

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого»
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций
Кафедра космических исследований

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой КИ
_____ Варшалович Д.А.
«_____» _____ 2015 г.

ВЫПУСКНАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
**«Численное моделирование ускорения частиц
на ударных волнах»**

Направление: 03.03.02 – «Физика»

Профиль: «Физика космоса»

Студент гр.43412

Лиознов А.В.

Руководитель

н.с. ФТИ им.

А.Ф.Иоффе, к.ф.-м.н.

Гладилин П.Е.

Санкт-Петербург

2015

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 2 |
| 1.1 | Актуальность | 2 |
| 1.2 | Цели и задачи | 3 |
| 1.3 | Процесс ускорения на ударных волнах | 3 |
| 1.3.1 | Ускорение на двух ударных волнах | 6 |
| 2 | Методы исследования | 7 |
| 2.1 | Моделирование диффузионно-конвективного уравнения с помощью неявного метода Эйлера | 7 |
| 2.2 | Моделирование стохастического процесса | 8 |
| 3 | Результаты | 10 |
| 3.1 | Анализ решения методом Эйлера | 10 |
| 3.2 | Анализ решения стохастическим методом | 14 |
| 3.3 | Приложение: дополнительные результаты для стохастического метода | 18 |
| 3.4 | Сравнение метода Эйлера и стохастического метода | 20 |
| 4 | Выводы | 21 |

1 Введение

1.1 Актуальность

В течение продолжительного времени учёные пытаются определить, как образуется наблюдаемое распределение космических лучей по энергиям. Далеко не весь диапазон спектра можно описать с помощью теплового взаимодействия.

Особую роль играют механизмы нетеплового ускорения частиц в бесстолкновительной космической плазме.

Такие частицы можно непосредственно наблюдать в межпланетном пространстве, частицы низких энергий - посредством прямых измерений с Земли, а частицы высоких энергий ($> 10^5$ ГэВ) - в виде широких атмосферных ливней.

Особый интерес составляет процесс ускорения на фронтах ударных волн, в силу их распространённости. Примерами таких волн могут служить волны от хромосферных солнечных вспышек, вспышек сверхновых звёзд, ударные волны звёздного ветра...

Дополнительный интерес к данным процессам связан с возможностью выделения в них большого количества энергии, существенная часть которой может быть преобразована в направленное ускорение небольшого количества частиц, что и приводит к появлению частиц с энергиями, на много порядков превышающих тепловые.

Построение численных моделей ударных волн необходимо для понимания данных процессов.

Проблемой занимаются давно.

Акфорд В. И., Лиир Е., Скадрон Г. [2], Белл А. Р. [3] [4], Крымский Г. Ф. [11], Бландфорд Р. Д., Острикер Дж. П. [6] приводили теоретический анализ проблемы.

Бережко Е. Г. и Крымский Г. Ф. [5] в 1988 году сделали обзорную работу для ускорения частиц с диффузионно-конвективным уравнением. Х. Канг [10] в 2011 году провёл численные расчёты спектров ускоренных частиц.

С другой стороны к задаче подошли А. Ахтенберг и В. Крулс [1], которые в 1992 году провели моделирование ускорения стохастическим методом.

И, хотя сравнения данных подходов предпринимались, количественные оценки как с точки зрения времени работы, так и с точки зрения простоты реализации и расширяемости сделаны не были.

1.2 Цели и задачи

В связи со всем вышесказанным целью работы был анализ и сравнение диффузионно-конвективного и стохастического подхода в ускорении частиц на ударных волнах.

В рамках этой цели были поставлены следующие задачи:

- 1 Реализовать численное моделирование решения диффузионно- конвективного уравнения методом Эйлера в ускорении частиц на ударных волнах.
- 2 Реализовать численное моделирование ускорения частиц на ударных волнах стохастическим методом.
- 3 Провести сравнение данных подходов
- 4 Указать положительные и отрицательные стороны в каждом из них

1.3 Процесс ускорения на ударных волнах

Рассмотрим физическую сторону процесса ускорения на ударных волнах [5]:

Движение частиц плазмы определяется не соударениями, как в случае теплового движения, а взаимодействием с возникающий на фронте турбу-

лентностью. Характерной длиной, определяющей толщину фронта, является гирорадиус тепловых ионов.

Несмотря на то, что сама теория ударных волн ещё далека от завершения, характер достаточно быстрых частиц на фронте мало зависит от особенностей структуры. Это связано с тем, что движение частиц зависит, в основном, от двух факторов: взаимодействия с магнитным полем - крупномасштабным, регулярным, с одной стороны, и турбулентным, хаотичным - с другой. Это поле приводит к рассеянию частиц, причём свободный пробег сильно превышает толщину фронта.

Возможность ускорения частиц связана, прежде всего, с имеющимися в пространстве электрическими полями. Для иллюстрации на рисунке 1а схематически изображена траектория частицы в системе покоя фронта в случае, когда мелкомасштабные электрические поля отсутствуют. Для быстрой частицы ударная волна представляет собой магнитогиродинамический разрыв, в котором скорость плазмы u , плотность ρ , магнитное поле B связано следующими соотношениями:

$$\rho_2 = \sigma \rho_1 \quad (1.3.1)$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\sigma} \quad (1.3.2)$$

$$B_2 = \sigma B_1 \quad (1.3.3)$$

Где индексы 1, 2 означают область до и после фронта соответственно, а σ - степень сжатия вещества.

