Theoretische Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Sommer-Semester 2022

Aufgabe 4.1 - Reguläre Ausdrücke

Geben Sie reguläre Ausdrücke an, welche die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ beschreiben.

(a) $L = \{w \in \Sigma^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } 101\}$

(b) $L = \{w \in \Sigma^* : \ w \text{ enhält ein oder drei mal die } 1\}$

(c) $L = \{w \in \Sigma^* : \ \text{auf jedes Teilwort } 11 \text{ in } w \text{ folgt unmittelbar eine } 0\}$

(d) Sprache der Wörter mit einer ungeraden Anzahl von 1-Vorkommnissen am Ende (d.h. für jedes Wort dieser Sprache ist die Länge des längsten Suffixes, in dem die 0 nicht vorkommt, ungerade).

Aufgabe 4.1 (a) - Wörter ohne Teilwort 101

$L = \{w \in \Sigma^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } 101\}$

Mögliche Lösung: $(0|\epsilon)(000^*|1)^*(0|\epsilon)$

- Im Kern des Worts kann eine beliebige Folge von Nullen und Einsen stehen, wobei Nullen nie einzeln vorkommen dürfen.
- Am Anfang und Ende des Wortes kann auch eine einzelne Null stehen.

Aufgabe 4.1 (b) - Wörter, die ein oder drei mal die 1 enthalten

$L = \{w \in \Sigma^* : \ w$ enhält ein oder drei mal die $1\}$

Mögliche Lösung: $0^*10^*(0^*10^*10^*|\epsilon)$

- Am Anfang des Worts steht eine Eins umgeben von beliebig vielen Nullen
- Danach kann kann das Wort enden oder mit einem Wort mit genau zwei Einsen fortgesetzt werden.

Aufgabe 4.1 (c) - Auf jedes 11 folgt 0

$L = \{w \in \Sigma^* :$ auf jedes Teilwort 11 in w folgt unmittelbar eine $0\}$

Mögliche Lösung: $(0|10|110)^*(1|\epsilon)$

- Im Kern des Worts stehen nie mehr als zwei Einsen hintereinander. Nullen dürfen beliebig auftauchen.
- Am Ende kann eine einzelne Eins stehen.

Aufgabe 4.1 (d) - Ungerade Anzahl von Einsen am Ende

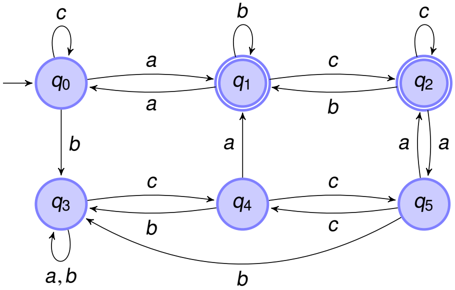
Sprache der Wörter mit einer ungeraden Anzahl von 1-Vorkommnissen am Ende (d.h. für jedes Wort dieser Sprache ist die Länge des längsten Suffixes, in dem die 0 nicht vorkommt, ungerade).

Mögliche Lösung: $(\epsilon|(0|1)^*0)1(11)^*$

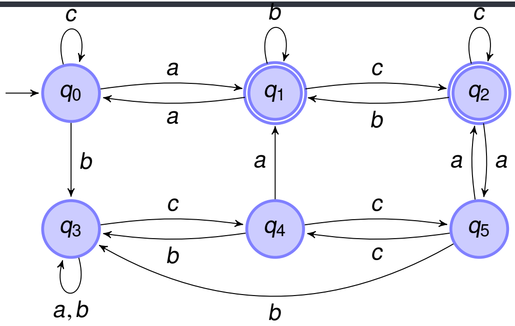
- Falls keine Nullen vorkommen, darf das Wort nur aus einer ungeraden Anzahl von Einsen bestehen.
- Andernfalls kann das Wort einen beliebigen Präfix haben, der durch eine Null vom geforderten Suffix getrennt ist.

Aufgabe 4.2 - Quotientenautomat

Wenden Sie den in der Vorlesung angegebenen Algorithmus an, um aus dem folgenden DFA $\mathcal{M}$ den entsprchenden äquivalenten reduzierten Automaten $\mathcal{M}_r$ zu konstruieren. Geben Sie dabei auch die verwendete Markierungstabelle an.



Aufgabe 4.2 - Markierungstabelle

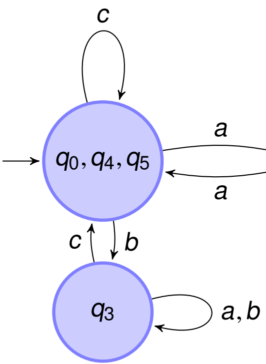


	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_5		ϵ	ϵ	a	
q_4		ϵ	ϵ	a	–
q_3	a	ϵ	ϵ	–	–
q_2	ϵ		–	–	–
q_1	ϵ	–	–	–	–

- Regel 1: Markiere alle Zustandspaare $\langle q, p\rangle \in Q \times Q$ mit $q \in F$ und $p \notin F$.
- Regel 2: Markiere alle unmarkierten Zustandspaare $\langle q, p\rangle \in Q \times Q$ für die es ein $a \in \Sigma$ gibt, so dass $\langle \delta(p, a), \delta(q, a)\rangle$ bereits markiert ist.

