Matematika G1-G2-G3 kidolgozott tételek

Kun László Ákos

2022/2023

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

Matematika G1 szóbeli tételek

Halmazelmélet és komplex számok:

1. Halmaz, unió, metszet, különbség

Halmaz: Közös tulajdonságú elemek összessége.

Unió: Két vagy több halmaz uniója mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

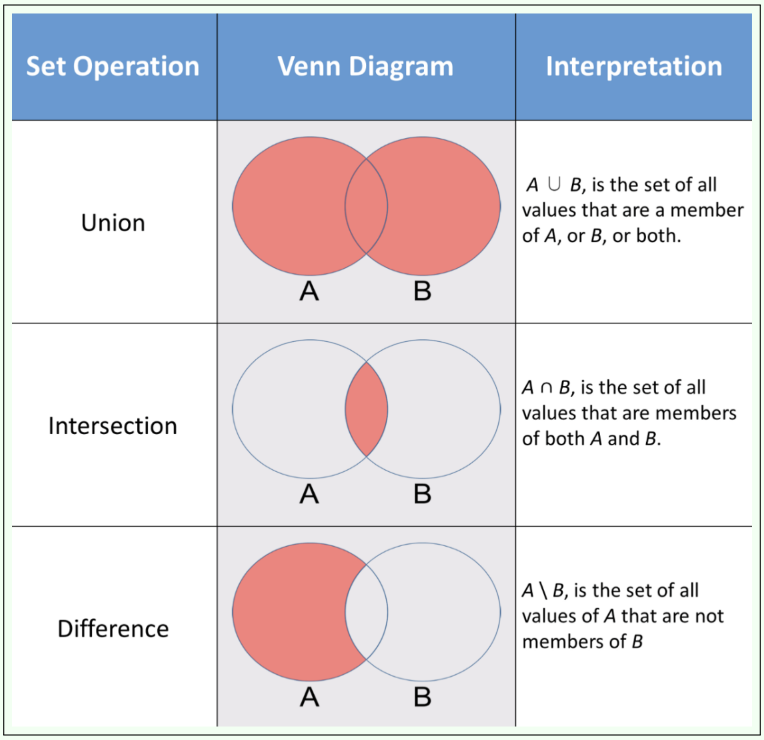
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Metszet: Két vagy több halmaz metszete pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, melyek mindegyik halmaznak elemei

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Különbség: A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \ni B\}$$



Set Operation	Venn Diagram	Interpretation
Union	A B	$A \cup B$, is the set of all values that are a member of A, or B, or both.
Intersection	A B	$A \cap B$, is the set of all values that are members of both A and B.
Difference	A B	$A \setminus B$, is the set of all values of A that are not members of B

2. Descartes-szorzat, hatványhalmaz

Az A és B Halmazok Descartes-szorzatán az A és B Halmazok elemeiből alkotott összes rendezett elempárok halmazát értjük.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Hatványhalmaz: Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát a Halmaz hatványhalmazának hívjuk.

3. Csoport, gyűrű, test

Félcsoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)

Csoport: Legyen $G \neq 0$ és egy $\circ$ művelet (szorzás). Ekkor $(G, \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in G$ esetén
2. bármely $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in G$ esetén (létezik az egységelem, e, amely asszociatív)
3. minden $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik inverzelem)

Ábel-csoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem

Gyűrű: Legyen $R \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(R, +, \circ)$ gyűrű ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R, +)$ Ábel csoportot alkot (Ábel csoport = kommutatív csoport)
2. A művelet asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet disztributív $+$-ra nézve (összekapcsolható) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén

Test: Legyen $T \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(T, +, \circ)$ test ha teljesülnek az alábbiak:

1. (T, +) Ábel csoportot alkot
2. A $\circ$ művelet legyen asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet legyen disztributív azaz $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén
4. Létezik $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in T$ esetén (létezik egységelem a második műveletre)
5. A $+$ műveletekhez tartozó egységelem kivételével bármely $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik az inverz elem, kivéve az első művelethez $(+)$ tartozó egységelem esetében)

4. Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja

- **Algebrai alak:** $z = a + b \cdot i$ (z valós része a, képzetes része pedig b)
  - **konjugált:** $\overline{z} = a - b \cdot i$
  - **abszolút érték:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pitagorasz-tételből), és mivel:
    $z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) = a^2 - (b \cdot i)^2 = a^2 + b^2$, ezért $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- **Trigonometrikus (polár) alak:** $z = r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$, mivel

$$cos(\varphi) = \frac{a}{r}$$

$$sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

  Tehát $a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b = r \cdot sin(\varphi)$, innen már egyértelműen következik a trigonometrikus alak az algebraiból r-t kiemelve ($a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b \cdot i = r \cdot i \cdot sin(\varphi)$)
- **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ - ez csak egy szimbólum, rövidítés, ami megkönnyíti a számolást a komplex számokkal, lényegében a trigonometrikus alak kicsit rövidebben.

