MŰEGYETEM 1782

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Matematika szigorlati tételsor

Matematika G1, G2, G3

(BMETE94BG01, BMETE94BG02, BMETE94BG03)

Készítette:

Kis Erhard, Kun László Ákos

BUDAPEST, 2023

Matematika G1 szóbeli beugró kérdések - 2023

Halmazelmélet és komplex számok

1. Halmaz, metszet, unió, különbség
2. Descartes-szorzat, hatványhalmaz
3. Csoport, gyűrű, test
4. Komplex számok algebrai, exponenciális, trigonometrikus alakja
5. Komplex számok hatványozása
6. Komplex számok gyökvonása

Numerikus sorozatok

1. Numerikus sorozat fogalma és határértéke
2. Konvergens, divergens sorozat
3. Nevezetes sorozatok
4. Cauchy-sorozat
5. Torlódási pont

Függvények, derivált

1. Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet
2. Függvény határértéke
3. Függvény folytonossága
4. Inverz függvény
5. Derivált
6. Lokális szélsőérték definíciója és feltétele
7. L'Hospital szabály
8. Taylor-polinom

Középértéktételek és integrálás

1. Lagrange-féle középértéktétel
2. Rolle-féle középérték tétel
3. Cauchy-féle középérték tétel
4. Riemann-integrálhatóság
5. Newton-Leibniz-formula
6. Improprius integrálok

Numerikus sorok

1. Numerikus sor fogalma
2. Numerikus sor konvergenciája (feltételes is),
3. Numerikus sor divergenciája
4. Konvergenciatesztek

Halmazelmélet és komplex számok:

1. Halmaz, unió, metszet, különbség

Halmaz: Közös tulajdonságú elemek összessége.

Unió: Két vagy több halmaz uniója mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

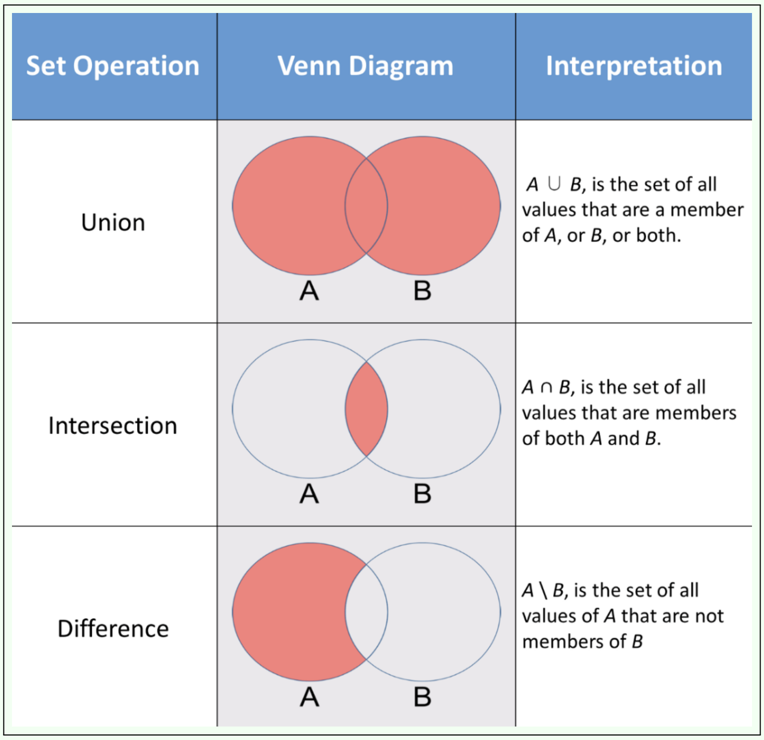
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Metszet: Két vagy több halmaz metszete pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, melyek mindegyik halmaznak elemei

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Különbség: A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \ni B\}$$



Set Operation	Venn Diagram	Interpretation
Union	A B	$A \cup B$, is the set of all values that are a member of A, or B, or both.
Intersection	A B	$A \cap B$, is the set of all values that are members of both A and B.
Difference	A B	$A \setminus B$, is the set of all values of A that are not members of B

2. Descartes-szorzat, hatványhalmaz

Az A és B Halmazok Descartes-szorzatán az A és B Halmazok elemeiből alkotott összes rendezett elempárok halmazát értjük.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Hatványhalmaz: Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát a Halmaz hatványhalmazának hívjuk.

3. Csoport, gyűrű, test

Félcsoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)

Csoport: Legyen $G \neq 0$ és egy $\circ$ művelet (szorzás). Ekkor $(G, \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in G$ esetén
2. bármely $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in G$ esetén (létezik az egységelem, e, amely asszociatív)
3. minden $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik inverzelem)

Ábel-csoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem

Gyűrű: Legyen $R \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(R, +, \circ)$ gyűrű ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R, +)$ Ábel csoportot alkot (Ábel csoport = kommutatív csoport)
2. A művelet asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet disztributív +-ra nézve (összekapcsolható) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén

Test: Legyen $T \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(T, +, \circ)$ test ha teljesülnek az alábbiak:

1. (T, +) Ábel csoportot alkot
2. A $\circ$ művelet legyen asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet legyen disztributív azaz $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén
4. Létezik $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in T$ esetén (létezik egységelem a második műveletre)
5. A + műveletekhez tartozó egységelem kivételével bármely $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik az inverz elem, kivéve az első művelethez (+) tartozó egységelem esetében)

4. Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja

- **Algebrai alak:** $z = a + b \cdot i$ (z valós része a, képzetes része pedig b)
  - **konjugált:** $\overline{z} = a - b \cdot i$
  - **abszolút érték:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pitagorasz-tételből), és mivel: $z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) = a^2 - (b \cdot i)^2 = a^2 + b^2$, ezért $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- **Trigonometrikus (polár) alak:** $z = r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$, mivel

  $$cos(\varphi) = \frac{a}{r}$$

  $$sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

  Tehát $a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b = r \cdot sin(\varphi)$, innen már egyértelműen következik a trigonometrikus alak az algebraiból r-t kiemelve ($a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b \cdot i = r \cdot i \cdot sin(\varphi)$)
- **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ - ez csak egy szimbólum, rövidítés, ami megkönnyíti a számolást a komplex számokkal, lényegében a trigonometrikus alak kicsit rövidebbben.

5. Komplex számok hatványozása

de Moivre-képlet:

$$z^n = [r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))]^n = r^n(cos(n\varphi) + i \cdot sin(n\varphi))$$

Bizonyítás: Teljes indukció használatával

1. $n = 1$-re és $n = 2$-re **igaz**
2. indukciós feltétel: $n = k$
3. Ekkor $z^k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi))$
4. ha $n = k + 1$, akkor:

$$z^{k+1} = z^k \cdot k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi)) \cdot r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$
$$= r^{k+1}[cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot sin(k\varphi + \varphi)] =$$
$$r^{k+1}[cos((k+1)\varphi) + i \cdot sin((k+1)\varphi)]$$

és $k + 1$ az n volt, tehát a bizonyítás kész.

6. Komplex számok gyökvonása

$$z_1^n = z_2 = r_1^n \cdot (cos(n\varphi_1) + i \cdot sin(n\varphi_1)) = r_2 \cdot (cos(\varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_2))$$

$$z_1 = \sqrt[n]{z_2}$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha a hosszuk és argumentumuk is egyenlő:

- $r_1 = \sqrt[n]{r_2}$ (**hossz**)
- $n \cdot \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ (**argumentum**) $\rightarrow$ forgásszög, periodicitás miatt $p = 2\pi$
- Így $\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + k \cdot 2\pi}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$
- Tehát:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}))$$

Az n-edik gyökvonás után olyan komplex számokat kapunk, amik egy szabályos sokszög (n-szög) csúcsai! Tehát n-edik gyökvonás esetén n db komplex szám a megoldás.

Numerikus sorozatok:

1. Numerikus sorozat határértéke

Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in R$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy a sorozat $N(\varepsilon)$-nél nagyobb indexű elemei az az ε sugarú környezetében vannak. Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in R$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

2. Konvergens, divergens sorozat

- **Definíció:** Az (a_n) konvergens, ha van olyan $a \in R$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik $N(\varepsilon)$ valós küszöbszám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon, \;\; ha \;\; n > N(\varepsilon)$$

- Az "a" számot az (a_n) határértékének hívjuk, és a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vagy az $a_n \to a$, ha $n \to \infty$ jelölést használjuk.
- Az (a_n) divergens, ha nem konvergens.

