

Max flows in  $O(nm)$  time, or better  
Appunti per la tesi

Armando Coppola

August 30, 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Preliminary notions</b>	<b>3</b>
1.1	Network e flow . . . . .	3
1.2	Decomposition e transferring del flow . . . . .	7
1.3	Distance based . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Past Algorithm</b>	<b>11</b>
2.1	Dinic's Algorithm . . . . .	11
2.2	Goldberg-Rao . . . . .	13
2.2.1	Idea . . . . .	13
2.2.2	Il parametro $\Delta$ . . . . .	13
2.2.3	Stopping condition . . . . .	13
2.2.4	Scheletro dell'algoritmo . . . . .	14
2.2.5	Stimare il residual flow . . . . .	14
2.2.6	Binary length function . . . . .	15
2.2.7	Costo computazionale . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Prim Algorithm</b>	<b>22</b>
3.1	Idea . . . . .	22
3.2	Passaggi . . . . .	22
3.3	Fase di incremento . . . . .	23
3.4	$\Delta$ -abundant e grafo di abbondanza . . . . .	23
3.5	Contractions of abundant graph . . . . .	25
3.6	da s-compact a $\Delta$ -compact . . . . .	26
3.7	Dubbi . . . . .	27
3.8	Sostituzioni . . . . .	27

## Introduzione

Ciò che segue è una relazione che ha lo scopo di analizzare la soluzione proposta nell'algoritmo di Prim per il calcolo del **max flow in un Network**. Dato che per comprendere a pieno il suo funzionamento è necessario conoscere anche alcuni algoritmi precedenti, anche questi vengono spiegati nella relazione. Gli algoritmi sono presentati in ordine cronologico a partire dall'algoritmo di Dinics, continuando con Goldberg-Rao e giungendo alla soluzione più recente e efficace di Prim. Prima di iniziare con le soluzioni però, è presente un capitolo che spiega alcune nozioni preliminari sulla teoria dei grafi necessarie per comprendere il funzionamento delle soluzioni.

## Chapter 1

# Preliminary notions

### 1.1 Network e flow

#### Definition 1: Network

Definiamo un Network come una struttura composta da un grafo  $G = (N, E)$  tale che:

- $N$  = insieme dei nodi
- $E = \{(i, g) \wedge i, g \in N\}$  insieme degli archi
- $n = |N|$
- $m = |E|$

e composta da una funzione  $u : E \rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\}$  che denota la capacità di ogni arco.

$$u(i, j) = \text{capacità dell'arco } (i, j)$$

*indicheremo di seguito la capacità  $u(i, j)$  con l'abbreviazione  $u_{ij}$*

In ogni Network esistono due nodi speciali,  $s$  *source* e  $t$  *sink*. lo scopo di un Network è inviare flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .

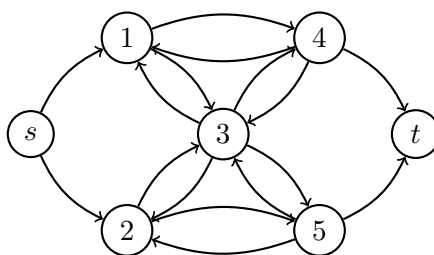


Figure 1.1: Esempio classico di un Network

**Definition 2:**  $U_{min}, U_{max}$ 

In ogni nodo definiamo come:

- $U_{min}$ : la più piccola capacità non zero associata ad un arco:

$$U_{min} = u_{ij} | (i, j) \in E \wedge u_{ij} > 0 \wedge \nexists (k, l) \in E : 0 < u_{kl} < u_{ij}$$

- $U_{max}$ : la più grande capacità finita

$$U_{max} = u_{ij} | (i, j) \in E \wedge u_{ij} \neq +\infty \wedge$$

$$\nexists (k, l) \in E : u_{ij} < u_{kl} < +\infty$$

distinguiamo gli archi del Network in:

**External Arcs** :=  $\{(x, y) | (x, y) \in E \wedge (x = s \vee y = t)\}$

**Internal Arcs** :=  $\{(x, y) | (x, y) \in E \wedge x \neq s \wedge y \neq t\}$  ovvero  $E \setminus \text{External Arcs}$

Assumeremo che per ogni  $(i, j)$  internal arc allora esiste  $(j, i) \in E$ .

In oltre per ogni internal node  $i$  esiste  $(s, i) \in E \wedge (i, t) \in E$  eventualmente con capacità 0

**Observation 1**

Il nodo  $s$  non ha archi entranti come il nodo  $t$  non ha archi uscenti

**Definition 3: Flow**

Definiamo come con la funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  che soddisfa la *flow conservation*

$$\sum_{j:(i,j) \in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in N \setminus \{s, t\}$$

Un *flow* si dice *feasible* se  $\forall (i, j) \in E, f_{ij} \leq u_{ij}$  (*capacity constraints*).

Il valore del flow è dato dalla somma del flow degli archi uscenti da  $s$  o entranti in  $t$ .

#### Definition 4: residual capacity

La capacità residua da  $i \rightarrow j$  indica la quantità di flusso che si può ancora immettere dal nodo  $i$  al nodo  $j$

$$r_{ij} = u_{ij} + f_{ji} - f_{ij}$$

quando parleremo di capacità residue secondo diversi flow potremmo usare anche la notazione:

$$u_f(i, j)$$

che indica proprio la capacità residuo di un arco attraversato dal flow  $f$

#### Definition 5: Residual Graph

Dato un Network  $\mathcal{N}$  e un un flusso  $f$  definito sul grafo possiamo definire il grafo residuo come

$$G_f := (N(\mathcal{N}), \{(i, j) | (i, j) \in E(\mathcal{N}) \wedge r_{ij} > 0\})$$

#### Definition 6: s-t Cut

Definiamo come  $s - t$  Cut la partizione di  $G$  in due sottoinsiemi  $(S, T)$  tali che:

1.  $s \in S$
2.  $t \in T$
3.  $S \cap T = \emptyset$
4.  $S \cup T = N$

La *capacità* del Cut è definita come:

$$u(S, T) = \sum_{i \in S \wedge j \in T} u_{ij}$$

Il *residuo* del taglio: è definito come:

$$r(S, T) = \sum_{i \in S \wedge j \in T} r_{ij}$$

### Lemma 1: Max residual flow min residual cut

Dato un grafo residuo  $G_f$  e un cut  $(S, T)$  allora  $r(S, T)$  rappresenta l'upper bound del flusso da  $s \rightarrow t$ . In particolare, il massimo incremento di flow rispetto ad  $r$  è la capacità residua minore di un s-t cut.

