同在一片蓝天下，我们用心浇灌，你用心耕耘，同心协力，共创心底的那份辉煌 ……

2022 考研最后冲刺

成功 5 套试卷

数学二

共创考研

微信号 共创考研 www. hfutky. cn

有了这套试卷，感受成功的喜悦时，请分享你的……

- 全国最成功的数学模拟试卷
- 名牌名校的超强辅导专家阵容
- 二十八年考研辅导经验的结晶
- 最优秀、最负责的数学辅导团队

共创考研辅导中心
Tel: 0551-62905018 18919665019

共创考研辅导老师的期待

共创考研辅导中心系原合肥工业大学考研辅导中心 2008 年改制后的考研辅导机构，共创考研具有二十八年考研辅导历史，在全国最有影响力的高质量辅导团队。多年来在这些优秀教职员工的共同努力与坚持下，共创考研（合工大考研）的品牌更加辉煌，**始终以领先的绝对优势，引领考研行业的不断创新和发展。**

共创考研辅导中心是高质量考研辅导团队。辅导内容分别为**数学、英语、政治**及全国各招生院校的**研究生考试专业课程**。经历二十年多年的考研辅导历史的沉淀与积累，共创考研拥有一大批自己的考研辅导的优秀辅导师资团队，在大家共同努力与坚持下，每年共创的考研辅导高端小班学员考研**过线率达全国考研机构之首**，每年共创辅导的**题型与命中率均达全国辅导机构最高记录**，最具影响力的每年"**共创（合工大）考研过关 5 套数学模拟试卷**"（数学一、数学三是 5 套，数学二是 4 套），是全国考研学子考研必做试卷，每年真题的命中题型均在 91%以上，在每年数学一、数学二与数学三考研真题试卷中大约不同的 50 道左右的数学题中，共创考研辅导的内容完全命中的真题每年至少有 6 题以上，由此被考生称**神奇的考研辅导团队。**

2022 年这套模拟试卷，希望你认真仔细的做一遍后再看参考答案，这样你一定会有很大收获，我们不期盼能多少真题被命中，但我们期待你做过这"共创 5 套模拟卷"后，能清楚的认识到自己在数学上的概念、结论与方法甚至技巧上的不足与问题，在今年的考场上有一份惊喜的同时有一份对我们这些老师在考研辅导多年辛勤积累的理解与支持，我们就已经非常满足与欣慰。盼待你有一份快乐考场经历、有一个充实顺利的明天。

共创考研数学研究中心

绝密★启用前

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:302）

（模拟试卷）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2021 年全国硕士研究生入学统一考试
数学（二）试卷 （模拟 1）

考生注意:本试卷共二十二题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

1．函数 $f(x)=\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{\ln x^2}$ 的无穷间断点个数为（　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2．设 $\sin x^n\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+1$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=k\int_0^x(e^{t^2}-1)\,dt$，若 $x\to0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则（　）.

(A) $k=6,n=2$　　(B) $k=4,n=2$　　(C) $k=6,n=3$　　(D) $k=4,n=3$

3．设 $y=y(x)$ 是方程 $x^2y^2+y=1\ (y>0)$ 所确定的函数，则（　）.

（A）$y(x)$ 有极小值，但无极大值　　（B）$y(x)$ 有极大值，但无极小值

（C）$y(x)$ 既有极大值，又有极小值　　（D）$y(x)$ 无极值

4．设 $f(x)=\int_0^x(e^{\cos t}\cos t-k)\,dt$，若积分 $\int_a^{a+2\pi}f(x)\,dx$ 的值与 a 无关，则 $k=$（　）.

（A）$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,dx$　　（B）$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,dx$

（C）$\int_0^{\pi}e^{\cos x}\cos x\,dx$　　（D）0

5．若 $x\to0$ 时 $\dfrac{\cos x+\ln(1+x)}{1+x}=1+ax+bx^2+o(x^2)$，则（　）.

（A）$a=0,b=-1$　（B）$a=-1,b=0$　（C）$a=1,b=-1$　（D）$a=-1,b=1$

6．设 f 为二元可微函数，$z=yf(\dfrac{y}{x},xy)$，则 $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A）$f+2\dfrac{x}{y}\cdot f_1'$　　（B）$f-2\dfrac{x}{y}\cdot f_1'$

（C）$f+2xyf_2'$　　（D）$f-2xyf_2'$

7．微分方程 $y''+2y'+2y=e^{-x}(\cos x+1)$ 的特解形式为（　）.

（A）$e^{-x}(a\cos x+b\sin x+c)$　　（B）$xe^{-x}(a\cos x+b\sin x+c)$

（C）$e^{-x}(ax\cos x+bx\sin x+c)$　　（D）$e^{-x}(a\cos x+b\sin x+cx)$

8．设4×5阶矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \alpha_3^{\mathrm{T}}\\ \alpha_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，且$\eta_1=(1,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$

是齐次线性方程组$A^{\mathrm{T}}x=0$的基础解系，现有 4 个命题

①α_1,α_3线性无关；

②α_1可由α_2,α_3线性表出；

③向量组α_3,α_4为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组；

④向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3+2\alpha_4$秩为 3.

以上命题中正确的是（　）.

（A）①③　　（B）②④　　（C）②③　　（D）①④

9．设A为n阶方阵；将A的第 3 行的 2 倍加到第 1 行，然后再将第 1 列的-2倍加到第 3 列，得到矩阵为B，则A和B　（　）.

（A）完全相同　　（B）相似又等价，

(C) 等价但不一定相似　　（D）合同但不相似

10．已知 3 阶矩阵A与 3 维列向量α，若向量组$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关，且$A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$，则秩$r(A)=$（　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题:1～16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在题中的横线上.

11．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-\sin(\sin x)}=$________.

12．设$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\int_1^t\dfrac{u\sin u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u\end{cases}$确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$__________。

13．设$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调可导，$f(0)=-1$，f^{-1}为f的反函数，若$\int_{x^2}^{x^2+f(x)}f^{-1}(t-x^2)\mathrm{d}t=x^2\sin x$，则$f(x)$.

14．二次积分$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x=$________.

15．设三阶常系数齐次线性微分方程有一个特解为$y=e^x(1+\cos x)$，则该方程的表达式为________________.

16．设A是三阶可逆矩阵．如果A^{-1}的特征值为$1,2,3$，则A的代数余子式之和$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（本题满分 10 分）设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=a$，已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(xt)\,\mathrm{d}t}{x}, x<0,\\ 1,\quad x=0,\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}+c, x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求常数 a,b,c 的值。

18（本题满分 12 分）设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，若点 $(1,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，且 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，（Ⅰ）常数 a,b,c 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调性区间和凹凸性区间；（Ⅲ）求函数 $f(x)$ 的极值.

19（本题满分 12 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 4\}$，求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}$ 在区域 D 上的最大值与最小值.

20（本题满分 12 分）设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$，求定积分 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

21（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有二阶连续的导数，证明：存在 $\xi\in[-1,1]$ 内使得 $\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}f'(\xi)+\dfrac{1}{3}\xi f''(\xi)$.

22（本题满分 12 分）（Ⅰ）设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，用可逆线性变换将 f 化为规范形，并求出所用的可逆线性变换. 并说明二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.（II）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$.

2022 数学二模拟 1 参考答案

1.【解】函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{\ln x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{2\ln[1-(x+1)]}=\frac{1}{2e},\lim_{x\to1}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{\ln x^2}=\infty,\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{\ln x^2}=\infty$$，故 $x=0,1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，　　答案 C.

2.【解法一】$f(x)=nx^{n-1}\cos x^n\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+\dfrac{x\sin x^n}{\sqrt{1+x^2}}\sim(\dfrac{n}{2}+1)x^{n+1}$，

$g'(x)=k(e^{x^2}-1)\sim kx^2,g(x)\sim\dfrac{k}{3}x^3$，由此可得 $n=2,k=6$.　　答案 A.

【解法二】$f(x)=nx^{n-1}\cos x^n\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+\dfrac{x\sin x^n}{\sqrt{1+x^2}}\sim(\dfrac{n}{2}+1)x^{n+1}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{n}{2}+1)(n+1)x^n}{k(e^{x^2}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{n}{2}+1)(n+1)x^n}{kx^2}=1$$，故 $n=2,k=6$.　　答案 A.

3.【解】方程对 x 求导得 $2xy^2+2yx^2\cdot y'+y'=0$，令 $y'=0$，因 $y>0$，得 $x=0$．代入原方程解得 $y=1$．再对 x 求导得 $2y^2+4xy\cdot y'+4xyy'+2x^2\cdot(y')^2+2x^2yy''+y''=0$，将 $x=0,y=1,y'=0$ 代入，得 $y''(0)=-2<0$，所以函数在 $x=0$ 点取极大值．又因函数只有一个驻点，所以函数无极小值．答案选 B.

4.【解】由题设知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，因此必有

$f(2\pi)=\int_0^{2\pi}(e^{\cos x}\cos x-k)\,dx=\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,dx-2\pi k=f(0)=0$，由此可得

$k=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos x\,dx$.　　答案 B.

5.【解】因为 $\cos x+\ln(1+x)=1+x-x^2+o(x^2)$，因此

$1+x-x^2+o(x^2)=(1+x)\left[1+ax+bx^2+o(x^2)\right]$，从而有

$1+x-x^2+o(x^2)=1+(a+1)x+(a+b)x^2+o(x^2)$，可得 $a+1=1,a+b=-1$，所以 $a=0,b=-1$.　　答案 A.

6.【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{x^2}\cdot f_1'+y^2f_2',\dfrac{\partial z}{\partial y}=f+\dfrac{y}{x}\cdot f_1'+xyf_2',\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=f+2xyf_2'$.

