Travail Pratique 2 : Méthode de Monte-Carlo

Luc Wachter

28 mai 2019

1 Introduction

Dans ce travail pratique, nous nous intéressons au calcul de la distance moyenne entre deux points du carré unité. Il s'agit donc de calculer l'espérance de la distance euclidienne séparant deux points indépendants et identiquement distribués dans le carré unité $[0; 1] \times [0; 1]$.

Si on note $P(x_1; y_1)$ et $Q(x_2; y_2)$ deux points du carré unité et D la distance euclidienne qui les sépare, l'espérance de cette distance est

$$\mathrm{E}(D) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_2 dy_1 dx_2 dx_1.$$

C'est cette espérance que l'on veut calculer.

Pour ce faire, nous allons réaliser une simulation de Monte-Carlo afin de générer des estimateurs $\widehat{D}$ de $\mathrm{E}(D)$ à partir d'échantillons de populations générées aléatoirement.

Ce document a pour but de documenter les choix faits durant la conception du programme, mais surtout de présenter les résultats obtenus, de les interpréter et de les discuter.

2 Approche utilisée

Je fais ça.

3 Correspondance des symboles

Les symboles mathématiques proposés dans la donnée du travail ne sont bien sûr pas propices à une utilisation en Java. Le tableau 1 permet donc de faire le lien entre les symboles utilisés dans ce document et ceux utilisés dans le programme.

Symbole mathématique	Symbole dans le code
N_{init}	initialNumberOfRuns
N_{add}	additionalNumberOfRuns
N	estimatedNumberOfRunsNeeded
Δ_{max}	maxHalfWidth
s	standardDeviation

Table 1 – Correspondance des symboles

4 Choix du nombre d'expériences à effectuer

Après avoir lancé la simulation pour exécuter N_{init} expériences, il nous faut estimer le nombre d'expériences supplémentaires nécessaires pour arriver à un intervalle de confiance à 95% dont la demi-largeur ne dépasse pas Δ_{max}.

Ce nombre d'expériences n peut être estimé en utilisant l'équation pour la largeur de l'intervalle de confiance :

$$\Delta_{I_c} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Adaptons cette équation pour notre cas pratique en remplaçant la largeur de l'intervalle de confiance Δ_{Ic} par la demi-largeur maximale Δ_{max} (valeur fixée par le code appelant). Ce changement nous permet de faire fi du facteur deux du côté droit de l'équation, puisque nous nous intéressons à la demi-largeur et non à la largeur complète.

$$\Delta_{max} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Il nous suffit alors d'isoler n pour déterminer la formule à utiliser dans notre programme.

$$\Delta_{max} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{\Delta_{I_c}}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s^2}{\Delta^2_{I_c}}$$

En utilisant 1.959964 comme quantile de la loi normale et avec l'estimateur s de l'écart-type calculé empiriquement à l'aide de nos expériences initiales, il nous est donc possible d'estimer un nombre d'expériences nécessaires pour arriver à la précision voulue.

5 Résultats

5.1 Distribution des estimateurs ponctuels $\widehat{D}$

5.2 Couverture empirique des intervalles de confiance

Afin d'analyser la couverture des intervalles de confiance calculés, la valeur exacte de $\mathrm{E}(D)$ nous est donnée.

$$\mathrm{E}(D) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dy_2 dy_1 dx_2 dx_1$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2} + 5 \ln \sqrt{2} + 1}{15}$$

$$\approx 0,5214054$$

Insérer ici graphique de fou de la slide 52

6 Conclusion

C'était **trivial**.