
第二章 信号的频谱

通常所见到的信号是时域上的，也就是以时间变量为自变量的函数。如果仅在时间域上观察信号，那么你只能看到一部分信息。比如，当你看心电图时，你只能看波峰，波谷，RT。如果你看国民经济的数据变化趋势，那么你只能像“谷先生”那样分析波峰与波峰、波谷与波谷、波峰与波谷之间的间距，支持大脑中固有的周期概念。如果你分析时间序列，那么你只有用“郑人买鞋”的办法，用几种约定的模型去套。实在不行就削足适履，用原始数据的一阶、二阶、乃至更高阶的差分来查看它是否满足给定的模型。我们可以称之为“不靠谱”的方法。巧的是，它与生活中“不靠谱”撞脸。所以，我们说其它学科不靠谱时，不是逗眼，而是实话实说。

如果用音乐作比喻，把信号看作歌词，那么信号的频谱就是对应的乐谱。如果一个作曲家不懂乐谱，要创作一支美妙的曲子是匪夷所思的。同样，作为从事信号处理的研究人员，如果不知道信号的频谱，同样不可思议的。虽然信号的频谱与乐谱并不是一回事，但就其对信号的重要性而言，这样的比喻并不过分。2015 年，我的学生白银硕的毕业论文，依据经典音乐《梁祝》的小提琴和钢琴的录音信号，计算出各音节的频谱，然后根据各音符的频谱，还原个音节的五线谱。而且不论是小提琴奏出的，还是钢琴弹出的声音信号，都可以还原出梁祝的五线谱。其误差对于非专家是不易区分的。可见频谱的重要性。

信号学的主题之一就是频谱。今后频谱习惯地简称为谱。因此，

信号学是靠“谱”的学科。在军事、民生、艺术等广大领域，比数学学院的《数学分析》还重要。

本章我们从物理背景出发，逐步讲解清楚频谱概念的产生和发展的整个过程(前因后果、来龙去脉)，特别强调一些在数学中并不起眼，但在信号学中的作用却出乎预料的生长点和公式。另外利用数学原理阐述图解法求频谱的方法，这是程乾生先生扎实的数学功底在信号学中的一次完美的体现。第一次让同学们了解了如何利用自己所学的数学知识去完善工程中那些非常有实用价值，但缺少理论支持的工具。正是程先生的指引，才使得我们这些数学背景出身的后辈大胆跟进，为信号学的发展站台助威。以后的章节中还会不断给出类似的例子。

第三讲 频谱概念的产生和发展

一、 频谱概念的物理背景

在中学物理中我们已经知道， $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ 这样的谐波是最基本的“振动谐波”，其中 ω 被称为角频率。在实际中的许多复杂波，它往往由若干简单的谐波叠加在一起构成

$$x(t) = \sum_{n=1}^k A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n), A_n > 0, \phi_n \in [-\pi, \pi], \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

在物理学中， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 被称为基频， $A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ 被称为基波， $n\omega_0$ 被称为 n 次频率， $A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n)$ 被称为 n 次谐波。形如

$$x(t) = \sum_{n=1}^k A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n)$$

虽然只是有限个简单谐波叠加，但这些波的全体已经可以包含相当复杂的波形了。因此可以想象，由任意多个非等差频率的简单波形叠加出的波，那就可以得出更复杂的波形了。

考虑它的反问题：是否每一个物理可实现的波都可以用若干个简单谐波叠加出来？答案是：学完了信号学，心中自有就定论。

依物理学的观点来看，一个乐队合奏出来的曲子对于听众的耳朵来讲，接收到的信号等价于一个波 $x(t)$ ，乐队指挥的大脑有能力将该波“分解”为

$$x(t) = \sum_{n=1}^k A_n \sin(\omega_n t + \phi_n), \omega_n = n\omega_0$$

其中，角频率不是等差的（但误写成等差的情形，这个版本的 word 不兼容，暂时改不过来。从而，乐队指挥就能及时判断出哪些乐器没跟上拍，或者过头了。从而及时纠偏，保证听众没发现差错。

从数学的角度来看， $x(t)$ 完全由参数 $\{(\omega_1, A_1), (\omega_2, A_2), \dots, (\omega_k, A_k)\}$ 和 $\{(\omega_1, \phi_1), (\omega_2, \phi_2), \dots, (\omega_k, \phi_k)\}$ 所决定。对于这些实值的二元组序列，如果以角频率为横轴，振幅值为纵轴，可以将数据 $\{(\omega_1, A_1), (\omega_2, A_2), \dots, (\omega_k, A_k)\}$ 表示如下图

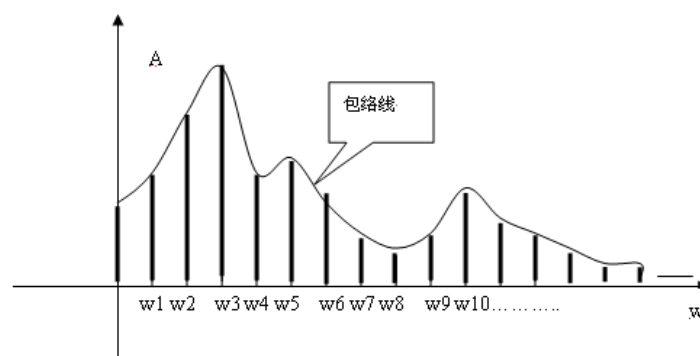


图 2-3-1 幅度谱示意图

这样的图称为幅度谱、幅值谱、或者**振幅谱**。振幅自然是沿袭物理学中的概念。但“谱”最可能是因为古文中“谱”与“图”有相近的意思，当然，我们宁可相信它与乐曲中的“谱”有渊源。按《说文》的解释：“谱”，籍录也，限于家谱、大事记年谱、菜谱。后来，谱被引申为采取表格或其他比较整齐的形式，将关心的对象按照类别或体系编辑起来，使之一目了然。

总之，从此以后我们就与“谱”这个名词打交道了，而且该名词“传染性”非常强，凡与之有联系的，均被冠以“谱”。比如图形中的曲线，在数学中被称为包络线，但在信号学中就被称为**包络谱**。

同样按照下面的规定可以画出相位与频率之间的图形，被称为**相位谱**。规定如下

1. $\phi_n > 0$ 冲下， $\phi_n < 0$ 冲上，高度正好是 $|\phi_n|$ 。
2. $\phi_n > 0$ 表示超前， $\phi_n < 0$ 表示滞后。如图 2-1-2 所示。

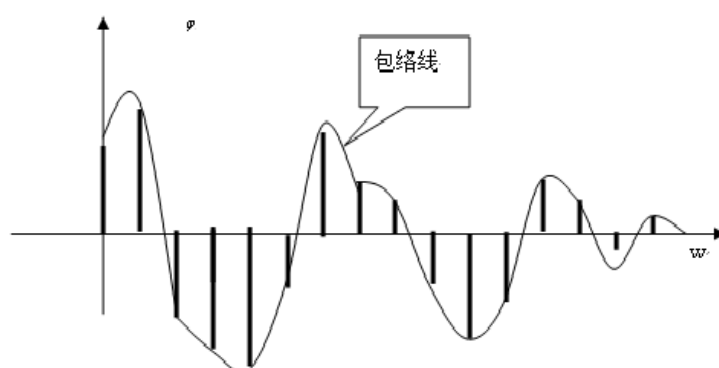


图 2-3-2 相位谱示意图

再次从数学角度来看， $x(t)$ 的振幅谱（图形）与数据

$$\{(\omega_1, A_1), (\omega_2, A_2), \dots, (\omega_k, A_k)\}$$

相位谱与数据

$$\{(\omega_1, \phi_1), (\omega_2, \phi_2), \dots, (\omega_k, \phi_k)\}$$

完全不用区别。在特定的环境中，比如 $\omega_k = k\omega_0$ ，我们甚至连频率分量都可以省略，只用数据 A_1, A_2, \dots, A_k 和 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ 就表示振幅谱和相位谱。从而， A_1, A_2, \dots, A_k 被看作是 $x(t)$ 的幅度谱， $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ 被看作是 $x(t)$ 的相位谱。

特征：振幅谱 A_1, A_2, \dots, A_k 与相位谱 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ 合起来唯一地决定了 $x(t)$ 。

二、 频谱概念的初步推广

从数学分析中可知，一个周期函数如果满足 Dirichlet 条件，即

1. $x(t)$ 在一个周期内只能有有限多个间断点
2. $x(t)$ 在一个周期内只能有有限多个极值点
3. $x(t)$ 有界，或者更一般地 $\int_T |x(t)| dt < +\infty$

