Transformações Bidimensionais

José Luis Seixas Junior

Ciência da Computação
Universidade Estadual do Paraná

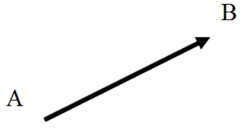
Computação Gráfica
2017

Índice

Vetor

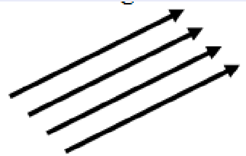
Segmento orientado AB

- Comprimento (Módulo);
- Direção (Inclinação);
- Sentido (de A para B);



Vetor

- Conjunto infinito de segmentos equipotentes a AB;



Vetor

Ponto

- Qualquer ponto pode ser visto como o fim de um segmento iniciado na origem do sistema;
- Qualquer transformação sobre este vetor, altera ponto de qualquer composição;
- Assim, transformar uma figura composta de vetores é alterar os pontos que compoem os vetores;

Transformações Afins

Leonhard Euler (1707 – 1783)

- Transformação Linear (Ax) seguida de translado ($+b$);
  - $x' = Ax + b$;
  - $A \neq 0$;

Transformações

- Translação;
- Escala;
- Rotação;

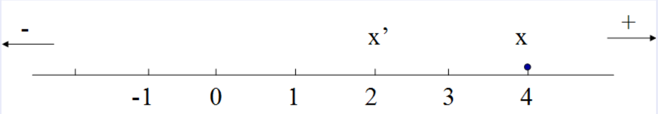
Transformações na Reta

Exemplo

- Dado o ponto e módulo:
  - $x = 4$;
  - $|v| = -2$[a];

[a]Não existe módulo negativo. Neste caso, isso indica sentido negativo

Segmento

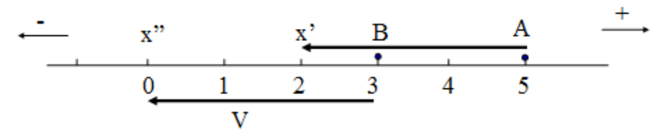


Transformações na Reta

Exemplo

- Segmento de reta:
  - $A = 5$;
  - $|v| = -3$;

$B = 3$



Transformações na Reta

Transformações

- $x' = A + v$:
- $x'' = B + v$;
- Assim, aplicando um translado no segmento utilizando um vetor, o comprimento não se altera;

Operação Isométrica

- Operação na qual o módulo do vetor não é alterado.

Transformações na Reta

Composição

- Sejam T_1 e T_2 duas transformações de vetores u e v, respectivamente:
- Temos:
  - $T_1 = x + u$;
  - $T_2 = x + v$;

Resultante da Composição

$$T_1 \circ T_2\,(x) = T_1(T_2(x)) = T_1(x+v) = (x+v) + u = x + \underline{(u+v)}.$$

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

Transformações na Reta

Resultante da Composição

- Resultante de composição de duas translações resulta em uma nova translação;
- O vetor translação será a soma dos vetores de cada translação;
- A Composição de translação possui a propriedade de fechamento;

Fechamento

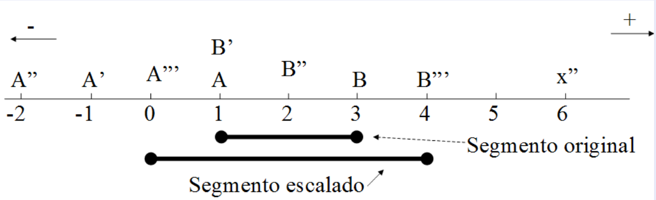
- Se dois vetores pertencem ao Espaço Vetorial, a soma dos vetores também pertence.

