Modelado Estocástico y Distribuciones de Probabilidad

Informe Técnico: Análisis de Variables Aleatorias Continuas y Discretas

Camilo Aranda

5 de febrero de 2026

Resumen: Este documento presenta la resolución analítica de problemas complejos de probabilidad y control de calidad. Se abordan modelos basados en la **Distribución Normal** para inferencia de intervalos de confianza, la **Distribución Exponencial** para análisis de fiabilidad de componentes y el uso del **Teorema de la Probabilidad Total** en procesos estocásticos mixtos. El análisis incluye estandarización de variables (Z-scores) y cálculo de esperanzas condicionales.

Caso de Estudio 1: Control de Calidad en Capacitores

Sea X la resistencia (en megohm) de un capacitor, modelada como una variable aleatoria normal con media $\mu = 800$ y desviación estándar $\sigma = 200$:

$$X \sim \mathcal{N}(800,\, 200^2).$$

Para los cálculos se utiliza la variable estandarizada $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

a) Proporción de cumplimiento de especificaciones

Se requiere determinar la probabilidad de que la resistencia esté en el rango $[900, 1000]$:

$$\begin{aligned} P(900 \leq X \leq 1000) &= P\left(\frac{900-800}{200} \leq Z \leq \frac{1000-800}{200}\right) \\ &= P(0{,}5 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5). \end{aligned}$$

Consultando la función de distribución acumulada (CDF):

$$\Phi(1) = 0{,}841, \qquad \Phi(0{,}5) = 0{,}691$$

$$P(900 \leq X \leq 1000) = 0{,}841 - 0{,}691 = 0{,}150.$$

Resultado: La proporción de capacitores que cumple con la especificación técnica es del **15.0 %**.

b) Intervalo de confianza del 95 %

Buscamos el intervalo simétrico centrado en la media que contenga el 95 % de la población. Esto corresponde a:

$$\mu \pm z_{0,975}\sigma, \quad \text{donde } z_{0,975} \approx 1{,}96.$$

$$800 \pm 1{,}96(200) = 800 \pm 392 \Rightarrow [408,\ 1192].$$

Resultado: El 95 % de los capacitores tiene una resistencia entre 408 y 1192 megohm.

c) Probabilidad en muestreo secuencial (Distribución Binomial Negativa)

Sea N el número de capacitores revisados. Se busca la probabilidad de revisar $n = 5$ para encontrar $k = 2$ éxitos (cumplimiento de norma), sabiendo que la probabilidad de éxito es $p = 0{,}150$.

Esto implica: 1 éxito en los primeros 4 intentos y éxito en el 5º intento.

$$P(N = 5) = \binom{4}{1} p^2 (1-p)^3.$$

$$P(N = 5) = 4(0{,}150)^2(0{,}850)^3 \approx 0{,}055.$$

Resultado: La probabilidad es aproximadamente **5.5 %**.

Caso de Estudio 2: Métricas de Retención en Marketing

Sea X el porcentaje de retención de un comercial, modelado como $X \sim \mathcal{N}(70,\, 10^2)$.

a) Probabilidad de éxito comercial

Criterio de éxito: $X > 80\,\%$.

$$P(X > 80) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}841 = 0{,}159.$$

Conclusión: Solo el **15.9 %** de los comerciales alcanza el estatus de éxito.

b) Estimación poblacional (Esperanza)

Para una población de $N = 2500$ niños, calculamos la proporción esperada en el rango $[60, 80]$:

$$P(60 \leq X \leq 80) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}682.$$

$$\text{Esperanza} = 2500 \cdot 0{,}682 = 1705.$$

Conclusión: Se espera que 1705 niños presenten una retención media.

c) Umbral de baja atención (Percentil 2.5)

Buscamos el valor l tal que $P(X \leq l) = 0{,}025$. El z-score asociado es $-1{,}96$.

$$l = \mu + z\sigma = 70 + (-1{,}96)(10) = 50{,}4.$$

Conclusión: Cualquier retención bajo **50.4 %** se clasifica como déficit de atención.