Tételek:

- Konvergens sorozat korlátos.
- Monoton korlátos sorozat konvergens.
- van határértéke/torlódási pontjai $\to$ nem biztos, hogy konvergens
- **Bolzano-Weierstrass-tétel:** minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

3. Nevezetes sorozatok

Olyan sorozatok, amelyek határértékét nem kell bizonyítani, csak felhasználni!

Bernoulli-féle egyenlőtlenség: ha $x \geq -1$, akkor $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

1. $a^n \to 0$, ha $|a| < 1$
   $a^n \to 1$, ha $a = 1$
   $a^n \to +\infty$, ha $a > 1$
   a^n divergens, ha $a < -1$
2. $\sqrt[n]{a} \to 1$, ha $n \to \infty (a > 0)$
3. $a^n \cdot n^k \to 0$, nullsorozat, ha $|a| < 1$ és k rögzített természetes szám
4. $\sqrt[n]{n} \to 1$, ha $n \to \infty \;\; (n \geq 2)$
5. $\frac{a^n}{n!} \to 0 (a \in \mathbb{R})$

Legfontosabb:

$$(1 + \frac{\alpha}{n})^n \to e^{\alpha}$$

4. Cauchy sorozat

Definíció: Az (a_n)-t Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ ha } n, m > N(\varepsilon) \qquad (n, m \in N)$$

Tétel: Cauchy-féle konvergencia kritérium (szükséges és elégséges feltétel). Az (a_n) akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy sorozat!

5. Torlódási pont

Definíció: A h a H halmaz torlódási pontja, ha h bármely környezetében van H-nak h-tól különböző eleme. A t szám a sorozat torlódási pontja, ha t akármilyen kicsi környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Például: $(-1)^n$

Függvények, derivált:

1. Függvények, értelmezési tartomány, értékkészlet

Függvény: ha az A (nemüres) halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B (nemüres) halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

$$f : A \to B$$

Értelmezési tartomány: azon elemek halmaza, melyekhez a függvény hozzárendel egy-egy elemet a B halmazból, jelen esetben ez az A halmaz.

$$D_f = A$$

Értékkészlet: A képhalmaz, azaz a B halmaz azon elemei, melyeket az f függvény ténylegesen hozzárendel az A valamelyik eleméhez. Az értékkészlet tehát része a képhalmaznak:

$$R_f \subset B$$

2. Függvény határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az "a" pontban A, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
/Ez a Cauchy-féle definíció/

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \text{ azt jelenti, hogy:}$$

$$-\delta(\varepsilon) < x - a < \delta(\varepsilon) \quad / + a$$

$$a - \delta(\varepsilon) < x < a + \delta(\varepsilon)$$

Szemléletesesen: azt jelenti, hogy a függvényértékek ($f(x) - ek$) tetszőlegesen megközelítik az A számot, ha az ε értékek elég közel kerülnek a-hoz. Az f függvénynek az "a" pontban acsa (akkor és csak akkor) van határértéke, ha van bal- és jobboldali határértéke és ez a kettő megegyezik!

- **Határérték a végtelenben:**
  - Az f függvény határértéke $+\infty$-ben A, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x > N(\varepsilon)$.
  - Az f függvény határértéke $-\infty$-ben A, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < N(\varepsilon)$.
- **A végtelen, mint határérték:**
  - Az f függvény határértéke a-ban $+\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) > N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.
  - Az f függvény határértéke a-ban $-\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) < N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.

3. Függvény folytonosság

Az f függvény az értelmezési tartományának "a" pontjában folytonos, ha ebben a pontban létezik határértéke és ez egyenlő az adott pontbeli helyettesítési értékkel, azaz ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- **Definíció:** Az f függvényt folytonosnak nevezzük az $a \in D_f$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Az f függvény egy intervallumon egyenletesen folytonos, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy f értelmezési tartományának bármely x_1, x_2 elemére, amelyek távolsága egymástól kisebb δ-nál, fennáll az alábbi egyenlőtlenség.

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- **Tétel:** Az f függvény pontosan akkor folytonos értelmezési tartományának "a" pontjában, ha ott balról és jobbról is folytonos.
- **Definíció:** Az f függvény folytonos az $]a, b[$-on, ha folytonos $]a, b[$ minden pontjában. Az f függvény folytonos az $[a, b]$-on, ha folytonos $]a, b[$-on és a-ban balról, b-ben jobbról folytonos.

A folytonosság néhány nevezetes következménye:
Ha f folytonos egy zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos.

Bolzano-tétel: ha a függvény a zárt intervallumon folytonos, és az intervallum két végpontjában az értékei különböző előjelűek, akkor az intervallum belsejében van zérushelye. Másképp: felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket egy folytonos függvény egy zárt intervallumon.

Weierstrass-tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát is függvényértékként; továbbá minden olyan értéket, ami a legnagyobb és legkisebb érték közé esik.

4. Inverz függvény

Ha az $f : X \to Y$ függvénynél a leképezés irányát megfordítjuk, vagyis az Y halmaz elemeit képezzük le az X halmaz elemeire, akkor ez a fordított leképezés általában nem függvény, mert nem biztos, hogy egy $y \in Y$ elemnek egyetlen $x \in X$ elem felel meg. Ezért fontos az, hogy f bijektív, azaz kölcsönösen egyértelmű legyen, mert ekkor az $f - 1$ -gyel jelölt fordított leképezés is már függvény lesz.

- **Definíció:** Ha az $f : X \to Y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor az $f^{-1} = Y \to X$ függvényt f inverz függvényének nevezzük. Ekkor igaz az alábbi összefüggés:

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

5. Derivált

Ha létezik és véges az alábbi differenciálhányados határértéke:

$$Lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

akkor azt az f függvény deriváltjának vagy "a" pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.
Jelölés:

$$\frac{df(a)}{dx} = f'(a)$$

6. Lokális szélsőérték definíciója és feltétele

Legyen $f : I \subset R \to R$; $a \subset I$
Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális maximuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \leq f(a)(\forall x \in K)$$

Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális minimuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \geq f(a)(\forall x \in K)$$

Szükséges feltétel:
Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és f-nek $\alpha \in int.\ I - ben$ (I belseje) szélsőértéke van, akkor $f'(\alpha) = 0$

Elégséges feltétel:
Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és $\alpha \in int.\ I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f-nek α-ban lokális minimuma van.

$$f'(x) \leq 0 \to x \in](\alpha - r); \alpha[$$
$$f'(x) \geq 0 \to x \in]\alpha; (\alpha + r)[$$

Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és $\alpha \in int.\ I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f-nek α-ban lokális maximuma van.

$$f'(x) \geq 0 \to x \in](\alpha - r); \alpha[$$

$$f'(x) \leq 0 \to x \in]\alpha; (\alpha + r)[$$

7. L'Hôpital szabály

Legyen f és g differenciálható függvények az α pont egy környezetében, továbbá:

$$Lim_{x \to \alpha} f(x) = Lim_{x \to \alpha} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad |Lim_{x \to \alpha} f(x)| = |Lim_{x \to \alpha} g(x)| = \infty$$
$$\alpha \in \{0; \pm\infty\}$$

Ekkor:

$$\frac{Lim_{x \to \alpha} f'(x)}{Lim_{x \to \alpha} g'(x)} = \frac{Lim_{x \to \alpha} f(x)}{Lim_{x \to \alpha} f(x)}$$

Középérték tételek és Integrálás:

1. Lagrange középérték tétel

Legyen $f : I \subset R \to R$ folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $]a; b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a; b[$ hogy:

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Rolle középérték tétel

Legyen f folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $]a; b[$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$ Ekkor létezik $\xi \in]a; b[$ melyre teljesül, hogy:

$$f'(\xi) = 0$$

3. Cauchy középérték tétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a; b]$ intervallumon és differenciálhatóak $]a; b[$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in]a; b[$ esetén. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a; b[$ hogy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\delta)}{g'(\delta)}$$

4. Riemann-Integrálhatóság

Az f függvény Riemann-integrálható $[a; b]$ intervallumon, ha a Darboux-féle alsó- és felső-integrálja megegyezik. Ezt a közös értéket az f függvény Riemann-integráljának nevezzük.

