SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Achieving Max Flow in Strongly Polynomial Time for Sparse Networks: Beyond the Edmonds-Karp Algorithm

Faculty of Information Engineering, Computer Science and Statistics
Bachelor's Degree in Computer Science

Armando Coppola
ID number 2003964

Advisor
Prof. Paul Joseph Wollan

Academic Year 2023/2024

Achieving Max Flow in Strongly Polynomial Time for Sparse Networks:Beyond the Edmonds-Karp Algorithm
Bachelor's Thesis. Sapienza University of Rome

This thesis has been typeset by LaTeX and the Sapthesis class.

Author's email: ArmandoCoppola24@gmail.com

Non so manco se è tanto o poco
Ma questa cosa mi fa felice
E se faccio quello che faccio
Non devo dire grazie a nessuno
Soprattutto se faccio quello che amo
Non devo dire grazie a nessuno
Se non a me stesso
Per cui grazie Giò, grazie

Contents

Introduction **1**

1 Preliminary notions **2**

1.1 Network e flow 2

1.2 Decomposition e transferring del flow 5

1.3 Distance based 7

1.4 Max flow 8

2 Dinic's Algorithm **9**

3 Goldberg-Rao Algorithm **11**

3.1 Idea 11

3.2 The Δ parameter 11

3.3 Stop condition 12

3.4 Stimare il residual flow 12

3.5 Binary length function 13

3.5.1 How to zero lengths 13

3.5.2 How to increase distance 15

3.6 Costo computazionale 18

4 Orlin Algorithm **21**

4.1 Idea 21

4.2 Fase di incremento 22

4.3 Δ-abundant e grafo di abbondanza 22

4.4 Contractions of abundant graph 24

4.5 Compattare il network 25

4.6 Da sc-compact a Γ-compact 26

4.7 Max flow in $O(nm)$ time 31

Conclusions **37**

Acknowledgements **38**

Introduction

Ciò che segue è una relazione che ha lo scopo di analizzare la soluzione proposta nell'algoritmo di Orlin per il calcolo del **max flow in un Network**. Dato che per comprendere a pieno il suo funzionamento è necessario conoscere anche alcuni algoritmi precedenti, anche questi vengono spiegati nella relazione. Gli algoritmi sono presentati in ordine cronologico a partire dall'algoritmo di Dinics, continuando con Goldberg-Rao e giungendo alla soluzione più recente e efficace di Orlin. Prima di iniziare con le soluzioni però, è presente un capitolo che spiega alcune nozioni preliminari sulla teoria dei grafi necessarie per comprendere il funzionamento delle soluzioni.

Chapter 1

Preliminary notions

1.1 Network e flow

Before starting, we need to establish some essential preliminary notions. In particular, we need to define what a network is and what it is composed of.

Definition 1.1 (Network)**.** A network is a structure composed of a graph G such that $G = (N, E)$ such that:

- N = the set of nodes
- E = the set of edges such that $(i, j) \in E \implies i, j \in N$
- $n = |N|$
- $m = |E|$

and a function $u : E \to \mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\}$ which denotes the capacity of each edge.

$$u(i, j) = \text{capacity of the edge } (i, j)$$

we will denote the capacity $u(i, j)$ *below with the abbreviation* u_{ij}

In each network exists two special nodes, s *the source* and t *the sink*. The network aims to send a certain flow from the source to the sink.

Definition 1.2 (U_{min}, U_{max})**.** In each Network we define:

- U_{min}: the smallest non zero capacity associated to an edge:

$$U_{min} = u_{ij} | (i, j) \in E \ \wedge \ u_{ij} > 0 \ \wedge \ \nexists (k, l) \in E : 0 < u_{kl} < u_{ij}$$

- U_{max}: the largest finite capacity

$$U_{max} = u_{ij} | (i, j) \in E \wedge u_{ij} \neq +\infty \wedge$$
$$\nexists (k, l) \in E : u_{ij} < u_{jl} < +\infty$$

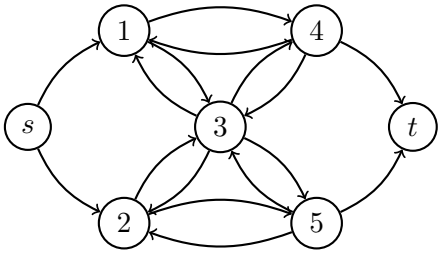


Figure 1.1. A classic example of a network

Moreover, we divide the edge into two categories:
External Arcs := $\{(x,y)|(x,y) \in E \wedge (x = s \vee y = t)\}$
Internal Arcs := $\{(x,y)|(x,y) \in E \wedge x \neq s \wedge y \neq t\}$ i.e. $E \setminus External\ edges$

For our simplicity, we assume that for each internal edge $(i,j) \in E$ exists the edge $(j,i) \in E$.
The same thing is true for any internal node for which there always exists an edge that link it with s and t, even if it has zero capacity.

$$\forall i \in N \implies \{(s,i),(i,t)\} \subseteq E$$

Observation 1.1. *Node s has no incoming arcs just as node t has no outgoing arcs.*

Definition 1.3 (Flow)**.** We define the flow as the function $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ which satisfies the **flow conservation role**:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in N \setminus \{s,t\}$$

We call a flow *feasible* if it respects the **capacity constraint**:

$$\forall (i,j) \in E,\ f_{ij} \leq u_{ij}$$

The value of a flow is given by the sum of all the outgoing edges of s (or by the sum of all the incoming edges of t; it is the same)

Definition 1.4 (Residual capacity)**.** The residual capacity of an edge (i,j) means the amount of flow we can route in this edge before we saturate it.

$$r_{ij} = u_{ij} + f_{ji} - f_{ij}$$

When we talk about residual capacity according to different flows we could also use the notation:

$$u_f(i,j)$$

that means the residual capacity of the edge (i,j) which has routed the flow f.

We will often talk later about the residual function or the array of residual capacities, in fact we are referring to any function or structure that associates each arc with its residual capacity.

Definition 1.5 (Residual Graph)**.** Given a network G and a flow f, we can define a residual graph as follows

$$G[r] := (N(\mathcal{N}), \{(i,j)|(i,j) \in E(\mathcal{N}) \wedge r_{ij} > 0\})$$

The notation $G[r]$ refers to a graph designed from the residual capacity function r. We will refer to the residual graph also using the notation G_f that underlines the representation of the original network under the effect of the routed flow f

Definition 1.6 (s-t Cut)**.** Given a network G we define an *s-t* cut on G as a partition into two subsets (T, S) such that:

1. $s \in S$
2. $t \in T$
3. $S \cap T = \varnothing$
4. $S \cup T = N$

The *cutting capacity* is defined as:

$$u(S,T) = \sum_{i \in S \wedge j \in T} u_{ij}$$

the *residual of a cut* is defined as:

$$r(S,T) = \sum_{i \in S \wedge j \in T} r_{ij}$$

Lemma 1.1 (Max residual flow min residual cut)**.** *Given a residual graph $G[r]$ and a cut (S,T) then $r(S,T)$ represents the upper bound of the flow from $s \to t$. In particular, the maximum increase in flow with respect to r is the smallest residual capacity of an s-t cut.*

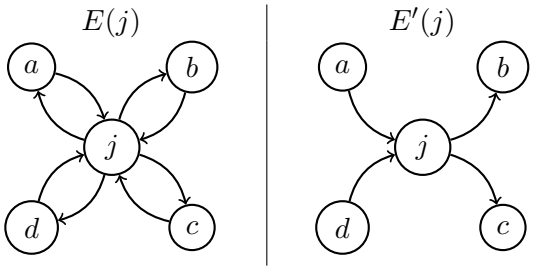
Proof. Omitted.

The lemma states that the problem of finding the maximum flow on a network is **dual** to that of finding a minimum capacity cut on the same network since this will represent the bottleneck that acts as an upper bound to the increase in flow.

Definition 1.7. (Anti-symmetric subset) Let $E(j)$ be de set of edges incident to a node j, we define the *Anti-symmetric* subset of j as:

$$E'(j) := \{(x,y)|(x,y) \in E(j) \wedge (x,y) \in E'(j) \iff (y,x) \notin E'(j)\}$$

Example:



Lemma 1.2 (Anti-symmetriy lemma)**.** *Given $E'(j)$ an anti-symmetric subset of $E(j)$ and a flow f on G with $r = r[f]$ then is true that:*

$$\sum_{(i,j)\in E'(j)} r_{ij} - \sum_{(j,i)\in E'(j)} r_{ji} = \sum_{(i,j)\in E'(j)} u_{ij} - \sum_{(j,i)\in E'(j)} u_{ji}$$

Proof.

$$\sum_{(i,j)\in E'(j)} r_{ij} - \sum_{(j,i)\in E'(j)} r_{ji} - \sum_{(i,j)\in E'(j)} u_{ij} + \sum_{(j,i)\in E'(j)} u_{ji} = 0 \implies$$

$$\sum_{(i,j)\in E'(j)} (u_{ij} - r_{ij}) + \sum_{(j,i)\in E'(j)} (u_{ji} - r_{ji}) = 0$$

since $r_{ij} = u_{ij} - f_{ji} + f_{ij} \implies u_{ij} - r_{ij} = f_{ji} - f_{ij}$

$$\sum_{(i,j)\in E'(j)} (f_{ji} - f_{ij}) + \sum_{(j,i)\in E'(j)} (f_{ij} - f_{ji}) = \sum_{(i,j)\in E(j)} (f_{ji} - f_{ij}) = 0$$

so we deduce the conservation flow constraint. □ □

1.2 Decomposition e transferring del flow

Definition 1.8 (Flow decompositon)**.** Given f an s-t flow on a Network $\mathcal{N}$, we define a *flow-decomposition*, as a collection of s-t directed path

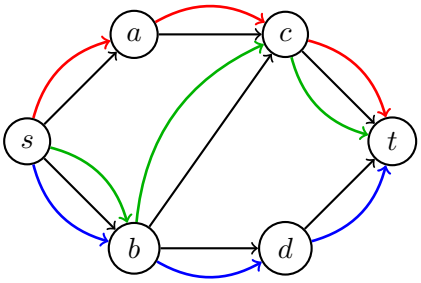
$$P_1, ..., P_k \quad where\ k < m$$

To each path P_i corresponds a value $\phi_i \in \mathbb{N}^+ | \phi_i > 0$ that is the value of the path flow.

