Matematika G1-G2-G3 kidolgozott tételek

Kun László Ákos

2022/2023

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

MINTA!!

- To be continued

Matematika G1 szóbeli tételek

Halmazelmélet és komplex számok:

1. Halmaz, metszet, unió, különbség

- **halmaz:** nem definiált alapfogalom
  - **jelölés:** A, B halmazok; $a \in A; a \notin B$ (nem definiáljuk)
  - $\emptyset$ **üreshalmaz:** egyetlen eleme sincs
  - **nemüres halmaz:** $\exists$ legalább egy eleme
  - **jól megadott halmaz:** ha bármely elemről eldönthető, hogy beletartozik-e

A és B az X alaphalmaz részhalmazai, ekkor

- **metszet:** $A \cap B = \{x \in X | x \in A \wedge x \in B\}$
  Két halmaz diszjunkt, ha metszetük üres halmaz.
- **unió:** $A \cup B = \{x \in X | x \in A \vee x \in B\}$
- **különbség:** $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **egyéb:** $A \subset A$ az A részhalmaza önmagának: reflexív tulajdonság

ha $A \subset B$ és $B \subset A \rightarrow A = B$ vagyis antiszimmetrikus (A részhz.-a B-nek és fordítva)
ha $A \subset B$ és $B \subset C \rightarrow A \subset C$ tranzitív tulajdonság (A a nagyobb hz.-nak is részhz.-a)

2. Descartes-szorzat, hatványhalmaz

- **Descartes-szorzat:** Az A és B halmazok Descartes-szorzatán az A és B halmazok elemeiből alkotott összes rendezett elempár halmazát értjük.
  - Jelölése: $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
  - Az $A \times B$ szorzathalmaz egy $T \in A \times B$ részhalmaza az A és B halmazok elemei közti kételemű (binér) reláció
  - Ha $(a; b) \in T$, akkor a és b relációban vannak: $a \top b$
- **Hatványhalmaz:** egy halmaz összes részhalmazainak halmaza Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van

Kommutativitás: felcserélhetőség
Asszociativitás: csoportosíthatóság
Disztributivitás: szétbonthatóság

3. Csoport, gyűrű, test

- **Félcsoport:** olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak (pl. természetes számok esetén az összeadás)
- **Csoport:** olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak ÉS létezik zérus elem ill. inverz elem (összeadásnak a kivonás, szorzásnak az osztás az invertálása) (pl. egész számok halmaza esetén az összeadás)
- **Abel-csoport:** olyan halmaz, melyben a kétváltozós műveletek asszociatívak és kommutatívak is ill. létezik a zérus elem és az inverz elem
- **Gyűrű:** olyan csoport, amelyben a kétváltozós műveletek már disztributívak is egymásra nézve (pl. az egész számok esetén az összeadásra nézve a szorzás) A gyűrűben tehát elvégezhető: az összeadás, a kivonás és a szorzás
- **Test:** olyan csoport, amelyben a kétváltozós műveletek disztributívak egymásra nézve (pl. racionális számoknál az összeadásra nézve a szorzás disztributív) A testben, mint algebrai struktúrában tehát elvégezhető az összeadás, kivonás, szorzás és az osztás

4. Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja

- **Algebrai alak:** $z = a + b \cdot i$ (z valós része a, képzetes része pedig b)
  - **konjugált:** $\overline{z} = a - b \cdot i$
  - **abszolút érték:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pitagorasz-tételből), és mivel: $z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) = a^2 - (b \cdot i)^2 = a^2 + b^2$, ezért $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- **Trigonometrikus (polár) alak:** $z = r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$, mivel

$$cos(\varphi) = \frac{a}{r}$$

$$sin(\varphi) = \frac{b}{r}$$

  Tehát $a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b = r \cdot sin(\varphi)$, innen már egyértelműen következik a trigonometrikus alak az algebraiból r-t kiemelve ($a = r \cdot cos(\varphi)$ és $b \cdot i = r \cdot i \cdot sin(\varphi)$)
- **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{e \cdot \varphi}$ - ez csak egy szimbólum, rövidítés, ami megkönnyíti a számolást a komplex számokkal, lényegében a trigonometrikus alak kicsit rövidebben.

