

Theoretische Informatik

B. Nebel, A. Podelski, R. Bergdoll, D. Klumpp
Sommersemester 2022

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: 29. April 2022

Aufgabe 1.1 (Kardinalität von Sprachen; 2+2 Punkte)

Es seien L und L' Sprachen über demselben Alphabet Σ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Sind L und L' endlich, so gilt $|L \cdot L'| = |L| \cdot |L'|$.
- Ist Σ endlich, so gilt: $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$.

Σ^n bezeichne hierbei der Menge der Wörter über Σ der Länge n .

Aufgabe 1.2 (Kontextfreie Grammatiken; 2+4+4 Punkte)

Die Grammatik G über einem Alphabet Σ und dem Startsymbol S ist durch die folgenden Produktionsregeln gegeben:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon \\ S &\rightarrow x \quad x \in \Sigma \\ S &\rightarrow xSx \quad x \in \Sigma \end{aligned}$$

Die Sprache $L_n = \{w \in L(G) : |w| = n\}$ bezeichne die Menge aller Worte der Länge n der von G erzeugten Sprache $L(G)$.

- Definieren Sie die Mengen L_n induktiv. Geben Sie dazu erst die Mengen L_0 und L_1 explizit an und definieren Sie dann die Mengen L_n in Abhängigkeit von L_{n-2} für alle $n \geq 2$. In Ihrer Definition sollte G oder $L(G)$ nicht auftauchen.
- Beweisen Sie dass $w \in L(G) \Leftrightarrow w^R \in L(G)$.
- Beweisen Sie durch Induktion über n , dass $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$ gilt (hierbei bezeichne $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$).

Aufgabe 1.3 (Arithmetische Ausdrücke; 4+2 Punkte)

Wir definieren einen *arithmetischen Ausdruck* über die ganzen Zahlen und die vier Grundrechenarten (dargestellt mittels der Operatoren $+$, $-$, $*$ und $/$) wie folgt:

- Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck.
 - Für jeden Ausdruck X , der nicht mit einem Operator beginnt ist $-X$ ebenfalls ein Ausdruck. Beispielsweise ist -5 ein Ausdruck, $--5$ jedoch nicht.
 - Eine Verknüpfung $X + Y$, $X - Y$, $X * Y$, oder X/Y zweier Ausdrücke X und Y ist ein Ausdruck, sofern darin keine zwei Operatoren hintereinander stehen. Beispielsweise ist $-3 + 5$ ein Ausdruck, $5 + -3$ jedoch nicht.
 - Ein Ausdruck, der zwischen einer öffnenden und einer schließenden Klammer steht, ist wieder ein Ausdruck. Beispielsweise sind (-3) oder $(3 + 5)$ Ausdrücke.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für arithmetische Ausdrücke über \mathbb{Z} an.
 - Geben Sie für Ihre Grammatik aus Aufgabe (a) eine Ableitung des Ausdrucks $(42 + 2 + 4) * (-3 + 26)$ an, also eine Sequenz $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$, sodass $w_n = (42 + 2 + 4) * (-3 + 26)$.