No.

Date

几代期末复习

10、矩阵的初等变换与初等矩阵

① 左乘：初等行变换　　　右乘：～列变换

注意：$AE(i+(k)j)$　把第j列加上第i列的k倍

e.g $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+5a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+5a_{21} \end{pmatrix}$

② 初等矩阵是可逆矩阵

$(E(i,j))^{-1} = E(i,j)$，$(E((k)i))^{-1} = E((\frac{1}{k})i)$ $(k\neq 0)$

$(E(i+(k)j))^{-1} = E(i+(-k)j)$

③ 任一个可逆矩阵经有限次初等行变换可变成单位阵

单位阵经 ～ 可变成一可逆矩阵

注意：左乘时顺序不能颠倒。

④ 若∃有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$,

s.t. $B = P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$，称A与B等价，$A \cong B$.

→ 若 $A \cong B$，则∃可逆阵 $P = P_s \cdots P_2 P_1$，$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$，s.t. $PAQ = B$.

⑤ 增广矩阵求解线性方程组
1) $\tilde{A} =$
2) 行简化.
3) 简单方程组
4) 求解

No.

Date

向量组与线性方程组

- ① 克拉默法则：1) 方程个数=未知量 2) $|A|\neq0$
  - $|A|\neq0$ 时，方程有唯一解
  - $x_j=\frac{D_j}{|A|}(j=1,2,\cdots,n)$ D_j 为用 $b_1,\cdots$ 替换第 j 列后的行列式.
  - → 齐方 $Ax=0$ 有非零解，且 A 为方阵，则 $|A|=0$
- ② 线性方程组解的判定：$\tilde{A}=(A\,\vdots\,b)$ $A_{m\times n}$
  - 无解：$R(A)\neq R(\tilde{A})$ $(R(\tilde{A})=R(A)+1)$
    - → 拐角元素出现在 $\tilde{A}$ 的最后一列.
  - 有解：$R(A)=R(\tilde{A})$
    - 无穷多解：$R(A)=R(\tilde{A})<n$
      - → 齐方非零解：$R(A)<n$
    - 唯一解：$R(A)=R(\tilde{A})=n$
      - → 〃零解：$R(A)=n$
- ③ 向量组及线性组合：
  - 向量能否用向量组线性表示 ⇕ 非齐方解的存在性问题
  - 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$.
    - 可被线表 ↔ $Ax=\beta$ 有解 ↔ $R(A)=R(\tilde{A})$
    - 〃唯一 ↔ 〃唯一解 ↔ $=n$
    - 不能 ↔ 无解 ↔ <
- ④ 向量组的线性相关性
  ⇓
  从定义出发.
  - 向量组是否线性相关 ⇕ 齐方非零解 〃
    - 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$
      - 线性相关 ↔ $Ax=0$ 有非零解 ↔ $R(A)<n$
      - 线性无关 ↔ 〃只有零解 ↔ $R(A)=n$
  - 性质
    - Th1：线相 ↔ 向量组至少有一向量可被其余向量线性表示 $\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$
    - Th2：$\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线无，$\beta,\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线相关，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线表，且表示唯一.
    - Th3：
      - 部分相关 → 整体相关
      - 整体无关 → 部分无关.
    - Th4：n+1 个 n 维向量线性相关
    - Th5：$A\xrightarrow[\text{初行}]{\text{有限次}}B$，A、B 满足相同线性相关性
      - $k_1,\cdots,k_n\in R$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 则 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$
    - Th6：$\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线无 (R^m)，则 R^n 中 $\beta_1,\cdots\beta_r$ 线无（α_i 是 β_i 的部分向量）.
    - Th7：设 B 可由 A 线性表示，若 $l>m$，则 B 线性相关
      - $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 小一大 → 大相关
      - → 若 B 线无，则 $l\leq m$
      - → 若线性无关组 B 和 A 等价，$l=m$
    - Th8：A 可由 B 线性表示 $R(A)\leq R(B)$
      - $A\cong B$，$R(A)=R(B)$
    - Th9：属于不同特征值的特征向量线性无关

No.

Date

④ 向量组的极大无关组与秩

- 向量组B可由α线性表示⟺∃矩阵K, s.t $B=AK$
- 极大无关组
  - 一个向量组 ≌ 其极大无关组
  - 一个线性无关向量组的极大无关组是其本身
  - 极大无关组彼此等价，所含向量个数
- 秩
  - 矩阵的秩：非零子式的最高阶数
  - 向量组的秩：向量组的极大无关组所含向量个数
- → 证明时常用到向量组可由极大无关组表示，设极大无关组为 ...
- ☆ 向量组秩的计算，求极大无关组
  - ① 初等行变换 → 行简化
  - ② 矩阵秩是向量组的秩
  - ③ 拐角元素所在列得对应向量为极大无关组

⑤ 向量空间与子空间

- 若对加法、数乘封闭，则V的非空子集H是V的子空间
  - ↦ ① 线性无关 ② V中向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots$线性表示
- 向量空间维数 = 一组基中的向量个数
- 向量的维数 = 向量中数的个数
- 向量的坐标 ：$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$为坐标
- 过渡矩阵 ：∃矩阵A, s.t $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)A$
  - A为由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$到新基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$过渡矩阵
- 内积：$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$.
- 范数(模)：$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$
- 正交 ：$\langle\alpha,\beta\rangle=0$ （零向量是唯一一个与自身正交的向量）
- → 两两正交的非零向量组线性无关（证明…是组基）
- 正交矩阵：$A^TA=AA^T=E$ （$|A|^2=1$，$A^{-1}=A^T$
- → n阶矩阵A是正交矩阵⟺A的列(行)向量组是一组标准正交基(R^n)
- 正交投影：u、w 两个非零向量，$\frac{\langle w,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ 为w在u上的
- 施密特正交化：
  - $\beta_1=\alpha_1$
  - $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$
  - ---
  - $\beta_r=\alpha_r-\frac{\langle\alpha_r,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\dots-\frac{\langle\alpha_r,\beta_{r-1}\rangle}{\langle\beta_{r-1},\beta_{r-1}\rangle}\beta_{r-1}$
  - $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$是一组正交基