5. Komplex számok hatványozása

de Moivre-képlet:

$$z^n = [r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))]^n = r^n(cos(n\varphi) + i \cdot sin(n\varphi))$$

Bizonyítás: Teljes indukció használatával

1. $n = 1$-re és $n = 2$-re **igaz**
2. indukciós feltétel: $n = k$
3. Ekkor $z^k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi))$
4. ha $n = k + 1$, akkor:

$$z^{k+1} = z^k \cdot k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi)) \cdot r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$$
$$= r^{k+1}[cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot sin(k\varphi + \varphi)] =$$
$$r^{k+1}[cos((k + 1)\varphi) + i \cdot sin((k + 1)\varphi)]$$

és $k + 1$ az n volt, tehát a bizonyítás kész.

6. Komplex számok gyökvonása

$$z_1^n = z_2 = r_1^n \cdot (cos(n\varphi_1) + i \cdot sin(n\varphi_1)) = r_2 \cdot (cos(\varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_2))$$

$$z_1 = \sqrt[n]{z_2}$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha a hosszuk és argumentumuk is egyenlő:

- $r_1 = \sqrt[n]{r_2}$ (**hossz**)
- $n \cdot \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ (**argumentum**) $\rightarrow$ forgásszög, periodicitás miatt $p = 2\pi$
- Így $\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + k \cdot 2\pi}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$
- Tehát:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}))$$

Az n-edik gyökvonás után olyan komplex számokat kapunk, amik egy szabályos sokszög (n-szög) csúcsai! Tehát n-edik gyökvonás esetén n db komplex szám a megoldás.

Numerikus sorozatok:

1. Numerikus sorozat határértéke

Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in R$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy a sorozat $N(\varepsilon)$-nél nagyobb indexű elemei az az ε sugarú környezetében vannak. Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in R$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

2. Konvergens, divergens sorozat

- **Definíció:** Az (a_n) konvergens, ha van olyan $a \in R$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik $N(\varepsilon)$ valós küszöbszám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \ ha \ \ n > N(\varepsilon)$$

- Az "a" számot az (a_n) határértékének hívjuk, és a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vagy az $a_n \to a$, ha $n \to \infty$ jelölést használjuk.
- Az (a_n) divergens, ha nem konvergens.

Tételek:

- Konvergens sorozat korlátos.
- Monoton korlátos sorozat konvergens.
- van határértéke/torlódási pontjai $\to$ nem biztos, hogy konvergens
- **Bolzano-Weierstrass-tétel:** minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

3. Nevezetes sorozatok

Olyan sorozatok, amelyek határértékét nem kell bizonyítani, csak felhasználni!

Bernoulli-féle egyenlőtlenség: ha $x \geq -1$, akkor $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

1. $a^n \to 0$, ha $|a| < 1$
   $a^n \to 1$, ha $a = 1$
   $a^n \to +\infty$, ha $a > 1$
   a^n divergens, ha $a < -1$
2. $\sqrt[n]{a} \to 1$, ha $n \to \infty (a > 0)$
3. $a^n \cdot n^k \to 0$, nullsorozat, ha $|a| < 1$ és k rögzített természetes szám
4. $\sqrt[n]{n} \to 1$, ha $n \to \infty \ \ (n \geq 2)$
5. $\frac{a^n}{n!} \to 0 (a \in \mathbb{R})$

Legfontosabb:

$$(1 + \frac{\alpha}{n})^n \to e^\alpha$$

4. Cauchy sorozat

Definíció: Az (a_n)-t Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ ha } n, m > N(\varepsilon) \qquad (n, m \in N)$$

Tétel: Cauchy-féle konvergencia kritérium (szükséges és elégséges feltétel). Az (a_n) akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy sorozat!