*dimostrazione omessa*

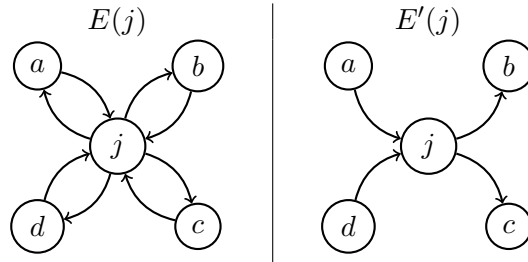
Il lemma riporta che il problema di trovare il flusso massimo su un Network è **duale** a quello di trovare un taglio di capacità minima sullo stesso network in quanto questo rappresenterà il collo di bottiglia che fa da upper bound all'aumento di flusso.

### Definition 7: Anti-symmetric subset

Dato  $E(j)$  l'insieme degli archi adiacenti con  $j$  definiamo come *Anti-symmetric subset*

$$E'(j) := \{(x, y) | (x, y) \in E(j) \wedge (x, y) \in E'(j) \iff (y, x) \notin E'(j)\}$$

**Esempio:**



### Lemma 2: Anti-symmetriy lemma

Dato  $E'(j)$  un anti-symmetric subset di  $E(j)$  e un flusso  $f$  su  $G$  con  $r = r[f]$  allora:

$$\sum_{(i,j) \in E'(j)} r_{ij} - \sum_{(j,i) \in E'(j)} r_{ji} = \sum_{(i,j) \in E'(j)} u_{ij} - \sum_{(j,i) \in E'(j)} u_{ji}$$

*proof:*

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E'(j)} r_{ij} - \sum_{(j,i) \in E'(j)} r_{ji} - \sum_{(i,j) \in E'(j)} u_{ij} + \sum_{(j,i) \in E'(j)} u_{ji} &= 0 \implies \\ \sum_{(i,j) \in E'(j)} (u_{ij} - r_{ij}) + \sum_{(j,i) \in E'(j)} (u_{ji} - r_{ji}) &= 0 \end{aligned}$$

dato che  $r_{ij} = u_{ij} - f_{ji} + f_{ij} \implies u_{ij} - r_{ij} = f_{ji} - f_{ij}$

$$\sum_{(i,j) \in E'(j)} (f_{ji} - f_{ij}) + \sum_{(j,i) \in E'(j)} (f_{ij} - f_{ji}) = \sum_{(i,j) \in E(j)} (f_{ji} - f_{ij}) = 0$$

ovvero il vincolo di *conservazione del flow* □

## 1.2 Decomposition e transferring del flow

### Definition 8: Flow decomposition

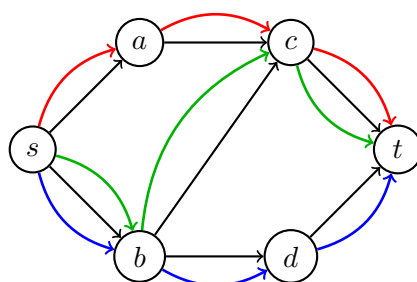
Dato  $f$  un  $s - t$  flow su  $N$ , definiamo *flow-decomposition*, una collezione di  $s - t$  path diretti

$$P_1, \dots, P_s \quad \phi_1, \dots, \phi_s$$

tale che:

1.  $\forall (u, v) \in P_i, f(u, v) > 0$
2.  $f(P_i) = \phi_i \quad \forall i \in [1, s]$
3.  $val(f) = \sum_{i=1}^s \phi_i$

Un **osservazione** intuitiva è che il massimo numero di decomposizioni di un *flow* è  $m$ .



Esempio di flow decomposto

Da questo grafo possiamo notare che (capacità permettendo ovviamente), un feasible flow da  $s \rightarrow t$  può essere decomposto come il percorsi con **almeno un arco differente** che lo compongono. In particolare notiamo nel grafo:

- in **nero** il grafo del network
- in **rosso**, **verde** e **blu** tre differenti *paths* da  $s \rightarrow t$



Un'altro passaggio fondamentale da comprendere per la risoluzione del problema il trasferimento di capacità.

### Definition 9: Transfer

Dato un arco  $(i, j) \in E$  e un *path*  $P$   $i \rightarrow j$  con  $|P| \geq 2$ , **trasferire**  $\delta$  unità di capacità da  $P$  a  $(i, j)$  significa ridurre  $\forall (k, l) \in P$   $u_{kl}$  di  $\delta$  unità e aggiungere  $\delta$  unità a  $u_{ij}$

### Lemma 3: capacity transfer lemma

Sia  $P$  un *path* in  $G$  da  $i$  a  $j$  e sia  $(S, T)$  un taglio. Sia  $u'$  la capacità dell'arco  $(i, j)$  ottenuta trasferendo  $\delta$  capacità dal path  $P$ . Allora è vero che

$$u'(S, T) \leq u(S, T)$$

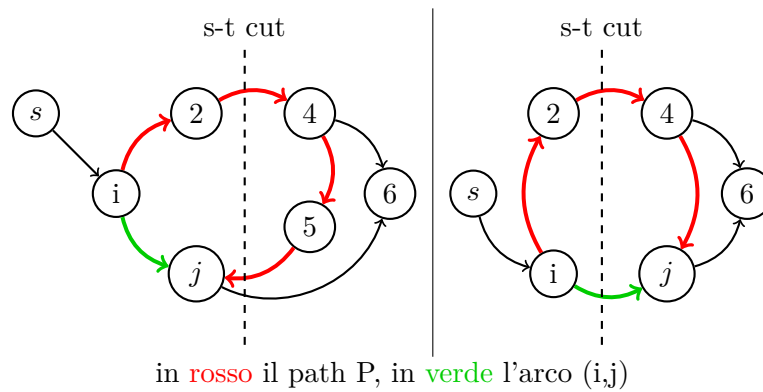
*proof:*

La dimostrazione è banale se  $i, j \in S \vee i, j \in T$  dato che  $u'(P) \leq u(P) \implies u'(S, T) \leq u(S, T)$ .

Mentre invece se  $i \in S \wedge j \in T$ , se consideriamo  $k \in P$  il primo nodo di  $P$  in  $T$  e  $l \in P$  il nodo subito precedente a  $k$ , possiamo stimare

$$u'(S, T) - u(S, T) \leq (u'_{kl} + u'_{ij}) - (u_{kl} + u_{ij}) = -\delta + \delta = 0$$

□



Possiamo dire in generale quindi che trasferire capacità non aumenta il max flow instradabile in un network.

