Содержание

1 Общая топология

В данной главе мы обсудим простейшие понятия топологии необходимые для функционального анализа и теории меры. Из-за специфики топологических пространств, возникающих в функциональном анализе, большое внимание уделяется понятию направленностей и их сходимости.

1.0 Предварительные сведения из теории множеств

Запись $x \in X$ означает, что x является элементом множества X. A называется *подмножеством* в X, если $x \in X$ для любого $x \in A$. В этом случае мы пишем $A \subset X$ (также говорят, что A вложено в X). Два множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subset Y$ и $Y \subset X$. Пустым множеством называется такое (очевидно, единственное) множество $\varnothing$, удовлетворяющее условию $x \notin \varnothing$ для любого x. Описание множества дается в фигурных скобках либо перечислением его элементов, либо указанием свойства по которому отбираются его элементы.

Для семейств множеств мы будем использовать индексное обозначение: A_α, $\alpha \in I$. *Объединением* множеств этого семейства множеств называется множество $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, состоящее из таких x, что найдется такое $\alpha \in I$, что $x \in A_\alpha$. Объединением пустого семейства множеств является пустое множество. *Пересечением* множеств семейства A_α, $\alpha \in I$ называется множество $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$, состоящее из таких x, которые принадлежат A_α для всех $\alpha \in I$. Пересечение пустого семейства множеств не определяется.

Разность двух множеств A и B определяется как $A\backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$. Отметим важные формулы *де Моргана* (для любого множества A и семейства множеств B_α, $\alpha \in I$):

$$A\backslash(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(A\backslash B_\alpha),$$

$$A\backslash(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(A\backslash B_\alpha).$$

Для любых двух объектов x, y можно определить *упорядоченную пару* (x, y). При этом $(x, y) = (a, b)$ тогда и только тогда, когда $x = a$ и $y = b$. *Декартовым произведением* множеств X и Y называется множество $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Отображением или *функцией* из множества X в множество Y называется такое подмножество $f \subset X \times Y$, что для любого $x \in X$ найдется единственный такой $y \in Y$, что $(x, y) \in f$. Этот y также называется *образом* элемента x при отображении f и обозначается через $f(x)$ (в некоторых конкретных случаях используют и другие обозначения, например, при помощи индексов: f_x). Факт того, что f есть отображение из X в Y кратко записывается в виде $f : X \to Y$. Если также задано отображение $g : Y \to Z$, то *композиция* $g \circ f : X \to Z$ определяется правилом $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если $f(x) \neq f(x')$ для любых двух различных $x, x' \in X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Отображение называется *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Биективность равносильна существованию *обратного отображения*, то есть такого $g : Y \to X$, что $g(f(x)) = x$ и $f(g(y)) = y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Обратное отображение к f обозначается через f^{-1}.

Очевидно, что если $X \neq \varnothing$, то отображений из X в $\varnothing$ не существует. С другой стороны для любого Y существует и единственно отображение из $\varnothing$ в Y. Это отображение называется *пустым* (или *пустой функцией*).

Множество A называется *конечным*, если существует биекция между A и $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В этом случае n есть количество элементов в A. A называется *счетным*, если существует биекция между A и $\mathbb{N}$. Любое подмножество счетного множество либо конечно, либо счетно. Декартово произведение двух счетных множеств счетно. Множество называется не более чем счетным, если оно либо конечно, либо счетно.

Пусть заданы множества X, Y и отображение $f : X \to Y$. Для $A \subset X$ определим *образ* множества A как $f(A) = \{y \in Y : y = f(x)$ для некоторого $x \in X\}$. Для $B \subset Y$ определим его *прообраз* как $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Пусть A_α, $\alpha \in I$ - семейство подмножеств множества X. Тогда имеют место следующие утверждения:

$$f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha),$$

$$f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

Пусть теперь задано семейство B_β, $\beta \in J$ подмножеств множества Y. Тогда имеют место равенства:

$$f^{-1}(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcap_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta).$$

Также, если $B, C \subset Y$, то $f^{-1}(B \backslash C) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(C)$.

Если $f : X \to Y$ - отображение и $f(X) \subset A \subset Y$, то f можно рассматривать как отображение из X в A. Это отображение мы будем обозначать той же буквой f. Если задано $A \subset X$, то определим сужение функции f на A посредством формулы $f|_A(x) = f(x)$ для $x \in A$. Таким образом, $f|_A : A \to Y$.

Бинарным отношением на множестве X называется подмножество $\mathcal{R} \subset X \times X$. По традиции вместо $(x, y) \in \mathcal{R}$ пишут $x\mathcal{R}y$. Бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие условия (для любых $x, y, z \in X$):

1. $x\mathcal{R}x$.

2. Если $x\mathcal{R}y$, то $y\mathcal{R}x$.

3. Если $x\mathcal{R}y$ и $y\mathcal{R}z$, то $x\mathcal{R}z$.

Для отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ можно определить *класс эквивалентности* элемента $x \in X$: $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$. Любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Множество всех классов эквивалентности обозначается через $X/\mathcal{R}$ и называется *фактормножеством*. Стандартным обозначением отношения эквивалентности является $\sim$ ($x \sim y$ вместо $x\mathcal{R}y$).

Бинарное отношение $\leqslant$ на множестве X называется *отношением частичного порядка*, если выполнены следующие условия (для всех $x, y, z \in X$):

1. $x \leqslant x$.

2. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

3. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Два элемента $x, y \in X$ называются сравнимыми, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Отношение частичного порядка называется *линейным*, если любые два элемента сравнимы. Множество, снабженное отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным*. Частично упорядоченное множество X называется *направленным*, если для любых двух $x, y \in X$ существует такое $z \in X$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. По индукции легко показать, что для любого конечного набора элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ направленного множества найдется такой элемент $z \in X$, что $x_i \leqslant z$, $i = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что линейно упорядоченное множество является направленным.

Пусть A_α, $\alpha \in I$ - семейство множеств. *Декартовым произведением* множеств этого семейства называется множество таких функций $x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, что $x_\alpha \in A_\alpha$ (по традиции значение на элементе $\alpha \in I$ записывается в индексной форме). Декартово произведение обозначается через $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$. Если каждое $A_\alpha \neq \varnothing$, то $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$. Определим отображение $\pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in I} A_\alpha \to A_{\alpha_0}$ формулой $\pi_{\alpha_0}(x) = x_{\alpha_0}$. Это отображение называется *проекцией* на α_0-ой множитель или α_0-ой *компонентой* элемента x. Очевидно, что x полностью определяется своими компонентами. Если для каждого $\alpha \in I$ задано подмножество $B_\alpha \subset A_\alpha$, то $\prod_{\alpha \in I} B_\alpha$ есть подмножество в $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Пусть X - частично упорядоченное множество. Если $A \subset X$, то на A можно сузить отношение частичного порядка из X. Если $A \subset X$ оказывается линейно упорядоченным, то A называется цепью в X (иначе говоря, $A \subset X$ цепь, если любые два элемента из A сравнимы). Элемент $x \in X$ называется верхней гранью подмножества $A \subset X$, если $x \geqslant a$ для всех $a \in A$. Частично упорядоченное множество X называется индуктивным, если любая цепь в X имеет верхнюю грань. Элемент m частично упорядоченного множества X называется максимальным, если из того, что $m \leqslant x \in X$ следует, что $x = m$.

Теорема 1.0.1 (Лемма Цорна)**.** *Пусть X - индуктивное частично упорядоченное множество, $a \in X$. Тогда найдется такой максимальный элемент $m \in X$, что $a \leqslant m$.*

1.1 Основные понятия

Определение 1.1.1. *Пусть X - некоторое множество. Множество T, состоящее из подмножеств множества X, называется топологией на X, если выполнены следующие условия:*

1. *$\varnothing, X \in T$.*

2. *Если $U, V \in T$, то $U \cap V \in T$.*

3. *Если $U_\alpha \in T$ для $\alpha \in I$, то $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T$.*

Элементы топологии T называются открытыми (в топологии T). Пара (X, T), в которой T является топологией на X называется топологическим пространством.

Сразу обсудим один из самых распространенных способов задания топологии - при помощи метрик.

Определение 1.1.2. *Метрикой на множестве X называется такая функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия для любых $x, y, z \in X$:*

1. *$\rho(x, y) \geqslant 0$.*

2. *$\rho(x, y) = \rho(y, x)$.*

3. *$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

4. *$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.*

Пара (X, ρ), в которой ρ является метрикой на X называется метрическим пространством. Если (X, ρ) - метрическое пространство, то ε-шаром с центром в точке $x \in X$ называется множество $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

В дальнейшем мы будем использовать для обозначения топологических (метрических) пространств только обозначение множества X, опуская явное указание топологии (метрики), если это не приводит к недоразумениям.

Предложение 1.1.1. *Пусть X - метрическое пространство. Определим множество T, состоящее из таких $U \subset X$, что для любого $x \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Тогда T является топологией в X. В этой топологии все ε-шары открыты для $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Очевидно, что $\varnothing, X \in T$. Пусть $U, V \in T$. Если $x \in U \cap V$, то найдутся такие $\varepsilon, \delta > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$, $B_\delta(x) \subset V$. Тогда $B_\gamma(x) \subset U \cap V$, где $\gamma = \min \varepsilon, \delta$. Значит, $U \cap V \in T$. Пусть теперь $U_\alpha \in T$ для $\alpha \in I$. Пусть $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. В таком случае существует такое $\alpha_0 \in I$, что $x \in U_{\alpha_0}$. Так как $U_{\alpha_0} \in T$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$. Значит, $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, откуда следует, что $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T$. Таким образом, T - топология.

Докажем, что $B_\varepsilon(x) \in T$, если $\varepsilon > 0$, $x \in X$. Если $y \in B_\varepsilon(x)$, то положим $\gamma = \varepsilon - \rho(x, y) > 0$. Тогда, очевидно, $B_\gamma(y) \subset B_\varepsilon(x)$. □

Если топология на топологическом пространстве X может быть порождена некоторой метрикой (при помощи конструкции из предложения 1.1.1), то X называется *метризуемым.* В дальнейшем мы увидим, что не все топологические пространства, встречающиеся в приложениях, метризуемы.

В дальнейшем огромную роль будут иметь пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. На них мы вводим топологию при помощи метрики $\rho(x, y) = |x - y|$.

Определение 1.1.3. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества A, если найдется такое открытое $U \subset X$, что $x \in U \subset A$. Множество $\operatorname{int} A$, состоящее из внутренних точек множества A, называется его внутренностью. Если x - внутренняя точка множества A, то A называется окрестностью точки x.*

Очевидно, что из определения следует вложение $\operatorname{int} A \subset A$ для любого $A \subset X$.

Ясно, что в метрическом пространстве X множество $A \subset X$ является окрестностью точки $x \in X$ тогда и только тогда, когда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset A$.

Замечание. *Обычно окрестностью точки x в топологической литературе называется открытое множество, содержащее x. Наше определение более общее. Открытое множество, содержащее точку x, мы будем называть ее открытой окрестностью.*

Предложение 1.1.2. *Пусть X - топологическое пространство.*

1. *Если $A, B \subset X$ - окрестности точки $x \in X$, то $A \cap B$ - тоже окрестность точки x.*
2. *Если $A \subset X$ - окрестность точки x и $A \subset B \subset X$, то B - тоже окрестность точки x.*
3. *Если $A \subset B$, то $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$.*
4. *Для любого $A \subset X$ множество $\operatorname{int} A$ открыто.*
5. *$A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{int} A$.*
6. *Если $U \subset X$ открыто и $U \subset A \subset X$, то $U \subset \operatorname{int} A$.*
7. *Для любых $A, B \subset X$ имеет место равенство $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.*

Доказательство. 1. По условию существуют такие открытые $U, V \subset X$, что $x \in U \subset A$, $x \in V \subset B$. Но тогда $x \in U \cap V \subset A \cap B$, откуда следует, что $A \cap B$ - окрестность точки x, поскольку $U \cap V$ открыто.

2. Найдется такое открытое $U \subset X$, что $x \in U \subset A$. Но тогда $x \in U \subset B$.

3. Это прямое следствие второго пункта.

4. Для каждого $x \in \operatorname{int} A$ найдется такое открытое $U_x \subset X$, что $x \in U_x \subset A$. Тогда, по определению, $U_x \subset \operatorname{int} A$, а значит $\bigcup_{x \in \operatorname{int} A} U_x = \operatorname{int} A$. Таким образом, $\operatorname{int} A$ открыто как объединение открытых множеств.

5. Если $A = \operatorname{int} A$, то A открыто в силу четвертого пункта. Обратно, если A открыто, то по определению все его точки внутренние. Значит, $A \subset \operatorname{int} A$, а обратное вложение очевидно.

6. Если $x \in U$, то по определению x является внутренней точкой множества A, а значит $U \subset \operatorname{int} A$.

7. $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset A \cap B$, а значит, в силу шестого пункта, $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cap B)$. Обратно, $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A$, так как $A \cap B \subset A$. Аналогично, $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} B$.

$\square$

Определение 1.1.4. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$. A называется замкнутым, если $X \backslash A$ открыто.*

Предложение 1.1.3. *Пусть X - топологическое пространство. Тогда*

1. *Множества $\varnothing, X$ замкнуты.*

2. *Если $F, G \subset X$ замкнуты, то $F \cup G$ замкнуто.*

3. *Если F_α замкнуто для любого $\alpha \in I$, то $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ замкнуто.*

4. *Если $U \subset X$ открыто, а $F \subset X$ замкнуто, то $U \backslash F$ открыто, а $F \backslash U$ замкнуто.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, а второе и третье доказываются посредством применения формул де Моргана к аксиомам открытых множеств (в определении 1.1.1). Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что $F \backslash U = F \cap (X \backslash U)$ и $U \backslash F = U \cap (X \backslash F)$. $\square$

Определение 1.1.5. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$. Замыканием множества A называется множество*

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F \subset X, F - \text{замкнуто}} F,$$

то есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Очевидно, по определению $A \subset \overline{A}$ для любого подмножества A в топологическом пространстве.

Предложение 1.1.4. *Пусть X - топологическое пространство.*

1. *Для любого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ замкнуто.*

2. *Если $A \subset F \subset X$ и F замкнуто, то $\overline{A} \subset F$.*

3. *Пусть $A \subset X$, $x \in X$. $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда любая окрестность точки x пересекается с A.*

4. *Если $A \subset X$, то $X \backslash \overline{A} = \operatorname{int}(X \backslash A)$.*

5. *Для любых $A, B \subset X$ выполнено равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Доказательство. 1. Это следует из того, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

2. Если $A \subset F \subset X$, где F замкнуто, то F принадлежит семейству замкнутых множеств, содержащих A. Но по определению замыкания отсюда следует, что $\overline{A} \subset F$.

3. Пусть у x есть окрестность N, которая не пересекается с A. Тогда найдется такое открытое $U \subset X$, что $x \in U \subset N$. Но тогда $A \cap U = \varnothing$, что влечет $A \subset X \backslash U$. Из второго пункта следует, что $\overline{A} \subset X \backslash U$. Значит, $x \notin \overline{A}$, поскольку $x \in U$.

   Обратно, пусть $x \notin \overline{A}$. Тогда $x \in X \backslash \overline{A}$. Множество $N = X \backslash \overline{A}$ открыто и не пересекает A, а значит у x есть окрестность не пересекающая A.

4. Если $x \in \operatorname{int}(X \backslash A)$, то $N = X \backslash A$ - окрестность точки x не пересекающая A, а значит $x \notin \overline{A}$ по третьему пункту.

   Обратно, пусть $x \notin \overline{A}$. Тогда найдется окрестность N точки x не пересекающая A. Но тогда $x \in N \subset X \backslash A$. Значит, $x \in \operatorname{int}(X \backslash A)$.

5. Это доказывается из седьмого пункта предложения 1.1.2 посредством применения формул де Моргана.

□

Определим теперь понятие сходимости на топологических пространствах. Оказывается, что для полного описания топологии через сходимость недостаточно использовать последовательности. В связи с этим нам потребуется обобщение понятия последовательности, в котором индексы пробегают не обязательно множество $\mathbb{N}$, а произвольное направленное множество.

Определение 1.1.6. *Пусть Λ - направленное множество. Направленностью элементов множества X называется функция $\alpha \to x_\alpha$ из Λ в X (по традиции для значения функции на элементе α используется индексная запись). Последовательностью называется направленность в частном случае $\Lambda = \mathbb{N}$. Пусть X - топологическое пространство, $x_\alpha \in X$ - направленность $(\alpha \in \Lambda)$, $x \in X$. x называется пределом направленности x_α (или, иначе говоря, направленность x_α сходится к x), если для любой окрестности $N \subset X$ точки x найдется такой индекс $\alpha_0 \in \Lambda$, что $x_\alpha \in N$ для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$.*

Для краткой записи сходимости направленности x_α к точке x используем следующие обозначения: $x = \lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha$ или $x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \Lambda]{} x$. Мы будем опускать указание принадлежности индексов множеству Λ, если это не вызовет недоразумений.

Предложение 1.1.5. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$. Точка $x \in X$ принадлежит $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда найдется такая направленность x_α элементов множества A, сходящаяся к x.*

Доказательство. Пусть x - предел направленности $x_\alpha \in A$. Тогда в любой окрестности точки x будут присутствовать элементы этой направленности, а значит $x \in \overline{A}$ в силу третьего пункта предложения 1.1.4.

Обратно, пусть $x \in \overline{A}$. Определим множество Λ, состоящее из всех окрестностей точки x. Зададим следующее отношение частичного порядка на Λ: $N \leqslant M$ тогда и только тогда, когда $M \subset N$. Легко видеть, что это направленное множество, поскольку для любых $M, N \in \Lambda$ имеется $L = M \cap N \in \Lambda$, причем $M \leqslant L$ и $N \leqslant L$. Для любого $N \in \Lambda$ выберем $x_N \in N \cap A$ (это возможно так как $N \cap A \neq \varnothing$). Направленность x_N состоит из элементов множества A и сходится к точке x, поскольку $x_M \in N$ при $M \geqslant N$. $\square$

Теперь мы введем понятие, которое позволит работать с топологическим пространством с помощью последовательностей.

Определение 1.1.7. *Пусть X - топологическое пространство, $x \in X$. Семейство множеств $\{N_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ называется базисом окрестностей точки x, если N_α - окрестность точки x для любого $\alpha \in I$, и для любой окрестности $N \subset X$ точки x найдется такое $\alpha_0 \in I$, что $N_{\alpha_0} \subset N$. Будем говорить, что топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, если у любой его точки существует не более чем счетный базис окрестностей.*

Очевидно, что совокупность всех открытых окрестностей точки x образует базис. Другой пример базиса окрестностей возникает в случае метрического пространства X: базисом окрестностей точки x служит множество $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, метрические пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Предложение 1.1.6. *Пусть $x_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$ - направленность. Предположим, что эта направленность монотонно неубывает (то есть $x_\alpha \leqslant x_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$) и ограничена сверху. Тогда она сходится к $C = \sup_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой индекс $\alpha_0 \in \Lambda$, что $x_{\alpha_0} > C - \varepsilon$. Тогда для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ выполнены неравенства $C - \varepsilon < x_\alpha \leqslant C$. Отсюда следует, что $x_\alpha \in B_\varepsilon(C)$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Это влечет сходимость направленности к C, поскольку ε-шары образуют базис окрестностей точки C. $\square$

Легко видеть, что условия из третьего пункта предложения 1.1.4 и из определения 1.1.6 достаточно проверять не для всех окрестностей, а для некоторого базиса.

Лемма 1.1.1. *Пусть X - топологическое пространство, $x \in X$. Пусть у точки x существует не более чем счетный базис окрестностей. Тогда найдется последовательность $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ окрестностей точки x, образующая базис окрестностей этой точки.*

Доказательство. Предположим, что у точки x есть счетный базис $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$. Определим тогда $N_n = \bigcap_{k=1}^{n} M_k$. Пусть теперь у точки x имеется конечный базис $M_1, \dots, M_m$. Определим $N_n = \bigcap_{k=1}^{n} M_k$ для $n \leqslant m$ и $N_n = N_m$ при $n \geqslant m$.

В обоих случаях последовательность N_n удовлетворяет всем необходимым условиям. □

Предложение 1.1.7. *Пусть X - топологическое пространство, удовлетворящее первой аксиоме счетности, $A \subset X$. Точка $x \in X$ принадлежит $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность x_n элементов множества A, сходящаяся к x.*

Доказательство. Пусть $x \in \overline{A}$, а $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ - базис окрестностей точки x. Определим последовательность правилом $x_n \in A \cap N_n$. Тогда $x_n \in A$ и $x_n \to x$. Обратное уже доказано в предложении 1.1.5. □

Определение 1.1.8. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - отображение. f называется непрерывным в точке $x \in X$, если для любой окрестности $N \subset Y$ точки $f(x)$ найдется такая окрестность $M \subset X$ точки X, что $f(M) \subset N$.*

Замечание. *Разумеется, достаточно проверять условие из определения 1.1.8 не для всех окрестностей точки $f(x)$, а для некоторого базиса.*

Предложение 1.1.8. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - отображение, $x \in X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f непрерывно в точке x.*

2. *Для любой окрестности $N \subset Y$ точки $f(x)$ прообраз $f^{-1}(N)$ есть окрестность точки x.*

3. *Для любой направленности $x_\alpha \in X$, сходящейся к точке x, направленность $f(x_\alpha) \in Y$ сходится к $f(x)$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $N \subset Y$ - окрестность точки $f(x)$. По условию найдется такая окрестность $M \subset X$ точки x, что $f(M) \subset N$. Но тогда $M \subset f^{-1}(N)$, откуда следует, что $f^{-1}(N)$ - окрестность точки x.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $x_\alpha \to x$, а $N \subset Y$ - окрестность точки $f(x)$. По условию $f^{-1}(N)$ - окрестность точки x, а значит найдется такой индекс α_0, что $x_\alpha \in f^{-1}(N)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Значит, $f(x_\alpha) \in N$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Отсюда следует, что $f(x_\alpha) \to f(x)$.

$3 \Rightarrow 1$. Предположим противное. Это означает, что найдется такая окрестность $N \subset Y$ точки $f(x)$, что $f(M) \not\subset N$ для любой окрестности $M \subset X$ точки x. Рассмотрим множество Λ, состоящее из всех окрестностей точки x. Если $M_1, M_2 \in \Lambda$, то определим $M_1 \leqslant M_2$ тогда и только тогда $M_2 \subset M_1$. Таким образом, Λ - направленное множество (см. доказательство предложения 1.1.5). Для $M \in \Lambda$ выберем такой $x_M \in M$, что $f(x_M) \notin N$. Тогда $x_M \to x$, но $f(x_M) \nrightarrow f(x)$. Таким образом, мы пришли к противоречию. □

Предложение 1.1.9. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - отображение, $x \in X$. Если у точки x существует не более чем счетный базис окрестностей, а $f(x_n)$ сходится к $f(x)$ для любой последовательности x_n сходящейся к x, то f непрерывно в точке x.*

Доказательство. Выберем базис окрестностей точки x вида $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$. Предположим, что f не является непрерывной в точке x. Это означает, что найдется такая окрестность $M \subset Y$ точки $f(x)$, что $f(N_n) \not\subset M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $x_n \in N_n$ - такой элемент, что $f(x_n) \notin M$. Получаем, что $x_n \to x$, а $f(x_n) \nrightarrow f(x)$. Мы пришли к противоречию. $\square$

Предложение 1.1.10. *Пусть X, Y, Z - топологические пространства, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ - отображения. Если f непрерывно в точке $x \in X$, а g непрерывно в точке $f(x) \in Y$, то $g \circ f : X \to Z$ непрерывно в точке x.*

Доказательство. Проверим, что $(g \circ f)^{-1}(N) \subset X$ - окрестность точки x для любой окрестности $N \subset Z$ точки $g(f(x))$. По условию g непрерывно в точке $f(x)$, а значит $g^{-1}(N)$ - окрестность точки $f(x)$. Далее $f^{-1}(g^{-1}(N))$ - окрестность точки x, так как f непрерывно в точке x. Остается заметить, что $(g \circ f)^{-1}(N) = f^{-1}(g^{-1}(N))$. $\square$

Отображение $f : X \to Y$ между топологическими пространствами называется *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках $x \in X$.