那么可以展开为傅立叶级数 (Fourier Series)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t$$

其中， t 是 $x(t)$ 的连续点，且

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

利用复指数与三角函数关系的欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

注意，工程上习惯用 j 表示单位虚根而数学中喜欢用 i 。上述三角函数级数展开形式可以改写为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中 C_n 为复数满足

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, |C_{-n}| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} (n \geq 0)$$

$$\phi_n = \text{Arg} C_n$$

关于两种展开式中的系数，我们可以得出如下明显的关系

1. 如果知 $|C_n|$ 和 ϕ_n ，则必知 a_n, b_n 。
2. 周期 T 固定，如果知 a_n, b_n ，则可构造出周期信号 $x(t)$ 。
3. 如果知 $\{C_n\}$ ，则必知 $|C_n|$ 和 ϕ_n ，从而可构造出周期信号 $x(t)$ 。

也就是说，给定一个周期信号 $x(t)$ 被它的复数形式的 Fourier 级数展开式中的系数 $\{C_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 唯一地决定。因此，称 $\{C_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 为信号 $x(t)$ 的频谱。

为与下面讲到的连续谱相区别，又称 $\{C_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 为离散谱。当然，此时的频谱仅仅继承了频谱与信号相互唯一决定这一代数特征。而不要能够画出 $\{C_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 的图形。因为复数不能用一条数轴表示。但如果将 C_n 表示为幅值与辐角形式 $C_n = A_n e^{j\phi_n}$ ，其中

$$A_n = |C_n|, \phi_n = \text{Arg} C_n$$

那么，就可以得到幅值与频率和辐角与频率的图形。如图 2-1-3 用 $A_n - n\omega_0$ 平面可以绘出幅值与频率的图形。

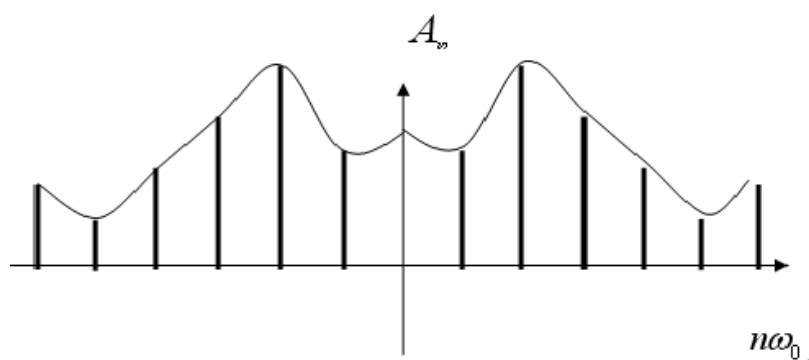


图 2-3-3 复频谱的幅度谱示意图

注意，图形关于纵轴是对称的。继承前面的称呼，称此图为该信号的幅值谱。与前面的讨论一样，我们仍然脱离图形，而将幅值构成的序列 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 称为幅值谱，将辐角序列 $\{\phi_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 称为相位谱。

值得注意的是，将复数形式的 Fourier 级数展开，系数构成的序列称为频谱。虽然沿用了物理学中频谱这个名称，但已经脱离了物理含义。其实，Fourier 复数形式展开，既将频率拓宽到负数，又将振幅拓展到了复数。纯粹是数学体系中符号推理的结果。因为负频率没有物理意义，复数振幅也没有物理意义。工程和物理学人，多数都讨厌复数，认为其为“相当不自然的数”。然而，从数学角度来看，这更简洁、且具有对称美感，仍保持了“频谱与信号可互相转化”这一特征。既然符合数学得审美观，数学也就没必要再跟着物理走了，独立一把。今后我们将 $e^{j\omega t}$ 称为复简谐波。

三、 频谱概念的进一步推广

从哲学观点来看，一个非周期信号可以认为是周期无穷大的周期信号。任取 $T > 0$ ，令

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0, & t \notin [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \end{cases}$$

称 $x_T(t)$ 为 $x(t)$ 的截断信号。将 $x_T(t)$ 周期延拓到整个实轴上，延拓后的函数仍记为 $x_T(t)$ 。于是，对于周期信号 $x_T(t)$ ，将其展开为复指数形式的 Fourier 级数，那么

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T,n} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

其中

$$X_{T,n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt$$

所以

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right] e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

哲学观点告诉我们： $\lim_{T \rightarrow 0} x_T(t) = x(t)$ 。即，非周期信号 $x(t)$ 是周期信号 $x_T(t)$ 的极限。既然 $x(t)$ 可以看作是 $x_T(t)$ 的极限，那么在上式中令 $T \rightarrow +\infty$ ，所得的便可以看作是 $x(t)$ 的展开式，即

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right] e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

令

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

再令

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

则有

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \rightarrow X(f)$$

再注意

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = X_T\left(\frac{n}{T}\right)$$

于是

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

而 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$ 正好是无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) e^{j2\pi ft} df$ 按间距 $\frac{1}{T}$ 等距分

割，等距取点求和。又当 $T \rightarrow +\infty$ 时， $X_T(f) \rightarrow X(f)$ 。从而

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right) e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

虽然上面的推导是直观的，课后翻阅数学分析可以找到严格证明。于是获得一对互为逆变换的一对公式：

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases}$$

称为 Fourier 变换公式。其中

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

被称为 Fourier 正变换公式，而

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

被称为 Fourier 反变换公式、反演公式、**重构公式**。由重构公式可知，

信号 $x(t)$ 被“复振幅” $X(f)$ 唯一决定，既然 $X(f)$ 的信息能够唯一决定信

号 $x(t)$ ，又是从 Fourier 级数展开始自然地推广过来的，因此也称 $X(f)$

为信号 $x(t)$ 的频谱，又称连续谱(注意，这里的“连续”不是通常意义下

的连续性，准确地讲应该是**模拟**的意思)，为的是区分周期信号在傅

立叶展开得到的离散谱。同样， $|X(f)|$ 被称为幅值谱， $\varphi(f) = \text{Arg}X(f)$

称为相位谱。它们一起唯一地决定了 $x(t)$ 。幅值谱和相位谱都可以绘

出图形。

信号一般用小写字母表示，频谱一般用大写字母。当然，如果由于特殊原因，信号本身就是用了大写字母，那么就在大写字母上打“^”来表示它的频谱。注意，习惯上傅立叶正变换公式用 $e^{-j2\pi ft}$ ，反变换公式用 $e^{j2\pi ft}$ ，这是继承频谱原始的物理背景的缘故。另外有人喜欢用角频率($\omega = 2\pi f$)作变量，那么傅立叶正反变换公式相应地变成

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

为了形式上的公平，也可改为平均分配形式

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

注意，今后所言的信号的频谱一般指的是推广了的频谱，即离散谱或连续谱。它之所以能够被推广，主要利用了“频谱与信号相互唯一决定”这一代数性质。后面我们还将会学到，在一定条件下，如何利用部分信息，如基于幅值谱或相位谱重构信号。这些技术在通讯工程中已经不是什么新鲜的东西了，但在生物信息学中，特别是研究空间结构的预测问题中，还有待于尝试。

四、有限长信号的频谱

对于有限长信号，一方面可以视为非周期信号求其连续谱，另一方面也可以视为周期信号求其离散谱，并且二者之间有密切的联系。

例 2.1 矩形波信号

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |t| \leq \Delta \\ 0, & |t| > \Delta \end{cases}$$

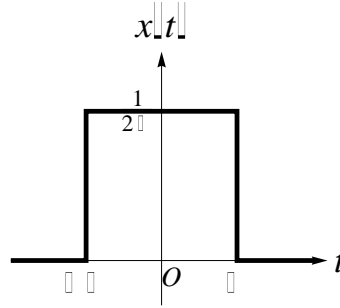


图 2-3-4 矩形波示意图

随参数 Δ 的变化而变化，故称 Δ 为它的控制参数。矩形波信号的面积恒为 1，它既是我们十分熟悉的 $[-\Delta, \Delta]$ 上的均匀分布概率密度函数，还是今后要常常用到的矩形窗函数。特别地，当参数 $\Delta \rightarrow 0$ 时，它的极限是冲激函数 $\delta(t)$ ，或称为 Dirac 函数。下面我们分别从两个不同的视角求出矩形波信号相应的频谱。