### 1.3 Distance based

#### Definition 10: Valid distance labeling

Siano  $N = (G, u)$  un Network,  $f$  un feasible flow su  $N$  e  $l((u, v))$  una funzione che sancisce *lunghezza* di ogni arco in  $G$ .

La funzione di **distanza**  $d : N(G) \rightarrow \mathbb{N}$  rispetto al **residual graph**  $G(f)$  si dice **valida** se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $d(t) = 0$
2.  $d(i) \leq d(j) + l((i, j))$

**Nota:** Se non diversamente specificato, una funzione  $l((u, v))$  associa ad ogni arco del grafo la lunghezza 1, tuttavia può anche essere specificata, come nel caso dell'algoritmo di **Goldberg-Rao**(che segue), una funzione di lunghezza diversa.

#### Observation 2: Valid distance label property

Una valid distance label,  $d$ , preserva le seguenti proprietà:

1.  $d(i)$  rappresenta il *lower bound* della lunghezza dello shortest directed path da  $i \rightarrow t$  nel residual graph
2.  $d(s) \geq n \implies \nexists p \text{ path} \in G(f) | p = s \rightarrow t$

Un altro significato (forse l'idea di fondo) della distance labeling sta in

$$\neg(d(v) > d(w) + l(v, w))$$

Ovvero, se  $w, v \in N \wedge (v, w) \in E$  allora la distanza di  $v$  non può mai superare la distanza di  $w$  più la lunghezza tra i due nuovi, proprio per definizione di shortest path.

### Definition 11: Admissible graph

Siano  $N = (G, u)$  un Network  $N = (G, u)$  con un feasible flow  $f$ ,  $d : N(G(f)) \rightarrow \mathbb{N}$  valid distance label e  $l((u, v))$  una length function. un *residual arc* si dice **Admissible arc** se soddisfa:

$$d(v) = d(w) + l(v, w) \quad \forall (v, w) \in E(G(f))$$

ovvero:

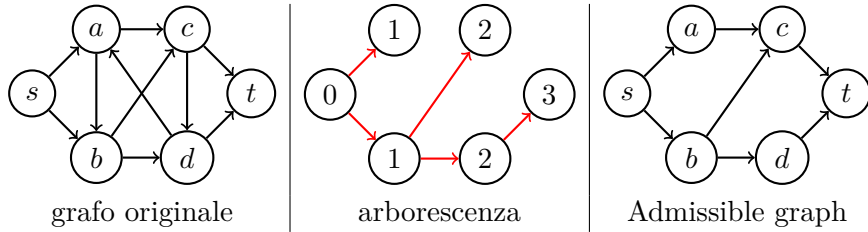
$$d(v) > d(w) \vee (d(v) = d(w) \wedge l(v, w) = 0)$$

$A(f, l, d)$  rappresenta l'**Admissible graph**, ovvero il grafo formato da tutti gli Admissible arc, rispetto alla distanza  $d$  con lunghezze  $l$  sul residual graph dato dal flow  $f$ .

### Observation 3

Sia  $G(f)$  un grafo residuo, sia  $B_s$  un'arborecenza data da una BFS sul grafo  $G(f)$  dal nodo  $s$  e sia  $A$  l'*admissible graph* allora

$$E(B_s) \subsetneq E(A)$$



Ora che sono state definite le valid distance label, possiamo richiamare gli  $s - t$  cut per definire i **canonical cuts**.

### Definition 12: Canonical cut

Dato un Network  $\mathcal{N}$ , e una distance label  $d$  su  $\mathcal{N}$ , si definisce taglio canonico una partizione dei nodi del grafo

$$(S_k, T_k) = (S_k := \{v \in V(\mathcal{N}) | d(v) \geq k\}, T_k := V(\mathcal{N}) \setminus S_k)$$

## Chapter 2

# Past Algorithm

## 2.1 Dinic's Algorithm

L'algoritmo segue l'[Edmonds-Karp](#) ma ragionando sul fatto che ogni volta che eseguo una BFS creo un albero di copertura con livelli che indicano la distanza dal nodo di partenza. quindi invece di eseguire una BFS e poi saturare solo uno dei percorsi minimi trovati, posso saturarli tutti prima di eseguire di nuovo una BFS.

Ogni volta che si esegue una BFS dalla *source* si entra nella **blocking flow phase**.

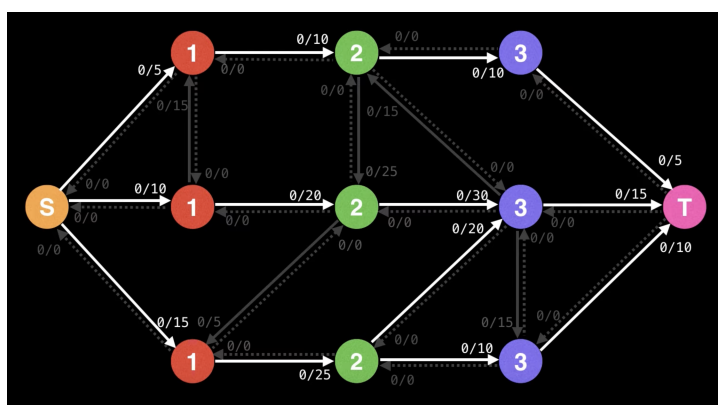
### Definition 13: Blocking flow

Per **blocking flow** si intende un flusso su un grafo (in questo caso il residuo del level graph) che satura almeno un arco per ogni possibile *path* da  $s \rightarrow t$ .

### Observation 4: Max flow $\implies$ blocking flow

Il max flow è un blocking flow ma non è vera l'implicazione opposta.

per **level graph** si intende l'albero di copertura dato da una BFS che riporta per ogni nodo la distanza dalla radice, dividendo così il grafo in livelli.



source: *Dinic's Algorithm by WilliamFriset*

In questo modo si riduce il costo dell'algoritmo da  $O(n^2m)$  per Edmonds Karp a  $O(nm^2)$

### **Altri link utili**

1. [Lecture from MIT](#)
2. [Wikipedia](#)

## 2.2 Goldberg-Rao

Ottimizzando il [Dinic's Algorithm](#), l'algoritmo di Goldberg-Rao riesce ad ottenere un **costo computazionale** di  $\tilde{O}(\min\{n^{1/2}, m^{2/3}\} \cdot m)$  (ovvero  $O(\min\{n^{1/2}, m^{2/3}\} \cdot m \cdot \log n \cdot \log nU)$ ) su un Network a con capacità intera.