Теорема 1.1.1. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - отображение. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f непрерывно.*
2. *$f^{-1}(U) \subset X$ открыто для любого открытого $U \subset Y$.*
3. *$f^{-1}(F) \subset X$ замкнуто для любого замкнутого $F \subset Y$.*
4. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset X$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $U \subset Y$ открыто. Тогда U есть окрестность всех своих точек. Тогда для любого $x \in f^{-1}(U)$ множество U есть окрестность точки $f(x)$, а значит $f^{-1}(U)$ есть окрестность точки x согласно предложению 1.1.8 (так как f непрерывно в точке x). Значит, $f^{-1}(U)$ есть окрестность всех своих точек. Таким образом, $f^{-1}(U) = \operatorname{int} f^{-1}(U)$, откуда следует открытость $f^{-1}(U)$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $F \subset Y$ замкнуто. Тогда $f^{-1}(Y \backslash F)$ открыто. Далее, $f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F)$, а значит $f^{-1}(F)$ замкнуто.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть $A \subset X$. Тогда $A \subset f^{-1}(\overline{A})$. В силу замкнутости $f^{-1}(\overline{A})$ имеет место вложение $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{A})$. Значит, $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$.

$4 \Rightarrow 1$. Пусть f не является непрерывной в некоторой точке $x \in X$. Значит, найдется такая окрестность $N \subset Y$ точки $f(x)$, что $f^{-1}(N)$ не является окрестностью точки x. Из предложения 1.1.4 следует, что раз $x \notin \operatorname{int} f^{-1}(N)$, то $x \in \overline{X \backslash f^{-1}(N)}$. По условию $f\left(\overline{X \backslash f^{-1}(N)}\right) \subset$

$\overline{f(X\backslash f^{-1}(N))}$. Значит, $f(x) \in \overline{f(X\backslash f^{-1}(N))}$. Но с другой стороны, $f(x) \in \operatorname{int} N$, что означает, что $f(x) \notin \overline{Y\backslash N}$. Остается заметить, что $f(X\backslash f^{-1}(N)) \subset Y\backslash N$. Мы пришли к противоречию. $\square$

Определение 1.1.9. *Отображение $f : X \to Y$ между топологическими пространствами называется гомеоморфизмом, если f биективно и f, f^{-1} непрерывны.*

Определение 1.1.10. *Пусть X - множество, а T_1, T_2 - две топологии на X. Будем говорить, что T_1 слабее, чем T_2, если $T_1 \to T_2$.*

Предложение 1.1.11. *Пусть X - множество, а T_1, T_2 - две топологии на X. Пусть* id *обозначает тождественное отображение X в себя (*$\mathrm{id}(x) = x$*). Топология T_1 слабее, чем T_2 тогда и только тогда, когда* id *непрерывно как отображение из (X, T_2) в (X, T_1). Эти две топологии совпадают тогда и только тогда, когда* id *- гомеоморфизм между пространствами (X, T_2) и (X, T_1).*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 1.1.1. $\square$

Следствие. *Пусть X - множество, а T_1, T_2 - две топологии на X. Эти две топологии совпадают тогда и только тогда, когда они задают одинаковую сходимость направленностей. А именно, когда сходимость произвольной направленности $x_\alpha \in X$ к точке x в топологии T_1 равносильна сходимости этой направленности к x в топологии T_2.*

Определение 1.1.11. *Пусть X - топологическое пространство с топологией T, $A \subset X$. Топологией на A индуцированной из X называется топология $T|_A = \{U \cap A : U \in T\}$. Иначе говоря, множество открыто в A индуцированной топологии, если оно представимо в виде пересечения A с открытым подмножеством в X. Подмножество A топологического пространства X, наделенное индуцированной из X топологией, называется подпространством пространства X.*

Мы оставляем читателю проверку корректности определения 1.1.11 (а именно проверку того, что $T|_A$ действительно является топологией).

Предложение 1.1.12. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$ - подпространство.*

1. *Множество $F \subset A$ замкнуто тогда и только тогда, когда найдется такое замкнутое $F' \subset X$, что $F = A \cap F'$.*

2. *Пусть $x \in A$. Множество $N \subset A$ является окрестностью точки x в A тогда и только тогда, когда найдется такая окрестность $N' \subset X$ точки x в пространстве X, что $N = A \cap N'$.*

3. *Пусть $i : A \to X$ - отображение, заданное формулой $i(x) = x$ (отображение вложения). Тогда i непрерывно.*

4. *Пусть $x_\alpha \in A$ - направленность, $x \in A$. Направленность x_α сходится к x в пространстве A тогда и только тогда, когда она сходится к x в пространстве X.*

5. *Пусть Y - топологическое пространство, а $f : Y \to X$ - такое отображение, что $f(Y) \subset A$. Если f непрерывно в точке $y \in Y$, то f непрерывно в точке y как отображение из Y в A.*

6. *Пусть Y - топологическое пространство, $f : X \to Y$ - отображение, непрерывное в точке $x \in A$. Тогда $f|_A : A \to Y$ непрерывно в точке x.*

7. *Пусть $B \subset A$. Тогда топология на B индуцированная из X совпадает с топологией индуцированной из A.*

Доказательство.

1. Если $F \subset A$ замкнуто, то найдется такое открытое $U \subset X$, что $A \backslash F = U \cap A$. Отсюда следует, что $F = A \cap (X \backslash U)$. Значит, в качестве F' можно взять $X \backslash U$. Обратно, если $F = A \cap F'$, то $A \backslash F = A \cap (X \backslash F')$. Значит, если $F' \subset X$ замкнуто, то $A \backslash F$ открыто в A.

2. Пусть N - окрестность точки x в A. Тогда найдется такое открытое подмножество $U \subset A$, что $x \in U \subset N$. Далее найдется такое открытое $U' \subset X$, что $U = A \cap U'$. Положим, $N' = N \cup U'$. Это множество удовлетворяет необходимым условиям. Обратно, если $N = N' \cap A$, где $N' \subset X$ - окрестность точки x, то рассмотрим такое открытое множество $U \subset X$, что $x \in U \subset N'$. Значит, $x \in A \cap U \subset N$. Значит, N - окрестность точки x в A.

3. Действительно, $i^{-1}(U) = U \cap A$ для любого $U \subset X$. Значит, по определению, прообраз открытого множества открыт.

4. Пусть $x_\alpha \to x$ в пространстве A. Тогда, если $N \subset X$ - окрестность точки x, то найдется такой индекс α_0, что $x_\alpha \in A \cap N$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ (поскольку $N \cap A$ - окрестность точки x в A). Значит, $x_\alpha \to x$ в пространстве x. Обратно, пусть $x_\alpha \to x$ в пространстве X. Если $N \subset A$ - окрестность точки x, то $N = A \cap N'$, где $N' \subset X$ - окрестность точки x. Существует такой индекс α_0, что $x_\alpha \in N'$ для $\alpha \geqslant \alpha_0$. Но тогда $x_\alpha \in N$, так как по условию $x_\alpha \in A$. Значит, $x_\alpha \to x$ в пространстве A.

5. Пусть $N \subset A$ - окрестность точки $f(y)$. Тогда $N = N' \cap A$, где $N' \subset X$ - окрестность точки $f(y)$. По условию $f^{-1}(N')$ - окрестность точки y. Однако, поскольку $f(Y) \subset A$, имеет место равенство $f^{-1}(N) = f^{-1}(N')$. Значит, f непрерывно в точке y как отображение из Y в A.

6. Пусть $N \subset Y$ - окрестность точки $f(x)$. Тогда $f|_A^{-1}(N) = A \cap f^{-1}(N)$ - окрестность точки x в A.

7. Это можно доказать при помощи рассмотрения направленностей и следствия из предложения 1.1.11.

$\square$

1.2 Базы и декартовы произведения

В этом параграфе мы обсудим один способ построения топологии на множестве и применим его для того, чтобы наделить декартово произведение топологических пространств некоторой топологией.

Определение 1.2.1. *Пусть X - множество, $\mathcal{B}$ - семейство подмножеств в X. $\mathcal{B}$ называется базой топологии на X, если выполнены следующие условия:*

1. $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

2. *Для любых $U, V \in \mathcal{B}$ и точки $x \in U \cap V$ найдется такое $W \in \mathcal{B}$, что $x \in W \subset U \cap V$.*

Замечание. *Вторая аксиома из определения 1.2.1 автоматически выполнена, если $\mathcal{B}$ замкнуто относительно пересечений (то есть $U \cap V \in \mathcal{B}$, если $U, V \in \mathcal{B}$).*

Если $\mathcal{B}$ - база топологии на X, то введем обозначение $T_{\mathcal{B}}$ для множества всевозможных объединений элементов $\mathcal{B}$. Очевидно, что $\mathcal{B} \subset T_{\mathcal{B}}$.

Предложение 1.2.1. *Пусть X - множество, а $\mathcal{B}$ - база топологии на X. Тогда $T_{\mathcal{B}}$ - топология на X.*

Доказательство. Очевидно, что объединение элементов из $T_{\mathcal{B}}$ снова принадлежит $T_{\mathcal{B}}$. Также $\varnothing \in T_{\mathcal{B}}$, так как $\varnothing$ есть объединение пустого семейства элементов из $\mathcal{B}$. $X \in T_{\mathcal{B}}$ из-за первой аксиомы в определении 1.2.1. Остается проверить, что пересечение двух элементов из $T_{\mathcal{B}}$ принадлежит $T_{\mathcal{B}}$.

Сначала проверим, что если $U, V \in \mathcal{B}$, то $U \cap V \in T_{\mathcal{B}}$. Действительно, если $x \in U \cap V$, то найдется такое $W_x \in \mathcal{B}$, что $x \in W_x \subset U \cap V$. Легко видеть, что $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x$.

Теперь пусть $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, $V = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$, где $U_\alpha, V_\beta \in \mathcal{B}$ для всех $\alpha \in I$ и $\beta \in J$. Тогда $U \cap V = \bigcup_{\alpha \in I, \beta \in J} (U_\alpha \cap V_\beta)$. Значит, $U \cap V$ есть объединение элементов $T_{\mathcal{B}}$, а значит само принадлежит $T_{\mathcal{B}}$. □

Если $\mathcal{B}$ - база топологии на X, то $T_{\mathcal{B}}$ называется *топологией, порожденной базой $\mathcal{B}$.*

Предложение 1.2.2. *Пусть X - топологическое пространство с топологией T, а $\mathcal{B}$ - база топологии на X. Топология $T_{\mathcal{B}}$ совпадает с T тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *Все элементы $\mathcal{B}$ открыты в топологии T (иначе говоря, $\mathcal{B} \subset T$).*

2. *Для любого $x \in X$ и такого открытого (в топологии T) $U \subset X$, что $x \in U$, найдется такое $V \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset U$.*

Доказательство. Пусть $T = T_{\mathcal{B}}$. Тогда $\mathcal{B} \subset T_{\mathcal{B}} = T$, а значит первое условие выполнено. Пусть теперь $x \in U$, где $U \subset X$ - открыто. U можно представить в виде объединения $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ элементов из $\mathcal{B}$, так как $U \in T = T_{\mathcal{B}}$. Поскольку $x \in U$, x лежит в одном из множеств U_α. Это доказывает второе условие.

Пусть теперь выполнены вышеописанные два условия. Раз $\mathcal{B} \subset T$, то и $T_{\mathcal{B}} \subset T$, поскольку любой элемент из $T_{\mathcal{B}}$ представим в виде объединения элементов из $\mathcal{B}$, а значит равен объединению открытых множеств (то есть открыт). Пусть теперь $U \subset X$ открыто. Тогда для любого $x \in U$ найдется такое $V_x \in \mathcal{B}$, что $x \in V_x \subset U$. Отсюда следует, что $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, а значит $U \in T_{\mathcal{B}}$. Значит, $T \subset T_{\mathcal{B}}$. Этим доказано равенство $T = T_{\mathcal{B}}$. □

Предложение 1.2.3. *Пусть X - метрическое пространство. Определим множество $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$. Тогда $\mathcal{B}$ - база топологии на X, и топология $T_{\mathcal{B}}$ совпадает с топологией, порожденной метрикой.*

Доказательство. Проверим, что $\mathcal{B}$ является базой. Пусть $x \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Определим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x, x_1), \varepsilon_2 - \rho(x, x_2)\}$. Тогда, очевидно, $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$.

Проверка совпадения топологий есть прямое применение предложения 1.2.2 с учетом определения топологии на метрическом пространстве и предложения 1.1.1. □

Следствие. *В метрическом пространстве любое открытое множество можно представить в виде объединения некоторого семейства ε-шаров.*

Предложение 1.2.4. *Пусть X - множество, $\mathcal{B}$ - база топологии на X, $A \subset X$. Тогда $\mathcal{B}|_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{B}\}$ - база топологии на A. Наделим X топологией $T_{\mathcal{B}}$. Тогда топология на A индуцированная из X совпадает с $T_{\mathcal{B}|_A}$.*

Доказательство. Это утверждение доказывается прямой проверкой. □

Следствие. *Пусть X - метрическое пространство, $A \subset X$. Топология на A, заданная метрикой $\rho|_{A \times A}$, совпадает с топологией индуцированной из X. Таким образом, подпространство метризуемого пространства метризуемо.*

Доказательство. Это доказывается применением предложений 1.2.3 и 1.2.4 с учетом того, что ε-шаром с центром в точке $x \in A$ в пространстве A будет пересечение ε-шара в пространстве X с A. □

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathcal{B}$ - база топологии на X, $x \in X$. Тогда множество $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ - базис окрестностей точки x в топологии $T_{\mathcal{B}}$.*

Доказательство. Действительно, если $N \subset X$ - окрестность точки x, то найдется такое открытое $U \subset X$, что $x \in U \subset N$. Далее из предложения 1.2.2 следует, что найдется такое $V \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset U$. Таким образом, доказано, что для любой окрестности N точки x найдется такое $V \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset N$. □

Определение 1.2.2. *Пусть X_m, $m \in I$ - семейство топологических пространств. Определим базу топологии $\mathcal{B}$ на $\prod_{m \in I} X_m$, состоящую из множеств вида $\prod_{m \in I} U_m$, где $U_m \subset X_m$ открыто для всех $m \in I$, и для всех индексов $m \in I$, кроме конечного числа, $U_m = X_m$. Топология, порожденная этой базой называется топологией декартова произведения.*

Проверка того, что множество $\mathcal{B}$ из определения 1.2.2 действительно является базой топологии тривиальна, так как $\mathcal{B}$ замкнуто относительно пересечений.

Замечание. *Если множителей конечное число $X_1, \dots, X_n$, то база топологии декартова произведения на $X_1 \times \dots \times X_n$ имеет вид*

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n : U_k \subset X_k \text{ открыто, } k = 1, \dots, n\}.$$

Предложение 1.2.5. *Пусть X_m, $m \in I$ - семейство топологических пространств, а $X = \prod_{m \in I} X_m$ наделено топологией декартова произведения.*

1. *$\pi_{m_0} : X \to X_{m_0}$ непрерывно для любого $m_0 \in I$,*
2. *Направленность $x_\alpha \in X$ сходится к $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\pi_m(x_\alpha) \to \pi_m(x)$ для всех $m \in I$.*
3. *Пусть Y - топологическое пространство, а $f_m : Y \to X_m$, $m \in I$ - семейство отображений. Пусть $f : Y \to X$ - отображение, m-ой компонентной которого является f_m для всех $m \in I$. Если f_m непрерывны в точке $y \in Y$ для всех $m \in I$, то f тоже непрерывно в точке y.*
4. *Пусть $A_m \subset X_m$, $m \in I$. Тогда $\overline{\prod_{m \in I} A_m} = \prod_{m \in I} \overline{A_m}$.*
5. *Пусть $A_m \subset X_m$, $m \in I$ - подпространство. Тогда топология декартова произведения на $A = \prod_{m \in I} A_m$ совпадает с топологией, индуцированной из X.*

Доказательство. 1. Пусть $U_{m_0} \subset X_{m_0}$ открыто. Обозначим также $U_m = X_m$, если $m \neq m_0$. Очевидно, что $\pi_{m_0}^{-1}(U_{m_0}) = \prod_{m \in I} U_m$. Последнее множество открыто в X так как является элементом базы топологии. Значит, π_{m_0} непрерывно по теореме 1.1.1.

2. Пусть $x_\alpha \in X$, $\alpha \in \Lambda$ - направленность, $x \in X$. Если $x_\alpha \to x$, то из непрерывности π_m следует сходимость $\pi_m(x_\alpha) \to \pi_m(x)$ для всех $m \in I$. Обратно, пусть для всех $m \in I$ имеет место сходимость $\pi_m(x_\alpha) \to \pi_m(x)$. Рассмотрим элемент базы топологии $U = \prod_{m \in I} U_m$, содержащий точку x. Пусть $m_1, \dots, m_n \in I$ - все те индексы, для которых не выполняется равенство $U_m = X_m$. Для $k = 1, \dots, n$ найдутся такие $\alpha_k \in \Lambda$, что $\pi_{m_k}(x_\alpha) \in U_{m_k}$ при $\alpha \geqslant \alpha_k$. Пусть $\alpha_0 \in \Lambda$ - такой элемент, что $\alpha_0 \geqslant \alpha_k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Тогда, как нетрудно понять, $\pi_m(x_\alpha) \in U_m$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $m \in I$. Отсюда следует, что $x_\alpha \in U$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тем самым доказана сходимость $x_\alpha \to x$, так как элементы базы, содержащие точку x, образуют базис окрестностей точки x (лемма 1.2.1).

3. Пусть $y_\alpha \in Y$ - направленность, сходящаяся к точке y. Тогда $f_m(y_\alpha) \to f_m(y)$ для всех $m \in I$. Пользуясь равенством $f_m = \pi_m \circ f$, получаем, что для всех $m \in I$ имеет место сходимость $\pi_m(f(y_\alpha)) \to \pi_m(f(y))$. Из второго пункта следует, что $f(y_\alpha) \to f(y)$. Это доказывает непрерывность f в точке y в силу предложения 1.1.8.

4. Определим для каждого $m \in I$ множество $F_m = \pi_m^{-1}(\overline{A_m})$. Это множество замкнуто в X. Далее, очевидно, что $\prod_{m\in I}\overline{A_m} = \bigcap_{m\in I} F_m$. Отсюда следует замкнутость множества $\prod_{m\in I}\overline{A_m}$. Из предложения 1.1.4 следует, что $\overline{\prod_{m\in I} A_m} \subset \prod_{m\in I}\overline{A_m}$. Докажем теперь обратное вложение. Рассмотрим $x \in \prod_{m\in I}\overline{A_m}$ и докажем, что любая окрестность точки x пересекает множество $\prod_{m\in I} A_m$. Достаточно доказать это для некоторого базиса окрестностей, а поэтому, благодаря лемме 1.2.1, достаточно рассмотреть окрестности, являющиеся элементами базы. Пусть $U = \prod_{m\in I} U_m$ - элемент базы, содержащий точку x. Тогда $U_m \cap A_m \neq \varnothing$, так как U_m - окрестность точки $\pi_m(x) \in \overline{A_m}$. Пусть $y_m \in U_m \cap A_m$ - произвольный элемент, а $y \in X$ - элемент, компоненты которого равны y_m ($\pi_m(y) = y_m$). Тогда $y \in U \cap \prod_{m\in I} A_m$.

5. Это следует из предложения 1.2.4 и рассмотрения баз топологии в A и X (элементы базы в A в точности представляют из себя пересечения элементов базы в X с A).

$\square$

Предложение 1.2.6. *Пусть X, Y - пара метрических пространств с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Определим следующие метрики на множестве $X \times Y$:*

1. $\rho_1((x,y),(x',y')) = \rho_X(x,x') + \rho_Y(y,y')$.

2. $\rho_2((x,y),(x',y')) = \max \rho_X(x,x'), \rho_Y(y,y')$.

3. $\rho_3((x,y),(x',y')) = \sqrt{\rho_X^2(x,x') + \rho_Y^2(y,y')}$.

Каждая из перечисленных метрик задает на $X\times Y$ топологию декартова произведения. Таким образом, декартово произведение пары метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. Это утверждение тривиально доказывается применением предложения 1.2.2.

$\square$

Далее мы докажем, что арифметические операции с непрерывными комплексно- и вещественнозначными функциями приводит также к непрерывным функциям. Для этого мы воспользуемся следующей тривиальной леммой (доказательство которой оставляется читателю).

Лемма 1.2.2. *Следующие отображения непрерывны:*

1. $\alpha : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha(x,y) = x + y$.

2. $\mu : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mu(x,y) = xy$.

3. $\theta : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\theta(z) = 1/z$.

4. $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\xi(z) = \overline{z}$.

5. $\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\nu(z) = |z|$.

6. $\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7. $\min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Предложение 1.2.7. *Пусть X - топологическое пространство, $x \in X$.*

1. *Если $f, g : X \to \mathbb{C}$ - две непрерывные в точке x функции, то $f + g$ и fg тоже непрерывны в точке x.*

2. *Если $f : X \to \mathbb{C}$ - непрерывная в точке x функция, то $|f|, \overline{f}$ тоже непрерывны.*

3. *Если $f, g : X \to \mathbb{R}$ - две непрерывные в точке x функции, то $\max f, g$, $\min f, g$ тоже непрерывны в точке x.*

4. *Если $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ - непрерывная в точке x функция, то $1/f$ тоже непрерывна в точке x.*

Доказательство. Докажем это утверждение, например, для функции $f + g$. Рассмотрим отображение $h = (f, g) : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Согласно предложению 1.2.5 это отображение непрерывно в точке x. Рассматривая композицию этого отображения с отображением α из леммы 1.2.2 получаем непрерывность в точке y функции $f + g = \alpha \circ h$. Все остальные утверждения доказываются аналогично (или даже проще). □

1.3 Отделимость

Определение 1.3.1. *Топологическое пространство X называется T_1-пространством, если для любой пары различных точек $x, y \in X$ найдется такая окрестность $N \subset X$ точки x, что $y \notin N$.*

Предложение 1.3.1. *Топологическое пространство X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества в X замкнуты.*

Доказательство. Пусть X является T_1-пространством, а $x \in X$. Если $y \neq x$, то найдется такая окрестность $N \subset X$ точки y, что $x \notin Y$. Это означает, что $y \in N \subset X\backslash\{x\}$. Значит, $X\backslash\{x\}$ является окрестностью точки $y \neq x$. Это доказывает открытость $X\backslash\{x\}$, а значит и замкнутость $\{x\}$.

Обратно, пусть $\{x\} \subset X$ замкнуто для всех $x \in X$. Тогда, если $x, y \in X$ - пара различных точек, то $N = X\backslash\{y\}$ - окрестность точки x, не содержащая y. □

Следствие. *Декартово произведение семейства T_1-пространств само является T_1-пространством.*

Доказательство. Пусть X_m, $m \in I$ - семейство T_1-пространств, $x \in \prod_{m \in I} X_m$. Тогда $\{x\} = \prod_{m \in I}\{\pi_m(x)\}$. По условию множество $\{\pi_m(x)\} \subset X_m$ замкнуто, а из предложения 1.2.5 следует, что произведение замкнутых подмножеств замкнуто. Таким образом, множество $\{x\}$ замкнуто. □

Следствие. *Подпространство T_1-пространства само является T_1-пространство.*

Доказательство. Действительно, если $x \in A \subset X$, где X - T_1-пространство, то $\{x\} = \{x\} \cap A \subset A$ - замкнутое подмножество в силу предложения 1.1.12. □

Определение 1.3.2. *Пусть X - топологическое пространство. Оно называется хаусдорфовым или T_2-пространством, если для любой пары различных точек $x, y \in X$ найдутся такие окрестности M, N точек x, y соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*

Предложение 1.3.2. *Пусть X - топологическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *X хаусдорфово.*

2. *У любой направленности в X существует не более одного предела.*

3. $\operatorname{diag}(X) = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ *замкнуто в топологии декартова произведения.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $x_\alpha \in X$ - направленность, $x, y \in X$ - два ее различных предела. Рассмотрим пару $M, N \subset X$ непересекающихся окрестностей точек $x, y \in X$ соответственно. Найдутся такие индексы α_1 и α_2, что $x_\alpha \in M$, если $\alpha \geqslant \alpha_1$, и $x_\alpha \in N$, если $\alpha \geqslant \alpha_2$. Выбирая любой индекс α, больший чем α_1 и α_2 приходим к противоречию, так как $x_\alpha \in M \cap N = \varnothing$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть (x_α, x_α) - произвольная направленность элементов множества $\operatorname{diag}(X)$. Если $(x_\alpha, x_\alpha) \to (x, y) \in X \times X$, то из предложения 1.2.5 следует, что $x_\alpha \to x$ и $x_\alpha \to y$. В силу единственности предела получаем, что $x = y$, а значит $(x, y) \in \operatorname{diag}(x)$. Предложение 1.1.5, таким образом, дает равенство $\operatorname{diag}(X) = \overline{\operatorname{diag}(X)}$, что влечет замкнутость $\operatorname{diag}(X)$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $x, y \in X$ - пара различных точек. Множество $X \times X \setminus \operatorname{diag}(X)$ открыто и содержит элемент (x, y), а значит найдется такой элемент базы $U \times V$, что $(x, y) \in U \times V \subset X \times X \setminus \operatorname{diag}(X)$. Это означает, что $x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \varnothing$. □

Следствие. *Декартово произведение семейства хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым.*

Доказательство. Действительно, пусть X_m, $m \in I$ - семейство топологических пространств, $X = \prod_{m \in I} X_m$. Если $x_\alpha \in X$ - направленность и $x, y \in X$ - два ее предела, то $\pi_m(x_\alpha)$ сходится к $\pi_m(x)$ и $\pi_m(y)$ в X_m для всех $m \in I$. Значит, $\pi_m(x) = \pi_m(y)$ для всех $m \in I$, что влечет $x = y$. □

Следствие. *Подпространство хаусдорфова пространства хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $A \subset X$, где X - хаусдорфово пространство. Тогда $\operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}(X) \cap (A \times A)$ является замкнутым множеством в $A \times A$ в силу замкнутости $\operatorname{diag}(X)$ и предложений 1.1.12 и 1.2.5. □

Немаловажным свойством хаусдорфовых пространств является следующее утверждение.

