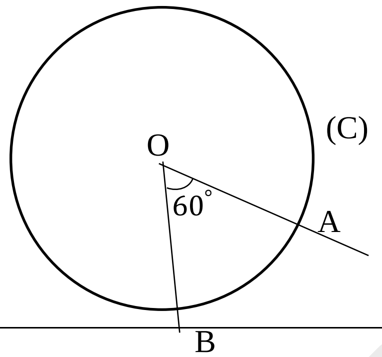
Un arc d'un cercle de centre O et de rayon r, intercepté par un angle au centre $\widehat{AOB}$ a pour longueur : $\boldsymbol{\pi r} \times \dfrac{\boldsymbol{mes\ \widehat{AOB}}}{\mathbf{180°}}$.

Longueur $\boldsymbol{\widehat{AB}} = \times \dfrac{\boldsymbol{mes\ \widehat{AOB}}}{\mathbf{180°}}$.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et de rayon 2 cm.
A et B sont deux points de (C) tels que $mes\ \widehat{AOB} = 60°$.
Calcule la longueur en centimètres de l'arc $\widehat{AB}$.
On prendra π *= 3,14.*



Corrigé

Sachant que $mes\widehat{AOB} = 60°$, calculons la longueur en cm de l'arc $\widehat{AB}$.

Longueur $\widehat{AB}$ = $r \times \frac{mes\ \widehat{AOB}}{180°}$.

Longueur $\widehat{AB}$ = $2 \times \pi \times \frac{60}{180}\ cm = 2\pi \times \frac{1}{3}\ cm = \frac{2\pi}{3}\ cm$.

La longueur de l'arc est de $\frac{2\pi}{3}\ cm$, soit environ 2,09 cm.

4) Propriétés

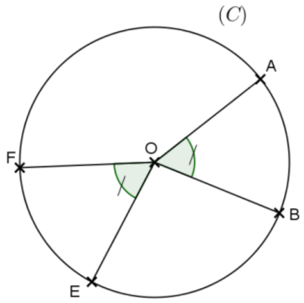
Propriété 1

Dans un cercle , si deux angles au centre ont la même mesure, alors ils interceptent deux arcs de même longueur.

$\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOF}$ sont des angles au centre.

mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{EOF}$

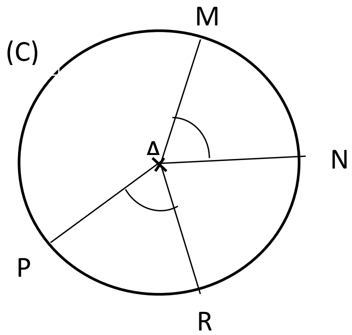
Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{EF}$ sont de même longueur



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre A.
M, N, P et R sont des points de (C) tels que mes $\widehat{MAN}$ = mes $\widehat{PAR}$.

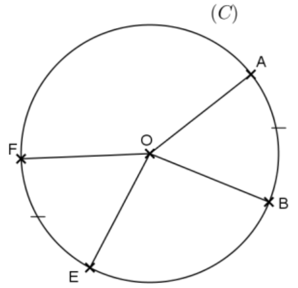
Justifie que les arcs $\widehat{MN}$ et $\widehat{PR}$ ont la même longueur.

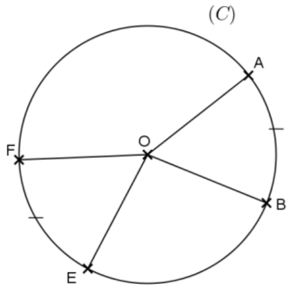


Corrigé

Les angles au centre $\widehat{MAN}$ et $\widehat{PAR}$ ont la même mesure.
Donc, les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{PR}$ ont la même longueur.

Propriété 2

Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur , alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.	



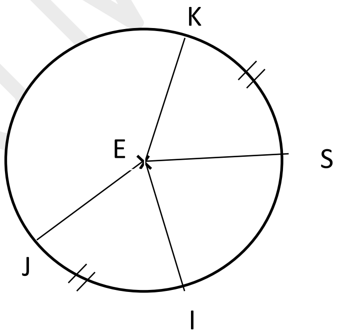
$\widehat{AOB}$ et $\widehat{EOF}$ sont des angles au centre.

Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{EF}$ sont de même longueur.

mes$\widehat{AOB}$ = mes$\widehat{EOF}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.
Les arcs $\overset{\frown}{JI}$ et $\overset{\frown}{KS}$ ont la même longueur.
Justifie que les angles au centre $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ ont la même mesure.



Corrigé

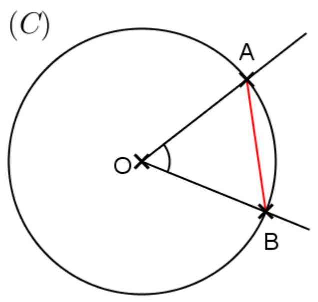
Les angles au centre $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ interceptent respectivement les arcs $\overset{\frown}{JI}$ et $\overset{\frown}{KS}$.
Les arcs $\overset{\frown}{JI}$ et $\overset{\frown}{KS}$ ont la même longueur. Donc, les angles $\widehat{JEI}$ et $\widehat{KES}$ ont la même mesure.

5) <u>Cordes et arcs de cercle</u>

a) Définition

Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont deux points du cercle.

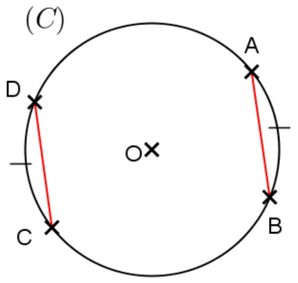
b) Présentation

(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C). Le segment [AB] est une **corde** du cercle (C). La corde [AB] **sous-tend** les deux arcs d'extrémités A et B.	

c) Propriétés

Propriété 1

Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.



[AB] et [CD] sont deux cordes de (C).

Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ sont de même longueur.

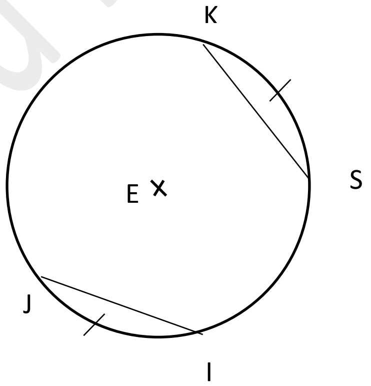
AB = CD

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.

I, J, K et S sont des points de (C) tels que les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur.

Justifie que : KS = IJ.



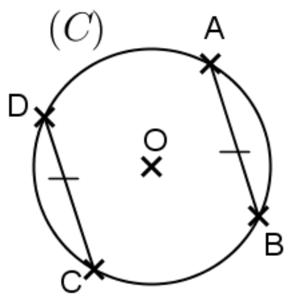
Corrigé

$[IJ]$ et $[KS]$ sont deux cordes de (C) qui sous-tendent les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$.

On sait que les arcs $\widehat{IJ}$ et $\widehat{KS}$ ont la même longueur ; donc $KS = IJ$.

Propriété 2

Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur.



[AB] et [CD] sont deux cordes de (C).

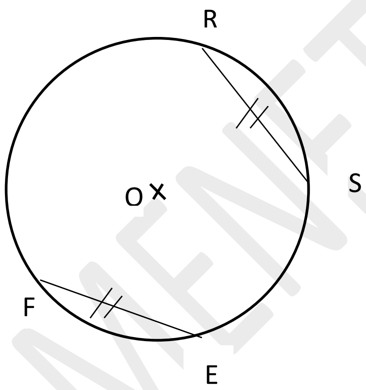
AB = CD

Les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ sont de même longueur.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
R, S, F et E sont des points de (C) tels que les cordes [RS] et [EF] ont la même longueur.

Justifie que les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{RS}$ ont la même longueur.

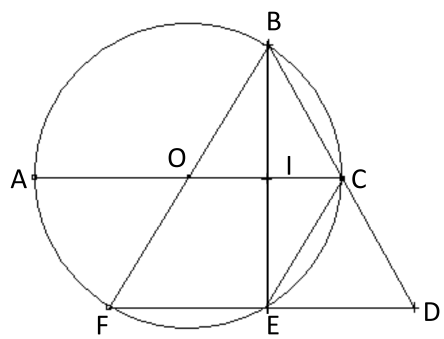


Corrigé

Les segments $[EF]$ et $[RS]$ sont des cordes du cercle (C) qui ont la même longueur, donc les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{RS}$ qu'ils sous-tendent ont la même longueur.