1. 视为非周期信号

此时，它的连续谱为

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\Delta}^{+\Delta} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{-j2\pi f} (-2j \sin(2\pi f \Delta)) \\ &= \frac{\sin(2\pi f \Delta)}{2\pi f \Delta} \\ &\stackrel{def}{=} S_a(2\pi f \Delta) \end{aligned}$$

此处用到欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ 。

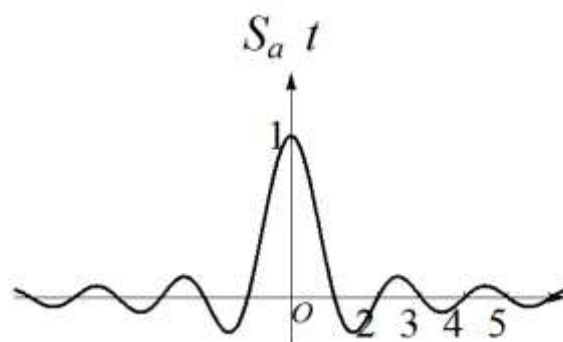


图 2-3-5

函数 $S_a(t) = \frac{\sin t}{t}$ ，在数学分析中我们已经对其有了初步的了解了，

因为“它可积，但原函数找不到”使得数学人在大一时就对它好奇，

后来在 Dirichlet 积分中解决了它，使得我们对含参变量有了好感。在

采样定理中，它的作用就更不可或缺。不仅如此，由此我们还重新再

回首《数学分析》中函数插值的概念，并对其有了新的认识。

2. 视为周期矩形波

考虑周期信号

$$x_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |t - 4n\Delta| < \Delta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

此时，

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |t| \leq \Delta \\ 0, & |t| > \Delta \end{cases}$$

是一个周期为 4Δ 的周期信号的第一主周期。它的傅立叶级数展开式中的系数，也即它的离散谱为

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{4\Delta} \int_{-2\Delta}^{2\Delta} x_{\Delta}(t) e^{-j\frac{2\pi}{4\Delta}nt} dt = \frac{1}{4\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{4\Delta}nt} dt \\
&= \frac{1}{4\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} e^{-j\frac{2\pi}{4\Delta}nt} dt = \frac{1}{8\Delta^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-j\frac{2\pi}{4\Delta}nt} dt \\
&= \frac{1}{8\Delta^2} \frac{1}{-j\frac{2\pi}{4\Delta}n} (e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{2}n}) \\
&= \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{-j2\pi n} (-j2 \sin \frac{\pi}{2}n) \\
&= \frac{1}{4\Delta} \frac{\sin \frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4\Delta} S_a(\frac{\pi}{2}n)
\end{aligned}$$

我们将 $S_a(2\pi f\Delta)$ 和 $\frac{1}{4\Delta} S_a(\frac{\pi}{2}n)$ 的图形放在一起比较，如图 2-1-6、2-1-7 所示。

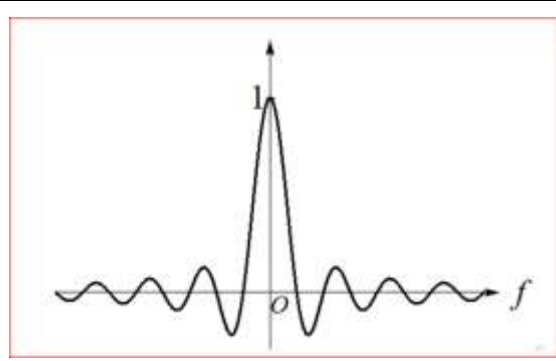


图 2-3-6 视为非周期信号的频谱的示意图

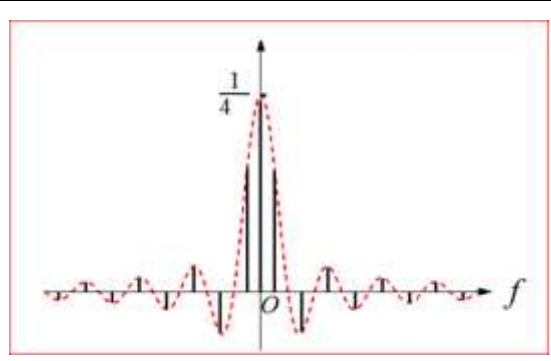


图 2-3-7 视为周期信号的频谱示意图

图 2-3-7 中，红色虚线正好是 $\frac{1}{4\Delta} S_a(2\pi f\Delta)$ ，是离散频谱 $\frac{1}{4\Delta} S_a(\frac{\pi}{2}n)$ 的包络谱。由于 $\frac{1}{4\Delta} S_a(\frac{\pi}{2}n) = \frac{1}{4\Delta} S_a(2\pi\Delta \frac{n}{4\Delta})$ 正好由 $S_a(2\pi f\Delta)$ 沿垂直方向拉伸 $\frac{1}{T} = \frac{1}{4\Delta}$ 之后，再按照间距 $\Delta f = \frac{1}{4\Delta}$ 等距取值得到。注意 $\Delta f = \frac{1}{T}$ 在稍后的内容中有说道。

这个例子所揭示的规律是具有普遍性的。对于有限长信号，视为周期信号求得的离散谱与视为非周期信号求得的连续谱有如下关系

$$C_n = \frac{1}{T} X(\frac{n}{T})。$$

事实上，从傅立叶级数展开的推演过程中，我们不难给出一般证明。

作为练习，读者可以通过其它例子来检验此性质，例如三角波、梯

形波等。当完成了这些练习之后就会更加深刻地体会到两种观点之下的频谱之间的联系。

另外，此处的 $x(f)$ 是实值函数，主要得益于信号的对称性。从傅立叶变换公式我们可以得到一般性结论： $x(f)$ 是实值函数，当且仅当原始信号是实对称的。证明留作练习。

五、 信号与频谱之间的关系小节

总结本讲的内容，希望读者牢记以下重要的关系：

- ▶ 周期模拟信号的频谱是离散的(因为它就是信号傅立叶展开的系数)。
- ▶ 非周期模拟信号的频谱是模拟的(因为它就是信号的傅立叶变换)。
- ▶ 有限长信号即可以视为周期信号，也可以视为非周期信号，在这两种观点下的两种频谱之间可以互相转化。
- ▶ 任何非 0 的有限长模拟信号视为非周期信号时的频谱必定无穷带宽，这是傅立叶变换公式蕴涵的性质。
- ▶ 无穷长模拟信号的频谱带宽可能有限，也可能无穷。

例 2.2 由上例可知，信号

$$x(t) = S_a(2\pi\delta t), t \in (-\infty, +\infty)$$

的频谱正好是

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & |f| \leq \delta \\ 0, & |f| > \delta \end{cases}$$

这表明无限长信号 $x(t)$ 是带宽可以为有限。还有更深刻的性质将在下一讲给出。

例 2.3 如果取信号 $x(t) = \phi(t), t \in (-\infty, +\infty)$ ，其中 $\phi(t)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率密度函数。在信号学中，因其图形像一口大钟而被称为钟形波。它的频谱仍然是一个钟形波，所以它的带宽是无穷的。事实上，既然

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

那么容易得到

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

更多的例子在后面的各章节中会慢慢呈现给读者，为了精简，本讲就此打住。

第四讲 频谱的性质

一、 非周期信号（连续谱）的性质

1. 线性性

设 $x_1(t)$ 的频谱为 $X_1(f)$, $x_2(t)$ 的频谱为 $X_2(f)$, 那么

$$FT[x_1(t) + x_2(t)] = X_1(f) + X_2(f), \quad FT[\alpha x_1(t)] = \alpha X_1(f)$$

这在数学中分别被称为可加性和齐次性, 但在信号学中分别被称为叠加性和均匀性。

2. 共轭对称性

设 $x(t)$ 为实信号, 则

$$\overline{X(f)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt = X(-f)$$

即

$$X(-f) = \overline{X(f)} \text{ 或 } X(f) = \overline{X(-f)}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} X(f) = \operatorname{Re} X(-f) & |X(f)| = |X(-f)| \\ \operatorname{Im} X(f) = -\operatorname{Im} X(-f) \end{cases}$$

不论在数学分析中, 还是信号学中, 以上都称为共轭对称性。

3. 实信号的奇偶性与其频谱的奇偶性

当 $x(t)$ 为实偶函数时

$$\begin{aligned}
X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} x(-s) e^{-j2\pi fs} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j2\pi fs} ds \\
&= X(f)
\end{aligned}$$