Предложение 1.3.3. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения. Если Y хаусдорфово, то $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ - замкнутое подмножество в X.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h = (f, g) : X \to Y \times Y$. Оно непрерывно, и имеет место равенство $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\operatorname{diag}(Y))$. Таким образом, замкнутость $\operatorname{diag}(Y) \subset Y \times Y$ завершает доказательство. □

Далее мы будем *окрестностью множества* A в топологическом пространстве X называть такое множество N, что $A \subset \operatorname{int} N$.

Определение 1.3.3. *Пусть X - топологическое пространство. X называется регулярным или T_3-пространством, если оно является T_1-пространством и для любого замкнутого $F \subset X$ и такого $x \in X$, что $x \notin F$, найдется такая пара $M, N \subset X$ окрестностей точки x и множества F соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*

Предложение 1.3.4. *Пусть X - топологическое пространство. X регулярно тогда и только тогда, когда X является T_1-пространством, и для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $N \subset X$ найдется такая замкнутая окрестность $M \subset X$ точки x, что $M \subset N$. В частности, у любой точки регулярного пространства найдется базис окрестностей, состоящий из замкнутых множеств.*

Доказательство. Пусть X регулярно, $x \in X$, $N \subset X$ - окрестность точки x. Пусть $F = X \backslash \operatorname{int} N$. Поскольку $x \notin F$, найдутся такие непересекающиеся открытые окрестности $U, V \subset X$ точки x и множества F соответственно. Далее, $\overline{U} \subset X \backslash V$, а значит $M = \overline{U}$ не пересекает F. А значит $M \subset N$.

Обратно, предположим что X - T_1-пространство, удовлетворяющее вышеописанному условию. Пусть $F \subset X$ замкнуто, $x \notin F$. Тогда $X \backslash F$ - окрестность точки x, а значит существует такая замкнутая окрестность $M \subset X$, что $M \subset X \backslash F$. Далее, $U = X \backslash M$ - открытое множество, содержащее F. Значит, M и U - непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно. □

Следствие. *Пусть X - регулярное пространство, $A \subset X$ - подпространство. Тогда A регулярно.*

Доказательство. Действительно, если $x \in A$, $N \subset A$ - окрестность точки x, то найдется такая окрестность $N' \subset X$ точки x, что $N = A \cap N'$. Далее, существует такая замкнутая окрестность $M \subset X$ точки x, что $M \subset N'$. Но тогда $M \cap A \subset N$ - замкнутая окрестность точки x в A. □

Определение 1.3.4. *Пусть X - топологическое пространство. X называется нормальным или T_4-пространством, если оно является T_1-пространством и для любых замкнутых непересекающихся $F, G \subset X$ найдется такая пара $M, N \subset X$ окрестностей множеств F и G соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*

Очевидно, что из нормальности следует регулярность, из регулярности следует хаусдорфовость, и, наконец, хаусдорфово пространство является T_1-пространством.

Отметим, что нормальность может не сохраняться как при переходе к подпространству, так и при образовании декартовых произведений (даже с конечным числом множителей).

Лемма 1.3.1. *Пусть X - нормальное пространство. Если $F \subset X$ замкнуто, а $U \subset X$ открыто и $F \subset U$, то найдется такое открытое $V \subset X$, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Доказательство. Множества F и $G = X \backslash U$ замкнуты и не пересекаются. Выберем у F и G непересекающиеся окрестности M и N. Пусть $V = \operatorname{int} M$. В этом случае $F \subset V$. Докажем, что $\overline{V} \subset U$. Действительно, $V \subset X \backslash \operatorname{int} N$, а значит $\overline{V} \subset X \backslash \operatorname{int} N \subset X \backslash G = U$. □

Теорема 1.3.1 (Лемма Урысона). *Пусть X - нормальное топологическое пространство, а $F, G \subset X$ - непересекающиеся замкнутые подмножества. Тогда найдется такая непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, что $f|_F = 0$ и $f|_G = 1$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Построим для каждого числа $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ открытое множество $U_q \subset X$ таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

1. $F \subset U_0$, $U_1 \subset X \backslash G$.

2. Если $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ и $p < q$, то $\overline{U_p} \subset U_q$.

Сначала мы построим U_0 и U_1. Для этого положим $U_1 = X \backslash G$. Далее, согласно лемме 1.3.1, найдется такое открытое V, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$. Его возьмем в качестве U_0.

Далее будем строить по индукции. Для этого перенумеруем множество $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ (оно, как известно, счетное). Именно, пусть $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Доопределим также $q_{-1} = 1$ и $q_0 = 0$. Мы уже построили $U_{q_{-1}}$ и U_{q_0}. Предположим, что уже построены множества $U_{q_{-1}}, U_{q_0}, \dots, U_{q_n}$, где $n \geqslant 0$, причем условия 1 и 2 выполнены. Построим теперь множество $U_{q_{n+1}}$. Пусть q_l - максимальное из тех чисел среди $q_{-1}, q_0, \dots, q_n$, что меньше q_{n+1}, а q_k - минимальное из тех, которые больше q_{n+1}. Тогда $q_l < q_{n+1} < q_k$. По лемме 1.3.1 найдется такое открытое $V \subset X$, что $\overline{U_{q_l}} \subset V \subset \overline{V} \subset U_{q_k}$. Возьмем V в качестве $U_{q_{n+1}}$. Очевидно, что условия 1 и 2 продолжат выполняться для $q_{-1}, q_0, \dots, q_{n+1}$.

2. Доопределим U_q для всех рациональных чисел $q \in \mathbb{Q}$. А именно, положим $U_q = \varnothing$, если $q < 0$, и $U_q = X$, если $q > 1$. Легко видеть, что второе условие продолжит выполняться для всех $p, q \in \mathbb{Q}$.

3. Определим функцию $f(x) = \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$. Легко видеть, что для любого $x \in X$ определено $f(x) \in \mathbb{R}$ и, более того, $f(x) \in [0,1]$ (действительно, $f(x) \notin U_q$, если $q < 0$, и $f(x) \in U_q$, если $q > 1$). Если $x \in F$, то $x \in U_0$, а значит $f(x) = 0$. Если же $x \in G$, то $x \notin U_q$ при $q \leqslant 1$, а значит $f(x) = 1$.

4. Докажем, что f непрерывна. Пусть $x_0 \in X$ - произвольная точка, $\varepsilon > 0$. Выберем такие рациональные p, q, что $f(x_0) - \varepsilon < p < f(x_0) < q < f(x_0) + \varepsilon$. Положим, $U = U_q \backslash \overline{U_p}$ - открытое множество. Докажем, что $x_0 \in U$ и $f(U) \subset [p, q]$.

Пусть $x \in U$. Тогда $x \in U_q$, а значит $f(x) \leqslant q$. Далее, $x \notin \overline{U_p}$, а значит $x \notin U_r$ при $r < p$, что влечет $f(x) \geqslant p$.

Теперь покажем, что $x_0 \in U$. Если $x \notin U_q$, то $x \notin U_r$ при $r < q$, что влечет $f(x_0) \geqslant q$. Это противоречит выбору q. Если $x_0 \in \overline{U_p}$, то $x \in U_r$ при $r \geqslant p$, а значит $f(x_0) \leqslant p$, что противоречит выбору p. □

Теперь мы установим нормальность метрических пространств и заодно найдем в этом случае явный вид для функций, существование которых гарантируется леммой Урысона.

Лемма 1.3.2. *Пусть X - такое T_1-пространство, что для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $F, G \subset X$ найдется такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f|_F = 0$ и $f|_G = 1$. Тогда X нормально.*

Доказательство. Пусть $F, G \subset X$ - непересекающиеся замкнутые подмножества. Если $f : X \to [0, 1]$ - непрерывная функция, равная 0 на F и 1 на G, то положим $M = f^{-1}([0, 1/2))$, $N = f^{-1}((1/2\ , 1])$. Тогда M и N - непересекающиеся окрестности множеств F и G. □

Пусть X - метрическое пространство. Введем расстояние от точки $x \in X$ до $A \subset X$ как $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Таким образом, при фиксированном $A \subset X$ $\rho(x, A)$ - неотрицательная функция из X в $\mathbb{R}$.

Предложение 1.3.5. *Пусть X - метрическое пространство, $A \subset X$. Обозначим $f(x) = \rho(x, A)$, $f : X \to \mathbb{R}$.*

1. *$f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция.*

2. *Пусть $x \in X$. $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{A}$.*

Доказательство.

1. Легко видеть, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Отсюда легко вывести непрерывность f.

2. Обозначим через F множество всех таких $x \in X$, что $f(x) = 0$. Из непрерывности f и замкнутости множества $\{0\} \subset \mathbb{R}$ следует, что $F = f^{-1}(\{0\})$ замкнуто. Далее, очевидно, что $A \subset F$, а значит $\overline{A} \subset F$. Пусть теперь $x \in F$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in A$, что $\rho(x_n, x) < 1/n$. Легко видеть, что $x_n \to x$, а значит $x \in \overline{A}$. Этим доказано равенство $F = \overline{A}$.

□

Предложение 1.3.6. *Пусть X - метрическое пространство, $F, G \subset X$ - непересекающиеся замкнутые подмножества. Тогда функция $f(x) = \rho(x, F)/(\rho(x, F) + \rho(x, G))$ непрерывна, равна 0 на F и равна 1 на G. Любое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Функция $g(x) = \rho(x, F) + \rho(x, G)$ непрерывна. Заметим, что она нигде не обращается в ноль. Действительно, если $g(x) = 0$, то $x \in \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G = \varnothing$. Значит, определена и непрерывна функция $f(x) = \rho(x, F)/g(x)$. Равенства $f(x) = 0$ при $x \in F$ и $f(x) = 1$ при $x \in G$ легко проверяются.

Докажем, что метрические пространства являются T_1-пространствами. Действительно, если X - метрическое пространство, а $x, y \in X$ - различные точки, то $B_\varepsilon(x)$ - окрестность точки x, не содержащая y, если $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$. С учетом уже доказанного, нормальность метрических пространств гарантируется леммой 1.3.2. □

1.4 Компактность

Определение 1.4.1. *Пусть X - множество, $\mathcal{U}$ - некоторое семейство подмножеств множества X. Мы будем говорить, что $\mathcal{U}$ покрывает X (является покрытием множества X), если $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Если дополнительно X - топологическое пространство, а $\mathcal{U}$ состоит из открытых множеств, то $\mathcal{U}$ называется открытым покрытием. Если $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ - некоторое подмножество, которое также покрывает X, то $\mathcal{V}$ называется подпокрытием покрытия $\mathcal{U}$.*

Определение 1.4.2. *Пусть X - топологическое пространство. X называется компактным, если из любого открытого покрытия множества X можно выделить конечное подпокрытие.*

Предложение 1.4.1. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$ - подпространство. A является компактным тогда и только тогда, когда из любого такого семейства $\mathcal{U}$ открытых подмножеств X, что $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ выделяется такое конечное подсемейство $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$.*

Доказательство. Пусть A компактно, а $\mathcal{U}$ - такое семейство открытых в X множеств, что $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Тогда $\mathcal{U}' = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ - открытое покрытие пространства A. Значит найдется такой конечный набор $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, что $A = \bigcup_{k=1}^n (U_n \cap A)$. Значит, $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$.

Обратно, пусть A удовлетворяет вышеописанному свойству. Если $\mathcal{U}$ - открытое покрытие множества A, то каждому $U \in \mathcal{U}$ можно сопоставить такое открытое $U' \subset X$, что $U = U' \cap A$. Обозначим $\mathcal{U}' = \{U' : U \in \mathcal{U}\}$. Выделим из $\mathcal{U}'$ конечное подсемейство $\mathcal{V} = \{U_1', \ldots, U_n'\}$ так, чтобы $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_k'$. Но тогда $A = \bigcup_{k=1}^n U_k$, а значит $\{U_1, \ldots, U_n\}$ - конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. □

Предложение 1.4.2. *Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$.*

1. *Если A замкнуто, а X компактно, то A компактно.*

2. *Если A компактно, а X хаусдорфово, то A замкнуто.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{U}$ - такое семейство открытых в X множеств, что $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Рассмотрим $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \backslash A\}$. $\mathcal{V}$ является открытым покрытием множества X, а значит выделяется конечное подпокрытие $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Легко видеть, что $\mathcal{V}' \backslash \{X \backslash A\}$ - подсемейство в $\mathcal{U}$, в объединении которого содержится A. Следовательно, A компактно в силу предложения 1.4.2.

2. Пусть $x \notin A$. Для любого $y \in A$ можно выбрать пару непересекающихся открытых окрестностей U_y, V_y точек x, y соответственно. Семейство $\{V_y : y \in A\}$ содержит такое конечное подсемейство $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, что $A =\subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$. Но тогда $\bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$ - окрестность точки x, не пересекающаяся с A. Значит, $x \notin \overline{A}$. Следовательно, A замкнуто.

□

Предложение 1.4.3. *Пусть X - топологическое пространство, $A, B \subset X$. Если A и B компактны, то $A \cup B$ тоже компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ - такое семейство открытых подмножеств в X, что $A \cup B \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Тогда в силу предложения 1.4.1 найдутся такие конечные наборы $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ и $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{U}$, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ и $B \subset \bigcup_{l=1}^{m} V_k$. Но тогда $A \cup B$ содержится в объединении элементов конечного набора $\{U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m\} \subset \mathcal{U}$. Значит, предложение 1.4.1 доказывает компактность $A \cup B$. □

Предложение 1.4.4. *Пусть X, Y - топологические пространства, $f : X \to Y$ - непрерывное отображение. Если X компактно, то $f(X)$ тоже компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ - такое семейство открытых в Y подмножеств, что $f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Тогда $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ - открытое покрытие пространства X. Значит найдется такой конечный набор $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, что $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_k)$. Отсюда следует, что $f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Из предложения 1.4.1 следует компактность $f(X)$. □

Предложение 1.4.5. *Пусть X, Y - топологические пространства, X компактно, а Y хаусдорфово. Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное биективное отображение. Тогда f^{-1} также непрерывно (то есть f является гомеоморфизмом).*

Доказательство. Пусть $g = f^{-1}$. Если $F \subset X$ - замкнутое подмножество, то $g^{-1}(F) = f(F) \subset Y$ замкнуто, так как $f(F)$ компактно, а Y хаусдорфово. Значит, g непрерывно. □

Предложение 1.4.6. *Пусть X - топологическое пространство.*

1. *Пусть X хаусдорфово, $x \in X$, $F \subset X$ - компактно и $x \notin F$. Тогда у x и F найдется такие окрестности M и N соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*

2. *Пусть X регулярно, $F, G \subset X$ - замкнуты, F компактно и $F \cap G = \varnothing$. Тогда у F и G найдется такие окрестности M и N соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*

3. *Если X хаусдорфово и компактно, то X нормально.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in X$ и $F \subset X$, причем F замкнуто и $x \notin F$. Для каждого $y \in F$ найдем пару открытых непересекающихся окрестностей $U_y, V_y \subset X$ точек x и y соответственно. Ясно, что $F \subset \bigcup_{y \in F} V_y$, а значит найдется такой конечный набор $y_1, \ldots, y_n \in F$, что $F \subset V = \bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Если положить $U = \bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$, то U и V - непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно.

2. Пусть F, G - непересекающиеся замкнутые подмножества в X. Для каждого $x \in F$ можно выбрать непересекающиеся открытые окрестности $U_x, V_x \subset X$ точки x и множества G соответственно. Поскольку $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$, существует такой конечный набор $x_1, dots, x_n \in F$, что $F \subset U = \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$. Положим $V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$. Тогда $U, V \subset X$ - непересекающиеся окрестности множеств F и G соответственно.

3. Если X компактно и хаусдорфово, то любое замкнутое подмножество в X компактно. Тогда первый пункт утверждает, что X регулярно. По аналогичным соображениям второй пункт влечет нормальность X.

□

Далее мы докажем, что декартово произведение двух (а следовательно любого конечного числа) компактных пространств компактно. На самом деле имеет место теорема Тихонова, утверждающее компактность произведения любого (бесконечного) числа компактных пространств. В функциональном анализе теорема Тихонова необходима для получения некоторых важных результатов, а потому мы не можем оставить ее без внимания (она будет доказана в одном из последующих параграфов этой главы). Однако, элементарное доказательство компактности произведения конечного числа компактов достаточно интересное и поучительное, а потому мы его также приводим.

Лемма 1.4.1. *Пусть X, Y - топологические пространства, $y_0 \in Y$, X компактно. Если $U \subset X \times Y$ - такое открытое множество, что $X \times \{y_0\} \subset U$, то найдется такое открытое $V \subset Y$, что $y_0 \in V$ и $X \times V \subset U$.*

Доказательство. Раз U открыто в $X \times Y$, его можно представить в виде объединения $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha$, где $U_\alpha \subset X$ и $V_\alpha \subset Y$ открыты для всех $\alpha \in I$. Рассмотрим множество $J = \{\alpha \in I : y_0 \in V_\alpha\}$. Легко видеть, что $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ - открытое покрытие пространства X (это следует из того, что для всех $x \in X$ найдется такое $\alpha \in I$, что $(x, y_0) \in U_\alpha \times V_\alpha$, и, как нетрудно понять, в этом случае $\alpha \in J$). Пусть $X = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$. Обозначим $V = \bigcap_{k=1}^n V_{\alpha_k}$ - открытое множество, содержащее y_0. Тогда $X \times V \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \times V_{\alpha_k} \subset U$. □

Лемма 1.4.2. *Пусть X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$. Тогда отображение $f : Y \to \{x_0\} \times Y$, $f(y) = (x_0, y)$ является гомеоморфизмом (топология на $\{x_0\} \times Y$ индуцирована из $X \times Y$).*

Доказательство. Для начала заметим, что f биективно и $f^{-1} = \pi_Y|_{\{x_0\} \times Y}$, где $\pi_Y : X \times Y \to Y$ - проекция. Значит, достаточно проверить непрерывность отображения $f : X \to X \times Y$, так как непрерывность обратного уже доказана. Пусть $U \times V \subset X \times Y$ - элемент базы. Тогда $f^{-1}(U \times V)$ совпадает с V, если $x_0 \in U$, или же пусто, если $x_0 \notin U$. Так или иначе, $f^{-1}(U \times V)$ открыто в X. Далее, любое открытое подмножество U в $X \times Y$ есть объединение элементов базы, а значит $f^{-1}(U)$ будет открыто в X. $\square$

Предложение 1.4.7. *Пусть X, Y - два компактных топологических пространства. Тогда $X \times Y$ тоже компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ - открытое покрытие пространства $X \times Y$. Для каждого $x \in X$ пространство $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ гомеоморфно пространству Y, а значит компактно. Значит, существует такой конечный набор $U_1 \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, что $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. По лемме 1.4.1 найдется такое открытое $V_x \subset X$, что $x \in V_x$ и $V_x \times Y \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$.

Таким образом, каждому $x \in X$ мы сопоставим такое открытое V_x, что $x \in V_x$ и множество $V_x \times Y$ содержится в объединении конечного семейства элементов $\mathcal{U}$. Из компактности X вытекает существование такого конечного набора $x_1, \ldots, x_m \in X$, что $X = \bigcup_{k=1}^{m} V_{x_k}$. Далее, по построению, для каждого $k = 1, \ldots, m$ найдется такой конечный набор $U_1^{(k)}, \ldots, U_{n_k}^{(k)} \in \mathcal{U}$, что $V_{x_k} \times Y \subset \bigcup_{l=1}^{n_k} U_l^{(k)}$. Тогда $X \times Y = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{n_k} U_l^{(k)}$. Таким образом, мы выделили из $\mathcal{U}$ конечное подпокрытие. $\square$

Далее мы посвятим остаток параграфа исследованию связи между компактностью и выделением сходящихся подпоследовательностей.

Определение 1.4.3. *Пусть X - множество, $x_n \in X$ - последовательность. Подпоследовательностью в ней называется последовательность вида $x_{n_k} \in X$, $k \in \mathbb{N}$, где $n_1, n_2, \ldots$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Топологическое пространство называется секвенциально компактным, если из любой его последовательности выделяется сходящаяся подпоследовательность.*

Предложение 1.4.8. *Пусть X - компактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Тогда X секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $x_n \in X$ - последовательность. Докажем, что найдется такое $y_0 \in X$, что в любой окрестности точки y_0 содержится бесконечное число членов последовательности. Действительно, если это не так, то для любого $y \in X$ найдется открытая окрестность V_y, содержащая лишь конечное число членов последовательности. Далее найдется такой конечный набор $y_1, \ldots, y_n \in X$, что $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$. Это противоречит бесконечности множества $\mathbb{N}$ (так как мы доказали, что в X содержится конечное число членов последовательности).

Пусть теперь в любой окрестности точки $y_0 \in X$ содержится бесконечное число членов последовательности x_n. Пусть $N_1 \supset N_2 \supset \ldots$ - базис окрестностей точки y_0 (см. лемму 1.1.1). Выберем такую строго возрастающую последовательность индексов $n_k \in \mathbb{N}$, что $x_{n_k} \in N_k$ (это возможно, так как в каждом N_k содержится бесконечное число членов последовательности x_n). Тогда последовательность x_{n_k} сходится к y_0. $\square$

Определение 1.4.4. *Пусть X - метрическое пространство, $A \subset X$ - непустое подмножество. A называется ограниченным, если* $\sup_{x,y\in A} \rho(x,y) < \infty$. *В этом случае число* $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} \rho(x,y)$ *называется диаметром множества A (диаметр пустого подмножества не определяется). X называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор непустых подмножеств $A_1, \ldots, A_n \subset X$, что $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$ и* $\operatorname{diam} A_k \leqslant \varepsilon$ *для всех $k = 1, \ldots, n$.*

Пусть X - метрическое пространство. Легко проверить, что, если X вполне ограничено, то оно ограничено. Подпространство вполне ограниченного пространства вполне ограничено. Также имеет место очевидное равенство $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$ для любого непустого ограниченного подмножества A в X. Наконец, отметим, что $\operatorname{diam} B_\varepsilon(x) \leqslant 2\varepsilon$, если $x \in X$.