5. Newton-Leibniz formula

Legyen f függvény Riemann-integrálható $[a; b]$ intervallumon és $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ olyan primitív függvény, hogy F folytonos $[a; b]$ intervallumon, F differenciálható $]a; b[$ intervallumon és $F'(x) = f(x)$ bármely $x \in]a; b[$ Ekkor:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

6. Improprius integrál

Legyen $(a; b) \in \mathbb{R}_b$ és $(a < b)$ valamint

1. minden $[x; y] \subset]a; b[$ esetén f Riemann-int. $[x; y]$ intervallumon és $(x; y) \subset \mathbb{R}$
2. létezik olyan $c \in \mathbb{R}(a < c < b)$, hogy az alábbi határértékek léteznek és végesek:

$$Lim_{x\to\alpha} \int_x^c f(t)\,dt \qquad \text{és} \qquad Lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\,dt$$

Ekkor az $I := Lim_{x\to\alpha} \int_x^c f(t)\,dt + Lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\,dt$ összeget az f függvény improprius integráljának nevezzük $]a; b[$ intervallumon és $\int_a^b f(b)\,dt$ jelöljük.

Azt is mondjuk, hogy az f függvény improprius Riemann-integrálja az $]a; b[$ intervallumon konvergens. Ha az 1. feltétel teljesül, de a 2. feltétel nem, akkor az f függvény improprius Riemann-integrálja divergens.

Numerikus sorok:

1. Numerikus sor fogalma

Az a_n numerikus sorozat tagjaiból képzett végtelen összeget numerikus sornak nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. Numerikus sor konvergenciája

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon)$ hogy:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon \qquad (n, m > N_{(\varepsilon)}$$

Feltételes konvergencia:
Ha $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens), akkor feltételes konvergenciáról beszélünk.

3. Numerikus sor divergenciája

Ha a numerikus sor nem konvergens, akkor divergens.

4. Konvergencia tesztek

- **Majorálás/minorálás:**
  Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok, melyekre teljesül az hogy $a_n < b_n$ bármely $n \in N$ esetén, ekkor:
  - **Minorálás:** Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az
  - **Majorálás:** Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az
- **D'Alambert-féle hányadosteszt:**
  Legyen $\sum a_n$ egy pozitív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:

$$\frac{a_n + 1}{a_n} < q$$

- **Cauchy-féle gyökteszt:**
  Legyen $\sum a_n$ egy nemnegatív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

Matematika G2 szóbeli beugró kérdések - 2023

Lineáris algebra I.

1. Csoport, gyűrű, test
2. Euklideszi tér
3. Vektortér
4. Vektorok lineáris függősége és függetlensége
5. Lineáris egyenletrendszer
6. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele
7. Mátrix, determináns
8. Mátrix inverze
9. Mátrix rangja

Lineáris algebra II.

1. Lineáris leképezés fogalma
2. Rang-nullitás tétele
3. Magtér, képtér
4. Sajátvektor, sajátérték
5. Bázistranszformáció
6. Hasonló mátrix
7. Ortogonális mátrix

Függvénysorozatok, függvénysorok

1. Függvénysorozat
2. Függvénysor
3. Függvénysorozat, függvénysor konvergenciája, egyenletes konvergenciája
4. Weierstrass-tétel
5. Cauchy-Hadamard-tétel
6. Hatványsor
7. Taylor-polinom, Taylor-sor
8. Konvergencia sugár, konvergencia tartomány
9. Fourier-sor

Többváltozós függvények

1. Primitív függvény
2. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálhatósága
3. Iránymenti derivált
4. Parciális derivált
5. Gradiens
6. Jakobi-mátrix
7. Szélsőérték, feltételes szélsőérték
8. Kvadratikus formák definitsége
9. Riemann-integrálhatóság (alsó-felső Darboux-integrál)

Lineáris algebra I:

1. Csoport, gyűrű, test

Félcsoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)

Csoport: Legyen $G \neq 0$ és egy $\circ$ művelet (szorzás). Ekkor $(G, \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in G$ esetén
2. bármely $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in G$ esetén (létezik az egységelem, e, amely asszociatív)
3. minden $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik inverzelem)

Ábel-csoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem

Gyűrű: Legyen $R \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(R, +, \circ)$ gyűrű ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R, +)$ Ábel csoportot alkot (Ábel csoport = kommutatív csoport)
2. A művelet asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet disztributív $+$-ra nézve (összekapcsolható) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén

Test: Legyen $T \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(T, +, \circ)$ test ha teljesülnek az alábbiak:

1. (T, +) Ábel csoportot alkot
2. A $\circ$ művelet legyen asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet legyen disztributív azaz $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén
4. Létezik $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in T$ esetén (létezik egységelem a második műveletre)
5. A $+$ műveletekhez tartozó egységelem kivételével bármely $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik az inverz elem, kivéve az első művelethez $(+)$ tartozó egységelem esetében)

2. Euklideszi tér

Euklideszi térnek nevezzük azon T számtest feletti vektortereket, amelyekben a verktorterek axiómái értelmezve vannak, valamint az ún. skaláris szorzást:

1. A skaláris szorzat V-beli rendezett párokhoz egy T-beli nemnegatív elemet rendelő függvény, vagyis:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, < \underline{a}, \underline{b} >: V \times V \to T$$
2. a skaláris szorzat kommutatív:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, < \underline{a}, \underline{b} >=< \underline{b}, \underline{a} >$$
3. A skalárszorzás kiemelhető:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, \lambda \in T, < \lambda \underline{a}, \underline{b} >= \lambda < \underline{a}, \underline{b} >$$
4. Az összeg asszociatív:
$$\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V, < \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} >=< \underline{a}, \underline{c} > + < \underline{b}, \underline{c} >$$

3. Vektortér

Legyen V nem üres halmaz, $+, \circ$ műveletek, T test. $(V, +, \circ)$ T test feletti vektortér, ha:

1. $(V, +)$ Ábel-csoport
2. valamint:

$$\forall \alpha, \beta \in T, \text{ és } \underline{x} \in V : (\alpha \circ \beta) \circ \underline{x} = a \circ (\beta \circ \underline{x})$$

3. Ha ϵ a T-beli egység, akkor:

$$\forall \underline{x} \in V : \epsilon \circ \underline{x} = \underline{x}$$

$$\forall \alpha, \beta \in T \text{ és } \underline{x}, \underline{y} \in V : (\alpha + \beta) \circ \underline{x} = \alpha \circ \underline{x} + \beta \circ \underline{x} \text{ (rendes +)}$$

valamint:

$$\alpha \circ (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \circ \underline{x} + \alpha \circ \underline{y} \text{ (}V\text{-beli +)}$$

4. Vektorok lineáris függősége és függetlensége

$\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ vektor lineárisan független, amennyiben az alábbi egyenletnek csak a triviális megoldása létezik, ellenkező esetben lineárisan függő:

$$\lambda_1 \underline{b}_1 + ... + \lambda_n \underline{b}_n = 0$$

5. Lineáris egyenletrendszer

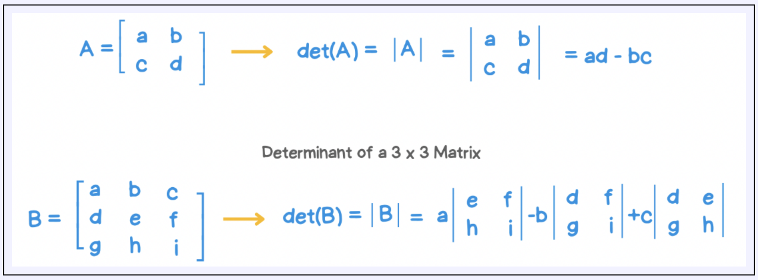
A véges sok elsőfokú egyenletet és véges sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

6. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

A lineáris egyenletrendszer megoldásának szükséges és elégséges feltétele, az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $rg(A \mid \underline{b}) = rg(A)$

7. Mátrix determináns

Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ tér $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ vektorait és ehhez hozzárendelünk egy valós számot amit determinánsnak nevezünk és $det(\underline{a}_1; \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n)$-nel jelöljük.



8. Mátrix inverze

Az $A \in M_{n\times n}$ mátrix inverzén A^{-1}-gyel jelölt $n \times n$-es mátrixot értünk, amelyre igaz, hogy:

$$\underline{\underline{A}} * \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

9. Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezzük a mátrix vektorai közül lineárisan függetlenek maximális számát.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrix rangja 2.