答案 C.

7.【解】方程的右边非齐次项可以分解为 $e^{-x}\cos x+e^{-x}$，由于方程 $y''+2y'+2y=0$ 的特征根为 $-1\pm i$，因此方程 $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$ 的特解形式为 $xe^{-x}(a\cos x+b\sin x)$，方程 $y''+2y'+2y=e^{-x}$ 的特解形式为 ce^{-x}，由非齐次线性方程的叠加原理知原方程的特解形式

为$e^{-x}(ax\cos x+bx\sin x+c)$.　　答案C.

8.【解】由已知可得，$r(A)=2$，$\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0$，$\alpha_2+\alpha_4=0$，$\alpha_1-2\alpha_3=0$，由此可得$\alpha_1,\alpha_3$线性相关，　α_2,α_4线性相关，进一步可知α_2,α_3线性无关，α_3,α_4线性无关，从而α_1可由α_2,α_3线性表出；向量组α_3,α_4为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组；$r(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3+2\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,0)=2$.　　答案C.

9.【解】　由题意知$\boldsymbol{E}(1,3(2))\boldsymbol{AE}(1,3(-2))=\boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{E}(1,3(-2))$可逆且$\boldsymbol{E}(1,3(-2))^{-1}=\boldsymbol{E}(1,3(2))$ 所以$\boldsymbol{E}(1,3(-2))^{-1}\boldsymbol{AE}(1,3(-2))=\boldsymbol{B}$.　　答案B.

10.【解】　由$A(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha,3A\alpha-2A^2\alpha)$

$=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，因为向量组$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关，所以$A$与矩阵

$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$相似，所以$r(A)=2$.　　答案C.

11.【解】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\left(e^{\sin x-x}-1\right)}{\sin x-\sin(\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\sin x-\sin(\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\cos x\left[1-\cos(\sin x)\right]}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}=-1$.　　应填$-1$.

12.【解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\sin t^2,\dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=1}=\dfrac{(\frac{1}{2}\sin t^2)'}{\frac{2t}{1+t^2}}\Bigg|_{t=1}=\dfrac{t\cos t^2}{\frac{2t}{1+t^2}}\Bigg|_{t=1}=\cos1$.　　应填$\cos1$.

13.【解】原等式可化为$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\,du=x^2\sin x$，对$x$求导可得$xf'(x)=x^2\cos x+2x\sin x$，所以$f'(x)=x\cos x+2\sin x$，$f(x)=f(0)+\int_0^x(t\cos t+2\sin t)\,dt=x\sin x-\cos x$.

应填$x\sin x-\cos x$.

14.【解】原式$=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}r\,dr=\dfrac{3\pi}{8}(1-e^{-1})$.　　应填$\dfrac{3\pi}{8}(1-e^{-1})$.

15.【解】由题设知$y_1=e^x,y_2=e^x\cos x$必然也是该方程有特解，因此该方程的特征方程必为

$(r-1)(r^2-2r+2)=0$，即为$r^3-3r^2+4r-2=0$，由此可得该方程的表达式为$y'''-3y''+4y'-2y=0$.　　应填$y'''-3y''+4y'-2y=0$.

16.【解】由题设知，A 的特征值为 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$，于是 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\dfrac{1}{6}$，由 $A^*=|A|A^{-1}$ 可得 A^* 的特征值分别为 $\lambda_1^*=\dfrac{1}{6},\lambda_2^*=\dfrac{1}{3},\lambda_3^*=\dfrac{1}{2}$，由此可得

$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\operatorname{tr}(A^*)=\lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^*=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=1$. 应填1.

17【解】由题设知 $g(0)=0$，$\int_0^1 g(xt)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u$，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)}{2x}=\dfrac{a}{2}=f(0)=1,a=2$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+b\cos x}{x^2}+c\right)=1$，则有 $b=-2,c=0$.

18【解】（Ⅰ）由题设可知 $a+b+c+1=0,12+4a+b=0,6+2a=0$，由此可得 $a=-3,b=0,c=2$；

（Ⅱ）$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0,x=0,x=2$，$f''(x)=6x-6$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 与 $[2,+\infty)$ 上是单增的，在 $[0,2]$ 上单减，$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上是凸的，在 $[1,+\infty)$ 上是凹的；

（Ⅲ）$f(0)=2$ 是 $f(x)$ 的极大值，$f(2)=-2$ 是 $f(x)$ 的极小值.

19【解】由 $\begin{cases}f_x'(x,y)=(2x-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y}=0,\\ f_y'(x,y)=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y}=0\end{cases}$ 可解得 $f(x,y)$ 在区域 D 内的驻点为 $(1,1)$，且有 $f(1,1)=2e^{-2}$.

D 的边界为 $l_1+l_2+l_3$，其中 $l_1:y=0,0\le x\le4$，$l_2:x=0,0\le y\le4$，$l_3:y=4-x,0\le x\le4$.

①$(x,y)\in l_1$ 时，令 $g(x)=f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x},x\in[0,4]$，$g'(x)=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}=0$ 得 $g(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内的驻点为 $x=2,g(0)=0,g(2)=4\mathrm{e}^{-2},g(4)=16\mathrm{e}^{-4}$，由于 $0<\mathrm{e}^{-1}<4\mathrm{e}^{-2}$，因此函数 $f(x,y)$ 在 l_1 上的最大值与最小值分别为 $4\mathrm{e}^{-2},0$；

②由对称性可得函数 $f(x,y)$ 在 l_2 上的最大值与最小值分别为 $4\mathrm{e}^{-2},0$；

③解法一 $(x,y)\in l_3$ 时，令 $\varphi(x)=f(x,4-x)=(2x^2-8x+16)\mathrm{e}^{-4},x\in[0,4]$，$\varphi'(x)=4(x-2)\mathrm{e}^{-4}=0$ 得 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内的驻点为 $x=2$，$\varphi(0)=\varphi(4)=16\mathrm{e}^{-4},\varphi(2)=8\mathrm{e}^{-4}$，因此函数 $f(x,y)$ 在 l_3 上的最大值与最小值分别为 $16\mathrm{e}^{-4},8\mathrm{e}^{-4}$；

综合前面讨论可知函数函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}$ 在区域 D 上的最大值为 $4\mathrm{e}^{-2}$，最小值为 0.

③解法二 所求即为函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}$ 满足条件 $\varphi(x,y)=x+y-4=0,x\in[0,4]$ 的条件极值问题.

令 $F(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}+\lambda(x+y-4)$，由

$$\begin{cases}F_x'(x,y,\lambda)=(2x-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y}+\lambda=0,\\ F_y'(x,y,\lambda)=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y}+\lambda=0,\\ F_\lambda'(x,y,\lambda)=x+y-4=0.\end{cases}$$ 得所求条件极值的驻点为 $x=2,y=2$，

$f(2,2)=8\mathrm{e}^{-4}$，再由 $f(0,4)=f(4,0)=16\mathrm{e}^{-4}$，可得函数 $f(x,y)$ 在 l_3 上的最大值与最小值分别为 $16\mathrm{e}^{-4},8\mathrm{e}^{-4}$.

20 【解】$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$

$$=1+\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(y)f(y-x)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

而 $\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x\xlongequal{t=y-x}\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$，令 $F(y)=\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(y)=f(y)$，因而有

$\int_0^1\left[f(y)\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^1 F'(y)F(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}F^2(y)\Big|_0^1=\frac{1}{2}I^2$. 由此可得 $I=1+\frac{1}{4}I^2$，解得 $I=2$.

21【证明】令 $F(x)=xf(x)$，那么函数 $F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 有二阶连续的导数，由连续函数性质知 $F(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上可以取到最大值及最小值，记

$\max\limits_{x\in[-1,1]}\{F''(x)\}=M,\max\limits_{x\in[-1,1]}\{F''(x)\}=m$，由麦克劳林公式知 $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ 时有

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(\xi)x^2=F'(0)x+\frac{1}{2}F''(\xi)x^2$，其中 ξ 为介于 0 到 x 之间的某个点，由 $m\le F''(x)\le M$ 可得 $F'(0)x+\frac{1}{2}mx^2\le F(x)\le F'(0)x+\frac{1}{2}Mx^2$，对上述不等式两边同时在 $[-1,1]$ 上积分后可得 $\frac{1}{3}m\le\int_{-1}^1 F(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{3}M$，从而有

$m\le 3\int_{-1}^1 F(x)\,\mathrm{d}x\le M$，根据介值定理知存在 $\xi\in[-1,1]$ 内使得

$F''(\xi)=2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=3\int_{-1}^1 xf(x)dx$，即有 $\int_{-1}^1 xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$.

22【解】(I) 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 用配方法化成标准形，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=(x_1-x_2+x_3)^2+x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$$
$$=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2.$$

令 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=y_1,\\ x_2-2x_3=y_2,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2+y_3,\\ x_2=y_2+2y_3,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 得 f 的规范形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

所作的可逆线性变换为 $x=Cy$, 其中 $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. 由于二次型的规范形为

$y_1^2+y_2^2+y_3^2$，正惯性指数 $p=3=r(A)$，因此对应矩阵 A 是正定矩阵（也可用定义证明，或用顺序主子式全部大于零证明）.

（II）**解法一** 由题设知，$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{pmatrix}$是$f(x_1,x_2,x_3)$的对应矩阵，即

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

由（I）的结论可知，令$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有

$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}$，故$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}$，令$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}$，则有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$.

$$(\boldsymbol{C}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$=\left(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{C}^{-1}\right)$.

因此令$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$.

解法二 由（I）知$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$

$$=(x_1-x_2+x_3,x_2-2x_3,x_3)\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_2-2x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

因此令$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$.