Лемма 1.4.3. *Пусть X - секвенциально компактное метрическое пространство. Тогда X вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ - такое число, что X нельзя представить в виде конечного объединения множеств с диаметром не превосходящим ε. Пусть $x_1 \in X$ - произвольная точка. Тогда $X \neq B_{\varepsilon/2}(x_1) \neq X$. Выберем $x_2 \in X \backslash B_{\varepsilon/2}(x_1)$. Далее, если уже выбраны $x_1, \ldots, x_n$, то можно выбрать $x_{n+1} \in X \backslash \bigcup_{k=1}^{n} B_{\varepsilon/2}(x_k)$. Таким образом, по индукции мы построим такую последовательность $x_n \in X$, что $\rho(x_k, x_l) \geqslant \varepsilon/2$ для всех различных $k, l \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что у такой последовательности нет сходящихся подпоследовательностей. □

Лемма 1.4.4 (Лебег)**.** *Пусть X - секвенциально компактное метрическое пространство, $\mathcal{U}$ - его открытое покрытие. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого такого непустого $A \subset X$, что* $\operatorname{diam} A \leqslant \varepsilon$ *найдется такой $U \in \mathcal{U}$, что $A \subset U$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность $A_n \subset X$ непустых множеств, что $\operatorname{diam} A_n \leqslant 1/n$ и $A_n \not\subset U$ для любого $U \in \mathcal{U}$ и $n \in \mathbb{N}$. Выберем последовательность $x_n \in A_n$. Пусть x_{n_k} - сходящаяся подпоследовательность, $x \in X$ - ее предел. Тогда найдется такое $U \in \mathcal{U}$, что $x \in U$, а значит также найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Далее, выберем такое $k \in \mathbb{N}$, что $1/n_k < \varepsilon/2$ и $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon/2$. Тогда $A_{n_k} \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. Это противоречит выбору множеств A_n. □

Теорема 1.4.1. *Пусть X - метрическое пространство. X компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Если X компактно, то его секвенциальная компактность следует из предложения 1.4.8. Обратно, пусть X секвенциально компактно, а $\mathcal{U}$ - открытое покрытие пространства X. По лемме 1.4.4 найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого непустого $A \subset X$ с $\operatorname{diam} A \leqslant \varepsilon$ найдется такое $U \in \mathcal{U}$, что $A \subset U$. Далее, из леммы 1.4.3 следует, что X вполне ограничено, а значит найдется такой набор непустых $A_1, \ldots, A_n \subset X$, что $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$ и $\operatorname{diam} A_k \leqslant \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Выберем для каждого $k = 1, \ldots, n$ такой $U_k \in \mathcal{U}$, что $A_k \subset U_k$. Тогда $\{U_1, \ldots, U_n\}$ - конечное подпокрытие в $\mathcal{U}$. □

Предложение 1.4.9. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. A компактно тогда и только тогда, когда A замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Действительно, если A компактно, то оно замкнуто (так как $\mathbb{R}^n$ хаусдорфово) и даже вполне ограничено. Обратно, если A замкнуто и ограничено, то по теореме Больцано-Вейерштрасса из любой последовательности элементов A выделяется сходящаяся подпоследовательность, а значит A компактно по теореме 1.4.1. □

Следствие (теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть X - компактное пространство, а $f : X \to \mathbb{R}^n$ - непрерывная функция. Тогда образ $f(X)$ отображения f замкнут и ограничен в $\mathbb{R}^n$. В частности, если $n = 1$, то определены числа $\inf_{x \in X} f(x), \sup_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}$, и они лежат в образе отображения f.*

1.5 Локальная компактность

Определение 1.5.1. *Топологическое пространство X называется локально компактным, если у каждой точки $x \in X$ существует компактная окрестность.*

Легко видеть, что $\mathbb{R}^n$ компактно, так как у каждой точки этого пространства найдется замкнутая и ограниченная окрестность.

Предложение 1.5.1. *Если X локально компактно, а $F \subset X$ замкнуто, то F тоже локально компактно.*

Доказательство. Действительно, если $G \subset X$ - компактная окрестность точки $x \in X$, то $G \cap F$ - компактная окрестность точки x в F. □

Теорема 1.5.1. *Пусть X - хаусдорфово локально компактное пространство, а символ ∞ обозначает объект, не принадлежащий множеству X. Пусть $\check{X} = X \cup \{\infty\}$, а T обозначает семейство всех таких подмножеств $U \subset \check{X}$, что выполнено одно из следующих условий:*

- *$\infty \in U$, $X \backslash U$ компактно.*
- *$\infty \notin U$, $U \subset X$ открыто.*

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. *Если $U \in T$, то $U \cap X \subset X$ открыто.*
2. *$(\check{X}, T)$ - компактное хаусдорфово топологическое пространство.*
3. *X есть открытое подмножество в $\check{X}$, и топология, индуцированная из $\check{X}$ совпадает с исходной топологией на X.*
4. *Пусть $A \subset X$, $\overline{A}$ обозначает замыкание множества A в пространстве X, а $\overline{A}'$ - замыкание множества A в пространстве $\check{X}$. Тогда, если $\overline{A}$ компактно, то $\overline{A}' = \overline{A}$, а если $\overline{A}$ не компактно, то $\overline{A}' = \overline{A} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. 1. Действительно, если $\infty \in U$, то $X \backslash U$ компактно, а значит замкнуто. Отсюда следует, что $X \cap U = X \backslash (X \backslash U)$ открыто. Если же $\infty \notin U$, то U по определению открыто в X.

2. Легко видеть, что $\varnothing, \check{X} \in T$. Пусть далее $U, V \in T$. Если $\infty \in U$ и $\infty \in V$, то $X \backslash (U \cap V) = (X \backslash U) \cup (X \backslash V)$ компактно в силу предложения 1.4.3. Значит, $U \cap V \in T$. Если $\infty \notin U$, то $\infty \notin U \cap V$ и $U \cap V$ - открытое подмножество в X, так как $U \cap X$ открыто. Аналогично разбирается случай $\infty \notin V$. Таким образом, если $U, V \in T$, то $U \cap V \in T$.

   Пусть теперь $U_\alpha \in T$, $\alpha \in I$, $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Пусть найдется такое $\alpha_0 \in I$, что $\infty \in U_{\alpha_0}$. Тогда $\infty \in U$. При этом $X \backslash U = \bigcap_{\alpha \in I} (X \backslash U_\alpha)$. Значит, $X \backslash U$ замкнуто в X, так как это пересечение замкнутых подмножеств в X. Также $X \backslash U \subset X \backslash U_{\alpha_0}$, откуда следует, что $X \backslash U$ компактно (так как это замкнутое подмножество компакта $X \backslash U_{\alpha_0}$). Теперь предположим, что $\infty \notin U_\alpha$ для всех $\alpha \in I$. Тогда $\infty \notin U$ и $U \subset X$ открыто.

   Пусть $x, y \in \check{X}$ - две различные точки. Если $x, y \in X$, то найдутся непересекающиеся открытые в X окрестности U, V точек x и y соответственно. По определению U, V открыты в $\check{X}$. Пусть теперь $x = \infty$. Найдем у y компактную окрестность $N \subset X$. Тогда $M = \check{X} \backslash N$ - окрестность точки $x = \infty$. Значит, у x и y имеются непересекающиеся открытые окрестности M и $\operatorname{int} N$. Хаусдорфовость $\check{X}$ доказана.

   Наконец, проверим, что $\check{X}$ компактно. Для этого рассмотрим его открытое покрытие $\mathcal{U}$. По условию найдется такое $U_0 \in \mathcal{U}$, что $\infty \in U_0$. Пусть $F = X \backslash F_0$. Рассмотрим теперь семейство $\mathcal{U}' = \{U \cap X : U \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, что $F \subset \bigcup_{V \in \mathcal{U}'} V$ и, в силу компактности F, найдется такой конечный набор $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, что $F \subset \bigcup_{k=1}^n (X \cap U_k)$. Отсюда вытекает, что $\{U_0, \ldots, U_n\}$ - открытое подпокрытие в $\mathcal{U}$.

3. По определению $X \in T$, то есть X открыто в $\check{X}$. Пусть $U \subset \check{X}$ открыто. Тогда $U \cap X$ открыто в X. Наоборот, если $U \subset X$, то по определению U открыто в $\check{X}$. Значит, индуцированная из $\check{X}$ топология на X совпадает с исходной топологией.

4. Имеет место равенство $\overline{A}' \cap X = \overline{A}$. $\infty \in \overline{A}'$ тогда и только тогда, когда любая окрестность точки ∞ пересекается с A. Это, в свою очередь, равносильно тому, что A не вложено ни в одно компактное подмножество в X. Наконец, A есть подмножество некоторого компакта тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ компактно.

$\square$

Следствие. *Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда X регулярно. Если $U \subset X$ открыто, то U тоже локально компактно и хаусдорфово.*

Доказательство. Регулярность следует из регулярности $\check{X}$ и сохранения регулярности при переходе к подпространству. Пусть теперь $U \subset X$ - открытое подмножество. Если $x \in U$, то, в силу регулярности X, найдется такая замкнутая окрестность N точки x, что $N \subset U$. Если теперь M - компактная окрестность точки x, то $M \cap N$ - компактная окрестность точки x в пространстве U. $\square$

Следствие. *Топологическое пространство X является хаусдорфовым и локалько компактным тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно открытому подмножеству в хаусдорфовом компактном пространстве.*

Доказательство. Действительно, если X локально компактно и хаусдорфово, то оно является открытым подмножеством в $\check{X}$. Обратное вытекает из предыдущего следствия теоремы 1.5.1. $\square$

Определение 1.5.2. *Если X - локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, то пространство $\check{X}$, описанное в теореме 1.5.1, называется его одноточечной компактификацией (или компактификацией Александрова).*

Предложение 1.5.2. *Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство, $F, G \subset X$ - непересекающиеся замкнутые подмножества, G компактно. Тогда найдется такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f|_F = 0$ и $f|_G = 1$.*

Доказательство. Пусть $\overline{F}$ - замыкание множества F в пространстве $\check{X}$. Тогда $\overline{F}$ и G - непересекающиеся замкнутые подмножества в $\check{X}$. Доказательство завершается теперь применением леммы Урысона (теорема 1.3.1) к нормальному (компактному и хаусдорфовому) пространству $\check{X}$. $\square$

Лемма 1.5.1. *Пусть X - локально компактное пространство, $F \subset X$ - компактное множество. Тогда у F найдется компактная окрестность.*

Доказательство. Пусть N_x - компактная окрестность точки $x \in F$. Семейство $\operatorname{int} N_x$, $x \in F$ состоит из открытых множеств, и $F \subset \bigcup_{x \in F} \operatorname{int} N_x$. Значит, найдется такой конечный набор $x_1, \ldots, x_n \in F$, что $N \subset \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} N_{x_k}$. Тогда $M = \bigcup_{k=1}^{n} N_k$ - искомая компактная окрестность множества F. $\square$

Определение 1.5.3. *Пусть X - топологическое пространство, а $f : X \to \mathbb{C}$ - непрерывная функция. Носителем функции f называется множество* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Предложение 1.5.3. *Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство, $F \subset X$ компактно, $U \subset X$ - такое открытое множество, что $F \subset U$. Тогда найдется такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$ с компактным носителем, что $f|_F = 1$ и $f|_{X \setminus U} = 0$.*

Доказательство. Пусть N - компактная окрестность множества F. Пусть $G = X \setminus (\operatorname{int} N \cap U)$. Тогда к паре F, G применимо предложение 1.5.2. Пусть $f : X \to [0, 1]$ - такая непрерывная функция, что $f|_F = 1$, $f|_G = 0$. Заметим, что $\operatorname{supp} f \subset \overline{X \setminus G} = \overline{\operatorname{int} N \cap U}$ - компакт. $\square$

1.6 Сепарабельность и вторая аксиома счетности

Определение 1.6.1. *Пусть X - топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если $\overline{A} = X$.*

Предложение 1.6.1. *1. Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$. A всюду плотно тогда и только тогда, когда A пересекается с любым непустым открытым подмножеством в X.*

2. Пусть X, Y - топологические пространства, $A \subset X$ всюду плотно, $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения. Если Y хаусдорфово и $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

3. Если X_m, $m \in I$ - семейство топологических пространств, $A_m \subset X_m$ всюду плотно для любого $m \in I$. Тогда $\prod_{m \in I} A_m$ всюду плотно в $\prod_{m \in I} X_m$.

4. Если X - метрическое пространство, то $A \subset X$ всюду плотно тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x' \in A$, что $\rho(x, x') < \varepsilon$.

5. Если X - топологическое пространства, $U_1, \dots, U_n \subset X$ - конечный набор открытых и всюду плотных множеств, то $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$ тоже открыто и всюду плотно.

6. Если X, Y - топологические пространства, $A \subset X$ всюду плотно, $f : X \to Y$ - непрерывное и сюръективное отображение, то $f(A)$ всюду плотно в Y.

7. Если X - топологическое пространство, $A \subset X$ всюду плотно и $U \subset X$ открыто, то $\overline{U} = \overline{A \cap U}$.

Доказательство. 1. Пусть A всюду плотно в X. Если $A \cap U = \varnothing$, где $U \subset X$ открыто, то $A \subset X \backslash U$, а значит $X = \overline{A} \subset X \backslash U$. Отсюда следует, что $U = \varnothing$, а A пересекается со всеми непустыми открытыми множествами. Обратно, пусть A пересекается со всеми непустыми открытыми множествами. Тогда $X \backslash \overline{A} = \varnothing$, так как A с этим множеством не пересекается.

2. Множество $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто (предложение 1.3.3) и содержит A. Тогда $X = \overline{A} \subset F$. Значит f и g совпадают всюду.

3. Это прямое следствие предложения 1.2.5.

4. Действительно, из предложения 1.3.5 следует, что $A \subset X$ всюду плотно тогда и только тогда, когда $\rho(x, A) = 0$ для всех $x \in X$.

5. Ввиду индукции достаточно показать это для двух множеств $U_1, U_2 \subset X$. Пусть $U \subset X$ непусто и открыто. Тогда $U \cap U_1$ тоже непусто и открыто. Следовательно, $U \cap U_1 \cap U_2 = U_2 \cap (U \cap U_1)$ непусто. Значит, $U_1 \cap U_2$ пересекает все непустые открытые подмножества в X.

6. Пусть $U \subset Y$ - непустое и открытое множество. Тогда $f^{-1}(U) \cap A \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $f(A)$ пересекается с U.

7. Очевидно, что $\overline{A \cap U} \subset \overline{U}$. Пусть $x \notin \overline{A \cap U}$. Положим, $V = X \backslash \overline{A \cap U}$. V есть окрестность точки x, а значит $V \cap U$ - непустое открытое множество. Но тогда $A \cap V \cap U$ непусто. Это противоречит определению V.

$\square$

Определение 1.6.2. *Топологическое пространство X называется сепарабельным, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное подмножество.*

Предложение 1.6.2. *1. Образ сепарабельного пространства при непрерывном отображении сепарабелен.*

2. Декартово произведение конечного числа сепарабельных пространств сепарабельно.

3. Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.

Доказательство. 1. Это напрямую следует из предложения 1.6.1.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - сепарабельные пространства. Пусть $A_k \subset X_k$ - не более чем счетное всюду плотное множество для любого $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\prod_{k=1}^n A_k$ - не более чем счетное всюду плотное подмножество в $\prod_{k=1}^n X_k$.

3. Пусть X - вполне ограниченное метрическое пространство. Для $n \in \mathbb{N}$ определим такой набор непустых множеств $B_1^{(n)}, \ldots, B_{m_n}^{(n)} \subset X$, что $\cup_{k=1}^{m_n} B_k^{(n)} = X$ и $\operatorname{diam} B_k^{(n)} \leqslant 1/n$ для всех $k = 1, \ldots, m_n$. Выберем $x_k^{(n)} \in B_k^{(n)}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \ldots, m_n$. Тогда, как нетрудно видеть, $\{x_k^{(n)} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, m_n\}$ - счетное всюду плотное подмножество в X.

$\square$

Определение 1.6.3. *Будем говорить, что топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, если его топология может быть порождена счетной базой.*

Предложение 1.6.3. *Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно и удовлетворяет первой аксиоме счетности. Если метрическое пространство сепарабельно, то оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ - счетная база, порождающая топологию в пространстве X. Выберем в каждом непустом элементе $U \in \mathcal{B}$ элемент $x_U \in U$. Тогда множество $\{x_U : U \in \mathcal{B}, U \neq \varnothing\}$ всюду плотно и не более чем счетно. Далее, X удовлетворяет первой аксиоме счетности ввиду леммы 1.2.1.

Пусть теперь X - сепарабельное метрическое пространство. Пусть $s_1, s_2, \dots \in X$ - последовательность элементов пространства X, образующая всюду плотное подмножество в X. Рассмотрим счетное множество $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(s_k) : k, n \in \mathbb{N}\}$. Докажем, что $\mathcal{B}$ - база топологии, порождающая топологию пространства X.

Пусть $x \in B_{1/n}(s_k) \cap B_{1/n'}(s_{k'})$. Найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $1/N < \{/\min 1/n - \rho(x, s_k), 1/n' - \rho(x, s_{k'})\}2$. Далее существует такое $K \in \mathbb{N}$, что $\rho(x, s_K) < 1/N$. Тогда, как нетрудно видеть, $x \in B_{1/N}(s_K) \subset B_{1/n}(s_k) \cap B_{1/n'}(s_{k'})$. Значит $\mathcal{B}$ - база топологии.

Теперь воспользуемся предложением 1.2.2 для доказательства того, что топология на X совпадает с топологией $T_{\mathcal{B}}$. Очевидно, что все элементы множества $\mathcal{B}$ открыты. Пусть теперь $U \subset X$ открыто и $x \in U$. Найдем такое $n \in \mathbb{N}$, что $B_{2/n}(x) \subset U$. Далее, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\rho(x, s_k) < 1/n$. Тогда $x \in B_{1/n}(s_k) \subset U$. Значит, топология на X порождена базой B. □

Предложение 1.6.4. *Подпространство топологического пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности тоже удовлетворяет второй аксиоме счетности. В частности, подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.*

Доказательство. Это легко выводится из предложения 1.2.4 □

Предложение 1.6.5. *Пусть X - локально компактное топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. *Топология в X порождается не более чем счетной базой топологии, состоящей из таких множеств $U \subset X$, что $\overline{U}$ компактно.*

2. *Существует такая последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ компактных подмножеств в X, что $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, и $F_k \subset \operatorname{int} F_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{B}$ - не более чем счетная база, порождающая топологию пространства X. Рассмотрим множество $\mathcal{B}' = \{U \in B : \overline{U} \text{ компактно}\}$. Докажем, что $\mathcal{B}'$ - тоже база, порождающая топологию на X.

   Пусть $x \in X$ и $U \subset X$ - открытое множество, содержащее x. Существует такое открытое $V \subset X$, что $\overline{V}$ компактно. Далее, по условию найдется такое $W \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset U \cap W$. Как нетрудно видеть, это влечет $W \in \mathcal{B}'$. Отсюда следует, что для любого $x \in X$ и любого открытого U, содержащего x, найдется такое $W \in \mathcal{B}'$, что $x \in W \subset U$. Из этого легко доказать, что $\mathcal{B}'$ является базой и порождает топологию на X.

2. Из первого пункта следует, что найдется такая последовательность компактных множеств $G_1, G_2 \dots \subset X$, что $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Далее, положим $F_1 = G_1$. Пусть $F_1, \dots, F_n$ уже построены, причем $F_k \subset F_{k+1}$ для $k = 1, \dots, n-1$. Положим, F_{n+1} - некоторая компактная окрестность множества $F_n \bigcup G_{n+1}$ (см. лемму 1.5.1). По индукции мы построим необходимую последовательность.

□

1.7 Дополнительные свойства метрических пространств

Определение 1.7.1. *Пусть X - метрическое пространство. Направленность $x_\alpha \in X$, $\alpha \in \Lambda$ называется направленностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha_0 \in \Lambda$, что*

$\rho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. X называется полным, если любая направленность Коши в X сходится.

Предложение 1.7.1. *Пусть X - метрическое пространство.*

1. *Любая сходящаяся в X направленность является направленностью Коши.*

2. *Если все последовательности Коши в X сходятся, то X полное.*

3. *Если из последовательности Коши $x_n \in X$ выделяется сходящаяся подпоследовательность, то последовательность x_n сходится.*

4. *Если X вполне ограничено, то из любой последовательности выделяется подпоследовательность Коши.*

Доказательство. 1. Пусть направленность $x_\alpha \in X$ сходится к $x \in X$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что $\rho(x_\alpha, x) < \varepsilon/2$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Но тогда $\rho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$ при $\alpha, beta \geqslant \alpha_0$.

2. Пусть $x_\alpha \in X$, $\alpha \in \Lambda$ - направленность Коши. Пусть $\alpha_1 \in \Lambda$ - такой индекс, что $\rho(x_\alpha, x_\beta) < 1$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_1$. Пусть уже построены индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Выберем α_{n+1} таким образом, чтобы $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и $\rho(x_\alpha, x_\beta) < 1/n + 1$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \alpha_{n+1}$. Таким образом, по индукции мы построим такую неубывающую последовательность индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, что $\rho(x_\alpha, x_\beta) < 1/n$, если $\alpha, \beta \geqslant \alpha_n$. Последовательность x_{α_n} является последовательностью Коши, и пусть x - ее предел. Докажем, что $x_\alpha \underset{\alpha \in \Lambda}{\longrightarrow} x$. Выберем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/n < \varepsilon/2$ и $\rho(x, x_{\alpha_n}) < \varepsilon/2$. Тогда $\rho(x, x_\alpha) < \varepsilon$, если $\alpha \geqslant \alpha_n$.

3. Пусть $x_n \in X$ - последовательность Коши, $x_{n_k} \to x$. Докажем, что $x_n \to x$. Выберем $\varepsilon > 0$. Существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_m, x_k) < \varepsilon/2$ при $m, k \geqslant n$. Тогда $\rho(x, x_m) < \varepsilon$ при $m \geqslant n$, так как найдется такое $n_k \geqslant n$, что $\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$.

4. Пусть $x_n \in X$ - произвольная последовательность. Рассмотрим такой конечный набор $A_i^1 \subset X$, $i = 1, \ldots, n_1$, что $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} A_i^{(1)}$ и $\operatorname{diam} A_i^{(1)} \leqslant 1$. Члены последовательности x_n попадают в одно из множеств $A_i^{(1)}$ бесконечное число раз. Выберем i_1 и бесконечное $J_1 \subset \mathbb{N}$ так, чтобы $x_n \in A_{i_1}^{(1)}$ при $n \in J_1$. Далее $A_{i_1}^{(1)}$ вполне ограничено, так что выберем такие $A_i^{(2)} \subset A_{i_1}^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n_2$, что $A_{i_1}^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{n_2} A_i^{(2)}$ и $\operatorname{diam} A_i^{(2)} \leqslant 1/2$. Далее опять можно выбрать индекс i_2 и бесконечное множество $J_2 \subset J_1$ так, чтобы $x_n \in A_{i_2}^{(2)}$ при $n \in J_2$. Рассуждая по индукции можно построить следующие объекты: последовательность подмножеств $X \supset A_{i_1}^{(1)} \supset A_{i_2}^{(2)} \supset A_{i_3}^{(3)} \supset \ldots$ и последовательность бесконечных множеств $\mathbb{N} \supset J_1 \supset J_2 \supset J_2 \ldots$, причем имеют место условия $\operatorname{diam} A_{i_n}^{(n)} \leqslant 1/n$, $x_n \in A_{i_k}^{(k)}$ при $n \in J_k$.

   Выберем $n_k \in J_k$ так, чтобы $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$. Это возможно, так как множества J_k бесконечны. Легко видеть, что $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant 1/k$, если $k \leqslant l$. Получаем, что x_{n_k} - последовательность Коши.

□

Следствие. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полное и вполне ограниченное.*

Доказательство. Это очевидно ввиду теоремы 1.4.1 и предложения 1.7.1. □

Лемма 1.7.1. *Пусть X - полное метрическое пространство, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ - последовательность замкнутых непустых ограниченных подмножеств. Если $\operatorname{diam} F_n \to 0$, то $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. То, что множество $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ состоит из не более чем одной точки - очевидно. Докажем, что это множество непусто. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in F_n$. Легко видеть, что $\rho(x_n, x_m) \leqslant \operatorname{diam} F_n$, если $n < m$. Отсюда следует, что x_n - последовательность Коши. Ее предел в силу замкнутости множества F_m и того, что $x_n \in F_m$ при $n \geqslant m$, лежит в F_m для всех $m \in \mathbb{N}$. Значит, $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. □

Пусть X - метрическое пространство, $x \in X$. Введем полезное обозначение $\widetilde{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ - *замкнутый ε-шар с центром в точке x*. Это множество замкнуто и ограничено, причем $\operatorname{diam} \widetilde{B}_\varepsilon(x) \leqslant 2\varepsilon$. Очевидно, что при $\delta < \varepsilon$ имеет место вложение $\widetilde{B}_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x)$. Отметим, что множества $\overline{B_\varepsilon(x)}$ и $\widetilde{B}_\varepsilon(x)$ могут не совпадать.

Теорема 1.7.1 (Бэр). *Пусть X - полное метрическое пространство, $U_1, U_2, \ldots$ - последовательность открытых и всюду плотных подмножеств в X. Тогда $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ - всюду плотное в X подмножество.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное непустое открытое $V \subset X$. Нашей целью будет доказать непустоту пересечения $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Для этого мы воспользуемся леммой 1.7.1.

Будем по индукции строить непустые замкнутые ограниченные множества $F_1 \subset V \cap U_1$, $F_n \subset F_{n-1} \cap U_n$ $(n > 1)$ с диаметрами, сходящимися к нулю. Если это удастся, то $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ будет непустым по лемме 1.7.1. Далее, по построению $F_n \subset U_n$ при $n > 1$, $F_1 \subset U_1$ и $F_1 \subset V$. Значит, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, а значит множество $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ непусто.

Построим по индукции пару последовательностей $x_n \in X$, $\varepsilon_n > 0$ со следующими свойствами:

1. $\widetilde{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subset V \cap U_1$.

2. $\varepsilon_n < 1/n$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

3. $\widetilde{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, $V \cap U_1$ - непустое открытое множество, а значит можно выбрать такие $x_1 \in V \cap U_1$ и $\varepsilon_1 \in (0, 1)$, что $\widetilde{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subset V \cap U_1$. Далее, пусть уже построены $x_1, \ldots, x_n$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Множество $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$ открыто и не пусто, а значит можно выбрать такие $x_{n+1} \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$ и $\varepsilon_{n+1} \in (0, 1/(n+1))$, что $\widetilde{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap U_{n+1}$.