5. Torlódási pont

Definíció: A h a H halmaz torlódási pontja, ha h bármely környezetében van H-nak h-tól különböző eleme. A t szám a sorozat torlódási pontja, ha t akármilyen kicsi környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Például: $(-1)^n$

Függvények, derivált:

1. Függvények, értelmezési tartomány, értékkészlet

Függvény: ha az A (nemüres) halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B (nemüres) halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

$$f : A \to B$$

Értelmezési tartomány: azon elemek halmaza, melyekhez a függvény hozzárendel egy-egy elemet a B halmazból, jelen esetben ez az A halmaz.

$$D_f = A$$

Értékkészlet: A képhalmaz, azaz a B halmaz azon elemei, melyeket az f függvény ténylegesen hozzárendel az A valamelyik eleméhez. Az értékkészlet tehát része a képhalmaznak:

$$R_f \subset B$$

2. Függvény határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az "a" pontban A, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
/Ez a Cauchy-féle definíció/

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \text{ azt jelenti, hogy:}$$

$$-\delta(\varepsilon) < x - a < \delta(\varepsilon) \quad / + a$$

$$a - \delta(\varepsilon) < x < a + \delta(\varepsilon)$$

Szemléletesesen: azt jelenti, hogy a függvényértékek ($f(x) - ek$) tetszőlegesen megközelítik az A számot, ha az ε értékek elég közel kerülnek a-hoz. Az f függvénynek az "a" pontban acsa (akkor és csak akkor) van határértéke, ha van bal- és jobboldali határértéke és ez a kettő megegyezik!

- **Határérték a végtelenben:**
  - Az f függvény határértéke $+\infty$-ben A, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x > N(\varepsilon)$.
  - Az f függvény határértéke $-\infty$-ben A, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < N(\varepsilon)$.
- **A végtelen, mint határérték:**
  - Az f függvény határértéke a-ban $+\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) > N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.
  - Az f függvény határértéke a-ban $-\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) < N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.

3. Függvény folytonosság

Az f függvény az értelmezési tartományának "a" pontjában folytonos, ha ebben a pontban létezik határértéke és ez egyenlő az adott pontbeli helyettesítési értékkel, azaz ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- **Definíció:** Az f függvényt folytonosnak nevezzük az $a \in D_f$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Az f függvény egy intervallumon egyenletesen folytonos, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy f értelmezési tartományának bármely x_1, x_2 elemére, amelyek távolsága egymástól kisebb δ-nál, fennáll az alábbi egyenlőtlenség.

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- **Tétel:** Az f függvény pontosan akkor folytonos értelmezési tartományának "a" pontjában, ha ott balról és jobbról is folytonos.
- **Definíció:** Az f függvény folytonos az $]a, b[$-on, ha folytonos $]a, b[$ minden pontjában. Az f függvény folytonos az $[a, b]$-on, ha folytonos $]a, b[$-on és a-ban balról, b-ben jobbról folytonos.

A folytonosság néhány nevezetes következménye:
Ha f folytonos egy zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos.

Bolzano-tétel: ha a függvény a zárt intervallumon folytonos, és az intervallum két végpontjában az értékei különböző előjelűek, akkor az intervallum belsejében van zérushelye. Másképp: felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket egy folytonos függvény egy zárt intervallumon.

Weierstrass-tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát is függvényértékként; továbbá minden olyan értéket, ami a legnagyobb és legkisebb érték közé esik.

4. Inverz függvény

Ha az $f : X \to Y$ függvénynél a leképezés irányát megfordítjuk, vagyis az Y halmaz elemeit képezzük le az X halmaz elemeire, akkor ez a fordított leképezés általában nem függvény, mert nem biztos, hogy egy $y \in Y$ elemnek egyetlen $x \in X$ elem felel meg. Ezért fontos az, hogy f bijektív, azaz kölcsönösen egyértelmű legyen, mert ekkor az $f - 1$ -gyel jelölt fordított leképezés is már függvény lesz.

- **Definíció:** Ha az $f : X \to Y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor az $f^{-1} = Y \to X$ függvényt f inverz függvényének nevezzük. Ekkor igaz az alábbi összefüggés:

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

5. Derivált

Ha létezik és véges az alábbi differenciálhányados határértéke:

$$Lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

akkor azt az f függvény deriváltjának vagy "a" pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.
Jelölés:

$$\frac{df(a)}{dx} = f'(a)$$

6. Lokális szélsőérték definíciója és feltétele

Legyen $f : I \subset R \to R$; $a \subset I$
Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális maximuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \leq f(a)(\forall x \in K)$$

Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális minimuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \geq f(a)(\forall x \in K)$$

Szükséges feltétel:
Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és f-nek $\alpha \in int.\ I - ben$ (I belseje) szélsőértéke van, akkor $f'(\alpha) = 0$

Elégséges feltétel:
Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és $\alpha \in int.\ I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f-nek α-ban lokális minimuma van.

$$f'(x) \leq 0 \to x \in](\alpha - r); \alpha[$$
$$f'(x) \geq 0 \to x \in]\alpha; (\alpha + r)[$$