当 $x(t)$ 为实奇函数时

$$\begin{aligned}
X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} x(-s) e^{-j2\pi fs} ds \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j2\pi fs} ds \\
&= -X(f)
\end{aligned}$$

由此可见，实信号的奇偶性与其频谱的奇偶性相一致。同时，由共轭对称性 $X(-f) = \overline{X(f)}$ ，易知当 $x(t)$ 为实偶函数时， $X(f)$ 是实函数。

4. 信号与频谱的对称性与反转性

设 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$ ，那么新的信号 $X(t)$ 的频谱为 $\hat{X}(f) = x(-f)$ 。

证明：

$$\begin{aligned}
\hat{X}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-j2\pi st} ds \right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(s+f)t} dt ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \delta(s+f) ds \\
&= x(-f)
\end{aligned}$$

此性质被称为频谱的反转性。如果用泛函的术语，这就好比是“自反性”。也即，频谱的频谱又返回到信号的形式，不过稍稍需要留神点，要对原信号反转一下，不是直接换成 f 。不难证明，若信号 $x(t)$ 的频谱

为 $X(f)$ ，则信号 $x(-t)$ 的频谱为 $X(-f)$ 。此性质被称为信号与频谱的反转性。

5. 时间位移定理

如果 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$ ，那么 $x(t-t_0)$ 的频谱为 $e^{-j2\pi f t_0} X(f)$ 。

证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-j2\pi f (s+t_0)} ds = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

定义 2.1 一个信号被乘以因子 $e^{ja\omega}$ ，就被称为对该信号进行调制。

于是信号在时域上的位移相当于对其频谱进行调制。关系式：

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

被称为时间位移定理。

6. 频域位移定理

如果 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，则 $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$ 。

证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t)e^{j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt = X(f-f_0)$$

$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$ 称为频率位移定理，频谱在频域的位移相当于对原信号在时间域上的调制。

在数学中不过是两个极为平常的公式。但信号学中它们的重要性则无穷大。重要到什么程度呢？这里可以停下着重讲一下。如果将时

间位移定理和频域位移定理结合起来，那么它的重要怎么说都不过分。调制与解调器（猫）。

7. 伸缩性(尺度性)

如果 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，那么 $a > 0$ 时，有

$$FT(x(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt \stackrel{(a>0)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi f \frac{s}{a}} \frac{1}{a} ds = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)。$$

也就是说，对信号进行时域扩张($|a| < 1$)，相当于对频谱进行水平收窄而垂直拉伸。当 $a = -1$ 时，即得前面刚讲过的信号与频谱的反转性。更一般地，有

$$FT(x(at \pm t_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at \pm t_0)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)e^{\pm \frac{j2\pi ft_0}{a}}$$

这是说，对信号进行平移和水平伸缩，相当于对频谱进行水平伸缩和垂直伸缩，并做调制。这个性质的重要性太大了，称为伸缩性质或者尺度性质。有它才有多尺度的概念。这为小波理论的产生奠定了基础。

8. 时域微分定理

如果 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是可积且绝对可积的，其频谱为 $X(f)$ ，那么

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ 的频谱为 $(j2\pi f)^n X(f)$ 。

证明：利用分部积分公式，有

$$\begin{aligned}
 FT\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= j2\pi f X(f)
 \end{aligned}$$

这里我们加了限制（可积且绝对可积有什么用？还要其它什么？）。

仿上，不断利用分部积分公式可得

$$FT\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = (j2\pi f)^n X(f)$$

注意，这里的证明只是形式的，不是像数学分析那样严格。这个性质在后面要讲到的图解法求频谱的算法中起到重要作用，在那里信号的广义导数由 δ -函数及其导数的线性组合表出。另外这个性质还可以诱导出一种非常广义的导数定义，稍后在“本章小结”中给出。

9. 时域卷积定理

为了叙述的需要，我们在此先给出卷积的定义

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

其中 τ 被称为“哑”变量， $x(t) * y(t)$ 被称为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的卷积。这其实就是我们熟悉的含参变量的无穷积分，学习概率论时必然碰到过这样的概念。因为两个相互独立的连续型随机变量之和的概率密度函数正好是其两个随机变量密度函数的卷积。显然，两个信号的卷积仍然是一个信号，而我们关心的是这个信号的频谱是什么？利用频谱的定义可得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(s) e^{-j2\pi fs} e^{-j2\pi f\tau} ds \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau Y(f) \\
&= X(f) Y(f)
\end{aligned}$$

于是 $FT(x(t) * y(t)) = X(f)Y(f)$ ，即信号卷积的频谱正好是各自信号频谱的乘积。

时域卷积定理是信号学中十分重要的基本定理。不仅如此，如果我们对照一下概率论中的特征函数的定义就会发现，特征函数的定义不过是一种没有专门使用频率作为参变量的傅里叶变换而已。在那时我们已经知道此定理，只不过没有专门提出时域卷积定理这个名称而已。特别强调，时域卷积定理是帮助我们绕开计算卷积这个困难的重要工具，在以后的学习和研究中应该给以高度重视。反之，仿上可得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * Y(f) e^{j2\pi ft} df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) Y(f-v) dv e^{j2\pi ft} df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) Y(f-v) e^{j2\pi ft} dv df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-v) e^{j2\pi ft} df \right) dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) e^{j2\pi vt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(s) e^{j2\pi st} ds \right) dv \\
&= y(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) e^{j2\pi vt} dv \\
&= x(t) y(t)
\end{aligned}$$

从而得到如下定理：

10. 频域卷积定理

$IFT(X(f) * Y(f)) = x(t)y(t)$ ，也就是说，频谱的卷积的反傅立叶变换正好是信号的乘积。

为了加深对卷积的理解，我们从系统的角度来进一步了解它。对于一个线性系统，当输入单位冲激信号 $\delta(t)$ 时，系统关于 $\delta(t)$ 的输出信号为 $h(t)$ ，则称 $h(t)$ 为该系统的响应函数。它的意义是，对任何输入信号 $x(t)$ ，系统的输出 $y(t)$ ，按卷积 $y(t) = x(t) * h(t)$ 唯一决定。即，一个线性系统被系统的响应函数 $h(t)$ 唯一决定。

虽然以上卷积定理可以帮助我们逃脱计算卷积的困难，但是如果我们直接计算卷积时，你能否做到不出错？数学的学生一般很难100%的通过。例如，在概率论中求服从 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布的两个独立随机变量之和的分布函数。因为我们在教概率论课的做过实验，通过讲课、习题、习题课、考前复习等环节，考试时仍然有那么几个学生还是计算出错。然而，这样的题给工科学学生做，反而不会出错。这是为什么？因为他们有一套“图解法计算卷积”。因此几乎在脑子不是很清晰的情况下也能准确计算。我们在这一版的修改时将它移走了，放到了后面专门讨论卷积的地方。

11. 帕色伐尔(Parseval)定理

如果在 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中引进“内积”

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

设 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ， $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ ，那么恒有 $(x(t), y(t)) = (X(f), Y(f))$ 。

证明：

利用内积的定义可得

$$\begin{aligned}
(X(f), Y(f)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \overline{Y(f)} df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(s) e^{-j2\pi fs}} ds df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(s)} e^{j2\pi fs} ds df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(s)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi fs} df \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(s)} x(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \overline{y(s)} ds \\
&= (x(t), y(t))
\end{aligned}$$

此恒等式称为 Parseval 定理。特别地，以下恒等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

被称为能量守恒公式。它表明信号的能量永远与它的频谱的能量相等。这个简单的性质后面会反复用到。

二、 周期信号离散谱的性质

1. 共轭对称性

设 $x(t)$ 为实的周期信号，其频谱为

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt ,$$

这时

$$\bar{X}_n = \overline{\left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T} nt} dt \right)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T} nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T} (-n)t} dt = X_{-n}$$

即

$$\begin{aligned}
X_{-n} &= \bar{X}_n \text{ 或 } X_n = \overline{X_{-n}} \\
\begin{cases} \operatorname{Re} X_n = \operatorname{Re} X_{-n} & |X_n| = |X_{-n}| \\ \operatorname{Im} X_n = -\operatorname{Im} X_{-n} & \varphi_n = -\varphi_{-n} \end{cases}
\end{aligned}$$