Transformações na Reta

Considere AB: $A = 1$ e $B = 3$

- Passo 1: $CM = (1 + 3)/2 = 2$;
- Passo 2: $A' = A - CM = -1$; $B' = B - CM = 1$;
- Passo 3: $A'' = a * A' = -2$; $B'' = a * B' = 2$;
- Passo 4: $A'' = A'' + CM = 0$; $B'' = B'' + CM$;

Resultante da Composição



Transformações bidimensionais

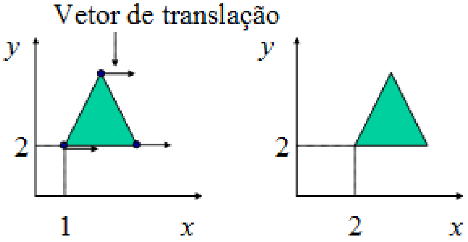
Considere AB: $A = 1$ e $B = 3$

- As transformações afins unidimensionais tem correspondentes bidimensionais;
- Rotação $\rightarrow$ Não faz sentido unidimensional;
- Translação e escala funcionam da mesma forma;
- Propriedades são as mesmas;
- Cálculos feitos por coordenada;

Transformações bidimensionais

Translação

$$P' = T(\Delta x,\ \Delta y) * P \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y \end{cases}$$

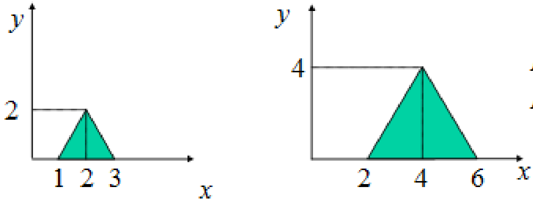


$\Delta x = 1$
$\Delta y = 0$

Transformações bidimensionais

Escala

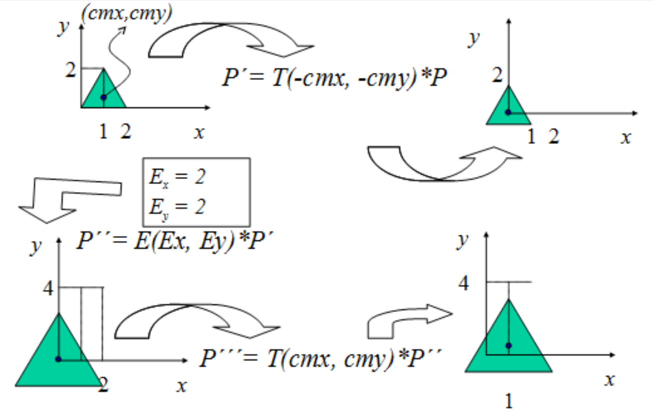
$$P' = E(Ex, Ey) * P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x * E_x \\ y' = y * E_y \end{cases}$$



$E_x = 2$
$E_y = 2$

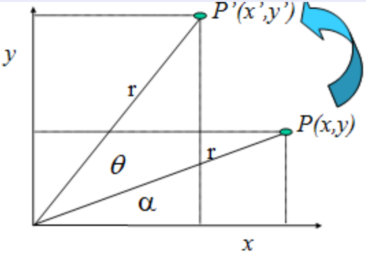
Transformações bidimensionais

Escala



Transformações bidimensionais

Rotação



$$x = r.cos(\alpha)$$
$$y = r.sin(\alpha)$$

$$x' = r.cos(\alpha+\theta) = r.cos(\alpha).cos(\theta) - r.sin(\alpha).sin(\theta)$$
$$y' = r.sin(\alpha+\theta) = r.cos(\alpha).sin(\theta) + r.sin(\alpha).cos(\theta)$$

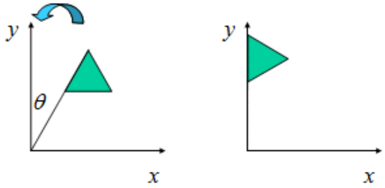
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x.cos(\theta) - y.sin(\theta) \\ y' &= x.sin(\theta) + y.cos(\theta) \end{aligned}}$$

Transformações bidimensionais

Rotação

$$P' = R(\theta) * P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x * \cos(\theta) - y * \sin(\theta) \\ y' = x * \sin(\theta) + y * \cos(\theta) \end{cases}$$



Atividade 06

Atividade 06/1

- Base:
    - Exercício 04/1;
- Setas:
    - Translação nas direções;
- Tecla 'r'/'R';
    - Rotação → Horário/Anti-horário;
- Tecla 'e'/'E':
    - Escalar → Aumentar/Diminuir;

Data

28 de agosto de 2017

Referências I

Hill, F. S.
Computer Graphics Using OpenGL.
Prentice Hall, 2013.

Shreiner, D.; Woo M.; Neider, J.; Davis, T.
OpenGL Programming Guide.
Addison Wesley, 4º edição, 2013.