Ha $f : I \subset R \to R$ differenciálható függvény és $\alpha \in int.\ I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f-nek α-ban lokális maximuma van.

$$f'(x) \geq 0 \to x \in](\alpha - r); \alpha[$$

$$f'(x) \leq 0 \to x \in]\alpha; (\alpha + r)[$$

7. L'Hôpital szabály

Legyen f és g differenciálható függvények az α pont egy környezetében, továbbá:

$$Lim_{x \to \alpha} f(x) = Lim_{x \to \alpha} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad |Lim_{x \to \alpha} f(x)| = |Lim_{x \to \alpha} g(x)| = \infty$$
$$\alpha \in \{0; \pm\infty\}$$

Ekkor:

$$\frac{Lim_{x \to \alpha} f'(x)}{Lim_{x \to \alpha} g'(x)} = \frac{Lim_{x \to \alpha} f(x)}{Lim_{x \to \alpha} f(x)}$$

Középérték tételek és Integrálás:

1. Lagrange középérték tétel

Legyen $f : I \subset R \to R$ folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $]a;b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a;b[$ hogy:

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Rolle középérték tétel

Legyen f folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $]a;b[$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$ Ekkor létezik $\xi \in]a;b[$ melyre teljesül, hogy:

$$f'(\xi) = 0$$

3. Cauchy középérték tétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a;b]$ intervallumon és differenciálhatóak $]a;b[$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in]a;b[$ esetén. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a;b[$ hogy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\delta)}{g'(\delta)}$$

4. Riemann-Integrálhatóság

Az f függvény Riemann-integrálható $[a;b]$ intervallumon, ha a Darboux-féle alsó- és felső-integrálja megegyezik. Ezt a közös értéket az f függvény Riemann-integráljának nevezzük.

5. Newton-Leibniz formula

Legyen f függvény Riemann-integrálható $[a;b]$ intervallumon és $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ olyan primitív függvény, hogy F folytonos $[a;b]$ intervallumon, F differenciálható $]a;b[$ intervallumon és $F'(x) = f(x)$ bármely $x \in]a;b[$ Ekkor:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

6. Improprius integrál

Legyen $(a;b) \in \mathbb{R}_b$ és $(a < b)$ valamint

1. minden $[x;y] \subset]a;b[$ esetén f Riemann-int. $[x;y]$ intervallumon és $(x;y) \subset \mathbb{R}$
2. létezik olyan $c \in \mathbb{R}(a < c < b)$, hogy az alábbi határértékek léteznek és végesek:

$$Lim_{x\to\alpha} \int_x^c f(t)\,dt \qquad \text{és} \qquad Lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\,dt$$

Ekkor az $I := Lim_{x\to\alpha} \int_x^c f(t)\,dt + Lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\,dt$ összeget az f függvény improprius integráljának nevezzük $]a;b[$ intervallumon és $\int_a^b f(b)\,dt$ jelöljük.

Azt is mondjuk, hogy az f függvény improprius Riemann-integrálja az $]a;b[$ intervallumon konvergens. Ha az 1. feltétel teljesül, de a 2. feltétel nem, akkor az f függvény improprius Riemann-integrálja divergens.

Numerikus sorok:

1. Numerikus sor fogalma

Az a_n numerikus sorozat tagjaiból képzett végtelen összeget numerikus sornak nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. Numerikus sor konvergenciája

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon)$ hogy:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon \qquad (n, m > N_{(\varepsilon)}$$

Feltételes konvergencia:
Ha $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens), akkor feltételes konvergenciáról beszélünk.

3. Numerikus sor divergenciája

Ha a numerikus sor nem konvergens, akkor divergens.

4. Konvergencia tesztek

- **Majorálás/minorálás:**
  Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok, melyekre teljesül az hogy $a_n < b_n$ bármely $n \in N$ esetén, ekkor:
  - **Minorálás:** Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az
  - **Majorálás:** Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az
- **D'Alambert-féle hányadosteszt:**
  Legyen $\sum a_n$ egy pozitív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:
  $$\frac{a_n + 1}{a_n} < q$$
- **Cauchy-féle gyökteszt:**
  Legyen $\sum a_n$ egy nemnegatív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:
  $$\sqrt[n]{a_n} < q$$

Matematika G2 szóbeli tételek

Lineáris algebra I:

1. Csoport, gyűrű, test

Félcsoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)

Csoport: Legyen $G \neq 0$ és egy $\circ$ művelet (szorzás). Ekkor $(G, \circ)$ csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in G$ esetén
2. bármely $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in G$ esetén (létezik az egységelem, e, amely asszociatív)
3. minden $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik inverzelem)