不论在数学分析中，还是信号学中，以上都称为共轭对称性。

2. 实信号的奇偶性与其频谱的奇偶性

设 $x(t)$ 为实的周期信号，那么

A. 当 $x(t)$ 为实偶函数时

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(\frac{2\pi}{T}nt) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(\frac{2\pi}{T}(-n)t) dt = X_{-n} \end{aligned}$$

当 $x(t)$ 为实奇函数时

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(\frac{2\pi}{T}nt) dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(\frac{2\pi}{T}(-n)t) dt = -X_{-n} \end{aligned}$$

因此，奇偶性被保持下来。同理，当信号为非周期的依然成立。

总之，在实信号的限制下，奇信号的频谱为奇函数，偶信号的频谱依然为偶函数。

其它性质类似可以得到，有的留在习题中，我们不再赘述。

三、 随机信号的功率谱密度和自相关函数

一般而言，定信号按其能量或功率的有限性，可分为能量型信号和功率型信号两种。

若能量 $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ 有限，则称为能量有限信号，其中 $|X(f)|^2$ 称为信号 $x(t)$ 的能量谱密度。

若信号的能量无限，但其平均功率 $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$ 有限，则称为功率有限信号。

对于一个随机信号（随机过程） $x(t)$ ，虽然我们没写它所在的概率空间，但我们知道它是随样本变化而变化的。针对一个实现，也即 $x(t, \omega_0)$ ，可以用定信号的手法去处理。特别，先取期望，变成一个确定信号，那么也可以按照确定信号方法处理。

一般地，随机信号（随机过程）是能量无限的，但平均功率往往是有限，属于功率有限型信号。我们建立随机信号功率谱密度的概念。

假定 $x(t)$ 为一随机信号， $x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 是其截断信号，对于每个给定的样本变量之下，定信号 $x_T(t)$ 的频谱记为 $X_T(f)$ ，则随机信号的平均功率定义为

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f)|^2\}}{2T} df$$

其与 $x(t)$ 的关系可见如下推理过程

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T} df \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f)|^2\}}{2T} df \end{aligned}$$

令

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f)|^2\}}{2T}$$

称之为随机信号 $x(t)$ 的功率谱密度函数，简称为功率谱。

不难看出， $S(f)$ 是依据逻辑推理出来的符号公式。以前在分析学科中只要说明它存在就行了。但工程中不一样，能不能算？如果不能

算,哪好玩哪呆着去!如何依据部分观测数据,计算一个逻辑公式 $S(f)$ 是一个挑战的问题。要想算,首先看你有没有能力将其转换为代数问题。下面我们观察如何将求期望的问题转化为代数问题。

随机信号 $x(t)$ 的自相关函数定义为 $R(t, t-\tau) = E\{x(t)\overline{x(t-\tau)}\}$,它反映了随机信号在时刻 $t, t-\tau$ 两个时刻的随机变量的相关性,当 $R(t, t-\tau) = 0$ 时,表明在这两时刻上的值线性无关。对于“平稳过程”而言, $R(t, t-\tau)$ 的取值与 t 无关,简记为 $R(\tau)$ 。

下面我们讨论功率谱密度与自相关函数之间的关系。

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f)|^2\}}{2T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t_2) e^{-j2\pi f t_2} dt_2}\right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\int_{-T}^{+T} x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \overline{\int_{-T}^{+T} x(t_2) e^{-j2\pi f t_2} dt_2}\right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\int_{-T}^{+T} x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T}^{+T} \overline{x(t_2)} e^{j2\pi f t_2} dt_2\right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} E\{x(t_1)\overline{x(t_2)}\} e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} R(t_1-t_2) e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left(\int_{-T-t_2}^{T-t_2} R(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau\right) dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t_2}^{T-t_2} R(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(\int_{-T}^{+T} dt_2\right) d\tau \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T-t_2}^{T-t_2} R(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

上式表明,对平稳过程而言,功率谱 $S(f)$ 是自相关函数 $R(\tau)$ 的频谱。这一性质又称维纳-辛钦关系。对于非平稳的这个关系不能用,需要修改。

本讲小节

我们以非周期信号为对象，展示了频谱的 12 个性质：

1. 线性性
2. 共轭对称性
3. 实信号的奇偶性与其频谱的奇偶性
4. 信号与频谱的对称性与反转性
5. 时间位移定理
6. 频域位移定理
7. 伸缩性(尺度性)
8. 时域微分定理
9. 时域卷积定理
10. 频域卷积定理
11. 帕色伐尔(Parseval)定理
12. 能量守恒公式。

这 12 个性质几乎都能平行地搬到周期信号的情形（表述方式可能略作修改）。一些性质的证明放在习题中。其中，性质 5、6，12 最简单，但是其在现实生活中的重要性无法比拟。

再要注意的是维纳-辛钦关系，我们不仅要求同学会证明，而且要知道它是我们的课程中首次展示，如何将逻辑符号推演出来的概念变成一个可以根据观测数据来实现计算的第一个例子。其实，基础数学与工程之间往往有类似的沟壑存在，研究应用数学的人能力的大小就在于你能否将抽象推理的转换成可计算的代数模式。以后的内容还会遇到此类的问题，每次我们都会提醒，反复强调。

第五讲 单位冲激信号(δ -函数)

一、 δ -函数的产生背景

前面我们曾指出矩形波信号

$$g_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & |t| \leq \tau \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

是被参数 τ 控制的，当 $\tau \rightarrow 0$ 时，

$$g_{\tau}(t) \rightarrow \delta(t)$$

这是一个当时数学界不承认的函数，它满足

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$
 必须是两个条件同时成立

物理学家 Dirac 首先发现并定义了这一函数，称为 δ -函数或 Dirac 函数(如图 2-5-1)。它表示在一瞬间激发的脉冲，有着很强的物理背景。

然而它违背了经典的函数定义，破坏了经典函数定义中的有限性，这

是让当时的数学人难以接受的。不过，Dirac 并没有理会当时的著名

数学大师的指责，仍然坚持发展他的理论。后来，还是数学家拗不过

物理学家，由著名数学家 Schwartz 将其发展和完善。于是，这种新

的函数被数学界接受了，发展出了一门新的数学分支——广义函数。

这使得数学和物理达到了双赢。

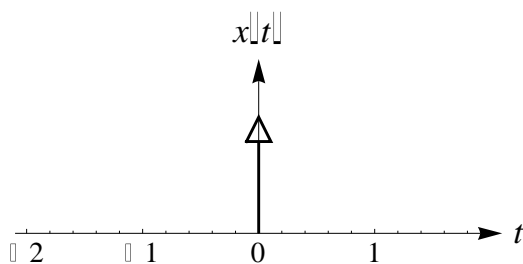


图 2-5-1

二、 δ -函数的性质

由 δ -函数的定义易知， $\delta(t)$ 是一个偶函数，也即 $\delta(t) = \delta(-t)$ 。同时，需要注意的是 δ -函数的形式表达式

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

不是 δ -函数的完整描述， δ -函数还要受 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ 的限制。

事实上，如果不做限制，仅仅使用单一形式表达 $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，

那么，应该出现 $\delta(t) = \delta(at)$ 。然而， $\delta(at) \neq \delta(t)$ 。事实上，由尺度性，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) ds = \frac{1}{|a|}$$

可知 $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ 。

另外，对任意的函数 $f(t)$ ，只要在 $t=0$ 处连续，则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_{\tau}(t) f(t) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\tau}(t) f(t) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2\tau} f(t) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\xi) \quad \xi \in [-\tau, \tau] \\ &= f(0) \end{aligned}$$

注意，最后的等式成立就依赖于函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续。同理，不难证明：如果 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

于是，我们可以得到一个函数是 δ -函数的另一种定义方式：

一个函数是 δ -函数，如果它满足 $\forall f(t)$ ， $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续，均有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)。$$

从这个定义出发，我们也可以得到 $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ 。

三、 广义极限和广义函数

定义 2.2 如果对于任何实的连续可积函数 $f(t)$ ，均有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda}(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

则称 $g(t)$ 是 $g_{\lambda}(t)$ 的广义极限，称 $g(t)$ 为广义函数。记为 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{\lambda}(t) \square g(t)$ 。

从泛函分析的角度来看，广义极限其实就是一种弱收敛意义下的极限。事实上，将积分改为内积形式，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda}(t) f(t) dt = (g_{\lambda}, f); \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt = (g, f)$$

那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{\lambda}(t) \square g(t) \text{ 等价于 } (g_{\lambda}, f) \rightarrow (g, f), \forall f(t)$$