绝密 * 启用前

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 2）

考生注意:本试卷共二十二题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

1．曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x+1}}$ 的渐近线条数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．设 $f(x)$ 是单调可导函数，f^{-1} 是 f 它的反函数，且 $f(0)=f'(0)=2$，$g(x)=f^{-1}\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$，则 $g'(0)=$ ().

（A）2　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　(D) 3

3．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0, f''(x)>0$，$0<a<b$，则当 $x\in(a,b)$ 内时，有（　　）.

（A）$af(x)>xf(a)$　（B）$xf(x)>af(a)$　（C）$bf(x)>xf(b)$　（D）$xf(x)>bf(b)$

4．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=1$，又 $f(x)=\int_0^x\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t-x^2$，则（　）.

微信公众号：djky66
（顶尖考研祝您上岸）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5．若 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\tan x)^{\frac{1}{\sqrt{1+4x}-1}}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}xe^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$，则 $a=$（　　）.

（A）2　　（B）3　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{2}$

6．设 $y=y(x)$ 是常系数微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，且 $y(x)e^{2x}$ 是以 π 为周期的周期函数，则常数 p,q 的取值为（　　）.

（A）$p=-4,q=-8$（B）$p=-4,q=8$（C）$p=4,q=-8$（D）$p=4,q=8$

7．设 $a>0$，则积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$ ().

（A）$\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（C） $\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(x,y)dy$ （D） $\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{-\sqrt{ax-x^2}} f(x,y)dy$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列结论正确的是（ ）.

（A） $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$ （B） $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$

（C） $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ （D） $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}>r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则下列命题不正确的是（）.

（A）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$

（B）若 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解

（C）方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$（其中 b 为任意 n 维列向量）恒有解

（D）若 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

10. 设 A 是三阶对称矩阵，设 α_1，α_2 线性无关，且 $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=\boldsymbol{0}\ (\alpha_3\neq\boldsymbol{0})$，且 $\boldsymbol{Q}=(\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2)$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 在可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形是（ ）.

(A) $2y_1^2+4y_2^2+y_3^2$ （B） $4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$

(C) $4y_1^2+4y_2^2$ （D） $4y_1^2+4y_3^2$

二、填空题:1～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中的横线上.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+2\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+(n-1)\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}\right]=$______.

12. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sqrt{2}\sin(x^2+y)-e^x+xy^2=0$ 确定，且 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $dy|_{x=0}=$______.

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{2t}-\frac{x^2}{2t^2}\right)^t$，则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0,x=2$ 以及 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所形成的立体体积是______.

14. 设 (x_0,y_0) 为曲线 $y=\ln x$ 上曲率半径最小的点，则 $(x_0,y_0)=$______.

15. 设 $z=\int_x^y e^{-(x^2+y^2+u^2)}du$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$______.

16. 设 $x_i\neq 0,i=1,2,3,4$,则行列式 $D=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & a & a\\ a & a+x_2 & a & a\\ a & a & a+x_3 & a\\ a & a & a & a+x_4\end{vmatrix}=$______.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\lambda\sin t,\\ y=1-\lambda\cos t\end{cases}$ 确定，其中 $\lambda\in(0,1),t\in(0,2\pi)$.　（Ⅰ）求函数 $y(x)$ 的极值；（Ⅱ）求曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

18（本题满分 12 分）设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 及 $x=t$ $(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

19（本题满分 12 分）设数 $z=z(x,y)$ 由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

20（本题满分 12 分）设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,(x-1)^2+y^2\ge 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D(5ye^{y^2}+x^2+y^2-2x+\sin y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

21（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明：（I）存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$；（II）存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\ne\eta$ 使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

22（本题满分 12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维列向量，且 $\alpha_1\ne\mathbf{0},\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\boldsymbol{A}\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$. 证明：（I）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；（II）$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

2022 数学二模拟 2 参考答案

1.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}-1)+(1+\dfrac{2}{x-1})\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}]=2$，所以 $y=x+2$ 是它的斜渐近线；$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$，所以 $x=1$ 是它的垂直渐近线；$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\infty$，所以 $x=-1$ 也是它的垂直渐近线；故共有 3 条. 答案 C.

2.【解】$g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)'\Bigg|_{x=0}=\dfrac{1}{f'(0)}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}\Bigg|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$. 答案 B.

3.【解】因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增，考察函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},x\in(0,+\infty)$ 则有 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，由于 $f(0)=0$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)=f(0)+f'(\xi)x=f'(\xi)x,$，从而有 $g'(x)=\dfrac{x[f'(x)-f'(\xi)]}{x^2}>0$，由此知函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增，因此当 $x\in(a,b)$ 时有 $\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f(b)}{b}$. 答案 A.

4.【解】由题设知 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$，$f'(x)=\varphi(x)-2x,f'(0)=0,f''(0)=\varphi'(0)-2=-1<0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 答案 B.

5.【解】$\lim\limits_{x\to0}(1+a\tan x)^{\frac{1}{\sqrt{1+4x}-1}}=e^{\frac{a}{2}},\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}xe^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=xe^{\frac{1}{2}x}\Big|_{-\infty}^{a}-\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=(a-2)e^{\frac{a}{2}}$，因此有 $a-2=1,a=3$. 答案 B.

6.【解】由题设知该方程的通解应为 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$ 的形式，因此该方程的特征方程为 $r^2+4r+8=0$，应取 $p=4,q=8$. 答案 D.

7.【解】原二次积分在极坐标系中的积分区域为 $D=D_1\cup D_2$，其中
$D_1:0\le r\le a\cos\theta,-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le0,D_2:0\le r\le a,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.
在直角坐标系中 $D:0\le x\le a,-\sqrt{ax-x^2}\le r\le\sqrt{a-x^2}$. 答案 A.

8.【解】由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}))$，由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=n$，由右乘行满秩的矩阵不改变矩阵的秩可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}))=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 答案 A.

9.【解】根据 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解可知，基础解系中向量个数
$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\Rightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，从而 A 正确；

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=\mathrm{r}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})]\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\Rightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$ 可知 C 正确；

由于 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 均为 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$，由此可知 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仍

为 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的基础解系，从而 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解，D 选项正确；

由 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$ 可得 $r(\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{B})$，易知 A 的逆命题不正确，从而不能推出 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解.，反例 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，满足条件

$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，但不是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解，从而 B 选项错误.

答案 B.

10.【解】 由已知条件 $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=\mathbf{0}\ (\alpha_3\neq\mathbf{0})$ 以及 α_1，α_2 线性无关，可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 2,2,0 的三个线性无关的特征向量，令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 对应于特征值 4 的两个线性无关的特征向量，$2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 对应于特征值 0 的特征向量，因此

$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}4&&\\&0&\\&&4\end{pmatrix}$，$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 在可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形是 $4y_1^2+4y_3^2$.

答案 D.

11.【解】原式 $=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$. 应填 $\frac{1}{3}$.

12.【解】对原方程式两边同时求微分可得

$$\sqrt{2}\cos(x^2+y)(2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-e^x\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0,$$

又由题设可知 $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{4}$，所以有 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\frac{16-\pi^2}{16}\mathrm{d}x$. 应填 $\frac{16-\pi^2}{16}\mathrm{d}x$.

13.【解】$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{2t}-\frac{x^2}{2t^2}\right)^{\frac{2t^2}{tx-x^2}}\right]^{\frac{t^2x-tx^2}{2t^2}}=e^{\frac{x}{2}}$，所求立体体积为

$V=2\pi\int_0^2 xe^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=4\pi(x-2)e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=8\pi$. 应填 8π.

14.【解】$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$，曲率 $K=\dfrac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}}=\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$，$K'=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$，令 $K'=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）. $K''\big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-8}{9\sqrt{3}}<0$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，曲率

K 取得极大值，同时也是最大值，相应的曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}$ 取得最小值．故

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2\right).$$

应填 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$

15.【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2xe^{-(x^2+y^2)}\int_x^y e^{-u^2}du-e^{-(2x^2+y^2)}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{-(x^2+y^2)}\int_x^y e^{-u^2}du-2xe^{-(x^2+2y^2)}+2ye^{-(2x^2+y^2)}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=2e^{-1}$．应填 $2e^{-1}$．

16.【解】将 D 的第1行的 -1 倍加到第 $2,3,4$ 行，再将第 $i(i=2,3,4)$ 列的 $\dfrac{x_1}{x_i}$ 倍加到第一列，得

$$D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & a \\ a & a+x_2 & a & a \\ a & a & a+x_3 & a \\ a & a & a & a+x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & a \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+x_1+\sum\limits_{i=2}^{4}\dfrac{ax_1}{x_i} & a & a & a \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a+x_1+\sum_{i=2}^{4}\frac{ax_1}{x_i}\right)x_2x_3x_4=x_1x_2x_3x_4\left(\frac{a}{x_1}+\frac{x_1}{x_1}+\sum_{i=2}^{4}\frac{a}{x_i}\right)$$

$=x_1x_2x_3x_4\left(1+a\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{x_i}\right)$．　　应填 $x_1x_2x_3x_4\left(1+a\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{x_i}\right)$．

17【解】(Ⅰ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\dfrac{dy}{dx}=0,t=\pi,\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi}=\dfrac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，故 $t=\pi$ 时函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

(Ⅱ) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3}=0,\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$ 在上述两个点的两侧异号，故点 $(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 与 $(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 均为曲线 $y=y(x)$ 的拐点．

18【解法一】由题意知 $\pi\int_1^t f^2(x)dx=\pi t\int_1^t f(x)dx$，两边对 t 求导得

$f^2(t)=\int_1^t f(x)dx+tf(t)$，代入得 $t=1$ $f(1)=1$ 或 $f(1)=0$（舍去）．

再求导得 $2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t)$．记 $y=f(t)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{2y}t=1$，其通解为

$$t=e^{-\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\left(\int e^{\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)，即 t=\frac{C}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y.$$

