Maths

雅可比矩阵 Jacobi Matrix

差分方程系统?

黑塞矩阵 Hessian Matrix

仿射函数 Affine Function

形如 $f(x) = a + bx$。对应的，严格意义上的线性函数是 $f(x) = bx, a = 0$

性质

1. 当且仅当 $f''(x) \equiv 0$
2. 当且仅当对 $\forall\ 0 \leq p \leq 1, f[pu + (1-p)u] \equiv pf(u) + (1-p)f(v)$，即凸组合直接可分

位似函数 Homothetic Function

（一次）齐次函数的单调变换

$f(\mathbf{x})$ 是一个位似函数当且仅当它可以表示成 $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$，其中 $h(\cdot)$ 是（一次）齐次函数，$g(\cdot)$ 是（正的）单调函数

欧拉法则

如果 f 是一个可微的一次齐次函数，那么

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i \tag{1}$$

证明为对恒等式 $f(t\mathbf{x}) \equiv tf(\mathbf{x})$ 两边对 t 求微分，然后令 $t = 1$

分析

紧集：特殊情况下简单理解 $S \subset R^n$ 是有界的闭集，那么 S 是紧集。

注意有/无界和集合开闭并不存在一一对应关系，也就是可以存在无界的闭空间。从度量？点集拓扑领域？角度理解？

两个例子：

- 如果全集选取为有理数集，则 $\mathbb{R}$ 既是开集也是闭集，其补集 $\varnothing$ 空集也是既开又闭
- 如果全集选取为 R^n，则实数轴应该为闭集；如果全集就是实数轴，那实数轴应该既开又闭

矩阵定性

正定

$\Leftrightarrow$ 特征值全部大于零

$\Leftrightarrow$ 顺序主子式全为正

$\Leftrightarrow$ 存在实可逆矩阵 C，分解为 $A=C^TC$；就是和 E 合同

$\Leftrightarrow$ 存在秩为 n 的 $m\times n$ 实矩阵 B，使 $A=B^TB$

$\Leftrightarrow$ 存在主对角元素全为正的实三角矩阵 R，使 $A=R^TR$

$\Rightarrow$ 逆矩阵也正定

$\Rightarrow$ 对角线元素均为正数

负定

$\Leftrightarrow$ 特征值全部小于零

$\Leftrightarrow$ 顺序主子式的符号为 $(-1)^k$

$\Rightarrow$ 逆矩阵也负定

$\Rightarrow$ 对角线元素均为负数

半定

对所有 $\mathbf{x}$ 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\begin{pmatrix}\le\\ \ge\end{pmatrix}0$，即允许当 $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ 时 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$ 仍成立，放松了要求

半正定

$\Leftrightarrow$ 顺序主子式非负

$\Leftrightarrow$ 特征值全部非负

$\Leftrightarrow$ 存在实矩阵 C，分解为 $A=C^TC$

半负定

约束条件下的定性

如果不要求对 $\forall\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}A\mathbf{x}$ 都要有确定的符号，而只是要求某些限定的 $\mathbf{x}$ 成立，比如说满足 $\mathbf{bx}=0$ 且 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 的 $\mathbf{x}$。我们就称为 A 在约束条件下的定性。具体可以用 **加边黑塞矩阵（增广黑塞矩阵）** 来进行判断

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

- 约束下正定，当且仅当加边黑塞矩阵主子式均为负（**注意这和原来的单纯正定刚好相反**）
- 约束下负定，当且仅当加边黑塞矩阵主子式符号为 $(-1)^k$，$k=2,3,\cdots.n$ （**这个却和单纯负定一致**）

这个加边矩阵的来历是基于约束下的拉格朗日方法

特别地，如果黑塞矩阵在约束下是负定的（不止是半负定），那么我们称函数有 **正则最大值**（Regular Maximum）。一个正则最大值肯定是一个严格的局部最大值，但反之不一定

梯度 Gradient

考虑一个线性泛函 $f:R^n\rightarrow R$，f 在 $\mathbf{x}^*$ 的梯度是一个向量，其坐标就是该处的各个偏导数

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)=\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}\right) \tag{3}$$

注意梯度有其方向，并且指向 f 增加最快的方向。证明为取一个单位向量 $\mathbf{h}$，f 在 $\mathbf{x}^*$ 处沿 $\mathbf{h}$ 方向的导数即为 $\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$ 。内积为 $\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}=|\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)|cos\theta$。显然当 $\theta=0$ 时亦即两向量共线时取到最大值