In a flow decomposition the following rules must be respected:

1. $\forall P_i, P_j,\ |P_i \cap P_j| \neq |P_i| \wedge |P_i \cap P_j| \neq |P_i|$ So each path in the decomposition must differ for at least one edge
2. $val(f) = \sum_{i=1}^{k} \phi_i$

An intuitive observation is that the maximum number of decompositions of any flow is m.



Example of a decomposed flow

Once we establish what decomposing a flow means, we can talk about capacity transfer

Definition 1.9 (Tranfer)**.** Given an edge $(i, j) \in E$ and a *path* P $i \to j$ with $|P| \geq 2$, **to transfer** δ unity of capacity from P to (i, j) means subtracting δ unity of residual capacity from each edge in P and incrementing the (i, j) residual capacity of the same δ unity

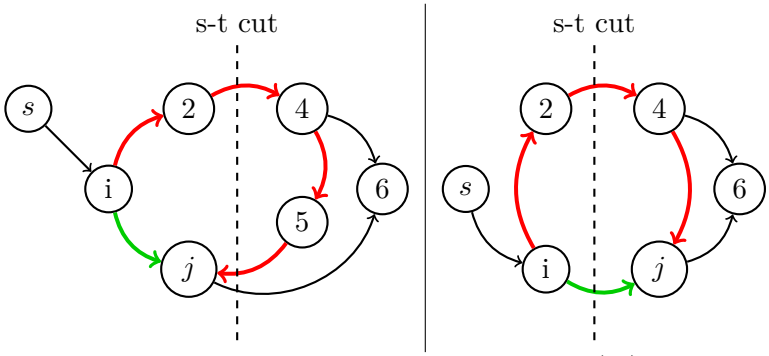
Lemma 1.3 (Capacity tranfer lemma)**.** *Let P be path in G from node i to node j and let (S, T) be an s-t cut. If we transfer delta capacity from the path P to de edge (i, j) and r and r' are respectively the residual capacity of the network before and after the transfer then is true that:*

$$r'(S, T) \leq r(S, T)$$

Proof. The proof is trivial if $i, j \in S \vee i, j \in T$ since $u'(P) \leq u(P) \implies u'(S, T) \leq u(S, T)$.
Otherwise if $i \in S \wedge j \in T$, if we consider $(l, k) \in P$ such that $l \in S \wedge k \in T$ we estimate

$$u'(S, T) - u(S, T) \leq (u'_{kl} + u'_{ij}) - (u_{kl} + u_{ij}) = -\delta + \delta = 0$$

□



in red the path P, in green the edge (i,j)

At the end of this consideration, we can deduce that transferring capacity from a path to an edge doesn't increase the maximum routable flow in a network

1.3 Distance based

We usually think about graphs composed of nodes linked by edges and measure the distance between two nodes i and j as the sum of the edges on the shortest path that brings from i to j. That is true just because we don't specify the length of an edge then we assume that it is one. Instead, we can specify the length of each edge and still divide the nodes by labels, i.e. by the distance from a specific node. But in doing this we have to pay attention to some rules that allow us to achieve our goal. First of all we need to establish what a valid distance labeling is:

Definition 1.10 (Valid distance labeling)**.** Let N be a Network, f a feasible flow on N and l a function that takes as input an edge in G and returns its *length*.
The **distance function** $d : N(G) \to \mathbb{N}$ is said **valid** with respect to the residual graph $G[r]$ if it satisfies the following properties

1. $d(t) = 0$
2. $d(i) \leq d(j) + l((i, j))$

Observation 1.2 (Valid distance label property)**.** *A valid distance label, d, preserves the following properties:*

1. *$d(i)$ represents the lower bound of the length of the shortest path from $i \to t$ in the residual graph*
2. *$d(s) \geq n \implies \nexists\ p\ path \in G[r] \mid p = s \to t$*

Another point of view of the second property that a valid distance label has to respect ($d(i) \leq d(j) + l((i, j))$) is that:

$$\neg(d(v) > d(w) + l(v, w))$$

This means that can not exist a node i that is more distant from t than any node j adjacent to i, plus the length of the edge (i, j).

Definition 1.11 (Admissible graph)**.** Let G be a Network with a feasible flow f, a valid distance label $d : N(G_f) \to \mathbb{N}$ and a length function l. A *residual arc* is called **Admissible arc** if it satisfies:

$$d(v) = d(w) + l(v, w) \quad \forall (v, w) \in E(G(f))$$

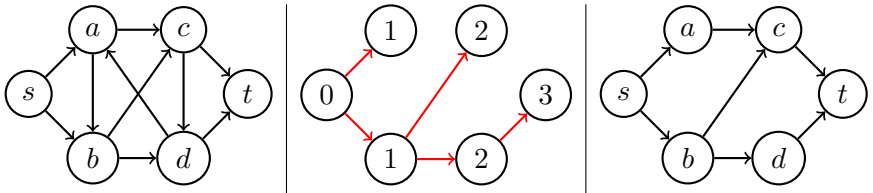
i.e.

$$d(v) > d(w) \vee (d(v) = d(w) \wedge l(v, w) = 0)$$

The **Admissible graph** is the graph formed by all admissible arcs. We will represent the admissible graph with the notation $A(f, l, d)$ or just $A(f, d)$ if the length function is trivial.

Observation 1.3. *Let G_f be a residual graph, let B_s be an arborescence given by a BFS on the graph G_f from node s and let A l'admissible graph of G_f then*

$$E(B_s) \subsetneq E(A)$$



grafo originale | arborescenza | Admissible graph

Given the distance label definition, we can recall the notions about s-t cut to define the **canonical cut**

Definition 1.12 (Canonical cut)**.** Given a network $\mathcal{N}$ and a distance label d on $\mathcal{N}$, a canonical cut is defined by a partition made as follows

$$(S_k, T_k) = (S_k := \{v \in V(\mathcal{N}) | d(v) \geq k\},\ T_k := V(\mathcal{N}) \setminus S_k)$$

1.4 Max flow

To find the maximum flow in the network, we can use the **Edmonds-Karp algorithm**.

This algorithm finds the shortest path from the source to the sink P and augments the flow on the edges of the path by the value x s.t.

$$x = \min_{\forall (i,j) \in P} r_{ij}$$

In this way at each increment at least one edge is deleted from the residual graph and in at most $O(nm)$ increments the algorithm terminates. Since we need $O(n+m)$ time to use the BFS to find the shortest s-t path and other $O(n)$ time tu augments flow in this path, Edmonds-Karp algorithm take $O(nm^2)$ time to find a maximum flow in any network.

Up to here, all notations that we need to recognize a network and its properties were given. The Edmonds-Karp algorithm represents the first step in a series of improvements that will lead us to find the max flow in $O(nm)$. From here on, each algorithm will bring a modification of the previous one while preserving the original intuition. The last algorithm shows how to reach the desired cost even for sparse graphs.

Chapter 2

Dinic's Algorithm

The algorithm builds upon the Edmonds-Karp algorithm, but instead of increasing the flow on just one shortest path $P_{s\to t}$, it increases the flow on all $s \to t$ paths of the same length as the shortest one. This significantly reduces the number of BFS executions required. To simplify the process, the BFS returns a distance label function d, which is used to compute the Admissible graph, in which all paths from s to t have the same length $= d(s)$. It is within this graph that the flow is calculated.

Since on each path $P_{s\to t} \in A(f, d)$, a flow of value δ is routed

$$\delta = \min_{(i,j)\in A(f,d)} r(i, j)$$

all $P_{s\to t} \in A(f, d)$ will have at least one saturated edge at the end of the increment, and thus, by the end of the increment, there will no longer be a path from s to t. Such a flow is defined as a **blocking flow**.

Definition 2.1 (Blocking flow)**.** A **blocking flow** refers to a flow in a network that saturates at least one edge on every possible path from s to t.

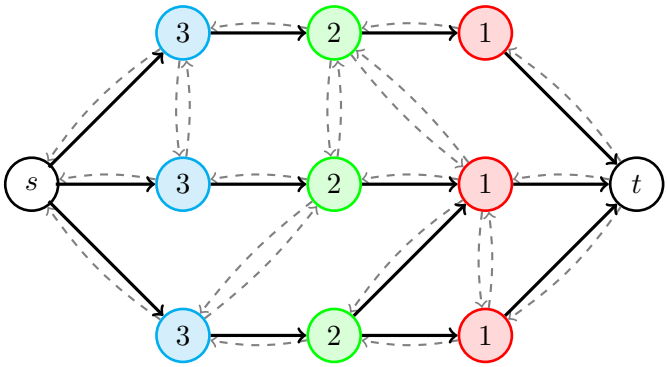
Observation 2.1. *Max flow $\implies$ blocking flow The max flow is a blocking flow, but the reverse implication is not true.*

We can now define an algorithm, but first, some useful notes are necessary for its understanding:

- The algorithm takes as input the network and the function that assigns a capacity to each edge.
- A function is created that associates a flow with each edge.
- For brevity and readability, the residual graph is denoted as G_f, which represents the residual graph where the flow f is routed, updated to the moment it is referenced.
- The BFS takes the residual graph as input and thus does not consider saturated edges.

Algoritmh 1 *Dinics-Algorithm(G, c)*

$f_{ij} = 0 \forall (i,j) \in E(G)$
$d = BFS(G_f)$
$A = A(d, f)$
while $d(s) \neq \infty$ **do**
    $\delta = \min_{\forall (i,j) \in P} c(i,j)$
    $f_{ij} = f_{ij} + \delta \ \forall (i,j) \in P$
    $P = findPath(A, s, t)$
    if $P = \varnothing$ **then**
        $d = BFS(G_f)$
        $A = A(d, f)$
    end if
end while
return f



Here we have an example of an admissible graph extracted from a network. The nodes are divided by distance labels from t. Note that all edges have a reverse; a dashed edge means that it is not admissible. It is also important to remember that an edge can have zero capacity even if it is present in the representation (obviously, since it is not admissible, it is represented as dashed).

So, since you need $O(m+n)$ time to perform a BFS and another $O(nm)$ time to find all the paths from s to t, the time required to find a blocking flow in each phase is $O(nm)$. Since every time we find a blocking flow, the distance from s increases by at least one and can be at most n, the maximum number of blocking flows found in the algorithm is $O(n)$. Based on these two observations, we can conclude that Dinic's algorithm reduces the time complexity of the max flow problem from the $O(nm^2)$ required by the Edmonds-Karp algorithm to $O(n^2m)$.