代入 $t=1$，$y=f(1)=1$ 得 $C=\dfrac{1}{3}$，从而 $t=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3\sqrt{y}}$，故所求曲线方程为

$$x=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3\sqrt{y}}.$$

【解法二】 同解法一可得 $2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t)$，$f(1)=1$．记 $f(t)=y$，则有 $2yy'=2y+ty'$，整理得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2y}{2y-t}$．设 $\dfrac{y}{t}=u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u+t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，原方程化为 $t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{3u-2u^2}{2u-1}$，分离变量得 $\dfrac{2u-1}{u(3-2u)}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$，即 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-1}{u}+\dfrac{4}{3-2u}\right)\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$，两边同时积分得 $-\dfrac{1}{3}\ln u(3-2u)^2=\ln t+\ln C$，即 $u^{-\frac{1}{3}}(3-2u)^{-\frac{2}{3}}=Ct$．代入 $t=1,u=\dfrac{f(1)}{1}=1$ 得 $C=1$，所以 $u(3-2u)^2=\dfrac{1}{t^3}$．代入 $u=\dfrac{y}{t}$ 并化简得 $y(3t-2y)^2=1$，即 $t=\dfrac{1}{3\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y$．故所求曲线方程为 $x=\dfrac{1}{3\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y$．

19【解】由已知方程分别求 x,y 偏导，$\begin{cases}4x+2zz'_x+8z+8xz'_x-z'_x=0, & (1)\\ 4y+2zz'_y+8xz'_y-z'_y=0, & (2)\end{cases}$

将驻点条件代入 $z'_x=z'_y=0$ 得驻点方程组 $\begin{cases}4x+8z=0,\\ 4y=0,\\ 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x=\dfrac{16}{7},\\ y=0,\\ z=-\dfrac{8}{7}\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\\ z=1.\end{cases}$ 由（1）分别求 x,y 偏导，（2）求 y 偏导

$$\begin{cases}4+2z_x'^2+2zz''_{xx}+8z'_x+8z'_x+8xz''_{xx}-z''_{xx}=0,\\ 2z'_yz'_x+2zz''_{xy}+8z'_y+8xz''_{xy}-z''_{xy}=0,\\ 4+2z'_y+2zz''_{yy}+8xz''_{yy}-z''_{yy}=0,\end{cases}$$

再将 $z'_x=z'_y=0$ 代入：$\begin{cases}4+(2z+8x-1)z''_{xx}=0,\\ (2z+8x-1)z''_{xy}=0,\\ 4+(2z+8x-1)z''_{yy}=0,\end{cases}$

$\because$ 在 $\left(\dfrac{16}{7},0,-\dfrac{8}{7}\right)$ 点，有 $A=z''_{xx}\left(\dfrac{16}{7},0\right)=-\dfrac{28}{105},B=z''_{xy}\left(\dfrac{16}{7},0\right)=0,C=z''_{yy}\left(\dfrac{16}{7},0\right)=-\dfrac{28}{105}$，

$AC-B^2>0$，且$A<0$，所以$z(\frac{16}{7},0)=-\frac{8}{7}$为函数$z(x,y)$的极大值.

在$(-2,0,1)$点，$A=z''_{xx}(-2,0)=\frac{4}{15},B=z''_{xy}(\frac{16}{7},0)=0,C=z''_{yy}(-2,0)=\frac{4}{15}$，

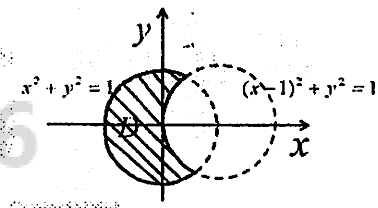
$AC-B^2>0$，且$A>0$，所以$z(-2,0)=1$为函数$z(x,y)$的极小值.

20【解法一】D关于x轴对称，则有$\iint\limits_D(5ye^{y^2}+\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，记$D$在$x$轴上方的部分为$D_1$，那么有$I=\iint\limits_D(x^2+y^2-2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{1}(r^2-2r\cos\theta+1)r\,\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-2r\cos\theta+1)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\cos\theta-4\cos^2\theta+\frac{8}{3}\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\cos2\theta+\frac{1}{3}\cos4\theta\right)\mathrm{d}\theta+\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3}$$



$$=\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{4}{3}\sin\theta-\frac{1}{3}\sin2\theta+\frac{1}{12}\sin4\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}}{8}.$$

【解法二】D关于x轴对称，则有$\iint\limits_D(5ye^{y^2}+\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，记$D$在$x$轴上方的部分为$D_1$，那么有$I=\iint\limits_D(x^2+y^2-2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作变量代换$u=x-1,v=y$，则$D_1=\{(u,v)\mid(u+1)^2+v^2\le1,u^2+v^2\ge1,v\ge0\}$，则有

$$I=2\iint\limits_{D_1}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{-2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(16\cos^4\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(5+8\cos2\theta+2\cos4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(5\theta+4\sin2\theta+\frac{1}{2}\sin4\theta\right)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}}{8}.$$

21【证明】(I) 令$F(x)=f(x)+3x$，则$F(0)=0,F(1)=4$，由连续函数的介值定理知存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=f(x_0)+3x_0=2$，从而有$f(x_0)=2-3x_0$；

（II）对函数$f(x)$分别在区间$[0,x_0]$以及$[x_0,1]$应用拉格朗日中值定理知存在$\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,1),\xi\ne\eta$，使得$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0},f'(\eta)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}$，将$f(x_0)=2-3x_0,f(0)=0,f(1)=1$，代入可得$1+f'(\xi)=\frac{2-2x_0}{x_0},1+f'(\eta)=\frac{-2x_0}{x_0-1}$，由此可得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

22【证明】（I）由 $A\alpha_1=\alpha_1$ 得 $(A-E)\alpha_1=\mathbf{0}$，由 $A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$ 得 $(A-E)\alpha_2=\alpha_1$，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，得 $(A-E)\alpha_3=\alpha_2$．令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0} \qquad ①$$

两边左乘以 $(A-E)$ 得

$$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=\mathbf{0} \qquad ②$$

两边再左乘以 $(A-E)$ 得 $k_3\alpha_1=\mathbf{0}$．由 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，得 $k_3=0$，代入②式，得 $k_2=0$，再代入①，得 $k_1=0$．于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

（II）令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$ 得

$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^3=0$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，所以 $\boldsymbol{B}$ 只有一个线性无关的特征向量，即 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\boldsymbol{A}$ 也不可对角化．

绝密 * 启用前

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 3）

考生注意：本试卷共二十二题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)(e^{x^2}-1)}{\ln\left(1+\left|x^3\right|\right)}, & x\neq 0,\\ 3, & x=0.\end{cases}$ 若 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）.

（A）$f(0)=0, f'(0)$ 不存在　　（B）$f(0)=0$，$f'(0)=3$

（C）$f(0)=3, f'(0)$ 不存在　　（D）$f(0)=3, f'(0)=1$

2. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可导函数，且满足 $f(0)=0$. 又设 $f'(x)$ 单调增加. 那么 $x\in(0,1)$ 时必有（　　）.

（A）$f(1)x<f(x)<f'(0)x$　　（B）$f'(0)x<f(x)<f(1)x$

（C）$f(x)<f(1)x<f'(0)x$　　（D）$f(x)<f'(0)x<f(1)x$

3. 设函数 $f(x)=e^x$，若 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^3}{x^3}=$（　　）

（A）1　　（B）$\dfrac{1}{8}$　　（C）$\dfrac{1}{27}$　　（D）$\dfrac{1}{54}$

4. 若方程 $\ln x=a\sqrt{x}$ 无实根，则（　　）.

（A）$a\le 0$　　（B）$0<a<\dfrac{2}{e}$　　（C）$a=\dfrac{2}{e}$　　（D）$a>\dfrac{2}{e}$

5. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$，$I_2=\dfrac{4^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$. 则（　）.

（A）$I_1<1<I_2$　　（B）$1<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<1$　　（D）$I_2<1<I_1$

6. 设 $F(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0, F_x'(x_0,y_0)=0, F_y'(x_0,y_0)<0$. 若 $y=y(x)$ 是由方程式 $F(x,y)=0$ 确定的在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内的隐函数，则 x_0 是函数 $y=y(x)$ 的极大值点的一个充分条件是（　　）.

（A）$F''_{xx}(x_0,y_0)>0$　　（B）$F''_{xx}(x_0,y_0)<0$

（C）$F''_{yy}(x_0,y_0)>0$　　（D）$F''_{yy}(x_0,y_0)<0$

7. 已知 $y=C_1+C_2\sin x+\cos x$ (其中 C_1,C_2 为任意常数)是某二阶线性微分方程的通解，则该方程是（　　）.

（A）$y''+\tan x\cdot y'=\sec x$　　（B）$y''+\tan x\cdot y'=-\sec x$

（C）$y''-\tan x\cdot y'=\sec x\cos 2x$　　（D）$y''-\tan x\cdot y'=\csc x\sin 2x$

8．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-3&-2\\5&-8&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\a&-2\\3&b\end{pmatrix}$,已知$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解．则（　　）．

（A）$a=1, b=2$　（B）$a=2, b=1$　（C）$a=1, b=-3$　（D）$a=-1, b=3$

9．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶实对称矩阵，且都可逆，则下列命题不正确的是（　　）．

（A）存在可逆阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

（B）存在可逆阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

（C）存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$

（D）存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$

10．设$\boldsymbol{A}$是3阶正定矩阵，$\boldsymbol{x}$是3维列向量，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵，记

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}&1\end{pmatrix},\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix};$$

则二次型$f=|\boldsymbol{PW}|$的正惯性指数p与负惯性指数q分别是（　　）．

（A）$p=2,q=1$　　（B）$p=3,q=0$

（C）$p=1,q=1$　　（D）$p=0,q=3$

二、填空题:1～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中的横线上.