超平面 Hyperplane

对于法向量 ω，超平面公式可以写为 $\omega^Tx+b=0$

切平面 Tangent Hyperplane

$$H(a)=\{\mathbf{x}:\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)=0\} \tag{4}$$

就是泰勒展开第二项的线性近似

如果 $\mathbf{x}$ 是切超平面中的一个向量，那么 $\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$ 与 f 在 $\mathbf{x}^*$ 处的梯度是正交的

分离超平面

如果 A 和 B 是 R^n 中两个非空不相交的凸集，那么就可以从中插入一个超平面。存在一个线性泛函 $\mathbf{p}$ ，使得所有 A 中的 $\mathbf{x}$ 和 B 中的 $\mathbf{y}$ 都有 $\mathbf{px} \geq \mathbf{py}$ 成立

凸组合

向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的线性组合

$$\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v}, \qquad (0 \leq \theta \leq 1) \tag{5}$$

可以解释为两个向量的加权平均

凸集 Convex Set

定义

几何上可以这么理解，要求点集无孔，边缘各处无缩进

A 是 R^n 中的一个点集，如果 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 都在 A 中，且他们的凸组合仍然在 A 中，则 A 是凸集。如果对于 $0 < t < 1$ 的所有 t 都有 $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ 在 A 的内部（取消了等于号），则称 A 为严格凸的

性质

凸集的和仍然是凸的

凸函数 Convex Function

定义

1. 几何直观定义：凸组合线段的高度大于等于凸组合函数值的高度；或者说总在切平面以上（或与之重合）

对于函数 f 定义域内任意两个不同的点 u 和 v，且相对于 $0 \leq \theta \leq 1$，当且仅当

$$\theta f(u) + (1-\theta)f(v) \geq f[\theta u + (1-\theta)v] \tag{6}$$

时，f 为凸函数

2. 函数可微时的定义：

若对于定义域内任意给定点 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 和另一给定点 $v = (v_1, \cdots, v_n)$，当且仅当

$$f(v) \geq f(u) + \sum_{j=1}^{n} f_j(u)(v_j - u_j) \tag{7}$$

可微函数 f 为凸函数。其中 $f_j(u) \equiv \partial f / \partial x_j$ 在 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 计算其值

3. 去掉等号即为严格凸

性质

1. 函数的和
    1. 多个凸函数的和仍然是凸函数
    2. 只要其中一个凸函数是严格凸的，那么多个凸函数的和就是严格凸的
2. 更大的拟凸的性质，拟凸函数可以引致一个凸集

$$S^{\leq}=\{x|f(x)\leq k\},\qquad [f(x)\text{为凸函数},k\text{为任意常数}] \tag{8}$$

此下轮廓集为一个凸集

3. 严格凸函数的黑塞矩阵（一般）是正定的；凸函数的黑塞矩阵是半正定的。可以就此判别

“凸”的语义差别

- 在集合中：凸描述的是集合中的点如何”填充“到一起。强调的是“内外之分”
- 在函数中：凸描述的是一条曲线或者曲面如何弯曲。强调的是“上下之分”

拟凸函数 QuasiConvex Function

定义

1. **直观定义**

对于 $\forall a \in (0,1)$，都有 $f(ax+(1-a)y)\leq max\{f(x),f(y)\}$ 成立。拟凹就是大于等于最小值

也就是说函数 f 图形上任意弧段 MN （设点 N 高于或等于 M），除了两个端点以外这个弧段上任意一点高度都低于或等于点 N 的高度

2. **轮廓集定义**

对于任意常数 k，当且仅当

$$S^{\leq}\equiv\{x|f(x)\leq k\} \tag{9}$$

此下轮廓集是凸集时，函数 $f(x)$ 是拟凸的。变量也可以是一个向量 $\mathbf{x}$。拟凹就是上轮廓集为凸集

性质

1. 凸 $\subset$ 拟凸
2. 同时有凹凸区段的函数也可以是整体拟凹的，典型比如正态分布密度函数

判别

拟凹的矩阵条件

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

注意此矩阵与矩阵定性部分约束条件下的判定矩阵不同，加边部分是自己的一阶导数而不是约束向量。

此矩阵的顺序主子式的符号为 $(-1)^k$ 时，f 为拟凹

包络定理 Envelope Theorem

值函数（Value Function）为 $M(a)=f(x(a),a)$，其中自变量 x 根据参数 a 取得最优化。想要考察的是最优值如何对参数 a 变化作出反应，也就是 $\frac{\partial M}{\partial a}$