Ábel-csoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem

Gyűrű: Legyen $R \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(R, +, \circ)$ gyűrű ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R, +)$ Ábel csoportot alkot (Ábel csoport = kommutatív csoport)
2. A művelet asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet disztributív $+$-ra nézve (összekapcsolható) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén

Test: Legyen $T \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(T, +, \circ)$ test ha teljesülnek az alábbiak:

1. (T, +) Ábel csoportot alkot
2. A $\circ$ művelet legyen asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A $\circ$ művelet legyen disztributív azaz $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén
4. Létezik $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in T$ esetén (létezik egységelem a második műveletre)
5. A $+$ műveletekhez tartozó egységelem kivételével bármely $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik az inverz elem, kivéve az első művelethez $(+)$ tartozó egységelem esetében)

2. Euklideszi tér

Euklideszi térnek nevezzük azon T számtest feletti vektortereket, amelyekben a verktorterek axiómái értelmezve vannak, valamint az ún. skaláris szorzást:

1. A skaláris szorzat V-beli rendezett párokhoz egy T-beli nemnegatív elemet rendelő függvény, vagyis:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, < \underline{a}, \underline{b} >: V \times V \to T$$
2. a skaláris szorzat kommutatív:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, < \underline{a}, \underline{b} >=< \underline{b}, \underline{a} >$$
3. A skalárszorzás kiemelhető:
$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in V, \lambda \in T, < \lambda\underline{a}, \underline{b} >= \lambda < \underline{a}, \underline{b} >$$
4. Az összeg asszociatív:
$$\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V, < \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} >=< \underline{a}, \underline{c} > + < \underline{b}, \underline{c} >$$

3. Vektortér

Legyen V nem üres halmaz, $+, \circ$ műveletek, T test. $(V, +, \circ)$ T test feletti vektortér, ha:

1. $(V, +)$ Ábel-csoport
2. valamint:
$$\forall \alpha, \beta \in T, \text{ és } \underline{x} \in V : (\alpha \circ \beta) \circ \underline{x} = a \circ (\beta \circ \underline{x})$$
3. Ha ϵ a T-beli egység, akkor:
$$\forall \underline{x} \in V : \epsilon \circ \underline{x} = \underline{x}$$
$$\forall \alpha, \beta \in T \text{ és } \underline{x}, \underline{y} \in V : (\alpha + \beta) \circ \underline{x} = \alpha \circ \underline{x} + \beta \circ \underline{x} \text{ (rendes +)}$$
valamint:
$$\alpha \circ (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \circ \underline{x} + \alpha \circ \underline{y} \text{ (}V\text{-beli +)}$$

4. Vektorok lineáris függősége és függetlensége

$\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ vektor lineárisan független, amennyiben az alábbi egyenletnek csak a triviális megoldása létezik, ellenkező esetben lineárisan függő:

$$\lambda_1\underline{b}_1 + ... + \lambda_n\underline{b}_n = 0$$

5. Lineáris egyenletrendszer

A véges sok elsőfokú egyenletet és véges sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

6. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

A lineáris egyenletrendszer megoldásának szükséges és elégséges feltétele, az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $rg(A \mid \underline{b}) = rg(A)$

7. Mátrix determináns

Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ tér $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ vektorait és ehhez hozzárendelünk egy valós számot amit determinánsnak nevezünk és $det(\underline{a}_1; \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n)$-nel jelöljük.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinant of a 3 x 3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow \det(B) = |B| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

8. Mátrix inverze

Az $A \in M_{n\times n}$ mátrix inverzén A^{-1}-gyel jelölt $n \times n$-es mátrixot értünk, amelyre igaz, hogy:

$$\underline{\underline{A}} * \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

9. Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezzük a mátrix vektorai közül lineárisan függetlenek maximális számát.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrix rangja 2.

Lineáris algebra II:

1. Lineáris leképezés fogalma

V_1 és V_2 ugyanazon test $(\mathbb{R};\mathbb{C})$ feletti vektortérnek. Legyen $V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezzük, ha:

$$\varphi(\underline{a}+\underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b})$$

$$\varphi(\alpha\underline{a}) = \alpha\varphi(\underline{a})$$

Megjegyzés:

$$\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$$

2. Rang-nullitás tétele

Tetszőleges $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés esetén igaz, hogy: $def(\varphi) + rg(\varphi) = dim(V_1)$. Ebből $def(\varphi)$ a magtér rangja. A magtér V_1 részhalmaza, és a benne lévő elemek képe nullvektor. A képtér V_2 részhalmaza, és a benne lévő elemek a képei V_1 elemeinek.