5. Komplex számok hatványozása

de Moivre-képlet:

$$z^n = [r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))]^n = r^n(cos(n\varphi) + i \cdot sin(n\varphi))$$

Bizonyítás: Teljes indukció használatával

1. $n = 1$-re és $n = 2$-re **igaz**
2. indukciós feltétel: $n = k$
3. Ekkor $z^k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi))$
4. ha $n = k + 1$, akkor:

$$\begin{gathered} z^{k+1} = z^k \cdot k = r^k(cos(k\varphi) + i \cdot sin(k\varphi)) \cdot r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)) \\ = r^{k+1}[cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot sin(k\varphi + \varphi)] = \\ r^{k+1}[cos((k + 1)\varphi) + i \cdot sin((k + 1)\varphi)] \end{gathered}$$

és $k + 1$ az n volt, tehát a bizonyítás kész.

6. Komplex számok gyökvonása

$$z_1^n = z_2 = r_1^n \cdot (cos(n\varphi_1) + i \cdot sin(n\varphi_1)) = r_2 \cdot (cos(\varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_2))$$

$$z_1 = \sqrt[n]{z_2}$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha a hosszuk és argumentumuk is egyenlő:

- $r_1 = \sqrt[n]{r_2}$ (**hossz**)
- $n \cdot \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ (**argumentum**) $\rightarrow$ forgásszög, periodicitás miatt $p = 2\pi$
- Így $\varphi_1 = \frac{\varphi_2 + k \cdot 2\pi}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$
- Tehát:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + i \cdot sin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}))$$

Az n-edik gyökvonás után olyan komplex számokat kapunk, amik egy szabályos sokszög (n-szög) csúcsai! Tehát n-edik gyökvonás esetén n db komplex szám a megoldás.

Numerikus sorozatok:

1. Numerikus sorozat határértéke

- Egy függvényt numerikus sorozatnak nevezünk, ha értelmezési tartománya $\mathbb{N}^+$
  Jelölései: a_n, $(a : n)$;
  Megadása: explicit alak, rekurzív, leírás.
- **Tétel:** Az (a_n) konvergens és határértéke az $a \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha bármely pozitív ε-hoz létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex (küszöbszám), hogy a sorozat $N(\varepsilon)$-nál nagyobb indexű elemei már az "a" ε-sugarú környezetébe esnek.

Következmény:
Ha egy sorozatnak véges sok elemét megváltoztatjuk, vagy a sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk/elhagyunk belőle, akkor sem a konvergencia, sem a határérték nem változik meg!

2. Konvergens, divergens sorozat

- **Definíció** Az (a_n) konvergens, ha van olyan $a \in R$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik $N(\varepsilon)$ valós küszöbszám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \ ha \ \ n > N(\varepsilon)$$

$$azaz$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

- Az "a" számot az (a_n) határértékének hívjuk, és a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vagy az $a_n \to a$, ha $n \to \infty$ jelölést használjuk.
- Az (a_n) divergens, ha nem konvergens.

Tételek:

- Konvergens sorozat korlátos.
- Monoton korlátos sorozat konvergens.
- Monoton, nem korlátos sorozatnak van határértéke.
- konvergens $\to$ van határértéke
- van határértéke/torlódási pontjai $\to$ nem biztos, hogy konvergens
- **Bolzano-Weierstrass-tétel:** minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

3. Nevezetes sorozatok

Olyan sorozatok, amelyek határértékét nem kell bizonyítani, csak felhasználni!

- **Bernoulli-féle egyenlőtlenség:** ha $x \geq -1$, akkor $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

1. $a^n \to 0$, ha $|a| < 1$
   $a^n \to 1$, ha $a = 1$
   $a^n \to +\infty$, ha $a > 1$
   a^n divergens, ha $a < -1$
2. $\sqrt[n]{a} \to 1$, ha $n \to \infty (a > 0)$
3. $a^n \cdot n^k \to 0$, nullsorozat, ha $|a| < 1$ és k rögzített természetes szám
4. $\sqrt[n]{n} \to 1$, ha $n \to \infty \ (n \geq 2)$
5. $\frac{a^n}{n!} \to 0 (a \in \mathbb{R})$

Legfontosabb:

$$(1 + \frac{\alpha}{n})^n \to e^\alpha$$

4. Cauchy sorozat

- To be continued