11．设$f(x),g(x)$在$x=0$的某个邻域内可求任意阶导数，$f(0)=2,g(0)=g'(0)=1$，且$f(x),g(x)$满足$f'(x)+xg(x)=e^x-1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\ln(1+x^3)}=$__________。

12．设$f(x)=(x^2-1)\ln(1-x^2)$，则$f^{(10)}(0)=$________．

13．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x=$_______．

14．由曲线$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},y=\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{2}x^2$及$y$轴围成的平面图形边界曲线周长是____________．

15．设函数$z=z(x,y)$由方程式$\mathrm{e}^z=(x^2-1)z+x(\mathrm{e}+y)$确定，则$\mathrm{d}z\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$________．

16．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&4&3&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}$，且存在矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则矩阵$\boldsymbol{P}=$__________．

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（本题满分 10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{2+|x-2|}$ 的单调性区间、极值和最值.

18（本题满分 12 分）求曲线 $x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$ 所围成的图形的面积，$a>0$.

19（本题满分 12 分）已知 $z=xf(\dfrac{y}{x})+2y\varphi(\dfrac{x}{y})$，其中 f,φ 均为二次可微函数.

（I）求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　（II）当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-2y^2, f(1)=f'(1)=\dfrac{1}{9}$ 时，求 $f(y)$.

20（本题满分 12 分）设 $f(t)=\iint\limits_D |xy-t|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, t\in[0,1]$，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

（I）求 $f(t)$ 的初等函数表达式；（II）证明：存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $f(t_0)$ 是 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 内唯一的最小点.

21（本题满分 12 分）设 $f(x)=\ln x$.（I）写出函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 带拉格朗日型余项的三阶泰勒公式展开式；（II）证明：$0<\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}<\dfrac{(x-1)^3}{6}\ (1<x<2)$.

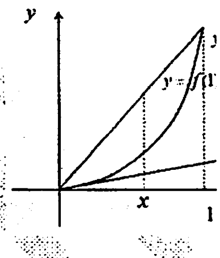
22（本题满分 12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(1,2,-1)$ 且 $\alpha_1=(1,k+1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(k-1,-k,1)^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 的特征向量，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ_0 对应的特征向量 $\beta=(2,-5k,2k+1)^{\mathrm{T}}$.（Ⅰ）求 k 与 λ_0 的值；（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}^*$.

2022 数学二模拟 3 参考答案

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号里.

1.【解】由题设知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=3$，由此可得 $f(0)=0, f'_+(0)=3, f'_-(0)=-3, f'(0)$ 不存在. 答案A.

2.【解】$f(0)=0$，$f'(x)$ 单调增加. 函数 $y=f(x)$ 的曲线图形如右图所示. 答案B.



3.【解】由题设有 $e^x-1-x=\dfrac{x^2}{2}e^{\xi}$，所以 $\xi=\ln\left(\dfrac{e^x-1-x}{\frac{1}{2}x^2}\right)$，可得

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\ln\left(1+\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}\right)}{x}.$$ 因此 $\ln\left(\dfrac{e^x-1-x}{\frac{1}{2}x^2}\right)\sim\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}$，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^3}{x^3}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}\right)^3=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

4.【解】令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}}=0$，解得 $x=e^2$，当 $x\in(0,e^2)$ 时 $f'(x)>0$，函数

$f(x)$ 单增，当 $x\in(e^2,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单减. $f(e^2)=\dfrac{2}{e}$ 为函数 $f(x)$ 的最大值，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. 因此当 $a>\dfrac{2}{e}$ 时原方程无实根. 答案D.

5.【解】令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}, f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$，设 $g(x)=x\sec^2 x-\tan x$，

$g'(x)=2x\sec^2 x\tan x>0, g(0)=0$，因此 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$g(x)=x\sec^2 x-\tan x>0$，从而有 $f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>0$，即函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单增，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ 因此当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时 $1<\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{4}{\pi}, \dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{\tan x}<1$，因而有 $\dfrac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx<1$，

$\dfrac{\pi^2}{4^2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx<\dfrac{\pi}{4}$. 答案D.

6.【解】由 $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}, y''(x)=-\dfrac{\left[F''_{xx}+F''_{xy}\cdot y'(x)\right]F'_y-F'_x\left[F''_{yx}+F''_{yy}\cdot y'(x)\right]}{\left(F'_y\right)^2}$，将 (x_0,y_0) 代入，并由题设条件 $F'_x(x_0,y_0)=0$ 可得 $y'(x_0)=0, y''(x_0)=-\dfrac{F''_{xx}(x_0,y_0)F'_y(x_0,y_0)}{\left[F'_y(x_0,y_0)\right]^2}$，当 $F'_y(x_0,y_0)<0, F''_{xx}(x_0,y_0)<0$ 时，则有 $y''(x_0)<0$，相应的有 x_0 是函数 $y=y(x)$ 的极大值点.　　答案 B.

7.【解】根据线性微分方程解的结构知函数 $y_1=1, y_2=\sin x$ 为该方程相应的齐次线性方程的两个特解，由 $(\sin x)'=\cos x, (\sin x)''=-\sin x$ 知函数 $y_2=\sin x$ 满足方程 $y''+\tan x\cdot y'=0$ 知答案只能是 A 或 B，又

$(\cos x)''+\tan x(\cos x)'=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x}=-\sec x$.　　答案 B.

8.【解】因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，所以 $r(A \mid B)=r(A)$，由

$$(A \mid B)=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\2&-3&-2&a&-2\\5&-8&-3&3&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&1&-4&a-2&-4\\0&2&-8&-2&b-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&1&-4&a-2&-4\\0&0&0&-2+2a&b+3\end{pmatrix}$$

得 $a=1, b=-3$.　　答案 C.

9.【解】由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$, 可知，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 必可相似于对角矩阵. 由 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}, (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为实对称矩阵，所以，可用正交矩阵使得 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似于对角矩阵. 由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为实对称矩阵，知 $\boldsymbol{A}^*$ 为实对称矩阵，同样，$\boldsymbol{B}^*$ 也是实对称矩阵，所以，$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$ 可由正交矩阵进行相似对角化. 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵可知，$\boldsymbol{AB}$ 不一定是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{AB}$ 不一定相似于对角矩阵.

答案 B.

10.【解】$$\boldsymbol{PW}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\end{pmatrix}.$$

$$f=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{W}|=|\boldsymbol{PW}|=\begin{vmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\end{vmatrix}=|-\boldsymbol{A}|\cdot(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})$$

$$=(-1)^3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=(-1)^3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵知，$|\boldsymbol{A}|>0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}>0$ $(i=1,2,3)$，所以 $-\boldsymbol{A}^*$ 特征值小于 0.　　答案 D.

11.【解法一】由题设有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-xg(x)$，由洛必达法则可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-xg(x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}6\frac{\mathrm{e}^x-g(x)-xg'(x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left[\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\frac{g(x)-1}{x}-g'(x)\right]=-\frac{1}{6}.$$

【解法二】由题设有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-xg(x)$，对上述等式两边对 x 求导可得 $f''(x)=\mathrm{e}^x-g(x)-xg'(x)$，再求导可得 $f'''(x)=\mathrm{e}^x-2g'(x)-xg''(x)$，因此有 $f'(0)=f''(0)=0, f'''(0)=-1$，由洛必达法则可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)}{6}=-\frac{1}{6}.$$

应填 $-\frac{1}{6}$.

12.【解】设 $u(x)=(x^2-1), v(x)=\ln(1-x^2)$，则 $f^{(10)}(x)=\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i u^{(i)}(x)v^{(10-i)}(x)$，因为

$$u'(x)=2x, u''(x)=2, u^{(i)}(x)=0, i\geq3,\quad v'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1},$$

$$v^{(i)}(x)=(-1)^{i-1}(i-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^i}+\frac{1}{(x+1)^i}\right], i=2,3,\cdots,10.$$ 从而有

$$f^{(10)}(x)=(x^2-1)(-1)^9 9!\left[\frac{1}{(x-1)^{10}}+\frac{1}{(x+1)^{10}}\right]+2x(-1)^8 8!\left[\frac{1}{(x-1)^9}+\frac{1}{(x+1)^9}\right]$$

$$+2(-1)^7 7!\left[\frac{1}{(x-1)^8}+\frac{1}{(x+1)^8}\right].$$ 所以 $f^{(10)}(0)=2\times9!-4\times7!=140\times7!=705600$.

应填 $140\times7!$ 或 705600.

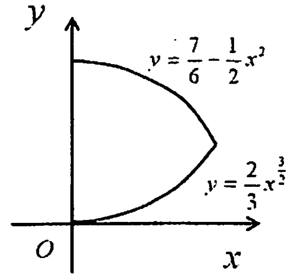
13.【解法一】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\int_{\sqrt2}^{+\infty}\frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u=\left(\ln\frac{u-1}{u+1}\right)_{\sqrt2}^{+\infty}=-\ln\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}=2\ln(1+\sqrt2)$.

【解法二】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=-2\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\Big|_0^{+\infty}=2\ln(1+\sqrt2)$.

应填 $2\ln(1+\sqrt2)$.

14.【解】$s=\frac{7}{6}+\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$



$$=\frac{7}{6}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{2\left(2\sqrt2-1\right)}{3}+\frac{1}{2}\left[\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)\right]$$

$$=\frac{11\sqrt2}{6}+\frac{1}{2}\left[1+\ln(1+\sqrt2)\right].$$

应填 $\frac{11\sqrt2}{6}+\frac{1}{2}\left[1+\ln(1+\sqrt2)\right]$.

