

Matematika G1-G2-G3 kidolgozott tételek

Kun László Ákos

2022/2023

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

Matematika G1 szóbeli tételek

Halmazelmélet és komplex számok:

1. Halmaz, unió, metszet, különbség

Halmaz: Közös tulajdonságú elemek összessége.

Unió: Két vagy több halmaz uniója mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

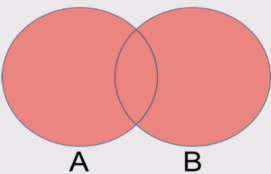
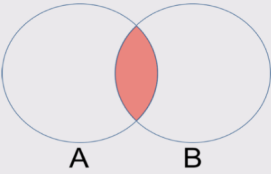
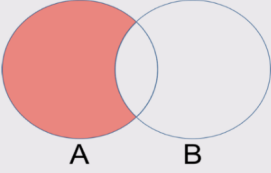
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Metszet: Két vagy több halmaz metszete pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, melyek mindegyik halmaznak elemei

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Különbség: A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Set Operation	Venn Diagram	Interpretation
Union		$A \cup B$, is the set of all values that are a member of A , or B , or both.
Intersection		$A \cap B$, is the set of all values that are members of both A and B .
Difference		$A \setminus B$, is the set of all values of A that are not members of B

2. Descartes-szorzat, hatványhalmaz

Az A és B Halmazok Descartes-szorzatán az A és B Halmazok elemeiből alkotott összes rendezett elempárok halmazát értjük.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Hatványhalmaz: Egy halmaz összes részhalmazainak halmazát a Halmaz hatványhalmazának hívjuk.

3. Csoport, gyűrű, test

Félcsoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)

Csoport: Legyen $G \neq 0$ és egy \circ művelet (szorzás). Ekkor (G, \circ) csoport, ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in G$ esetén
2. bármely $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in G$ esetén (létezik az egységelem, e , amely asszociatív)
3. minden $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik inverzelem)

Ábel-csoport: olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem

Gyűrű: Legyen $R \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(R, +, \circ)$ gyűrű ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(R, +)$ Ábel csoportot alkot (Ábel csoport = kommutatív csoport)
2. A művelet asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A \circ művelet disztributív $+$ -ra nézve (összekapcsolható) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén

Test: Legyen $T \neq 0$ és $+, \circ$ két művelet. Ekkor $(T, +, \circ)$ test ha teljesülnek az alábbiak:

1. $(T, +)$ Ábel csoportot alkot
2. A \circ művelet legyen asszociatív (csoportosítható) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ minden $a, b, c \in R$ esetén
3. A \circ művelet legyen disztributív azaz $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ minden $a, b, c \in R$ esetén
4. Létezik $e \in G$, hogy $a \circ e = e \circ a = a$ minden $a \in T$ esetén (létezik egységelem a második műveletre)
5. A $+$ műveletekhez tartozó egységelem kivételével bármely $a \in G$ esetén létezik $a' \in G$, hogy $a \circ a' = a' \circ a = e$ (létezik az inverz elem, kivéve az első művelethez $(+)$ tartozó egységelem esetében)

4. Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja

- **Algebrai alak:** $z = a + b \cdot i$ (z valós része a , képzetes része pedig b)

– **konjugált:** $\bar{z} = a - b \cdot i$

– **abszolút érték:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pitagorasz-tételből), és mivel:
 $z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) = a^2 - (b \cdot i)^2 = a^2 + b^2$, ezért $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

- **Trigonometrikus (polár) alak:** $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, mivel

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

Tehát $a = r \cdot \cos(\varphi)$ és $b = r \cdot \sin(\varphi)$, innen már egyértelműen következik a trigonometrikus alak az algebraiból r -t kiemelve ($a = r \cdot \cos(\varphi)$ és $b \cdot i = r \cdot i \cdot \sin(\varphi)$)

- **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ - ez csak egy szimbólum, rövidítés, ami megkönnyíti a számolást a komplex számokkal, lényegében a trigonometrikus alak kicsit rövidebben.