Aufgabe 4.2 - Reduzierter Automat

Nachdem Regel 2 nicht weiter angewendet werden kann, verschmelzen wir noch unmarkierte Zustandstupel und bilden den entsprechenden reduzierten Automaten $\mathcal{M}_r$:



Aufgabe 4.3 - Nerode-Relation

Betrachten Sie die Nerode-Relation $\simeq_L$ für die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt und endet mit einem } a\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$$

(a) Geben Sie alle Äquivalenzklassen von $\simeq_{L_1}$ an. Geben Sie außerdem für jede dieser Klassen die Menge der enthalten Wörter an (so wie bei den Beispielen in der Vorlesung). Konstruieren Sie anschließend den entsprechenden Myhill-Nerode-Minimalautomaten $\mathcal{M}_{L_1}$, dessen Zustände gerade den Äquivalenzklassen entsprechen.

(b) Zeigen Sie, dass $\simeq_{L_2}$ einen unendlichen Index besitzt.

Aufgabe 4.3 (a) - Äquivalenzklassen für L_1

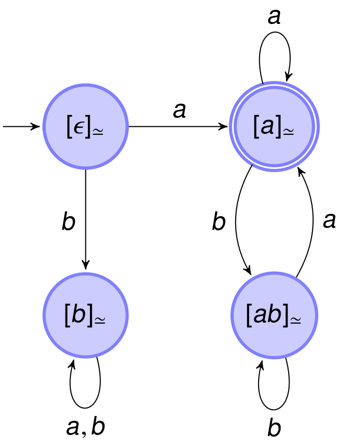
Nerode-Äquivalenzklassen für $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt und endet mit einem } a\}$:

- $[\epsilon]_\simeq = \{\epsilon\}$: $\epsilon w \in L_1$ gdw. $w \in L_1$
  Auf das leere Wort muss ein Wort der Sprache folgen. In diesem Fall gilt das nur für das leere Wort.
- $[a]_\simeq = \{a\}\{a,b\}^*\{a\} \cup \{a\} = L_1$: für jedes $v \in [a]_\simeq$ ist $vw \in L_1$ gdw. $w \in \{a,b\}^*\{a\} \cup \{\epsilon\}$
  Auf jedes Wort, das bereits mit *a* beginnt und endet, kann das leere Wort oder ein beliebiges Wort, das auf *a* endet, folgen.
- $[ab]_\simeq = \{a\}\{a,b\}^*\{b\}$: für jedes $v \in [ab]_\simeq$ ist $vw \in L$ gdw. $w \in \{a,b\}^*\{a\}$
  Auf jedes Wort, das mit *a* beginnt und mit *b* endet, kann ebenso ein beliebiges, auf *a* endendes Wort folgen – nicht aber das leere Wort.
- $[b]_\simeq = \{b\}\{a,b\}^*$: für jedes $v \in [b]_\simeq$ ist $vw \notin L$ für alle $w \in \Sigma^*$
  Alle Wörter, die mit *b* beginnen, können nie Teil der Sprache werden, egal was man anhängt.

Aufgabe 4.3 (a) - Myhill-Nerode-Minimalautomat

Konstruktion von $\mathcal{M}_L$:

- Die Zustände sind genau die konstruierten Äquivalenzklassen.
- Für jeden Zustand $[w]_\simeq$ und jedes Symbol $x \in \Sigma$ ergibt sich ein Übergang von $[w]_\simeq$ nach $[wx]_\simeq$.
- Der Startzustand ist immer $[\epsilon]_\simeq$.
- Alle Zustände $[w]_\simeq$ mit $w \in L_1$ sind Endzustände.



Aufgabe 4.3 (b) - Äquivalenzklassen für L_2

Zu zeigen: $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.

Idee: Wir müssen nicht alle möglichen Äquivalenzklassen untersuchen. Es genügt zu zeigen, dass eine unendliche Teilmenge von Σ^* paarweise verschiedene Äquivalenzklassen besitzt.

Beweis: Wir zeigen, dass für jeweils zwei Wörter $a^m b$ und $a^n b$ für $m < n$ die Äquivalenzklassen $[a^m b]_\simeq$ und $[a^n b]_\simeq$ verschieden sind.

- Es gilt $[a^m b]_\simeq \neq [a^n b]_\simeq$, wenn wir ein Wort v finden, sodass $a^m bv \in L_2 \iff a^n bv \notin L_2$ gilt.
- Dazu wählen wir $v = a^m$.
- Nun sehen wir, dass $a^m ba^m \in L_2$, aber $a^n ba^m \notin L_2$. $\square$

Aufgabe 4.4- Isomorphismus der Minimalautomaten

In der Vorlesung wurden der Myhill-Nerode-Minimalautomat $\mathcal{M}_L = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ und der Quotientenautomat $\mathcal{M}_r = \langle Q_r, \Sigma, \delta_r, q_r, F_r \rangle$ vorgestellt. Vollenden Sie den Beweis, dass diese Automaten isomorph sind, indem sie zeigen, dass

$$\{f(q) \mid q \in F_r\} = F$$

gilt, wobei f der in der Vorlesung beschriebene Isomorphismus ist.

Aufgabe 4.4 - Beweis

Zu zeigen: $\{f(q) \mid q \in F_r\} = F$

Beweis: Die Aussage lässt sich direkt aus der Definition von F und in der Vorlesung bemerkten Äquivalenzen herleiten:

$$
\begin{aligned}
F &= \{[w]_{\simeq} \mid w \in L\} && \text{Definition von } F \\
&= \{f(\delta_r(q_r, w)) \mid w \in L\} && \text{folgt aus: } f(q) = [w]_{\simeq} \text{ gdw. } \delta_r(q_r, w) = q \\
&= \{f(\delta_r(q_r, w)) \mid \delta_r(q_r, w) \in F_r\} && \text{folgt aus: } w \in L \text{ gdw. } \delta_r(q_r, w) \in F_r \\
&= \{f(q) \mid q \in F_r\} && \text{Substitution: } q = \delta_r(q_r, w)
\end{aligned}
$$

$\square$