Altri link utili

1. Lecture from MIT
2. Wikipedia

Chapter 3

Goldberg-Rao Algorithm

After understanding how Dinic's algorithm works, we can move to the next step and focus on the algorithm published by Andrew V. Goldberg and Satish Rao in 1998.

By optimizing the Dinic's Algorithm, the Goldberg-Rao algorithm achieves a **computational cost** of

$$\tilde{O}(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} \cdot m)$$

on a network with integer capacities, which, when considering logarithmic factors, becomes $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} m \log n \log nU)$.

Note: From here on, we will abbreviate the expression $\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\}$ using Λ.

3.1 Idea

At the core of the optimization is the idea of **contracting** the network according to certain specific parameters. The speed-up lies in computing the flow in a contracted graph, which is more efficient than computing it in the original one. The algorithm is based on Valid distance labeling and introduces a new **binary length function** : $\bar{l}((v, w)) : E \to \{0, 1\}$.

The new length function assigns a value of zero to all edges that meet certain capacity requirements (which we will describe in more detail later), such edges are called "zero length".

By setting the length of the edges connecting two or more nodes to zero, we can consider them as a single node. Thus, by contracting the components connected by edges of length 0, it is possible to significantly reduce the number of flow increments and therefore the computational cost of the algorithm.

3.2 The Δ parameter

The issue with contracting the graph is that when we send flow from the source to the sink, we must ensure that this flow respects the capacity constraints of all

the edges, including those that were contracted. To ensure that the flow calculated on the contracted graph is valid for the original graph as well, a parameter Δ is used, which serves two purposes. The first function is as a **lower bound** on the capacity of zero-length edges. In fact, edges with residual capacity greater than Δ are first selected, and the length of these edges is set to 0. Subsequently, all components connected by zero-length edges are contracted. Finally, a blocking flow (exactly as in Dinic's algorithm) is calculated in the contracted graph. At this stage, the parameter Δ serves its second function, which is as an **upper bound for the blocking flow**. In fact, the computation of the blocking flow stops either when such a flow is found, or just before the flow value exceeds Δ. This second condition ensures that the flow remains feasible even for the original network.

By increasing the flow by at most Δ, we ensure that the capacity constraints are respected, but we can no longer guarantee that the flow is blocking. Therefore, we must choose a value for Δ that is both small enough to contract the graph as much as possible, but also adequately selected to keep the number of flow increments as low as possible, thus ensuring the desired computational cost.

3.3 Stop condition

To terminate its execution, the algorithm estimates the difference between the maximum achievable flow (which from now on will be called F) and the flow it has computed. When this difference becomes less than 1, the algorithm terminates. Since the capacities of the network are all integers, this ensures that the maximum possible flow has been reached. An initial useful value for F is $F = n \cdot U_{max}$, and later, the residual capacity of the canonical cut will be used (further details will be provided later).

3.4 Stimare il residual flow

We already know that the residual capacity of each cut $r(S, T)$ represents an upper bound on the max flow (Max residual flow min residual cut). To estimate the residual flow quickly and efficiently, we can analyze the Canonical cut.

Lemma 3.1. *min $r(S_k, T_k)$ in $O(m)$ time The canonical cut with the minimum capacity can be found in $O(m)$ time.*

Proof. Exploiting the fact that each edge has a length of at most 1, and therefore can cross at most one canonical cut, we can define the following subroutine.

Algoritmh 2 *canCutCapacity(G_f, d, l)*

1: **for** $k \leftarrow 0$ *to* $d(s)$ **do** $r(S_k, T_k) = 0$
2: **end for**
3: **for** $(u, v) \in E(G_f)$ **do**
4: **if** $d(v) > d(w)$ **then** $r(S_{d(v)}, T_{d(v)}) += r(v, w)$
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** argmin $r(S_k, T_k)$

The correctness and computational cost of this routine are fairly straightforward. □

To manage the computational cost, we need to ensure that the value of F decreases quickly enough without overburdening the algorithm. First, we can group all the iterations of the algorithm into **phases** and update the value of F at the minimum canonical cut only between the end of one phase and the start of a new one. If we update the value of F only when $\min r(S_k, T_k) \leq F/2$, the algorithm will terminate after at most $\log nU_{max}$ phases.

3.5 Binary length function

There are two other issues that arise from contracting the graph and modifying the length function:

1. Choosing a Δ that is too small would make the flow increase too slowly, while choosing it too large would not contract the graph enough to justify the management costs.

2. In Dinic's algorithm, the blocking flow always guaranteed an increase in the distance from s to t, but with zero-length edges, this is no longer guaranteed.

In this section, we show the choices that were made to address these two issues. While the effectiveness of the solution to the second problem is promptly demonstrated, the effectiveness of the choice of the Δ parameter will only become clear in the section where the various computational costs are proven.

3.5.1 How to zero lengths

As previously mentioned, we need an upper bound Δ to respect the capacity constraints. At the same time, to meet the declared computational cost, we need the blocking flow increments to be at most Λ. Thus, we can initialize:

$$\Delta = \lceil F/\Lambda \rceil$$

The criterion for assigning zero length to an edge is as follows:

Definition 3.1 (Length function)**.** Let r be the residual function of any residual graph G_f. We define the length function $l((u,v))$ as a function that associate to the edge (u,v) the value 1 or 0 as follow:

$$l(u.w) = \begin{cases} 0 & r_{vw} \geq 3\Delta \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

However, to achieve the desired computational cost, it is necessary to add a specification to this function.

Definition 3.2 (Special Arc)**.** Any edge (v,w) is said **special** If it meets all the following requirements:

- $2\Delta \leq r_{v,w} < 3\Delta$
- $d(v) = d(w)$
- $r_{wv} \geq 3\Delta$

By applying this definition to the length function, we can define a more complex function, which we distinguish from the first by calling it $\bar{l}$. The modified function also takes into account special edges:

$$\bar{l}(u.w) = \begin{cases} 0 & r_{vw} \geq 3\Delta \vee specialArc((v,w)) \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

Observation 3.1. *Introducing special edges does not change the distance labeling:* $d_l = d_{\bar{l}}$

Lemma 3.2 (From contract to original)**.** *Let's suppose we have contracted the original network as described so far, and routed a flow f through the contracted graph.*

The computational cost of adapting this flow through the original graph is $O(m)$.

Proof. Through the following steps, it is intuitive how the flow can be adapted:

1. Choose any vertex in each contracted component.
2. Form an in-tree and an out-tree rooted at the chosen vertices.
3. Route the positive flow from the in-tree to the root.
4. From the out-tree, redirect the incoming flow from the root to all other connected nodes.

Since the maximum flow we route is Δ and all nodes in the contracted components have a cost of at least 2Δ, we are assured that the flow respects the capacities of the network. It is evident that this method has a cost directly proportional to the number of edges in the connected components. □

3.5.2 How to increase distance

In Dinic's Algorithm, the proof that the blocking flow strictly increases the distance between s and t is quite obvious. The same cannot be said for the Goldberg-Rao case due to the presence of zero-length edges. Therefore, it is essential to prove the following theorem to ensure that the algorithm terminates.

Theorem 3.1. *Blocking flow with binary length Let $\bar{f}$ be a flow in $A(f, \bar{l}, d_l)$, let $f' = f + \bar{f}$ be the increased flow, and let l' be the length function corresponding to f'. Then:*

1. *d_l is a distance labeling with respect to l'*
2. *$d_{l'}(s) \geq d_l(s)$*
3. *if $\bar{f}$ is blocking $\implies$ $d_{l'}(s) > d_l(s)$*

Proof. Let's proceed point by point

1. d_l is a distance lebeling with respect to l' By the definition of distance labeling, $d_l(v) \leq d_l(w) + \bar{l}(v, w)$ (remembering that $d_l = d_{\bar{l}}$), we therefore need to prove that $d_l(v) \leq d_l(w) + l'(v, w)$.
This is trivially true if $d_l(v) \leq d_l(w)$.
If $d_l(v) > d_l(w)$ i.e. $d_{\bar{l}}(v) > d_{\bar{l}}(w)$ then (w, v) is not admissible with respect to $\bar{l}$.
Since $l'(v, w) \geq \bar{l}(v, w)$, the statement follows.

2. $d_{l'}(s) \geq d_l(s)$ Let $L := \{l_0, l_1, ..., l_n\}$ be the ordered set of all length functions calculated between the iterations of the algorithm. Then, for any $0 \leq i \leq j \leq n$, we have $d_{l_i}(s) \leq d_{l_j}(s)$.

We distinguish between two iterations as follows:

1. In iteration i: Let $l(u, v) = l_i(u, v)$ be the length function and $d(x) = d_{l_i}(x)$ be the distance. Together with the flow, they define $A(f, l_i, d_{l_i})$. Let Γ be the shortest $s \to t$ path in A, where $\Gamma \subseteq A$.
2. In iteration j: Let $l'(u, v) = l_j(u, v)$ be the length function and $d'(x) = d_{l_j}(x)$ be the distance. Together with the flow, they define $A'(f, l_j, d_{l_j})$. Let Γ' be the shortest $s \to t$ path in A', where $\Gamma' \subseteq A'$.

Suppose by contradiction that there exist two iterations $0 \leq i \leq j$ such that $d(s) > d'(s)$:

$$\implies \exists \Gamma\, s \to t,\ \Gamma'\, s \to t : \sum_{(v,w)\in\Gamma} l(v, w) \geq \sum_{(v,w)\in\Gamma'} l'(v, w)$$

In other words, as the iterations progress, s and t have gotten closer.

We immediately exclude the case where $\Gamma = \Gamma'$ since

$$\forall (v,w) \in A \cap A',\ l(v,w) \leq l'(v,w) \implies l(\Gamma) \leq l'(\Gamma')$$

Note: $l(\Gamma) = \sum_{(v,w)\in\Gamma} l(v,w)$.

Now consider Γ and Γ'. Let w be the last node in Γ for which $d(w) > d'(w)$, and let x be the next node:

$$w \in \Gamma : d(w) > d'(w) \wedge \exists x = succ_\Gamma(w) : d(x) \leq d'(x)$$

w and x are always well defined because we assume $d(s) > d'(s)$ and $d(t) = d'(t) = 0$ by definition.

Thus, there exists an arc (w,y) in Γ' with $y \neq x$ such that $d'(y) < d'(x)$. $x \neq y$, because if they were the same node, then:

$$d'(w) = d'(x) + l'(w,x) \geq d(w)$$

which contradicts the hypothesis.