**Dettagli di notazione:** Nella sezione 2.2 useremo la segue notazione:

- $\Lambda = \min\{n^{1/2}, m^{2/3}\}$

### 2.2.1 Idea

Alla base dell'ottimizzazione c'è l'idea di **contrarre** il Network secondo certi specifici parametri. L'algoritmo si basa su [Valid distance labeling](#) e introduce una nuova **length function binaria**:  $\bar{l}((v, w)) : E \rightarrow \{0, 1\}$ . La nuova length function assegna valore zero a tutti gli archi che soddisfano certi requisiti di capacità (che descriveremo meglio in seguito).

Azzerare la lunghezza degli archi che collegano due o più nodi ci permette di considerarli come un unico nodo. Dunque contraendo le componenti connesse da archi di lunghezza 0 è possibile ridurre in maniera significativa il numero di incrementi di flusso e quindi il costo computazionale dell'algoritmo.

### 2.2.2 Il parametro $\Delta$

Il problema di contrarre il grafo consiste nel fatto che quando immettiamo il flow dalla sorgente al pozzo dobbiamo essere sicuri che tale flow rispetti i vincoli di capacità degli archi originali che ora sono contratti. Per assicurarci che i vincoli vengano rispettati si utilizza una certa quantità  $\Delta$  che funge da *upper bound* all'incremento di flow e da *lower bound* alla capacità degli archi *zero-length*.

Incrementando il flusso di al massimo  $\Delta$  siamo sicuri di rispettare i vincoli di capacità ma non siamo più sicuri che il flusso sia bloccante. Dunque dobbiamo scegliere il valore da dare a  $\Delta$  in maniera tale che il numero di incrementi sia ragionevolmente piccolo in modo da garantirci il costo computazionale desiderato.

### 2.2.3 Stopping condition

L'algoritmo termina quando la differenza tra il flow corrente e quello massimo raggiungibile  $F$  diventa minore di 1. Dato che le capacità del Network sono tutte intere ciò ci assicura di aver raggiunto il massimo flusso possibile. Un primo valore utile per  $F$  corrisponde a  $F = n \cdot U_{max}$

### 2.2.4 Scheletro dell'algoritmo

Possiamo ora descrivere uno scheletro dell'algoritmo come segue:

#### Algorithm 1: Goldberg-Rao

while  $F \geq 1$ :

1. Aggiorna il bound  $\Delta$ , la length function  $\bar{l}$ , la distance labels  $d_{\bar{l}}$ ;
2. Contrai i componenti fortemente connessi di archi *zero-length*
3. Determina l'Admissible graph  $A(f, \bar{l}, d_{\bar{l}})$
4. Trova un flusso in  $A(f, \bar{l}, d_{\bar{l}})$  che sia bloccante o di valore  $\Delta$
5. Somma il nuovo flusso trovato con quello ottenuto fin'ora
6. Aggiorna il valore di  $F$

Ritorna il flusso finale

*NOTA:* Il punto 4 fa riferimento al modo di trovare un flusso bloccante come nel [Dinic's Algorithm](#), cioè procedere per incrementi sugli shortest path finché non si raggiunge un flusso bloccante o di valore  $\Delta$ .

### 2.2.5 Stimare il residual flow

Sappiamo già che la capacità residua di ogni taglio  $r(S, T)$  rappresenta un *upper bound* al max flow. Per stimare il flow residuo molto rapidamente e efficacemente possiamo analizzare i [Canonical cut](#).

#### Lemma 4: $\min r(S_k, T_k)$ in $O(m)$ time

Il taglio canonico di capacità minima può essere trovato in tempo  $O(m)$

*proof:*

Sfruttiamo il fatto che ogni arco ha lunghezza al massimo 1, dunque può attraversare al massimo un taglio canonico.

- Inizializziamo a zero ogni  $r(S_k, T_k)$
- per ogni  $(v, w) \in V$ :
  - se  $d(v) > d(w)$ :  $r(S_k, T_k) += r(v, w)$
- *return*  $\min r(S_k, T_k)$

La correttezza e il costo computazionale di questa routine è piuttosto immediato. Per gestire il costo computazionale bisogna assicurarsi che il valore di

$F$  scenda abbastanza in fretta senza appesantire l'algoritmo.

Possiamo raggruppare tutte le iterazioni dell'algoritmo in **fasi** e aggiornare il valore di  $F$  al taglio canonico minimo solo all'inizio di una nuova fase. Ogni fase parte da quando aggiorniamo il valore di  $F$  fino a quando  $\min r(S_k, T_k) \leq F/2$ .

In questo modo dopo al massimo  $\log n U_{max}$  fasi l'algoritmo termina

### 2.2.6 Binary length function

Il metodo del blocking flow del Goldberg-Rao riprende da quello di Dinics con importanti modifiche per assicurarsi che:

- Il flusso aumenti in maniera significativa ad ogni iterazione
- Dopo ogni raggiungimento di flusso bloccante, la distanza tra  $s$  e  $t$  aumenti.

Allo scopo di raggiungere il costo computazionale desiderato.

Come già accennato abbiamo bisogno di un upper bound  $\Delta$  per rispettare i vincoli di capacità, ma abbiamo anche bisogno che gli incrementi di flussi non bloccanti siano al massimo  $\Lambda$  dunque possiamo inizializzare:

$$\Delta = \lceil F/\Lambda \rceil$$

La funzione binaria di base è la seguente:

$$l(u.w) = \begin{cases} 0 & r_{vw} \geq 3\Delta \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dunque archi con larga capacità avranno distanza zero. Tuttavia per raggiungere il costo desiderato è necessario apportare una modifica a tale funzione.

#### Definition 14: Special Arc

Un arco  $(v, w)$  si dice **speciale** se soddisfa tutti i seguenti requisiti:

- $2\Delta \leq r_{v,w} < 3\Delta$
- $d(v) = d(w)$
- $r_{wv} \geq 3\Delta$

La funzione modificata prende in considerazione anche gli archi binari:

$$\bar{l}(u.w) = \begin{cases} 0 & r_{vw} \geq 3\Delta \vee \text{specialArc}((v, w)) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*NOTA: Introdurre gli specialArc non modifica la distance labeling:  $d_l = d_{\bar{l}}$*



### Lemma 5: Da contratto a originale

Supponiamo di avere contratto il Network originale come descritto fin'ora, e di aver instradato un flusso  $f$  attraverso il grafo contratto.

Il costo computazionale di adattare questo flusso attraverso il grafo originale è  $O(m)$

*proof:*

1. Scegliamo un vertice qualsiasi in ogni componente contratta.
2. Formiamo un in-tree e un out-tree da con radice nei vertici scelti.
3. Dall'in-tree instradiamo il flusso positivo fino alla radice
4. Dall'out-tree riconvogliamo il flusso in entrata dalla radice a tutti altri nodi connessi.