后者就是泛函分析中的**弱收敛**。它比数学分析中使用的**上确界范数**下的极限要宽泛得多。泛函分析中的**上确界收敛**，强于**逐点收敛**，而**逐点收敛**等价于**弱收敛**。

不难证明以下普通函数的广义极限均为 $\delta(t)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad g_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases} & (2) \quad g_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{|t|}{\lambda}) & |t| < \lambda \\ 0 & |t| \geq \lambda \end{cases} \\
 (3) \quad g_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2\lambda(1-e^{-1})} e^{-\frac{|t|}{\lambda}} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases} & (4) \quad g_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} e^{-\pi(\frac{t}{\lambda})^2} & |t| \leq \lambda \\ 0 & |t| > \lambda \end{cases}
 \end{aligned}$$

这些留做练习，请读者自己动手试试看，其中，有的系数是什么，计算完了就知道了。除此之外，还有很多普通函数的广义极限也是 $\delta(t)$ 。

定义 2.3 记 $g'(t)$ 为这样的函数，对任意具有连续导函数的函数 $f(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ ，均有 $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f'(t)dt$ ，则称 $g'(t)$ 为广义函数 $g(t)$ 的导函数。类似地，如果对任意具有连续 k -阶导函数的函数 $f(t) \in C^{(k)}(-\infty, +\infty)$ ，均有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(t)f(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f^{(k)}(t)dt$$

则称 $g^{(k)}(t)$ 为 $g(t)$ 的 k -阶导函数。

从定义可以看出，对广义函数的求导，实际上是通过分部积分转嫁到有能力承受求导的函数上。同时不难看出， δ -函数是无穷可导的，只要我们理解 $f(t) \in C^{(k)}(-\infty, +\infty)$ ，对于 $k=\infty$ 时依然包含了所有多项式。

下面我们具体地讨论 δ -函数的原函数与导函数。

记

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

为单位阶跃信号。这是一个十分有用的信号，它与符号函数的关系为

$u(t) - u(-t) = \text{sgn } t$ 。另外

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) f(t) dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f'(t) dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} f'(t) dt \\
 &= f(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt
 \end{aligned}$$

所以 $u'(t) = \delta(t)$ 。换言之， $u(t)$ 是 $\delta(t)$ 的原函数。

按前述的广义函数的导函数的定义， $\delta(t)$ 亦有相应的高阶导函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t) f(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

其中， $f(t) \in C^{(k)}(-\infty, +\infty)$ 。称 $\delta^{(k)}(t)$ 为 $\delta(t)$ 的 k -阶导函数。

四、 δ -函数及与之相关的函数的频谱

由 $\delta(t)$ 的性质，易知

$$\hat{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

于是，由信号与频谱的自反性可知 $x(t)=1$ 的频谱为 $FT(1) = \delta(-f) = \delta(f)$ 。

注意，这个结果不能用原始定义获得。当然，我们也可以通过《广义函数论》中的另外一种方法求得其频谱。也即，考虑单参数速降函数

$$g_{\alpha}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}, \alpha > 0$$

因为，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时， $g_{\alpha} \rightarrow 1$ 。从而

$$\begin{aligned}
X(f) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} + e^{-(\alpha - j2\pi f)t} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2/\alpha}{1 + (2\pi f/\alpha)^2} \\
&= \begin{cases} \infty & f = 0 \\ 0 & f \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2/\alpha}{1 + (2\pi f/\alpha)^2} df = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2\pi f}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1, \forall \alpha > 0$$

由 δ -函数的双重约束定义知， $X(f) = \delta(f)$ 。

同理，考虑如下单参数速降函数（以 $\text{sgn}(t)$ 为广义极限）

$$g_{\alpha}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & 0, \alpha > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad \text{中间为 } 0, t=0. \quad \text{将底 } e^{\alpha t} \text{ 前面加-号。}$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时， $g_{\alpha} \rightarrow \text{sgn}(t)$ 。从而 $\text{sgn}(t)$ 的频谱 $X(f)$ 为

$$\begin{aligned}
X(f) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} - e^{-(\alpha - j2\pi f)t} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-4j\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \\
&= \frac{1}{j\pi f}
\end{aligned}$$

又 $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } t)$ ，由傅立叶变换的线性性， $u(t)$ 的频谱为

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

有了 δ -函数的概念，我们又可以得到频谱的一个性质——时域积分

定理，即如果 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$ ，那么

$$FT\left(\int_{-\infty}^t x(s)ds\right) = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f)$$

证明：由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(s)ds\right) e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)u(-s+t)ds e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) * u(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= X(f)U(f)\end{aligned}$$

而 $U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ ，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(s)ds\right) e^{-j2\pi ft} dt &= \frac{1}{2}X(f)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f) \\ &= \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f)\end{aligned}$$

不仅如此，由 δ -函数我们还可以得到周期函数的“连续”谱。设

$x(t)$ 是周期为 T 的信号

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

那么 $x(t)$ 的“连续”谱为

$$\begin{aligned}X(f) &= FT(x(t)) = FT\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n FT\left(e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\end{aligned}$$

也就是说，有了 δ -函数的帮助，离散的频谱也有“连续”的表示方式。因此，离散随机变量也有“概率密度函数”。在以后的章节中，我们会经常用到 $u(t)$ 和 $\delta(t)$ 及其性质，所以读者对这一讲的内容应给予重视。

本讲小结

δ -函数满足

$$1. \quad \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{必须是两个条件同时成立}$$

$$2. \quad \delta\text{-函数的冲要条件: } \forall f(t), f(t) \text{ 在 } t=0 \text{ 连续, 均有 } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)。$$

3. 以 $\delta(t)$ 为广义极限的函数

$$(1) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (2) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} (1 - \frac{|t|}{\lambda}) & |t| < \lambda \\ 0 & |t| \geq \lambda \end{cases}$$

$$(3) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda(1-e^{-1})} e^{-\frac{|t|}{\lambda}} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda \operatorname{erf}(\sqrt{\pi})} e^{-\pi(\frac{t}{\lambda})^2} & |t| \leq \lambda \\ 0 & |t| > \lambda \end{cases}$$

4. 广义极限是一种弱收敛意义下的极限。令

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda}(t) f(t) dt = (g_{\lambda}, f); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt = (g, f)$$

那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_{\lambda}(t) \square g(t) \text{ 等价于 } (g_{\lambda}, f) \rightarrow (g, f), \forall f(t)$$

5. 分部积分公式导出的

广义导函数 $g'(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f'(t) dt, \quad f(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$$

广义 k -阶导函数 $g^{(k)}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(t)f(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f^{(k)}(t)dt, \quad f(t) \in C^{(k)}(-\infty, +\infty)$$

6. $\delta(t)$ 的原函数

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

7. $\delta(t)$ 的高阶导函数 $\delta^{(k)}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t)f(t)dt = (-1)^k f^{(k)}(0), \quad f(t) \in C^{(k)}(-\infty, +\infty)$$

8. $\text{sgn}(t)$ 的广义导数

由 $u(t) - u(-t) = \text{sgn} t$, 可得出 $\text{sgn} t$ 的广义导数为 $2\delta(t)$ 。

9. 单参数速降函数 (积分因子)

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}, \alpha > 0 \quad \text{当 } \alpha \rightarrow 0 \text{ 时, } g_\alpha \rightarrow 1。$$

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & 0, \alpha > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad \text{中间为 } 0, t=0。 \text{将底 } e^{\alpha t} \text{ 前面加-号。}$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $g_\alpha \rightarrow \text{sgn}(t)$ 。

10. $\delta(t)$ 的频谱

$$\hat{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$$

于是, 由信号与频谱的自反性可知 $x(t)=1$ 的频谱为 $FT(1) = \delta(-f) = \delta(f)$ 。

11. $\text{sgn}(t)$ 的频谱

$$\begin{aligned}
X(f) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} - e^{-(\alpha - j2\pi f)t} dt \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f} - \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-4j\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \\
&= \frac{1}{j\pi f}
\end{aligned}$$

12. $u(t)$ 的频谱为

$$U(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

13. $x(t)$ 的原函数的频谱的一般表达

$$FT\left(\int_{-\infty}^t x(s) ds\right) = \frac{1}{2} X(0) \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

14. 周期为 T 的信号 $x(t)$ 的频谱的连续化表示:

$$\begin{aligned}
X(f) &= FT(x(t)) = FT\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n FT\left(e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