5. Komplex számok hatványozása

de Moivre-képlet:

$$z^n = [r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Bizonyítás: Teljes indukció használatával

1. $n = 1$ -re és $n = 2$ -re **igaz**
2. indukciós feltétel: $n = k$
3. Ekkor $z^k = r^k(\cos(k\varphi) + i \cdot \sin(k\varphi))$
4. ha $n = k + 1$, akkor:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = r^k(\cos(k\varphi) + i \cdot \sin(k\varphi)) \cdot r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \\ &= r^{k+1}[\cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot \sin(k\varphi + \varphi)] = \\ &= r^{k+1}[\cos((k+1)\varphi) + i \cdot \sin((k+1)\varphi)] \end{aligned}$$

és $k + 1$ az n volt, tehát a bizonyítás kész.

6. Komplex számok gyökvonása

$$z_1^n = z_2 = r_1^n \cdot (\cos(n\varphi_1) + i \cdot \sin(n\varphi_1)) = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$z_1 = \sqrt[n]{z_2}$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha a hosszuk és argumentumuk is egyenlő:

- $r_1 = \sqrt[n]{r_2}$ (hossz)
- $n \cdot \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ (argumentum) \rightarrow forgásszög, periodicitás miatt $p = 2\pi$
- Így $\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + k \cdot 2\pi}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
- Tehát:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right)$$

Az n -edik gyökvonás után olyan komplex számokat kapunk, amik egy szabályos sokszög (n -szög) csúcsai! Tehát n -edik gyökvonás esetén n db komplex szám a megoldás.

Numerikus sorozatok:**1. Numerikus sorozat határértéke**

Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy a sorozat $N(\varepsilon)$ -nél nagyobb indexű elemei az az ε sugarú környezetében vannak. Az (a_n) sorozatot konvergens és határértéke az $a \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

2. Konvergens, divergens sorozat

- **Definíció:** Az (a_n) konvergens, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik $N(\varepsilon)$ valós küszöbszám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

- Az "a" számot az (a_n) határértékének hívjuk, és a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ vagy az $a_n \rightarrow a$, ha $n \rightarrow \infty$ jelölést használjuk.
- Az (a_n) divergens, ha nem konvergens.

Tételek:

- Konvergens sorozat korlátos.
- Monoton korlátos sorozat konvergens.
- van határértéke/torlódási pontjai \rightarrow nem biztos, hogy konvergens
- **Bolzano-Weierstrass-tétel:** minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

3. Nevezetes sorozatok

Olyan sorozatok, amelyek határértékét nem kell bizonyítani, csak felhasználni!

Bernoulli-féle egyenlőtlenség: ha $x \geq -1$, akkor $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$

1. $a^n \rightarrow 0$, ha $|a| < 1$
 $a^n \rightarrow 1$, ha $a = 1$
 $a^n \rightarrow +\infty$, ha $a > 1$
 a^n divergens, ha $a < -1$
2. $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$ ($a > 0$)
3. $a^n \cdot n^k \rightarrow 0$, nullsorozat, ha $|a| < 1$ és k rögzített természetes szám
4. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$ ($n \geq 2$)
5. $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ ($a \in \mathbb{R}$)

Legfontosabb:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \rightarrow e^\alpha$$

4. Cauchy sorozat

Definíció: Az (a_n) -t Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \text{ ha } n, m > N(\varepsilon) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

Tétel: Cauchy-féle konvergencia kritérium (szükséges és elégséges feltétel). Az (a_n) akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy sorozat!

5. Torlódási pont

Definíció: A h a H halmaz torlódási pontja, ha h bármely környezetében van H -nak h -től különböző eleme. A t szám a sorozat torlódási pontja, ha t akármilyen kicsi környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Például: $(-1)^n$

Függvények, derivált:**1. Függvények, értelmezési tartomány, értékkészlet**

Függvény: ha az A (nemüres) halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B (nemüres) halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

$$f : A \rightarrow B$$

Értelmezési tartomány: azon elemek halmaza, melyekhez a függvény hozzárendel egy-egy elemet a B halmazból, jelen esetben ez az A halmaz.

$$D_f = A$$

Értékkészlet: A képhalmaz, azaz a B halmaz azon elemei, melyeket az f függvény ténylegesen hozzárendel az A valamelyik eleméhez. Az értékkészlet tehát része a képhalmaznak:

$$R_f \subset B$$

2. Függvény határérték

Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az " a " pontban A , ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
/Ez a Cauchy-féle definíció/