Dato che il flusso massimo che instradiamo è  $\Delta$  e tutti i nodi nei componenti contratti hanno costo almeno  $2\Delta$  siamo sicuri che il flusso rispetti le capacità del Network. Risulta immediato che tale metodo abbia costo direttamente proporzionale al numero di archi nei componenti connessi.  $\square$

Nel Dinic's Algorithm la dimostrazione che il flusso bloccante aumenti strettamente la distanza tra  $s$  e  $t$  è piuttosto scontata. Non si può dire la stessa cosa nel caso del Goldberg-Rao data la presenza di archi di lunghezza zero. Pertanto risulta essenziale la dimostrazione del seguente teorema per assicurarsi che l'algoritmo termini.

### Theorem 1: Blocking flow with binary length

Sia  $\bar{f}$  un flow in  $A(f, \bar{l}, d_l)$ , sia  $f' = f + \bar{f}$  il flow incrementato e sia  $l'$  la length function corrispondente a  $f'$ . Allora:

1.  $d_l$  è una distance labeling rispetto a  $l'$
2.  $d_{l'}(s) \geq d_l(s)$
3. se  $\bar{f}$  è bloccante  $\implies d_{l'}(s) > d_l(s)$

*proof:*

**1.  $d_l$  è una distance labeling rispetto a  $l'$**  Per definizione di distance labeling  $d_l(v) \leq d_l(w) + \bar{l}(v, w)$  (ricordando che  $d_l = d_{\bar{l}}$ ) dobbiamo quindi dimostrare che  $d_l(v) \leq d_l(w) + l'(v, w)$ .

Questo ciò è banalmente vero se  $d_l(v) \leq d_l(w)$ .

Se  $d_l(v) > d_l(w)$  ovvero  $d_{\bar{l}}(v) > d_{\bar{l}}(w)$  allora  $(w, v)$  non è ammissibile rispetto a  $\bar{l}$ .

Ciò ci assicura che  $u_{f'}(v, w) \leq u_f(v, w)$  il che implica che  $l'(v, w) \geq \bar{l}(v, w)$

da cui segue lo statement.

**2.**  $d_{l'}(s) \geq d_l(s)$  Dimostriamo che il se  $L := l_0, l_1, \dots, l_n$  l'insieme ordinato di tutte le funzioni di lunghezza calcolate tra le iterazioni dell'algoritmo allora per qualsiasi  $0 \leq i \leq j \leq n \implies d_{l_i}(s) \leq d_{l_j}(s)$ .

Distinguiamo le due iterazioni come:

- Nell'iterazione  $i$   
Sia  $l(u, v) = l_i(u, v)$  la funzione di lunghezza e  $d(x) = d_{l_i}(x)$  quella di distanza, insieme al flusso definiscono  $A(f, l_i, d_{l_i})$ .  
Sia  $\Gamma$  l's  $\rightarrow t$  shortest path in  $A : \Gamma \subseteq A$
- Nell'iterazione  $j$   
Sia  $l'(u, v) = l_j(u, v)$  la funzione di lunghezza e  $d'(x) = d_{l_j}(x)$  quella di distanza, insieme al flusso definiscono  $A'(f, l_j, d_{l_j})$ .  
Sia  $\Gamma'$  l's  $\rightarrow t$  shortest path in  $A' : \Gamma' \subseteq A'$

Supponiamo per assurdo che esistano due iterazioni  $0 \leq i \leq j :$   
 $d(s) > d'(s):$

$$\implies \exists \Gamma s \rightarrow t, \Gamma' s \rightarrow t : \sum_{(v,w) \in \Gamma} l(v, w) \geq \sum_{(v,w) \in \Gamma'} l'(v, w)$$

Ovvero andando avanti con le iterazioni  $s$  e  $t$  si sono avvicinati.

Escludiamo subito il caso in cui  $\Gamma = \Gamma'$  in quanto

$$\forall (v, w) \in A \cap A', l(v, w) \leq l'(v, w) \implies l(\Gamma) \leq l'(\Gamma')$$

$$NOTA: l(\Gamma) = \sum_{(v,w) \in \Gamma} l(v, w)$$

Consideriamo ora  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ . Sia  $w$  l'ultimo nodo in  $\Gamma$  per cui è vero che  $d(w) > d'(w)$  e sia  $x$  il nodo che lo segue:

$$w \in \Gamma : d(w) > d'(w) \wedge \exists x = succ_{\Gamma}(w) : d(x) \leq d'(x)$$

$w$  e  $x$  sono sempre ben definiti perché  $d(s) > d'(s)$  per ipotesi e  $d(t) = d'(t) = 0$  per definizione. Dunque esiste in  $\Gamma'$  un arco  $(w, y)$  con  $y \neq x$  tale che  $d'(y) < d'(x)$ .  $x \neq y$  perché se fossero lo stesso nodo allora

$$d'(w) = d'(x) + l'(w, x) \geq d(w)$$

che contraddice le ipotesi

Ricomponendo il tutto, sappiamo che:

$$1. d(w) > d'(w) \iff d(x) + l(w, x) > d'(y) + l'(w, y)$$

Non conosciamo la distanza  $d(y)$  ma sappiamo che:

$$d'(y) = \sum_{(a,b) \in y-t \subseteq \Gamma'} l'(a, b) \geq \sum_{(a,b) \in y-t \subseteq \Gamma'} l(a, b)$$

Quindi il percorso all'iterazione  $j$  è maggiore o uguale a quello dell'iterazione  $i$ .

$$2. d(y) + l(w, y) \leq d'(y) + l'(w, y) < d(x) + l(w, x)$$

Ma noi sappiamo che  $d(w) = d(x) + l(w, x)$  il che è **assurdo** perché non è la distanza minima di  $w \rightarrow t$  in quanto è maggiore di  $d(y) + l(w, y)$ .

Sappiamo per certo che il percorso  $w - y \rightarrow t$  esiste in  $A$  proprio perché (a meno che non ne esista uno più corto) rappresenta il percorso con distanza minima da  $w \rightarrow t$ .

Dall'assurdo, le uniche conclusioni sono che o il percorso che passa per  $y$  non era raggiungibile all'iterazione  $i$  e quindi è impossibile raggiungerlo successivamente, oppure se esiste un percorso  $s \rightarrow t$  all'iterazione  $j$  minore di quello all'iterazione  $i$ , abbiamo sbagliato a considerare quello all'iterazione  $i$ .