Пересекая фронт, частица испытывает градиентный дрейф и смещается вдоль электрического поля $\vec{E} = -[\vec{u}\vec{B}]/c$, где c - скорость света.

Каждая частица рассеивается на неоднородностях магнитного поля (рис 1б), что приводит к многократному перемещению между областями фронтов и многократному ускорению. За один цикл (двукратное пересечение фронта)

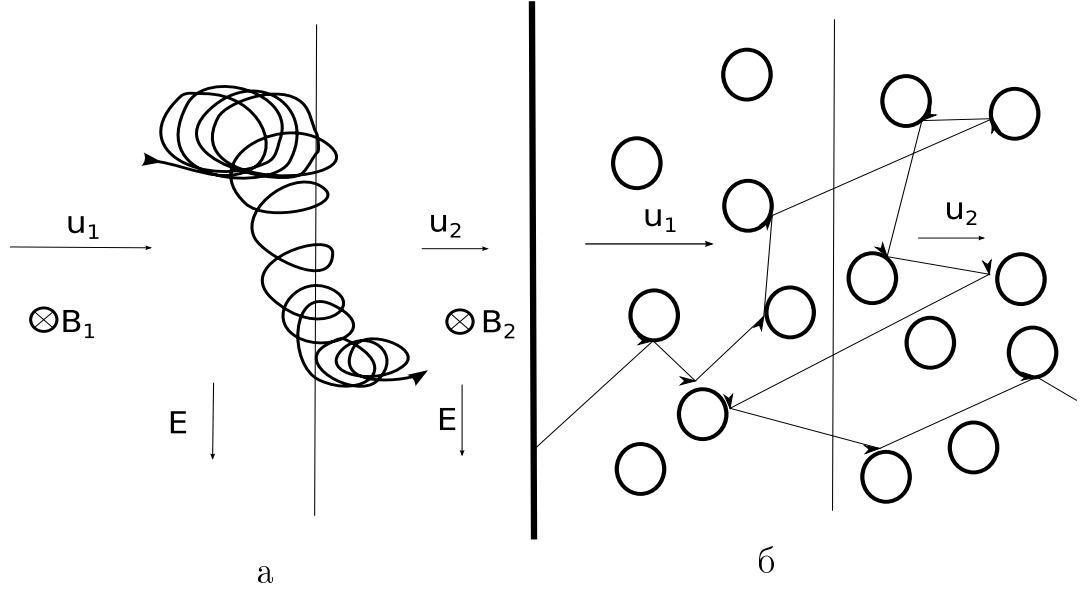


Рис. 1: Движение быстро заряженной частицы в ламинарной ударной волне (а) и турбулентной(б)

среднее изменение импульса частицы будет равно

$$\langle \Delta p \rangle = \frac{4}{3}(u_2 - u_1) \frac{p}{v} \quad (1.3.4)$$

Где u_2 , u_1 - скорость плазмы за и перед фронтом, v - скорость частицы.

В каждом цикле часть частиц уходит и уже не возвращается к фронту. Интегральный спектр ускорения частиц $N(p)$ - количество частиц в единице объёма с импульсами, большими p , - может быть найден из уравнения баланса

$$\frac{dN}{dp} = \frac{P_c - 1}{\langle \Delta p \rangle} N \quad (1.3.5)$$

Где P_c - вероятность совершения очередного цикла. $P_c = P_1 \cdot P_2$, где P_1 - вероятность частицы попавшей в область перед фронтом, вернуться на фронт и равна 1, а P_2 - аналогичная вероятность для области за фронтом и равна $1 - \frac{4u_2}{v}$

Используя последние уравнения, можно получить уравнение на плотность:

$$\frac{dpn}{dp} + 3 \frac{u_2}{u_1 - u_2} n = 0 \quad (1.3.6)$$

Решением данного уравнения будет являться функция $n \sim p^{-\gamma}$ с показателем $\gamma = \frac{\sigma+2}{\sigma-1}$

1.3.1 Ускорение на двух ударных волнах

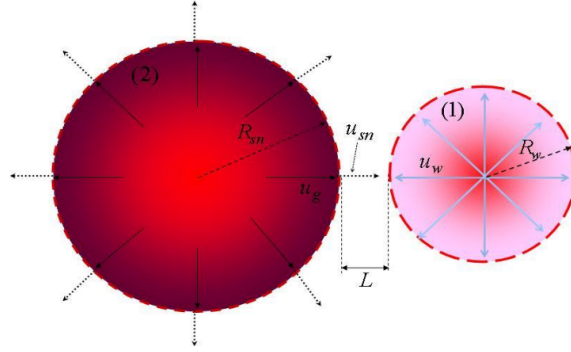


Рис. 2: Ускорение на двух ударных волнах

В космическом пространстве могут возникать системы, включающие в себя две сходящиеся ударные волны (рис. 2). В этом случае, при условии, что расстояние между фронтами будет меньше длины свободного пробега заряженной частицы, имеет место эффективный процесс ускорения, имеющий важные особенности. [7] [8] [9]

Сходящиеся ударные волны достаточно часты в космическом пространстве. Такие объекты могут наблюдаться в областях с активным звёздообразованием, близких двойных системах...

