

期末复习

函数的连续与间断

基本定义

连续

- ① 左、右极限存在且相等
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- ③ 在 x_0 处有定义

$f(x)$ 在 x_0 某一邻域有定义, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ / $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对一切 x 满足 $|x - x_0| < \delta$, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

间断点

第一类间断点

左、右极限均存在

可去间断点: 左右极限相等

跳跃间断点: 不相等

不清楚就写这个(模糊)

第二类间断点

无穷间断点: 有一个为无穷大

振荡间断点: 在 x_0 一侧无限次振荡 ($\sin \frac{1}{x}$)

分段点 无定义

$\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

重极限 左、右极限

α, β 是同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha, \beta \neq 0$.

高阶: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ [$\alpha = o(\beta)$, α 是 β 的高阶无穷小]

低阶: β 是 α 的低阶无穷小

同阶: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c (\neq 0)$

无穷小的“阶”: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = A \neq 0$ 称 k 阶

k 阶: $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c (\neq 0), k > 0$

等价: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ [$\alpha \sim \beta$] $\Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

$a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)}}{\alpha(x) - \beta(x)} = 1$

3.

求
数
列、
函
数
极
限① 两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\frac{0}{0})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (1^\infty)$$

② 无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x^2}{\tan x + \cos x - 1} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x \cos x^2}{\sec^2 x - \sin x}$$

③ 洛必达法则

→ 变限函数

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array} \right. : \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \text{ (或 } \infty)$$

$$\text{幂指型: 取对数} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = A^B = [\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$$

④ 定积分:

→ 概念

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \frac{1}{n}$$

4.

求

导

例
题
至
少
二
阶

复合函数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{链式法则: 写链})$$

参数方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{cases}$$

隐函数

把 y 看成 x 的函数, 复合函数求导
对数求导法

反函数

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(y)} \quad \left| \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (x = \varphi(y)) \right.$$

定义求导

① 结构

② 一定要出现
函数值

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

高阶导数

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad (x \neq -\frac{b}{a}) \\ [\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot \frac{a^n}{(ax+b)^n} \\ (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\ (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

6.

函数极值

曲线拐点

凹凸性

渐近线

单调性：不等式、极值

极值

①定义域

②驻点与不可导点

③画表格

在定义域中的点

最值：区间端点、极值

拐点：(x, y)

凹凸弧段的分界点

概念定义(局部)

第一充分判别法： $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 找 $>$! $x \in (x_0-\delta, x_0)$, <0

左右同号, 不取

 $f'(x_0)=0, f''(x_0) \neq 0, f(x_0)$ 是极值 $f''(x_0) > 0$, 极小 $f''(x_0) < 0$, 极大 $f''(x_0) = 0$, 不取极值 $f''(x) = 0$ $f''(x)$ 不存在 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f'(x)$ 在 (a, b) 递增, 凹函数

凹凸性

有 = 所导

 $f''(x) > 0$, 凹函数 $f''(x) < 0$, 凸函数凸 = $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 垂直渐近线： $f(x)$ 在 x_0 处间断, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 水平渐近线：定义域无界区间, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ 斜渐近线： $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$ $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$ 1) 在 $[a, b]$ 上连续2) 在 (a, b) 内可导 至少 \exists 一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 3) $f(a) = f(b)$

Lagrange 中值定理

1) 在 $[a, b]$ 上连续 至少 \exists 一点 $\xi \in (a, b)$, 使2) 在 (a, b) 内可导 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Cauchy 中值定理

1) 在 $[a, b]$ 上连续 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 2) 在 (a, b) 内可导且 $g'(x) \neq 0$

构造函数!

由结论逆推 = 介值

费马引理, 积分中值, 特殊点

均点, $x_0 = \frac{1}{2} / \frac{1}{3} / \frac{1}{4}$

KOKUYO