BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Előadás és gyakorlat jegyzet

Dinamika
(BMEGEMMBXM3)

Készítette:
Kun László Ákos

BUDAPEST, 2023

1. Előadás

Bevezetés, anyagi pont kinematikája

Elméleti összefoglaló:

Dinamika

Kinematika	**Kinetika**
A testek mozgásának leírásával foglalkozik	Testek mozgásának okaival foglalkozik

Mivel a bennünket körülvevő világ rendkívül összetett, közelítésekkel kell élnünk és a jelenség szempontjából fontosabb körülményeket kell kiemelnünk/figyelembe vennünk. Ezt hívjuk modellalkotásnak.

Első modell: Anyagi pont méretei lényegtelenek a vizsgált probléma szempontjából, tömegét viszont figyelembe vesszük a későbbiekben.

Megjegyzés: Ugyanazt a testet különböző feladatokban más-más mechanikai modellekkel vehetjük figyelembe.

> Példa
>
> Az úton közlekedő járműveket anyagi pontként modellezük, hogy a járműforgalomra vagyunk kiváncsiak, de hogyha a jármű manővereit is figyelembe akarjuk venni, akkor fontossá válik az autó alakja, tömegelosztása stb., így merev testként modellezük.

Alapvető fogalmak:

Bármely anyagi test helyzete és mozgás más testekhez képest értelmezhető, tehát ki kell választanunk ezt a testet/testeket. Ezt vonatkoztatási rendszernek hívjuk. Ezt mindig meg kell adnunk, mert a mozgás különböző lehet más vonatkoztatási rendszerből nézve.

- Gépkocsi gördülő kerekének egy pontja a karosszériához képest körpályán mozog az úthoz képest ciklois görbén.
- Mozgó járműben az utastér pontjait állónak látjuk és úgy tűnik, mintha a környezet mozogna

A mozgások leírásához koordináta-rendszert kell felvennünk, ezt úgy célszerű felvenni, hogy a lehető legegyszerűbb legyen ebben a feladat megoldása.

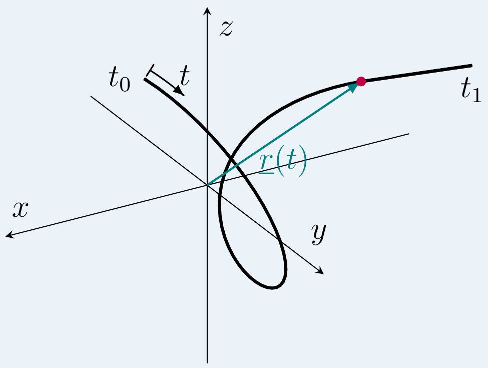
Definíció

Mozgástörvény: Az a függvény, mely egyértelműen megadja, hogy a vizsgált test pontjainak helye hogyan változik az időben. Anyagi pont esetében a mozgástörvény a helyvektor időbeli változását megadó vektorértékű $\underline{r}(t)$ függvény.

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

ahol $x(t), y(t), z(t)$ skalárfüggvények.

ha ezeket együtt ábrázoljuk az idő koordinátáját elhagyva, akkor az anyagi pont pályáját kapjuk:



Definíció

Pálya: Az anyagi pont helyvektorának grafikonja térben (időfüggés nélkül)

Anyagi pont pillanyatni sebessége: az $\underline{r}(t)$ helyvektor idő szerinti deriváltja

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \underline{r}(t)$$

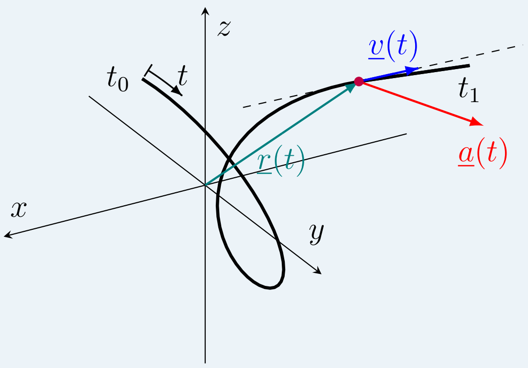
Fontos csak akkor nulla egy vektor időszerinti deriváltja, ha sem a mozgása sem az iránya nem változik!

Definíció

Anyagi pont pillanatnyi gyorsulása: az $\underline{r}(t)$ sebességvektor idő szerinti deriváltja

$$\underline{a}(t) = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$$

Csak az egyenes vonalú, egyenletes mozgás esetén nulla a gyorsulás!