**3. Se  $\bar{f}$  è bloccante allora  $d_l(s) < d_{l'}(s)$**  Per mostrare che il flow bloccante aumenta la distanza del nodo  $s$  definiamo la seguente dicitura:

$$c(v, w) := d_l(w) - d_l(v) + l'(v, w)$$

che rappresenta il cambiamento di lunghezza di un arco che collega due nodi adiacenti. Possiamo affermare che:

$$\forall (v, w) \in E, c(v, w) \geq 0$$

dato che  $l'(v, w) \geq l(v, w) \implies$

$$d_l(w) - d_l(v) < 0 \iff l(v, w) = 1 \implies l'(v, w) = 1$$

Consideriamo ora un qualsiasi percorso  $\Gamma$  in  $G_{f'}$ , la lunghezza del percorso è uguale a:

$$l'(\Gamma) = d_l(s) + c(\Gamma)$$

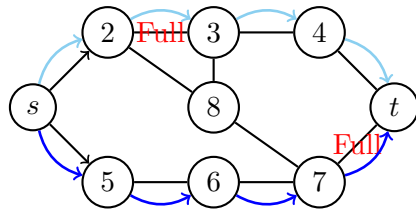
Per mostrare quindi che il percorso è più lungo basta mostrare che

$$\forall \text{shortest } s - t \text{ path } \Gamma \in G_{f'} \implies \exists (v, w) \in \Gamma | c(v, w) > 0$$

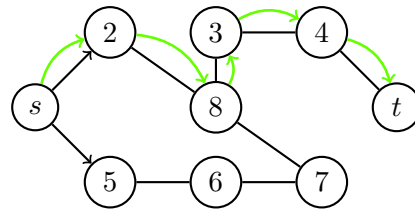
Abbiamo ora uno strumento per mostrare che il flusso bloccante aumenta la distanza di  $s$ .

### Example 1

Un semplice esempio grafico per visualizzare meglio quanto dichiarato



In **azzurro**  $f$  e in **blu**  $\bar{f}$  in  $A(f, \bar{l}, d_l)$



In **verde** lo *shortest path*  $\Gamma$  in  $G_{f'}$

Dato che  $\bar{f}$  è bloccate in  $A(f, \bar{l}, d_l)$ ,  $\Gamma$  deve contenere un arco  $(v, w)$  non presente in  $A(f, \bar{l}, d_l)$ .

Possiamo in oltre affermare che  $d_l(v) \leq d_l(w)$  o perché  $(v, w) \in G_f$  ma allora se  $d_l(v) > d_l(w)$  avremmo  $(v, w) \in A(f, \bar{l}, d_l)$  oppure perché  $(v, w) \notin G_f$  ma appare in  $G_{f'}$  e ciò è possibile solo se incremento il flusso nella direzione opposta per far apparire l'arco residuo. Dunque  $(w, v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$  il che implica che  $d_l(v) \leq d_l(w)$ .

Supponiamo ora per assurdo che  $c(v, w) = 0$ , dunque  $d_l(v) = d_l(w)$  e  $l'(v, w) = 0$ . Il fatto che  $(v, w)$  non sia in  $A(f, \bar{l}, d_l)$  implica che o  $(v, w)$  non sia in  $G_f$ , ma allora abbiamo mostrato già che l'arco opposto  $(w, v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$ , oppure che  $(v, w) \in G_f$  e non rispetta i requisiti di distance labeling per appartenere all'[Admissible graph](#)  $A(f, \bar{l}, d_l)$ .

Dato che  $d_l(v) = d_l(w)$  allora  $l(v, w) = 1$ . Si nota  $1 = l(v, w) > l'(v, w) = 0$  implica che ho incrementato il flusso sull'arco opposto  $(w, v)$ .

Dunque in ogni caso l'arco  $(w, v) \in A(f, \bar{l}, d_l)$ .

Come già mostrato in precedenza, dato che  $d_l(v) = d_l(w)$ ,

$$(w, v) \in A(f, \bar{l}, d_l) \iff l(w, v) = 0$$

Concludiamo quindi che:

- Durante gli incrementi di flusso abbiamo immesso un flow (di valore al massimo  $\Delta$ ) attraverso l'arco  $(w, v)$
- $u_f(w, v) \geq 3\Delta$  perché  $l(w, v) = 0$
- Dopo questo incremento abbiamo:  $r_{f'}(v, w) \geq 0$  perché  $l'(v, w) = 0$
- Quindi  $u_f(v, w) \geq 2\Delta$
- Ma allora l'arco  $(v, w)$  era un *arco speciale* già prima dell'incremento, in quanto  $d_l(v) = d_l(w) \wedge u_f(w, v) \geq 3\Delta \wedge u_f(v, w) \geq 2\Delta$

Concludiamo quindi che:

$$d_l(v) = d_l(w) \implies d_{\bar{l}}(v) = d_{\bar{l}}(w) \wedge \bar{l}(v, w) = 0 \implies (v, w) \in A(f, \bar{l}, d_l)$$

Il che è assurdo □

## 2.2.7 Costo computazionale

Dimostrata la correttezza del codice, segue il costo computazionale:

### Costo di una fase

Prima di addentrarci nel costo di una fase, rivediamo la struttura dell'algoritmo descritto fino ad ora.

```

def Goldberg_Rao_Algorithm(Network network)
    F = U*n
    Delta = F/Lambda
    f = 0
    while F >= 1:
        l = update_length(n, Delta)
        d_l = distanceLabel(network, l)
        Gc = collapse(network)
        Ag = admissible_graph(g)
        f' = find_blocking_or_Delta_flow(Ag)
        f = f + f'
        network.fitFlow(f)
        if min_canonical_cut(network).residual() <= F/2:
            F = min_canonical_cut(network).residual()
            Delta = F/Lambda

    return f

```

#### Remark 1: Costo da raggiungere

Il costo dichiarato in partenza è in:

$$O(\min\{m^{2/3}, n^{1/2}\} \cdot m \log n \log mU_{max})$$

utilizzando strutture dati più avanzate, si può raggiungere il costo di:

$$O(\min\{m^{2/3}, n^{1/2}\} \cdot m \log \frac{n^2}{m} \log U_{max})$$

Abbiamo già notato che il numero di **fasi** (ovvero il numero di decrementi) di  $F$  è nell'ordine di  $\log(F)$  ovvero  $\log(mU_{max})$ . Il costo per calcolare il min canonical cut e per adattare il flow al network sono entrambi in  $O(m)$ . Resta però da analizzare il costo di ogni fase, cioè quanto in fretta il min canonical cut si dimezza.