Спектр ускоренных частиц такого источника как целого будет иметь кусочно-степенной вид, с показателем $\Gamma = 2$ для низкоэнергетической части (до 1 ТэВ), соответствующей ускорению на одиночной ударной волне, и показателем $\Gamma = 1$ для высокоэнергетической части (выше 1 ТэВ), соответствующей ускорению на сходящихся потоках плазмы:

$$\frac{dN_p(p)}{dp} = f(p) \cdot p^2 \sim \frac{1}{p} \quad (1.3.7)$$

Стадия эффективного ускорения частиц в такой системе, когда УВ достаточно близки, длится порядка 300 лет, в зависимости от скорости ударной волны звёздного ветра и сверхновой, и размеров конкретной системы. Таким образом, в течение времени эффективного ускорения эти источники могут

вносить значительный вклад в спектр галактических космических лучей в области энергий «колена» ($10^{14} - 10^{15}$ эВ) и в высокоэнергичное излучение областей активного звёздообразования и звёздных кластеров.

2 Методы исследования

Для решения диффузионно-конвективного уравнения была разработана программа на языке C++, организующая численное моделирование осуществляющее его решение методом прогонки методом прогонки.

Стохастическое уравнение решалось в виде уравнения Ито. Алгоритм был реализован так же на языке C++.

Остановимся подробнее на каждом из них.

2.1 Моделирование диффузионно-конвективного уравнения с помощью неявного метода Эйлера

Изначальное уравнение имеет вид [10]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial f}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{du}{3dx} \delta(x) p \frac{\partial f}{\partial p} + Q \quad (2.1.1)$$

Где f - функция распределения частиц, κ - коэффициент диффузии, Q - мощность источника частиц, u - скорость течения плазмы.

Решим данное уравнение с помощью неявного метода Эйлера.

Для этого надо подставить вместо производных конечные разности и получить следующий общий вид:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j,k-1}}{\Delta t} = & \kappa_j \frac{f_{i+1,j,k} + f_{i-1,j,k} - 2f_{i,j,k}}{\Delta^2 x} \\ & - u_i \frac{f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{3\Delta x} \frac{f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}}{\Delta y} + Q \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Где индексы i, j, k отвечают за координату, импульс и время соответственно, а y есть логарифм от импульса. Далее система записывается в виде матричного

уравнения

$$Mx = F \quad (2.1.3)$$

где M - трёхдиагональная матрица с A_i на поддиагоналях, C_i - на главной диагонали и B_i на наддиагоналях. В приложении задачи коэффициенты получились следующими:

$$A_i = \frac{\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta^2 x} + \frac{u_i \Delta t}{\Delta x} \quad (2.1.4)$$

$$C_i = \frac{2\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_i}{\Delta x} + \frac{u_i - u_{i-1} \Delta t}{3\Delta x \Delta y} - 1 \quad (2.1.5)$$

$$B_i = \frac{\Delta t \kappa_{i,j}}{\Delta^2 x} \quad (2.1.6)$$

$$F_i = -f_{i,j,k-1} - \frac{f_{i,j-1,k}}{\Delta y} \frac{u_i - u_{i-1} \Delta t}{3\Delta x} - Q \Delta t \quad (2.1.7)$$

Далее данное уравнение решается методом прогонки. [12]

2.2 Моделирование стохастического процесса

В данном случае воспользуемся уравнением в виде Фоккера-Планка [1]

$$\frac{\partial F(\vec{Z}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} \left(-\dot{\vec{Z}} F + \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} [DF] \right) \quad (2.2.1)$$

Где $Z \equiv (x, p)$.

$$\dot{\vec{Z}} = \left\langle \frac{dec Z}{dt} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{Z}} D \quad (2.2.2)$$

Это уравнение может быть представлено в форме уравнения Ито:

$$d\vec{Z} = d\dot{\vec{Z}}(\vec{Z}, t) + \sqrt{2D} dW \quad (2.2.3)$$

Где dW - Винеровский процесс.

В приложении к конкретной задаче для заряженных частиц имеем

$$dx = V(x)dt + \sqrt{2K_{\parallel}} dW \quad (2.2.4)$$

$$du = -\frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial x} dt \quad (2.2.5)$$

Здесь $V(x)$ - скорость плазмы, K_{\parallel} - продольный коэффициент диффузии, u - логарифм импульса.

Как известно, общий вид уравнения Ито выглядит следующим образом [13] :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\underbrace{\varepsilon\sqrt{dt}}_{dW} \quad (2.2.6)$$

где a имеет физический смысл сноса частицы, а b - отклонения. ε - нормально распределённая случайная величина.

Задав обе функции, а так же размер и количество шагов по времени, мы получаем предсказание координаты и импульса для одной частицы.

Запустив код для N частиц, можно получить массивы координат и импульсов в конечный момент времени. Далее строя гистограмму распределения для импульса мы получаем империческую функцию распределения f_p , которая может быть сравнима с аналогичной функцией, полученной в другом подходе.