Lineáris algebra II:

1. Lineáris leképezés fogalma

V_1 és V_2 ugyanazon test $(\mathbb{R};\mathbb{C})$ feletti vektortérnek. Legyen $V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezzük, ha:

$$\varphi(\underline{a}+\underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b})$$

$$\varphi(\alpha\underline{a}) = \alpha\varphi(\underline{a})$$

Megjegyzés:

$$\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$$

2. Rang-nullitás tétele

Tetszőleges $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés esetén igaz, hogy: $def(\varphi) + rg(\varphi) = dim(V_1)$. Ebből $def(\varphi)$ a magtér rangja. A magtér V_1 részhalmaza, és a benne lévő elemek képe nullvektor. A képtér V_2 részhalmaza, és a benne lévő elemek a képei V_1 elemeinek.

3. Magtér

Magtér: Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés:

$$Ker(\varphi) := \{\underline{v} \mid \underline{v} \in V_1 \wedge \varphi(\underline{v} = \underline{0})\}$$

a φ magtere.

4. Sajátvektor, sajátérték

1. A mátrixnak λ a sajátértéke, ha létezik olyan $\underline{v}$ nem nulla vektor, hogy: $\underline{\underline{A}} * \underline{v} = \lambda * \underline{v}$
2. Képlet:
$$A' = \underline{\underline{C}}^{-1} * \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{C}}$$
3. $\varphi : V \to V$ keressünk azon vektorokat, amelyekre igaz: $(A - \lambda\underline{\underline{E}}) * \underline{v} = 0$. Ennek akkor van megoldása, ha:
$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$$
4. Egy vektornak ∞ saját vektora van. Lineárisan független egyenletrendszerek száma: $\underline{\underline{A}}_{m\times n} \to max$ n db
5. α-t a v sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

5. Bázistranszformáció

Legyen $\{\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n\}$ és $\{\hat{\underline{b}}_1, ..., \hat{\underline{b}}_n\}$bázis V-ben, ekkor az egyikről a másikra való áttérés S mátrixa:

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_i \underline{b}_i$$

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \underline{b}_i$$

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_{in} \underline{b}_i$$

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

6. Hasonló mátrix

A és B mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan X reguláris mátrix, hogy:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{X}}^{-1} * \underline{\underline{B}} * \underline{\underline{X}}$$

7. Ortogonális mátrix

Egy mátrix ortogonális, amennyiben inverze megegyezik a transzponáltjával.

Függvénysorozatok, függvénysorok:

1. Függvénysorozat

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sorozatot függvénysorozatnak nevezünk.

2. Függvénysor

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sorozat előállítható a:

$$s_1(x) := f_1(x)$$

$$s_2 := f_1(x) + f_2(x)$$

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{i} f_n(x)$$

az így előállított s_n sorozatot az f_n sorozatból képzett függvény sornak hívjuk, és $\sum F_n$-nel jelöljük.

3. Függvénysorozat, függvénysor konvergenciája, egyenletes konvergenciája

A $\sum f_n$ függvény sor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon $\iff$ ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon) :\mid s_n(x) - s_m(x) \mid < \varepsilon$; ha $n; m > N(\varepsilon)$; $\forall x \in E$ esetén.

4. Weierstrass-tétel

Bármely $f_n : I \subset \mathbb{R}$ és $\sum f_n$ a belőle képzett függvénysor,$\sum a_n$ olyan konvergens numerikus sor, amelyre igaz: $\mid f_n(x) \mid \leq a_n$; $\forall x \in J$ esetén teljesül bármely $x \in \mathbb{N}$ vagy egy bizonyos n-től, ekkor $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens J-n.

5. Cauchy-Hadamard-tétel

Legyne r a $\sum_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara:

1. Ha $r = 0$ ebben az esetben a hatványsor csak az x_0 pontban konvergens
2. Ha $r = \infty$ a hatványsor bármyel $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén konvergens
3. Hat $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor abszolúz konvergens, ha $\mid x \mid < r$, és divergens, amennyiben $\mid x \mid > r$
4. Bizonyítás: az a, b rész bizonyítása az előző tétel alapján könnyen adódik:

   $$! \mid x_0 \mid < r, limsup \sqrt[n]{\mid a_n x_0^n \mid} = \mid x_0 \mid limsup \sqrt[n]{\mid a_n \mid} = \frac{\mid x_0 \mid}{r}, \text{ ami } \mid x \mid > r \Rightarrow$$

   Létezik olya $0 < r < 1$, hogy a $\sum a_x x_0^n$ hatványsor a gyökteszt miatt konvergens. Mivel $\mid x_0 \mid < r$ tetszőleges volt, így $\forall \mid x_0 \mid < r$ esetén igaz, hogy $\sum a_n x_0^n$ hatványsor konvergens, amennyiben $\mid x \mid > r$, akkor a hatványsor divergens.

6. Hatványsor

Tegyük fel, hogy egy f függvény $\sum a_n x^b$ hatványsor alakban előállítható. Akkor az ezt leíró hatványsor alakja az alábbi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} * x^n$$

7. Taylor-polinom, Taylor-sor

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, az $x_0 \in I$ pontban legfeljebb p-szer differenciálható, ekkor az f függvények x_0 körüli p-edik Taylor polinomja:

$$T_{f,P}(x) = \sum_{k=0}^{P} \frac{f^{(k)}}{k!} * (x - x_0)^k$$

Tétel: ha az f függvény legalább $(r+1)$-szer differenciálható az (x, x_0) intervallumon, és $f^{(}k), k \in 1, 2, 3, ...r$ folytonos és az x és x_0 pontokban, akkor létezik olyan $\xi \in (x; x_0)$, hogy:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(k)} x_0}{k!} * (x - x_0)^k + \frac{f^{(r+1)}\xi}{(r+1)!}(x - x_0)^{r+1}$$

Ahol a masodik tag a Lagrange-féle maradéktag

8. Konvergencia sugár, konvergencia tartomány

Konvergencia sugár nagyságának kiszámítása:

$$\frac{1}{r} = lim_{m\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid$$

9. Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2l$ szerint periodikus függvény, amely a $[0, 2l]$ intervallumon Reimann integrálható, ekkor f Fourier során az alábbi függvénysort értjük:

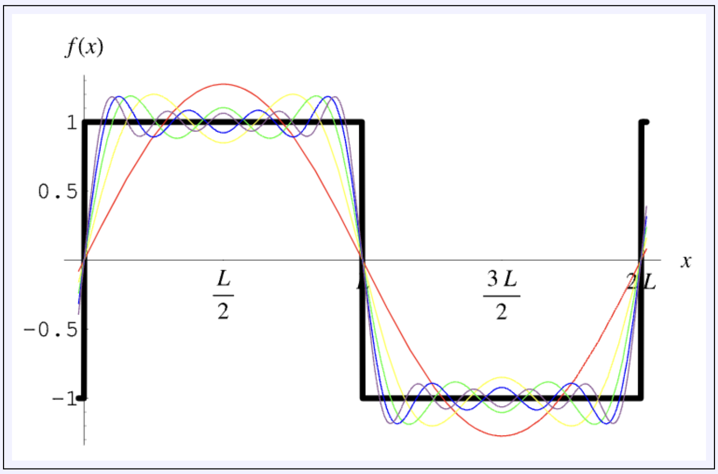
$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot cos(\frac{k\pi x}{l}) + b_k \cdot sin(\frac{k\pi x}{l})$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x)\, dx; \quad b_0 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) * cos(\frac{k\pi x}{l})\, dx;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) * sin(\frac{k\pi x}{l})\, dx;$$

Megjegyzés: ha az f függvény összeáll a fenti típusú függvénysor összegeként, akkor az együtthatók csak ilyenek lehetnek.



Többváltozós függvények:

1. Primitív függvény

Egy $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvénynek $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, ha $F' = f$.

2. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálhatósága

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: U \to \mathbb{R}^k$ leképezés. Azt mondjuk, hogy f differenciálható, az $\underline{a} \in D_f$ pontban, ha létezik $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, $\omega:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés, melyre $\omega(\underline{0}) = \underline{0}$, $Lim_{||\underline{h}||\to 0}\dfrac{||\ \omega(\underline{h})\ ||}{||\ \underline{h}\ ||}$, hogy:

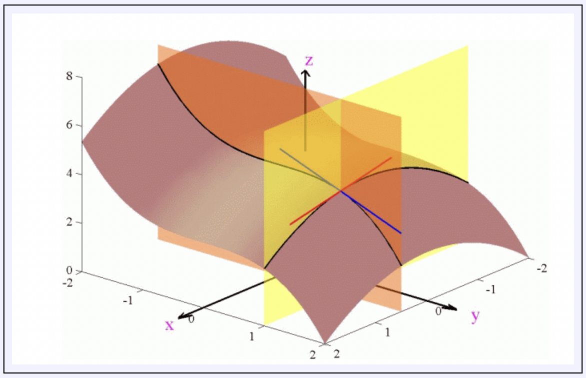
$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = A(\underline{x}-\underline{a}) + \omega(\underline{x}-\underline{a}).$$

Az "A"-nak megfelel egy $M_{k\times n}$-es mátrix. A deriválás egy leképezés.

3. Iránymenti derivált

Az iránymenti derivált, az adott irány által kimetszett függvény deriváltja. Közelebbről:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = Lim_{\lambda\to 0}\tfrac{f(\underline{x})+\lambda\underline{e}-f(\underline{x})}{\lambda} =< \underline{e}, gradf >, \text{ ahol } |\ e\ |= 1$$



4. Parciális derivált

Parciális deriváltnak nevezzük a többváltozós függvények olyan deriváltját, amikor a függvényt egy rögzített változ ójának függvényeként fogjuk fel, eszerint deriválunk, miközben a többi változójelet konstans értéknek tekintjük. (A koordináta-tengelyek mentén lévő irány menti derivált.)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'(x_i)$$

5. Gradiens

A $z = f(x; y)$ függvény gradiense a parciális deriváltakból, mint koordinátákból alkotott vektor: $gradf(x; y) = (f'_x(x; y); f_y(x; y))$. A gradiens legfontosabb tulajdonságai:

- Minden pontban a gradiens merőleges a ponton áthaladó szimmetriavonalra.
- A gradiens a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat.

$$gradf = \triangledown f = [f'x_1, ..., f'x_n]$$

6. Jacobi-mátrix

A parciális deriváltak vektora vektor értékű függvényekre is defniálható. Ha $\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektor értékű függvény, és koordinátafüggvényei rendre $F_1; ...; F_m$, akkor:

$$\underline{F}(x_1, ...x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ...F_m(x_1, ..., x_n))$$

Ekkor F deriváltja az F_i (sorvektor) gradiensek oszlopvektoraként definiálható. Ennek a mezőnek a vektorgradiense a Jacobi -mátrix:

$$\mathcal{J}_{\underline{F}} = grad\underline{F} = \bigtriangledown\underline{F} = \partial(F_1, ..., F_m)\partial(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$m = n$-re az eredmény egy másodfokú tenzor. Eféle tenzorok írják le például a fizikában a mechanikai feszültséget és az elaszticitást.

7. Szélsőérték, feltételes szélsőérték

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első rendű parciális deriváltak eltűnjenek az adott pontban. Emellett a létezés elégséges feltétel, hogy az adott a pontban a következő determináns értéke pozitív.

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

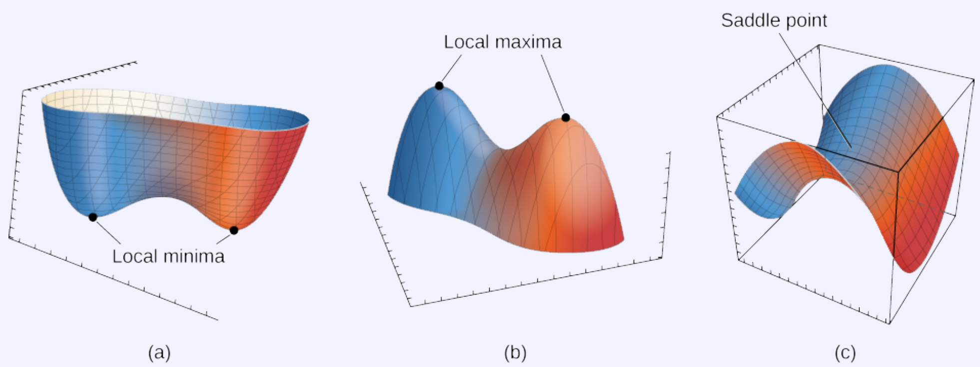
Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimuma van a-ban, ha a-nak van olyan K környezete, melyre $f(a) \leq f(x) \forall x \in K$.

Ha egy $f \in c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ függvénynek lokális szélső értéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$ a nullvektor, azaz $\partial_i f(a) = 0 (\forall i = 1; \ldots; n)$

Legyen egy $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ függvényre $f'(a) = 0$

- Ha $F''(a)$ sajátértékei $> 0 \Rightarrow f$-nek lokális minimuma van a-ban
- Ha $F''(a)$ sajátértékei $< 0 \Rightarrow f$-nek lokális maxima van a-ban

Megjegyzés: Többdimenziós jelenség ha $f''(a)$-nak van $+$ és $-$ sajátértéke is, akkor nincs szélsőértéke, hanem ún. nyeregpontja: egy irányban minimum és egy másik irányban maximum van.



8. Kvadratikus formák definitsége

Egy n változós q kvadratikus alakot:

1. **pozitív definitnek** nevezünk, ha bármely $x_1; \vdots; x_n$ esetén $q(x_1; \vdots; x_n) \geq 0$, és $q(x_1; \vdots; x_n) = 0$ csak akkor, ha $x_1 = \vdots = x_n = 0$
2. **pozitív szemidefinitnek** nevezzük, ha bármely $x_1; \vdots; x_n$ esetén $q(x_1; \vdots; x_n) \geq 0$, és van olyan $(x_1; \vdots; x_n) \neq 0$, melyre igaz hogy: $q(x_1; \vdots; x_n) = 0$
3. **negatív definitnek** nevezzük, ha bármely $x1; \vdots; xn$ esetén $q(x_1; \vdots; x_n) \leq 0$, és $q(x_1; \vdots; x_n) = 0$, csak akkor ha: $x_1 = \vdots = x_n = 0$
4. **negatív szemidefinitnek** nevezünk, ha bármely $x_1; \vdots; x_n$ esetén $q(x_1; \vdots; x_n) \leq 0$ és van olyan $(x_1; \vdots; x_n) \neq 0$ melyre $q(x_1; \vdots; x_n) = 0$
5. **indefinitnek** nevezünk, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

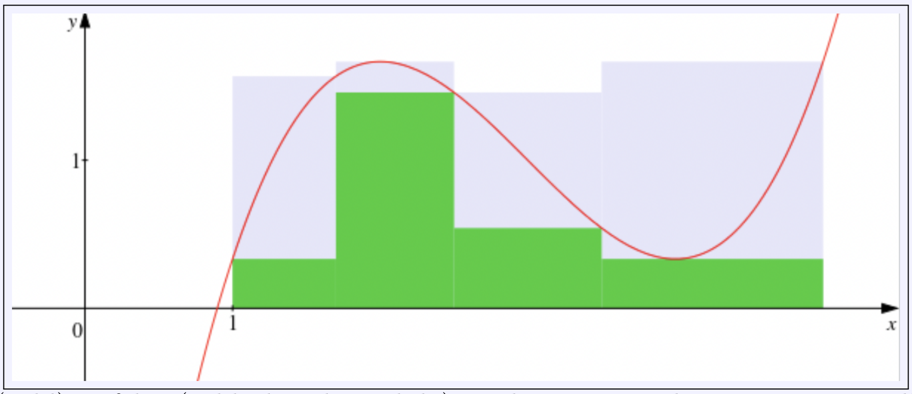
9. Riemann-integrálhatóság (alsó-felső Darboux-integrál)

1. $\underline{S}(f) = inf\{\underline{S}(f,d) \mid d$ beosztása I-nek$\}$
2. $\underline{S}$ neve: alsó Darboux-integrál
3. $\overline{S}(f) = sup\{\overline{S}(f,d) \mid d$ beosztása I-nek$\}$
4. $\overline{S}$ neve: felső Darboux-integrál

Megjegyzés:

$$\underline{S}(f,d) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}(f,d) \forall d$$

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. f-et Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha $\underline{S}f = \overline{S}f$. Ezt a közös értéket jelöljük.