15.【解】由题设知 $x=1,y=0$ 时 $z=1$，等式两边同时求微分可得，

$e^z dz = 2xz dx + (x^2-1)dz + (e+y)dx + x dy$，把 $x=1,y=0,z=e$ 代入可得

$dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}} = \dfrac{2+e}{e}dx + \dfrac{1}{e}dy$.　　应填 $\dfrac{2+e}{e}dx + \dfrac{1}{e}dy$.

16.【解】对 A 进行初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&4&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}=B,$$

由此知

$$E_{21}(-1)E_{32}(-2)A=B，故$$

$$P=E_{21}(-1)E_{32}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.\ 应填\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.$$

17【解】$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{4-x}, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{4-x}, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(4-x)^2}, & x<0,\\ \dfrac{1}{(4-x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^2}, & 0<x<2,\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{x^2}, & x>2,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=2$ 处不可导，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

（1）当 $x\in(-\infty,0)\cup(\dfrac{3}{2},2)$ 时 $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 和 $[\dfrac{3}{2},2]$ 上单增；当 $x\in(0,\dfrac{3}{2})\cup(2,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{3}{2}]$ 和 $[2,+\infty)$ 上单减.

（2）由前面的讨论可知 $f(0)=\dfrac{5}{4}$ 和 $f(2)=\dfrac{5}{6}$ 均为函数 $f(x)$ 的极大值；$f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{4}{5}$ 为函数 $f(x)$ 的极小值.

（3）$f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点以及导数不存在的点分别为 $\dfrac{3}{2}$ 和 $0,2$.

$f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{4}{5}$，$f(0)=\dfrac{5}{4},f(2)=\dfrac{5}{6}$，由于 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，因此函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{5}{4}$，但无最小值.

18 【解】由于该曲线关于两个坐标轴均对称，故只要求出它在第一象限内部分与两个坐标轴围成的图形面积即可．在极坐标系中该曲线方程可化为$r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$，由此可得所求图形的面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}rdr=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sec^4\theta}{1+\tan^4\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{u=\tan\theta}2a^2\int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2+\sqrt{2}u}+\frac{1}{1+u^2-\sqrt{2}u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=a^2\left[\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}u+1\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}u-1\right)\right]_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi a^2.$$

19 【解】(I) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x})+2\varphi'(\dfrac{x}{y})$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{2x}{y^2}\varphi''(\dfrac{x}{y})$；

(II) 当$f=\varphi$，且$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-yf''(y)-\dfrac{2}{y^2}\varphi''(\dfrac{1}{y})=-yf''(y)-\dfrac{2}{y^2}f''(\dfrac{1}{y})$，

所以$-yf''(y)-\dfrac{2}{y^2}f''(\dfrac{1}{y})=-2y^2$，且$f(1)=\dfrac{1}{9},f'(1)=\dfrac{1}{9}$，可得

$$y^3f''(y)-2f''(\frac{1}{y})=2y^4,\text{——①}$$

上式中将y换为$\dfrac{1}{y}$可得$\dfrac{1}{y^3}f''(\dfrac{1}{y})-2f''(y)=\dfrac{2}{y^4}$，则

$$2f''(\frac{1}{y})-4y^3f''(y)=\frac{4}{y}\text{——②}$$

从①、②两式中消去$f''(\dfrac{1}{y})$可得$f''(y)=-\dfrac{2}{3}(\dfrac{2}{y^4}+y)$，积分后可得

$f'(y)=-\dfrac{1}{9}(3y^2-\dfrac{4}{y^3})+C_1$，由$f'(1)=\dfrac{1}{9}$可得$C_1=0$．再次积分可得

$f(y)=-\dfrac{1}{9}(y^3+\dfrac{2}{y^2})+C_2$，由$f(1)=\dfrac{1}{9}$可得$C_2=\dfrac{4}{9}$，所以$f(y)=\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}(y^3+\dfrac{2}{y^2})$.

20 【解】(I) 令$D_1=D\cap\{(x,y)\mid xy\ge t\},D_2=D\cap\{(x,y)\mid xy\le t\}$，

则$f(t)=\iint\limits_D|xy-t|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(xy-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}(xy-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D(xy-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_t^1\mathrm{d}x\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)\mathrm{d}y-\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{4}-t+t^2(\dfrac{3}{2}-\ln t)$；

(II) $f'(t)=-1+2t(1-\ln t),f''(t)=-2\ln t\ge0,t\in(0,1)$，

$f(0^+)=\dfrac{1}{4},f(1)=\dfrac{3}{4}$，　$f'(0^+)=-1,f'(1)=1$．

因为$f''(t)=-2\ln t>0,t\in(0,1)$，所以$f'(t)$在$(0,1)$内单调增加．

又因为$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=-1,f'(1)=1$，所以存在唯一的$t_0\in(0,1)$，使得$f'(t_0)=0$。

当$t\in(0,t_0)$时，$f'(t)<0$；当$t\in(t_0,1)$时，$f'(t)>0$，所以$f(t_0)$为$f(t)$在$[0,1]$上唯一取得的最小值.

21 【解】(I) 因为$f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2},f'''(x)=\frac{2}{x^3},f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$，

$f(1)=0,f'(1)=1,f''(1)=-1,f'''(1)=2$，所以$f(x)$在$x=1$带拉格朗日型余项的三阶泰勒公式展开式为$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4\xi^4}(x-1)^4$. 此处$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，$\xi$为介于1到$x$之间的某个点.

(II) 当$1<x<2$时，有

$$\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4\xi^4}(x-1)^4-\frac{2(x-1)}{x+1}\ (\xi\in(1,x)),$$

由于$\frac{1}{4\xi^4}(x-1)^4>0$，所以有

$$\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}<(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2(x+1)}\right)(x-1)^3<\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2(2+1)}\right)(x-1)^3=\frac{1}{6}(x-1)^3$$，由此可得右侧不等式.

对于左侧不等式，令$g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则函数$g(x)$在$[1,2)$上可导，且$g(1)=0$，

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0\ (1<x<2)$，因此函数$g(x)$在$[1,2)$上单增，因而有

$g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>g(1)=0\ (1<x<2)$.

22 【解】(Ⅰ) 设$\lambda_3=-1$对应的特征向量$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，由A是实对称矩阵，知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$两两正交，故

$$\begin{cases}k-1-k(k+1)+2=0, & ①\\ x_1+(k+1)x_2+2x_3=0, & ②\\ (k-1)x_1-kx_2+x_3=0, & ③\end{cases}$$

由①解得$k=1$或$k=-1$.

当$k=1$时，由②，③解得$\alpha_3=(-4,1,1)^T$，且

$$\alpha_1=(1,2,2)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T,\beta=(2,-5,3)^T,$$

又由已知，
$$A^*\beta=\lambda_0\beta, \qquad ④$$

④式左乘A得$AA^*\beta=\lambda_0A\beta$, $|A|\beta=\lambda_0A\beta$, 即

$$A\beta=\frac{|A|}{\lambda_0}\beta=-\frac{2}{\lambda_0}\beta(|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2),$$

故β应是A的特征向量，但β与A的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$任一个都不共线，即$\beta$不是$A$的特征向量，所以，$k=1$不合题意，舍去.

当$k=-1$时，$\alpha_1=(1,0,2)^T$，且$\alpha_2=(-2,1,1)^T,\alpha_3=(-2,-5,1)^T,\beta=(2,5,-1)^T$，故

$$A\alpha_3=\lambda_0\alpha_3=-\alpha_3 \qquad ⑤$$

⑤式左乘 A^*，得 $A^*A\alpha_3=-A^*\alpha_3$, 即 $|A|\alpha_3=-A^*\alpha_3$, 又 $\alpha_3=-\beta, |A|=-2$, 故 $(-2)\cdot(-\beta)=-A^*(-\beta)$, 即 $A^*\beta=2\beta$, 所以 $\lambda_0=2, k=-1$.

（Ⅱ）由于 A 的特征值分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，则 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}$，$|A|=-2$, 则 A^* 的特征值分别为：$-2,-1,2$，对应特征向量不变，则

$$A^*=P\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&5\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&5\\2&1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-2&2&4\\0&-1&10\\-4&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&12\\-10&5&5\\2&5&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-24&30&-18\\30&45&-15\\-18&-15&-51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/5&1&-3/5\\1&3/2&-1/2\\-3/5&-1/2&-17/10\end{pmatrix}$$

注：当 $k=1$ 时，$\beta=-\dfrac{2}{9}\alpha_1+4\alpha_2-\dfrac{5}{9}\alpha_3$, 即 β 可由 A 的特征向量线性表示，但不同特征向量的线性组合不一定再是特征向量.

绝密 * 启用前

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 4）

考生注意:本试卷共二十二题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

1．设反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$，则下列结论正确的为（　　）.

(A) 对任意的α，此反常积分收敛　　(B) 对任意的α，反常积分发散敛

(C) 当且仅当$\alpha=0$,该反常积分收敛　　(D) 当且仅当$\alpha\neq0$,该反常积分收敛

2、函数$f(x)=\frac{x^3+1}{(x+1)|x|}$渐近线的条数（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3、设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$x\in[a,b]$时$f(x)<0$，$f''(x)<0$，记$s_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$s_2=\frac{1}{2}f(\frac{a+b}{2})(b-a)$，$s_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（　　）.