Как было написано выше, $a(x, t) \equiv V(x)$, где $V(x)$ - скорость для ударной волны. Стандартная степень сжатия на фронте равна 4, т.е. $V|_{x \ll x_{inj}} = 4V|_{x \gg x_{inj}}$. Для устойчивости работы программы должно выполняться условие

$$V\Delta t \leq \Delta x_s \ll \sqrt{K_{\parallel}\Delta t} \quad (2.2.7)$$

Где Δx_s - характерное масштаб фронта.

В качестве демонстрации преимуществ данного подхода были реализовано ещё два физических процесса: ускорение электронов с учётом синхротронных потерь и ускорение на сходящихся фронтах.

Синхротронные потери можно ввести, заменив уравнение для логарифма импульса на

$$du = - \left(\frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial x} + \beta_s \sqrt{1 + e^{2u}} \right) dt \quad (2.2.8)$$

Для они существенны лишь для электронов в силу малой массы.

Ускорение на сходящихся фронтах соответствует занулению скорости вдали от фронта и увеличению числа частиц в двое. Такое приближение справедливо для высокоэнергичных частиц.

3 Результаты

В данном разделе 4 подпункта: анализ решения с помощью метода Эйлера, анализ решения стохастическим методом их сравнение, а так же дополнительные распределения, полученные с помощью стохастического метода.

Все результаты, а так же код программы, доступен на GitHub по следующей ссылке: <https://github.com/Lavton/NIR>

3.1 Анализ решения методом Эйлера

Приведём результаты и сравнения для решения с помощью разностной схемы.

Как указывалось выше, для данного метода применялось численное решение дифференциального уравнения. К минусам подхода можно отнести относительную сложность реализации и параллелизации, а так же развивающиеся неустойчивости при неправильно выбранных шагах.

К плюсам же относится детерминированность и плавность получаемых графиков, а так же широкий выбор конкретного метода решения уравнения, что даёт определённую гибкость.

Приведём в качестве иллюстрации один из запусков программы (рисунок 3). В нём отражено распределение ускоренных частиц по импульсу. Получаем ступенчатое распределение, $f \sim p^{-2}$, как и ожидалось

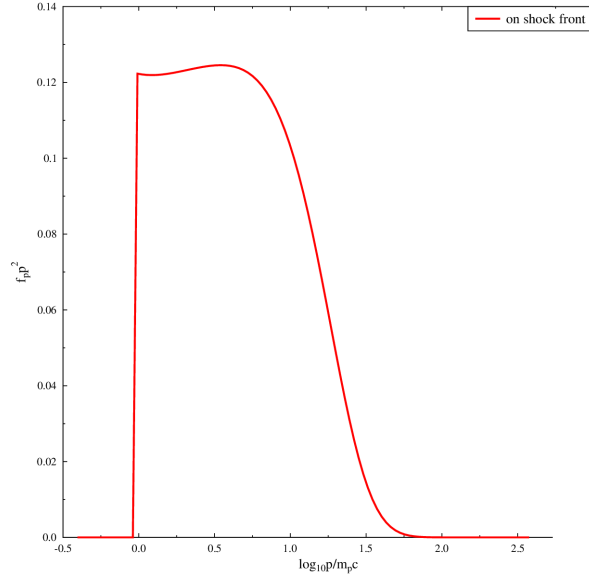


Рис. 3: Пример запуска программы решения с разностной схемой

Количество ускоренных в итоге частиц зависит от мощности источника. (рисунок 4). Очевидно, эта зависимость пропорциональна.

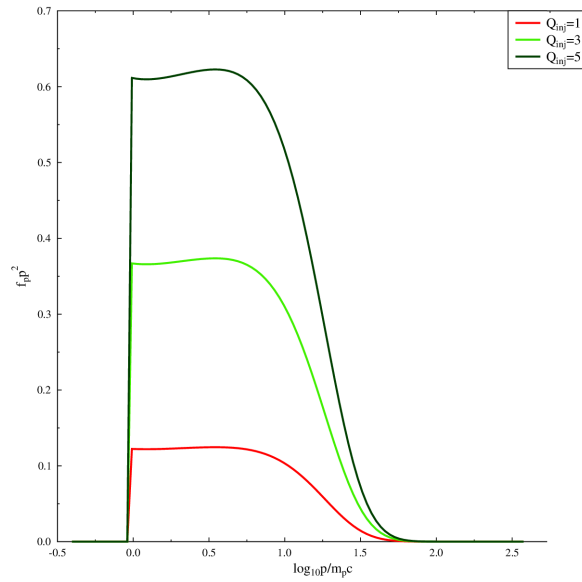


Рис. 4: Пример запуска программы для различной мощности источника Q_{inj}

Кроме мощности, на график влияет вид коэффициента диффузии. В данной работе сравниваются два его вида: постоянный коэффициент и линей-

но зависимый от импульса (последний, как считается, и имеет место вблизи фронтов ударных волн сверхновых). Различия в графиках можно наблюдать на рисунке 5. Постоянный коэффициент диффузии даёт более плавный спад для функции распределения.