值函数两边对 a 求导

$$\frac{dM(a)}{da}=\frac{\partial f[x(a),a]}{\partial x}\frac{\partial x(a)}{\partial a}+\frac{\partial f[x(a),a]}{\partial a} \tag{11}$$

而由于 $x(a)$ 已是最优化选择，所以一阶条件有

$$\frac{\partial f[x(a),a]}{\partial x}=0 \tag{12}$$

从而原式只剩下

$$\frac{dM(a)}{da}=\frac{\partial f[x,a]}{\partial a}|_{x=x(a)} \tag{13}$$

也就是说，**值函数关于参数的全导数，等于在最优选择计算的偏导数**。参数 a 变化时有两个效应

- 直接影响 f
- 通过 x 间接影响 f

但因为最优化，间接效应等于零，只剩下直接效应

带有约束的情况

考虑如下值函数

$$\begin{aligned}M(a)=\underset{x_1,x_2}{max}\quad g(x_1,x_2,a)\\ s.t.\quad h(x_1,x_2,a)=0\end{aligned} \tag{14}$$

注意到参数 a 可以同时出现在值函数和约束条件之中

对应拉格朗日函数 $L=g(x_1,x_2,a)-\lambda h(x_1,x_2,a)$，一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_1}-\lambda\frac{\partial h}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial g}{\partial x_2}-\lambda\frac{\partial h}{\partial x_2}=0\\ h(x_1,x_2,a)=0\end{aligned} \tag{15}$$

对值函数 $M(a)\equiv g(x_1(a),x_2(a),a)$ 两边求导

$$\frac{dM}{da}=\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{dx_2}{da}+\frac{\partial g}{\partial a} \tag{16}$$

通过上一步的结果替换前两项

$$\frac{dM}{da} = \lambda(\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{da}) + \frac{\partial g}{\partial a} \tag{17}$$

而由于最优化，满足约束 $h(x_1(a), x_2(a), a) \equiv 0$，两边对 a 求微分

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{da} + \frac{\partial h}{\partial a} = 0 \tag{18}$$

代入上式即可得到

$$\frac{dM}{da} = -\lambda\frac{\partial h}{\partial a}|_{x=x(a)} + \frac{\partial g}{\partial a}|_{x=x(a)} \tag{19}$$

总结来说也就和无约束情况类似，想要求值函数关于参数的变动情况，**直接将拉格朗日函数对该参数求导，并代入自变量的最优化取值**。同样只有直接效应没有间接效应

两个引理可以直接记忆为用求导代替除法，包络的思路是从等号右边推出左边，即从值函数最优化推出自变量如何跟随参数变动取得最优化

霍特林引理 Hotelling's lemma

通过利润函数求出净供给函数，已知 $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{py}(\mathbf{p})$

应用无约束包络定理

$$y_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_i}|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*} \quad i = 1, \cdots, n \tag{20}$$

谢泼德引理 Shephard's lemma

通过成本函数求出要素需求函数，已知 $c(\mathbf{w}, y)$，约束条件 $f[\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)] \equiv y$

应用有约束包络定理

$$x_i(\mathbf{w}, y) = \frac{\partial C(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} \quad i = 1, \cdots, n \tag{21}$$

库恩-塔克条件 Kuhn-Tucker conditions

和 KKT 条件（Karush-Kuhn-Tucker conditions）是一回事。一般可粗略认为是求最值的**必要条件**，有多个极值解时要再比较

具体条件可以记忆为

$$\begin{aligned}
&\max_{x}\ f(x) \\
&s.t.\ h_j(x)=0,\ j=1,2,\cdots,q \\
&\quad\ g_i(x)\le 0,\ i=1,2,\cdots,p
\end{aligned} \tag{22}$$

则

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^*)=\sum_j \lambda_j \nabla h_j(x^*)+\sum_i \mu_i \nabla g_i(x^*) \\
\mu_i\ge 0, \mu_i g_i(x^*)=0
\end{aligned} \tag{23}$$

也就是说在极值处，目标函数的梯度（函数值增长最快的方向）可以表示为约束条件梯度的线性组合。**注意这一条件移项后才是拉格朗日函数求梯度后的形式，这会导致拉格朗日乘子的符号相反！**