C- SITUATION D'EVALUATION

A la recherche d'un logo pour le club mathématique du collège, une élève de la classe de quatrième propose à ses camarades le motif ci-contre.
Elle donne les précisions suivantes :
. Le point O est le centre du cercle ;
. Les droites (AI) et (FD) sont parallèles ;
. Les droites (OF) et (CE) sont parallèles.
Le meilleur élève de la classe affirme que dans cette figure, plusieurs angles ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.



Les autres élèves se mettent au travail pour vérifier cette affirmation.

En utilisant les outils mathématiques au programme, détermine les angles qui ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$.

Corrigé

Les angles qui ont la même mesure que l'angle $\widehat{AOF}$ sont :

- $\widehat{BOC}$, car opposé à $\widehat{AOF}$ par le sommet O ;
- $\widehat{EFO}$, car $\widehat{BOC}$ et $\widehat{EFO}$ sont des correspondants formés par les parallèles (AC) et (FD), et la sécante commune (BF) ;

- $\widehat{ACE}$, car $\widehat{ACE}$ et $\widehat{AOF}$ sont deux angles correspondants formés par les parallèles (BF) et (CE), et la sécante commune (AC).
- $\widehat{BFE}$, car $\widehat{BFE}$ et $\widehat{AOF}$ sont deux angles alternes-internes formés par les parallèles (AI) et (FD), et la sécante commune (BF).

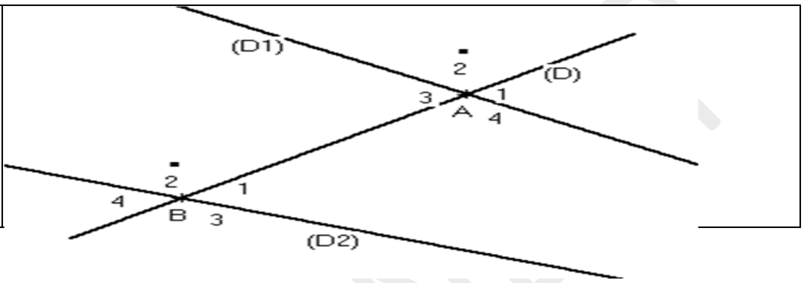
D- EXERCICES

D-1 Exercices de fixation

Exercice 1

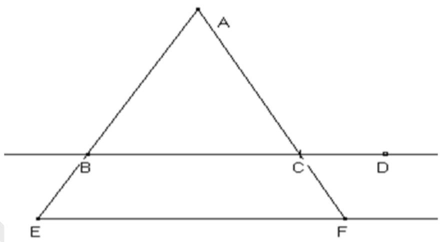
Observe la figure ci-contre :

1) Cite des angles alternes-internes
2) Cite des angles correspondants



Exercice 2

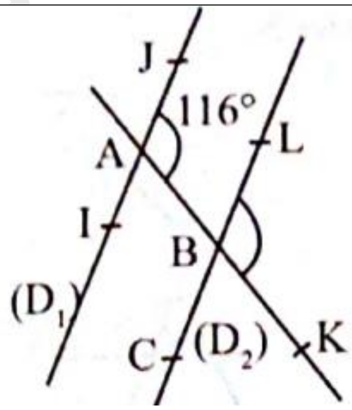
Sur la figure ci-contre, (BC)//(EF)
Cite des angles qui ont la même mesure en justifiant ta réponse.



Exercice 3

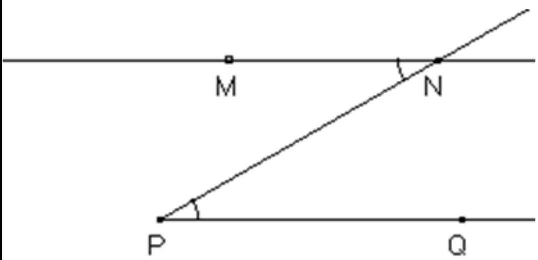
On considère la figure codée ci-contre où les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{KBL}$.