Положим, $F_n = \widetilde{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$. Очевидно, что последовательность F_n удовлетворяет всем нужным свойствам. □

Определение 1.7.2. *Пусть X, Y - метрические пространства, $f : X \to Y$. f называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$, если $x, x' \in X$ и $\rho_X(x, x') < \delta$. f называется липшицевым с константой $L > 0$, если $\rho_Y(f(x), f(x')) \leqslant L\rho_X(x, x')$ для всех $x, x' \in X$. Липшицево отображение с константой $L < 1$ называется сжимающим. f называется изометрическим, если $\rho_Y(f(x), f(x')) = \rho_X(x, x')$ для всех $x, x' \in X$.*

Отметим, что для метрического пространства X и его подмножества A функция $\rho(x, A)$ липшицева с константой 1.

Предложение 1.7.2. *Пусть X, Y - метрические пространства, $f : X \to Y$.*

1. *Если f равномерно непрерывно, то f непрерывно.*

2. *Если f липшицево, то f равномерно непрерывно.*

3. *Если f равномерно непрерывно, а $x_\alpha \in X$ - направленность Коши, то $f(x_\alpha) \in Y$ - тоже направленность Коши.*

Доказательство.

1. Проверим непрерывность f в точке $x_0 \in X$. Для $\varepsilon > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ при $\rho_X(x, x') < \delta$. Отсюда следует, что $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Таким образом, f непрерывно.

2. Это очевидно.

3. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$, если $\rho_X(x, x') < \delta$. Далее, существует такое α_0, что $\rho_X(x_\alpha, x_\beta) < \delta$ для любых $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Но тогда $\rho_Y(f(x_\alpha), f(x_\beta)) < \varepsilon$ для любых $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

□

Предложение 1.7.3 (Теорема Кантора)**.** *Пусть X, Y - метрические пространства, $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, X компактно. Тогда f равномерно непрерывно.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\mathcal{B} = \{f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y)) : y \in Y\}$. Очевидно, что $\mathcal{B}$ - открытое покрытие пространства, а значит по лемме 1.4.4 найдется такое $\delta > 0$, что для любого непустого ограниченного множества $A \subset X$ с $\operatorname{diam} A \leqslant \delta$ найдется такое $y \in Y$, что $A \subset f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y))$. Применяя это к множеству $\{x, x'\}$, где $\rho(x, x') < \delta$ получаем, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ при $\rho_X(x, x') < \delta$. □

Теорема 1.7.2. *Пусть X, Y - метрические пространства, Y полное, $A \subset X$ всюду плотно. Пусть $f : A \to Y$ равномерно непрерывна. Тогда существует и единственна такая равномерно непрерывная функция $\widehat{f} : X \to Y$, что $\widehat{f}|_A = f$.*

Доказательство. Единственность следует из предложения 1.6.1. Докажем существование.

Рассмотрим функцию f как подмножество в $X \times Y$. Чтобы избежать путаницы мы будем это множество называть *графиком* функции f: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset X \times Y$. Покажем, что замыкание этого графика определяет функцию $\widehat{f} : X \to Y$. Пусть $x \in X$. Покажем, что найдется такое $y \in Y$, что $(x, y) \in G = \overline{\Gamma_f}$. Пусть $x_\alpha \in A$ - произвольная направленность элементов A, сходящаяся к x. Тогда $f(x_\alpha)$ - направленность Коши, а значит она сходится к некоторому $y \in Y$. Тогда $(x_\alpha, f(x_\alpha)) \to (x, y)$, а значит $(x, y) \in \Gamma_f$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ таково, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ при $\rho_X(x, x') < \delta$. Докажем, что если $x, x' \in X$, $\rho_X(x, x') < \delta$ и $(x, y), (x', y') \in G$, то $\rho(y, y') \leqslant \varepsilon$. Предположим противное, а именно что $\rho(y, y') > \varepsilon$. Положим, $\gamma = (\rho(y, y') - \varepsilon)/2$, $\beta = (\delta - \rho(x, x'))/2$. Поскольку $(x, y) \in G$, то существует такой элемент $(a, b) \in \Gamma_f$, что $\rho(x, a) < \beta$ и $\rho(y, b) < \gamma$. Аналогично, существует такое $(a', b') \in \Gamma_f$, что $\rho(x', a') < \beta$ и $\rho(y', b') < \gamma$. Но тогда $\rho(a, a') < \delta$ и $\rho(b, b') > \varepsilon$. Это противоречит выбору δ, так как $b = f(a)$ и $b' = f(a')$.

Доказанное выше легко завершает доказательство того, что G определяет равномерно непрерывную функцию. Действительно, если $(x, y), (x, y') \in G$, то выбирая произвольный $\varepsilon > 0$ получаем из результатов предыдущего абзаца, что $\rho(y, y') < \varepsilon$. Значит, $y = y'$. Теперь предыдущий абзац напрямую утверждает равномерную непрерывность функции $\widehat{f} : X \to Y$, определяемой условием $(x, \widehat{f}(x)) \in G$. □

Предложение 1.7.4 (Принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть X - полное метрическое пространство, $f : X \to X$ - сжимающее отображение. Тогда существует и единствен такой $x \in X$, что $f(x) = x$ (этот x называется неподвижной точкой).*

Доказательство. Единственность неподвижной точки очевидна. Докажем существование. Для этого рассмотрим произвольный $x_1 \in X$ и положим $x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_1)$. Докажем, что эта последовательность сходится к некоторому $x \in X$. Если получится это доказать, то $x = \lim f^n(x) = \lim f^{n+1}(x) = \lim f(f^n(x)) = f(\lim f^n(x)) = f(x)$, а значит x - неподвижная точка.

Докажем, что последовательность x_n является последовательностью Коши. Для этого введем $L \in (0, 1)$ - константа липшицевости отображения f. Пусть $m < n$. Легко видеть, что

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(f^{k-1}(x_1), f^{k-1}(x_2)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} L^{k-1}\rho(x_1, x_2) \leqslant$$
$$\leqslant L^{n-1} \sum_{k=0}^{m-n-1} L^k \rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, x_2) L^{n-1}/(1 - L)\ .$$

Отсюда легко вывести, что x_n - последовательность Коши. □

1.8 Теорема Тихонова

Этот параграф целиком будет посвящен доказательству того, что декартово произведение любого семейства компактных пространств компактно.

Определение 1.8.1. *Пусть X - множество, $\mathcal{F}$ - семейство подмножеств в X. $\mathcal{F}$ называется центрированным семейством, если пересечение любого конечного набора элементов из $\mathcal{F}$ не пусто.*

Лемма 1.8.1. *Пусть X - топологическое пространство. X компактно тогда и только тогда, когда для любого центрированного семейства $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств в X выполнено $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть X компактно. Если $\mathcal{F}$ - такое семейство замкнутых подмножеств в X, что $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$. Тогда семейство $\mathcal{U} = \{X\backslash F : F \in \mathcal{F}\}$ является открытым покрытием пространства X. Но тогда $X = \bigcup_{k=1}^{n}(X\backslash F_k)$ для некоторого набора $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$. Но это означает, что $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \varnothing$, а значит $\mathcal{F}$ не является центрированным семейством.

Обратно, пусть пересечение любого центрированного семейства замкнутых подмножеств в X не пусто. Пусть $\mathcal{U}$ - семейство открытых подмножеств пространства X. Если ни одно конечное подсемейство в $\mathcal{U}$ не является покрытием пространства X, то семейство $\mathcal{F} = \{X\backslash U : U \in \mathcal{U}\}$ является центрированным. Но тогда $\bigcap_{U\in\mathcal{U}}(X\backslash U) \neq \varnothing$, а значит $\mathcal{U}$ не является покрытием. $\square$

Пусть X - множество. Определим на множестве $\mathscr{C}(X)$ всех центрированных семейств множества X отношение частичного порядка: $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{F}' \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Лемма 1.8.2. *Пусть X - множество, $\mathcal{F}$ - максимальное центрированное семейство на X.*

1. *Если $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{F}$.*

2. *Если $A \subset X$ пересекается со всеми элементами семейства $\mathcal{F}$, то $A \in \mathcal{F}$.*

Доказательство.

1. Определим семейство $\mathcal{F}'$ состоящее из всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathcal{F}$. Легко видеть, что $\mathcal{F}'$ замкнуто относительно конечных пересечений и состоит из непустых множеств, а значит $\mathcal{F}'$ - центрированное семейство. Вложение $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ и максимальность $\mathcal{F}$ дают равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

2. Раз A пересекается со всеми элементами F, а F замкнуто относительно взятия конечных пересечений, то A пересекается со всеми конечными пересечениями элементов из F. Это означает, что множество $\mathcal{F} \cup \{A\}$ является центрированным семейством, и из максимальности $\mathcal{F}$ вытекает, что $A \in \mathcal{F}$.

$\square$

Лемма 1.8.3. *Пусть X - произвольное множество. Тогда любое центрированное семейство на X вложено в некоторое максимальное центрированное семейство.*

Доказательство. Доказательство основано на применении леммы Цорна (теорема 1.0.1). Достаточно доказать, что $\mathscr{C}(X)$ - индуктивное частично упорядоченное множество. Пусть $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}(X)$ - некоторая цепь. Докажем, что $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathscr{D}} \mathcal{F}$ - центрированное семейство. В этом случае, по определению, $\mathcal{M}$ будет верхней гранью цепи $\mathscr{D}$.

Пусть $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$. Тогда найдутся такие $\mathcal{F}_k \in \mathscr{D}$, $k = 1, \dots, n$, что $A_k \in \mathcal{F}_k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Поскольку $\mathscr{D}$ является цепью, среди $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ есть максимальный $\mathcal{F}$ (так как они все сравнимы между собой). Тогда $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Из центрированности семейства $\mathcal{F}$ следует, что пересечение $\bigcap_{k=1}^n A_k$ не пусто. Таким образом, семейство $\mathcal{M}$ центрировано. $\square$

Теорема 1.8.1 (Тихонов)**.** *Пусть X_m - компактное топологическое пространство для всех $m \in I$. Тогда $X = \prod_{m \in I} X_m$ компактно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное центрированное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств в X. Пусть $\mathcal{M}$ - максимальное центрированное семейство на X, содержащее $\mathcal{F}$. Семейство $\mathcal{M}_m = \{\pi_m(A) : A \in \mathcal{M}\}$ является центрированным и, в силу компактности X_m, пересечение $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} \overline{\pi_m(A)}$ не пусто. Пусть $x_m \in \bigcap_{A \in \mathcal{M}} \overline{\pi_m(A)}$, а $x \in X$ - элемент, компонентами которого служат точки x_m (то есть $\pi_m(x) = x_m$).

Рассмотрим элемент $U = \prod_{m \in I} U_m$ базы топологии на X, содержащий точку x. Пусть $m_1, \dots, m_n \in I$ - те индексы, для которых $U_m \neq X_m$. Тогда $U = \bigcap_{k=1}^n \pi_{m_k}^{-1}(U_{m_k})$. Зафиксируем $k \in \{1, \dots, n\}$. Заметим, что U_{m_k} - окрестность точки x_{m_k}, а значит U_{m_k} пересекается с $\pi_{m_k}(A)$ для любого $A \in \mathcal{M}$, так как $x \in \overline{A}$. Но тогда $\pi_{m_k}^{-1}(U_{m_k})$ пересекается с A для любого $A \in \mathcal{M}$. Из леммы 1.8.2 следует, что $\pi_{m_k}^{-1}(U_{m_k}) \in \mathcal{M}$. Значит, для всех $k = 1, \dots, n$ множество $\pi_{m_k}^{-1}(U_{m_k})$ лежит в M, а значит и их пересечение U также принадлежит $\mathcal{M}$.

Поскольку элементы базы, содержащие точку x, образуют базис окрестностей точки x, легко видеть, что $x \in \overline{A}$ для любого $A \in \mathcal{M}$. Отсюда следует, что $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} \overline{A} \neq \varnothing$. Но тогда $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \supset \bigcap_{A \in \mathcal{M}} \overline{A}$ - тоже непустое множество. Лемма 1.8.1 завершает доказательство, так как у любого центрированного семейства замкнутых подмножеств в X непустое пересечение. $\square$

2 Топологические векторные пространства

Абстрактный функциональный анализ занимается изучением векторных пространств с дополнительной топологической структурой и линейных отображений между ними. Линейные пространства в функциональном пространстве преимущественно полагаются бесконечномерными, поскольку в конечномерном случае линейные операторы успешно изучаются методами линейной алгебры. Однако, в теории линейных дифференциальных и интегральных уравнений, математической физике и некоторых других областях математики часто возникают линейные уравнения, в которых неизвестное принадлежит бесконечномерному пространству (как правило, некоторому пространству функций). Изучение подобных пространств и уравнений в них возможно благодаря наделению их некоторой топологией.

2.0 Предварительные сведения из линейной алгебры

Пусть $\mathbb{K}$ обозначает либо поле $\mathbb{R}$, либо поле $\mathbb{C}$. В дальнейшем мы будем использовать это обозначение для единообразной формулировки утверждений, верных для линейных пространств, как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$. Как и раньше, мы наделяем $\mathbb{K}$ топологией, порожденной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Все линейные пространства по умолчанию будут считаться пространствами над полем $\mathbb{K}$. Будем предполагать, что читателю известны основные определения линейной алгебры, а также основные результаты, касающиеся конечномерных пространств.

Пусть E обозначает линейное пространство. Для множеств $A, B \subset E$ мы определяем их *сумму* $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Для множества $A \subset E$ и скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ мы определяем *произведение* $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\} \subset E$. Для удобства мы будем писать $a + B$, вместо $\{a\} + B$, если $a \in E$. Определим также $-B = \{-b : b \in B\}$. Будем писать $A - B$ вместо $A + (-B)$. Нетрудно видеть, что $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, если $A, B \subset E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Множество $M \subset E$ является *подпространством* в E, если оно непусто, $M + M \subset M$ и $\lambda M \subset M$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$. Множество $A \subset E$ называется *закругленным*, если $\lambda A \subset A$ для любого такого $\lambda \in \mathbb{K}$, что $|\lambda| \leqslant 1$. Множество $A \subset L$ называется *выпуклым*, если $tA + (1 - t)A \subset A$ для любого $t \in [0, 1]$. Выпуклое закругленное множество называется *абсолютно выпуклым*. Сумма двух закругленных (выпуклых, абсолютно выпуклых) множеств также закруглена (выпукла, абсолютно выпукла). Сумма двух подпространств является подпространством. Аналогично, все эти свойства сохраняются при умножении множеств на скаляры.

Подмножество C в линейном пространстве E *поглощает* другое подмножество $A \subset E$, если найдется такое $M > 0$, что $A \subset \lambda C$ для любого $\lambda \geqslant M$. Если C поглощает множества A и B, то оно поглощает также $A \cup B$. Если B к тому же абсолютно выпукло, то оно поглощает $A + B$. Множество B называется *поглощающим*, если оно поглощает все одноточечные подмножества в E (а значит, поглощает все конечные подмножества).

Пусть E, F - два линейных пространства, $u : E \to F$ - отображение. u называется *линейным*, если $u(a + b) = a + b$ и $u(\lambda a) = \lambda u(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$ и $a, b \in E$. Очевидно, что совокупность всех линейных отображений из E в F образует линейное пространство относительно очевидных операций сложения и умножения на скаляры. Это пространство обозначается через $\mathcal{L}(E, F)$.

Лемма 2.0.1. *Пусть E, F - два линейных пространства, $u : E \to F$ - линейное отображение.*

1. *Если $A, B \subset E$, то $u(A + B) = u(A) + u(B)$.*
2. *Если $A \subset E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, то $u(\lambda A) = \lambda u(A)$.*
3. *Если $A \subset E$ закругленное (выпуклое, абсолютно выпуклое), то $u(A) \subset F$ тоже закругленное (соответственно, выпуклое, абсолютно выпуклое).*
4. *Если $A, B \subset F$, то $u^{-1}(A) + u^{-1}(B) \subset u^{-1}(A + B)$.*
5. *Если $A \subset F$ и $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, то $u^{-1}(\lambda A) = \lambda u^{-1}(A)$.*
6. *Если $A \subset F$ закругленное (выпуклое, абсолютно выпуклое), то $u^{-1}(A) \subset E$ тоже закругленное (соответственно, выпуклое, абсолютно выпуклое).*
7. *Если $M \subset E$ - подпространство, то $u(M) \subset F$ тоже подпространство.*
8. *Если $M \subset F$ - подпространство, то $u^{-1}(M) \subset E$ тоже подпространство.*
9. *Если $C \subset E$ - поглощающее множество, а u сюръективно, то $u(C) \subset E$ тоже поглощающее.*
10. *Если $C \subset F$ - поглощающее множество, то $u^{-1}(C) \subset E$ тоже поглощающее.*

Если $u : E \to F$ - линейное отображение между линейными пространствами E и F, то множество $\ker u = \{x \in E : u(x) = 0\} = u^{-1}(\{0\})$ называется *ядром* оператора u. Множество $R(u) = u(E)$ называется его *образом*. Ядро и образ являются подпространствами в E и F соответственно. Линейное отображение u инъективно тогда и только тогда, когда $\ker u = \{0\}$. Биективное линейное отображение между линейными пространствами E и F называется *изоморфизмом*.

Пусть E - линейное пространство, а $M \subset E$ - подпространство. Введем отношение эквивалентности $x \sim_M y \Leftrightarrow x - y \in M$. Классом эквивалентности элемента $x \in E$ является множество $[x]_M = x + M$. На множестве всех классов эквивалентности введем операции $[x]_M + [y]_M = [x + y]_M$ и $\lambda[x]_M = [\lambda x]_M$ (легко видеть, что это корректно определенные отображения). Множество всех классов эквивалентности, снабженное этими операциями, является линейным пространством и называется *факторпространством* E/M. Отображение, $\pi_M : E \to E/M$, заданное по правилу $\pi_M(x) = [x]_M$, линейно, а его ядром является пространство M. Если E/M конечномерно, то число $\operatorname{codim} M = \dim E/M$ называется *коразмерностью* подпространства M. Подпространства в E коразмерности 1 называются *гиперплоскостями*. Подпространство $L \subset E$ является гиперплоскостью, тогда и только тогда, когда $L \neq E$ и не существует таких подпространств $M \subset E$, что $L \subset M$, кроме L и E.

Пусть E, F - линейные пространства, $u; E \to F$ - линейное отображение. Если $M \subset E$ - такое подпространство в E, что $M \subset \ker u$, то можно построить отображение $u_M : E/M \to F$ по формуле $u_M([x]_M) = u(x)$. Это отображение линейно, и имеет место равенство $u = u_M \circ \pi_M$. Отображение u_M - единственное линейное отображение, удовлетворяющее этому равенству. Если $M = \ker u$, то u_M осуществляет изоморфизм между E/M и $u(E)$.

Линейное отображение из пространства E в $\mathbb{K}$ называется *линейным функционалом* на E. Пространство E^* всех функционалов на E называется *алгебраическим сопряженным* к E пространством.

Пусть E - линейное пространство, $f, g : E \to \mathbb{K}$ - два линейных функционала. $\ker f = \ker g$ тогда и только тогда, когда $f = \alpha g$ для некоторого ненулевого $\alpha \in \mathbb{K}$. Таким образом, функционал определяется своим ядром с точностью до умножения на константу. Пусть E - линейное пространство, $L \subset E$ - подпространство. L является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда найдется такой ненулевой функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $L = \ker f$. Более точно, для любой гиперплоскости $L \subset E$, любого $x \in E \backslash L$ и любого $\alpha \in \mathbb{K}$ найдется единственный такой функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $\ker f = L$ и $f(x) = \alpha$.

Полунормой на линейном пространстве E называется такое отображение $p : E \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия (для любых $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$):

1. $p(x) \geqslant 0$.
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.
3. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Если дополнительно $p(x) \neq 0$ для любого отличного от нуля $x \in E$, то p называется *нормой*. Также очень распространено обозначение $||x||$ вместо $p(x)$. Для любой полунормы p введем *открытый и замкнутый единичные шары* $B_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ и $\widetilde{B}_p = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$. Введем также обозначение $\ker p = \{x \in E : p(x) = 0\} = p^{-1}(\{0\})$. Легко видеть, что $\ker p$ - подпространство в E. Если $M \subset \ker p$ - линейное подпространство, то формула $p_M([x]_M) = p(x)$ корректно определяет полунорму на E/M.

Пусть p - полунорма на E. Тогда множества B_p и $\widetilde{B}_p$ - абсолютно выпуклые поглощающие множества. Пусть $B_p \subset A \subset \widetilde{B}_p$. Тогда имеет место очевидное равенство $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : x/\alpha \in A\}$.

Лемма 2.0.2. *Пусть E - линейное пространство, $A \subset E$ - абсолютно выпуклое и поглощающее множество. Тогда существует и единственна такая полунорма $p : E \to \mathbb{R}$, что $B_p \subset A \subset \widetilde{B}_p$. Эта полунорма задается равенством $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : x/\alpha \in A\}$.*

Полунорма, описанная в лемме 2.0.2, называется *функционалом Минковского* множества A. Мы будем обозначать его через m_A.

Пусть E - линейное пространство, A_α, $\alpha \in I$ - семейство подмножеств в E. Если каждое A_α является закругленным (выпуклым, абсолютно выпуклым), то $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ тоже закруглено (выпукло, абсолютно выпукло). Определим для $A \subset E$ следующие множества:

1. $\operatorname{rhull} A = \bigcap_{A \subset B \subset E, B \text{ закруглено}} B$.

2. $\operatorname{chull} A = \bigcap_{A \subset B \subset E, B \text{ выпукло}} B$.

3. $\operatorname{achull} A = \bigcap_{A \subset B \subset E, B \text{ абсолютно выпукло}} B$.

Эти множества называются itзакругленной, выпуклой и абсолютно выпуклой оболочкой множества A соответственно. По определению множество $\operatorname{rhull} A$ ($\operatorname{chull} A$, $\operatorname{achull} A$) - минимальное закругленное (выпуклое, абсолютно выпуклое) множество, содержащее A в качестве подмножества. Именно, если $A \subset C$ и C закруглено (выпукло, абсолютно выпукло), то $\operatorname{rhull} A \subset C$ ($\operatorname{chull} A \subset C$, $\operatorname{achull} A \subset C$).

Пусть E - линейное пространство, $L_\alpha \subset E$, $\alpha \in I$ - семейство подпространств. Тогда $L = \bigcap_{\alpha \in I} L_\alpha$ - подпространство в E. Для произвольного множества $A \subset E$ мы определяем подпространство

$$\operatorname{span} A = \bigcap_{A \subset L \subset E,\, L - \text{ подпространство}} L.$$

Очевидно, что $\operatorname{span} A$ - минимальное подпространство в E, содержащее A. Оно называется *линейной оболочкой* множества A.

Пусть $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \subset E$, E - линейное пространство. Нетрудно проверить, что $\operatorname{chull}(\alpha A) = \alpha \operatorname{chull} A$. Отсюда легко вывести, что если A закруглено, то $\operatorname{chull} A$ тоже закруглено (а значит абсолютно выпукло). Действительно, $\alpha \operatorname{chull} A = \operatorname{chull}(\alpha A) \subset \operatorname{chull} A$, если $\alpha A \subset A$. Значит, имеет место равенство $\operatorname{achull}(A) = \operatorname{chull}(\operatorname{rhull}(A))$.

Лемма 2.0.3. *Пусть E - линейное пространство, $A \subset E$.*

1. $\operatorname{rhull} A = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}: |\alpha| \leqslant 1} \alpha A = \{\alpha x : x \in A, |\alpha| \leqslant 1\}$.

2. $\operatorname{chull} A = \{x = \sum_{k=1}^n t_k x_k : n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^n t_k = 1;\ x_k \in A,\ t_k \geqslant 0 \text{ *при* } k = 1, \dots, n\}$.

3. $\operatorname{span} A = \{x = \sum_{k=1}^n t_k x_k : n \in \mathbb{N},\ x_k \in A,\ t_k \in \mathbb{K} \text{ *при* } k = 1, \dots, n\}$.