3. Magtér

Magtér: Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés:

$$Ker(\varphi) := \{\underline{v} \mid \underline{v} \in V_1 \wedge \varphi(\underline{v} = \underline{0})\}$$

a φ magtere.

4. Sajátvektor, sajátérték

1. A mátrixnak λ a sajátértéke, ha létezik olyan $\underline{v}$ nem nulla vektor, hogy: $\underline{\underline{A}} * \underline{v} = \lambda * \underline{v}$
2. Képlet:
$$A' = \underline{\underline{C}}^{-1} * \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{C}}$$
3. $\varphi : V \to V$ keressünk azon vektorokat, amelyekre igaz: $(A - \lambda\underline{\underline{E}}) * \underline{v} = 0$. Ennek akkor van megoldása, ha:
$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$$
4. Egy vektornak ∞ saját vektora van. Lineárisan független egyenletrendszerek száma: $\underline{\underline{A}}_{m\times n} \to max$ n db
5. α-t a v sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek mondjuk.

5. Bázistranszformáció

Legyen $\{\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n\}$ és $\{\hat{\underline{b}}_1, ..., \hat{\underline{b}}_n\}$bázis V-ben, ekkor az egyikről a másikra való áttérés S mátrixa:

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_i \underline{b}_i$$

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \underline{b}_i$$

$$\hat{\underline{b}}_1 = \sum_{i=1}^{n} s_{in} \underline{b}_i$$

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

6. Hasonló mátrix

A és B mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan X reguláris mátrix, hogy:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{X}}^{-1} * \underline{\underline{B}} * \underline{\underline{X}}$$

7. Ortogonális mátrix

Egy mátrix ortogonális, amennyiben inverze megegyezik a transzponáltjával.

Függvénysorozatok, függvénysorok:

1. Függvénysorozat

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sorozatot függvénysorozatnak nevezünk.

2. Függvénysor

Az $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sorozat előállítható a:

$$s_1(x) := f_1(x)$$

$$s_2 := f_1(x) + f_2(x)$$

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{i} f_n(x)$$

az így előállított s_n sorozatot az f_n sorozatból képzett függvény sornak hívjuk, és $\sum F_n$-nel jelöljük.

3. Függvénysorozat, függvénysor konvergenciája, egyenletes konvergenciája

A $\sum f_n$ függvény sor egyenletesen konvergens az $E \subset H$ halmazon $\Longleftrightarrow$ ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon) :\mid s_n(x) - s_m(x) \mid < \varepsilon$; ha $n; m > N(\varepsilon)$; $\forall x \in E$ esetén.

4. Weierstrass-tétel

Bármely $f_n : I \subset \mathbb{R}$ és $\sum f_n$ a belőle képzett függvénysor,$\sum a_n$ olyan konvergens numerikus sor, amelyre igaz: $\mid f_n(x) \mid \leq a_n$; $\forall x \in J$ esetén teljesül bármely $x \in \mathbb{N}$ vagy egy bizonyos n-től, ekkor $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens J-n.

5. Cauchy-Hadamard-tétel

Legyne r a $\sum_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara:

1. Ha $r = 0$ ebben az esetben a hatványsor csak az x_0 pontban konvergens
2. Ha $r = \infty$ a hatványsor bármyel $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén konvergens
3. Hat $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor abszolúz konvergens, ha $\mid x \mid < r$, és divergens, amennyiben $\mid x \mid > r$
4. Bizonyítás: az a, b rész bizonyítása az előző tétel alapján könnyen adódik:

   $$! \mid x_0 \mid < r, limsup \sqrt[n]{\mid a_n x_0^n \mid} = \mid x_0 \mid limsup \sqrt[n]{\mid a_n \mid} = \frac{|x_0|}{r}, \text{ ami } \mid x \mid > r \Rightarrow$$

   Létezik olya $0 < r < 1$, hogy a $\sum a_x x_0^n$ hatványsor a gyökteszt miatt konvergens. Mivel $\mid x_0 \mid < r$ tetszőleges volt, így $\forall \mid x_0 \mid < r$ esetén igaz, hogy $\sum a_n x_0^n$ hatványsor konvergens, amennyiben $\mid x \mid > r$, akkor a hatványsor divergens.