$|x - a| < \delta(\varepsilon)$ azt jelenti, hogy:

$$-\delta(\varepsilon) < x - a < \delta(\varepsilon) \quad / + a$$

$$a - \delta(\varepsilon) < x < a + \delta(\varepsilon)$$

Szemléletesen: azt jelenti, hogy a függvényértékek ($f(x) - ek$) tetszőlegesen megközelítik az A számot, ha az ε értékek elég közel kerülnek a -hoz. Az f függvénynek az " a " pontban acsa (akkor és csak akkor) van határértéke, ha van bal- és jobboldali határértéke és ez a kettő megegyezik!

- **Határérték a végtelenben:**

- Az f függvény határértéke $+\infty$ -ben A , ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x > N(\varepsilon)$.
- Az f függvény határértéke $-\infty$ -ben A , ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x < N(\varepsilon)$.

- **A végtelen, mint határérték:**

- Az f függvény határértéke a -ban $+\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) > N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.
- Az f függvény határértéke a -ban $-\infty$, ha bármely $N > 0$ esetén van olyan $\delta(N)$, hogy $f(x) < N$, ha $0 < |x - a| < \delta(N)$.

3. Függvény folytonosság

Az f függvény az értelmezési tartományának " a " pontjában folytonos, ha ebben a pontban létezik határértéke és ez egyenlő az adott pontbeli helyettesítési értékkel, azaz ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- **Definíció:** Az f függvényt folytonosnak nevezzük az $a \in D_f$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha $|x - a| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Az f függvény egy intervallumon egyenletesen folytonos, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy f értelmezési tartományának bármely x_1, x_2 elemére, amelyek távolsága egymástól kisebb δ -nál, fennáll az alábbi egyenlőtlenség.

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- **Tétel:** Az f függvény pontosan akkor folytonos értelmezési tartományának " a " pontjában, ha ott balról és jobbról is folytonos.
- **Definíció:** Az f függvény folytonos az $]a, b[$ -on, ha folytonos $]a, b[$ minden pontjában. Az f függvény folytonos az $[a, b]$ -on, ha folytonos $]a, b[$ -on és a -ban balról, b -ben jobbról folytonos.

A folytonosság néhány nevezetes következménye:

Ha f folytonos egy zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos.

Bolzano-tétel: ha a függvény a zárt intervallumon folytonos, és az intervallum két végpontjában az értékei különböző előjelűek, akkor az intervallum belsejében van zérushelye. Másképp: felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket egy folytonos függvény egy zárt intervallumon.

Weierstrass-tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát is függvényértékként; továbbá minden olyan értéket, ami a legnagyobb és legkisebb érték közé esik.

4. Inverz függvény

Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvénynél a leképezés irányát megfordítjuk, vagyis az Y halmaz elemeit képezzük le az X halmaz elemeire, akkor ez a fordított leképezés általában nem függvény, mert nem biztos, hogy egy $y \in Y$ elemnek egyetlen $x \in X$ elem felel meg. Ezért fontos az, hogy f bijektív, azaz kölcsönösen egyértelmű legyen, mert ekkor az f^{-1} -gyel jelölt fordított leképezés is már függvény lesz.

- **Definíció:** Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor az $f^{-1} : Y \rightarrow X$ függvényt f inverz függvényének nevezzük. Ekkor igaz az alábbi összefüggés:

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

5. Derivált

Ha létezik és véges az alábbi differenciálhányados határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

akkor azt az f függvény deriváltjának vagy "a" pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

Jelölés:

$$\frac{df(a)}{dx} = f'(a)$$

6. Lokális szélsőérték definíciója és feltétele

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $a \in I$

Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális maximuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \leq f(a) (\forall x \in K)$$

Azt mondjuk, hogy f függvénynek a pontban lokális minimuma van, ha létezik $\delta > 0$, hogy:

$$f(x) \geq f(a) (\forall x \in K)$$

Szükséges feltétel:

Ha $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és f -nek $\alpha \in \text{int. } I$ -ben (I belseje) szélsőértéke van, akkor $f'(\alpha) = 0$

Elégséges feltétel:

Ha $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\alpha \in \text{int. } I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f -nek α -ban lokális minimuma van.

$$f'(x) \leq 0 \rightarrow x \in]\alpha - r); \alpha[$$

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \in]\alpha; \alpha + r)[$$

Ha $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $\alpha \in \text{int. } I$ továbbá létezik $r > 0$, és teljesül az alábbi feltétel, akkor f -nek α -ban lokális maximuma van.

