FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

I. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

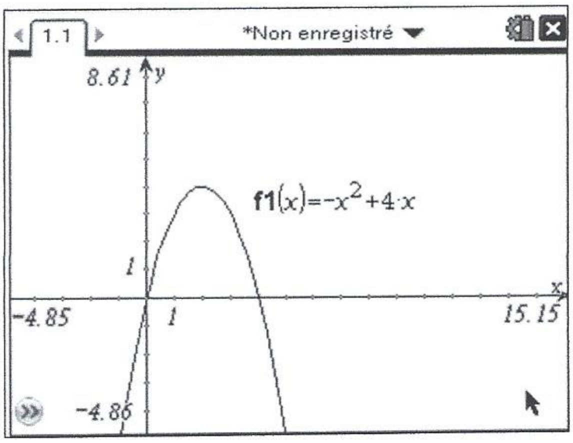
Exemples :

- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : a = 5, b = -4 et c = 9.
- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : a = -1, b = 4 et c = 0.
- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que : a = 1, b = 0 et c = 0.
- $h(x) = (3x+1)(x-2)$.

  En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$.

  On a : a = 3, b = -5 et c = -2.

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.



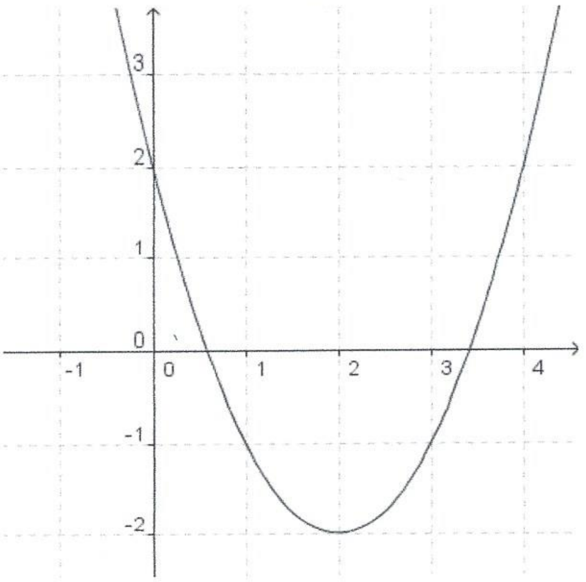
II. Variations

Propriétés :

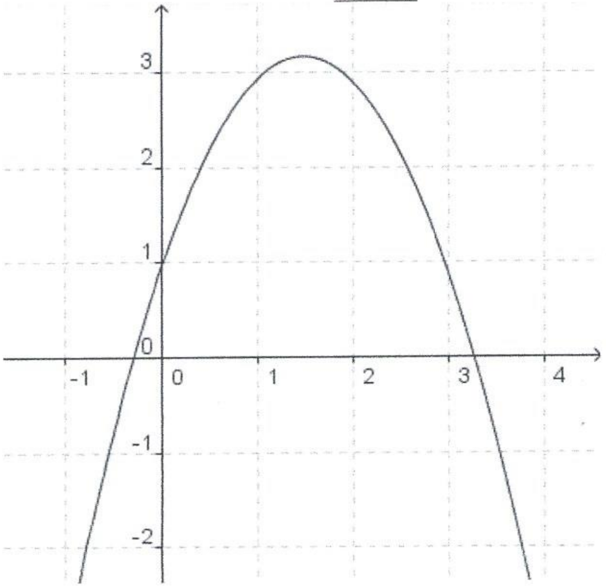
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

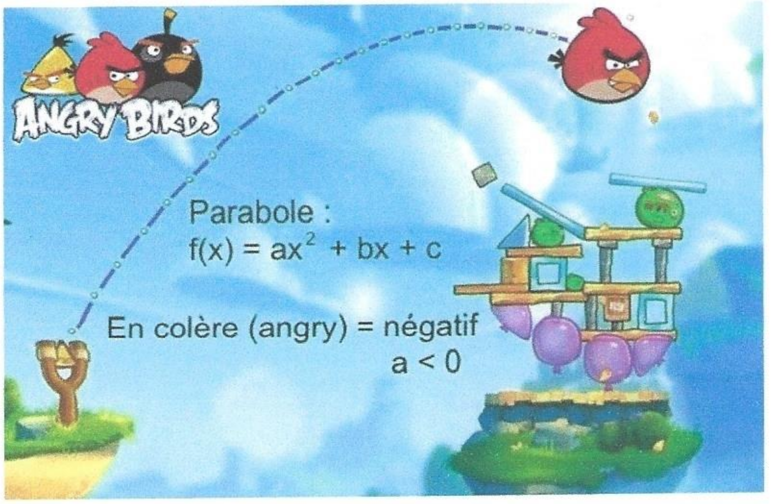
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante.
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

$a > 0$



$a < 0$





III. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition :
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

Exemple :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$ admet un maximum.
En effet, le coefficient devant x^2 est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors f admet un extremum pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.
a) Quelle est la nature de l'extremum de la fonction f ?
b) Déterminer les coordonnées de cet extremum.
c) Construire le tableau de variations de f, puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

a) Le coefficient devant x^2 est positif, f admet donc un minimum.