以 n 个变量和 m 个不等式约束条件为例：

$$\begin{aligned}
&max \quad \pi=f(x_1,\cdots,x_n) \\
&s.t. \quad g^i(x_1,\cdots,x_n)\le r_i
\end{aligned} \tag{24}$$

第一步写出纯经典拉格朗日函数

$$Z=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[g^i(x_1,\cdots,x_n)-r_i] \tag{25}$$

注意 λ 后跟的约束条件符号方向最好保证和约束条件中的 $g^i(\mathbf{X})$ 以及不等号方向一致，λ 前一律设为负号，方便与原条件统一记忆

- 确保对 λ 求偏导后写出的不等式条件符合原式约束要求
- λ 的符号：这里是求约束条件下的**最大值**，所以边界解时 f 的梯度 ∇f 应该指向可行域 $g^i(\mathbf{X})\le r_i$ 的**外部**（因为**可行域为小于等于号**），也就是说和 ∇g **同向**

库恩塔克条件具体为：

$$\begin{aligned}
&\text{最大化条件}\frac{\partial Z}{\partial x_j}=0 \\
&\text{复述约束条件}\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}\ge 0,\quad \text{拉格朗日乘数约束}\lambda_i\ge 0,\quad \text{且}\quad \text{互补松弛条件}\lambda_i\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=0 \\
&\text{这里}\lambda_i\text{非负，表明}\nabla f\text{与}\nabla g\text{同向}
\end{aligned} \tag{26}$$

如若换为最小化问题

$$\begin{aligned}
&min \quad \pi=f(x_1,\cdots,x_n) \\
&s.t. \quad g^i(x_1,\cdots,x_n)\le r_i
\end{aligned} \tag{27}$$

拉格朗日函数不变，当然可以用对偶化为 $max \quad -\pi$，也可直接记忆为

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化条件}\frac{\partial Z}{\partial x_j}=0 \\
&\text{复述约束条件}\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}\geq 0,\quad \text{拉格朗日乘数约束}\lambda_i\leq 0,\quad \text{且}\quad \text{互补松弛条件}\lambda_i\frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=0 \\
&\text{这里}\lambda_i\text{非正，因为求约束条件下最小值，边界解时}f\text{的梯度}\nabla f\text{应该指向可行域}g^i(X)\leq r_i\text{的内部} \\
&\text{因为可行域为小于等于号，也就是说和}\nabla g\text{反向}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

互补松弛：对某一变量的偏导与该变量不能同时非零，如 $f'(\lambda_i)\lambda_i=0$。注意所涉及变量要对应

约束规范：边界的某些不规则性可能会使 KT 条件失效

充分性定理

集值映射下最优值的存在与连续性

考虑如下形式的最大化问题

$$
\begin{aligned}
M(a)=max\ f(\mathbf{x},a) \\
s.t.\ \mathbf{x}\in G(a)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

最优值的存在性

如果约束集 $G(a)$ 是非空且紧的，函数 f 是连续的，那么这个最大化问题存在一个解 $\mathbf{x}^*$。注意 R^n 中的紧集也就是非空闭集，可能可以理解为类似于闭区间上连续函数必有最值

最优值的唯一性

如果函数 f 是严格凹的，且约束集是凸的，那么，若解存在，则它是唯一的

半连续性

对应（correspondence），即经济学家口中的多值函数。集值映射

最大值定理

令 $f(\mathbf{x},a)$ 为有一紧值域的一个连续函数，假设约束集 $G(a)$ 是 a 的一个非空、紧值、连续的对应，那么：

1. 最大值 $M(a)$ 是一个连续函数
2. 最大化问题中的解 $\mathbf{x}(a)$ 是一个上半连续的对应

如果对应 $\mathbf{x}(a)$ 恰好是单值的，使得 $\mathbf{x}(a)$ 为一个函数，那么它将会是一个连续函数

可积性条件

对于一般如下形式带边界条件的偏微分方程组

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_i} = g_i(f(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \quad i = 1, \cdots, n \\
f(\mathbf{q}) = 0
\end{aligned} \tag{30}
$$

局部解存在的**必要条件**是交叉偏导数的对称性

$$
\frac{dg_i}{dp_j} = \frac{dg_i}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \overset{\text{交换 } i,j}{=} \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{dg_j}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial g_j}{\partial p_i} = \frac{dg_j}{dp_i} \tag{31}
$$