Если E_m - линейное пространство для каждого $m \in I$, то на декартовом произведении $E = \prod_{m \in I} E_m$ естественным образом задана структура линейного пространства. А именно, операции сложения и умножения на скаляры действуют покомпонентно: если $x, y \in E$, то $\pi_m(x + y) = \pi_m(x) + \pi_m(y)$, и, если $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, то $\pi_m(\alpha x) = \alpha \pi_m(x)$ для всех $m \in I$. Нам будет полезно следующее элементарно проверяемое утверждение:

Лемма 2.0.4. *Пусть E, F - два линейных пространства, $u : E \to F$ - отображение. u линейно тогда и только тогда, когда множество $\Gamma_u = \{(x, u(x)) : x \in E\}$ - линейное подпространство в $E \times F$.*

2.1 Основные понятия

Определение 2.1.1. *Пусть E - линейное пространство, T - топология на E. Пара (E,T) называется топологическим векторным пространством (кратко - ТВП), если отображения $\sigma : E\times E \to E$ и $\mu : \mathbb{K}\times E \to E$, заданные формулами $\sigma(x,y) = x+y$ и $\mu(\alpha,x) = \alpha x$, непрерывны.*

Как и раньше мы не будем указывать конкретную топологию на ТВП, если это не приведет к недоразумениям.

Пусть E - линейное пространство, T - топология на E. Эта топология называется *инвариантной относительно сдвигов*, если отображения $\tau_a : E \to E$, $\tau_a(x) = a + x$, непрерывны для любого $a \in E$. В этом случае, так как $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$, эти отображения являются гомеоморфизмами. Нетрудно видеть, что если (E,T) - ТВП, то T инвариантна относительно сдвигов. Обратное, в общем случае, неверно.

Предложение 2.1.1. *Пусть E - линейное пространство, T - инвариантная относительно сдвигов топология на E, $a \in E$.*

1. *$U \subset E$ открыто тогда и только тогда, когда $a + U$ открыто.*
2. *$F \subset E$ замкнуто тогда и только тогда, когда $a + F$ замкнуто.*
3. *$N \subset E$ - окрестность нуля тогда и только тогда, когда $a + N$ - окрестность точки a.*
4. *$\operatorname{int}(a + A) = a + \operatorname{int} A$ для любого $A \subset E$.*
5. *$\overline{a + A} = a + \overline{A}$ для любого $A \subset E$.*
6. *Направленность $x_\alpha \in E$ сходится к a тогда и только тогда, когда $(x_\alpha - a) \to 0$.*

Доказательство. Первые три утверждения следуют из непрерывности отображений τ_{-a} и τ_a. Действительно, если $A \subset X$ - открыто (замкнуто, окрестность нуля), то $a+A = \tau_{-a}^{-1}(A)$ - открыто (замкнуто, окрестность точки a). Для доказательства четвертого утверждения заметим, что $a + \operatorname{int} A$ открыто и является подмножеством в $a + A$. Значит, $a + \operatorname{int} A \subset \operatorname{int}(a + A)$. Далее $-a+\operatorname{int}(a+A)$ открыто и является подмножеством в A, а значит $-a+\operatorname{int}(a+A) \subset \operatorname{int} A$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{int}(a + A) \subset a + A$. Доказательство пятого утверждения абсолютно аналогично доказательству четвертого. Наконец, если $x_\alpha \to a$, то $\tau_{-a}(x_\alpha) \to \tau_{-a}(a) = 0$. □

Предложение 2.1.2. *Пусть E - ТВП, $U \subset E$ - окрестность нуля.*

1. *U - поглощающее множество.*
2. *Найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что $V + V \subset U$.*
3. *Если $\alpha \in \mathbb{K}$ - ненулевой скаляр, то αU - тоже окрестность нуля.*
4. *Найдется такая закругленная окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$.*

Доказательство. 1. Покажем, что U поглощает множество $\{x\}$, где $x \in E$. Заметим, что отображение $f : \mathbb{K} \to E$, заданное по формуле $f(\alpha) = \alpha x$ непрерывно. По условию U - окрестность точки $f(0)$, а значит $f^{-1}(U)$ - окрестность нуля в $\mathbb{K}$. Таким образом, найдется такое $M > 0$, что $\alpha \in f^{-1}(U)$ при $|\alpha| \leqslant 1/M$. Это означает, что $\alpha x \in U$ при $|\alpha| \leqslant 1/M$. Это равносильно тому, что $x \in \alpha U$ при $|\alpha| \geqslant M$.

2. Отображение $\sigma : E \times E \to E$, заданное по формуле $\sigma(x, y) = x + y$ непрерывно. По условию U является окрестностью точки $\sigma(0,0)$, а поэтому найдется такая окрестность $N \subset E \times E$ точки $(0,0)$, что $\sigma(N) \subset U$. Далее, по лемме 1.2.1 найдутся такие окрестности нуля $W, W' \subset E$, что $W \times W' \subset N$. Положим, $V = W \cap W'$. Тогда $V + V \subset \sigma(V \times V) \subset \sigma(N) \subset U$.

3. Обозначим $m_\alpha(x) = \alpha x$ - непрерывное отображение пространства E в себя. Если $\alpha \neq 0$, то $m_\alpha^{-1} = m_{1/\alpha}$. Таким образом, $\alpha U = m_{1/\alpha}^{-1}(U)$ - окрестность нуля.

4. Отображение $\mu : \mathbb{K} \times E \to E$, заданное по формуле $\mu(\alpha, x) = \alpha x$ непрерывно. U является окрестностью точки $(0,0)$, а значит, рассуждая как в предыдущем пункте, построим такие окрестности $N \subset \mathbb{K}$ и $M \subset E$ нулей, что $\mu(N \times M) \subset U$. Пусть $\varepsilon > 0$ - такое число, что $\alpha \in N$ при $|\alpha| \leqslant \varepsilon$. Положим, $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}: |\alpha| \leqslant \varepsilon} \alpha M$. По построению $V \subset U$ - закругленная окрестность нуля.

□

Лемма 2.1.1. *Пусть E - линейное пространство, T - инвариантная относительно сдвигов топология на E. (E, T) - ТВП тогда и только тогда, когда найдется такой базис окрестностей нуля $\mathcal{U}$, что выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $U \in \mathcal{U}$ найдется такое $V \in \mathcal{U}$, что $V + V \subset U$.*

2. *Все элементы $\mathcal{U}$ закругленные и поглощающие.*

Доказательство. Пусть (E, T) - ТВП. Тогда рассмотрим совокупность $\mathcal{U}$ всех закругленных окрестностей нуля. Легко проверить, что $\mathcal{U}$ - базис окрестностей нуля (так как в любой окрестности нуля найдется более мелкая закругленная окрестность нуля). Далее, все окрестности нуля поглощающие. Значит, второе свойство выполнено. Наконец, если $U \in \mathcal{U}$, то найдется такая окрестность нуля $W \subset E$, что $W + W \subset U$. Пусть $V \subset W$ - произвольная закругленная окрестность нуля. Тогда $V \in \mathcal{U}$ и $V + V \subset U$.

Пусть теперь дан базис окрестностей нуля $\mathcal{U}$ с вышеперечисленными свойствами. Докажем, что отображение $\mu : E \times E \to E$, заданное по формуле $\mu(x, y) = x + y$, непрерывно. Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in E \times E$ и произвольную окрестность U точки $x_0 + y_0$. В силу инвариантности топологии относительно сдвигов найдется такое $U' \in \mathcal{U}$, что $x_0 + y_0 + U' \subset U$. Рассмотрим такое $V \in \mathcal{U}$, что $V + V \subset U'$. Тогда $(x_0 + V) \times (y_0 + V)$ - окрестность точки (x_0, y_0) и $\sigma((x_0 + V) \times (y_0 + V)) \subset U$. Значит, σ непрерывно в точке (x_0, y_0).

Остается доказать непрерывность отображения $\mu : \mathbb{K} \times E \to E$, заданного по формуле $\mu(\alpha, x) = \alpha x$. Рассмотрим точку $(\alpha_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$. Пусть $U \subset E$ - произвольная окрестность точки $\alpha_0 x_0$. Как и раньше, можно найти такое $U' \in \mathcal{U}$, что $\alpha_0 x_0 + U' \subset U$. Пусть также $V \in \mathcal{U}$ - такой элемент, что $V + V \subset U'$. V является поглощающим и закругленным, а значит найдется такое $M > 0$, что $x_0 \in \lambda V$ при $|\lambda| \geqslant M$. Теперь пусть $n \in \mathbb{N}$ - такое число, что $2^n > |\alpha_0| + 1/M$. Построим последовательность $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения $V_1 + V_1 \subset V$, $V_2 + V_2 \subset V_1$, $\dots$, $V_n + V_n \subset V_{n-1}$. Легко проверить, что $\alpha V_n \subset V$ при $|\alpha| \leqslant 2^n$. Пусть теперь $x \in x_0 + V_n$ и $|\alpha - \alpha_0| \leqslant 1/M$. Тогда $\alpha x - \alpha_0 x_0 = (\alpha - \alpha_0)x_0 + \alpha(x - x_0)$. Так как $|\alpha - \alpha_0| \leqslant 1/M$, получаем, что $(\alpha - \alpha_0)x_0 \in V$. Далее, $|\alpha| \leqslant |\alpha_0| + 1/M$, а $x - x_0 \in V_n$. Значит, $\alpha(x - x_0) \in V$. Отсюда следует, что $\alpha x \in \alpha_0 x_0 + U' \subset U$. Непрерывность отображения μ доказана. $\square$

Предложение 2.1.3. *Пусть E - ТВП, $\mathcal{U}$ - базис окрестностей нуля в E.*

1. *Пусть $A, B \subset E$, A открыто. Тогда $A + B$ открыто.*
2. *$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (A + U)$ для любого $A \subset E$.*
3. *Если $F \subset E$ замкнуто и $x \notin F$, то у x и F найдутся такие окрестности M и N соответственно, что $M \cap N = \varnothing$.*
4. *Следующие утверждения эквивалентны:*
   (a) *E регулярно.*
   (b) *$\{0\} \subset E$ замкнуто.*
   (c) *$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$.*

Доказательство. 1. Действительно, $A + B = \bigcup_{b \in B} (b + A)$ - объединение открытых множеств.

2. Пусть $x \in \overline{A}$. Тогда $x - U$ пересекается с A для любого $U \in \mathcal{U}$ (так как $-U$ - окрестность нуля). А значит $x \in A + U$ для любого $U \in \mathcal{U}$. Обратно, пусть $x \in A + U$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Тогда $x - U$ пересекается с A для любого $U \in \mathcal{U}$. Пусть теперь $V \subset E$ - произвольная закругленная окрестность нуля. По условию найдется такое $U \in \mathcal{U}$, что $U \subset V$. Но тогда $-U \subset V$, а значит $x + V$ пересекается с A. Значит, любая окрестность точки x пересекает A, что влечет $x \in \overline{A}$.

3. Пусть $x \notin F$. Найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $(x + U) \cap F = \varnothing$. Пусть $V \subset E$ - такая окрестность нуля, что $V + V \subset U$. Но тогда $(x + V) \cap (F - V) = \varnothing$. Положим, $M = x + V$, $N = F + \operatorname{int} V$. N - окрестность множества F, так как $F \subset N$ и N открыто.

4. Поскольку $\overline{\{0\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (0 + U) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$, то (b) равносильно (c). В контексте третьего пункта (a) равносильно тому, что E является T_1-пространством, что эквивалентно (b), так как топология инварианта относительно сдвигов.

$\square$

Мы будем называть ТВП E *отделимым*, если для него выполняются эквивалентные условия четвертого пункта предложения 2.1.3.

Заметим, что сумма замкнутых подмножеств в топологическом векторном пространстве не обязательно замкнута. Чтобы преодолеть эту проблему надо на одно из слагаемых наложить дополнительное условие компактности.

Предложение 2.1.4. *Пусть E - ТВП.*

1. *Пусть $A \subset E$ компактно, а $N \subset E$ - окрестность множества A (т.е. $A \subset \operatorname{int} N$). Тогда найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $A + U \subset N$.*

2. *Пусть $A \subset E$ компактно, а $B \subset E$ замкнуто. Тогда $A + B \subset E$ замкнуто.*

3. *Если $A, B \subset E$ компактны, то $A + B$ компактно.*

Доказательство. 1. Введем для каждой окрестности нуля $U \subset E$ множество $C_U = \{x \in E : x + U \subset N\}$. Пусть $V \subset E$ - такая окрестность нуля, что $V + V \subset U$. Тогда $C_U + V \subset C_V$. Значит, $\operatorname{int} C_U \subset C_V$. Пусть теперь $G_U = \operatorname{int} C_U$. Тогда для любой точки $x \in A$ найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $x \in G_U$. Действительно, найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что $x \in C_V$, а затем достаточно взять такую окрестность нуля $U \subset E$, что $U + U \subset V$. Ввиду компактности A найдется такой конечный набор $U_1, \ldots, U_n$ окрестностей нуля, что $A \subset \bigcup_{k=1}^n G_{U_k}$. Пусть $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$. Тогда $G_{U_k} \subset G_U$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Значит, $A \subset G_U$. Отсюда следует, что $A + U \subset N$.

2. Пусть $x \notin A + B$. Значит, множества $x - A$ и B не пересекаются. Раз $x - A$ компактно, а $E \backslash B$ - открыто, то найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $x - A + U \subset E \backslash B$. Значит, множества $x - A + U$ и B не пересекаются. Отсюда следует, что множество $x + U$ не пересекает $A + B$. Значит, $x \notin \overline{A + B}$.

3. Действительно, если $\mu : E \times \to E$ - отображение, заданное по формуле $\mu(x, y) = x + y$, то $A + B = \mu(A \times B)$. Значит, $A + B$ компактно, так как $A \times B$ компактно, а μ непрерывно. □

Предложение 2.1.5. *Пусть E - ТВП, $A \subset E$.*

1. *Если A закруглено (выпукло, абслолютно выпукло), то $\overline{A}$ также закруглено (выпукло, абсолютно выпукло).*

2. *Если A закруглено и $0 \in \operatorname{int} A$, то $\operatorname{int} A$ закруглено.*

3. *Если A - подпространство в E, то $\overline{A}$ - также подпространство.*

4. *Если A выпукло, $x \in \operatorname{int} A$, $y \in \overline{A}$, то $tx + (1 - t)y \in \operatorname{int} A$ при $t \in (0, 1]$.*

5. *Если A выпукло, то $\operatorname{int} A$ тоже выпукло. Если $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, то $\overline{A} = \overline{\operatorname{int} A}$.*

6. *Пусть A абсолютно выпукло.* $\operatorname{int} A$ *не пусто тогда и только тогда, когда* $0 \in \operatorname{int} A$.

7. *Если A абсолютно выпукло, то* $\operatorname{int} A$ *тоже абсолютно выпукло.*

Доказательство. 1. A закруглено, если $\lambda A \subset A$ для любого такого $\lambda \in \mathbb{K}$, что $|\lambda| \leqslant 1$. Из непрерывности умножения на скаляры тогда следует, что $\lambda \overline{A} \subset \overline{\lambda A} \subset \overline{A}$, если $\lambda A \subset A$. Значит, $\overline{A}$ закруглено. Остальные случаи разбираются аналогично.

2. Если $x \in \operatorname{int} A$, то найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $x + U \subset A$. Но тогда $\lambda x + \lambda U \subset A$ при $|\lambda| \leqslant 1$. Если $\lambda \neq 0$, то λU - окрестность нуля, а значит $\lambda x \in \operatorname{int} A$. В противном случае $\lambda x = 0 \in \operatorname{int} A$.

3. Доказательство аналогично доказательству первого пункта.

4. Обозначим $U = \operatorname{int} A$, $F = \overline{A}$. Докажем, что $tU + (1-t)F \subset U$ при $t \in (0, 1]$. Множество tU открыто, а значит $tU + (1-t)F$ тоже открыто. Значит, достаточно показать, что $tU + (1-t)F \subset A$. Положим, $x \in U$. Тогда $tF \subset \overline{tA} \subset tA + (1-t)(U-x) = tA + (1-t)U - (1-t)x \subset A - (1-t)x$. Отсюда следует, что $(1-t)x + tF \subset A$ для любого $x \in U$.

5. Это легко следует из предыдущего пункта.

6. Если $x \in \operatorname{int} A$, то $-x \in A$. Тогда $0 = 1/2\, x + 1/2\, (-x) \in \operatorname{int} A$.

7. Это очевидно с учетом уже доказанного.

□

Следствие. *Если E - ТВП, то у E найдется базис окрестностей нуля, состоящий из замкнутых закругленных множеств.*

Предложение 2.1.6. 1. *Если E - ТВП, а $L \subset E$ - подпространство, то L - ТВП относительно топологии, индуцированной из E.*

2. *Если E_m, $m \in I$ - семейство ТВП, то $\prod_{m \in I} E_m$ - ТВП относительно топологии декартова произведения.*

Доказательство. 1. Непрерывность операций сложения и умножения на скаляры в L следует из того, что они являются сужениями на L непрерывных операций из E.

2. Элементарное доказательство непрерывности операций в $\prod_{m \in I} E_m$ основано на рассмотрении направленностей (детали оставляются читателю).

□

Предложение 2.1.7. *Пусть E, F - ТВП, $u : E \to F$ - линейное отображение. u непрерывно тогда и только тогда, когда u непрерывно в нуле.*

Доказательство. Пусть u непрерывно в нуле. Докажем, что u непрерывно в точке $x \in E$. Если $u(x) + U$ - окрестность точки $u(x)$ в F, то U - окрестность нуля, а значит найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что $u(V) \subset U$. Но тогда $u(x + V) \subset u(x) + U$. Значит, u непрерывно в x. □

Следствие. *Если E - линейное пространство, а T_1, T_2 - две топологии на E, превращающие E в ТВП, обладающие общим базисом окрестностей нуля, то $T_1 = T_2$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим тождественное отображение $I : E \to E$. Оно линейно и непрерывно в нуле как отображение из (E, T_1) в (E, T_2) и наоборот. Значит, по предложению 2.1.7 оно является гомеоморфизмом, а следовательно $T_1 = T_2$. □

Предложение 2.1.8. *Пусть E - ТВП, $f : E \to \mathbb{K}$ - линейный функционал. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f непрерывно.*
2. *$\ker f$ замкнуто.*
3. *Найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что f ограничен на U.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Действительно, $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ замкнуто, если f непрерывно.

$2 \Rightarrow 3$. Если $f = 0$, то доказывать нечего. Иначе возьмем такое $x \in E$, что $f(x) = 1$ и найдем такую закругленную окрестность нуля $U \subset E$, что $x + U$ не пересекается с $\ker f$ (это можно сделать так как $\ker f$ замкнуто). Легко видеть, что $|f(y)| < 1$ при $y \in U$ так как иначе, нашелся бы такой $z \in U$, что $f(z) = -1$ (поскольку U закруглено), а тогда $x + z \in \ker f$.

$3 \Rightarrow 1$. Возьмем произвольный $\varepsilon > 0$ и обозначим через C такое положительное число, что $|f(x)| < C$ для всех $x \in U$. Легко видеть, что $f(\varepsilon/C \ \ U)$ есть подмножество ε-шара с центром в нуле в пространстве $\mathbb{K}$. Таким образом, f непрерывно в нуле. □

Лемма 2.1.2. *Пусть E - ТВП, $L \subset E$ - гиперплоскость. Тогда либо L замкнуто, либо L всюду плотно.*

Доказательство. Если L не замкнуто, то $\overline{L}$ - подпространство в E, которое содержит L и не совпадает с ним. Отсюда следует, что $\overline{L} = E$, так как L - гиперплоскость. □

Предложение 2.1.9. *Пусть E - ТВП, $p : E \to \mathbb{K}$ - полунорма. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *p непрерывна.*
2. *p непрерывна в нуле.*
3. *B_p - окрестность нуля.*
4. *$\widetilde{B}_p$ - окрестность нуля.*

Доказательство. 2 $\Rightarrow$ 3. Действительно, $B_p = p^{-1}(B)$, где $B = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| < 1\}$. Если p непрерывно в нуле, то B_p - окрестность нуля, так как B - окрестность нуля.

3 $\Rightarrow$ 4. Это очевидно, так как $B_p \subset \widetilde{B}_p$.

4 $\Rightarrow$ 1. Докажем непрерывность в точке $x \in E$. Если $y \in x + \varepsilon\widetilde{B}_p$, то $|p(y) - p(x)| \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что p непрерывно в точке x, так как $\varepsilon\widetilde{B}_p$ - окрестность нуля для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

Предложение 2.1.10. *Пусть X - произвольное топологическое пространство, E - ТВП.*

1. *Если $f, g : X \to E$ - два непрерывных в точке $x \in X$ отображения, то $f + g$ также непрерывно в точке x.*

2. *Если $f : X \to E$ и $\alpha : X \to \mathbb{K}$ непрерывны в точке $x \in X$, то αf также непрерывно в точке x.*

Доказательство. Доказательство абсолютно аналогично доказательству предложения 1.2.7. Детали предоставляются читателю. $\square$

Из предложения 2.1.10 следует, что для любых двух ТВП E, F непрерывные линейный операторы из E в F образуют линейное пространство. Мы будем обозначать его через $\mathcal{L}_c(E, F)$.

2.2 Локально выпуклые пространства

Пусть E - линейное пространство, p, q - две полунормы на E. Будем писать $p \leqslant q$, если $p(x) \leqslant q(x)$ для всех $x \in E$. Таким образом, мы определяем отношение частичного порядка на полунормах. Легко видеть, что $p \leqslant q$ тогда и только тогда, когда $B_q \subset B_p$ ($\widetilde{B}_q \subset \widetilde{B}_p$). Пусть $\mathcal{P}$ - некоторое направленное множество полунорм на E. Введем обозначение

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \{x + \varepsilon B_p : x \in E, \varepsilon > 0\}.$$

Таким образом, $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ обозначает совокупность всех ε-шаров с центрами в точках пространства E по каждой полунорме из $\mathcal{P}$.

Предложение 2.2.1. *Пусть E - линейное пространство, $\mathcal{P}$ - направленное семейство полунорм на E.*

1. *$\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ - база топологии на E.*

2. *Совокупность множеств $\mathcal{U} = \{\varepsilon\widetilde{B}_p : \varepsilon > 0, p \in \mathcal{P}\}$ - базис окрестностей нуля в топологии, порожденной базой $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$.*

3. *Топология, порожденная базой $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ превращает E в ТВП.*

Доказательство.

1. Легко видеть, что объединение элементов множества $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ есть E. Пусть теперь $x \in (x_1 + \varepsilon_1 B_{p_1}) \cap (x_2 + \varepsilon_2 B_{p_2})$. Положим, $\delta = \min\{\varepsilon_1 - p_1(x - x_1), \varepsilon_2 - p_2(x - x_2)\}$. Далее, пусть $p \in \mathcal{P}$ - такая полунорма, что $p \geqslant p_1, p_2$. Тогда $x + \delta B_p \subset (x_1 + \varepsilon_1 B_{p_1}) \cap (x_2 + \varepsilon_2 B_{p_2})$. Значит, $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ - база топологии.

2. Легко видеть, что множества из $\mathcal{U}$ являются окрестностями нуля в топологии, порожденной базой $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$. Покажем теперь, что для любого такого элемента U базы $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, содержащего ноль, найдется такое $V \in \mathcal{U}$, что $V \subset U$. По условию U имеет вид $x + \varepsilon B_p$ для некоторых $x \in E$, $p \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $0 \in U$, получаем, что $p(x) < \varepsilon$. Тогда для любого $\delta \in (0, \varepsilon - p(x))$ имеет место вложение $\delta \widetilde{B}_p \subset U$. Теперь лемма 1.3.1 завершает доказательство.

3. Воспользуемся леммой 2.1.1. Докажем, что топология, порожденная базой $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ инвариантна относительно сдвигов. Заметим, что если $U \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ и $a \in E$, то $a + U \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}$. Значит, если $V \subset E$ - открыто, то V есть объединение элементов базы $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, откуда следует, что $a + V$ также открыто. Значит, топология на E инвариантна относительно сдвигов. Далее, базис окрестностей нуля, приведенный во втором пункте состоит из закругленных и поглощающих множеств, а также имеет место очевидное вложение $\varepsilon/2\ \widetilde{B}_p + \varepsilon/2\ \widetilde{B}_p \subset \varepsilon \widetilde{B}_p$. Значит, по лемме 2.1.1, E - ТВП.

□

Для топологии, описанной в предложении 2.2.1 введем обозначение $T_{\mathcal{P}}$.