6. Hatványsor

Tegyük fel, hogy egy f függvény $\sum a_n x^b$ hatványsor alakban előállítható. Akkor az ezt leíró hatványsor alakja az alábbi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} * x^n$$

7. Taylor-polinom, Taylor-sor

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, az $x_0 \in I$ pontban legfeljebb p-szer differenciálható, ekkor az f függvények x_0 körüli p-edik Taylor polinomja:

$$T_{f,P}(x) = \sum_{k=0}^{P} \frac{f^(k)}{k!} * (x - x_0)^k$$

Tétel: ha az f függvény legalább $(r+1)$-szer differenciálható az (x, x_0) intervallumon, és $f^(k), k \in 1, 2, 3, ...r$ folytonos és az x és x_0 pontokban, akkor létezik olyan $\xi \in (x; x_0)$, hogy:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(k)} x_0}{k!} * (x - x_0)^k + \frac{f^{(r+1)} \xi}{(r+1)!} (x - x_0)^{r+1}$$

Ahol a masodik tag a Lagrange-féle maradéktag

8. Konvergencia sugár, konvergencia tartomány

Konvergencia sugár nagyságának kiszámítása:

$$\frac{1}{r} = lim_{m \to \infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid$$

9. Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2l$ szerint periodikus függvény, amely a $[0, 2l]$ intervallumon Reimann integrálható, ekkor f Fourier során az alábbi függvénysort értjük:

$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot cos(\frac{k\pi x}{l}) + b_k \cdot sin(\frac{k\pi x}{l})$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x)\, dx; \quad b_0 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) * cos(\frac{k\pi x}{l})\, dx;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) * sin(\frac{k\pi x}{l})\, dx;$$

Megjegyzés: ha az f függvény összeáll a fenti típusú függvénysor összegeként, akkor az együtthatók csak ilyenek lehetnek.

Többváltozós függvények:

1. Primitív függvény

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvénynek $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, ha $F' = f$.

2. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálhatósága

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^k$ leképezés. Azt mondjuk, hogy f differenciálható, az $\underline{a} \in D_f$ pontban, ha létezik $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés, melyre $\omega(\underline{0}) = \underline{0}$, $Lim_{||\underline{h}||\to 0}\dfrac{||\ \omega(\underline{h})\ ||}{||\ \underline{h}\ ||}$, hogy:

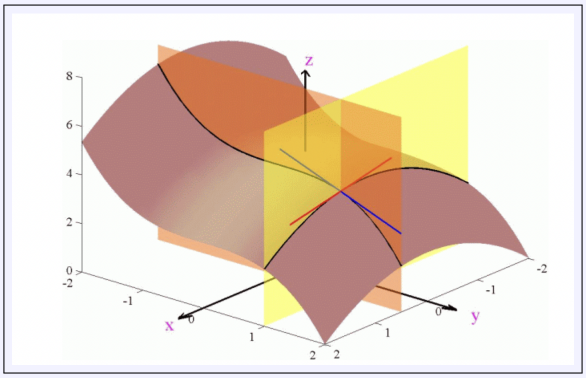
$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = A(\underline{x} - \underline{a}) + \omega(\underline{x} - \underline{a}).$$

Az "A"-nak megfelel egy $M_{k\times n}$-es mátrix. A deriválás egy leképezés.

3. Iránymenti derivált

Az iránymenti derivált, az adott irány által kimetszett függvény deriváltja. Közelebbről:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = Lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\underline{x})+\lambda\underline{e}-f(\underline{x})}{\lambda} =< \underline{e}, gradf >, \text{ ahol } |\ e\ |= 1$$



4. Parciális derivált

Parciális deriváltnak nevezzük a többváltozós függvények olyan deriváltját, amikor a függvényt egy rögzített változ ójának függvényeként fogjuk fel, eszerint deriválunk, miközben a többi változójelet konstans értéknek tekintjük. (A koordináta-tengelyek mentén lévő irány menti derivált.)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'(x_i)$$

5. Gradiens

A $z = f(x; y)$ függvény gradiense a parciális deriváltakból, mint koordinátákból alkotott vektor: $gradf(x; y) = (f'_x(x; y); f_y(x; y))$. A gradiens legfontosabb tulajdonságai:

- Minden pontban a gradiens merőleges a ponton áthaladó szimmetriavonalra.
- A gradiens a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat.

$$gradf = \bigtriangledown f = [f'x_1, ..., f'x_n]$$

6. Jacobi-mátrix

A parciális deriváltak vektora vektor értékű függvényekre is defniálható. Ha $\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektor értékű függvény, és koordinátafüggvényei rendre $F_1; ...; F_m$, akkor:

$$\underline{F}(x_1, ...x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ...F_m(x_1, ..., x_n))$$

Ekkor F deriváltja az F_i (sorvektor) gradiensek oszlopvektoraként definiálható. Ennek a mezőnek a vektorgradiense a Jacobi -mátrix:

$$\mathcal{J}_{\underline{F}} = grad\underline{F} = \bigtriangledown\underline{F} = \partial(F_1, ..., F_m)\partial(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$m = n$-re az eredmény egy másodfokú tenzor. Eféle tenzorok írják le például a fizikában a mechanikai feszültséget és az elaszticitást.