（A）$s_3<s_1<s_2$　（B）$s_2<s_1<s_3$　（C）$s_3<s_2<s_1$，　（D）$s_1<s_2<s_3$

4、下列命题中不正确的是（　），

（A）若$f(x)$在$x=x_0$处左、右导数均存在但不相等，则$f(x)$在$x=x_0$连续。

（B）若$\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=A,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,A$为有限值，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$不存在

（D）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在

5、设$u=y^2F(3x+2y)$，若$u(x,\frac{1}{2})=x^2$，则$\frac{\partial u}{\partial x}$=(　　);

(A) $y^2F'(3x+2y)$　　(B) $\frac{4}{3}F'(3x+1)$

(C) $\frac{4}{3}y^2(3x+2y-1)$　　(D) $\frac{8}{3}y^2(3x+2y-1)$

6、设$F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{d}v\int_{e^{-u^2}}^1 f(v)\mathrm{d}v$，则$xF''(x)-F'(x)=$（　　）.

(A) $f(e^{-x^2})$　　(B) $4x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})$

(C) $4x^3f(e^{-x^2})$　　(D) $-2x^2e^{-x^2}f(e^{-x^2})$

7、设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+(x-y)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处（　　）

（A）　不连续，但 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$ 存在

（B）　连续但 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$ 至少有一个不存在

（C）　连续且 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$ 存在,但不可微

（D）　可微

8、设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为三元非齐次线性方程组，$\boldsymbol{A}$ 至少有两行不成比例，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关解，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

(A) $k\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}$　　(B) $k\begin{pmatrix}3\\6\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$　　(C) $k\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\\-15\end{pmatrix}$　　(D) $k\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

9．设 A 为 n 阶矩阵，n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，若存在 β_i，使得 $A\beta_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$，则下列选项正确的是（　　）.

（A）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示

（B）向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示

（C）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 t

（D）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 $2t$

10．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$，则下列结论不正确的是(　　).

(A)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) 对任意矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$

(C)存在 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$　　(D)对任意矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$

二、填空题:1～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中的横线上.

11、设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=e^{-1}$，若极限 $\lim\limits_{h\to0}[\dfrac{f(x+\sinh)}{f(x)}]^{\frac{1}{\arctan h}}=e^{(x+1)\sin x}$，则 $f(x)=$____________.

12、设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ y=te^y+1\end{cases}$ 决定，则函数在 $t=0$ 处的曲率为______.

13、设 $z=\int_0^{x^2y}xf(t,e^t)\,dt+\varphi(z)$，其中 f 有连续的一阶偏导，φ 可导且 $1-\varphi'\neq0$，则 $dz=$____________.

14、$\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)\left(\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{n^3+1^2}+\dfrac{2\cos\frac{2}{n}}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n\cos\frac{n}{n}}{n^3+n^2}\right)=$________.

15、积分$\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\dfrac{|\sin y|}{y}dy$ ________.

16、已知三元二次型$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$的秩为2，则其规范形为__________.

三、解答题:17～22小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、(本题满分10分)设$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x>0,\\ \dfrac{4}{\pi}\sqrt{-x^2-2x}, & -1\le x\le 0,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\int_{-1}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^3(\tan x-\sin x)}}$.

18、(本题满分12分)设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-a\sin t\\ y=1-a\cos t\end{cases}$ $(0<a<1)$,:(I)试求所以极值,且判别是极大还是极小值;(II) 在$0\le t\le 2\pi$时，求曲线与x轴围成的区域绕y轴旋转一周的旋转体体积.

19、(本题满分12分)已知曲面$4x^2+4y^2-z^2=1$与平面$x+y-z=0$的交线在xoy平面上的投影为一椭圆，求此椭圆的面积.

20、(本题满分12分)若积分区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x+2y\right\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D(y^2-x+1)dxdy;$$

21、(本题满分12分)设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=A$存在，又$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}$，求证(I)至少存在一点$\xi\in(0,1)$有$f(\xi)=\xi$;(II)存在不同的$\eta\in(0,1)$，有$f'(\eta)-1=\eta f(\eta)-\eta^2$.

22、(本题满分12分) 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维线性无关的向量组，且$\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3$，(I)求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值;(II)求可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

2022 共创考研数学二模拟 4 答案

1、【解】对任意 α，$0<\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\le\dfrac{1}{1+x^2}$，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$ 为 $p=2>1$，收敛.

答案 A.

2、【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+1}{(x+1)|x|}=+\infty$，$x=0$ 为垂直渐近线；$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{(x+1)|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+1}{1}=3$ 极限存在，$x=-1$ 不是渐近线；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2(x+1)}=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x^3+1}{x^2(x+1)}=-1$，则有 2 条斜渐近线，由此有 3 条渐近线。

答案 C

3、【解】注意到函数 $f(x)<0$，这三个均是负值，例如 $s_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<0$，所以 $s_3<s_1<s_2$。

答案 A

4、

答案 C.

5、【解】$x^2=u(x,\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}F(3x+1)$，$F(3x+1)=4x^2$，令 $3x+1=t$，$x=\dfrac{1}{3}(t-1)$，

$F(t)=\dfrac{4}{9}(t-1)^2$，$F(3x+2y)=\dfrac{4}{9}(3x+2y-1)^2$，$u=\dfrac{4}{9}y^2(3x+2y-1)^2$，则

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{8}{3}y^2(3x+2y-1)$；

答案 D

解法二、$\dfrac{\partial u}{\partial x}=3y^2F'(v)$，其中 $v=3x+2y$，又 $2x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}F'(3x+1)$，令

$3x+1=t,\dfrac{3}{4}F'(t)=\dfrac{2}{3}(t-1)\Rightarrow F'(t)=\dfrac{8}{9}(t-1)$，代入可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2F'(v)=\frac{8}{3}y^2(v-1)=\frac{8}{3}y^2(3x+2y-1)$$

6、【解】由于 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{d}v\int_{e^{-u^2}}^1 f(v)\,\mathrm{d}v=\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)\int_{-\ln v}^{x^2}dv=\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)(x^2+\ln v)dv$

$$=x^2\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)dv+\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)\ln v)dv$$

$$F'(x)=2x\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)dv+2x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})-2x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})=2x\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)dv$$

$$F''(x)=2\int_{e^{-x^2}}^1 f(v)dv+4x^2e^{-x^2}f(e^{-x^2})$$

所以 $xF''(x)-F'(x)=4x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})$，

答案 B

7、【解】由于 $0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+(x-y)^2}\right|\le\dfrac{|y|}{1+(1-\dfrac{y}{x})^2}\le|y|$，由夹逼原理知，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+(x-y)^2}=0=f(0,0)$，则 $(0,0)$ 处连续；

又 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y'(0,0)$，所以点 $(0,0)$ 处偏导数存在；

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-0-(f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\dfrac{x^2y}{x^2+(x-y)^2}-0}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{[x^2+(x-y)^2]\sqrt{x^2+y^2}}$，取特殊路径：$y=x$，则极限

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{x^3}{x^2\sqrt{x^2+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$，所以 $(0,0)$ 处函数不可微.　　答案 C.

8、【解】因为 A 至少有两行不成比例,所以 $r(A)\geq 2$, 又因为 $AX=b$ 有非零解,所以

$r(A)=r(\overline{A})<3$, 于是 $r(A)=2$, 故方程组 $AX=b$ 的通解形式为 $\xi=a_1+a_2+a_3-3a_1=\begin{pmatrix}3\\6\\-15\end{pmatrix}$, 即

通解为 $k\begin{pmatrix}3\\6\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.　　答案 B.

9.【解】事实上，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是线性无关的，用定义法证明. 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t=\mathbf{0},\qquad ①$$

① 式左乘以 $\boldsymbol{A}$, 利用 $\boldsymbol{A}\alpha_i=\mathbf{0},\boldsymbol{A}\beta_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$, 得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t=\mathbf{0},$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，故

$l_1=l_2=\cdots=l_t=0$, 代入①式，得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=\mathbf{0}$,

所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关.　　答案 D .

10.【解】因为 $r(A)=n$ 所以方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解,而由 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ 得 B 的列向量为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解,故若 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$,则 $\mathbf{B}=\mathbf{0}$；

令 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0},\mathbf{ABX}=\mathbf{0}$ 为两个方程组,显然若 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 则 $\mathbf{ABX}=\mathbf{0}$,反之,若 $\mathbf{ABX}=\mathbf{0}$,因为 $r(A)=n$, 所以方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解,于是 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$,即方程组 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{ABX}=\mathbf{0}$ 为同解方程组,故 $r(AB)=r(B)$；

因为 $r(A)=n$, 所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$, 即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$, 令, $B=(E_n,O)P$ 则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$；

令 $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, B=(1\quad 1\quad 1), r(A)=0$, 但 $r(BA)=0\neq r(B)=1$.　　答案 D.