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \in]\alpha - r); \alpha[$$

$$f'(x) \leq 0 \rightarrow x \in]\alpha; \alpha + r)[$$

7. L'Hôpital szabály

Legyen f és g differenciálható függvények az α pont egy környezetében, továbbá:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad |\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)| = |\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)| = \infty$$

$$\alpha \in \{0; \pm\infty\}$$

Ekkor:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}$$

Középérték tételek és Integrálás:**1. Lagrange középérték tétel**

Legyen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $]a; b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a; b[$ hogy:

$$f'(\delta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Rolle középérték tétel

Legyen f folytonos $[a; b]$ intervallumon és differenciálható $]a; b[$ intervallumon, továbbá $f(a) = f(b) = 0$. Ekkor létezik $\xi \in]a; b[$ melyre teljesül, hogy:

$$f'(\xi) = 0$$

3. Cauchy középérték tétel

Legyen f és g függvények folytonosak $[a; b]$ intervallumon és differenciálhatóak $]a; b[$ intervallumon, valamint tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in]a; b[$ esetén. Ekkor létezik olyan $\delta \in]a; b[$ hogy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\delta)}{g'(\delta)}$$

4. Riemann-Integrálhatóság

Az f függvény Riemann-integrálható $[a; b]$ intervallumon, ha a Darboux-féle alsó- és felső-integrálja megegyezik. Ezt a közös értéket az f függvény Riemann-integráljának nevezzük.

5. Newton-Leibniz formula

Legyen f függvény Riemann-integrálható $[a; b]$ intervallumon és $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan primitív függvény, hogy F folytonos $[a; b]$ intervallumon, F differenciálható $]a; b[$ intervallumon és $F'(x) = f(x)$ bármely $x \in]a; b[$ Ekkor:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

6. Improprius integrál

Legyen $(a; b) \in \mathbb{R}_b$ és $(a < b)$ valamint

1. minden $[x; y] \subset]a; b[$ esetén f Riemann-int. $[x; y]$ intervallumon és $(x; y) \subset \mathbb{R}$
2. létezik olyan $c \in \mathbb{R}(a < c < b)$, hogy az alábbi határértékek léteznek és végesek:

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t) dt \quad \text{és} \quad \lim_{y \rightarrow b} \int_c^y f(t) dt$$

Ekkor az $I := \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t) dt + \lim_{y \rightarrow b} \int_c^y f(t) dt$ összeget az f függvény improprius integráljának nevezzük $]a; b[$ intervallumon és $\int_a^b f(b) dt$ jelöljük.

Azt is mondjuk, hogy az f függvény improprius Riemann-integrálja az $]a; b[$ intervallumon konvergens. Ha az 1. feltétel teljesül, de a 2. feltétel nem, akkor az f függvény improprius Riemann-integrálja divergens.

Numerikus sorok:**1. Numerikus sor fogalma**

Az a_n numerikus sorozat tagjaiból képzett végtelen összeget numerikus sornak nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. Numerikus sor konvergenciája

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N(\varepsilon)$ hogy:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon \quad (n, m > N(\varepsilon))$$

Feltételes konvergencia:

Ha $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens), akkor feltételes konvergenciáról beszélünk.

3. Numerikus sor divergenciája

Ha a numerikus sor nem konvergens, akkor divergens.

4. Konvergencia tesztek**• Majorálás/minorálás:**

Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok, melyekre teljesül az hogy $a_n < b_n$ bármely $n \in N$ esetén, ekkor:

- **Minorálás:** Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az
- **Majorálás:** Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is az

• D’Alambert-féle hányadosteszt:

Legyen $\sum a_n$ egy pozitív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

• Cauchy-féle gyökteszt:

Legyen $\sum a_n$ egy nemnegatív tagú sor, ha létezik olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelyre az $n \in N$ feltétel mellett az alábbi egyenlet teljesül, akkor konvergens:

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$