

Análisis Probabilístico de Fallos y Modelos Estocásticos

Informe Técnico - Probabilidad y Estadística

Camilo Aranda

Ejercicio 1

Datos:

$P(A_i)$ = Probabilidad de averia del disipador i

R_i = no hay averia en el disipador i

$P(A_1) = 0,6 \rightarrow R_1 = 0,4$

$P(A_2) = 0,2 \rightarrow R_2 = 0,8$

$P(A_3) = 0,3 \rightarrow R_3 = 0,7$

$P(A_4) = 0,3 \rightarrow R_4 = 0,7$

a) Conexión en serie

Para que el generador se desconecte en serie, basta con que falle al menos uno de los componentes. Dado que son independientes, es más sencillo calcular la probabilidad de que todo funcione y restárselo a 1:

$$P(\text{Fallo}) = 1 - P(\text{Todos funcionen})$$

$$P(\text{Fallo}) = 1 - (R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4)$$

$$P(\text{Fallo}) = 1 - (0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,7)$$

$$P(\text{Fallo}) = 1 - 0,1568$$

$$P(\text{Fallo}) = \mathbf{0,8432}$$

Finalmente la probabilidad de que el generador este completamente desconectado si todos los disipadores estan en serie es: 0,8432

b) Conexión en paralelo

Para que el generador se desconecte en paralelo, es necesario que fallen ambas ramas en paralelo, para que esto suceda es necesario que falle solo 1 de los disipadores que estan en serie en cada rama.

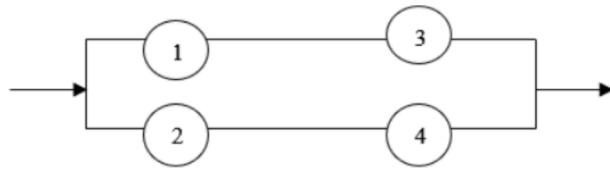


Figure 1: Esquema de conexión de los disipadores

Rama Superior (A: 1 y 3):

$$P(F_A) = 1 - (R_1 \cdot R_3)$$

$$P(F_A) = 1 - (0,4 \cdot 0,7) = 1 - 0,28 = \mathbf{0,72}$$

Rama Inferior (B: 2 y 4):

$$P(F_B) = 1 - (R_2 \cdot R_4)$$

$$P(F_B) = 1 - (0,8 \cdot 0,7) = 1 - 0,56 = \mathbf{0,44}$$

Desconexión Total (Paralelo de A y B):

$$P(\text{Fallo}) = P(F_A) \cdot P(F_B)$$

$$P(\text{Fallo}) = 0,72 \cdot 0,44$$

$$P(\text{Fallo}) = \mathbf{0,3168}$$

Finalmente la probabilidad de que el generador este completamente desconectado en este caso (disipadores en serie y paralelo) es: **0,3168**

Ejercicio 2

Datos:

- M : El alumno es menor de 30 años $\rightarrow P(M) = 2/3$.
- H : El alumno es hombre $\rightarrow P(H) = 3/5$.
- W : El alumno es mujer (H^c) $\rightarrow P(W) = 1 - 3/5 = 2/5$.
- A : Ser mujer o tener al menos 30 años $\rightarrow P(W \cup M^c) = 5/8$.

Se busca obtener la probabilidad de que el delegado elegido sea mujer y menor de 30 años, lo cual se puede escribir como: $P(W \cap M)$.

Sabemos que el evento contrario a que el delegado sea mujer o mayor es que este sea Hombre y Menor, entonces:

$$\begin{aligned} P(W \cup M^c) &= 5/8 \\ P((W \cup M^c)^c) &= 1 - 5/8 \\ P(H \cap M) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el delegado sea hombre y menor de 30 años es $3/8$.

El evento M (ser menor de 30) se compone de dos grupos disjuntos: los hombres menores y las mujeres menores, esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$P(M) = P(H \cap M) + P(W \cap M)$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación llegamos a la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{3}{8} + P(W \cap M) \\ P(W \cap M) &= \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \\ P(W \cap M) &= \frac{16}{24} - \frac{9}{24} \\ P(W \cap M) &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Finalmente la probabilidad de que el delegado sea mujer y menor de 30 años es igual a $7/24$ del total de alumnos.

Ejercicio 3

En ambos juegos los jugadores A , B y C juegan en ese orden, repitiendo los lanzamientos hasta que alguno obtiene el resultado ganador. Cada lanzamiento es independiente y la probabilidad de éxito en un turno es p .

Para que el jugador C gane en una ronda, debe ocurrir lo siguiente:

- El jugador A falla.
- El jugador B falla.
- El jugador C tiene éxito.

La probabilidad de que esto ocurra en una ronda es

$$(1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p.$$

Sin embargo, el juego puede durar varias rondas. La probabilidad de que nadie gane en una ronda es $(1 - p)^3$. Por lo tanto, la probabilidad de que gane C es la suma de la serie:

$$P_C = (1 - p)^2 p [1 + (1 - p)^3 + (1 - p)^6 + \dots].$$

Como $|(1 - p)^3| < 1$, esta serie converge y se obtiene

$$P_C = \frac{(1 - p)^2 p}{1 - (1 - p)^3}.$$

Juego I: Lanzar dos monedas.

El jugador gana si obtiene dos sellos (SS). Como cada moneda tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de caer sello y los lanzamientos son independientes, se tiene

$$p = P(\text{SS}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Sustituyendo en la expresión general,

$$P_C = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{\frac{9}{64}}{1 - \frac{27}{64}} = \frac{9}{37} \approx 0.243.$$

Juego II: Lanzar dos dados y obtener suma 7.