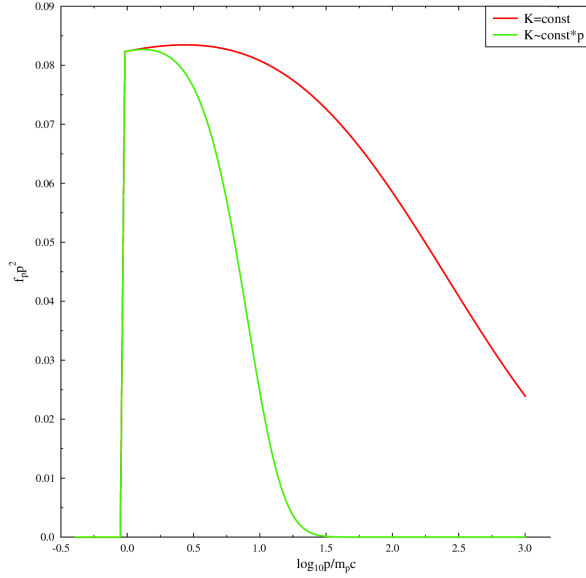


Рис. 5: Пример запуска программы $K_{\parallel} \equiv const$ и $K_{\parallel} \sim p$

Так же результаты были бы не полны без анализа зависимости от времени. На рисунке 6 видны три временных среза, каждый из которых отличается от предыдущего в 4 раза. Чем больше развёртка по времени, тем больше максимальные импульсы, которые могли достигнуть частицы за это время.

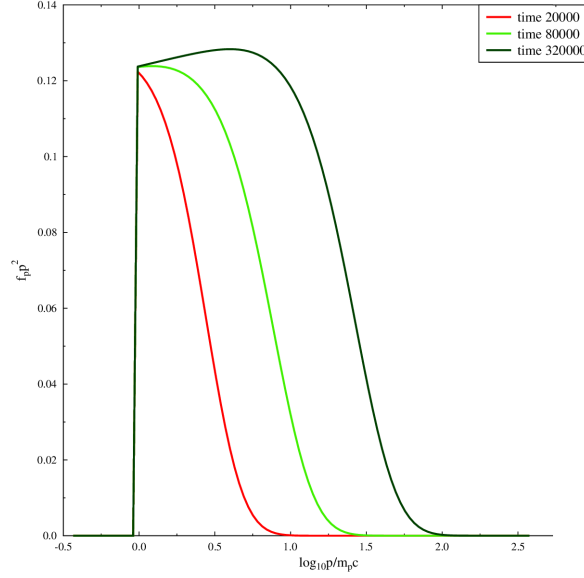


Рис. 6: Пример запуска программы на различных временах

Оценим время работы алгоритма и занимаемую память.

- Время:
- Программа линейно зависит от времени моделирования, так как каждый следующий шаг по времени зависит лишь от предыдущего.
 - Программа линейно зависит от логарифма импульса, так как моделирование по этой сетки независимо.
 - Программа линейно зависит от координаты, поскольку шаг по координате опирается лишь на соседние шаги, а метод прогонки - линеен по размеру матрицы.

Значит алгоритмическое время работы можно оценить как

$$T_e = O(N_t \cdot N_p \cdot N_x) \quad (3.1.1)$$

Память: Основная память выделяется на хранение функции распределения. Эта функция имеет два измерения: импульс и координату.

Значит оценка памяти, необходимой для работы, есть

$$M_e = O(N_x \cdot N_p) \quad (3.1.2)$$

Было написано решение диффузионно-конвективного уравнения с помощью разностной схемы и проанализирована зависимость уравнения от модификации параметров.

3.2 Анализ решения стохастическим методом

Остановимся подробнее на стохастическом методе. Рассмотрим его основные свойства, а так же приведём аналогии между двумя методами.

В качестве основного минуса этого метода можно выделить, разумеется, стохастическую природу получившихся графиков. Таким образом различные запуски одной и той же программы дадут различные результаты.

К плюсам подхода можно отнести независимость запуска от каждой из частиц, что даёт большие возможности для параллельного программирования. Это, а так же относительная простота написания и модификации кода делает данный метод привлекательным для дальнейших исследований.

На рисунке 7 показан пример запуска программы. Красной тонкой линией обозначен сам результат моделирования, а жирной зелёной - его усреднения скользящим средним. Как видно, форма графика 7 совпадает с аналогичной (рис. 3) для разностной схемы. И снова имеем $f \sim p^{-2}$.

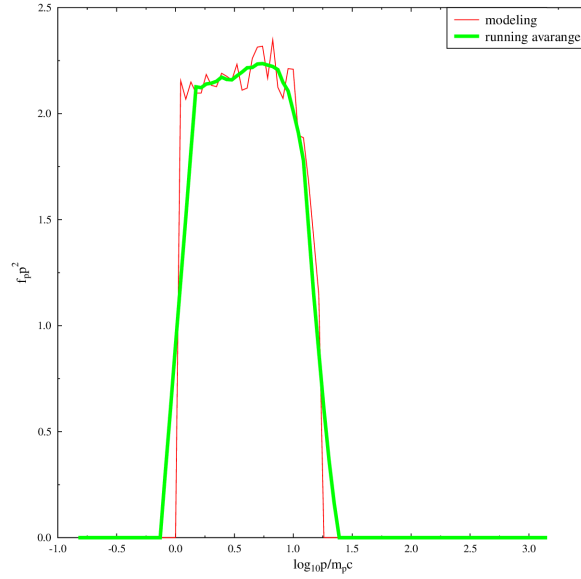


Рис. 7: Пример запуска программы решения стохастическим методом

На рисунке 8 показаны срезы программы для различного числа частиц. Различно число частиц есть аналог различного Q_{inj} для разностной схемы (рис. 4).