Alsó (zöld) és felső (zöld plusz levendula) Darboux összegek négy részintervallumra

Matematika G3 szóbeli beugró kérdések - 2023

Vektoranalízis 1.

1. Duális tér
2. Leképezés adjungáltja, szimmetrikus és antiszimmetrikus leképezés
3. Mátrix vektorinvariánsa és nyoma (trace, spur)
4. Gradiens, divergencia és rotáció
5. Nabla vektor
6. Laplace operátor, harmonikus függvény

Vektoranalízis 2.

1. Skalárpotenciálos vektormező
2. Vektorpotenciálos vektormező
3. Görbe
4. Görbe ívhossza
5. Felület
6. Felszínszámítás
7. Stokes-tétel
8. Gauss-Osztrogradszkij-tétel
9. Green-tételek

Differenciálegyenletek 1.

1. Közönséges n-edrendű differenciálegyenlet
2. Differenciálegyenlet megoldásának típusai (általános, partikuláris, szinguláris)
3. Cauchy-feladat
4. Lipschitz-feltétel
5. Picard-Lindelöf tétel
6. Iránymező

Differenciálegyenletek 2.

1. Szeparábilis és arra visszavezethető DE
2. Bernoulli-féle DE
3. Riccati-féle DE
4. Egzakt DE
5. Lineáris állandó együtthatós DE
6. Lineárisan független függvényrendszer
7. Wronski-determináns
8. Differenciálegyenlet-rendszer

Vektoranalízis I:

1. Duális tér

$\mathbf{V}^* := Hom(V,\mathbb{R})$, ahol $(V,+,\lambda)$ vektortér, $\mathbf{V}^*$ elemei pedig lineáris formák, azaz:

$$\underline{v} \to \varphi(\underline{v})$$

$$\varphi(\alpha\underline{v}+\beta\underline{w}) = \alpha\varphi(\underline{v}) + \beta\varphi(\underline{w})$$

- **Homomorfizmus:** Két algebrai struktúra közötti műveletttartó leképezés. Pl. ha az egyik struktúrában valamely elemek közt valamilyen reláció áll fenn, akkor ezen elemeiknek képei a másik struktúrában is ebben a relációban állnak.
- **Endomorfizmus:** A képhalmaz részhalmaza az alaphalmaznak. pl: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

V^* halmazt természetes módon vektortérré tehetjük a következőképpen:

$$(\alpha+\beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v} \qquad \alpha,\beta \in \mathbf{V}^*$$

$$(\rho\cdot\varphi)\underline{v} = \rho\cdot\varphi(\underline{v}) \qquad \rho\in\mathbb{R}, \varphi\in\mathbf{V}^*$$

Így $(\mathbf{V}^*,+,\lambda)$ már vektortér, amit V duális terének is nevezünk. Vektortér és duális terének dimenziója megegyezik.

2. Leképezés adjungáltja, szimmetrikus és antiszimmetrikus leképezés

Leképezés adjungáltja:
Legyen $E = (V, <,>)$ adott euklédeszi tér és $\varphi : V \to V$ egy lineáris leképezés.
Ekkor $\varphi^* : V \to V$ a leképezés adjungáltja ha $\forall\ \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$ esetén:

$$< \underline{v_1}; \varphi(\underline{v_2}) >=< \varphi^*(\underline{v_1}); \underline{v_2} >$$

- **Idempotens:** Az adjungált adjungáltja megegyezik az eredeti leképezéssel. $(\varphi^*)^* = \varphi$

Szimmetrikus leképezés:
Egy leképezés szimmetrikus, ha adjungáltja önmaga $\varphi^* = \varphi$ ekkor:

$$< \underline{v_1}; \varphi(\underline{v_2}) >=< \varphi(\underline{v_1}); \underline{v_2} > \qquad \forall\ \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$$

Antiszimmetrikus leképezés:
Egy leképezés antiszimmetrikus, ha $\varphi^* = -\varphi$ ekkor:

$$-< \underline{v_1}; \varphi(\underline{v_2}) >=< \varphi(\underline{v_1}); \underline{v_2} > \qquad \forall\ \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$$

3. Mátrix vektorinvariánsa és nyoma (trace, spur)

Vektorinvariáns:
Tekintsük a következő, 3x3-as antiszimmetrikus mátrixnak és a $\underline{w}$ vektornak a szorzatát:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}w_2 + a_{13}w_3 \\ -a_{12}w_1 + a_{23}w_3 \\ -a_{13}w_1 - a_{23}w_2 \end{bmatrix}$$

Egy antiszimmetrikus lineáris transzformáció mindig leírható egy rögzített vektorral való vektoriális szorzatként. Ezt a vektort nevezzük a mátrix vektorinvariánsának.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{w} = \underline{v} \times \underline{w}$$

$\underline{w}$ együtthatóinak meg kell egyeznie, tehát a vektorinvariáns:

$$\underline{v} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{bmatrix}$$

A vektorinvariáns csak ortogonális transzformációkkal szemben invariáns.

Nyom /Spur /Trace:
Egy lineáris transzformáció mátrixának főátlójában lévő elemek összege minden koordinátarendszerben ugyanannyi, tehát a koordináta-transzformációkkal szemben invariáns.
Ezt az összeget a lineáris transzformáció ($V_1 = V_2$) első skalárinvariánsának /nyomának /spurjának /tracejének nevezzük. (És ez a sajátértékek összege.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Tr(A) = 1+5+9 = 15$$

4. Gradiens, divergencia, rotáció I.

Gradiens:
A gradiens csak skalármező (azaz skalár-vektor függvény) esetében értelmezhető.

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

A gradienst tehát úgy kapjuk, hogy a skalármezőt az összes változója szerint, külön-külön (parciálisan) lederiváljuk, és egy oszlopvektorba rendezzük.

$$grad\ u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A gradiens tehát vektormennyiség. Ha bevezetjük az úgynevezett nabla vektort:

$$\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Akkor $grad\ u$ a nabla vektornak és az u skalármezőnek a szorzataként írható fel:

$$grad\ u = \underline{\nabla} \cdot u$$

Skalármező gradiense, illetve vektormező divergenciája és rotációja független a koordinátarendszertől.

Divergencia:
A divergencia csak vektormező (azaz vektor-vektor függvény) esetében értelmezhető. Eredménye skalármennyiség.

$$\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Definíció szerint $div\ \underline{v} = sp(\underline{\underline{\mathcal{J}_v}})$, tehát $\underline{v}$ Jakobi-mártixának a nyoma:

$$div\ \underline{v} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Ahol f_i a $\underline{v}$ vektormező i-edik komponensfüggvénye.
$div\ \underline{v}$ a nabla vektornak és a $\underline{v}$ vektormezőnek a (skaláris) szorzataként írható fel:

$$div\ \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}(\underline{r})$$

Ha $div\ \underline{v} = 0$, akkor a vektormező forrásmentes.

Rotáció:
A rotáció csak vektormező (azaz vektor-vektor függvény) esetében értelmezhető. Eredménye viszont vektormennyiség.
Definíció szerint $\frac{1}{2} rot\ f = \frac{1}{2}(Df - Df^*)$, ahol Df a derivált mátrix (Jakobi-mátrix), aminek a soraiban az egyes komponensfüggvények gradiensei vannak. Df^* pegid Df transzponáltja.
$rot\ \underline{v}$ a nabla vektornak és a $\underline{v}$ vektormezőnek a vektoriális szorzataként írható fel:

$$rot\ \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v}(\underline{r})$$

4. Gradiens, divergencia, rotáció II.

$\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ esetén:

$$rot\ \underline{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Fontosabb azonosságok: $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$div\ \underline{r} = 3$$
$$rot\ \underline{r} = 0$$

Zérus azonosságok:

$$rot\, grad\ u = \underline{0}$$
$$div\, rot\ \underline{v} = 0$$

5. Nabla vektor

Igazából nem vektor, hanem operátor, de vektorként kezelve a legtöbb művelet könnyebben elvégezhető a segítségével.

$$\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

6. Laplace operátor, harmonikus függvény

Laplace operátor:

$$\Delta = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Harmonikus függvény:
Akkor harmonikus például az u skalár-vektor ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) függvény, ha:

$$\Delta u = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} u = \underline{\nabla} \cdot grad\ u = div\, grad\ u = 0$$

Tehát kielégíti az úgynevezett Laplace-egyenletet. (Feltétel: legyen kétszeresen differenciálható az u függvény.)