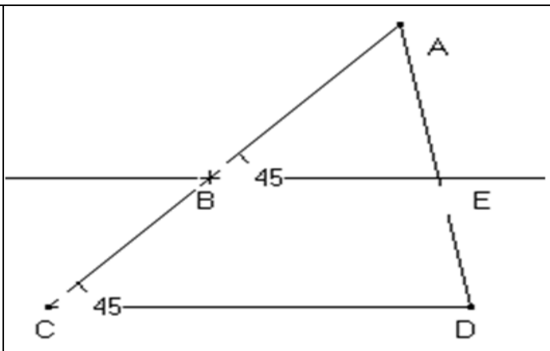


Exercice 4

Sur la figure ci-dessous, les angles $\widehat{MNP}$ et $\widehat{NPQ}$ ont la même mesure.
Justifie que (MN)//(PQ)

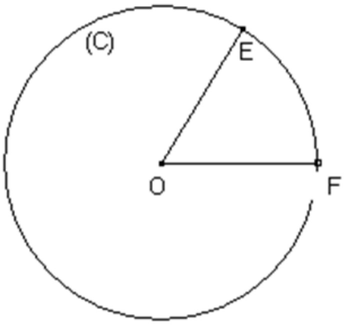
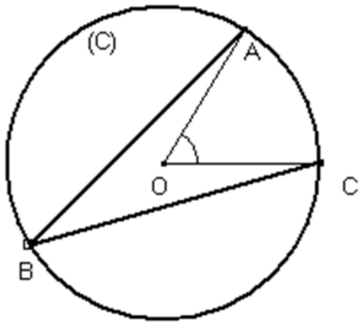
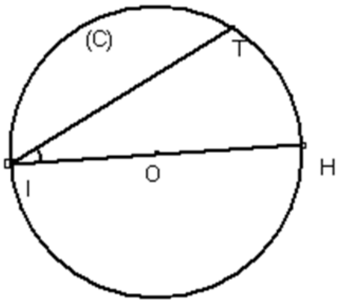
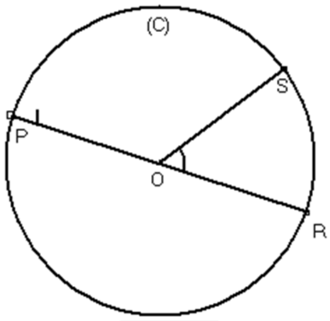


Exercice 5

Observe la figure ci-contre. Justifie que les droites (BE) Et (CD) sont parallèles.	

Exercice 6

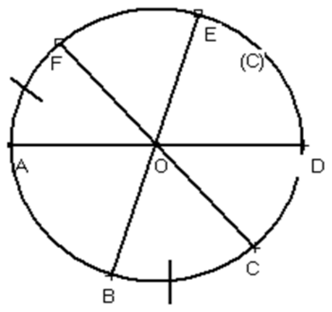
Dans chacune des figures ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.
Nomme les angles au centre du cercle (C).

 figure 1	 figure 2
 figure 3	 figure 4

Exercice 7

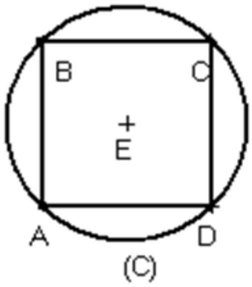
(C) est un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Calcule la longueur en cm de chacun des arcs interceptés respectivement par un angle au centre de 30° et 135°.

Exercice 8

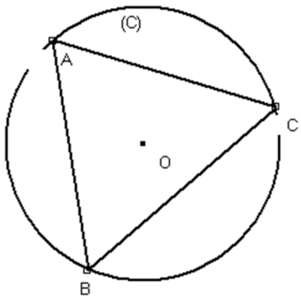
(C) est un cercle de centre O. Observe attentivement la figure codée ci-contre. 1) Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{ED}$ ont la même longueur. 2) Justifie que les angles au centre $\widehat{FOA}$ et $\widehat{BOC}$ ont la même mesure.	

