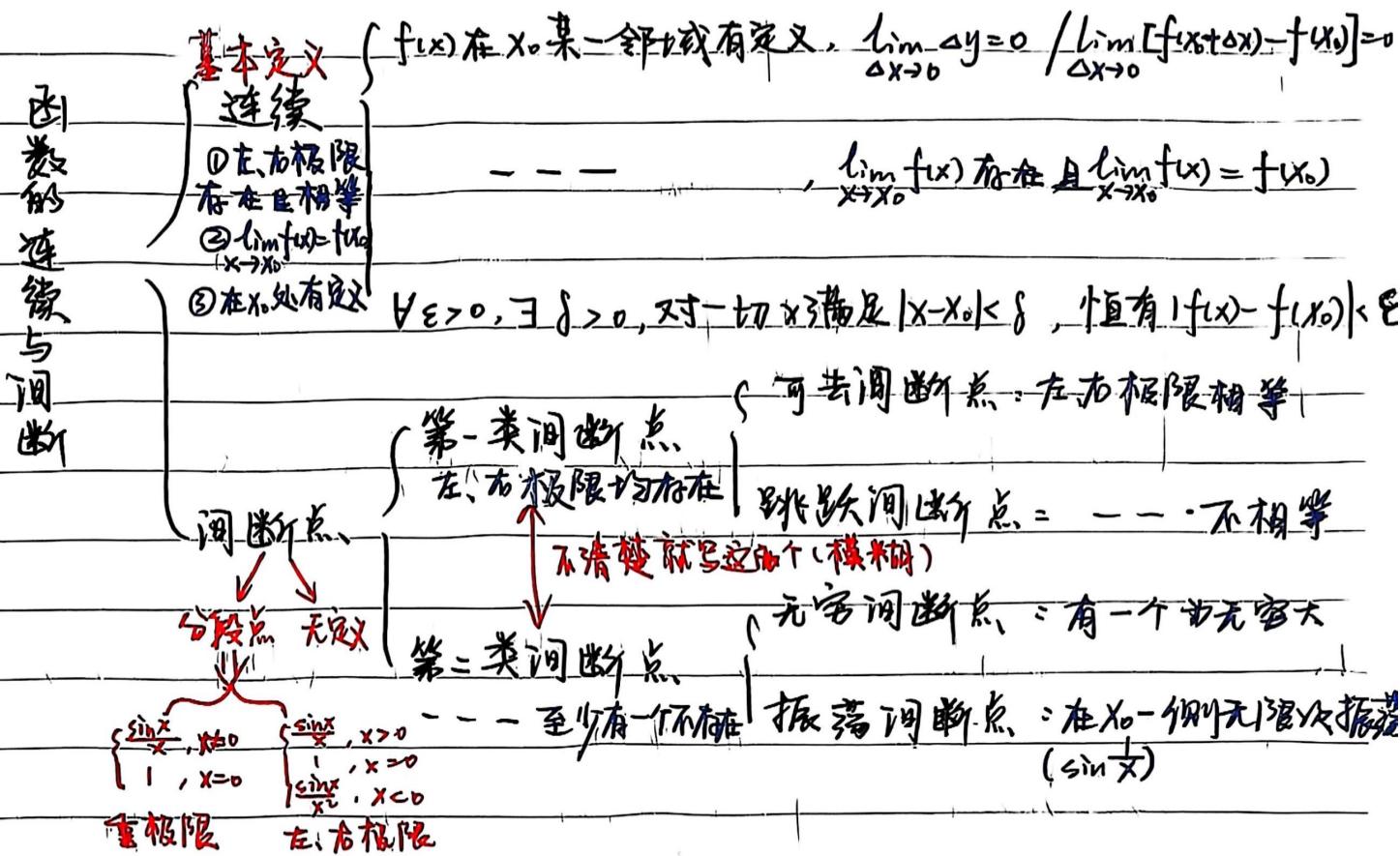


期末复习

1.



α, β 是同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha, \beta \neq 0$.

高阶: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ [$\alpha = o(\beta)$, α 是 β 的高阶无穷小]

低阶: (β 是 α 的低阶无穷小)

同阶: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c (c \neq 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{无穷小的“阶”} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = A \neq 0 \text{ 称“阶”} \\ k \text{ 阶: } \lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c (c \neq 0), k > 0. \end{array} \right.$$

$$\text{等价} \quad \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad [\alpha \sim \beta] \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^{-x}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$$

$$1 - e^{-x} \sim \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)}}{\alpha(x) - \beta(x)} = 1$$

3. 求数列、函数极限

① 两个重要极限 ② 无穷小 ③ 3各必达法则 ④ 定积分： → 概念	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\frac{0}{0})$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e. \quad (1^\infty)$
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x^2}{\tan x + \cos x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x \cos x^2}{\sec^2 x - \sin x}$ $\left(\frac{0}{0} \right) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \quad (\text{或 } \infty)$
	幂指型 = 取对数 $\{ \lim [f(x)]^{g(x)} = A = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$
	$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ → 概念

4. 求导

例题 至少二阶	复合函数 : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{链式法则} = \text{写链})$
	参数方程 : $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{\varphi'(t)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''(t)\varphi'(t) - y'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{cases}$
	隐函数 : $\begin{cases} \text{把 } y \text{ 看成 } x \text{ 的函数, 复合函数求导} \\ \text{对数求导法} \end{cases}$
反函数 : $f'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \quad / \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (x = \varphi(y))$	

定义求导

① 结构 ② 一定要用 四数值	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
	$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
$\left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad (x \neq -1)$	

高阶导数 :

高阶导数	$\left[\ln(ax+b) \right]^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{a^n}{(ax+b)^n}$
	$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$
	$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

6.

函数极值、

拐点、

凹凸性、

渐近线

单调性：不等式、极值
第一充分判别法： $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

极值 ① 定义域 ② 驻点与不可导 ③ 表格 (定义域中的点) 最值：区间端点、极值	概念定义（局部） $f''(x_0) < 0$, 极大 $f''(x_0) > 0$, 极小 $f''(x_0) = 0$, 二阶不可导	$x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) > 0$ $x \in (x_0 + \delta, x_0), f''(x) < 0$ 左右同号，不取
拐点： (x, y) 凸凹弧段的分界点		$f''(x) = 0$ $f''(x)$ 不存在

凹凸性

凸 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， $f'(x)$ 在 (a, b) 递增， $f''(x) > 0$	凹 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， $f'(x)$ 在 (a, b) 递减， $f''(x) < 0$
$f''(x) = 0$, 二阶导数	

垂直渐近线： $f(x)$ 在 x_0 处间断， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

水平渐近线：定义域无密区间， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$

斜渐近线： $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - b] = 0$

7. Rolle 中值定理

微分

中值定理

不等式 Cauchy 中值定理

Langrange 中值定理：
 1) 在 $[a, b]$ 上连续
 2) 在 (a, b) 内可导 至少 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$

Cauchy 中值定理：
 1) 在 $[a, b]$ 上连续
 2) 在 (a, b) 内可导 且 $g'(x) \neq 0$

构造函数！ (由结论逆推 = 介值 费马引理 积分中值 微课)

(罗尔) 点, $x_0 = \frac{1}{2} / \frac{1}{3} / \frac{1}{4}$ KOKUYO