Как видно из этого графика, с ростом числа частиц,

- график становится менее изломанным
- высота графика, смысл которой и есть количество частиц, ускоряющихся до данной энергии, возрастает.
- максимальный импульс немного увеличивается, что объясняется тем фактом, что с увеличением числа частиц увеличивается вероятность нахождения в генеральной совокупности импульсов крайних значений.

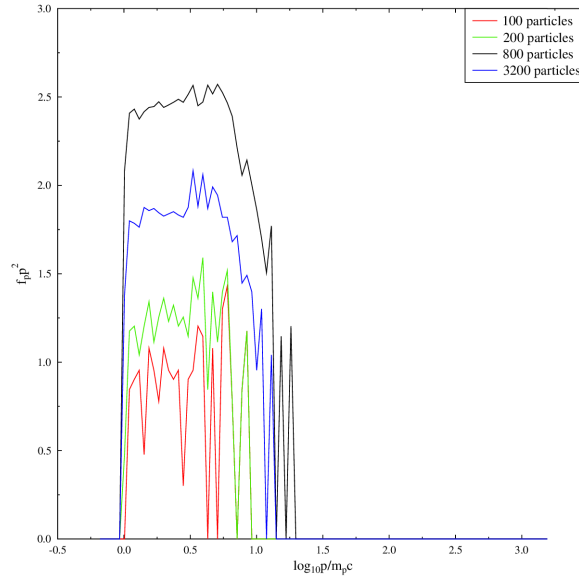


Рис. 8: Пример запуска программы для различного количества частиц

Рисунок 9 показывает отличие запуска для различных коэффициентов диффузии: постоянного (красная линия, более "плотный" график) и пропорционального импульсу (зелёная линия). (ср. рис. 5)

Основное отличие этих двух видов запуска - в большем максимальном импульсе, до которого долетают частицы. Из этого факта же вытекает большее количество частиц, которое нужно для запуска с константным коэффициентом диффузии, чтобы добиться той же плавности графика.

Объяснить такое различие можно, просто исходя из того, что частицам сложно ускориться до больших импульсов в условиях большого коэффициента диффузии.

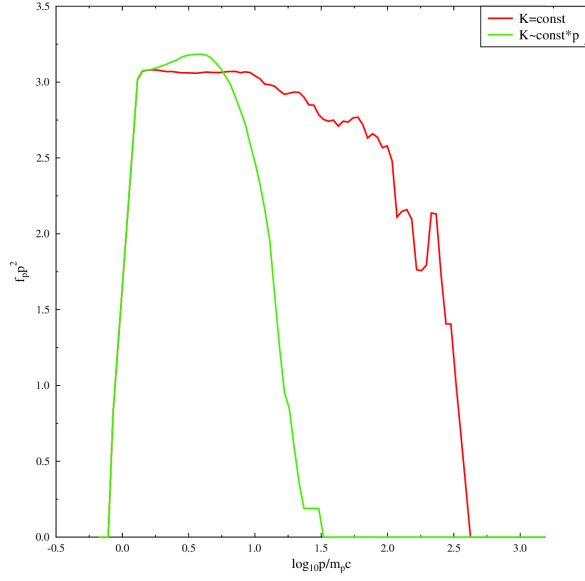


Рис. 9: Пример запуска программы $K_{\parallel} \equiv const$ и $K_{\parallel} \sim p$

Аналогично результатам для первого метода, приведём различные срезы по времени (ср. рис. 6): из рисунка 10 видно, что при различных временах, данных для ускорения частиц, частицы ускоряются до всё больших и больших импульсов.

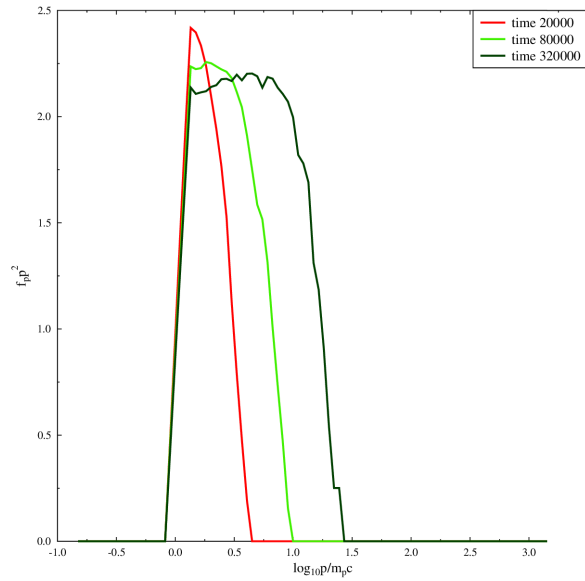


Рис. 10: Пример запуска программы на различных временах

Оценим время работы алгоритма и занимаемую память.

- Время:
- Программа линейно зависит от времени моделирования, так как каждый следующий шаг по времени зависит лишь от предыдущего.
 - Программа линейно зависит от числа частиц, так как запуск каждой частицы независим.

