Theoretische Informatik

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 1

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Sommer-Semester 2022

Aufgabe 1.1 (a) - Mächtigkeit des Produkts zweier Sprachen

Es seien L und L' Sprachen über demselben Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind L und L' endlich, so gilt $|L \cdot L'| = |L| \cdot |L'|$.

$L \cdot L' = \{uv \mid u \in L, v \in L'\}$. Damit hat $L \cdot L'$ also maximal $|L| \cdot |L'|$ viele Wörter.

Die Konkatenation unterschiedlicher Wörter können jedoch zum gleichen Resultat führen:

Beispiel: $uv = abc$ für $u = a$ und $v = bc$ sowie für $u = ab$ und $v = c$.

Sei $a \in \Sigma$. Damit lässt sich das folgende Gegenbeispiel konstruieren:

$$L = L' = \{a, aa\} \qquad L \cdot L' = \{aa, aaa, aaaa\}$$

Das Gegenbeispiel funktioniert für beliebige Σ, da Alphabete nicht-leere Mengen sind.

Aufgabe 1.1 (b) - Anzahl der Wörter über endl. Alphabeten

Es seien L und L' Sprachen über demselben Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(b) Ist Σ endlich, so gilt: $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$.

Beweis: Jedes $w \in \Sigma^n$ ist eine Folge $x_1 \dots x_n$.

An jeder Stelle können also $|\Sigma|$ verschiedene Symbole vorkommen.

Also $|\Sigma^n| = \underbrace{|\Sigma| \cdot \ldots \cdot |\Sigma|}_{n \text{ Faktoren}} = |\Sigma|^n$. $\square$

Natürlich könnte man das auch mittels vollständiger Induktion beweisen...

Aufgabe 1.2 - Kontextfreie Grammatiken

Die Grammatik G über einem Alphabet Σ und dem Startsymbol S ist durch die folgenden Produktionsregeln gegeben:

$$\begin{aligned} &S \rightarrow \epsilon \\ &S \rightarrow x && x \in \Sigma \\ &S \rightarrow xSx && x \in \Sigma \end{aligned}$$

Die Sprache $L_n = \{w \in L(G) : |w| = n\}$ bezeichne die Menge aller Worte der Länge n der von G erzeugten Sprache $L(G)$.

(a) Definieren Sie die Mengen L_n induktiv. Geben Sie dazu erst die Mengen L_0 und L_1 explizit an und definieren Sie dann die Mengen L_n in Abhängigkeit von L_{n-2} für alle $n \geq 2$. In Ihrer Definition sollte G oder $L(G)$ nicht auftauchen.

Aufgabe 1.2 (a) - Induktive Definition von L_n

Gegeben: Grammatik $G = \langle \{S\}, \Sigma, P, S \rangle$ mit den folgenden Produktionsregeln P:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \\ S &\rightarrow x & x \in \Sigma \\ S &\rightarrow xSx & x \in \Sigma \end{aligned}$$

Das leere Wort ist das einzig mögliche Wort der Länge 0. Aus der ersten Regel ergibt sich:

$$L_0 = \{\epsilon\}$$

Wörter der Länge 1 können nur Symbole aus Σ sein. Aus der zweiten Regel ergibt sich:

$$L_1 = \{u \mid u \in \Sigma\} = \Sigma$$

Die dritte Regel beschreibt, wie man längere Wörter der Länge $n > 1$ erzeugen kann:

$$L_n = \{xwx \mid w \in L_{n-2} \text{ und } x \in \Sigma\} \text{ für } n > 1$$

Aufgabe 1.2 (b) - Beweisen Sie, dass $w \in L(G) \Leftrightarrow w^R \in L(G)$.

Da w und w^R immer gleich lang sind, reicht es zu Beweisen, dass $w \in L_n \Leftrightarrow w^R \in L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zur Erinnerung:

$$L_0 = \{\epsilon\} \qquad L_1 = \{u \mid u \in \Sigma\} = \Sigma$$
$$L_n = \{xwx \mid w \in L_{n-2} \text{ und } x \in \Sigma\} \text{ für } n > 1$$

Wir Beweisen $w \in L_n \Leftrightarrow w^R \in L_n$ mittels vollständiger Induktion über n:

- Basisfall $n = 0$: $L_0 = \{\epsilon\} = \{\epsilon^R\}$
- Basisfall $n = 1$: $L_1 = \{u \mid u \in \Sigma\} = \{u^R \mid u \in \Sigma\}$
- Induktionshypothese: Sei $w \in L_n \Leftrightarrow w^R \in L_n$ für alle $n < k$.
- Induktionsschritt: Nach Definition: $w \in L_k \Rightarrow w = xw'x$ für ein $w' \in L_{k-2}$ und ein $x \in \Sigma$.
  Nach Induktionshypothese gilt $w'^R \in L_{k-2}$. Damit ist auch $w^R = xw'^R x \in L_k$.
  Für die Rückrichtung gilt: $w^R \in L_k \Rightarrow (w^R)^R \in L_k \Rightarrow w \in L_k$ (da $(w^R)^R = w$).

$L(G)$ ist Sprache der Palindrome über Σ. Man kann auch zeigen: $w = w^R$ für alle $w \in L(G)$.