Vektoranalízis II:

1. Skalárpotenciálos vektormező

Egy $\underline{v} : V \to V$ vektormező skalárpotenciálos, ha $\exists\ u : V \to \mathbb{R}$ skalármező, hogy $\underline{v} = grad\ u$. (Fizikai) erőtér esetén a vektortér más néven konzervatív, ha ez teljesül.
Ekkor u-t $\underline{v}$ potenciálfüggvényének nevezzük. Feltétel: $rot\ \underline{v} = \underline{0}$ (örvénymenteség)
Ha egy vektormező előáll egy skalármező gradienseként, akkor a vektormező bármely görbe menti skalárértékű vonalintegrálja csak a kezdő- és a végponttól függ, tehát független az úttól.
Egy vektortérnek végtelen sok skalárpotenciálja van (a konstans miatt).
A skalárértékű vonalintegrál értéke (a munka) a potenciálkülönbséggel egyenlő:

$$\int_A^B < \underline{v}(\underline{r}(\underline{t})), \dot{\underline{r}}(t) >= u(B) - u(A)$$

A potenciálfüggvénynek a vonalintegrállal kapcsolatban az a szerepe, mint egy egyváltozós függvény határozott integráljával kapcsolatban a primitív függvénynek.

2. Vektorpotenciálos vektormező

Egy $\underline{v} : V \to V$ vektormező vektorpotenciálos, ha $\exists\ \underline{w} : V \to V$ vektormező, hogy $\underline{v} = rot\ \underline{w}$, azaz előáll egy másikmező rotációjaként. ($\underline{w}$ vektor tetszőleges koordinátáját nullának választjuk a megoldás során.) Feltétele: $div\ \underline{v} = 0$. (forrásmenteség)

3. Görbe

Legyen $I \in \mathbb{R}$ egy nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^3$ leképezést reguláris görbének hívjuk, ha r immerzió, azaz a derivált leképezése injektív (a képek egyenlőségéből következik az ősképek egyenlősége: $\varphi(a) = \varphi(b) \to a = b$).

4. Görbe ívhossza

A pályasebesség I fölötti integrálját a térgörbe ívhosszának nevezzük (sebesség idő szerinti vonalintegrálját):

$$L(\underline{r}) = \int_I ||\dot{\underline{r}}(\tau)||\, d\tau$$

Más definíció szerint, amikor egy tetszőleges síkgörbe ívhosszát olyan húrok összegével közelítjük, amik 0-hoz tartanak.
Egy $y = f(x)$ egyenlettel adott, szakaszonként sima görbe $a \leq x \leq b$ határok közötti ívhossza:

$$s = \int_{x=a}^{b} ds = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

A „töröttvonalak” hosszának az összege is az ívhossz, minden határon túli finomítás esetén:

$$\sum_i ||\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})||$$

5. Felület

Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$, ekkor S-t reguláris (szabályos) felületnek mondjuk, ha $\forall\ p \in S$ ponthoz létezik p-nek olyan $V \subset \mathbb{R}^3$ környezete, hogy a $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ leképezés:

- differenciálható homeomorfizmus (diffeomorfizmus, azaz differenciálható bijekció)
- és φ immerzió, azaz a $\varphi'_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (q pontban) injektív lineáris leképezés
  φ neve: parametrizáció, $p \in V \cap S$ neve: p koordinátakörnyezete

6. Felszínszámítás

Triangularizáció (felszín lefedése háromszögekkel) helyett kicsi, elemi, érintő paralelogrammákkal közelítjük a felszínt, amik már nem tudnak elválni a felülettől (ez az alapelve).
Skaláris felületelem:

$$dS = \left|\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|\right| \Delta u \Delta v$$

Ahol $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ és $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ a paramétervonalak P pontbeli érintővektorai. (A felületen a P pontot az u és v úgynevezett paramétervonalak metszéseként vettük fel; $\underline{r}$ a P pontba mutató vektor). A skaláris felületelem a két differenciálvektor által kifeszített elemi paralelogramma területe. Amit, ha minden határon túl finomítunk, akkor a következő integrál megadja a teljes felszínt:

$$S = \iint_T dS = \iint_T \left|\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right|\right| dudv$$

7. Stokes-tétel

A görbe menti és a felületi integrálok közötti kapcsolatot írja le. „Kétdimenziós Newton-Leibnizformulának" is szokták nevezni.
Legyen $F : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^3$ jobbkéz-szabály szerint irányított, parametrizált peremes felület Továbbá, legyen $\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ legalább egyszer folytonosan differenciálható vektormező, ekkor:

$$\oint_{\mathcal{G}} < \underline{v}(\underline{r}), d\underline{s} > \iint_F < rot\ \underline{v}, d\underline{F} >$$

Tehát a $\mathcal{G}$ görbe menti vonalintegrál megegyezik az F felületen vett felületi integrállal. $d\underline{F} = \underline{n}$ Ezáltal is belátható, hogy ha a vektormező örvénymentes, akkor bármely zárt görbe menti integrálja zérus, hiszen, ha $rot\ \underline{v} = 0$, akkor a skalárszorzat nulla a kettős integrálban.
Megjegyzések:

- Kétoldalú, zárt felület legyen adott, amit egy zárt görbe határol
- Azonos peremmel rendelkező S_1 és S_2 felületek esetén az integrálok megegyeznek
- Perem nélküli felület esetén nulla a kettős integrál értéke
- Ha nem irányítható a felület, akkor felbontjuk irányítható részekre
- Fizikai alkalmazás pl. gerjesztési törvény

8. Gauss-Osztrogradszkij-tétel

A felületi integrál és a térfogati integrál között teremt kapcsolatot. Szükséges egy korlátos, zárt felület és egy kifelé mutató normálvektor. Legyen $V : [a,b]^3 \to \mathbb{R}^3$ irányított, paraméterezett elemi tértartomány és $\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ V-n legalább egyszer differenciálható vektormező, ekkor:

$$\oiint_F < \underline{v}(\underline{r}), d\underline{F} >= \iiint_V div(\underline{v}(\underline{r}))dV$$

Ahol F a határfelülete V-nek. A tételből látható, hogy forrásmentes ($div\ \underline{v} = 0$) vektortér zárt felületre vett integrálja (avagy átáramlási feleslege) nulla.

9. Green-tételek

Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszeresen folytonosan differenciálható skalármezők. A Gauss-Osztrogradszkij-tételben vegyük fel a $\underline{v}$ vektorteret $\underline{v} = \varphi \cdot grad\ \psi$ alakban.

$$div\ \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \underline{\nabla}(\varphi \cdot \underline{\nabla}\psi) = \underline{\nabla}\varphi\underline{\nabla}\psi + \varphi\Delta\psi = grad\ \varphi grad\ \psi + \varphi\Delta\psi$$

Aszimmetrikus Green-tételt:

$$\oint\!\!\!\oint_F < \varphi \cdot grad\ \psi, d\underline{F} >= \iiint_V (grad\ \varphi\ grad\ \psi + \varphi\Delta\psi) dV$$

Az első Green-tételben φ és ψ szerepét felcseréljuk, és az így kapott egyenletet kivonjuk az első tétel egyenletéből.

Szimmetrikus Green-tétel:

$$\oint\!\!\!\oint_F < \varphi \cdot grad\ \psi - \psi \cdot grad\ \varphi, d\underline{F} >= \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV$$

Differenciálegyenletek I:

1. Közönséges n-edrendű differenciálegyenlet

Differenciálegyenletnek az olyan egyenletet nevezzük, melyben ismeretlen függvények, ezek deriváltjai, valamint független változó(k) fordul(nak) elő.
Közönséges: csak egyetlen független (x) változó van benne (nem parciális, ahol több)
Rend: az ismeretlen (y', y'', ...) legmagasabb fokszámú deriváltja
Definíció:
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-szer folytonosan differenciálható függvény, $y = y^{(0)}, y' = y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ deriváltfüggvények szintén folytonosak és jelölje x a független változót.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

egyenlet az y-ra vonatkozó, n-edrendű, közönséges differenciálegyenlet. (A fenti megadást implicit megadásnak is hívjuk, mivel a legmagasabb fokszámú derivált nem fejezhető ki egyértelműen, expliciten.)