To summarize, we know that:

1. $d(w) > d'(w) \iff d(x) + l(w,x) > d'(y) + l'(w,y)$.While we don't know the exact distance $d(y)$, we know that:

   $$d'(y) = \sum_{(a,b)\in y-t\subseteq\Gamma'} l'(a,b) \geq \sum_{(a,b)\in y-t\subseteq\Gamma'} l(a,b)$$

   Therefore, the path in iteration j is greater than or equal to the path in iteration i.

2. $d(y) + l(w,y) \leq d'(y) + l'(w,y) < d(x) + l(w,x)$.

However, we know that $d(w) = d(x) + l(w,x)$, which is **absurd** because it is not the minimal distance from $w \to t$, as it is greater than $d(y) + l(w,y)$.

We know for certain that the path $w - y \to t$ exists in A because (unless there is a shorter one) it represents the minimal distance from $w \to t$.

From this contradiction, the only conclusions are that either the path through y was not reachable in iteration i, making it impossible to reach it later, or if a shorter $s \to t$ path exists in iteration j than in iteration i, we made an error in considering the path in iteration i.

3. Se $\bar{f}$ è bloccante allora $d_l(s) < d_{l'}(s)$ To show that the blocking flow increases the distance of node s, we define the following notation:

$$c(v,w) := d_l(w) - d_l(v) + l'(v,w)$$

which represents the change in length of an edge connecting two adjacent nodes.

We can assert that:

$$\forall (v,w) \in E,\ c(v,w) \geq 0$$

since $l'(v,w) \geq l(v,w)$, which implies:

$$d_l(w) - d_l(v) < 0 \iff l(v,w) = 1 \implies l'(v,w) = 1$$

Now, consider any path Γ in $G_{f'}$, the length of the path is equal to:

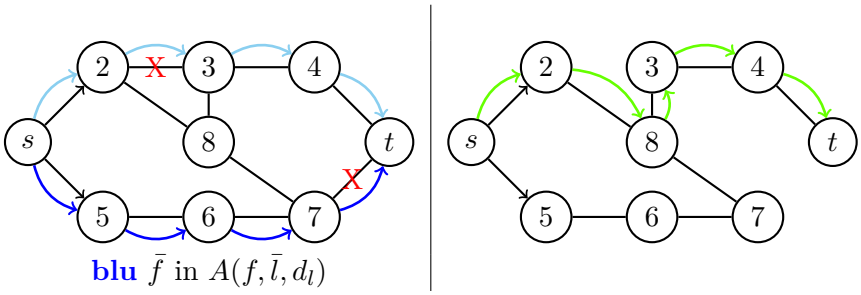
$$l'(\Gamma) = d_l(s) + c(\Gamma)$$

Therefore, to show that the path is longer, we need to show that:

$$\forall \text{ shortest } s-t \text{ path } \Gamma \in G_{f'} \implies \exists (v,w) \in \Gamma \text{ where } c(v,w) > 0$$

We now have a tool to demonstrate that the blocking flow increases the distance of s.

Table 3.1. graphic example to better visualize what was declared



blu $\bar{f}$ in $A(f, \bar{l}, d_l)$

Since $\bar{f}$ is blocking in $A(f, \bar{l}, d_l)$, Γ must contain an edge (v,w) that is not present in $A(f, \bar{l}, d_l)$.

Furthermore, we can state that $d_l(v) \leq d_l(w)$, either because $(v,w) \in G_f$, but then if $d_l(v) > d_l(w)$, we would have $(v,w) \in A(f, \bar{l}, d_l)$, or because $(v,w) \notin G_f$, but it appears in $G_{f'}$, which is only possible if the flow is incremented in the opposite direction, causing the residual edge to appear. Therefore, $(w,v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$, which implies that $d_l(v) \leq d_l(w)$.

Now, suppose for contradiction that $c(v,w) = 0$, so $d_l(v) = d_l(w)$ and $l'(v,w) = 0$. The fact that (v,w) is not in $A(f, \bar{l}, d_l)$ implies that either (v,w) is not in G_f, but then we have already shown that the opposite edge $(w,v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$, or that $(v,w) \in G_f$ but does not meet the distance labeling requirements to belong to the Admissible graph $A(f, \bar{l}, d_l)$. Since $d_l(v) = d_l(w)$, then $l(v,w) = 1$. We note that $1 = l(v,w) > l'(v,w) = 0$, which implies that we have incremented the flow on the opposite edge (w,v). Thus, in any case, the edge $(w,v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$.

As shown earlier, since $d_l(v) = d_l(w)$,

$$(w,v) \in A(f, \bar{l}, d_l) \iff l(w,v) = 0$$

We conclude that:

- During the flow increments, we routed a flow (of at most Δ) through the edge (w,v)

- $u_f(w,v) \geq 3\Delta$ because $l(w,v) = 0$
- After this increment, we have $u_{f'}(v,w) \geq 3\Delta$ because $l'(v,w) = 0$
- Thus $u_f(v,w) \geq 2\Delta$
- But then the edge (v,w) was a *special edge* even before the increment, since $d_l(v) = d_l(w) \wedge u_f(w,v) \geq 3\Delta \wedge u_f(v,w) \geq 2\Delta$

We therefore conclude that:

$$d_l(v) = d_l(w) \implies d_{\bar{l}}(v) = d_{\bar{l}}(w) \wedge \bar{l}(v,w) = 0 \implies (v,w) \in A(f, \bar{l}, d_l)$$

which is a contradiction.

□

3.6 Costo computazionale

Abbiamo già mostrato che per trovare il max flow nel grafo Prima di addentrarci nel costo di una fase, rivediamo la struttura dell'algoritmo descritto fino ad ora.

Algoritmh 3 *Goldberg-RaoAlgorithm(G, c)*

$n = |N(G)|$
$F = U \cdot n$
$\Delta = F/\Lambda$
for $(i,j) \in E(G)$ **do** $f_{ij} = 0$
end for
while $F \geq 1$ **do**
    $l = update\_length(n, \Delta)$ ▷ return a length function w.r.t. Δ
    $d_l = BFS(G_f, l)$ ▷ return a distance labeling w.r.t. l
    $G^c = contract(G_f, l)$
    $A = A(G^c, d_l, l)$ ▷ return the admissible graph
    $f' = find\_blocking\_or\_Delta\_flow(A)$ ▷ Dinic's style
    $f_{ad} = fit(f')$ ▷ the procedure to adapt the flow to the original graph
    $f = f + f_{ad}$
    $c = r(canCutCapacity(G_f, d, l))$
    if then$c \leq F/2$:
        $F = c$
        $\Delta = F/\Lambda$
    end if
end while
return f

```
def Goldberg_Rao_Algorithm(Network network)
    F = U*n
    Delta = F/Lambda
```

```
f = 0
while F >= 1:
    l = update_length(n, Delta)
    d_l = distanceLabel(network, l)
    Gc = collapse(network)
    Ag = admissible_graph(g)
    f' = find_blocking_or_Delta_flow(Ag)
    f = f + f'
    network.fitFlow(f)
    if min_canonical_cut(network).residual() <= F/2:
        F = min_canonical_cut(network).residual()
        Delta = F/Lambda

return f
```

Remark:

Il costo dichiarato in partenza è in:

$$O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} \cdot m \log n \log mU_{max})$$

utilizzando strutture dati più avanzate, si può raggiungere il costo di:

$$O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} \cdot m \log \frac{n^2}{m} \log U_{max})$$

Abbiamo già notato che il numero di **fasi** (ovvero il numero di decrementi) di F è nell'ordine di $\log(F)$ ovvero $log(mU_{max})$. Il costo per calcolare il min canonical cut e per adattare il flow al network sono entrambi in $O(m)$. Resta però da analizzare il costo di ogni fase, cioè quanto in fretta il min canonical cut si dimezza.

Lemma 3.3. *La capacità minima di un canonical cut* $(\bar{S}, \bar{T})$ *soddisfa*

$$u_f(\bar{S}, \bar{T}) \leq \frac{mM}{d_l(s)}$$

dove M rappresenta l'arco di lunghezza uno con più capacità

Proof. Risulta evidente che il il modo migliore in cui si può massimizzare la capacita del taglio canonico minimo è supponendo che tutti gli archi abbiano la capacità dell'arco di capacità maggiore e poi dividere equamente gli archi tra i vari tagli.

□

Da questa prima stima segue il corollario

Corollary 3.1. *Durante ogni fase ci sono al massimo* $O(\Lambda)$ *blocking flow incrementi.*

Proof. Supponiamo che $\Lambda = m^{1/2}$ dato che abbiamo dimostrato che ogni blocking flow incrementa $d(s)$ di almeno uno, siamo sicuri che dopo $6\lceil\Lambda\rceil$ incrementi $d_l(s) \geq 6m^{1/2}$. Dunque possiamo prendere la stima nel lemma e affermare che:

$$u_f(\bar{S}, \bar{T}) \leq \frac{mM}{d_l(s)} \leq \frac{3m}{d_l(s)}\Delta \leq \frac{3m}{6m^{1/2}}\frac{F}{m^{1/2}} = \frac{F}{2}$$

Dunque dopo $\lceil\Lambda\rceil$ la fase termina.
Per $\Lambda = n^{2/3}$ la dimostrazione è analoga e porta alla stessa conclusione. In conclusione, il costo di ogni fase è in ordine di $O(\Lambda)$ □

L'ultimo collo di bottiglia è rappresentato dal costo di trovare un blocking flow o di valore massimo Δ (computazionalmente equivalenti): il che richiederebbe un costo di:

- $O(mn)$ in un approccio naive;
- $O(m \log n)$ utilizzando i dynamic trees;
- $O(m \log(n^2/m))$ utilizzando i size-bounded dynamic trees;

Unendo il costo di:

× trovare un Blocking flow

× le iterazioni in ogni fase

× il numero di fasi

× gli ulteriori costi in $O(m)$

Si ottiene il tempo dichiarato.

Chapter 4

Orlin Algorithm

L'algoritmo di Goldberg-Rao raggiunge un costo detto *weakly polynomial*, risolvendo il problema in $\log mU$ fasi ognuna da $O(\Lambda m \log(n^2/m))$ dove $\Lambda = \min\{n^{2/3}, m^{1/2}\}$. Se si vuole risolvere il problema del max flow con un costo di tempo che sia *strongly polynomial* esiste l'algoritmo di King Rao e Tarjan. Tuttavia, tale algoritmo raggiunge un costo di $O(nm)$ solo a patto che $m = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$. Se il numero di archi non è sufficiente, il suo costo è di $O(nm \log m/(n \log n)n)$.