Aufgabe 1.2 (c) - Beweisen Sie, dass $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$.

Gegeben ist immer noch die folgende Sprache mit:

$$L_0 = \{\epsilon\} \qquad L_1 = \{u \mid u \in \Sigma\} = \Sigma$$
$$L_n = \{xwx \mid w \in L_{n-2} \text{ und } x \in \Sigma\} \text{ für } n > 1$$

Wir Beweisen $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$ mittels vollständiger Induktion über n:

- Basisfall $n = 0$: $|L_0| = |\{\epsilon\}| = 1 = |\Sigma|^0 = |\Sigma|^{\lceil 0/2 \rceil}$
- Basisfall $n = 1$: $|L_1| = |\Sigma| = |\Sigma|^1 = |\Sigma|^{\lceil 1/2 \rceil}$
- Induktionshypothese: Sei $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$ für alle $n < k$.
- Induktionsschritt:

$$|L_k| = |\{xwx \mid w \in L_{k-2} \text{ und } x \in \Sigma\}| = |L_{k-2}| \cdot |\Sigma|$$
$$\overset{\text{IH}}{=} |\Sigma|^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{\lceil (k/2-1) \rceil} \cdot |\Sigma|$$
$$= |\Sigma|^{\lceil k/2 \rceil - 1} \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{\lceil k/2 \rceil}$$

Aufgabe 1.3 - Arithmetische Ausdrücke

Wir definieren einen arithmetischen Ausdruck über die ganzen Zahlen und die vier Grundrechenarten (dargestellt mittels der Operatoren $+, -, *$ und $/$) wie folgt:

- Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck.
- Für jeden Ausdruck X, der nicht mit einem Operator beginnt ist $-X$ ebenfalls ein Ausdruck. Beispielsweise ist -5 ein Ausdruck, $--5$ jedoch nicht.
- Eine Verknüpfung $X + Y$, $X - Y$, $X * Y$, oder X/Y zweier Ausdrücke X und Y ist ein Ausdruck, sofern darin keine zwei Operatoren hintereinander stehen. Beispielsweise ist $-3+5$ ein Ausdruck, $5+-3$ jedoch nicht.
- Ein Ausdruck, der zwischen einer öffnenden und einer schließenden Klammer steht, ist wieder ein Ausdruck. Beispielsweise sind (-3) oder $(3+5)$ Ausdrücke.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für arithmetische Ausdrücke über $\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 1.3 (a) - Angabe einer kontextfreien Grammatik

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *, /, (,)\}$ und $V = \{S, O, N, Z, Z', R\}$.
Wir definieren P wie folgt:

Wir benutzen O für Ausdrücke, die mit einem Operator beginnen und N für Ausdrücke, die nicht mit einem Operator beginnen:

- $S \to O \mid N$

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck:

- $N \to Z \mid Z'R \qquad R \to Z \mid ZR \qquad Z \to 0 \mid \ldots \mid 9 \qquad Z' \to 1 \mid \ldots \mid 9$

Für jeden Ausdruck X, der nicht mit einem Operator beginnt ist $-X$ ein Ausdruck:

- $O \to -N$

In Verknüpfungen $X + Y$, $X - Y$, ... dürfen keine zwei Operatoren aufeinander folgen:

- $N \to N + N \mid N - N \mid N * N \mid N/N$
- $O \to O + N \mid O - N \mid O * N \mid O/N$

Ein Ausdruck zwischen (und) ist wieder ein Ausdruck:

- $N \to (N) \mid (O)$

Aufgabe 1.3 (b) - Ableitung von $(42+2+4)*(-3+26)$

Zur Erinnerung: Die Produktionsregeln sind wie folgt gegeben:

- $S \to O \mid N$
- $N \to Z \mid Z'R \qquad R \to Z \mid ZR \qquad Z \to 0 \mid \ldots \mid 9 \qquad Z' \to 1 \mid \ldots \mid 9$
- $O \to -N$
- $N \to N+N \mid N-N \mid N*N \mid N/N$
- $O \to O+N \mid O-N \mid O*N \mid O/N$
- $N \to (N) \mid (O)$

Eine mögliche Ableitung von $(42+2+4)*(-3+26)$ ist:

$$\begin{aligned}
&S \Rightarrow N*N \Rightarrow (N)*N \Rightarrow \\
&(N+N)*N \Rightarrow (N+N+N)*N \Rightarrow (N+N+N)*(O) \Rightarrow \\
&(N+N+N)*(O+N) \Rightarrow (N+N+N)*(-N+N) \Rightarrow^* \\
&(Z'Z+Z+Z)*(-Z+Z'Z) \Rightarrow^* (42+2+4)*(-3+26)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: Eine Beobachtung

Mit unserer Grammatik gibt es mehrere Möglichkeiten, von S zu $-N+N$ zu kommen.

Es existieren die folgenden Ableitungen:

1. $S \Rightarrow O \Rightarrow O+N \Rightarrow -N+N$
2. $S \Rightarrow O \Rightarrow -N \Rightarrow -N+N$

Wir werden die Eindeutigkeit von Grammatiken in der Vorlesung im Rahmen der kontextfreien Sprachen noch genauer betrachten.