第六讲 广义导数图解法及数学原理

一、 广义导数的图解法实施步骤

设 $x(t)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的有限分段函数，每一段上是一个多项式，则 $x(t)$ 的广义导数可以按以下步骤求出

1. 找出 $x(t)$ 的所有不连续的分段点 $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1s_1}$ ，在间断点 t_{1j} ($j=1, 2, \dots, s_1$) 处，根据 $x(t_{1j}+0) - x(t_{1j}-0)$ 的取值画箭头：

当 $x(t_{1j}+0) - x(t_{1j}-0) > 0$ 时，箭头冲上；

当 $x(t_{1j}+0) - x(t_{1j}-0) < 0$ 时，箭头冲下。

2. 对 $x(t)$ 逐段求导（忽略分段点的导数）得 $x'(t)$ ，求出 $x'(t)$ 的新的不连续的分段点 $t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2s_2}$ ，在间断点 t_{2j} ($j=1, 2, \dots, s_2$) 处，根据 $x'(t_{2j}+0) - x'(t_{2j}-0)$ 的取值画箭头：

当 $x'(t_{2j}+0) - x'(t_{2j}-0) > 0$ 时，箭头冲上；

当 $x'(t_{2j}+0) - x'(t_{2j}-0) < 0$ 时，箭头冲下。

.....

n. 如果到第 n 步时，首次在各个分支上出现 $x^{(n)}(t) \equiv 0$ ，停止求导，写出 $x(t)$ 的 n 阶广义导数如下：

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} = & \sum_{j=1}^{s_1} \delta^{(n-1)}(t-t_{1j}) [x^{(0)}(t_{1j}+0) - x^{(0)}(t_{1j}-0)] \\ & + \sum_{j=1}^{s_2} \delta^{(n-2)}(t-t_{2j}) [x^{(1)}(t_{2j}+0) - x^{(1)}(t_{2j}-0)] \\ & + \dots \\ & + \sum_{j=1}^{s_n} \delta^{(0)}(t-t_{nj}) [x^{(n-1)}(t_{nj}+0) - x^{(n-1)}(t_{nj}-0)] \end{aligned}$$

二、 广义导数的图解法举例

例 2.4 我们给出一个梯形波

$$x(t) = \begin{cases} E, & |t| < a \\ \text{线性}, & a < |t| < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

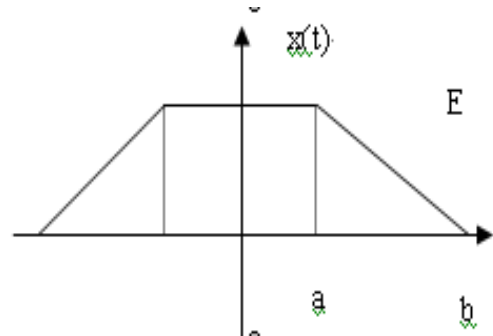


图 2-6-1 梯形波信号

的图解法求频谱的例子，示范如何求折线段信号的频谱。

$x(t)$ 的不连续分段点之集是空集，即 $\{t_{11}, \dots, t_{1s_1}\} = \emptyset$ 。 $x'(t)$ 的不连续间断点为 $t = \pm b, t = \pm a$ 。在实数轴上，均有 $x''(t) \equiv 0$ 。从而由图解法得到

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \delta(t+b) \frac{E}{b-a} - \delta(t+a) \frac{E}{b-a} - \delta(t-a) \frac{E}{b-a} + \delta(t-b) \frac{E}{b-a}$$

又

$$FT\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = (j2\pi f)^2 X(f)$$

从而

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{(j2\pi f)^2} \frac{E}{b-a} [e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa} + e^{-j2\pi fb}] \\ &= \frac{2}{(2\pi f)^2} \frac{E}{b-a} [\cos 2\pi fa - \cos 2\pi fb] \end{aligned}$$

图解法的确很方便，而且不易出错。方法虽好，但作为学习数学的学生，总是觉得缺乏道理，总是希望找到该方法的数学背书，才会舒心。为此，我们的领路人，程乾生先生给出了图解法的数学原理。

三、图解法数学原理

设 $x(t)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有限分段函数且逐段为多项式。于是存在最高次数 n ，在每一段上 $x(t)$ 经过 n 次求导变成 0。虽然在分段点处 $x(t)$ 可能不连续，可能导数不存在，但左、右极限均存在。

为了讨论方便，不妨假设仅有一个分段点 t_0 ，构造两个替代函数

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t) & t < t_0 \\ \sum_{j=0}^n \frac{x^{(j)}(t_0-0)}{j!} (t-t_0)^j & t \geq t_0 \end{cases}$$

和

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t) & t > t_0 \\ \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}(t_0+0)}{i!} (t-t_0)^i & t \leq t_0 \end{cases}$$

再注意

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} g(t) &= u(t_0 - t)x_1(t) + u(t - t_0)x_2(t) \\ &= \begin{cases} x_2(t) = x(t), & t > t_0 \\ x_1(t) = x(t), & t < t_0 \\ \frac{1}{2}x(t_0+0) + \frac{1}{2}x(t_0-0), & t = t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $x_1(t), x_2(t)$ 是无穷次可导的，且 $u(t)$ 也是无穷次广义可导的，从而

$g(t)$ 的广义导数为

$$\begin{aligned} g'(t) &= u'(t_0 - t)x_1(t) + u(t_0 - t)x_1'(t) + u'(t - t_0)x_2(t) + u(t - t_0)x_2'(t) \\ &= -\delta(t_0 - t)x_1(t) + u(t_0 - t)x_1'(t) + \delta(t - t_0)x_2(t) + u(t - t_0)x_2'(t) \end{aligned}$$

注意 $\delta(t)$ 是偶函数即 $\delta(t-t_0)=\delta(t_0-t)$ ，令

$$g_1(t)=u(t_0-t)x_1'(t)+u(t-t_0)x_2'(t)$$

则

$$g_1'(t)=\delta(t-t_0)[x_2(t)-x_1(t)]+g_1(t)=\delta(t-t_0)[x_2(t_0)-x_1(t_0)]+g_1(t)$$

同理可得

$$g_1''(t)=\delta'(t-t_0)[x_2(t_0)-x_1(t_0)]+\delta(t-t_0)[x_2'(t_0)-x_1'(t_0)]+g_2(t)$$

其中

$$g_2(t)=u(t_0-t)x_1''(t)+u(t-t_0)x_2''(t)$$

同理，

$$g_2''(t)=\delta''(t-t_0)[x_2(t_0)-x_1(t_0)]+\delta'(t-t_0)[x_2'(t_0)-x_1'(t_0)] \\ +\delta(t-t_0)[x_2''(t_0)-x_1''(t_0)]+g_3(t)$$

其中

$$g_3(t)=u(t_0-t)x_1'''(t)+u(t-t_0)x_2'''(t)$$

如此下去，直到 n 阶导，则可以归纳出

$$g^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{(n-1-k)}(t-t_0)[x_2^{(k)}(t_0)-x_1^{(k)}(t_0)] \\ =\sum_{k=0}^{n-1}\delta^{(n-1-k)}(t-t_0)[x^{(k)}(t_0+0)-x^{(k)}(t_0-0)]^\circ$$

若 $x(t)$ 的分段点为 t_1, t_2, \dots, t_s ，仿上，我们有相应的公式

$$g^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^s\delta^{(n-1-k)}(t-t_j)[x^{(k)}(t_j+0)-x^{(k)}(t_j-0)]$$

一般地，设 $x(t)$ 的所有不连续的分段点为 $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1s_1}$ ，设 $x'(t)$ 的所有不连续的分段点为 $t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2s_2}$ ，那么多少会有些差异，可能某些 t_{1j} 已经不是 t_{2j} 中的元素了，同时 t_{2j} 中的某些元素在 t_{1j} 中也没有出现过，但这不是本质的，可以忽略。如此下去，我们可得

$$t_{k1}, t_{k1}, \dots, t_{ks_k}, \quad (k = 3, 4, \dots, n),$$

其中 n 是首次使得 $x^{(n)}(t) \equiv 0$ 的正整数。此时，广义导数 $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= \sum_{j=1}^{s_1} \delta^{(n-1)}(t-t_{1j})[x^{(0)}(t_{1j}+0) - x^{(0)}(t_{1j}-0)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s_2} \delta^{(n-2)}(t-t_{2j})[x^{(1)}(t_{2j}+0) - x^{(1)}(t_{2j}-0)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s_n} \delta^{(0)}(t-t_{nj})[x^{(n-1)}(t_{nj}+0) - x^{(n-1)}(t_{nj}-0)] \end{aligned}$$