Con il seguente algoritmo James B. Orlin propone una soluzione che sfruttando l'algoritmo di Goldberg-Rao, riesce a risolvere il problema del max flow in $O(nm)$ quando $m = O(n^{1+\varepsilon})$ rendendo così possibile risolvere il problema in tempo strettamente polinomiale per ogni valore di n e m e senza essere limitati da capacità di qualche arco.

4.1 Idea

L'idea nasce da varie osservazioni: Il Goldberg-Rao lavora per **fasi di incremento** che prendono un flusso Δ-ottimale e lo rendono $\Delta/2$-ottimale. In oltre si nota che $\log_{8m} mU \leq 1 + \log U$ infatti d'ora in poi verranno considerate $\log U$ fasi di incremento. Se consideriamo $\Lambda = O(m^{1/2})$ possiamo notare che

$$\log U < m^{7/16} \implies \tilde{O}(m^{3/2}m^{7/16}) = \tilde{O}(m^{31/16})$$

(la notazione $\tilde{O}$ ignora i fattori logaritmici).
Approfondendo il calcoli si osserva

$$\tilde{O}(m^{31/16}) = O(m \cdot m^{15/16} \cdot log(n^2/m)) = O(m \cdot n^{(16/15)^{15/16}} \cdot log(n^2/m))$$

dato che stiamo cercando un algoritmo per quando $m = O(n^{1+\varepsilon})$, se $1 + \varepsilon < 16/15$ e $\log U < m^{7/16}$ possiamo ottenere una soluzione ottimale ad un costo polinomiale $O(nm)$ già utilizzando solo il Goldberg-Rao.

Ad ogni modo, ciò è vero solo se il numero di archi è sufficientemente più grande rispetto all'arco di capacità massima. Da qui l'idea di contrarre e compattare il network per fare in modo di calcolare il flusso massimo nelle condizioni ottimali .

L'algoritmo presenta due bottleneck:

1. creazione della rappresentazione compattata (più precisamente, mantenimento della chiusura trannsitiva)
2. passaggio dal flow compattato al flow esteso.

4.2 Fase di incremento

Il max-flow flow problem viene risolto attraverso una serie di *fasi di incremento*, vediamo quindi quali sono gli input e gli output di ogni fase:

- **input**
  1. un *Flow* f
  2. un *Residual Graph* G_f, rappresentabile anche come $r : E \to \mathbb{R}$ la funzione che associa a ogni arco la sua capacità residua
  3. un s-t cut (S, T)

  Possiamo rappresentare l'input con la tripla (r, S, T)
- **output**
  1. un *Flow* f'
  2. un *Residual Graph* G'_f
  3. un s-t cut (S', T') tale che $r'(S', T') \leq \frac{r(S,T)}{8m}$

Questa fase prende il nome di Δ-*improvement phase* dove $\Delta = r(S, T)$. Affianco al parametro Δ verrà posto un parametro Γ , dove $\Gamma \leq \Delta$ che verrà utilizzato per creare il Γ-compact network.

A seconda delle condizioni, il Δimprovement verrà eseguito o sul network G originale oppure sul Γ-*compact network* G^c che presenteremo più avanti.

4.3 Δ-abundant e grafo di abbondanza

In questa sezione viene presentato il concetto di **Abbondanza**.

Definition 4.1. Δ-abundant arc Sia $\Delta = r(S, T)$ un arco (i, j) si dice Δ-abbondante se $r_{ij} \geq 2\Delta$

Lemma 4.1 (label = ab4ever)**.** *Sia (r, S, T) l'input di una Δ-improvement phase. Se l'arco (i, j) è abbondate prima dell'incremento allora rimmarrà abbondante per tutti gli incrementi successivi.*

Proof. Dato che $\Delta' \leq \frac{\Delta}{8m}$ e ricordando che $r_{ij} \geq 2\Delta$ si deduce che allora

$$r'_{ij} \geq r_{ij} - \Delta \geq \Delta \geq 2\Delta'$$

□ □

Definition 4.2. Grafo di Abbondanza Dato un network G si definisce il suo **grafo di abbastanza** G^{ab} come:

$$G^{ab} := (N(G), \{(i,j) | (i,j) \in E(G) \wedge r_{ij} \geq 2\Delta\})$$

Observation 4.1. *Per il lemma* **??** *proseguendo con le iterazioni il grafo di abbondanza può solo acquisire nuovi archi, mai perderli.*

Il grafo di abbondanza ha due scopi:

1. Tutti i cicli formati da archi abbondanti vengono *contratti* in un solo nodo
2. Tutti i nodi che adiacenti solo ad archi abbondanti (o di capacità troppo piccola), vengono *compattati*

L'algoritmo mantiene in oltre la chiusura transitiva di tutti i nodi collegati tra loro da un **abundant path**, ovvero un cammino composto solo da archi abbondanti. Se esiste un abundant path tra il nodi i e j, ciò si indica con $i \implies j$, e l'informazione viene mantenuta in una matrice $\mathbf{M}_{n \times n}$, dove nella posizione $\mathbf{M}_{i,j}$ si trova il nodo che precede j nel percorso che parte da i. Se durante le iterazioni si creano più percorsi viene comunque mantenuto il primo trovato.

La chiusura transitiva può essere mantenuta in tempo $O(nm)$ utilizzando l'algoritmo di Italiano. In questo modo è sempre possibile (vedremo di seguito che contrarre il grafo non lo impedisce e non ne altera il costo) ricostruire un percorso abbondante P in $O(|P|)$

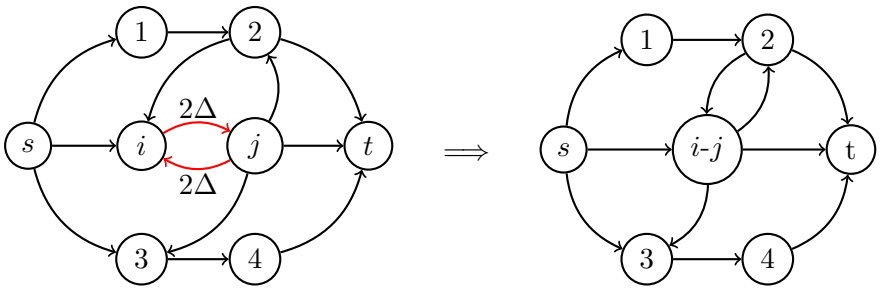
4.4 Contractions of abundant graph

Vediamo ora come sfruttare l'abundant graph per contrarre il grafo su cui calcolare il max-flow e rendere l'algoritmo più efficiente.

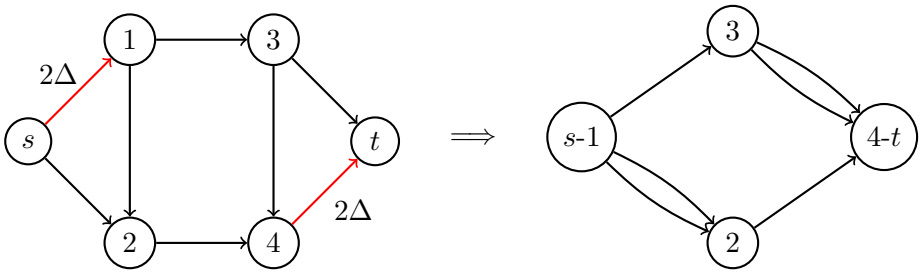
Analizziamo tre contrazioni di esempio differenti:

Supponiamo che esistano due nodi i e j tali che $r_{ij} \geq 2\Delta$ e $r_{ji} \geq 2\Delta$

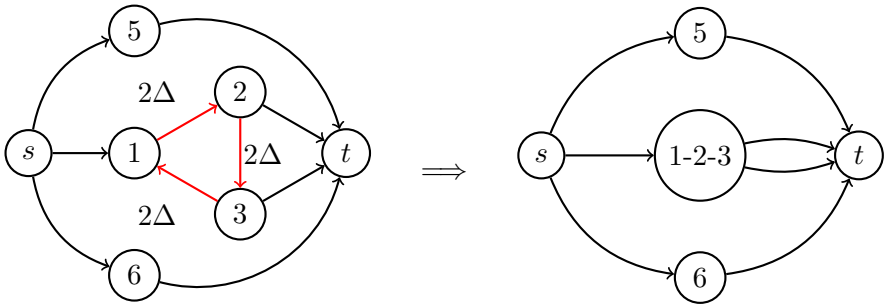
Possiamo quindi contrarre i due nodi in uno unico che preservi gli archi di entrambi



Dato che non esistono archi opposti agli archi esterni, è possibile contrarre archi esterni alla sola condizione che essi siano abbondanti:



E dunque tutti i cicli abbondanti



Observation 4.2. *Violazioni della conservazione del flusso È possibile che quando il grafo contratto verrà riespanso venga violata la legge di conservazione del flusso.*

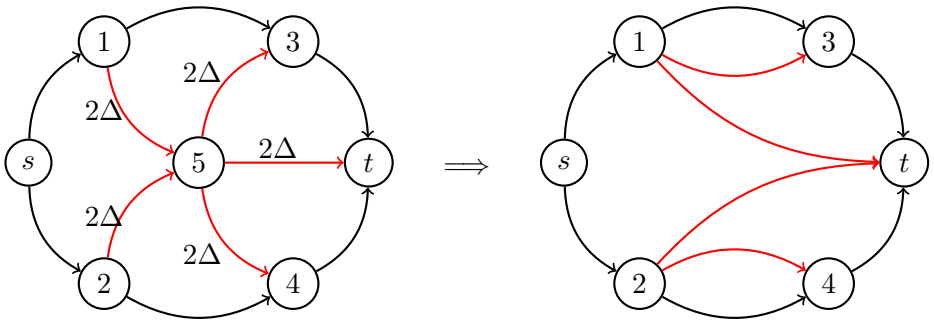
Tuttavia si tratta di una violazione minore di 2Δ *unità dunque, come mostrato da Goldberg e Rao la contrazione, l'espansione e l'adattamento per la conservazione del flusso possono essere eseguiti in tempo* $O(m)$.

4.5 Compattare il network

Oltre alla contrazione del grafo è necessario eseguire un'altra trasformazione, la *compattazione*. Per ottenere un grafo compatto mostriamo prima come ottenere una versione intermedia ovvero lo **strongly compact network**.

