TP Différences Finies 2020 MOCA 2A

September 15, 2021

1 Algorithme du Gradient conjugué

1.1 Cas-tests élémentaires

Construire quelques exemples de systèmes linéaires $Ax = b$ de petite taille où la matrice A est symétrique définie positive. On pourra par exemple écrire $A = BB^t$ avec B inversible ou encore choisir une matrice symétrique avec de grandes valeurs positives sur la diagonale et des petites ailleurs.

1.2 Programmation

Programmer la méthode du gradient conjugué pour résoudre les systèmes construits précédemment. On utilisera un test d'arrêt basé sur le résidu.

2 Différences finies pour le Laplacien 2D

2.1 Problème de la plaque

Ecrire la méthode des différences finies pour résoudre l'équation

$$-\triangle u(x, y) = 0$$

sur le domaine $D = [0, 1] \times [0, 1]$ avec comme conditions aux bords de Dirichlet $u(x, 1) = 100$ et $u(x, y) = 0$ sur les autres bords. Résoudre le système obtenu à l'aide du gradient conjugué. Le produit Ad_k sera calculé d'abord en ne tenant pas compte du caractère creux de la matrice, puis en en tenant compte. On comparera les temps de calculs en fonction du pas de discrétisation h ainsi que l'erreur par rapport à la solution exacte.

2.2 Equation de Poisson

Reprendre les questions précédentes pour l'équation

$$-\triangle u(x, y) = -2 \exp(x + y)$$

avec conditions aux limites de Dirichlet $u(x, y) = \exp(x + y)$. On pourra noter que la solution de cette équation est $u(x, y) = \exp(x + y)$.

3 Chaines de Markov pour le Laplacien 2D

3.1 Solution ponctuelle du problème de la plaque

Construire un algorithme permettant de calculer la solution en un point de la grille de pas h à l'aide de N simulations Monte-Carlo de la chaine de Markov associé. Utiliser cet algorithme pour obtenir la solution en tout point.

3.2 Solution globale du problème de la plaque

Construire un algorithme permettant un calcul de la solution globale de l'équation en utilisant les états visités au cours des différentes trajectoires. On choisira le point de départ au centre de la grille ou uniformément au hasard dans la grille. Comparer avec la méthode globale de la question 3.1.

3.3 Sequential Monte Carlo pour la plaque

Programmer k étapes de la méthode Monte-Carlo séquentielle qui consiste à calculer le résidu de l'équation par l'algorithme 3.2 et à le rajouter à l'approximation à l'étape précédente. Comparer avec l'algorithme 3.2 et au gradient conjugué du 2.1.

3.4 Sequential Monte Carlo pour le problème de Poisson

Programmer k étapes de la méthode Monte-Carlo séquentielle et la comparer avec le gradient conjugué.