A sebesség vektor párhuzamos a pálya érintőjével! A gyorsulásvektor is megadható két természetes komponens segítségével, melyek közül az egyik a sebesség nagyságának változásával kapcsolatos és érintőirányú, a másik a sebesség irányának változását jellemzi és az előzőre merőleges.

Vagyis a

- tangenciális gyorsulás: $\underline{a}_t = a_t \cdot \underline{e}_t$, ahol $\underline{e}_t \,||\, \underline{v}$ és $\underline{e}_t$ egy bázisvektor
- normális gyorsulás: $\underline{a}_n = a_n \cdot \underline{e}_n$, ahol $\underline{e}_t \perp \underline{e}_n$ és $\underline{a}_n = \underline{a} - \underline{a}_t$

$$\underline{e}_n = \frac{\underline{a}_n}{a_n} \equiv \frac{\underline{a}_n}{\mid \underline{a}_n \mid}$$

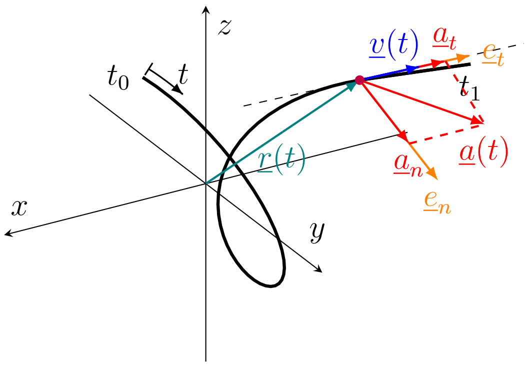
Ezzel:

$$\boxed{\underline{a} = a_t \cdot \underline{e}_t + a_n \cdot \underline{e}_n}$$

Megkülönböztetünk még egy irányt, a binormális irányt, mely az előző kettőre merőleges

$$\underline{e}_b = \underline{e}_t \times \underline{e}_n$$

Tangenciális gyorsulás: $a_t = \mid \dot{\underline{v}} \mid$
Normális gyorsulás: $a_n = \dfrac{v^2}{\varrho}$, ahol a ϱ a görbületi sugár



A pálya, akkor lehet igazi térbeli görbe, ha a mozgás során folyamatosan változó irányú $\underline{e}_t$ és $\underline{e}_n$ vektorok által kifeszített sík (simulósík) helyzete változik. (A simulósík pálya menti elfordulását a tartozó $\dddot{\underline{r}}(t)$ (jerk) jellemzi)

Definíció

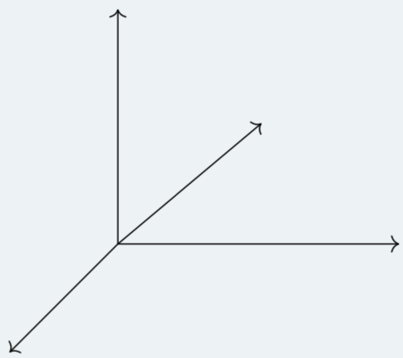
Jerk: Kinetikai egyenleteknél nem használatos, de például tömegközlekedésnél a testtartásunk megváltoztatásával könnyen alkalmazkodunk a gyorsuláshoz, de ennek megváltozásához viszont nem.

Pályához illeszkedő koordináták:

- A sebesség előjeles nagysága a pályasebesség
- A pályasebesség további deriválásával a gyorsulás érintő irányú kompenensének az előjeles nagyságát kapjuk, ez a pályagyorsulás.
- Értelmezzük még keringési szögsebességet és szöggyorsulást, de fontos megjegyezni, hogy anyagi pontnak nincs szögsebesség vagy szöggyorsulása! (A szögsebesség az elfordulás ütemét jelenti!)

Definíció

Az adott pályán mozgó anyagi pont pozícióját egyértelműen megadhatjuk egy választott kezdőpontból mért s ívhosszparaméterrel, azaz a pálya mentén mért koordinátával. Az ívhossz paraméter időbeli változása $s(t)$ a befutási törvény.



Pályasebesség: $v = \dot{s}(t)$

Pályagyorsulás: $a = \ddot{s}(t)$

Ezeket együttesen foronómiai görbéknek hívjuk!

Kényszerek:

Definíció

Szabadsági fok (DoF): Azon független skalár függvények száma, melyek egyértelműen megadják a rendszer mozgástörvényét!

Definíció

Kényszernek előírt geometriai vagy kinematikai feltételek melyek korlátozásokat jelentenek a mozgásokra nézve.

Osztályozásuk:

- holonóm (geometriai)
- anholonóm (kinematikai)
- szkleronóm (időtől független)
- reanóm (időtől függő)

1. Gyakorlat

Pont mozgása egyenes és körpályán, foronómiai görbék