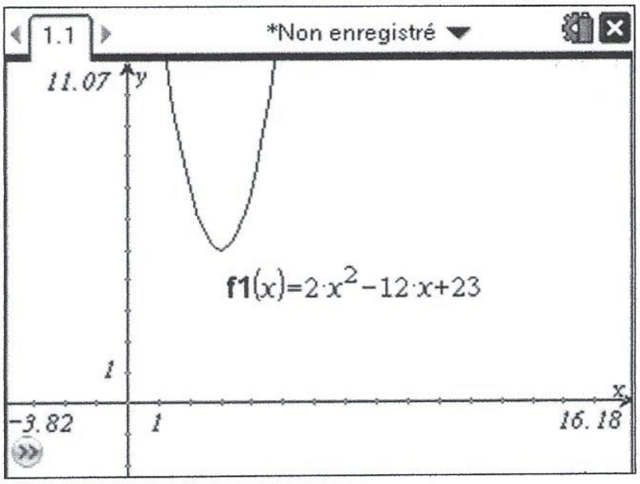
b) Le minimum est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-12}{2 \times 2} = 3$

Or $f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 23 = 5$ donc f admet un minimum égal à 5 pour $x = 3$. Les coordonnées du minimum sont (3 ; 5).

c)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	5	↗	

On pourra tracer la parabole à l'aide d'une calculatrice graphique pour vérifier.



Exercice 1

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions du second degré ?

$f(x)=3x^2-3x+2$ $\quad g(x)=-4x^2+1$ $\quad h(x)=-3x+9$ $\quad i(x)=(x-3)(x+2)$

$j(x)=5x-x^2-8$ $\quad k(x)=9x^2$ $\quad l(x)=\frac{1}{x^2}-3x+2$ $\quad m(x)=x(3x-6)$

Exercice 2

Justifier que chacune des fonctions suivantes est une fonction du second degré :

$f(x)=(2x-1)(5-x)$ $\quad g(x)=3x(x-5)+3$

$h(x)=(1-x)(3+x)$ $\quad i(x)=(2-x)^2$

Exercice 3

A l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère chaque fonction de l'exercice 2.

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont d'abord croissantes puis décroissantes ?

$f(x)=x^2-2x+4$ $\quad g(x)=-x^2-7x+2$ $\quad h(x)=5x^2-3x+9$ $\quad i(x)=3x-x^2+1$

$j(x)=-9x^2+2$ $\quad k(x)=(x+3)(-x+2)$ $\quad l(x)=-2x(1-2x)$ $\quad m(x)=(-x+1)^2$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-4x+5$.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f.
2) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2-12x+1$.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f.
2) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 7

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont les v
variations ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

$f(x)=-x^2+2x+2$ $\quad g(x)=x^2-3x+5$

$h(x)=-2x^2+x+2$ $\quad i(x)=-2x^2+4x+1$

$j(x)=(1-x)(2-x)$ $\quad k(x)=(2x-1)(4+x)$

Exercice 8

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont les variations correspondent au tableau de variations suivant :

$f(x)=x^2+2x-2$ $\quad g(x)=-x^2+5x-3$

$h(x)=x^2-2x+5$ $\quad i(x)=x^2-8x+17$

$j(x)=(x-4)^2+1$ $\quad k(x)=(2x-7)(x+3)$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-3x-2$.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f.
2) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $3x^2-3x-2=0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f.

2) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 + 3x + 4 = 0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 11

Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 + x - 5 = 0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 12

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent un minimum ?

$f(x) = -2x^2 + x + 2$ $\quad$ $g(x) = -x^2 - 4x + 1$ $\quad$ $h(x) = -x^2 + 7x + 9$

$i(x) = 3x^2 - 2x + 6$ $\quad$ $j(x) = (5 - x)(4 - x)$ $\quad$ $k(x) = 3x - 5$

Exercice 13

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent un maximum ?

$f(x) = -x^2 + 6x$ $\quad$ $g(x) = 5x^2 - 2x + 9$ $\quad$ $h(x) = -4x^2 + x + 1$

$i(x) = x^2 + 7$ $\quad$ $j(x) = (x - 1)(8 - 4x)$ $\quad$ $k(x) = -x - 2$

Exercice 14

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de l'extremum de chaque fonction en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $g(x) = -2x^2 + 8x - 2$ $\quad$ $h(x) = x^2 - 2x + 3$

$i(x) = -x^2 + 6x + 5$ $\quad$ $j(x) = 3x^2 + 3x$ $\quad$ $k(x) = -x^2 - 3x - 2$

Exercice 15

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de l'extremum de chaque fonction en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$f(x) = 10x^2 + 3x + 1$ $\quad$ $g(x) = -8x^2 + x - 5$ $\quad$ $h(x) = 50x^2 - 6$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

1) Quelle est la nature de l'extremum de f (minimum ou maximum) ? Justifier.

2) Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Calculer cet extremum.

3) Construire le tableau de variations de f, puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

4) Reproduire la courbe dans un repère.

Exercice 17

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

Exercice 18

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

Exercice 19

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 4x - 4$.

Exercice 20

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 - 36x + 32$.