动态最优化

允许控制变量路径出现第一型间断点。也就是说允许状态变量路径出现尖点，只要**分段可微**

汉密尔顿函数 Hamiltonian Function

最大化典型问题（最小化就要另加负号），有自由终止状态（垂直终止线）

$$
\begin{aligned}
\underset{u}{Max}\ V = \int_0^T F(t, y, u) dt \\
s.t.\ \frac{dy}{dt} = f(t, y, u) \\
y(0) = A, y(T)\text{自由（}A, T\text{给定）} \\
u(t) \in \mathscr{U}\text{对于所有}t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{32}
$$

其中

- t，时间变量
- y，状态变量
- u，控制变量
- λ，共态变量

汉密尔顿函数

$$
H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u) \tag{33}
$$

最大值原理（一阶必要条件）

$$
\begin{aligned}
\underset{u}{Max}\ H(t, y, u, \lambda) \quad \text{对于所有}t \in [0, T] \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dy}{dt}\text{（}y\text{的运动方程，照抄约束条件）} \\
\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{d\lambda}{dt}\text{（}\lambda\text{的运动方程，注意负号）} \\
\lambda(T) = 0\text{（横截条件）}
\end{aligned} \tag{34}
$$

注意第一个条件，是个比 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ 更宽泛的要求，因为可能会出现边界解。严格点还能再用二阶导数确定是最大值而不是最小值

横截条件

- 垂直终止线： $\lambda(T)=0$，Ramsey model 常用就是这个
- 固定终止点： $y(T)=y_T$
- 水平终止线： $H_{t=T}=0$
- 终止曲线 $y_T=\phi(T)$： $[H-\lambda\phi']_{t=T}=0$
- 截断垂直终止线： $\lambda(T)\geq 0, y_T\geq y_{min}, (y_T-y_{min})\lambda(T)=0$
- 截断水平终止线：$H_{t=T}\geq 0, T\leq T_{max}, (T-T_{max})H_{t=T}=0$

求解时整合上面各式，要求出**控制变量**的均衡值，或者至少是其路径；状态变量也可以对应求出

当前值汉密尔顿函数

被积函数增加了连续贴现因子$e^{-\rho t}$，最优控制问题变为

$$\begin{gathered}\underset{u}{Max}\ V=\int_0^T G(t,y,u)e^{-\rho t}dt \\ s.t.\ \frac{dy}{dt}=f(t,y,u) \\ y(0)=A, y(T)\text{自由（}A,T\text{给定）} \\ u(t)\in\mathscr{U}\text{对于所有}t\in[0,T]\end{gathered}\tag{35}$$

定义一个新的当前值拉格朗日乘子 $m=\lambda e^{\rho t}$ 从而有当前值汉密尔顿函数

$$H_c\equiv He^{\rho t}=G(t,y,u)+mf(t,y,u)\tag{36}$$

当前值下的最大值原理

$$\begin{gathered}\underset{u}{Max}\ H_c(t,y,u,m)\quad\text{对于所有}t\in[0,T] \\ \frac{\partial H_c}{\partial m}=\frac{dy}{dt}\text{（}y\text{的运动方程，照抄约束条件）} \\ \frac{\partial H_c}{\partial y}=-\frac{dm}{dt}+\rho m\text{（}\lambda\text{的运动方程，注意负号，多了}\rho m\text{一项）} \\ m(T)e^{-\rho T}=0\text{（横截条件）}\end{gathered}\tag{37}$$

无穷水平下的问题

横截条件仍然和有限的一样，只要取 $lim_{T\to+\infty}$ 即可（应该）

欧拉方程

离散形式

两期间先转移一个微分量，然后这一转移带来的两期边际效用增减必须相等

例：某一资产定价为 P_t，每一期（在购买/出售交易前）会产生孳息 D_t。利率外生为 r，效用贴现率为 ρ，瞬时消费效用为 CRRA 变体 $u(C_t) = lnC_t$。则考虑某一期减少消费去购买此资产，下一期出手，可以列出欧拉方程

$$dC \cdot dlnC_t = E_t[\frac{1}{1+\rho}\frac{dC}{P_t}(D_{t+1} + P_{t+1}) \cdot dlnC_{t+1}] \tag{38}$$

如果不考虑购买资产，只是两期间消费转移

$$dC \cdot dlnC_t = (1+r)\frac{1}{1+\rho} \cdot dlnC_{t+1} \tag{39}$$

动态最优化形式

反推最优化问题