Caso de Estudio 3: Fiabilidad en Semiconductores

Sea X el espesor de una película fotoprotectora. Dado que el intervalo $[8{,}6, 13{,}4]$ contiene al 95,44 % de los datos (lo que corresponde a $\mu \pm 2\sigma$), deducimos los parámetros:

a) Inferencia de Parámetros

$$\begin{cases} \mu - 2\sigma = 8{,}6 \\ \mu + 2\sigma = 13{,}4 \end{cases} \implies 2\mu = 22 \implies \mu = 11{,}0, \quad 4\sigma = 4{,}8 \implies \sigma = 1{,}2.$$

Varianza: $\sigma^2 = 1{,}44$.

b) Análisis Geométrico de Fallos

Probabilidad de espesor óptimo ($9 \leq X \leq 13$):

$$p = P\left(\frac{9-11}{1{,}2} \leq Z \leq \frac{13-11}{1{,}2}\right) = P(-1{,}67 \leq Z \leq 1{,}67) \approx 0{,}905.$$

Modelamos el número de revisiones N hasta el primer éxito como una Distribución Geométrica. Buscamos $P(N \leq 3)$:

$$P(N \leq 3) = 1 - (1-p)^3 = 1 - (0{,}095)^3 \approx 0{,}999.$$

Conclusión: Es casi seguro (99.9 %) que se encontrará un semiconductor óptimo en los primeros 3 intentos.

Caso de Estudio 4: Fiabilidad Conjunta (Hardware)

Sistema con dos variables independientes:

- $X \sim \text{Exp}(1/6)$: Tiempo de vida (años).
- $Y \sim \mathcal{N}(2{,}8, 0{,}2^2)$: Velocidad (GHz).

a) Probabilidad de Defecto Total

Un componente falla si $X < 0{,}5$ o $Y < 2{,}4$.

$$P(\text{Falla}) = 1 - P(X \geq 0{,}5)P(Y \geq 2{,}4).$$

$$P(X \geq 0{,}5) = e^{-0{,}5/6} \approx 0{,}920.$$

$$P(Y \geq 2{,}4) = P(Z \geq -2) \approx 0{,}977.$$

$$P(\text{Falla}) = 1 - (0{,}920 \cdot 0{,}977) \approx 0{,}101.$$

Riesgo: Existe un **10.1 %** de probabilidad de fallo en el componente.

b) Diferencia de Rendimiento (Combinación Lineal de Normales)

Sean Y_1, Y_2 independientes. Definimos $D = Y_1 - Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.

$$\sigma_D = \sqrt{0{,}04 + 0{,}04} \approx 0{,}283.$$

$$P(D > 0{,}5) = P(Z > 1{,}768) \approx 0{,}039.$$

Caso de Estudio 5: Resistencia de Materiales (Probabilidad Condicional)

Se analizan dos variables independientes en hormigón:

- X (Compresión) $\sim \mathcal{N}(33, 5{,}016^2)$.
- Y (Tracción) $\sim \mathcal{N}(2{,}6, 0{,}468^2)$.

a) Probabilidad Condicional

Se busca $P(X < 34{,}12 \mid X > 30{,}5)$. Aplicando la definición de Bayes:

$$P(X < 34{,}12 \mid X > 30{,}5) = \frac{P(30{,}5 < X < 34{,}12)}{P(X > 30{,}5)}.$$

Estandarizando los límites a valores Z:

$$P(-0{,}498 < Z < 0{,}223) = \Phi(0{,}223) - \Phi(-0{,}498) \approx 0{,}279.$$

El denominador (Probabilidad total del condicional):

$$P(Z > -0{,}498) \approx 0{,}691.$$

$$\text{Resultado} = \frac{0{,}279}{0{,}691} \approx 0{,}404.$$

Conclusión: Existe un **40.4 %** de probabilidad bajo la condición dada.

b) Seguridad Conjunta (Independencia)

Condición de seguridad óptima: $A = \{24{,}7 < X < 41{,}3\}$ y $B = \{Y > 2{,}85\}$. Al ser independientes:

$$P(\text{Óptima}) = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A) \approx 0{,}902, \qquad P(B) \approx 0{,}297.$$

$$P(\text{Óptima}) = 0{,}902 \cdot 0{,}297 \approx 0{,}268.$$

Conclusión: La probabilidad de seguridad óptima es del **26.8 %**.

Caso de Estudio 6: Proceso Estocástico Mixto (Dado + Moneda)

Experimento en dos etapas: 1. Lanzar un dado ($D \in \{1.,6\}$). 2. Lanzar una moneda D veces. Sea X el número de caras.

a) Función de Masa de Probabilidad (Teorema de Probabilidad Total)

La distribución marginal de X es una mezcla de Binomiales:

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{6} P(X = k \mid D = n)P(D = n).$$

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{n=k}^{6} \binom{n}{k} (0{,}5)^n.$$

b) Esperanza Condicional Iterada

Por la ley de la esperanza total:

$$E[X] = E[E[X|D]] = E[D/2] = \frac{E[D]}{2} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75.$$

Análisis de Cola: Probabilidad de superar la esperanza ($P(X \geq 2)$):

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \approx 1 - (0{,}164 + 0{,}313) = 0{,}523.$$