7. Szélsőérték, feltételes szélsőérték

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első rendű parciális deriváltak eltűnjenek az adott pontban. Emellett a létezés elégséges feltétel, hogy az adott a pontban a következő determináns értéke pozitív.

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

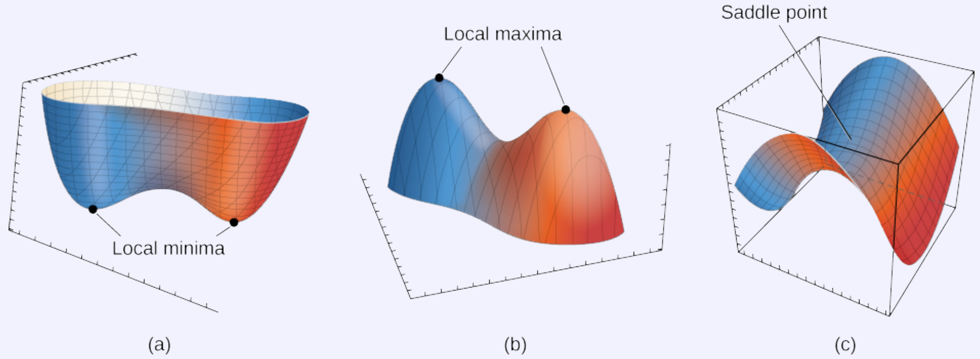
Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimuma van a-ban, ha a-nak van olyan K környezete, melyre $f(a) \leq f(x) \forall x \in K$.

Ha egy $f \in c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ függvénynek lokális szélső értéke van a-ban, akkor $f'(a) = 0$ a nullvektor, azaz $\partial_i f(a) = 0 (\forall i = 1; \ldots ; n)$

Legyen egy $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ függvényre $f'(a) = 0$

- Ha $F''(a)$ sajátértékei $> 0 \Rightarrow f$-nek lokális minimuma van a-ban
- Ha $F''(a)$ sajátértékei $< 0 \Rightarrow f$-nek lokális maxima van a-ban

Megjegyzés: Többdimenziós jelenség ha $f''(a)$-nak van $+$ és $-$ sajátértéke is, akkor nincs szélsőértéke, hanem ún. nyeregpontja: egy irányban minimum és egy másik irányban maximum van.



8. Kvadratikus formák definitsége

Egy n változós q kvadratikus alakot:

1. **pozitív definitnek** nevezünk, ha bármely $x_1;\vdots;x_n$ esetén $q(x_1;\vdots;x_n) \geq 0$, és $q(x_1;\vdots;x_n) = 0$ csak akkor, ha $x_1 = \vdots = x_n = 0$
2. **pozitív szemidefinitnek** nevezzük, ha bármely $x_1;\vdots;x_n$ esetén $q(x_1;\vdots;x_n) \geq 0$, és van olyan $(x_1;\vdots;x_n) \neq 0$, melyre igaz hogy: $q(x_1;\vdots;x_n) = 0$
3. **negatív definitnek** nevezzük, ha bármely $x1;\vdots;xn$ esetén $q(x_1;\vdots;x_n) \leq 0$, és $q(x_1;\vdots;x_n) = 0$, csak akkor ha: $x_1 = \vdots = x_n = 0$
4. **negatív szemidefinitnek** nevezünk, ha bármely $x_1;\vdots;x_n$ esetén $q(x_1;\vdots;x_n) \leq 0$ és van olyan $(x_1;\vdots;x_n) \neq 0$ melyre $q(x_1;\vdots;x_n) = 0$
5. **indefinitnek** nevezünk, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

9. Riemann-integrálhatóság (alsó-felső Darboux-integrál)

1. $\underline{S}(f) = inf\{\underline{S}(f,d) \mid d$ beosztása I-nek$\}$
2. $\underline{S}$ neve: alsó Darboux-integrál
3. $\overline{S}(f) = sup\{\overline{S}(f,d) \mid d$ beosztása I-nek$\}$
4. $\overline{S}$ neve: felső Darboux-integrál

Megjegyzés:

$$\underline{S}(f,d) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}(f,d) \forall d$$

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. f-et Riemann-integrálhatónak mondjuk, ha $\underline{S}f = \overline{S}f$. Ezt a közös értéket jelöljük.