1 Вычисление канонических форм XS-схем

1.0.1 Intro

Будем рассматривать только регулярные XS-схемы. Как было доказано в ?? в регулярных схемах матрицу B можно привести к нормальной форме Фробениуса, причем состоять она будет только из одной клетки. Одноклеточная каноническая матрица B имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_n \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен:

$$f_B(\lambda) = \lambda^n + b_n\lambda^{n-1} + \cdots + b_1. \tag{1.1}$$

1.0.2 Приведение матрицы B к нормальной форме Фробениуса

Пусть матрица B' нормальная форма Фробениуса матрицы B. Тогда существует обратимая матрица P такая, что $P^{-1}BP = B'$. Пусть $s_1, ..., s_n$ столбцы матрицы P, а $b' = (b'_1, ..., b'_n)^T$ последний столбец B', тогда из равенства $BP = B'P$ следует, что:

$$s_2 = Bs_1$$

$$s_3 = Bs_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = Bs_{n-1}$$

$$Pb' = Bs_n.$$

В итоге получаем, что для матрицы P должны выполняться равенства: $s_3 = B^2s_1$, $s_4 = B^3s_1$, ..., $s_n = B^{n-1}s_1$ и $Pb' = Bs_n$. Последнее равенство в итоге может быть записано в виде

$$(s_1, Bs_1, ..., B^{n-1}s_1)b' = B^ns_1 \Leftrightarrow (b'_1 + b'_2B + ... + b'_nBn - 1)s_1 = B^ns_1. \tag{1.2}$$

Заметим, что так как мы используем только преобразования подобия, то характеристические многочлены матриц B и B' равны, а по теореме Гамильтона-Кэли матрица B будет являться корнем своего характеристического многочлена $f_{B'}(\lambda) = \lambda^n + b'_n\lambda^{n-1} + \cdots + b'_1$. Значит $f_{B'}(B) = 0 = B^n + b'_nB^{n-1} + \cdots + b'_1 \Leftrightarrow B^n = b'_nB^{n-1} + \cdots + b'_1$. Подставляя это в равенство 1.2 получим верное тождество. В итоге имеем, что для того чтобы привести матрицу B к нормальной форме Фробениуса, достаточно, чтобы матрица P имела вид $(s_1, Bs_1, ..., B^{n-1}s_1)$ и была обратима.

Оглавление

1 Вычисление канонических форм XS-схем 1