

Содержание

1 Введение 2

1.1 Актуальность 2

1.2 Цели и задачи 2

1.3 Методы исследования 2

1.3.1 Моделирование диффузионно-конвективного уравнения методом прогонки . . . 2

1.3.2 Моделирование стохастического процесса 3

1 Введение

1.1 Актуальность

В течение продолжительного времени учёные пытаются определить, как образуется наблюдаемое распределение космических лучей по энергиям. Далеко не весь диапазон спектра можно описать с помощью теплового взаимодействия.

Особую роль играют механизмы нетеплового ускорения частиц в бесстолкновительной космической плазме.

Такие частицы можно непосредственно наблюдать в межпланетном пространстве, частицы низких энергий - непосредственно наблюдать с Земли, а частицы высоких энергий ($> 10^5$ ГэВ) - в виде широких атмосферных ливней.

Особый интерес составляет процесс на фронтах ударных волн, в силу их распространённости. Примерами таких волн могут служить волны от хромосферических солнечных вспышек, вспышек сверхновых звёзд...

Дополнительный интерес к данным процессам связан с возможностью выделения в них большого количества энергии, существенная часть которой может быть преобразована в направленное ускорение небольшого количества частиц, что и приводит к появлению частиц с энергиями, на много порядков превышающих тепловые.

Понимание данных процессов необходимы для построения моделей ударных волн.

Проблемой занимаются давно.

Бережко Е. Г. и Крымский Г. Ф. в 1988 году привели теоретический вывод диффузионно-конвективного уравнения. Х. Канг в 2011 году провёл численные расчёты для этого вида.

С другой стороны к задаче подошли А. Ахтенберг и В. Крулс, которые в 1992 году провели рассмотрение ускорения стохастическим подходом.

Однако ни один из этих авторов не пытался сравнивать оба подхода.

1.2 Цели и задачи

В связи со всем вышесказанным целью работы был анализ и сравнение диффузионно-конвективного и стохастического подхода в ускорении частиц на ударных волнах.

В рамках этой цели были поставлены следующие задачи:

- 1 Реализовать численное моделирование диффузионно-конвективного подхода в ускорении частиц на ударных волнах.
- 2 Реализовать численное моделирование стохастического процесса в ускорении частиц на ударных волнах.
- 3 Провести сравнение данных подходов
- 4 Указать положительные и отрицательные стороны в каждом из них

1.3 Методы исследования

Для решения диффузионно-конвективного уравнения была разработана программа на языке C++, организующая численное моделирование методом прогонки.

Стохастическое уравнение решалось в виде уравнения Ито и реализацией алгоритма так же на языке C++.

Остановимся подробнее на каждом из них

1.3.1 Моделирование диффузионно-конвективного уравнения методом прогонки

Изначальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial f}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta u}{3} \delta(x) p \frac{\partial f}{\partial p} + Q \quad (1)$$

Решим данное уравнение с помощью неявного метода Эйлера.

Для этого надо подставить вместо производных конечные разности и получить следующий общий вид:

$$\frac{f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}}{\Delta t} = \kappa_j \frac{f_{i+1,j,k} + f_{i-1,j,k} - 2f_{i,j,k}}{\Delta^2 x} - u_i \frac{f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{3\Delta x} \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}}{\Delta y} + Q \quad (2)$$

Далее система записывается в виде матричного уравнения

$$Mx = F \quad (3)$$

где M - трёхдиагональная матрица с A_i на поддиагонали, C_i - на главной диагонали и B_i на наддиагонали. В приложении задачи коэффициенты получились следующими:

$$A_i = \frac{\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta^2 x} + \frac{u_i \Delta t}{\Delta x} \quad (4)$$

$$C_i = \frac{2\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_i}{\Delta x} + \frac{u_i - u_{i-1} \Delta t}{3\Delta x \Delta y} - 1 \quad (5)$$

$$B_i = \frac{\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta^2 x} \quad (6)$$

$$F_i = -f_{i,j,k-1} - \frac{f_{i,j-1,k}}{\Delta y} \frac{u_i - u_{i-1} \Delta t}{3\Delta x} - Q \Delta t \quad (7)$$

Далее данное уравнение решается методом прогонки.

1.3.2 Моделирование стохастического процесса

В данном случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial F(\vec{Z}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} \left(-\dot{\vec{Z}} F + \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} [DF] \right) \quad (8)$$

Где $Z \equiv (x, p)$.

$$\dot{\vec{Z}} = \left\langle \frac{d\vec{Z}}{dt} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} D \quad (9)$$

Это уравнение может быть представлено в форме уравнения Ито:

$$d\vec{Z} = d\vec{Z}(\vec{Z}, t) + \sqrt{2D} dW \quad (10)$$

Где dW - Винеровский процесс В приложении к конкретной задаче для заряженных частиц имеем

$$dx = V(x)dt + \sqrt{2K_{\parallel}} dW \quad (11)$$

$$du = -\frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial x} dt \quad (12)$$

Как известно, общий вид уравнения Ито выглядит как

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t) \underbrace{\varepsilon \sqrt{dt}}_{dW} \quad (13)$$

где a имеет физический смысл сноса частицы, а b - диффузии. ε - нормально распределённая случайная величина.

Задав обе функции, а так же размер и количество шагов по времени, мы получаем предсказание координаты и импульса для одной частицы.

Запустив код для N частиц, можно получить массивы координат и импульсов для конца времени. Далее строя гистограмму распределения для импульса мы получаем империческую функцию распределения f_p , которая может быть сравнима с аналогичной функцией, полученной в другом подходе.

Как было написано выше, $a(x, t) \equiv V(x)$, где $V(x)$ - скорость для ударной волны. Стандартная степень сжатия на фронте равна 4, т.е. $V|_{x \ll x_{inj}} = 4V|_{x \gg x_{inj}}$. Для устойчивости работы программы должно выполняться условие

$$V \Delta t \leq \Delta x_s \ll \sqrt{K_{\parallel} \Delta t} \quad (14)$$

Где Δx_s - характерное масштаб фронта.

В качестве демонстрации преимуществ данного подхода были реализовано ещё два физических процесса: ускорение электронов с учётом синхротронных потерь и ускорение на сходящихся фронтах.

Синхротронные потери можно ввести, заменив уравнение для логарифма импульса на

$$du = - \left(\frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial x} + \beta_s \sqrt{1 + e^{2u}} \right) dt \quad (15)$$

Ускорение на сходящихся фронтах соответствует занулению скорости вдали от фронта и увеличению числа частиц в двое.