Значит алгоритмическое время работы можно оценить как

$$T_s = O(N_t \cdot N) \quad (3.2.1)$$

Память: В программе не используются массивы, а сама она занимает константную память.

Значит оценка памяти, необходимой для работы, есть

$$M_s = O(1) \quad (3.2.2)$$

Был изучен стохастический метод решения уравнений, написана программа по решению диффузионно-конвективного уравнения стохастическим методом и проанализирована зависимость решения от различных параметров.

3.3 Приложение: дополнительные результаты для стохастического метода

Приведём ещё некоторые результаты для стохастического метода, которые удалось получить, благодаря простоте подхода. Рисунок 11 показывает различие между возможностью ускорения без синхротронных потерь и с ними. Очевидно, что из-за потерь распределение находится в области меньших импульсов.

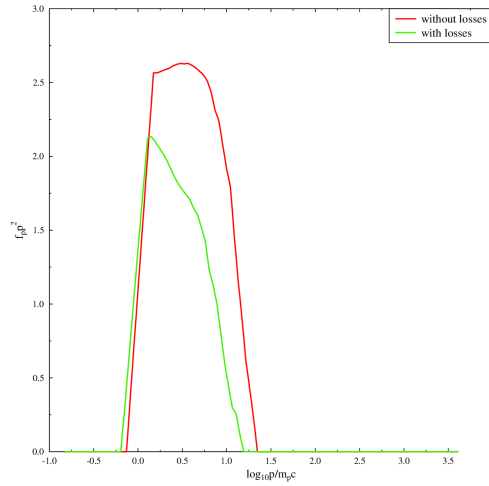


Рис. 11: Пример запуска программы без и с учётом синхротронных потерь

Рисунок 12 показывает распределение по оси x для частиц и фазовый портрет пространства.

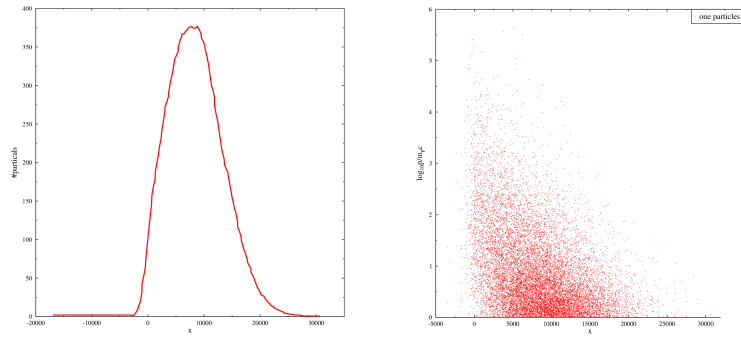


Рис. 12: Распределение по x (слева) и фазовый портрет (справа)

Рисунок 13 показывает различие между моделированием ускорения на одной и на двух ударных волнах. Как и указывалось в начале, процесс уско-

рения становится более жёстким ($f \sim p^{-1}$ против $f \sim p^{-2}$ в случае одной волны)

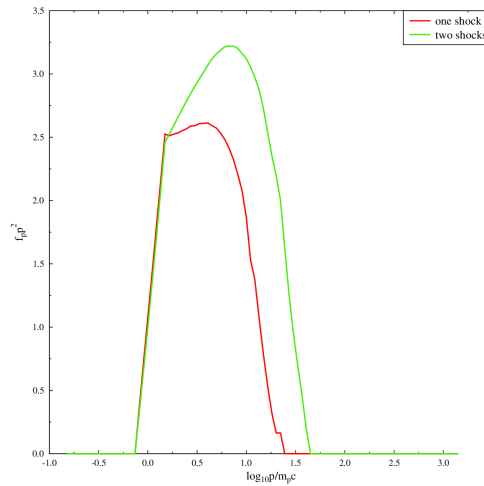


Рис. 13: Пример запуска программы на одной и двух волнах

Таким образом, стохастический подход оказывается гораздо более гибким в плане модификации и расширения изначальной задачи. В силу достаточной простоты физической модели, заложенной в его основу, имеется возможность эффективно и быстро менять код программы, получая при этом новые работающие модели.

3.4 Сравнение метода Эйлера и стохастического метода

Получив графики распределения для каждого из подходов, выполним их сравнение. Наложённые графики для одинакового максимального импульса P_{max} можно увидеть на рисунке 14.

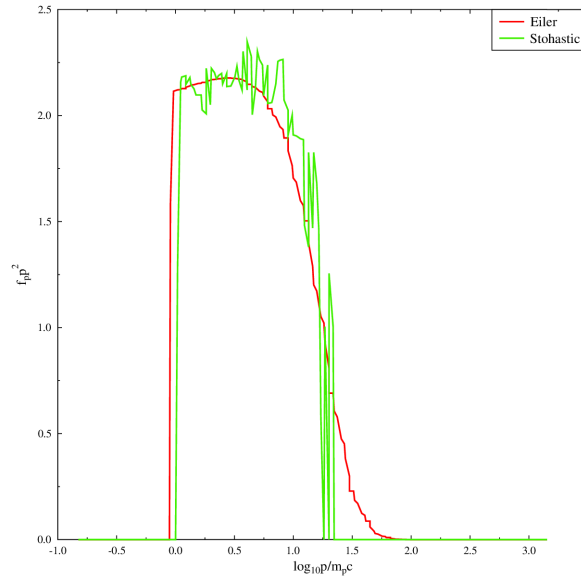


Рис. 14: Сравнение подходов

Сравнивая оба графика, можно наглядно увидеть эквивалентность подходов к моделированию.