È importante comprendere la differenza tra contrarre e compattare:

Se nella contrazione viene creato un nodo unico che rappresenta il ciclo abbondate e vengono preservati gli archi originali non appartenenti al ciclo, quando si compatta un grafo viene eliminato un nodo che ha tutti gli archi adiacenti abbondanti e gli archi eliminanti di conseguenza vengono sostituiti da pseudo archi.



Il seguente algoritmo ha tempo $O(m + |E^{sc}|)$ in quanto si possono costruire gli pseudo archi in tempo $O(1)$ dato che viene dinamicamente preservata la chiusura transitiva.

Strongly compact network
Definiamo lo **Strongly compact** come $G^{sc} = (N^{sc}, E^{sc})$ originato dal network G:

1. Contrarre il grafo di tutti gli abundant cycles e degli archi esterni abbondanti. Sia (r, S, T) l'input dopo la contrazione.

2. Sia $N^{sc} \subseteq N(G)$ l'insieme dei nodi che sono adiacenti ad almeno un arco non abbondante.
   Ci riferiremo a $N(G) \setminus N^{sc}$ come l'insieme dei nodi *strongly compactible*.

3. Definiamo gli archi come $E^{sc} = E^1 \cup E^2$ dove:
   $E^1 = \{(i,j) : i \in N^{sc} \wedge j \in N^{sc} \wedge (i,j) \in E(G)\}$
   $E^2 = \{(i,j) : i \in N^{sc} \wedge j \in N^{sc} \wedge i \implies j\}$
   Dunque abbiamo archi originali in E^1 e pseudo archi che derivano dagli abundant path.

Theorem 4.1 (label = fmaxfsc)**.** *$f_{max} = f^{sc}_{max}$ Sia f_{max} il flusso massimo nel network G e sia f^{sc}_{max} il flusso massimo in G^{sc} allora*

$$f_{max} = f^{sc}_{max}$$

Proof. Abbiamo già mostrato che qualsiasi flow in G^{sc} può essere reindirizzato in G. Se invece prendiamo un flow in G, è possibile instradarlo in G^{sc} usando la **flow decomposition** per ottenere da f un insieme di path diversi almeno per un arco,

$$f := \{P^0, P^1, ..., P^k\}$$

Possiamo suddividere ancora ogni $P^a \in f$ in subpath

$$P^a_{i\to j} | i \in N^{sc} \wedge j \in N^{sc} \wedge \forall q \in P^a_{i\to j}, q \neq i \wedge q \neq j \implies q \in N \setminus N^{sc}$$

A questo punto sostituiamo ogni $P^a_{i\to j}$ in G non interamente contenuto in G^{sc} con lo pseudo arco corrispettivo (i, j). □ □

4.6 Da sc-compact a Γ-compact

Il grafo sc-compact non è abbastanza compattato per raggiungere il costo desiderato. Per compattarlo ulteriormente dovremmo utilizzare un parametro Γper scegliere quali nodi compattare e da quali archi trasferire capacità residua. La scelta del parametro Γ verrà mostrata in seguito. Prima di proseguire è importante distinguere diversi tipo di archi.

Definition 4.3. Classificazioni di capacità Un arco (i, j) rispetto a Γ ha:

1. **small capacity** se $u_{ij} + u_{ji} < \Gamma/(64m^3)$
2. **medium capacity** se $\Gamma/(64m^3) \leq u_{ij} + u_{ji} \wedge$ $r_{ij} < 2\Delta \wedge r_{ji} < 2\Delta$
3. **abundant capacity** se $r_{ij} \geq 2\Delta$
4. **antiabundant capacity** se $(j, i) \in E^{ab} \vee$ (i, j) è un arco esterno non abbondante.

Dove E^{ab} e E^{-ab} rappresentano rispettivamente l'insieme degli archi abbondanti e anti abbondanti all'inizio dell'improvment phase.

NOTA: dato che abbiamo contratto i cicli abbondanti se $(i, j) \in E^{ab} \implies (j, i) \notin E^{ab}$

Un altro strumento necessario per decidere quali nodi compattare è la funzione *potenziale*

Definition 4.4. Potential function Dato un nodo $j \in N$ una funzione di capacità residua r e un sottoinsieme di archi adiacenti a j $\tilde{E}$ possiamo definire la funzione potenziale come:

$$\Phi(j, r, \tilde{E}) = \sum_{(i,j)\in\tilde{E}} r_{ij} - \sum_{(j,i)\in\tilde{E}} r_{ji}$$

Definition 4.5. Γ-critical e Γ-compactible

Un nodo j si dice **Γ-critical** se è adiacente almeno ad un arco Γ-medio oppure se $|\Phi(j, r, E^{-ab})| > \Gamma/(16m^2)$.

Se un nodo non è Γ-critical allora si dice **Γ-compactible**.

Dato un network G definiamo il Γcompact network di G come

$$G^c := (N^c, E^c)$$

Dove N^c sono tutti e soli i nodi Γ-critical mentre E^c l'insieme di archi che definiremo in seguito.

Per costruire il Δ-compact network vengono iterativamente trasferite unità di capacità residue di vari path a pseudo archi. l'idea è quella di sottrarre capacità a dei percorsi che collegano due nodi $i, j \in N$ per passarla all'arco (o pseudo arco) (i, j) e poter ulteriormente compattare il grafo. Ovviamente però questi pseudo archi sono solo parte di quelli che compongono E^c che potremmo definire come

$$E^c = E^1 \cup E^2 \cup E^3$$

$E^1 = \{(i, j)|i, j \in N^c \wedge (i, j) \in E(G)\}$ dunque gli archi originali che collegano due nodi Γ-critici
$E^2 = \{(i, j)|i, j \in N^c \wedge i \implies j\}$ ovvero gli archi abbondanti

Il seguente lemma mostra come se scelti secondo un appropriato criterio, il trasferimento di flusso non riduce la capacità di nessun (S,T) cut e dunque preserva il max flow calcolabile.

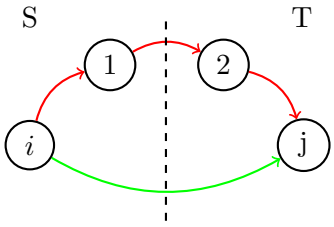
Lemma 4.2 (label = ftsafe)**.** *Flow transfer safety Sia (S, T) un s-t cut in G con $r(S, T) \leq \Delta$, e sia $A' = E^{-ab}$.*
Supponiamo che esista $P \subseteq A'$ un path da $i \to j$ e che $(i, j) \in A'$.
Se r' è la nuova funzione di capacità residua ottenuta spostando δ unità di capacità residua da P a (i, j), allora possiamo affermare che:

1. $\forall k \in N(G),\ \Phi(k, r', A') = \Phi(k, r, A')$
2. $r'(S, T) = r(S, T)$

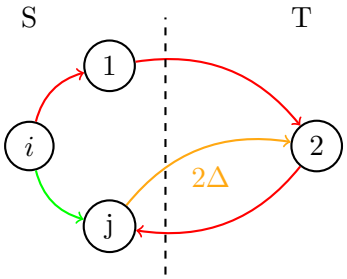
Proof. 1. Il primo punto è intuitivo in quanto per ogni nodo in P diverso da i e j sto sottraendo la stessa capacità residua sia in entrata che in uscita, mentre nei nodi i e j le sommatorie di Φ rimangono identiche.

2. Il secondo punto è banale se $|P| = 1$ dunque consideriamo $|P| \geq 2$. Definiamo $P = p_1, ..., p_k$, $p_1 \in S$ e almeno un $p_q \in T$.
Dato che abbiamo stabilito che $r(S, T) \leq \Delta$ e che $P \subseteq A'$ ci troviamo sicura-

mente in una situazione di questo tipo:



In quanto se un arco di P passasse da T a S violerebbe $r(S,T) \leq \Delta$ dato che $\forall(a,b) \in A'(\Delta),\ r_{ab} > 2\Delta \wedge r_{ba} \geq 2\Delta$, avremmo che



Una volta appurato ciò risulta evidente che il trasferimento di capacità residua non influenza la capacità residua del taglio. □

□

Notiamo dunque che:

Definition 4.6. Transferrable residual capacity Per poter trasferire δ capacità da un path P da $i \to j$ all'arco (i,j) è necessario che:

1. $|P| \geq 2$
2. $r(P) > 0$
3. $P \subseteq A'$

   In oltre quando creeremo il Γ compact network saranno essenziali anche i seguenti requisiti

4. $i, j \in N^c$
5. $P \setminus \{i,j\} \subseteq N(G) \setminus N^c$

La capacità che viene trasferita da è $\delta = r(P) = \min_{(a,b)\in P} r(a,b)$, dunque ogni volta almeno un arco anti-abbondante viene saturato. Se esiste un path $P \subseteq A'$ *da* $i \to j$ ma $(i,j) \notin E(G)$ allora viene creato come pseudo arco. Sono proprio questi Pseudo archi antiabbondanti che formeranno E^3. Analizziamo ora la procedura per trasferire tutte le capacità residue necessarie a formare E^3 e restituirne l'insieme di archi con le relative capacità residue $r^c_{ij} \forall (i,j) \in E^3$

Algoritmh 4 *Improve-approx-2(r,S,T)*

1: sia $G^c := \{n | n \in N(G) \wedge \Gamma\text{-critical}(n)\}$
2: sia $H := \{(i,j) | (i,j) \in E^{-ab} \wedge i \notin G^c \vee j \notin G^c\}$
3: $\forall (i,j) \in H,\ q_{ij} = r_{ij}$
4: **while** H $\neq \varnothing$ **do**
5: seleziona $i \in H | \nexists (j,i) \in H$:
6: P $= DFS(i,l)$ s.t $l \in N^c \vee \nexists (l,k) \in H$ ▷ usa la DFS per un path da i a l
7: sia $\delta = \min_{(a,b)\in P} q_{ab}$
8: **if** $i, l \in N^c$ **then**
9: $A^3 = A^3 \cup (i,l); r^c_{il} += \delta$
10: **end if**
11: $\forall (a,b) \in P,\ q_{ab} -= \delta$
12: $H = H - \{(a,b) | q_{ab} = 0\}$
13: **end while**

Nel passaggio 6 viene creato, utilizzando una *deep first search* un percorso dal nodo scelto i fino ad uno l che soddisfi certi requisiti. Da notare con attenzione che **non è garantito** che i e l siano Γ-critical e dunque è possibile che tale percorso (che esiste sempre) venga scartato.

Quando un percorso viene scartato si dice che δ capacità è stata **persa**. Dunque il max flow nel grafo Γ-compact è inferiore a quello ottimale, tuttavia il seguente lemma mostra che esiste un bound a questa capacità residua *persa*.