Al lanzar dos dados, los resultados posibles están formados por 36 resultados equiprobables. La suma es 7 ocurre en los siguientes casos:

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).$$

Por lo tanto, existen 6 resultados favorables de un total de 36 posibles, y se tiene

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Luego,

$$P_C = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{\frac{25}{216}}{1 - \frac{125}{216}} = \frac{25}{91} \approx 0.275.$$

Entonces, dado que $0.275 > 0.243$, si yo fuera el jugador C preferiría jugar el **Juego II**, ya que ofrece una mayor probabilidad de ganar.

Ejercicio 4

Datos:

$$P(F_1) = 0.10$$

$$P(F_2) = 0.15$$

$$P(F_3) = 0.20$$

$$P(F_2 | F_1) = 0.5$$

La falla de la componente 3 es independiente de las otras.

Para calcular los escenarios donde participan 1 y 2, necesitamos su probabilidad conjunta:

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \cdot P(F_2 | F_1) = 0.10 \cdot 0.5 = \mathbf{0.05}$$

El sistema avisa peligro solamente cuando fallan solamente dos componentes, son tres los casos posibles:

Caso 1: Fallan 1 y 2 (Funciona 3)

$$P(C_1) = P(F_1 \cap F_2) \cdot P(F_3^c)$$

$$P(C_1) = 0.05 \cdot (1 - 0.20)$$

$$P(C_1) = 0.05 \cdot 0.80 = \mathbf{0.04}$$

Caso 2: Fallan 1 y 3 (Funciona 2)

$$P(C_2) = [P(F_1) - P(F_1 \cap F_2)] \cdot P(F_3)$$

$$P(C_2) = [0.10 - 0.05] \cdot 0.20$$

$$P(C_2) = 0.05 \cdot 0.20 = \mathbf{0.01}$$

Caso 3: Fallan 2 y 3 (Funciona 1)

$$P(C_3) = [P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)] \cdot P(F_3)$$

$$P(C_3) = [0.15 - 0.05] \cdot 0.20$$

$$P(C_3) = 0.10 \cdot 0.20 = \mathbf{0.02}$$

Para saber la probabilidad de que el sistema avise peligro sumamos las probabilidades de los tres casos, los cuales son disjuntos:

$$P(\text{Peligro}) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$$

$$P(\text{Peligro}) = 0.04 + 0.01 + 0.02 = \mathbf{0.07}$$

Finalmente la probabilidad de que el sistema avise peligro es igual a 0,07

Ejercicio 5

Sea X la suma de los dedos mostrados. La ganancia del jugador depende de la paridad de X : si X es par, el jugador gana X unidades monetarias; si X es impar, pierde X unidades monetarias. Denotamos por G la ganancia del jugador.

- a) Se supone que el oponente muestra 1 o 2 dedos con igual probabilidad.

Si el jugador muestra 1 dedo:

- Si el oponente muestra 1 dedo, entonces $X = 2$ y la ganancia es $+2$.
- Si el oponente muestra 2 dedos, entonces $X = 3$ y la ganancia es -3 .

Por lo tanto la esperanza es,

$$E(G_1) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-3) = -\frac{1}{2}.$$

Si el jugador muestra 2 dedos:

- Si el oponente muestra 1 dedo, entonces $X = 3$ y la ganancia es -3 .
- Si el oponente muestra 2 dedos, entonces $X = 4$ y la ganancia es $+4$.

Así,

$$E(G_2) = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(4) = \frac{1}{2}.$$

Entonces, conviene mostrar 2 dedos, ya que la esperanza es positiva. No conviene mostrar 1 dedo ni no participar.

b) El oponente dice que mostrará 1 dedo, pero miente con probabilidad 0.25.

Como dice la verdad con probabilidad 0.75, se tiene

$$P(\text{muestra 1}) = 0.75, \quad P(\text{muestra 2}) = 0.25.$$

Si el jugador muestra 1 dedo:

$$E(G_1) = 0.75(2) + 0.25(-3) = 0.75.$$

Si el jugador muestra 2 dedos:

$$E(G_2) = 0.75(-3) + 0.25(4) = -1.25.$$

Entonces, con esta nueva información conviene jugar y mostrar **1 dedo**, ya que es la única opción con esperanza positiva.

Ejercicio 6

La variable aleatoria T representa la duración de un componente y tiene función de distribución acumulada

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - ae^{-\lambda t} - (1-a)e^{-\mu t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

donde $0 < a \leq 1$, $\lambda > 0$ y $\mu > 0$.

a) Función de densidad

La función de densidad se consigue derivando la función de distribución:

$$f_T(t) = F'_T(t).$$

Por lo tanto,

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ a\lambda e^{-\lambda t} + (1-a)\mu e^{-\mu t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

b) Función generadora de momentos

La función generadora de momentos de una variable exponencial con parámetro α es

$$M(s) = \frac{\alpha}{\alpha - s}, \quad s < \alpha.$$

Dado que T es una mezcla de dos distribuciones exponenciales, su función generadora de momentos es

$$M_T(s) = a \frac{\lambda}{\lambda - s} + (1-a) \frac{\mu}{\mu - s}, \quad s < \min(\lambda, \mu).$$

c) Esperanza y varianza

Usando las propiedades de la mezcla,

$$E(T) = a \frac{1}{\lambda} + (1-a) \frac{1}{\mu},$$

$$E(T^2) = a \frac{2}{\lambda^2} + (1-a) \frac{2}{\mu^2}.$$

Entonces al final se obtiene,

$$\text{Var}(T) = E(T^2) - [E(T)]^2.$$