Время исполнения программ так же оказалось практически идентичным: 2 минуты 47 секунд для первого подхода и 2 минуты 40 секунд для второго.

4 Выводы

В данной работе было реализован численный подход к ускорению на ударных волнах двумя способами:

Реализован подход с использованием разностной схемы и проанализирована зависимость получившегося решения от модификации переменных.

Реализован подход с использованием стохастического метода и проанализирована зависимость получившегося решения от модификации переменных.

Произведено сравнение обоих подходов и выяснены следующие особенности:

1 Форма спектра

- Форма спектра при стохастическом подходе всегда более изломана, нежели при решении с использованием разностной схемы.
- Однако форма спектра при стохастическом подходе всегда подчиняется огибающей вида p^{-2} , в то время как для метода Эйлера подъём происходит лишь на некоторых больших временах. (ср. графики 10 и 6)
- Для стохастического подхода интенсивность неразрывна связана с количеством изломов. Таким образом нельзя получить адекватный результат для небольшого числа частиц. В то время, как при первом подходе высота контролируется отдельным параметром - Q_{inj}

2 Время работы

- Как было описано выше, время работы программ для одинаковых максимальных импульсов фактически не различается.
- Алгоритмическое время работы программ - $O(N_p N_x N t)$ и $O(N_t N)$ - можно видеть в равенствах 3.1.1 и 3.2.1 соответственно. При большей детализации сетки разностный подход может привести к очень долгому ожиданию выхода графика на нужный уровень, в то время как стохастический подход будет лишь становиться плавнее.

3 Память

- Потребляемую программой память - $O(N_p N_x)$ и $O(1)$ - можно найти в равенствах 3.1.2 и 3.2.2 соответственно. Во время моделирования не возникало никаких проблем с избытком памяти, однако, возможно, что при сильном увеличении числа разбиений непостоянная требующаяся память для подхода с использованием разностной схемы может стать его минусом.

4 Возможность параллельного выполнения

- Оба подхода имеют в себе параллельную секцию. Для метода Эйлера это запуск программы по разным импульсам для одного момента времени, а для стохастического метода - запуск разных частиц.
- Из сказанного выше следует, что максимальное число потоков, на которое можно разбить программу выше для стохастического подхода.
- Также для стохастического подхода, согласно закону Амдала, выше возможное ускорение.

5 Возможность расширения кода

- 5.1. Подход с составлением разностных схем более гибок в плане возможности выбора сетки и конкретной схемы
- 5.2. Стохастический подход более прост в своём основании, что даёт уменьшает время модифицирования программы для различных физических процессов, что можно видеть благодаря "приложению" в результатах

Подводя итог, в обоих подходах есть свои плюсы и минусы, однако по расширяемости стохастический подход проявляет себя лучше подхода с решением с помощью разностных схем.

Список литературы

1. *Achterberg A., Krulls W. M.* A fast simulation method for particle acceleration // . — 1992. — . — Vol. 265. — Pp. L13–L16.
2. *Axford W. I., Leer E., Skadron G.* The acceleration of cosmic rays by shock waves // *International Cosmic Ray Conference*. — 1977. — Vol. 11. — Pp. 132–137.
3. *Bell A. R.* The acceleration of cosmic rays in shock fronts. I // . — 1978. — . — Vol. 182. — Pp. 147–156.
4. *Bell A. R.* The acceleration of cosmic rays in shock fronts. II // . — 1978. — . — Vol. 182. — Pp. 443–455.
5. *Berezhko E. G., Krymskiĭ G. F.* REVIEWS OF TOPICAL PROBLEMS: Acceleration of cosmic rays by shock waves // *Soviet Physics Uspekhi*. — 1988. — . — Vol. 31. — Pp. 27–51.
6. *Blandford R. D., Ostriker J. P.* Particle acceleration by astrophysical shocks // . — 1978. — . — Vol. 221. — Pp. L29–L32.
7. *Bykov A. M., Gladilin P. E., Osipov S. M.* Non-linear model of particle acceleration at colliding shock flows // . — 2013. — . — Vol. 429. — Pp. 2755–2762.
8. *Gladilin P. E., Bykov A. M., Osipov S. M.* Time-dependent model of particle acceleration in the vicinity of approaching magnetohydrodynamic flows. — 2013. — .
9. *Gladilin P. E., Bykov A. M., Osipov S. M.* Maximal energies of the particles accelerated by the system of converging magnetohydrodynamic flows. — 2014. — .
10. *Kang H.* Energy spectrum of nonthermal electrons accelerated at a plane shock. — 2011. — .

11. *Krymskii G. F.* A regular mechanism for the acceleration of charged particles on the front of a shock wave // *Akademiia Nauk SSSR Doklady*. — 1977. — . — Vol. 234. — Pp. 1306–1308.
12. *Годунов С. К. Рябенский В. С.* Введение в теорию разностных схем. — 1962.
13. *С. Степанов С.* Стохастический мир. — 2012.