2. Differenciálegyenlet megoldásának típusai

Általános:
Amely kielégíti a differenciálegyenletet (DE-t) és pontosan annyi, egymástól független, tetszőleges konstanst tartalmaz, ahányad rendű a DE. Az általános megoldás a homogén és az inhomogén rész összege: $y_á = y_H + y_{IH}$
Partikuláris:
Amely az általános megoldásból úgy származtatható, hogy az abban szereplő konstansoknak meghatározott értéket adunk. (pl. Cauchy kezdetiérték-feladat) Általánosabban: partikuláris megoldás, ha a megoldásfüggvény legalább 1-gyel kevesebb egymástól független állandót tartalmaz, mint ahányad rendű a DE.
Szinguláris:
Olyan megoldás, amely NEM kapható meg az általános megoldásból az állandók megfelelő választásával. (pl. szeparábilis DE esetén)

3. Cauchy-feladat

Az n-edrendű DE olyan megoldását keressük, amely kielégíti:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

kezdeti feltételt, ahol $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ adott számok. Egy DE megoldása során meg van adva megfelelő számú peremfeltétel (PF), amikkel az integrálás során feltűnő állandók értéke meghatározható. Annyi PF kell, ahányad rendű a DE.

4. Lipschitz-feltétel

Ha az f függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt az adott tértartományon, akkor a megoldásgörbék nem metszik egymást (azaz létezik egyértelmű megoldás, egy ponton csak egy darab integrálgörbe halad át).
Definíció:
Az f függvény a D tartományon az y változóra nézve kielégíti a Lipschitz-feltételt, ha létezik M pozitív valós szám:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M\,|y_2 - y_1| \qquad \forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

5. Picard-Lindelöf tétel

Ez egyben egzisztencia- és unicitástétel is. Legyen $y' = f(x, y)$ explicit alakban adott DE, és $D = I_1 \times I_2$ nyílt téglalap tartomány, ahol I_1, I_2 nyílt intervallumok és legyen $(x_0, y_0) \in D$, továbbá:

- f folytonos mindkét változójában D-n.
- f elégítse ki a Lipschitz-feltételt y változóra D-n.

Egyértelműen létezik $\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény melyre,

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

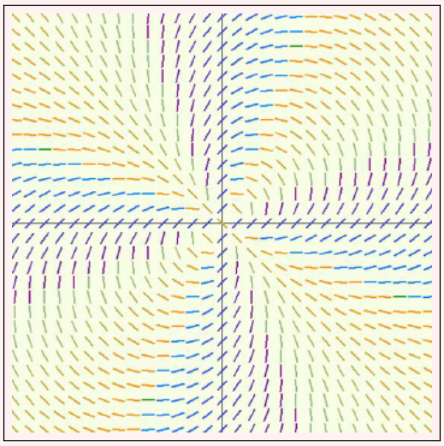
$$\varphi'(x_0) = y_0$$

egyaránt teljesül, azaz a φ megoldás egyértelmű.
Megjegyzések:

- Ha f függvényről csak a folytonosságot feltételezzük: Peano-feltétel.
- Hasonlóan a Cauchy-feltételhez (ott I. feltétel ugyanaz, II. feltétel, hogy az f függvény y szerinti parciális deriváltja korlátos $\forall$ D-beli pontban), a Picard-Lindelöf tétel is erősebb, szigorúbb tétel. Hiszen, a tételben elegendő, de nem szükséges feltételek vannak, ezáltal lehet, hogy nem teljesül mindkét feltétel, mégis van egyértelmű megoldás!

6. Iránymező

Az iránymező a differenciálegyenlet megoldásairól ad szemléletes képet. Az $y' = f(x, y)$ DE megoldása geometriailag a következőképpen szemléltethető. Az f függvény értelmezési tartományának minden egyes (x, y) pontjához rendeljük hozzá a rajta átmenő, $y' = f(x, y)$ iránytangensű (meredekségű) egyenesnek (megoldásgörbének) a pontot tartalmazó kicsiny szakaszát. E szakaszok összessége alkotja a differenciálegyenlet iránymezőjét; a szakaszokból elég sokat ábrázolva kapjuk a DE megoldásának geometriai képét.
Tehát sok-sok pontban berajzoljuk az érintők egy kicsiny darabját, ezek lesznek a képen is látható vonalelemek, amik összessége az iránymező.
Izoklina: Az a görbe, amelynek pontjaihoz azonos irányú, vagyis párhuzamos vonalelemek tartoznak.



Differenciálegyenletek II:

1. Szeparábilis és arra visszavezethető DE

Definíció:
Az olyan $y' = f(x, y)$ elsőrendű DE-et, amely $y' = h(x) \cdot g(y)$ alakra hozható, szeparábilis (változóiban szétválasztható) differenciálegyenletnek nevezzük. Feltesszük, hogy h és g valamely, alkalmas I és J intervallumon folytonosak.
Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = y' = h(x) \cdot g(y)$$
$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Szinguláris megoldás: $g(y) = 0$, amivel osztani kell
Nem szinguláris megoldás: $g(y) \neq 0$
Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethetőek más DE-ek is u helyettesítéssel:

$$y' = f(ax + by + c)$$
$$u := ax + by + c$$
$$u' = \frac{du}{dx} = a + by' = a + b \cdot f(u)$$

illetve

$$y' = f(1, \frac{y}{x})$$
$$u = \frac{y}{x}$$
$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{y'x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x}$$

Továbbá, fontos még az is, hogy az elsőrendű, lineáris differenciálegyenleteknek a homogén része is szétválasztható DE-re vezethető vissza.

2. Bernoulli-féle DE

Definíció:
Az $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n (n \neq 0, n \neq 1)$ alakú, elsőrendű, nemlineáris DE-et. Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük, ahol $p, q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.
Megoldás helyettesítéssel:

$$z(x) = z = y^{1-n} \qquad \text{(eredeti DE)}$$
$$z' = \frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' \qquad (1)$$

Ahonnan az eredeti DE-et y^n-nel leosztva, a (1) egyenletet pedig $1-n$-nel leosztva és felhasználva a helyettesítést, azt kapjuk, hogy:

$$z' + (1-n)p(x) \cdot z = (1-n)q(x)$$

Ami már egy lineáris DE z-re nézve, tehát megoldható homogén-inhomogén módon.

3. Riccati-féle DE

Definíció:
Az $a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y + c(x) \cdot y^2 = r(x)$ alakú elsőrendű, nemlineáris DE-et Riccatiféle differenciálegyenletnek nevezzük, ahol $a, b, c, r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.
Megoldás:
A Riccati-féle nemlineáris DE integrálással általában nem oldható meg. Akkor, és csak akkor tudjuk integrálással előállítani a megoldását, ha ismerjük egy partikuláris megoldását.
Megjegyzések:

- Ha $r(x) = 0$, akkor Bernoulli-féle DE-et kapunk
- Ha $c(x) = 0$, akkor a DE lineáris

$y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_p(x)$ alakban bevezetett új függvény segítségével z-re már lineáris DE-et kapunk, vagy $y(x) = z(x) + y_p(x)$ típusú helyettesítéssel Bernoulli-típusúra redukálható a Riccati-féle DE.
Megoldás helyettesítéssel:
$y' = x + z \to y' = 1 + z'$, amit visszaírva a DE-be, leegyszerűsödik Bernoulli-ra.

4. Egzakt DE

Definíció:
Egy $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ lakú DE-et, melyben $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, egzakt DE-nek nevezzük, ha az alábbi két parciális derivált folytonos és egyenlőek:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Megoldás:
DE megoldása $F(x, y) = C$ alakú (a skalárpotenciál kereséséhez hasonló). Létezik olyan $F(x, y)$, hogy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Egzaktra visszavezethető: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ alakú DE általában nem egzakt (vagyis a bal oldala nem teljes differenciál), azaz:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Ilyen esetben kísérletet tehetünk egy olyan $M(x, y) \neq 0$ függvény megkeresésére, amellyel a differenciálegyenletet beszorozva az új DE már egzakt lesz:

$$ln\,|M(x)| = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$$

$$ln\,|M(y)| = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy$$

Azt a multiplikátort kell használni, ami csak az egyik változótól függ (amit ki lehet integrálni).

5. Lineáris állandó együtthatós DE

Lineáris: az ismeretlen függvény és annak deriváltjai csak első hatványon szerepelnek és ezek szorzatai sem fordulnak elő az egyenletben. (Ellenkező esetben nemlineáris.) **Definíció:**