11、【解】由于 $\lim\limits_{h\to0}[\dfrac{f(x+\sinh)}{f(x)}]^{\frac{1}{\arctan h}}=\lim\limits_{h\to0}[1+\dfrac{f(x+\sinh)-f(x)}{f(x)}]^{\frac{1}{\arctan h}}=e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$

其中：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+\sinh)-f(x)}{\sinh}\dfrac{\sinh}{hf(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，所以

所以 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=(x+1)\sin x,\ f(0)=e^{-1}$，解微分方程：

$$\ln f(x)=\int(x+1)\sin xdx=-\int(x+1)d\cos x=-(x+1)\cos x+\int\cos xdx$$

$=-(x+1)\cos x+\sin x+C_1$，所以

$f(x)=Ce^{-(x+1)\cos x+\sin x}$，代入 $f(0)=e^{-1}$，$C=1$，所以 $f(x)=e^{-(x+1)\cos x+\sin x}$

应填 $e^{-(x+1)\cos x+\sin x}$

12、【解】由于 $\dfrac{dx}{dt}=6t+2,\dfrac{dy}{dt}=(1+t\dfrac{dy}{dt})e^y\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^y}{1-te^y}$，由于 $t=0$ 时，$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$；则

$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=6t+2|_{t=0}=2$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\frac{e^y}{1-te^y}}{6t+2}\right|_{t=0}=\dfrac{e}{2}$；而

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}[\frac{e^y}{2(1-te^y)(3t+1)}]=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\frac{e^y}{(2-y)(3t+1)}]$$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{e^y\{\frac{dy}{dx}(2-y)(3t+1)-[-\frac{dy}{dx}(3t+1)+(2-y)3\frac{dt}{dx}]\}}{(2-y)^2(3t+1)^2}$，代入上述数据则

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\frac{e(\frac{e}{2}-(-\frac{e}{2}+3\frac{1}{2}))}{1}=\frac{e(2e-3)}{4}$$

则 $t=0$ 处曲率为 $k=\left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=0}=\dfrac{\frac{e(2e-3)}{4}}{(1+\frac{e^2}{4})^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2(2e-3)}{(4+e^2)^{\frac{3}{2}}}$.

应填：$\dfrac{2(2e-3)}{(4+e^2)^{\frac{3}{2}}}$

13、【解】两边微分 $dz=[\int_0^{x^2y}f(t,e^t)\,\mathrm{d}t]dx+xf(x^2y,e^{x^2y})(2xydx+x^2dy)+\varphi'(z)dz$，

所以 $(1-\varphi'(z))dz=[2x^2yf(x^2y,e^{x^2y})+\int_0^{x^2y}f(t,e^t)\,\mathrm{d}t]dx+x^3f(x^2y,e^{x^2y})dy$

则 $dz=\dfrac{[2x^2yf(x^2y,e^{x^2y})+\int_0^{x^2y}f(t,e^t)\,\mathrm{d}t]dx+x^3f(x^2y,e^{x^2y})dy}{1-\varphi'(z)}$

应填：$\dfrac{[2x^2yf(x^2y,e^{x^2y})+\int_0^{x^2y}f(t,e^t)\,\mathrm{d}t]dx+x^3f(x^2y,e^{x^2y})dy}{1-\varphi'(z)}$

14、【解】令 $S_n=(n-1)(\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^3+1^2}+\frac{2\cos\frac{2}{n}}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n\cos\frac{n}{n}}{n^3+n^2})=(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n^3+i^2}$

$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n+(\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n^2}$，由不等式：$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n+1}\frac{1}{n^2}\le S_n\le(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n}\frac{1}{n^2}$

由于 $\lim_{n\to\infty}(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n+1}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}\frac{1}{n}=\int_0^1 x\cos xdx$

$=\int_0^1 xd\sin x=x\sin x\big|_0^1-\int_0^1\sin xdx=\sin1+\cos1-1$；

同理 $\lim_{n\to\infty}(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cos\frac{i}{n}}{n}\frac{1}{n^2}=\sin1+\cos1-1$

由夹逼原理：原式 $=\lim_{n\to\infty}S_n=\sin1+\cos1-1$

应填：$\sin1+\cos1-1$

15、【解】$\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy=\int_0^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy\int_0^y dx=\int_0^{2\pi}|\sin y|dy$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy=4$ 应填：4

16、【解】因 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，且 $r(A)=2$，故 $|A|=0$。易求得 $|A|=-(a+2)(a-1)^2$．于是由 $r(A)=2$ 知，$a=-2$．由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$，可知 A 的特征值为 -3，0，3．在正交变换下该二次型的标准型为 $3{y_1}^2-3{y_3}^2$，故其规范型为 $y_1^2-y_2^2$．

应填 $y_1^2-y_2^2$．

17、【解】$\int_{-1}^{x^2}f(t)\,dt=\int_{-1}^{0}\frac{4}{\pi}\sqrt{-t^2-2t}\,dt+\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\,dt=1+\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\,dt$，

$x\to0$ 时 $x^3(\tan x-\sin x)=\frac{x^3\sin x(1-\cos x)}{\cos x}\sim\frac{x^6}{2}$，

原式 $=\lim_{x\to0}\left[(1+\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\,dt)^{\frac{1}{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}}\right]^{\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^3(\tan x-\sin x)}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{4\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^6}}$

$=e^{\lim_{x\to0}\frac{8x\ln(1+x^4)}{6x^5}}=e^{\frac{4}{3}}$．

18、【解】(I) 由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{1-a\cos t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{a\sin t}{1-a\cos t})=a\dfrac{\cos t(1-a\cos t)-a\sin^2 t}{(1-a\cos t)^3}$

$$=a\frac{\cos t(1-a\cos t)-a\sin^2 t}{(1-a\cos t)^3}=\frac{a(\cos t-a)}{(1-a\cos t)^3}$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{1-a\cos t}=0,\Rightarrow t=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

1）若 $t=2k\pi$ 时，$\cos t=1$，所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2k\pi}=\dfrac{a(1-a)}{(1-a)^3}=\dfrac{a}{(1-a)^2}>0$，此时达到极小值，极小值为 $y_1=1-a$；

2）$t=(2k+1)\pi$ 时，$\cos t=-1$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=(2k+1)\pi}=\dfrac{-a(1+a)}{(1+a)^3}<0$，此时达到极大值，极大值为 $y_2=1+a$；

(II) 由于在 $0\le t\le 2\pi$，由旋转体公式，体积为

$$V=2\pi\int_0^{2\pi}xy(x)dx=2\pi\int_0^{2\pi}(t-a\sin t)(1-a\cos t)^2dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(t-a\sin t)(1-2a\cos t+a^2\cos^2 t)dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(t-2at\cos t+a^2t\cos^2 t-a^3\sin t\cos^2 t)dt=2\pi^3(2+a^2)$$

其中 $2a\int_0^{2\pi}t\cos tdt=2a\int_0^{2\pi}td\sin t=2a(t\sin t\big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin tdt)=0$

$$a^2\int_0^{2\pi}t\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t(\cos 2t+1)dt=\frac{a^2}{2}(2\pi^2+\int_0^{2\pi}t\cos 2tdt)=a^2\pi^2$$

$$a^3\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 tdt=-a^3\int_0^{2\pi}\cos^2 td\cos t=\frac{-a^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{2\pi}=0$$

19、【解】方法一：椭圆的方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$，椭圆的中心在原点，在椭圆上任取一点 (x,y)，它到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}$，令 $F=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-1)$，则

$$\begin{cases}F'_x=2(1+3\lambda)x-2\lambda y=0\\F'_y=2(1+3\lambda)y-2\lambda x=0\\F'_\lambda=3x^2+3y^2-2xy-1=0\end{cases}$$

由上一、二两式得 $y=x$ 或 $y=-x$，故驻点为

$$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),P_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),P_3\left(\frac{\sqrt2}{4},-\frac{\sqrt2}{4}\right),P_1\left(-\frac{\sqrt2}{4},\frac{\sqrt2}{4}\right),$$

因此 $d(P_1)=d(P_2)=\dfrac{\sqrt2}{2},d(P_3)=d(P_4)=\dfrac{1}{2},$ 分别为椭圆的长、短轴，于是椭圆的面积为 $S=\pi\dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt2}{4}\pi$。

方法二：椭圆的方程为$3x^2+3y^2-2xy=1$，椭圆的中心在原点，作坐标系的旋转变换，

令$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v \end{cases}$，代入椭圆方程得$2u^2+4v^2=1$，因此$a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{1}{2}$,，分别为椭圆的长、短轴，于是椭圆的面积为$S=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$。

20、【解】积分区域D为$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，则二重积分为

$$I=\iint_D(y^2-x)dxdy=\iint_D[(y^2-2y+1)-(x-1)+2y-1]dxdy$$

$$=\iint_D[(y-1)^2+2(y-1)-(x-1)+1]dxdy$$

做坐标平移变换：$u=x-1,v=y-1,\ dxdy=dudv$由对称性，则

$$I=\iint_D(y^2-x)dxdy=\iint_D[(y-1)^2+1]dxdy=\iint_{D_{uv}}[v^2+1]dudv$$

$$=\iint_{D_{uv}}v^2dudv+\iint_{D_{uv}}dudv=2\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr$$

$$=2\pi+4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}=3\pi.$$

21、【证明】(I) 构造函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{x^2}{2}$，由于$F(0)=0$,又由于$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$，则$F(1)=\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{2}=0$,由罗尔定理知,存在点$\xi\in(0,1)$,有$F'(\xi)=0$,即$f(\xi)-\xi=0$；

(II) 由于$F'(x)=f(x)-x$，由此构造函数$G(x)=F'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=(f(x)-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$，由于极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=A$存在，所以$f(0)=0$，则$F'(0)=0$，又$F'(\xi)=0$，根据罗尔定理，存在点$\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$，有$G'(\eta)=0$，即$f'(\eta)-1-\eta(f(\eta)-\eta)=0$.

22、【解】(I) 令$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$\boldsymbol{P}$可逆.

因为$A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2,A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3$.

所以$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+3\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3)$

从而$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$,即$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$或者

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$,于是有$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -5 & -1\\ -3 & \lambda+1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-4)^2=0$得$A$的特征值为

$\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=4.$

因为$A\sim B$所以B的特征值为$\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=4.$

（II）对$\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=4$可求得对应的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

令$P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，因为$P^{-1}AP=B$，所以

$P_1^{-1}P^{-1}APP_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$或$(PP_1)^{-1}A(PP_1)=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，

取$Q=PP_1=(-\alpha_1+\alpha_2,5\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. A^*的特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda_i}$

分别为16, −16, −16，故$Q^{-1}A^*Q=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&-16&0\\0&0&-16\end{pmatrix}$.