1 Trouver F

1.1 Méthode matricielle

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ la dimension dans laquelle on se place.
Soit $p := (p_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^d$ des coordonnées avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherche $P \in \mathbb{R}[X, ..., X^d]$ un polynôme qui s'annule en p_i pour tout $i \in \mathbb{N}$.
On obtient un système d'équations :

$$\begin{aligned} P(p_1) &= 0 \\ P(p_2) &= 0 \\ &\vdots \\ P(p_n) &= 0 \end{aligned}$$

Au départ, on ne sait pas quelle forme le polynôme P aura. On choisit donc ici de considérer tous les termes dont l'exposant maximal est inférieur au nombre de points d'initialisation $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, on note $S^d(n)$ l'ensemble des combinaisons de d éléments à valeurs dans $[1, n]$. $S^d(n)$ est donc l'ensemble des combinaisons considérées des exposants d'un terme de P.
On note les éléments de $S^d(n)$ par s^j avec $j \in [1, n^d]$. Pour tout $j \in [1, n^d]$ et $i \in [1, d]$, s^j_i indique la valeur de l'élément i dans la combinaison s^j.
On cherche C une matrice colonne des coefficients de P tel que pour tout $j \in [1, n^d]$, C_j est le coefficient associé au terme de combinaison s^j.

Pour $d = 2$:
Pour tout $i \in [1, n]$, posons $(x_i, y_i) := p_i$. Le système d'équation devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0y_0 & x_0^2 & y_0^2 & x_0^2y_0 & x_0y_0^2 & x_0^2y_0^2 & \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & y_n & x_ny_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n^2y_n & x_ny_n^2 & x_n^2y_n^2 & \end{pmatrix} C = 0 \tag{1}$$

Posons A la première matrice du produit. (On a $AC = 0$)

On cherche P sous une forme la plus simple possible. On va donc extraire une matrice carrée de taille n inversible de A. Notons J' les indices des colonnes conservées. Notons $A_n := (A_{i,j})_{i\in[1,n],j\in J'}$ et on réduit C à $C_n := (C_j)_{j\in J'}$.
Avec l'équation $A_nC_n = 0$, on s'assure que P s'annule en chaque point de p.
Pour ne pas retomber sur le polynôme nul, on ajoute n'importe quel terme dont la combinaison s^{j_0} des exposants n'est pas déjà prise dans A_n. A ce terme, on fixe le coefficient de P à 1. On cherche désormais à résoudre:

$$\begin{bmatrix} A_n & \vdots \\ (0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Appelons A'_n et C'_n les deux facteurs du membres de gauche. A'_n est évidemment inversible et nous pouvons en déduire le vecteur C'_n. On en déduit un polynôme P qui vérifie les conditions et conviendrait pour incarner F, la fonction de l'article étudié.

Revenons au cas général : $d \in \mathbb{N}^*$.
La méthode précédente s'applique de la même manière. La seule différence sera $S^d(n)$ utilisé à la place de $S^2(n)$ utilisé précédemment pour alimenter les colonnes de A.

1.1.1 Implémentation

Etape 1 : Créer $S^d(n)$
Etape 2 : Créer A
Etape 3 : Extraire A_n
Etape 4 : Augmenter A_n en A'_n
Etape 5 : Calculer C'_n puis P en inversant A_n

Inconvénients

Le problème majeur est de trouver A_n. Cela peut demander beaucoup de temps et beaucoup de zones restent arbitraires.
De plus, pour l'inversion, même en parcourant toutes les combinaisons nous ne sommes pas sûr d'obtenir une matrice inversible.

Comment résoudre ces problèmes ?

Pour ne pas inverser ou ne pas se poser la question de l'inversibilité, on peut penser à la pseudo-inverse de Moore Penroe basée sur une décomposition en valeur singulière (SVD).
Résultats :

- Avanatages : Le polynôme est nul à la frontière. Calcul rapide.
- Inconvénient : Le polynôme diverge très vite.

2 Trouver A

2.1 Méthode matricielle

En gardant les notations précédentes et en appelant $G := (g_j)_{j\in[1,n]}$ les valeurs à prendre sur les points considérés, on se ramène à $AC = G$.
On applique la même démarche que précédemment en s'arrêtant à A_n.