D-2 Exercices de renforcement

Exercice 9

(C) est un cercle de centre E et de rayon 1 cm. ABCD est un carré inscrit dans ce cercle. Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{DA}$ ont la même longueur.	

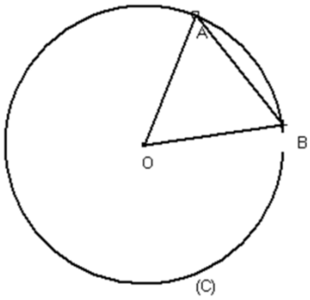
Exercice 10

(C) est un cercle de centre O. A, B et C sont trois points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{AC}$ ont la même longueur. Justifie que le triangle ABC est équilatéral.	

Exercice 11

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, (C) est un cercle de centre O.
A et B sont deux points de (C) tels que AOB est un triangle équilatéral de coté 2,1 cm.

1) Calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2) Déduis-en la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



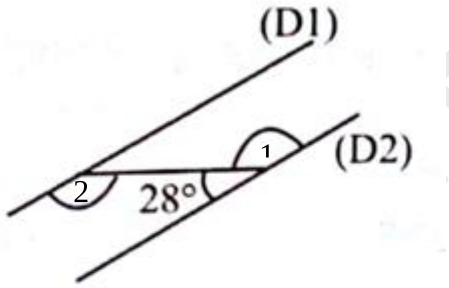
Exercice 12
On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [BC].
A est un point de (C) et R est le milieu du segment [AC].
La droite (RO) coupe le cercle en deux points E et F tel que F appartient à l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point A.

a) Réalise une figure
b) Démontre que les angles $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{BOF}$ ont la même mesure
c) Démontre que les segments [BF] et [EC] ont la même longueur.

D-3 Exercices d'approfondissement

Exercice 13
On considère la figure codée ci-contre.
Les droites (D_1) *et* (D_2) sont parallèles.

Détermine les mesures des angles 1 et 2.



Corrigé
Les angles 1 et 2 sont alternes – internes formés par les droites parallèles (D1) et (D2), et la sécante commune. Ils ont donc la même mesure.
Or la mesure de 1 est 180 – 28=152°.
Donc la mesure de 2 est 152°.

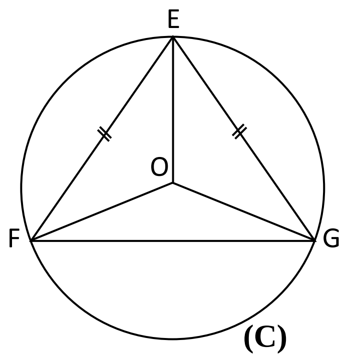
Exercice 14
La figure ci-contre représente le logo d'une société. Sur cette figure, EFG est un triangle isocèle en E inscrit dans le cercle **(C)** de centre O et de rayon 4 cm.

1/ Justifie que les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$ ont la même longueur.

2/ Compare les angles au centre $\widehat{EOF}$ et $\widehat{EOG}$ qui interceptent respectivement les arcs $\widehat{EF}$et $\widehat{EG}$. Justifie ta réponse.

3/ Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{EOF}$ sachant que la somme des mesures des trois angles au centre de **(C)** vaut 360° et la mesure de $\widehat{FOG}$ vaut 140°.

4/ Calcule la longueur de l'arc $\widehat{FG}$. Tu donneras le résultat avec deux chiffres après la virgule.
Prends π= 3,14.



Corrigé
1) Les arcs $\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$ sont sous tendus par les cordes de même longueur [EF] et [EG], ils ont donc la même longueur.
2) Les deux angles interceptent deux arcs de même longueur ($\widehat{EF}$ et $\widehat{EG}$), ils ont donc la même mesure.
3) On a : $mes\widehat{FOG} + mes\widehat{FOE} + mes\widehat{EOG} = 360°$;
or $mes\widehat{FOE}$= $mes\widehat{EOG}$ et $mes\widehat{FOG}$=140° ;
donc : 2 $mes\widehat{FOE}$=360-140, c'est-à-dire que $mes\widehat{FOE}$= 110°.
4) La longueur de l'arc $\widehat{EF}$ est :$\pi \times 4 \times \frac{110}{180} \approx 7{,}65\ cm$.