

# Theoretische Informatik

B. Nebel, A. Podelski, R. Bergdoll, D. Klumpp  
Sommersemester 2022

Universität Freiburg  
Institut für Informatik

## Übungsblatt 1

Abgabe: 29. April 2022

### Aufgabe 1.1 (Kardinalität von Sprachen; 2+2 Punkte)

Es seien  $L$  und  $L'$  Sprachen über demselben Alphabet  $\Sigma$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sind  $L$  und  $L'$  endlich, so gilt  $|L \cdot L'| = |L| \cdot |L'|$ .
- (b) Ist  $\Sigma$  endlich, so gilt:  $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ .

$\Sigma^n$  bezeichne hierbei der Menge der Wörter über  $\Sigma$  der Länge  $n$ .

### Aufgabe 1.2 (Kontextfreie Grammatiken; 2+4+4 Punkte)

Die Grammatik  $G$  über einem Alphabet  $\Sigma$  und dem Startsymbol  $S$  ist durch die folgenden Produktionsregeln gegeben:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon \\ S &\rightarrow x \quad x \in \Sigma \\ S &\rightarrow xSx \quad x \in \Sigma \end{aligned}$$

Die Sprache  $L_n = \{w \in L(G) : |w| = n\}$  bezeichne die Menge aller Worte der Länge  $n$  der von  $G$  erzeugten Sprache  $L(G)$ .

- (a) Definieren Sie die Mengen  $L_n$  induktiv. Geben Sie dazu erst die Mengen  $L_0$  und  $L_1$  explizit an und definieren Sie dann die Mengen  $L_n$  in Abhängigkeit von  $L_{n-2}$  für alle  $n \geq 2$ . In Ihrer Definition sollte  $G$  oder  $L(G)$  nicht auftauchen.
- (b) Beweisen Sie dass  $w \in L(G) \Leftrightarrow w^R \in L(G)$ .
- (c) Beweisen Sie durch Induktion über  $n$ , dass  $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$  gilt (hierbei bezeichne  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl  $\geq x$ ).

### Aufgabe 1.3 (Arithmetische Ausdrücke; 4+2 Punkte)

Wir definieren einen *arithmetischen Ausdruck* über die ganzen Zahlen und die vier Grundrechenarten (dargestellt mittels der Operatoren  $+$ ,  $-$ ,  $*$  und  $/$ ) wie folgt:

- Eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Ausdruck.
  - Für jeden Ausdruck  $X$ , der nicht mit einem Operator beginnt ist  $-X$  ebenfalls ein Ausdruck. Beispielsweise ist  $-5$  ein Ausdruck,  $--5$  jedoch nicht.
  - Eine Verknüpfung  $X + Y$ ,  $X - Y$ ,  $X * Y$ , oder  $X/Y$  zweier Ausdrücke  $X$  und  $Y$  ist ein Ausdruck, sofern darin keine zwei Operatoren hintereinander stehen. Beispielsweise ist  $-3 + 5$  ein Ausdruck,  $5 + -3$  jedoch nicht.
  - Ein Ausdruck, der zwischen einer öffnenden und einer schließenden Klammer steht, ist wieder ein Ausdruck. Beispielsweise sind  $(-3)$  oder  $(3 + 5)$  Ausdrücke.
- (a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für arithmetische Ausdrücke über  $\mathbb{Z}$  an.
  - (b) Geben Sie für Ihre Grammatik aus Aufgabe (a) eine Ableitung des Ausdrucks  $(42 + 2 + 4) * (-3 + 26)$  an, also eine Sequenz  $S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$ , sodass  $w_n = (42 + 2 + 4) * (-3 + 26)$ .