至此，我们已完全证明了图解法是合乎数学依据的。

注意：本章原本打算增加“FT 透镜”和“线性调频变换”两部分内容，以拓宽学生视野。为了不使该章过大，只好分散在后面章节之中，讲到的时候再补充。

本章小结

本章我们从物理学中对频谱的理解出发，以音乐信号为背景给出了频谱的有物理意义的描述。随后推广到了我们早已熟悉的傅立叶三角级数展开上，也对其给出了有物理意义的解释。接着我们又将复数的 Euler 公式引入，复谐波概念被带入了信号学。虽然复谐波失去了物理意义，但它的出现给数学思维以很大的支持。一种和谐、对称的复的指数形式的傅立叶级数展开，既没有远离物理背景，又增加了数学的活性。因此，复指数形式的傅立叶级数被保留下来，成为数学、

物理学、电子工程等领域里的基本概念。

周期信号的复指数展开与三角级数展开之间的转化是很容易的事，于是周期信号的复的指数展开式的系数唯一地决定了该周期信号，从信号重构的角度来讲，它与具有物理意义的频谱是异曲同工的，因此，我们也将它视为周期信号的频谱。

哲学观点对于科学的发展总是那么重要，对数学也不例外。信号的周期性与非周期性之间的相对关系是我们获得傅立叶正反变换的生长点，如果没有它，即使我们有再好的数学功底，也无法实现从傅立叶级数到傅立叶变换的飞跃。读者在完成傅立叶变换证明过程的同时，别忘了这个最根本的哲学基础。

傅立叶变换虽然对数学学生而言，不过是一种特殊的含参变量的积分，理论上应该不存在问题，但动手计算起来，或许比非数学专业的学生更容易出错。但数学学生也有自己的长处，比如会利用变换的性质进行巧妙地转化，特别是引入狄拉克函数之后，数学学生就更是如鱼得水了。

利用狄拉克函数和傅立叶变换的各种性质，不仅可以实现一些能量无穷的信号的频谱的计算，例如 $u(t)$, $\text{sgn}(t)$, $x(t) \equiv 1$ ，还可以利用图解法方便地计算折线信号（有限分段信号）的频谱。

傅立叶变换的性质从数学上来看并不难，任何一个性质的证明都不会难倒合格的数学学生。但是，这些性质的物理意义及其在实际中的重要作用更值得我们花精力学习，只有把它们搞懂，才能真正进入信号学领域。多年来，我的经验是，数学学生在学习频谱部分时，不

一定能够正确认识到这一点。他们往往一翻教材以为这不过是已知的数学内容，便不跟随讲授内容逐步继续前进，待缺席一周，似乎就有点不对味了，再不就放弃了。所以信号学的学习“不怕慢，只怕站”。

另外，多思考一下就会发现，信号学的学习与纯数学的学习还是有差别的，这里特别注重对所得结果的深入思考和反复咀嚼。例如，利用傅立叶变换的微分性质我们可以导出另一种广义的导数，其定义为

$$(Dx)(t) \stackrel{def}{=} IFT\{j2\pi fX(f)\}, \quad X(f) = FT(x(t))$$

因为傅立叶变换存在的条件比较低，所以很多经典意义下不一定可导的函数，在以傅里叶变换诱导的广义导数意义下导数存在。在后面的习题中，读者可以对照经典导数性质，自己列出该广义导数的性质并给出证明。特别，重新理解经典导数和本章中以两种方式定义出来的广义导数之间的区别和联系。

将一个有限长信号看成周期信号的第一主周期所得的离散谱与看成非周期信号所得的连续谱显然不同，但它们之间却有着十分紧密的联系，以至于不论怎么看都不会产生原则上的差异，这种观点要仔细体会。

傅立叶变换还可以推广到多维的情形，特别地，二维情形的实际应用很广。具体定义如下

设信号 $s(t, x)$ 是关于时间和空间变化的波，那么二维傅立叶变换为

$$S(f, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, x) e^{-j2\pi(ft+kx)} dt dx$$

$S(f, k)$ 称为信号 $s(t, x)$ 的频率波数谱，其反变换公式即重构公式为

$$s(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f, k) e^{j2\pi(ft+kx)} df dk$$

表示信号 $s(t, x)$ 是由频率为 f ，波数为 k 的频率成分 $S(f, k) e^{j2\pi(ft+kx)} df dk$ 叠加而成。其中 f 和 k 又分别被称为视频率和视波数，因此比值 $v = \frac{f}{k}$ 被称为视速度。与一维情形一样，频率波数谱 $S(f, k)$ 的模 $|S(f, k)|$ 被称为幅度谱。计算信号 $s(t, x)$ 的频率波数谱 $S(f, k)$ 和干扰噪声的频波谱，并同时绘制在 $f-k$ 平面上，那么信号区域与噪声区域会显著地被分开，因此为二维滤波提供了很好的准备^①。

另外，数学人与工科人的眼光总是存在差异的。比如数学人往往在于一种普适性的理论成立就心满意足了，而工科人对普适性理论的认识往往不是从逻辑开始，而是从大量的具体个例出发，当积累了很多样本之后，在给他讲理论才会愿意接受，即使是接受，也是以某种直观且可触及的方式接受的。因此，数学人与工科人交流往往感到不在一个频道。所以数学人一定要跨界多理解工科的背景。但是，数学人千万不能骄傲，其实数学的发展不是手续家的专利，工科对数学的贡献因该不比数学家小。有时候可以这么说，数学家只是数学的架构设计师和施工者，奠基者往往是工科人。前面说到的 δ -函数是第一例，本讲义中会多次以实例告诉读者。另外，我们还要再提及一下工科人发现的卷接图解法，它可以保证任何人在任何时候都不会算错离散卷积。例如，计算 x_1, x_2, \dots, x_n 与 y_1, y_2, \dots, y_m 的卷积的图形解释（在黑板上画）。

^①详细内容参阅《地震勘探数学技术》（科学出版社，1974）第二册第三章

习题

1. 从本章所讲的各讲中挑出你认为比较新的概念，并谈谈感受。
2. 若物理信号 $x(t)$ 的频谱存在，记为 $X(f)$ ，考虑截断信号

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad R_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在如下情况下的频谱

- (1) 将截断信号 $x_T(t)$ 视为非周期模拟信号求其频谱 $X_T(f)$;
- (2) 将截断信号 $x_T(t)$ 视为周期为 T 的模拟信号求其频谱 C_n ;

由此讨论各种观点下的频谱的表现形式以及内在规律。

- (3) 将截断信号 $x_T(t)$ 视为 $x_T(t) = x(t)R_T(t)$ ，求其频谱的解析表达式，并由此推出积分变换

$$(KX)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \frac{\sin \pi(f-s)T}{\pi(f-s)} ds$$

的性质，以及巧妙计算某些特殊积分的办法。

3. 分别针对周期信号与非周期信号，给出帕色伐尔定理的表示形式。
4. 给出图解法的实施步骤、数学证明中的辅助函数及其任意阶广义导函数。
5. 证明以下普通函数的广义极限均为 $\delta(t)$

$$(1) \quad g_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) \quad g_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right) & |t| < \lambda \\ 0 & |t| \geq \lambda \end{cases}$$

$$(3) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda(1-e^{-1})} e^{-\frac{|t|}{\lambda}} & |t| < \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4) \quad g_{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda \operatorname{erf}(\sqrt{\pi})} e^{-\pi(\frac{t}{\lambda})^2} & |t| \leq \lambda \\ 0 & |t| > \lambda \end{cases}$$

6. 利用傅立叶正反变换可以导出一种非常广义的导数，其定义为

$$(Dx)(t) \stackrel{\text{def}}{=} IFT\{j2\pi fX(f)\}, \quad X(f) = FT(x(t))$$

因为傅立叶变换存在的要求相当低，所以很多不一定连续的函数也都存在如此定义的广义导数。模仿经典导数，列出该广义导数的至少四条性质。

7. 本章利用广义分部积分定义了广义导数：

称 $g'(t)$ 为广义函数 $g(t)$ 的导函数，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f'(t)dt$,

$f(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$ 。利用 Fourier 变换也导出了一种非常广义的导数：

$$(Dx)(t) \stackrel{\text{def}}{=} IFT\{j2\pi fX(f)\}, \quad X(f) = FT(x(t))$$

这两种广义导数是什么关系？