#### Lemma 6

La capacità minima di un canonical cut  $(\bar{S}, \bar{T})$  soddisfa

$$u_f(\bar{S}, \bar{T}) \leq \frac{mM}{d_l(s)}$$

dove  $M$  rappresenta l'arco di lunghezza uno con più capacità

*proof:*

Risulta evidente che il modo migliore in cui si può massimizzare la capacità del taglio canonico minimo è supponendo che tutti gli archi abbiano la capacità dell'arco di capacità maggiore e poi dividere equamente gli archi tra i vari tagli.  $\square$

Da questa prima stima segue il corollario

### Corollary 2.2.1

Durante ogni fase ci sono al massimo  $O(\Lambda)$  blocking flow incrementi.

*proof:*

Supponiamo che  $\Lambda = m^{1/2}$  dato che abbiamo dimostrato che ogni blocking flow incrementa  $d(s)$  di almeno uno, siamo sicuri che dopo  $6\lceil\Lambda\rceil$  incrementi  $d_l(s) \geq 6m^{1/2}$ . Dunque possiamo prendere la stima nel lemma e affermare che:

$$u_f(\bar{S}, \bar{T}) \leq \frac{mM}{d_l(s)} \leq \frac{3m}{d_l(s)} \Delta \leq \frac{3m}{6m^{1/2}} \frac{F}{m^{1/2}} = \frac{F}{2}$$

Dunque dopo  $\lceil\Lambda\rceil$  la fase termina.

Per  $\Lambda = n^{2/3}$  la dimostrazione è analoga e porta alla stessa conclusione. In conclusione, il costo di ogni fase è in ordine di  $O(\Lambda)$   $\square$

L'ultimo collo di bottiglia è rappresentato dal costo di trovare un blocking flow o di valore massimo  $\Delta$  (computazionalmente equivalenti): il che richiederebbe un costo di:

- $O(mn)$  in un approccio naive;
- $O(m \log n)$  utilizzando i dynamic trees;
- $O(m \log(n^2/m))$  utilizzando i size-bounded dynamic trees;

Unendo il costo di:

- × trovare un Blocking flow
- × le iterazioni in ogni fase
- × il numero di fasi
- × gli ulteriori costi in  $O(m)$

Si ottiene il tempo dichiarato.

## Chapter 3

# Prim Algorithm

Fino ad ora gli algoritmi hanno minimizzato il costo computazionale fino ad arrivare ad un costo  $O(nm)$  solo quando il valore di  $m$  o  $n$  assumeva determinate proporzioni. Il seguente algoritmo attinge dall'algoritmo **Goldberg and Rao** modificandone dei passaggi e preservando alcuni concetti per dimostrare però che si può risolvere il problema del max flows in  $O(nm)$  per qualunque valore di  $n$  e  $m$ .

### 3.1 Idea

Il problema viene risolto attraverso una serie di incrementi di flusso come nel Goldberg and Rao ma si rimpiazza il Network residuo del  $\Delta$ -incremento con una versione più compatta. l'algoritmo presenta due bottleneck:

1. creazione della rappresentazione compattata
2. passaggio dal flow compattato al flow esteso.

### 3.2 Passaggi

Di seguito la lista dei passaggi che il programma svolge per risolvere il problema in  $O(mn)$ :

1. scegliere un cut  $(S, T)$
2. calcolo del residual graph
3. calcolo del *abundant graph* (+ chiusura transitiva)
4. riduzione del residual graph a *strongly compact*
5. riduzione dello *strongly compact* a  $\Delta$ -compact

La particolarità di questo algoritmo sta nella scelta della modalità di incremento del flusso.

### 3.3 Fase di incremento

Il max-flow problem viene risolto attraverso una serie di *fasi di incremento*, vediamo quindi quali sono gli input e gli output di ogni fase:

- **input**

1. un *Flow*  $f$
2. un *Residual Graph*  $G_f$ , rappresentabile anche come  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione che associa a ogni arco la sua capacità residua
3. un s-t cut  $(S, T)$

Possiamo rappresentare l'input con la tripla  $(r, S, T)$

- **output**

1. un *Flow*  $f'$
2. un *Residual Graph*  $G'_f$
3. un s-t cut  $(S', T')$  tale che  $r'(S', T') \leq \frac{r(S, T)}{4m}$

Questa fase prende il nome di  $\Delta$ -*improvement phase* dove  $\Delta = r(S, T)$ .

Questo tipo di incremento viene eseguito, a seconda delle condizioni, o sul network  $G$  oppure sul *compact network*  $G^c$

### 3.4 $\Delta$ -abundant e grafo di abbondanza

In questa sezione viene presentato il concetto di **Abbondanza** che in un certo senso sostituisce quello di **lunghezza** di Goldberg-Rao, che infatti non è sfruttato per la soluzione di Prim.

**Definition 15:  $\Delta$ -abundant arc**

Sia  $\Delta = r(S, T)$  un arco  $(i, j)$  si dice  $\Delta$ -abbondante se  $r_{ij} \geq 2\Delta$

**Lemma 7**

Sia  $(r, S, T)$  l'input di una  $\Delta$ -*improvement phase*. Se l'arco  $(i, j)$  è abbondante prima dell'incremento allora rimarrà abbondante per tutti gli incrementi successivi.

*proof:*

Dato che  $\Delta' \leq \frac{\Delta}{4m}$  e ricordando che  $r_{ij} \geq 2\Delta$  si deduce che allora

$$r'_{ij} \geq r_{ij} - \Delta \geq \Delta \geq 2\Delta'$$

□



### Definition 16: Grafo di Abbondanza

Dato un network  $G$  si definisce il suo **grafo di abbondanza**  $G^{ab}$  come:

$$G^{ab} := (N(G), \{(i, j) | (i, j) \in E(G) \wedge r_{ij} \geq 2\Delta\})$$

### Observation 5

Per il [lemma 7](#) proseguendo con le iterazioni il grafo di abbondanza può solo acquisire nuovi archi, mai perderli.

IL grafo di abbondanza è utile in vari modi:

1. Tutti i cicli formati da archi abbondanti vengono *contratti* in un solo nodo
2. Tutti i nodi che adiacenti solo ad archi abbondanti o di capacità troppo piccola, vengono *compattati*

L'algoritmo mantiene in oltre la chiusura transitiva di tutti i nodi collegati tra loro da un **abundant path**, ovvero un cammino composto solo da archi abbondanti.

Se esiste un abundant path tra il nodi  $i$  e  $j$ , ciò si indica con  $i \implies j$ , e l'informazione viene mantenuta in una matrice  $\mathbf{M}_{n \times n}$ , dove nella posizione  $\mathbf{M}_{i,j}$  si trova il nodo che precede  $j$  nel percorso che parte da  $i$ . Se durante le iterazioni si creano più percorsi viene comunque mantenuto il primo trovato.

