# Theoretische Informatik

## Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

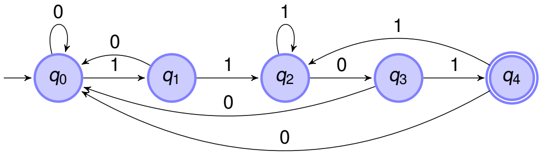
Sommer-Semester 2022

# Aufgabe 2.1 (a) - Wörter mit Suffix 1101



Idee:
$q_1$ garantiert, dass 1 gelesen wurde;
$q_2$ garantiert, dass 11 gelesen wurde;
$q_3$ garantiert, dass 110 gelesen wurde;
$q_4$ garantiert, dass 1101 gelesen wurde.

Passt das nächste Symbol nicht zum Suffix 1101, springen wir entsprechend zurück.




$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$

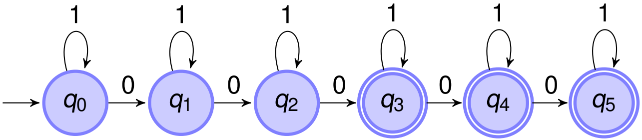
| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_0$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_2$ |
| $q_3$ | $q_0$ | $q_4$ |
| $q_4$ | $q_0$ | $q_2$ |

$F = \{q_4\}$

# Aufgabe 2.1 (b) - Wörter mit drei bis fünf Nullen



Idee: Bei einer Null bleiben wir im selben Zustand, bei einer Eins laufen wir weiter. Wurden *n* Einsen gelesen, befinden wir uns demnach im *n*-ten Zustand.




$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$

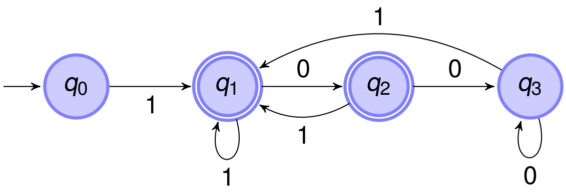
| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_0$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_2$ |
| $q_3$ | $q_4$ | $q_3$ |
| $q_4$ | $q_5$ | $q_4$ |
| $q_5$ | – | $q_5$ |

$F = \{q_3, q_4, q_5\}$

# Aufgabe 2.1 (c) - Binärzahlen, die nicht durch 4 teilbar sind



Idee: Jede Binärzahl größer als Null ist durch 4 teilbar gdw. sie in 00 endet. Daher prüfen wir, ob das Wort nicht den Suffix 00 hat. Des weiteren wollen wir das leere Wort, 0 (da teilbar durch 4) und Zahlen mit führenden Nullen verbieten – kurz gesagt, das Wort muss mit 1 beginnen.




$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | – | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_1$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_1$ |

$F = \{q_1, q_2\}$

# Aufgabe 2.2 (a) - Maximaler Typ der Grammatik



Gegeben ist Grammatik $G = \langle\{S, X\}, \{a, b, c\}, P, S\rangle$ mit Produktionsregeln $P$:

$$S \to aXa \mid aa \quad X \to bc \mid bcX \quad Xa \to bb$$

Typ 3? Nein, die Regeln passen nicht zu den in Typ 3 erlaubten Formen.

Typ 2? Nein, die Regel $Xa \to bb$ hat auf der linken Seite mehrere Symbole.

Typ 1? Ja, alle Regeln $w \to v$ erfüllen $|w| \leq |v|$.

$\Rightarrow$ Der maximale Typ von $G$ ist Typ 1.

# Aufgabe 2.2 (b) - Äquivalente reguläre Grammatik



Gegeben ist Grammatik $G = \langle \{S, X\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$ mit Produktionsregeln $P$:

$$S \to aXa \mid aa \quad X \to bc \mid bcX \quad Xa \to bb$$

Betrachtet man Grammatik $G$ genauer, sieht man dass die erzeugte Sprache $L(G)$ vergleichsweise simpel ist:

- Jedes Wort beginnt mit $a$.
- Darauf folgt beliebig oft $bc$.
- Das Wort endet mit $a$ oder $bb$.

Für diese Sprache $L(G) = \{a\} \cdot \{bc\}^* \cdot \{a, bb\}$ konstruieren wir die reguläre Grammatik $G' = \langle \{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P', S \rangle$ mit Produktionsregeln $P'$;

$$S \to aX \quad X \to bY \mid bZ \mid a \quad Y \to cX \quad Z \to b$$

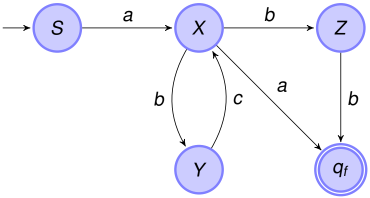
# Aufgabe 2.2 (c) - Äquivalenter NFA



Zur Konstruktion des NFA nutzen wir die in (b) konstruierte Grammatik $G' = \langle \{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P', S \rangle$ mit Produktionsregeln $P'$;

$$S \to aX \quad X \to bY \mid bZ \mid a \quad Y \to cX \quad Z \to b$$

Damit lässt sich über die in der Vorlesung vorgestellte Konstruktion der folgende NFA $\mathcal{M}_{G'}$ erzeugen:

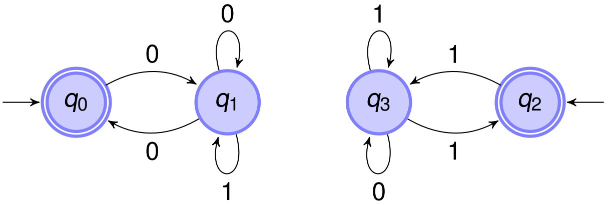



$\mathcal{M}_{G'} = \langle Q, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_f\} \rangle$
$Q = \{S, X, Y, Z, q_f\}$

| $\delta$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $S$ | $\{X\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $X$ | $\{q_f\}$ | $\{Y, Z\}$ | $\emptyset$ |
| $Y$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{X\}$ |
| $Z$ | $\emptyset$ | $\{q_f\}$ | $\emptyset$ |
| $q_f$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

# Aufgabe 2.3 (a) - Potenzmengenautomat (tabellarisch)






Potenzmengenautomat $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$:

$Q' = 2^Q$

$q_0' = \{q_0, q_2\}$

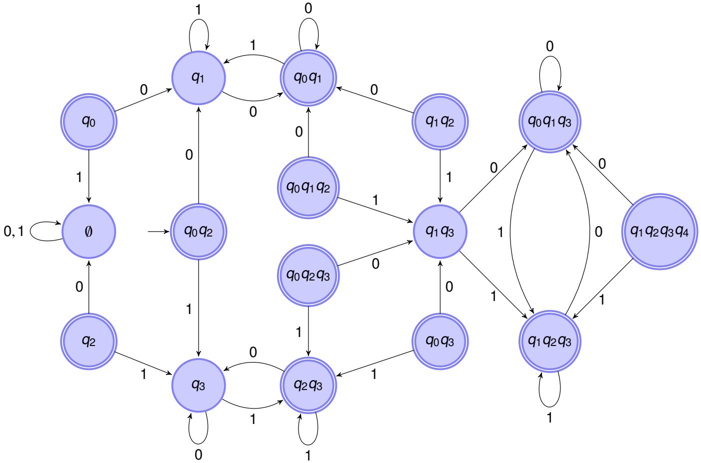
$F' = \{q \in Q' \mid q_0 \in q \vee q_2 \in q\}$

Tabellarische Übergangsfunktion $\delta'$:

| $\delta'$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $q_0$ | $q_1$ | $\emptyset$ |
| $q_1$ | $q_0 q_1$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $\emptyset$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_2 q_3$ |
| $q_0 q_1$ | $q_0 q_1$ | $q_1$ |
| $q_0 q_2$ | $q_1$ | $q_3$ |
| $q_0 q_3$ | $q_1 q_3$ | $q_2 q_3$ |
| $q_1 q_2$ | $q_0 q_1$ | $q_1 q_3$ |
| $q_1 q_3$ | $q_0 q_1 q_3$ | $q_1 q_2 q_3$ |
| $q_2 q_3$ | $q_3$ | $q_2 q_3$ |
| $q_0 q_1 q_2$ | $q_0 q_1$ | $q_1 q_3$ |
| $q_0 q_1 q_3$ | $q_0 q_1 q_3$ | $q_1 q_2 q_3$ |
| $q_0 q_2 q_3$ | $q_1 q_3$ | $q_2 q_3$ |
| $q_1 q_2 q_3$ | $q_0 q_1 q_3$ | $q_1 q_2 q_3$ |
| $q_0 q_1 q_2 q_3$ | $q_0 q_1 q_3$ | $q_1 q_2 q_3$ |

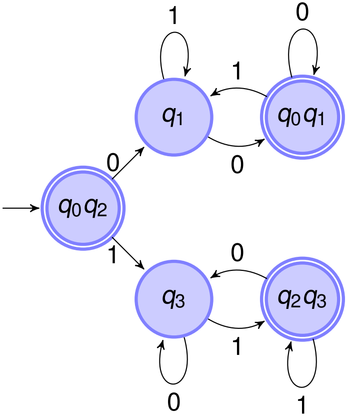
# Aufgabe 2.3 (a) - Potenzmengenautomat (graphisch)





# Aufgabe 2.3 (b) - Potenzmengenautomat (reduziert)






Durch schrittweise Konstruktion des Automaten lässt sich die Anzahl der Zustände auf 5 reduzieren. Unerreichbare Zustände werden gar nicht erst konstruiert.