Предложение 2.2.2. *Пусть E - линейное пространство, $\mathcal{P}$ - направленное семейство полунорм на E, топология на E совпадает с $T_{\mathcal{P}}$.*

1. *E отделимо тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ найдется такое $p \in \mathcal{P}$, что $p(x) \neq 0$.*

2. *Направленность $x_\alpha \in E$ сходится к $x \in E$ тогда и только тогда, когда $p(x_\alpha - x) \to 0$ для любого $p \in \mathcal{P}$.*

3. *Если $\mathcal{P} = \{p\}$, где p - норма, то топология $T_{\mathcal{P}}$ порождается метрикой $\rho(x, y) = p(x - y)$.*

4. *Пусть F - еще одно линейное пространство с направленным семейством полунорм $\mathcal{Q}$, а $u : E \to F$ - линейное отображение. и непрерывно по отношению к топологиям $T_{\mathcal{P}}$ и $T_{\mathcal{Q}}$ тогда и только тогда, когда для любого $q \in \mathcal{Q}$ найдутся такие $p \in \mathcal{P}$ и $C > 0$, что $q(u(x)) \leqslant Cp(x)$ для любого $x \in E$.*

5. *Линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$ непрерывен тогда и только тогда, когда найдутся такие $p \in \mathcal{P}$ и $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant Cp(x)$ для всех $x \in E$.*

6. *Полунорма $q : E \to \mathbb{K}$ непрерывна тогда и только тогда, когда найдутся такие $p \in \mathcal{P}$ и $C > 0$, что $q(x) \leqslant Cp(x)$ для всех $x \in E$.*

7. *Пусть L - линейное подпространство в E, наделенное индуцированной топологией. Тогда топология в L совпадает с $T_{\mathcal{P}|_L}$, где $\mathcal{P}|_L = \{p|_L : p \in \mathcal{P}\}$.*

Доказательство. 1. Действительно, это легко следует из предложения 2.1.3 и рассмотрения базиса окрестностей нуля, приведенного во втором пункте предложения 2.2.1.

2. Направленность x_α сходится к x тогда и только тогда, когда направленность $y_\alpha = x_\alpha - x$ сходится к нулю. Далее, используя базис окрестностей нуля из предложения 2.1.3, получаем, что $y_\alpha \to 0$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что $y_\alpha \in \varepsilon\widetilde{P}$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Это равносильно тому, что для всех $p \in \mathcal{P}$ имеет место сходимость $p(x_\alpha - x) \to 0$.

3. Это легко выводится из предложения 1.2.3.

4. Непрерывность u влечет, что для любого $q \in \mathcal{Q}$ найдутся такие $p \in \mathcal{P}$ и $\delta > 0$, что $u(\delta\widetilde{B}_p) \subset \widetilde{B}_q$. Обозначая $C = 1/\delta$, получаем, что $q(u(x)) \leqslant Cp(x)$ для всех $x \in E$.

   Обратно, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $q \in \mathcal{Q}$. Тогда найдутся такое $p \in \mathcal{P}$ и такое $C > 0$, что $q(u(x)) \leqslant Cp(x)$ для всех $x \in E$. Но тогда выбирая $\delta = \varepsilon/C$, получим, что $u(\delta\widetilde{B}_p) \subset \varepsilon\widetilde{B}_q$. Значит, u непрерывно в нуле.

5. Это частный случай предыдущего пункта.

6. Полунорма q непрерывна тогда и только тогда, когда $\widetilde{B}_q$ - окрестность нуля. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\varepsilon\widetilde{B}_p \subset \widetilde{B}_q$ для некоторых $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. Что, наконец, равносильно неравенству $q(x) \leqslant p(x)/\varepsilon$ для всех $x \in E$.

7. Действительно, у индуцированной из E топологии и топологии $T_{\mathcal{P}|_L}$ есть общий базис окрестностей нуля, составленный из множеств вида $\varepsilon\widetilde{B}_p \cap L$, где $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathcal{P}$.

$\square$

Следствие. *Пусть E - линейное пространство, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ - два направленных семейства полунорм на E. Топология $T_\mathcal{P}$ слабее, чем топология $T_\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда для любой полунормы $p \in \mathcal{P}$ найдутся такие $q \in \mathcal{Q}$ и $C > 0$, что $p(x) \leqslant Cq(x)$ для всех $x \in E$.*

Предложение 2.2.3. *Пусть E - ТВП, а $\mathcal{U}$ - базис окрестностей нуля в E, состоящий из абсолютно выпуклых множеств. Тогда семейство $\mathcal{P} = \{m_U : U \in \mathcal{U}\}$, составленное из функционалов Минковского множеств базиса $\mathcal{U}$, является направленным семейством полунорм на E, а топология на E совпадает с $T_\mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $U, V \in \mathcal{U}$. Найдем такое $W \in \mathcal{U}$, что $W \subset U \cap V$. Тогда $m_W \geqslant m_U, m_V$. Значит, $\mathcal{P}$ - направленное множество полунорм. Теперь, множества вида $\varepsilon\widetilde{B}_p$, где $p \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$, являются окрестностями нуля в E, а значит образуют там базис окрестностей нуля, поскольку для любого $U \in \mathcal{U}$ имеет место вложение $1/2\ \widetilde{B}_{m_U} \subset U$. Значит, у топологии на E и топологии $T_\mathcal{P}$ есть общий базис окрестностей нуля, а значит они совпадают. $\square$

Предложение 2.2.2 показывает, что топология на E задается некоторым направленным семейством полунорм тогда и только тогда, когда в E есть базис окрестностей нуля, состоящий из абсолютно выпуклых множеств.

Определение 2.2.1. *ТВП E называется локально выпуклым пространством (ЛВП), если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такая выпуклая окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$. Эквивалентно, E - ЛВП, если у E есть базис выпуклых окрестностей нуля.*

Лемма 2.2.1. *Пусть E - ТВП. Следующие утверждения равносильны:*

1. *E - ЛВП.*

2. *В E найдется базис окрестностей нуля, составленный из абсолютно выпуклых замкнутых множеств.*

3. *Топология на E совпадает с $T_{\mathcal{P}}$ для некоторого направленного семейства полунорм $\mathcal{P}$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Достаточно найти для каждой окрестности нуля $U \subset E$ такую абсолютно выпуклую замкнутую окрестность $W \subset E$, что $W \subset U$. Сначала найдем такую окрестность нуля $N \subset E$, что $\overline{N} \subset U$. Далее выберем такую выпуклую окрестность нуля $M \subset U$, что $M \subset N$. И, наконец, рассмотрим такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset M$. Положим теперь $W = \overline{\operatorname{chull} V}$. Поскольку V закруглено, получаем, что $\operatorname{chull} V$ абсолютно выпукло. Также, по определению $\operatorname{chull} V \subset M$. Далее, $\overline{\operatorname{chull} V} \subset \overline{N} \subset U$. Значит, W - искомая замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля.

$2 \Rightarrow 3$. Это гарантируется предложением 2.2.3.

$3 \Rightarrow 1$. На E имеется базис окрестностей нуля, состоящий из множеств вида $\varepsilon \widetilde{B}_p$, $\varepsilon > 0$, $p \in \mathcal{P}$. Все эти множества выпуклы. □

Метрику ρ на линейном пространстве E мы называем инвариантной относительно сдвигов, если $\rho(x, y) = \rho(x + a, y + a)$ для любых $x, y, a \in E$.

Предложение 2.2.4. *Пусть E - отделимое ЛВП. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *E метризуемо.*

2. *У E найдется не более чем счетный базис окрестностей нуля.*

3. *Топология на E порождается некоторой неубывающей последовательностью полунорм $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$, причем для любого $x \in E$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $p_k(x) \neq 0$.*

4. *Топология на E порождается некоторой инвариантной относительно сдвигов метрикой ρ.*

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 2$ и $4 \Rightarrow 1$ очевидны.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ - некоторый базис окрестностей нуля в E. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем такую абсолютно выпуклую окрестность нуля $V_k \subset E$, что $V_k \subset U_k$. Пусть теперь $W_n = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$. Тогда $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ - базис окрестностей нуля. По предложению 2.2.3 топология на E порождается последовательностью полунорм $m_{W_1} \leqslant m_{W_2} \leqslant \ldots$. По условию E отделимо, а значит, ввиду предложения 2.2.2, для каждого $x \in E$ должен найтись такой $k \in \mathbb{N}$, что $m_{W_k}(x) \neq 0$.

$3 \Rightarrow 4$. Определим $\rho(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \min\{1, p_k(x-y)\}/2^k$. Нетрудно проверить, что ρ является инвариантной относительно сдвигов метрикой. Остается проверить, что топология на E порождается метрикой ρ. Введем обозначение $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ и рассмотрим элемент U базы $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ топологии на E. U имеет вид $x + \varepsilon B_{p_k}$ для некоторых $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если $y \in U$ и $\rho(y', y) < \varepsilon - p_k(x - y)$, то $y' \in U$. Значит, U открыто относительно метрики ρ. Пусть теперь даны $x \in V \subset E$, где V - открытое множество относительно метрики ρ. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что $y \in V$ для всех таких $y \in E$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Далее найдем такой $k \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=k}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon/2$. Тогда $x + \varepsilon/2k\ B_{p_k} \subset V$. Из предложения 1.2.2 теперь следует, что топология на E порождена метрикой ρ. □

Лемма 2.2.2. *Пусть E - метризуемое ЛВП, ρ - некоторая инвариантная относительно сдвигов метрика, порождающая топологию на E, $x_\alpha \in E$ - направленность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *x_α - направленность Коши относительно метрики ρ.*
2. *Для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое α_0, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.*
3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой непрерывной полунормы $p : E \to \mathbb{K}$ найдется такое α_0, что $p(x_\alpha - x_\beta) < \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть U - окрестность нуля в E. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x \in U$, если $\rho(x, 0) < \varepsilon$. Далее найдется такой α_0, что $\rho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$, если $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Но тогда $\rho(x_\alpha - x_\beta, 0) = \rho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Отсюда получаем, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть p - непрерывная полунорма на E. Тогда εB_p - окрестность нуля для любого $\varepsilon > 0$. Значит найдется такое α_0, что $x_\alpha - x_\beta \in \varepsilon B_p$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Это в свою очередь означает, что $p(x_\alpha - x_\beta) < \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть U - окрестность нуля. Найдем такую абсолютно выпуклую окрестность нуля W, что $W \subset U$. Найдется такой α_0, что $m_W(x_\alpha - x_\beta) \leqslant 1/2$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Но тогда $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть дан $\varepsilon > 0$. Тогда $U = \{x \in E : \rho(x, 0) < \varepsilon\}$ - окрестность нуля. Найдется такой α_0, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Но тогда $\rho(x_\alpha - x_\beta, 0) = \rho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. □

2.3 Полнота в топологических векторных пространствах

Определение 2.3.1. *Пусть E - ТВП. Направленность $x_\alpha \in E$ называется направленностью Коши, если для любой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое α_0, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ для любых $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.*

Предложение 2.3.1. *Пусть E - ТВП, $x_\alpha \in E$ - направленность.*

1. *Если x_α сходится к некоторому $x \in E$, то x_α - направленность Коши.*

2. *Если x_α - направленность Коши, F - ТВП, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор, то $u(x_\alpha)$ - направленность Коши.*

Доказательство. 1. Пусть U - окрестность нуля в E. Выберем такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $V + V \subset U$. Тогда найдется такой α_0, что $x_\alpha \in x + V$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тогда $x_\alpha - x_\beta \subset V - V \subset U$, если $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0 >$

2. Пусть U - окрестность нуля в F. Тогда найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что $u(V) \subset U$. Далее найдется такое α_0, что $x_\alpha - x_\beta \in V$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Отсюда следует, что $u(x_\alpha) - u(x_\beta) \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

□

Следствие. *Пусть E, F - ТВП, $u : E \to F$ - линейный гомеоморфизм. Тогда если E полно, то и F полно.*

Определение 2.3.2. *Пусть E - отделимое ТВП. E называется полным, если любая направленность Коши в E имеет предел. Полное метризуемое ЛВП называется пространством Фреше.*

Предложение 2.3.2. *Пусть E - отделимое ТВП, $L \subset E$ - линейное подпространство.*

1. *Если E полно, а L замкнуто, то L полно.*

2. *Если L полно, то L замкнуто.*

Доказательство. 1. Пусть $x_\alpha \in L$ - направленность Коши (в смысле пространства L). Поскольку топология на L индуцирована из E, нетрудно видеть, что x_α - направленность Коши в E. Но тогда найдется такое $x \in E$, что $x_\alpha \to x$. Значит, $x \in L$ и $x_\alpha \to x$ в смысле пространства L.

2. Пусть $x_\alpha \in L$ - направленность, сходящаяся в E к точке $x \in E$. Тогда x_α - направленность Коши в E, а значит и в L. Таким образом, у x_α есть предел в пространстве L, который совпадает с x ввиду отделимости E. Значит, $x \in L$, а L замкнуто.

□

Предложение 2.3.3. *Пусть E - ТВП, $K \subset E$ - компакт, а $x_\alpha \in K$ - направленность Коши. Тогда существует такое $x \in K$, что $x_\alpha \to x$.*

Доказательство. Пусть $x \in K$ не является пределом направленности x_α. Тогда найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что для любого α найдется такой $\beta \geqslant \alpha$, что $x_\beta \notin V$. Пусть теперь $U \subset E$ - такая окрестность нуля, что $U + U \subset V$, а индекс α_0 выбран так, что $x_\alpha - x_\beta \in U$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. В этом случае $x_\alpha \notin x + U$ для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$, так как в противном случае все элементы направленности начиная с α_0 будут лежать в V.

Значит, если у направленности x_α не существует предела в K, то для каждого $x \in K$ найдется такая открытая окрестность нуля U_x и такое α_x, что $x_\alpha \notin x + U_x$, если $\alpha \geqslant \alpha_x$. Ввиду компактности K найдется такой конечный набор $x_1, \ldots, x_n \in K$, что $K \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + U_{x_k})$. Но это означает, что при $\alpha \geqslant \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$ элемент x_α не лежит в K. □

Теорема 2.3.1. *Пусть E, F - ТВП, $L \subset E$ - всюду плотное подпространство, $u : L \to F$ - непрерывный линейный оператор. Если F полно, то существует и единствен такой непрерывный линейный оператор $\widetilde{u} : E \to F$, что $\widetilde{u}|_L = u$.*

Доказательство. Введем обозначение $\Gamma_u = \{(x, u(x)) : x \in L\} \subset E \times F$. Докажем, что множество $G = \overline{\Gamma_u}$ определяет непрерывный линейный оператор из E а F. Очевидно, что G - линейное подпространство в $E \times F$.

Пусть $x \in E$. Тогда найдется такая направленность $x_\alpha \in L$, что $x_\alpha \to x$. Из предложения 2.3.1 следует, что $u(x_\alpha)$ - направленность Коши в F, а значит она сходится к некоторому $y \in F$. По определению, пара (x, y) лежит в G.

Пусть теперь $x \in E$, $y, y' \in F$ и $(x, y), (x, y') \in G$. Тогда $(0, y - y') \in G$, так как G - линейное подпространство в $E \times F$. Но тогда найдется направленность $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Gamma_u$, сходящаяся к $(0, y - y')$. Но это означает, что $x_\alpha \to 0$, а значит, в силу единственности предела в F, $y - y' = \lim u(x_\alpha) = u(0) = 0$. Значит, G определяет линейное отображение $\widetilde{u}$ из E в F.

Остается проверить непрерывность отображения $\widetilde{u}$ в нуле. Пусть $U \subset F$ - замкнутая окрестность нуля. По условию найдется такая открытая окрестность нуля $V \subset L$, что $u(V) \subset U$. Раз L наделено индуцированной из E топологией, то $V = L \cap V'$, где $V' \subset E$ открыто. Раз V' содержит ноль, то V' - окрестность нуля. Пусть теперь $x \in V'$. Поскольку пара $(x, \widetilde{u}(x))$ лежит в G, найдется такая направленность $x_\alpha \in L$, что $(x_\alpha, u(x_\alpha)) \to (x, \widetilde{u}(x))$. В этом случае найдется такой α_0, что $x_\alpha \in V'$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Значит, $u(x_\alpha) \in U$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Из замкнутости U следует, что $\widetilde{u}(x) \in U$. Это означает, что $\widetilde{u}(V') \subset U$. Далее, поскольку замкнутые окрестности нуля в F образуют базис, получаем непрерывность $\widetilde{u}$. □

Следствие. *Пусть E - ТВП, $L \subset E$ - всюду плотное подпространство, а $f : L \to \mathbb{K}$ - непрерывный линейный функционал. Тогда найдется единственный такой непрерывный линейный функционал $\widetilde{f} : E \to \mathbb{K}$, что $\widetilde{f}|_L = f$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.3.1, это следует из полноты $\mathbb{K}$. □

2.4 Конечномерные топологические векторные пространства

Введем некоторые обозначения. Нормой $||\cdot||_1$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ будем обозначать норму $||x||_1 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Также нам понадобится базис пространства $\mathbb{K}^n$ составленный из векторов $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, \ldots, n$ (единственная ненулевая компонента находится в k-ой позиции и равна 1). Наконец, пусть $\pi_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ обозначает проекцию на k-ый множитель (то есть $\pi_k(x) = x_k$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Предложение 2.4.1. *Пусть топология на $\mathbb{K}^n$ задана нормой $||\cdot||_1$.*

1. *Пространство $\mathbb{K}^n$ отделимо и полно.*

2. *Если E - произвольное ТВП, а $u : \mathbb{K}^n \to E$ - линейное отображение, то u непрерывно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе введем обозначение $y_k = u(e_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $u(x) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через π_k отображение из $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}$, которое вектору $x = (x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляет число x_k. Тогда π_k - непрерывное линейное отображение и $u(x) = \sum_{k=1}^n \pi_k(x) y_k$. Теперь заметим, что отображение, которое сопоставляет точке $x \in \mathbb{K}^n$ вектор $\pi_k(x) y_k$ непрерывно для всех $k = 1, \ldots, n$, так как π_k непрерывно и умножение на скаляры также непрерывно. Наконец, u непрерывно как сумма непрерывных отображений (см. предложение 2.1.10). □

Теорема 2.4.1. *Пусть E - конечномерное векторное пространство. Тогда на E существует ровно одна топология, превращающая E в отделимое топологическое векторное пространство. Более того, пространство E, наделенное этой топологией обладает следующими свойствами:*

1. *E полно.*

2. *Если F - произвольное ТВП, а $u : E \to F$ - линейное отображение, то u непрерывно.*

Доказательство. Доказывать будем индукцией по $n = \dim E$. Положим, $n = 1$, и пусть E наделено некоторой топологией, превращающей его в отделимое ТВП. Рассмотрим любой изоморфизм $u : \mathbb{K} \to E$. Он непрерывен, если на $\mathbb{K}$ топологию породить нормой $||\cdot||_1$. С другой стороны u^{-1} - линейный функционал на E, ядро которого равно $\{0\}$. Поскольку E отделимо, ядро функционала u^{-1} замкнуто, откуда следует, что u^{-1} непрерывно. Значит, u - гомеоморфизм. Легко видеть, что отсюда вытекают свойства 1 и 2 для пространства E. Таким образом, любое одномерное отделимое ТВП полно и произвольное линейное отображение из такого ТВП в любое другое ТВП будет непрерывным. Пусть теперь на одномерном пространстве E заданы две топологии T_1 и T_2 превращающие E в отделимое ТВП. Тогда тождественное отображение I непрерывно как отображение из (E, T_1) в (E, T_2) и наоборот (то есть I - гомеоморфизм). Это означает, что $T_1 = T_2$.

Предположим теперь, что теорема доказана для всех таких F, что $\dim F \leqslant n$. Пусть E - произвольное отделимое ТВП размерности $n+1$ и $u : \mathbb{K}^{n+1} \to E$ - изоморфизм. Докажем, что u - гомеоморфизм, если наделить $\mathbb{K}^{n+1}$ топологией, порожденной нормой $||\cdot||_1$. Действительно, u непрерывно, а значит остается доказать, что u^{-1} непрерывно. Пусть $\alpha_k : E \to \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n+1$. обозначает отображение $\pi_k \circ u^{-1}$, где $\pi_k : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ - проекция. Ядром отображения α_k служит n-мерное подпространство в E, а значит, по предположению индукции оно полно. Значит, оно замкнуто, откуда следует непрерывность α_k, $k = 1, \ldots, n+1$. Далее, легко видеть, что $u^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k(x) e_k$, $x \in E$. Значит, отображение u - гомеоморфизм. Отсюда, как и в рассмотренном ранее случае $n = 1$ следует, что E полно и любое линейное отображение из E в произвольное ТВП непрерывно. Теперь, предполагая, что на E заданы две топологии T_1 и T_2, превращающие E в отделимое ТВП, легко вывести, что они совпадают, так как тождественное отображение пространства E в себя будет гомеоморфизмом между (E, T_1) и (E, T_2). □

Следствие. *Пусть E - отделимое ТВП. Тогда все конечномерные подпространства в E замкнуты.*

Две нормы p, q на векторном пространстве E называются *эквивалентными*, если найдутся такие константы $a, b > 0$, что $ap(x) \leqslant q(x) \leqslant bp(x)$ для всех $x \in E$.

Предложение 2.4.2.

1. *Две нормы p, q на пространстве E эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают на E одну и ту же топологию.*
2. *На конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство.

1. Действительно, это частный случай следствия из предложения 2.2.2.
2. Поскольку норма превращает векторное пространство в отделимое ТВП, эквивалентность норм на конечномерных пространствах следует из теоремы 2.4.1 и предыдущего пункта.

□

2.5 Примеры локально выпуклых пространств

В этом параграфе мы построим несколько локально выпуклых пространств и обсудим их свойства. Предполагается, что читатель знаком с некоторыми стандартными фактами из математического анализа, касающимися дифференциального исчисления, интеграла Римана, равномерной сходимости, рядов Фурье и комплексного анализа.

Пусть X - произвольное множество. Обозначим через $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ линейное пространство всех функций f из X в $\mathbb{K}$. Для каждого конечного набора $x_1, \ldots, x_n \in X$ введем полунорму $p_{x_1,\ldots,x_n}(f) = \max\{|f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|\}$. Легко видеть, что семейство всех полунорм такого вида является направленным. Значит, на пространстве $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ задана локально выпуклая топология. Эта топология часто называется *топологией поточечной сходимости*. Это название объясняется следующим предложением (доказательство которого тривиально и потому предоставлено читателю).

Предложение 2.5.1. *Пусть X - произвольное множество. Тогда* $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ *- отделимое полное ЛВП. Если $f_\alpha \in$* $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ *- направленность, то ее сходимость к функции $f \in$* $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ *равносильна тому, что $f_\alpha(x) \to f(x)$ для всех $x \in X$.*

Пусть X - хаусдорфово локально компактное топологическое пространство. Обозначим через $C(X, \mathbb{K})$ линейное пространство всех непрерывных функций из X в $\mathbb{K}$ (напомним, что в качестве $\mathbb{K}$ могут быть использованы поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). Через p_K мы обозначаем полунорму на

$C(X,\mathbb{K})$, заданную по формуле $p_K(f) = \sup_{x\in K}|f(x)|$, где $K \subset X$ компактно. Легко видеть, что $p_K, p_L \leqslant p_{K\cup L}$, где $K, L \subset X$ компактны. Пространство $C(X,\mathbb{K})$ становится локально выпуклым пространством, если топологию на нем породить семейством полунорм

$$\{p_K : K \subset X \text{ компактно}\}.$$

Эта топология называется *топологией равномерной сходимости на компактах*. Отметим, что $C(X,\mathbb{K})$ по определению есть подпространство в $\mathrm{Fun}(X,\mathbb{K})$. Линейный оператор вложения i из $C(X,\mathbb{K})$ в $\mathrm{Fun}(X,\mathbb{K})$ ($i(f) = f$ для всех $f \in C(X,\mathbb{K})$), как нетрудно видеть, непрерывен.

Предложение 2.5.2. *Пусть X - хаусдорфово локально компактное топологическое пространство. Тогда $C(X,\mathbb{K})$ - отделимое полное ЛВП. Если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $C(X,\mathbb{K})$ - пространство Фреше.*

Доказательство. Отделимость пространства $C(X,\mathbb{K})$ очевидна. Докажем полноту. Пусть $f_\alpha \in C(X,\mathbb{K})$ - направленность Коши. Для любой точки $x \in X$ направленность $f_\alpha(x)$ является направленностью Коши в $\mathbb{K}$. Действительно, это следует из равенства $|f_\alpha(x)-f_\beta(x)| \leqslant p_{\{x\}}(f_\alpha - f_\beta)$. Введем для каждой точки $x \in X$ обозначение $f(x) = \lim f_\alpha(x)$.

Докажем, что f - непрерывная на X функция. Для этого выберем $x_0 \in X$, компактную окрестность $K \subset X$ точки x_0 и $\varepsilon > 0$. Найдется такое α_0, что $p_K(f_\alpha - f_\beta) \leqslant \varepsilon/3$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Отсюда следует, что $|f(x) - f_{\alpha_0}(x)| \leqslant \varepsilon/3$ для всех $x \in K$. Далее найдем такую окрестность $N \subset X$ точки x_0, что $|f_{\alpha_0}(x) - f_{\alpha_0}(x_0)| \leqslant \varepsilon/3$ для всех $x \in U$. Тогда для любой точки $x \in K \cap U$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{\alpha_0}(x)| + |f_{\alpha_0}(x) - f_{\alpha_0}(x_0)| + |f_{\alpha_0}(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $K \cap U$ - окрестность точки x_0, получаем, что f непрерывна в точке x_0.