Lemma 4.3 (Bound to Γ-compact lose capacity)**.** *Sia f_{max} il max-flow calcolato in G, il network originale, e f^* quello calcolato in G^c, il network compattato creato dalla Goldberg-RaoAlgorithm(G, c). Allora si ha che:*

$$f^* \leq f_{max} \leq f^* + \Gamma/16m$$

ovvero il flusso massimo calcolato in G^c è sottostimato di al più $\Gamma/16m$.

Proof. Per essere scartato, un percorso deve iniziare o terminare in un nodo Γ-compactible ovvero un nodo j non adiacente ad un arco medio tale che:

$$|\Phi(j, r, E^{-ab})| = \left| \sum_{(i,j)\in E^{-ab}} r_{ij} - \sum_{(j,i)\in E^{-ab}} r_{ji} \right| \leq \Gamma/16m^2$$

Tuttavia un nodo non critical per essere scelto deve avere solo archi entranti o solo archi uscenti a seconda di quale estremo del path stiamo parlando. Possiamo quindi stimare che la capacità massima di un certo path P_s scartato sia $r(P_s) \leq \Gamma/16m^2$ ovvero il valore residuo massimo raggiungibile da un arco estremo a P_s. Dato quindi che possono esistere al massimo n di questi percorsi allora abbiamo che:

$$n \cdot \Gamma/16m^2 \leq m \cdot \Gamma/16m^2 = \Gamma/16m$$

Dunque la massima capacità che viene persa nella creazione di G^c è proprio $\Gamma/16m$. □

Dobbiamo ora assicurarci che un flow calcolato in G^c che chiameremo α-ottimale, sia trasferibile nel Network originale G.

Sia f' il flow calcolato in G^c e rappresentiamo con f la trasposizione di f' in G:
Se $f'_{i,j} > 0 \wedge (i,j) \in E(G) \implies f_{i,j} = f'_{i,j}$ basta riportarlo così com'è. se $f'_{i,j} > 0 \wedge i \Rightarrow j \implies$ si tratta del compattamento di un path abbondante e per ripristinare il flusso basta usare la matrice di transitività. Il caso più interessante rimane quello che si verifica quando dobbiamo trasporre il flusso da uno pseudo-arco di archi abbondanti ai path che lo hanno generato. Infatti è importante ricordare che lo la capacità dello pseudo-arco è la somma delle capacità residue dei path che sono strati trasferiti in precedenza. Tenere traccia di tutti i path trasferiti risulterebbe troppo inefficiente, tuttavia utilizzando gli alberi dinamici possiamo potenziare l'algoritmo precedentemente utilizzato per fare in modo di mantenere un record con tutte le operazioni effettuate sull'albero. In questo modo è possibile, consultando il record a ritroso, ricostruire in tempo $k \log n$ (dove k è il numero di operazioni sul link-cut tree) le capacità trasferite dalla procedura in maniera sequenziale, potendo così adattare la giusta porzione di flusso in ogni arco.

Studiamo ora l'adattamento dal punto di vista dell'(S,T)-*cut*:
Sia (S',T') un cut in $G[r]$ e supponiamo che non esistano archi abbondanti da S a T, un taglio (S^c,T^c) in G^c di dice **indotto da** (S',T') se:

$$(S^c,T^c) := (S' \cap N(G^c), T' \cap N(G^c))$$

Viceversa un taglio in G^c si dice indotto da uno in $G[r]$ se composto come segue:

$$S' := \{n | n \in S^c \vee \exists m \in S^c,\ m \implies n\}$$
$$T' = N(G) \setminus S'$$

Observation 4.3. *Osserviamo che se un (S',T') è indotto da (S^c,T^c) allora (S^c,T^c) è indotto da (S',T').*

$$(S',T') \leftarrow (S^c,T^c) \implies (S^c,T^c) \leftarrow (S',T')$$

Non è vero il contrario in quanto diversi cut su $G[r]$ possono indurre lo stesso (S^c,T^c).

Lemma 4.4. *Supponiamo che (S',T') sia un cut in $G[r]$ e che non esistano archi abbondanti da S a T. Se (S^c,T^c) è indotto da (S',T') allora*

$$r(S^c,T^c) \leq r(S',T') \leq r(S^c,T^c) + \Gamma/16m$$

Proof. Sappiamo che gli archi originali in E^1 contribuiscono in egual misura sia in (S^c,T^c) che in (S',T'), quelli abbondanti non sono presenti per ipotesi e dunque rimangono solo quelli in E^3. dividiamo path calcolati dalla *Goldberg-RaoAlgorithm(G, c)* come $P \cup Q$ dove Q sono quelli che alla fine vengono scartati. Dal lemma **??** sappiamo che trasferire la capacità non influenza la capacità del taglio. Quindi gli unici archi che possono influenzare la capacità residua restano quelli in Q. Ma sappiamo dal lemma 4.3 che:

$$\sum_{p \in Q} r(p) \leq \Gamma/16m$$

□ □

Dai precedenti lemmi possiamo quindi giungere all'asserzione del seguente teorema

Theorem 4.2. *Sia y un α-optimal flow nel Γ-compact network G^c. Sia (S^c, T^c) un taglio in G^c tale che*

$$r(S^c, T^c) \leq val(y) + \alpha$$

Se (S', T') è il taglio indotto da (S^c, T^c) in $G[r]$ e y' il rispettivo flow allora

$$val(y') = val(y)$$

e y' si dice α'-ottimale dove $\alpha' = \alpha + \Gamma/16m$.
Dunque $r(S', T') \leq v + \alpha'$

4.7 Max flow in $O(nm)$ time

Mostreremo in questa sezione come è possibile calcolare il max flow in tempo $O(nm)$ quando $m = O(n^{1.06})$. Mostreremo anche che il bottleneck di questa procedura è dovuto al mantenimento della chiusura transitiva di G^{ab}.

Algoritmh 5 *Improve-approx-2(r,S,T)*

1: $\Delta := r(S, T)$
2: $c = |N^c|$
3: **if** $c \geq m^{9/16}$ **then**
4: $\quad \Gamma = \Delta$
5: $\quad$ find a $\Gamma/(8m)$-optimal flow in $G[r]$
6: **else if** $m^{1/3} \leq c \leq m^{9/16}$ **then**
7: $\quad \Gamma = \Delta$
8: $\quad G^c :=$ Γ-compact network
9: $\quad y = \Gamma/(8m)$-optimal flow in G^c
10: $\quad y' = induced(y, G[r])$
11: $\quad update(r)$
12: **else if** $c < m^{1/3}$ **then** $\Gamma = choseGamma(c, \Delta)$
13: $\quad G^c :=$ Γ-compact network
14: $\quad y =$ optimal flow in G^c
15: $\quad y' = induced(y, G[r])$
16: $\quad update(r)$
17: **end if**

Una delle prime cose che possiamo capire osservando questo algoritmo è la complessità richiesta per la creazione del network Γ-compact che enunciamo nel seguente teorema.

Theorem 4.3 (label = tgcomp)**.** *Costrutire un compact network Supponiamo che l'algoritmo mantenga dinamicamente la chiusura transitiva del grafo di abbondanza e che il parametro Γ sia fornito in partenza, allora l'algoritmo impiega tempo $O(m^{9/8})$ a creare il grafo compatto G^c.*

proof:
Per contrarre i componenti abbondanti connessi, così come i cicli, è necessario tempo $O(m)$. Per quanto riguarda il grafo compattato:

- Gli archi in A^1 possono essere calcolati in $O(m)$;
- Gli archi in A^3 possono essere calcolati in $O(m \log m)$ utilizzando gli alberi dinamici;
- Quelli che sono più complessi da calcolare sono gli archi abbondanti di A^2 che vengono calcolati basandosi sulla chiusura transitiva che richiede costo $|N^c|^2$ per essere mantenuta.

Tuttavia l'algoritmo costruisce G^c solo se il numero di nodi Γ-critici è minore di $m^{9/16}$ dunque il costo diventa

$$O((m^{9/16})^2) = O(m^{9/8})$$

Di seguito se vogliamo dimostrare che la complessità di tutto l'algoritmo è proprio quella dichiarata in partenza abbiamo bisogno di porre dei bound tanto alle azioni che vengono compiute quanto agli oggetti che vengono analizzati. La prima cosa da dichiarare è che il numero di tutti i nodi Γ-critici analizzati durante le varie fasi è in $O(m)$

Theorem 4.4 (label = maxM)**.** *max critical node in $O(m)$ Supponiamo che ogni improvement phase soddisfi i requisiti richiesti allora i nodi Γ-critici calcolati durante le iterazioni sono in tutto $O(m)$*

proof:
per essere Γ-critico un nodo j deve essere adiacente ad un arco Γmedio oppure non avere archi adiacenti Γmedi ma avere $|\Phi(j, r, E^{-ab})| > \Gamma/(16m^2)$ ovvero essere Γ-special.

Consideriamo prima i nodi adiacenti ad un arco Γ-medio:
Claim:
Un arco può avere capacità Γ-media per al massimo 3 fasi consecutive.

proof:
Sia (i,j) un arco di Γ-media capacità allora $u_{ij} + u_{ji} \geq \Gamma/64m^3$ dato che ad ogni fase $\Delta' = \frac{\Delta}{8m}$ allora nella fase subito successiva

$$u_{ij} + u_{ji} \geq \Gamma/64m^3 \geq \Delta'/8m^2 = \Delta''/m = 8\Delta'''$$

Ottenendo dunque che dopo 3 fasi $u_ij + u_ji \geq 8\Delta$ dunque o (i, j) o (j, i) sono diventati abbondanti e l'arco non è più Γ-medio.

Per quanto riguarda gli altri archi Γ-special invece:
Claim: Sia Γil parametro di compattezza di una certa Δ-improvement phase e sia j un nodo Γ-special. Se Δ^* è il bound 4 fasi dopo Δallora esiste un nodo k tale che

$$r_{jk} \geq 2\Delta^* \wedge r_{kj} \geq 2\Delta^*$$

ovvero (j, k)(ma anche (k, j)) è *doubly-abundant*, e dunque verrà contratto. *proof:*
Per prima cosa definiamo v^* il flusso nella fase Δ^* tale che $r^* = r_{ij} - v_{ij} + v_{ji}$. Dal

lemma **??** sappiamo che ogni arco Δ-abbondante sarà anche Δ^*-abbondante e in oltre

$$r^*_{ij} > \Gamma/64m^3 \implies r^*_{ij} > 8\Delta^*$$

Supponiamo che esista un arco abbondante (j,k) con valore di $v^*_{jk} > \Gamma/64m^3$ allora per l'arco opposto (k,j) vale

$$r^*_{k,j} = r_{kj} - v^*_{kj} + r^*_{jk} > 8\Delta^*$$

Dunque anche l'opposto è Δ^*-abbondante e i nodi j e k vengono contratti.