La chiusura transitiva può essere mantenuta in tempo  $O(nm)$  utilizzando l'algoritmo di Italiano. In questo modo è sempre possibile (vedremo di seguito che contrarre il grafo non lo impedisce e non ne altera il costo) ricostruire un percorso abbondante  $P$  in  $O(|P|)$

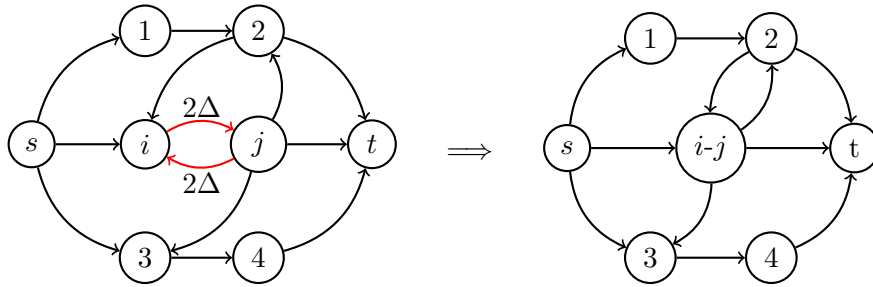
### 3.5 Contractions of abundant graph

Vediamo ora come sfruttare l'abundant graph per contrarre il grafo su cui calcolare il max-flow e rendere l'algoritmo più efficiente.

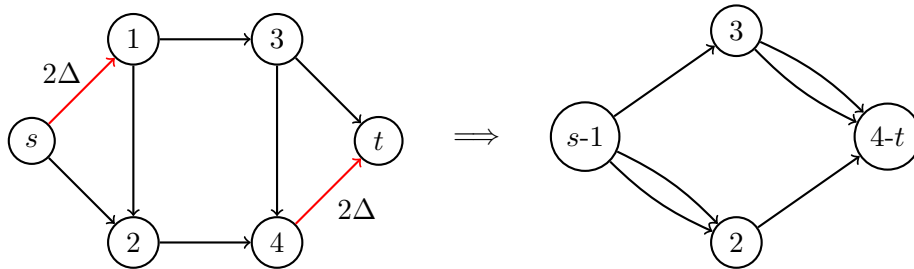
Analizziamo tre contrazioni di esempio differenti:

Supponiamo che esistano due nodi  $i$  e  $j$  tali che  $r_{ij} \geq 2\Delta$  e  $r_{ji} \geq 2\Delta$

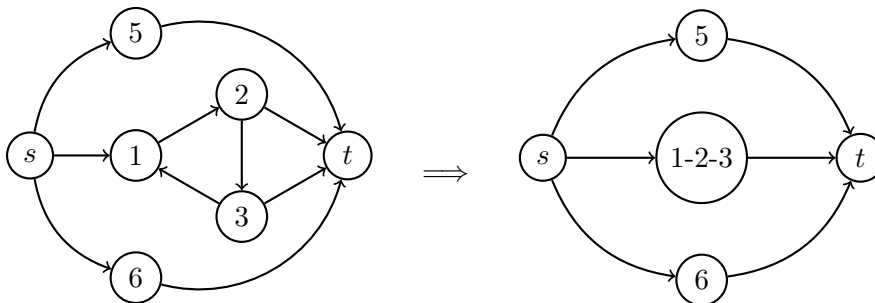
Possiamo quindi contrarre i due nodi in uno unico che preservi gli archi di entrambi



È possibile contrarre archi esterni



E dunque tutti i cicli abbondanti



**Algorithm 2: improve-approx-2**

01.  $\Delta := r(S, T)$
02. let  $c$  be the number of  $\Delta$ -critical nodes
03. **if**  $c > m^{9/16}$  **then**: find a  $\Delta/(4m)$ -optimal flow on  $G[r]$
04. **else, if**  $m^{1/3} \leq c < m^{9/16}$  **then**:
  05. let  $G'$  denote  $\Delta$ -compact network
  06. find a  $\Delta/(8m)$ -optimal flow  $x'$  on  $G'$
  07. transform the flow  $x'$  into a  $\Delta/(4m)$ -optimal flow  $x^*$  on  $G[r]$
08. **else, if**  $c < m^{1/3}$  **then**:
  09. choose  $\min \Gamma$  s.t.  $|N(G^{(\Delta, \Gamma)})| < 2m^{1/3}$
  10. let  $G'$  denote  $(\Delta, \Gamma)$ -compact network
  11. find an optimal flow  $x'$  on  $G'$
  12. transform the flow  $x'$  into a  $\Gamma$ -optimal flow  $x^*$  on  $G[r]$

**3.6 da s-compact a  $\Delta$ -compact**

Il tempo  $O(nm)$  si basa sul fatto che calcolare un max flow *approssimato* su un grafo  $\Delta$ -compact sia di molto inferiore a calcolarlo sul grafo originale.

**Definition 17: Classificazioni di capacità**

un arco  $(i, j)$  rispetto a  $\Delta$  ha:

1. **small capacity** se  $r_{ij} + r_{ji} < \Delta/(64m^2)$
2. **medium capacity** se  $r_{ij} \geq \Delta/(64m^2) \wedge r_{ij} + r_{ji} < 4\Delta$
3. (a) **internal anti-abundant** se  $r_{ij} \leq 2\Delta \wedge r_{ji} \geq 2\Delta$   
 (b) **external anti-abundant** se non abundant
4. **abundant** se  $r_{ij} \geq 2\Delta$

### 3.7 Dubbi

### 3.8 Sostituzioni

Di seguito tutta la terminologia che fa riferimento all'articolo

Max flows in  $O(nm)$  time, or better

James B. Orlin\*

Revised: July 25, 2012

con accanto la relativa sostituzione. La sostituzione del termine nel seguente articolo è stata effettuata per motivi di comprensibilità o affinità con la bibliografia di riferimento. Tutti i termini che non appaiono in questa sezione coincidono con quelli utilizzati nell'articolo.

	<i>orlin</i>		<i>here</i>	<i>description</i>
1.	$A$	$\rightarrow$	$E$	L'insieme degli archi
2.	$x$	$\rightarrow$	$f$	La funzione del flow

# Bibliografia

Le fonti sull'algoritmo di Goldberg-Rao e su quello di Prim vengono dai seguenti articoli:

1. Max flows in  $O(nm)$  time, or better, Revised: July 25, 2012, James B. Orlin\*
2. The Goldberg-Rao Algorithm for the Maximum Flow Problem, October 18 2006, Dávid Papp