⑥ 线性方程组解的结构

- 齐次
  - $Ax=0$ 有非零解，称基解空间的基 = 基础解系
  - 基础解系个数 = 自由未知量 = 解空间维数 $=n-R(A)$
  - $Ax=0$与$Bx=0$同解 $R(A)=R(B)$
  - 求基础解系步骤
    - ① 系数矩阵 → 行简化
    - ② 选一自未为1，另为0
    - ③ 重复②

KOKUYO

⑥ 解的结构 非齐次

- $\xi\{x: Ax=b\}$ 不是向量空间.
- η_1, η_2 是 $Ax=b$ 解, $\xi=\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 解
- η^* 是 $Ax=b$ 解, ξ 是 $Ax=0$ 解, 则 $\eta^*+\xi$ 是 $Ax=b$ 解
- 若 $R(A)=R(\bar{A})=r<n$, η^* 是非齐特解, $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是齐方基础解系, 则 $Ax=b$ 通解为 $x=\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r}$

特征值与特征向量

① $A\xi=\lambda\xi$ (ξ 非零向量)

- 求 λ、ξ 步骤
  - ① $f(\lambda)=|\lambda E-A|$
  - ② $f(\lambda)=0$
  - ③ 对每一 λ 求出 ξ.
- $\Rightarrow$ 对角矩阵 λ 为主对角线上元素
- 性质
  - ① 复数范围内, A 有 n 个特征值
  - ② $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}$
  - ③ $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$
- 特征值
  - $k\lambda \to kA$, $\lambda^k \to A^k$
  - $\varphi(\lambda)\to\varphi(A)$ $\begin{cases}\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m\\ \varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m\end{cases}$
  - A 可逆, $\lambda^{-1}\to A^{-1}$
  - A 可逆, $\frac{|A|}{\lambda}\to A^*$

② 相似矩阵与对角化

- $\exists$ 可逆阵 P, s.t $P^{-1}AP=B$ $A\sim B$
- 相似矩阵有相同的特征多项式, 特征值, 和行列式.
- n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 它有 n 个线性无关的特征向量 $\to$ 恰好构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.
- $\to$ 若 n 阶方阵有 n 个不同特征值, 则其可对角化
- $\to$ 得正交基 $\to$ 单位化.
- 实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量
- $\forall$ 矩阵 A 属于不同特征值 ~ 线性无关、
- $\hookrightarrow$ 施密特 $\to$ 正交基 $\to$ 单位化
- 存在正交矩阵 Q, s.t $Q^TAQ=\Lambda$, $Q^{-1}AQ=\Lambda$
- 实对称矩阵一定可对角化.

③ 实对称矩阵的对角化

- n 阶实对称矩阵 A 的正交对角化
  - ① $f(\lambda)=|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda$
  - ② 基础解系 $\to$ 特征值
  - ③ 施密特
  - ④ 单位化
  - ⑤ 按列排放得 Q, $\lambda\to\Lambda$
  - ⑥ $Q^TAQ=\Lambda$.

No.

Date

二次型

① 定义和矩阵表示、矩阵的合同

- 二次形：含n个变量的二次齐次多项式
- $a_{ij}=a_{ji}$ / $A=A^T$ 时，$f(x)=x^TAx$.（$e_i^TAe_j=a_{ij}$）
  - ↳ 二次型的秩 = 实对称A的秩
- 标准形：形如 $f(y_1,y_2,\dots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$
  - 对应矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ A特征值
- $x=Cy$：C可逆时，可逆线性变换
  - C正交矩阵，正交变换。
- $f(x)=x^TAx \xrightarrow{x=Cy} g(y)=y^TBy$：$B=C^TAC$ 为g的矩阵
  - $B^T=B$，$R(A)=R(B)$
- 合同矩阵：∃可逆阵C，s.t. $B=C^TAC$，$A\simeq B$

② 二次型化为标准形

- 正交变换：
  - 实对称A $\xrightarrow{Q}$ $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$
  - $f(x)=x^TAx \xrightarrow{x=Qy} g(y)=y^T\Lambda y$
- 拉格朗日配方法
  - 有平方项：
    - $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
    - $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
  - 无平方项：
    - ① 平方差公式 $X=Cy$. $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$
    - ② 凑平方项

③ 实二次型分类、正定矩阵

- $z_1^2+z_2^2+\dots+z_p^2-z_{p+1}^2-\dots-z_{p+q}^2$ 的二次型为规范形（平方项系数只能取0/±1）
- 惯性定理：任意二次型必能经过一个适当的可逆线性变换为规范形，且唯一
- 规范形中：
  - 正惯性指数 {正特征值个数；正平方项个数.
  - 负 ~~
  - 秩=非零特征值个数
- 正定矩阵：设 $x\in\mathbb{R}^n$ 是非零向量，总有 $f(x)>0$
  - → 当且仅当 $p=n$，$q=0$（半正定 $p=r$，$q=0$）
- → 等价条件
  - Λ 全 >0
  - 正惯性指数 $=n$
  - ∃可逆阵C，s.t. $C^TAC=E$
  - ∃ ~ P，s.t. $A=P^TP$
  - n阶顺序主子式全大于0