Rimane dunque da verificare il caso in cui un nodo j sia Γ-special senza avere archi Δ-abbondanti con flow maggiore di $\Gamma/64m^3$.
Sappiamo che:

$$|\Phi(j, r, E^{-ab})| = |\hat{r}_{out}(j) - \hat{r_{in}}(j)| > \Gamma/(16m^2)$$

consideriamo il caso in cui $\hat{r}_{out}(j) - \hat{r_{in}}(j) > \Gamma/(16m^2)$(l'altro è speculare) Abbiamo che:

$$\sum_{j:(j,k)\in E^{-ab}} y^*_{jk} \leq \sum_{j:(j,k)\in E} y^*_{jk} = \sum_{j:(i,j)\in E} y^*_{ij}$$

per conservazione del flusso, in oltre

$$\sum_{j:(i,j)\in E} y^*_{ij} < \sum_{j:(i,j)\in E^{-ab}} y^*_{ij} + \sum_{j:(i,j)\in E^{ab}} y^*_{ij} + m\Gamma/64m^3$$

ma dato che abbiamo assunto che nessun arco abbondante ha flow maggiore di $\Gamma/64m^3$

$$\begin{aligned} &< \hat{r}_{in}(j) + 2m\Gamma/64m^3 \\ &< (\hat{r}_{out}(j) - \Gamma/16m^2) + \Gamma/32m^2 \\ &< \hat{r}_{out}(j) - \Gamma/32m^2 \\ &= \textstyle\sum_{j:(j,k)\in E^{-ab}} r_{jk} - \Gamma/32m^2 \end{aligned}$$

Deve esistere dunque qualche arco per cui

$$y^*_{jk} < r_{jk} - \Gamma/32m^3 \implies r^*_{jk} \geq r_{jk} - y^*_{jk} > \Gamma/32m^3 > 16\Delta^*$$

Dunque esiste qualche (j,k) arco antiabbondante nella fase Δche diventa abbondante nella fase Δ^* e dunque, dato che anche (k,j) è abbondante il ciclo viene contratto.□

Conoscendo il numero di nodi da analizzare il passo successivo sarebbe stimare il numero di **improvement phase** per calcolare il max flow. Prima però è necessario comprendere il modo in cui viene scelto il parametro Γ.

Lemma 4.5 (label = gammchose)**.** *Il parametro Γ Il parametro Γ può essere scelto in tempo $O(m + n\log n)$*

proof:

1. Per ogni nodo j calcoliamo il più grande valore Γ' per cui j è Γ'-critical (*tempo richiesto $O(m)$*)

2. Ordiniamo i nodi j per il loro valore Γ' (*tempo richiesto* $O(n \log n)$)
3. scegliamo il valore Γ tale che esistano al massimo $m^{1/3}$ nodi j con $\Gamma'(j) \geq \Gamma$ (*tempo richiesto* $O(1)$)

□

Abbiamo ora tutti gli strumenti per calcolare il numero di improvement phase:

Lemma 4.6. *Il numero di improvement phase in* $O(m^{2/3})$

proof:
Sappiamo dal teorema **??** che il numero di nodi Γ-critici analizzati è $O(m)$ e sappiamo dal lemma **??** che in ogni improvement phase almeno $m^{1/3}$ vengono analizzati.

Quando abbiamo dimostrato che il numero di nodi era $O(m)$ la dimostrazione verteva sul fatto che i nodi avessero una "scadenza" e che in massimo 3 o 4 fasi consecutive sarebbero stati contratti. Quindi tutti gli almeno $m^{1/3}$ nodi analizzati in una fase verranno consumati in $O(1)$ fasi. Di conseguenza il numero di fasi necessarie per "consumarli" tutti è proprio $O(m^{2/3})$. □

Dai seguenti lemmi possiamo giungere dunque al tempo totale richiesto per creare tutti i G^c.

Lemma 4.7. *Il tempo totale per creare tutti i compact network è* $O(nm + m^{43/24})$

Proof. Sappiamo che il parametro Γ richiede tempo $O(m + n \log n)$
Sappiamo che per creare un compact network serve tempo $O(m^{9/8})$.
Dato che il numero di fasi sono $m^{2/3}$,
mettendo tutto insieme otteniamo:

$$O(mn + m^{43/24})$$

□ □

Trovare un flusso che che sia α-ottimale significa trovare un flusso che sia inferiore a quello di capacità massima di al più α. abbiamo visto che se cerchiamo il flusso massimo sul Γ-compact network G^c e poi lo trasponiamo sul network originale G questo è già $\Gamma/16m$-ottimale.

Tuttavia durante l'algoritmo noi cerchiamo di ottenere questa approssimazione direttamente in G. Se ricordiamo però il funzionamento del Goldberg-Rao possiamo vedere che l'algoritmo termina quando la stima che fa del flusso massimo è minore di 1. Intervenendo su questa stima del flusso massimo è possibile far terminare l'algoritmo prima che si arrivi al flusso ottimale ottenendo un distacco di massimo un valore α a nostra scelta.

Ragioniamo ora sul costo T di una fase del Goldberg-Rao sapendo di eseguirlo su un grafo con C nodi e $O(C^2)$ archi.

$$\Lambda = O(C^{2/3}), \quad T = \tilde{O}(C^{2/3} \cdot C^2) = \tilde{O}(C^{8/3})$$

Possiamo ora valutare il costo della procedura Improve-approx-2

In oltre possiamo notare che se eseguiamo il Goldberg rao su un totale di O(m) nodi eseguendo un massimo di $\log U$ fasi il numero medio di nodi in ogni improvement phase è

$$C = O\left(\frac{m}{\log U}\right)$$

da qui il motivo per cui nella procedura costruiamo il grafo compatto solo se $C \leq m^{9/16}$ infatti se il Goldberg è polinomiale se $\log U \leq m^{7/16}$ allora

$$C \geq m^9/16 \implies \frac{m}{\log U} \geq m^{9/16} \implies \log U \leq \frac{m}{m^{9/16}} = m^{7/3}$$

Lemma 4.8. *Time of improve-max Il tempo per calcolare il flusso ottimale utilizzando sempre la procedura improve-approx 2 è*

$$O(m^{31/16} \log^2 m)$$

Proof. Dato che in tutto vengono calcolati $O(m)$ nodi Γ-critici, calcolo il costo della procedura sul singolo nodo invece che per il numero di fasi: Sia T il tempo necessario per trovare un α-optimal flow
Sappiamo che se $C \geq m^{9/16}$ possiamo trovare un optimal flow con $T = O(m^{3/2} \log^2 n)$ eseguendo $\log n$ fasi del goldberg rao sul grafo originale. Rapportato al numero di nodi Γ-critici otteniamo che $T/C = m^{15/16} \log^2 n$. se invece $m^{1/3} \leq C < m^{9/16}$ lavoriamo nel grafo compattato e cerchiamo il max flow eseguendo $\log n$ fasi del goldberg avendo $T = O(C^{8/3} \log n)$ dunque

$$T/C = O(m^{5/3} \log n = m^{15/16})$$

In fine se $C < m^{1/3}$ otteniamo che l'esiguo numero di archi porta il costo ad essere $T = O(C^3)$ di conseguenza $T/C = O(C^2) = O(m^{2/3})$.

Possiamo affermare che in ogni caso il costo del della procedura per ogni nodo è $O(m^{15/16} \log^2 n)$. Moltiplicando il risultato per il numero di nodi Γ-critici su tutti gli incrementi otteniamo

$$O(m \cdot m^{15/16} \log^2 n) = O(m^{31/16} \log^2 n)$$

□ □

Lemma 4.9. *Il tempo totale per trasformare tutti i flussi calcolati su G^c in flussi sul grafo residuo è*

$$O(nm + m^{5/3} \log n)$$

Proof. Sia G^c il grafo compatto determinato da $G[r]$ il grafo residuo e sia y^c il flusso in G^c mentre y è quello indotto sul grafo residuo.

Gli archi di G^c sono divisi in tre categorie $E^c = E^1 \cup E^2 \cup E^3$ rispettivamente gli archi originali, gli pseudoarchi abbondanti e gli pseudoarchi antiabbondanti.

preso un qualsiasi arco (i, j) tale che $y^c_{ij} > 0$ distinguiamo i tre casi:

1. se $(i,j) \in E^1 \implies y_{ij} = y^c_{ij}$
2. se $(i,j) \in E^2$ sappiamo che per ricostruire l'abundant path abbiamo bisogno di $O(|P|) = O(n)$, in oltre sfruttando gli alberi dinamici possiamo tenere il numero di archi con flow positivo in E^2 sotto il valore C al costo $O(m \log n)$, che ripetuto per $O(m^{2/3})$ fasi fa $O(m^{5/3} \log n)$. In questo modo, tutti gli abundant path vengono ripristinati in $O(nm)$. Per ricotruire gli abundant path ricordiamo sempre che il costo di mantenere dinamicamente la chiusura transitiva è di $O(nm)$
3. Per quanto riguarda gli archi in E^3 ancora una volta dobbiamo ricorrere agli alberi dinamici per ricostruire i percorsi anti abundant che abbiamo contratto. In particolare non è possibile tenere traccia di tutti i percorsi in maniera efficiente, tuttavia possiamo tenere un record con tutte le operazioni fatte sul grafo per poterle ripercorrere a ritroso e restaurare i vecchi path. Anche questa procedura ha costo complessivo di $O(m \log n \cdot m^{2/3})$

Concludiamo che il tempo totale per indurre il flow su G^c in $G[r]$ per tutte le $m^{2/3}$ fasi è

$$O(nm + m^{5/3 \log n})$$

□ □

Dai precedenti Lemmi possiamo dedurre il seguente teorema

Theorem 4.5. *max flow in $O(nm)$ Se il flow in ogni improvement phase è calcolato utilizzando la procedura improve-approx-2 allora il tempo per trovare il flow di valore massimo è*

$$O(nm + M^{31/16} \log^2 n)$$

se $m = 1^{1.06}$ il running time è

$$O(nm)$$

Conclusions

Acknowledgements