HEIG-VD - Simulation et Optimisation

Travail Pratique 2 : Méthode de Monte-Carlo

Luc Wachter

28 mai 2019

1 Introduction

Dans ce travail pratique, nous nous intéressons au calcul de la distance moyenne entre deux points du carré unité. On désire donc calculer l'espérance de la distance euclidienne séparant deux points indépendants et identiquement distribués dans le carré unité $[0;1] \times [0;1]$.

Si on note $P(x_1;y_1)$ et $Q(x_2;y_2)$ deux points du carré unité et D la distance euclidienne qui les sépare, l'espérance de cette distance est

$$\mathrm{E}(D) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_2 dy_1 dx_2 dx_1.$$

C'est cette espérance que l'on veut calculer.

Pour ce faire, nous allons réaliser une simulation de Monte-Carlo afin de générer des estimateurs $\widehat{D}$ de $\mathrm{E}(D)$ à partir de données empiriques.

Ce document a pour but

2 Approche utilisée

Je fais ça.

3 Correspondance des symboles

Les symboles mathématiques proposés dans la donnée du travail ne sont bien sûr pas propice à une utilisation en Java. Voici donc un

4 Choix du nombre d'expériences à effectuer

Après avoir lancé la simulation pour exécuter N_{init} expériences, il nous faut estimer le nombre d'expériences supplémentaires nécessaires pour arriver à un intervalle de confiance à 95% dont la demi-largeur ne dépasse pas Δ_{max}.

Ce nombre d'expériences n peut être estimé en utilisant l'équation pour la largeur de l'intervalle de confiance :

$$\Delta_{I_c} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Adaptons cette équation pour notre cas pratique en remplaçant la largeur de l'intervalle de confiance Δ_{Ic} par la demi-largeur maximale Δ_{max} (constante donnée par le code appelant). Ce changement nous permet de faire fi du facteur deux du côté droit de l'équation, puisque nous nous intéressons à la demi-largeur et non à la largeur complète.

$$\Delta_{max} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Il nous suffit alors d'isoler n pour déterminer la formule à utiliser dans notre programme.

$$\Delta_{max} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{\Delta_{I_c}}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s^2}{\Delta^2_{I_c}}$$

En utilisant 1.959964 comme quantile de la loi normale et avec l'estimateur s de l'écart-type calculé empiriquement avec nos expériences initiales, il nous est donc possible d'estimer un nombre d'expériences nécessaires pour arriver à la précision voulue.

5 Résultats

Qualité de l'estimation ? ? ?

5.1 Distribution des estimateurs ponctuels $\widehat{D}$

5.2 Couverture empirique des intervalles de confiance

Afin d'analyser la couverture des intervalles de confiance calculés, la valeur exacte de $\mathrm{E}(D)$ nous est donnée.

$$\mathrm{E}(D) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_2 dy_1 dx_2 dx_1$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2} + 5 \ln \sqrt{2} + 1}{15}$$

$$\approx 0,5214054$$

Insérer ici graphique de fou de la slide 52

6 Conclusion

C'était **trivial**.