Теперь остается показать, что f - предел направленности f_α. Пусть $K \subset X$ - произвольное компактное подмножество, $\varepsilon > 0$. Найдется такое α_0, что $p_K(f_\alpha - f_\beta) \leqslant \varepsilon$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Но тогда $p_K(f - f_\alpha) \leqslant \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Наконец, пусть X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тогда по предложению 1.6.5 найдется такая последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ компактных подмножеств в X, что $X = \cup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ и $F_k \subset \operatorname{int} F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $K \subset X$ - компактное подмножество. Тогда $\{\operatorname{int} F_k : k \in \mathbb{N}\}$ - семейство открытых множеств, в объединении которого содержится K. Значит, в нем найдется такое конечное подсемейство $\operatorname{int} F_{k_1}, \ldots, \operatorname{int} F_{k_m}$, что $K \subset \bigcup_{l=1}^m \operatorname{int} F_{k_l}$. Пусть $n = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Тогда $K \subset \operatorname{int} F_n \subset F_n$. Отсюда следует, что для любого компактного $K \subset X$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $p_K \leqslant p_{F_n}$. Значит, топология на $C(X,\mathbb{K})$ порождается последовательностью полунорм p_{F_n}. Таким образом, $C(X,\mathbb{K})$ - полное метризуемое ЛВП. □

Введем для векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначение $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots, + x_n^2}$. Стандартная топология на $\mathbb{R}^n$ порождается *эвклидовой* метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$.

Пусть теперь Ω обозначает открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. *Мультииндексом* называется набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, состоящий из неотрицательных целых чисел. Пусть $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Для мультииндекса α и $|\alpha|$ раз дифференцируемой функции f мы вводим обозначение

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Пусть $C^m(\Omega)$ обозначает линейное пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Для компактного $K \subset \Omega$ определим полунорму $p_{m,K}$ на пространстве $C^m(\Omega)$ по формуле

$$p_{m,K}(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f(x)|.$$

Семейство полунорм $\{p_{m,K} : K \subset \Omega \text{ компактно}\}$ задает на $C^m(\Omega)$ локально выпуклую топологию.

Лемма 2.5.1. *Пусть f_α - направленность непрерывно дифференцируемых функций на открытом подмножестве Ω в $\mathbb{R}^n$. Пусть направленности $\partial f_\alpha / \partial x_k$ сходятся в пространстве $C(\Omega, \mathbb{C})$ к $g_k \in C(\Omega, \mathbb{C})$, $k = 1, \ldots, n$. Пусть также направленность f_α сходится к g в пространстве $C(\Omega)$. Тогда g непрерывно дифференцируема и $\partial g / \partial x_k = g_k$.*

Доказательство. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega$. Достаточно доказать, что в точке z частные производные функции g существуют и равны функциям g_k, $k = 1, \ldots, n$. Действительно, если это верно для каждой точки $z \in \Omega$, то g окажется непрерывно дифференцируемой, так как у нее существуют и непрерывны все частные производные. Теперь очевидно, что нам достаточно лишь доказать следующий несложный факт.

Пусть h_α - направленность непрерывно дифференцируемых функций на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, сходящаяся к h в пространстве $C((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{C})$. Пусть также направленность производных h'_α сходится в том же пространстве к функции u. Тогда $u = h'$ на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Достаточно доказать равенство $h(x) - h(0) = \int_0^x u(t)dt$ для всех $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Линейный функционал $I_x : C((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, заданный по формуле $I_x(f) = \int_0^x f(t)dt$ непрерывен, так как имеет место оценка $|I_x(f)| \leqslant |x| p_K(f)$ для всех $f \in C((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{C})$, где $K = [0, x]$, если $x \geqslant 0$, и $K = [x, 0]$, если $x \leqslant 0$. Из непрерывности функционала I_x следует, что $\int_0^x u(t)dt = \lim \int_0^x h'_\alpha(t)dt$. Далее, $\int_0^x h'_\alpha(t)dt = h_\alpha(x) - h_\alpha(0)$, а значит, $\int_0^x u(t)dt = \lim(h_\alpha(x) - h_\alpha(0)) = h(x) - h(0)$. □

Предложение 2.5.3. *Пусть Ω - открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, m - целое неотрицательное число. Тогда $C^m(\Omega)$ - пространство Фреше.*

Доказательство. Пространство $C^m(\Omega)$, очевидно, отделимо. Чтобы доказать метризуемость надо построить такую последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ компактных подмножеств в Ω, что $\operatorname{int} F_k \subset F_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_n$. Повторяя рассуждение из доказательства предложения 2.5.2, получим, что последовательность полунорм p_{m,F_k} порождает топологию на $C^m(\Omega)$. Значит, $C^m(\Omega)$ метризуемо. Пусть $f_\beta \in C^m(\Omega)$ - направленность Коши. Тогда, для любого такого мультииндекса α, что $|\alpha| \leqslant m$ направленность $D^\alpha f_\beta$ - направленность Коши в пространстве

$C(\Omega, \mathbb{C})$. В силу полноты пространства $C(\Omega, \mathbb{C})$ находим предел g_α направленности $D^\alpha f_\beta$. Далее лемма 2.5.1 гарантирует, что $g_0 \in C^m(\Omega)$ и $D^\alpha g_0 = g_\alpha$ для всех таких мультииндексов α, что $|\alpha| \leqslant m$. Докажем, что направленность f_β сходится к g_0.

Пусть выбраны компакт $K \subset \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого такого мультииндекса α, что $|\alpha| \leqslant m$, найдется такое β_α, что $\sup_{x \in K} |D^\alpha f_\beta(x) - g_\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$ при $\beta \geqslant \beta_\alpha$. Пусть γ выбрано так, что $\beta_\alpha \leqslant \gamma$ для всех таких мультииндексов α, что $|\alpha| \leqslant m$. Но тогда, очевидно, $p_{m,K}(f_\beta - g_0) \leqslant \varepsilon$ при $\beta \geqslant \gamma$. □

Пусть снова Ω обозначает открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Для компактного $K \subset \Omega$ и целого неотрицательного k будем обозначать сужение полунормы $p_{m,K}$ с пространства $C^m(\Omega)$ на $C^\infty(\Omega)$ (пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$) тем же символом $p_{m,K}$. Семейство полунорм

$$\{p_{m,K} : m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 0, K \subset \Omega \text{ компактно}\}$$

на пространстве $C^\infty(\Omega)$ направлено (так как $p_{m,K}, p_{k,L} \leqslant p_{\max\{m,k\}, K \cup L}$). Значит, оно порождает на $C^\infty(\Omega)$ локально выпуклую топологию.

Предложение 2.5.4. *Пусть Ω - открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $C^\infty(\Omega)$ - пространство Фреше.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что пространство $C^\infty(\Omega)$ отделимо. Пусть $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ - направленность Коши. Но тогда f_α - направленность Коши в $C^m(\Omega)$ для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В силу единственности предела найдется такой $f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^m(\Omega)$, к которому f_α сходится в $C^m(\Omega)$ для всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Легко видеть, что $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^m(\Omega)$. Значит, $f \in C^\infty(\Omega)$. Далее, пусть выбраны компакт $K \subset \Omega$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из сходимости f_α к f пространстве $C^m(\Omega)$ следует существование такого α_0, что $p_{m,K}(f - f_\alpha) \leqslant \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Значит, f_α сходится к f в $C^\infty(\Omega)$.

Чтобы доказать метризуемость опять выберем такую последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ компактных подмножеств в Ω, что $\operatorname{int} F_k \subset F_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_n$. Тогда полунормы p_{n,F_n} будут порождать топологию на $C^\infty(\Omega)$. □

Пусть $\mathscr{R}$ обозначает пространство таких двусторонних последовательностей $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, что $r_k(z) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^k)|z_n| < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Очевидно, что r_k - норма на $\mathscr{R}$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Также, $r_k \leqslant r_l$ при $k \leqslant l$. Значит, $\{r_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ - направленное семейство норм на $\mathscr{R}$. Таким образом, $\mathscr{R}$ - метризуемое ЛВП. Пространство $\mathscr{R}$ часто называют пространством *быстро убывающих двусторонних последовательностей.*

Предложение 2.5.5. *Пусть $C_p^\infty(\mathbb{R})$ обозначает подпространство в $C^\infty(\mathbb{R})$, составленное из 2π-периодических функций (т.е. таких $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $f(x) = f(x + 2\pi)$ для всех $x \in \mathbb{R}$).*

1. *$C_p^\infty(\mathbb{R})$ - замкнутое подпространство в $C^\infty(\mathbb{R})$.*

2. *Последовательность норм*

$$q_k(f) = \sup_{x\in[0,2\pi],l=0,1,\ldots,k} \left|f^{(l)}(x)\right|$$

задает топологию на $C_p^\infty(\mathbb{R})$, совпадающую с индуцированной из $C^\infty(\mathbb{R})$.

3. *Отображение $F : C_p^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{R}$, заданное по формуле*

$$F(f)_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

является линейным гомеоморфизмом.

4. *$\mathscr{R}$ - пространство Фреше.*

Доказательство. 1. Пусть $\gamma_x : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ обозначает линейный функционал $\gamma_x(f) = f(x) - f(x+2\pi)$. Нетрудно видеть, что γ_x непрерывен, а значит $\ker\gamma_x$ замкнуто. Остается заметить, что $C_p^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} \ker\gamma_x$.

2. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ - компактное множество. Тогда для любого $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ имеет место очевидная оценка $p_{k,K}(f) \leqslant p_{k,[0,2\pi]}(f) = q_k(f)$. Значит, нормы q_k задают на $C_p^\infty(\mathbb{R})$ индуцированную из $C^\infty(\mathbb{R})$.

3. Отображение F сопоставляет функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ее коэффициенты ряда Фурье. Интегрируя по частям, получаем, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$F(f)_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx} = \frac{1}{in}F(f')_n.$$

Далее, как нетрудно видеть, для каждого $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $f \in C_p^\infty(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{Z}$ отсюда следует, что $(in)^k F(f)_n = F(f^{(k)})_n$. Значит, имеют место оценки $(1+|n|^k)|F(f)_n| \leqslant |F(f)_n|+|F(f^{(k)})_n| \leqslant 4\pi q_k(f)$. Значит, F - непрерывный линейный оператор из $C_p^\infty(\mathbb{R})$ в $\mathscr{R}$. Теперь рассмотрим оператор $G : \mathscr{R} \to C_p^\infty(\mathbb{R})$, заданный по формуле

$$G(z)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n e^{inx}, z \in \mathscr{R}.$$

В силу равномерной сходимости этого ряда вместе со всеми производными, получаем, что $G(z) \in C_p^\infty(\mathbb{R})$. Более того, можно написать оценку:

$$|G(z)^{(k)}(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(in)^k z_n e^{inx}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(|n|+1)^{k+2}}{(|n|+1)^2}|z_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}r_{k+2}(z)C,$$

где $C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1/(|n|+1)^2$. Значит, G - непрерывный линейный оператор. Из теории рядов Фурье следует, что G - оператор, обратный к F.

4. Раз $\mathscr{R}$ линейно гомеоморфно $C_p^\infty(\mathbb{R})$, а $C_p^\infty(\mathbb{R})$ - пространство Фреше, то нетрудно видеть, что и $\mathscr{R}$ является пространством Фреше.

□

Замечание. *Пространства $C^m(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а m обозначает либо ∞, либо целое неотрицательное число, по определению состоят из комплекснозначных функций. Для вещественнозначных функций можно провести аналогичные построения и вывести все те же свойства (кроме тех утверждений, что были связаны с рядами Фурье). Читатель может провести все необходимые построения и проверить выполнение аналогов предложений 2.5.3 и 2.5.4 для пространств вещественнозначных функций определенной гладкости.*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ - открытое множество. Обозначим через $\mathcal{O}(\Omega)$ пространство всех голоморфных на Ω функций. Будем наделять его топологией, индуцированной из пространства $C(\Omega, \mathbb{C})$.

Предложение 2.5.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ - открытое множество. Тогда $\mathcal{O}(\Omega)$ - замкнутое подпространство в $C(\Omega, \mathbb{C})$. В частности, $\mathcal{O}(\Omega)$ - пространство Фреше.*

Доказательство. Пусть $f_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega)$ - направленность, сходящаяся к $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. Докажем, что f голоморфна на любом открытом круге $D \subset \Omega$ (отсюда будет следовать, что f голоморфна в Ω). Для этого, ввиду теоремы Морера, достаточно проверить, что $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ для любого C^1-контура Γ в D. Заметим, что $I_\Gamma(g) = \int_\Gamma g(z)dz$ - непрерывный линейный функционал на пространстве $C(\Omega, \mathbb{C})$, так как $|I_\Gamma(g)| \leqslant Cp_\Gamma(g)$, где C - длина контура Γ. Но тогда $\int_\Gamma f(z)dz = \lim \int_\Gamma f_\alpha(z)dz = 0$ ввиду теоремы Коши. Значит, f голоморфна. $\square$

2.6 Ограниченные множества

Определение 2.6.1. *Пусть E - ТВП. Множество $A \subset E$ называется ограниченным, если A поглощается всеми окрестностями нуля в E. Направленность $x_\alpha \in E$, $\alpha \in \Lambda$ мы будем называть ограниченной, если множество $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ограничено.*

Предложение 2.6.1. *Пусть E - ТВП.*

1. *Если $A, B \subset E$ ограничены, то $A \cup B \subset E$ ограничено.*

2. *Если $A \subset E$ конечно, то A ограничено.*

3. *Если $A, B \subset E$ ограничены, то $A + B \subset E$ ограничено.*

4. *Если $A \subset E$ ограничено, то $\alpha A \subset E$ ограничено для всех $\alpha \in \mathbb{K}$.*

5. *Если $A \subset E$ ограничено, то $\overline{A}$ ограничено.*

6. *Если $A \subset E$ ограничено, то $\operatorname{rhull} A \subset E$ ограничено.*

7. *Если E локально выпукло, а $A \subset E$ ограничено, то $\operatorname{chull} A$ и $\operatorname{achull} A$ ограничены в E.*

8. *Если $A \subset E$ ограничено, F - другое ТВП, а $u : E \to F$ - непрерывное линейное отображение, то $u(A) \subset F$ ограничено.*

9. *Если $A \subset E$ ограничено, а $p : E \to \mathbb{R}$ - непрерывная полунорма, то p ограничена на A.*

10. *Пусть $x_n \in E$ - последовательность, сходящаяся к $x \in E$. Тогда эта последовательность ограничена в E.*

11. *Если $A \subset E$ компактно, то A ограничено.*

12. *Пусть топология на E порождается семейством полунорм $\mathcal{P}$. Множество $A \subset E$ ограничено тогда и только тогда, когда все полунормы $p \in \mathcal{P}$ ограничены на A.*

Доказательство. 1. Действительно, если $U \subset E$ - окрестность нуля, то она поглощает множества A и B, а значит поглощает и $A \cup B$.

2. Все одноточечные множества, очевидно, ограничены, а значит ограничены и их конечные объединения.

3. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля, а $V \subset E$ - такая закругленная окрестность нуля, что $V + V \subset U$. Раз V поглощает множества A и B, то, как нетрудно видеть, $V + V$ поглощает $A + B$. Значит, U поглощает $A + B$.

4. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Выберем такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$. Очевидно, что V поглощает αA для любого $\alpha \in \mathbb{K}$.

5. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Выберем такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $\overline{V} \subset U$. Раз V поглощает A, то $\overline{V}$ поглощает $\overline{A}$.

6. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Выберем такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$. Если $A \subset \lambda V$, то, ввиду закругленности V, $\operatorname{rhull} A \subset \lambda V \subset \lambda U$. Значит, U поглощает $\operatorname{rhull} A$.

7. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Выберем такую выпуклую окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$. По аналогии с предыдущим пунктом нетрудно проверить, что V поглощает $\operatorname{chull} A$. Для проверки ограниченности $\operatorname{achull} A$ достаточно воспользоваться равенством $\operatorname{achull} A = \operatorname{chull}(\operatorname{rhull} A)$.

8. Пусть $V \subset F$ - окрестность нуля. Тогда $u^{-1}(V)$ поглощает A, откуда легко получить, что V поглощает $u(A)$.

9. Если p - непрерывная полунорма, то $\widetilde{B}_p$ - окрестность нуля. Значит, найдется такое $C > 0$, что $A \subset C\widetilde{B}_p$. Это означает, что $p(x) \leqslant C$ при $x \in A$.

10. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Выберем такую закругленную окрестность нуля $V \subset E$, что $V + V \subset U$. Найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_k \in x + V$, если $k \geqslant n$. Далее, множество $\{x, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ поглощается окрестностью V. Значит, найдется такое $M > 0$, что $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \lambda V + V$ при $\lambda \geqslant M$. Отсюда следует, что $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \lambda U$ при $\lambda \geqslant M$.

11. Пусть U - окрестность нуля в E. Тогда $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \operatorname{int} U$. В силу компактности A найдется такой конечный набор $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, что $A \subset \bigcup_{l=1}^{k} n_k \operatorname{int} U$. Но тогда $A \subset n \operatorname{int} U$, где $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$.

12. Множества вида $\varepsilon \widetilde{B}_p$, где $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$, образуют базис окрестностей нуля в E. Если $p(x) \leqslant C$ при $x \in A$, то $\varepsilon \widetilde{B}_p$, очевидно, поглощает A. Значит, если A ограничено по каждой полунорме $p \in \mathcal{P}$, то A ограничено в E.

$\square$

Предложение 2.6.2. *Пусть E - локально выпуклое пространство. Топология на E порождается некоторой полунормой $p : E \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в E найдется ограниченная окрестность нуля.*

Доказательство. Действительно, если топология на E порождена полунормой p, то $\widetilde{B}_p$ - ограниченная окрестность нуля.

Пусть теперь U - ограниченная окрестность нуля в E. Выберем такую абсолютно выпуклую окрестность нуля $V \subset E$, что $V \subset U$. Покажем, что полунорма $p = m_V$ порождает топологию на E. Для этого достаточно показать, что множества $\varepsilon \widetilde{B}_p$, где $\varepsilon > 0$, образуют базис окрестностей нуля в E. Действительно, если $W \subset E$ - произвольная окрестность нуля, то найдется такое $M > 0$, что $V \subset MW$, так как V ограничено. Значит, $\varepsilon \widetilde{B}_p \subset W$, если $\varepsilon < 1/M$. Таким образом, множества $\varepsilon \widetilde{B}_p$, где $\varepsilon > 0$, образуют базис окрестностей нуля в E. $\square$

Следствие. *Топология на локально выпуклом пространстве E задается некоторой нормой тогда и только тогда, когда E отделимо и в E найдется ограниченная окрестность нуля.*

Определение 2.6.2. *Локально выпуклое пространство E, топология которого порождается некоторой нормой мы будем называть нормируемым. Полное нормируемое пространство называется банаховым.*

Замечание. *Отметим, что на некоторых линейных пространствах имеет смысл рассматривать фиксированную норму. Линейное пространство с выбранной нормой называется нормированным. Соотношение между нормированным и нормируемым пространством такое же, как и между метрическим и метризуемым пространствами.*

Теперь мы можем обосновать необходимость рассмотрения общих ЛВП, а не только нормируемых. Следующее предложение показывает, что осмысленные ЛВП часто бывают не нормируемыми (мы его не доказываем, так как в дальнейшем не будем им пользоваться; читатель может попробовать доказать его самостоятельно).

Предложение 2.6.3. *1. Пусть X - локально компактное хаусдорфово пространство. $C(X, \mathbb{K})$ нормируемо тогда и только тогда, когда X компактно.*

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - непустое открытое подмножество. Тогда пространства $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C^\infty(\Omega)$ не нормируемы.

2.7 Бочечные пространства

Определение 2.7.1. *Пусть E - ТВП. Подмножество $B \subset E$ называется бочкой, если оно замкнутое поглощающее и абсолютно выпуклое. Локально выпуклое пространство называется бочечным, если в нем любая бочка является окрестностью нуля.*

Предложение 2.7.1. *Пусть E - ЛВП.*

1. *В E существует базис окрестностей нуля, состоящий из бочек.*

2. *Если $B \subset E$ - бочка и $\operatorname{int} B \neq \varnothing$, то B - окрестность нуля.*

3. *Если $B \subset E$ - бочка, F - ЛВП, $u : F \to E$ - непрерывное линейное отображение, то $u^{-1}(B) \subset F$ - тоже бочка.*

Доказательство.

1. Это следует из леммы 2.2.1.

2. Это следует из предложения 2.1.5.

3. Это очевидно, поскольку все свойства из определения бочки сохраняются при взятии прообраза относительно непрерывных линейных отображений.

□

Предложение 2.7.2. *Пусть E - пространство Фреше. Тогда E бочечно.*

Доказательство. Пусть $B \subset E$ - бочка. Тогда $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB = E$. Если $\operatorname{int} B = \varnothing$, то $U_n = E \backslash nB$ - открытое и всюду плотное множество для каждого $n \in \mathbb{N}$. Но тогда по теореме Бэра (теорема 1.7.1) мы получаем, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ всюду плотно в E. С другой стороны, это множество пусто, так как $E \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \backslash U_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB = E$. Значит, у B внутренность не пуста. Таким образом, B - окрестность нуля. □

Пусть E, F - ТВП, $u_\alpha : E \to F$, $\alpha \in I$ - семейство линейных отображений. Это семейство называется *поточечно ограниченным*, если множество $\{u_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ ограничено в F для всех $x \in E$. Если же для каждой окрестности нуля $U \subset F$ найдется такая окрестность нуля $V \subset F$, что $u_\alpha(V) \subset U$ для всех $\alpha \in I$, то семейство $u_\alpha, \alpha \in I$ называется *равностепенно непрерывным.*

Теорема 2.7.1 (Банах, Штейнгауз)**.** *Пусть E, F - ЛВП, E бочечно, $u_\alpha : E \to F$, $\alpha \in I$ - поточечно ограниченное семейство непрерывных линейных отображений. Тогда это семейство равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $U \subset F$ - окрестность нуля. Выберем такую замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля $V \subset F$, что $V \subset U$. Рассмотрим множество $B = \bigcap_{\alpha\in I} u_\alpha^{-1}(V)$. Если мы докажем, что B - окрестность нуля, то теорема будет доказана, так как $u_\alpha(B) \subset U$ для всех $\alpha \in I$.

Чтобы доказать, что B - окрестность нуля, достаточно проверить, что B является бочкой. Очевидно, что B замкнуто и абсолютно выпукло. Остается доказать, что B поглощающее.

Рассмотрим $x \in E$. По условию найдется такое $M > 0$, что $\{u_\alpha(x) : \alpha \in I\} \subset \lambda V$ при $\lambda \geqslant M$. Но это означает, что $x \in \lambda u_\alpha^{-1}(V)$ для всех $\alpha \in I$ при $\lambda \geqslant M$. Таким образом, $x \in \lambda B$ при $\lambda \geqslant M$. □

Следствие. *Пусть E, F - нормированные пространства с нормами p и q соответственно, E полно. Пусть $u_\alpha : E \to F$, $\alpha \in I$ - поточечно ограниченное семейство отображений. Тогда найдется такая константа $C > 0$, что $q(u_\alpha(x)) \leqslant Cp(x)$ для всех $\alpha \in I$.*

Доказательство. Действительно, найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $u_\alpha(U) \subset \widetilde{B}_q$ для всех $\alpha \in I$. Далее, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon \widetilde{B}_p \subset U$. Это означает, что $q(u_\alpha(x)) \leqslant Cp(x)$, где $C = 1/\varepsilon$. □

Следствие. *Пусть E, F - ЛВП, E бочечно, F отделимо, $u_k : E \to F$ - последовательность непрерывных линейных операторов. Пусть для любого $x \in E$ существует предел $u(x) = \lim u_n(x)$. Тогда $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор.*

Доказательство. Линейность отображения u очевидна. Далее, последовательность u_k поточечно ограничена, так как $\{u_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ - ограниченное множество для любого $x \in E$, ввиду предложения 2.6.1. Пусть $U \subset F$ - замкнутая окрестность нуля. Тогда найдется такая окрестность нуля $V \subset E$, что $u_k(V) \subset U$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $u(x)$ также принадлежит U, если $x \in V$. Значит, u непрерывно. □

Напомним, что *графиком* отображения $u : E \to F$ мы называем множество $\Gamma_u = \{(x, u(x)) : x \in E\} \subset E \times F$ (мы уже встречались с этим понятием при доказательстве теорем 1.7.2 и 2.3.1).

Предложение 2.7.3. *Пусть E, F - ТВП, $u : E \to F$ - непрерывное линейное отображение. Если E отделимо, то Γ_u - замкнутое подмножество в $E \times F$.*

Доказательство. Действительно, если $(x_\alpha, u(x_\alpha)) \in \Gamma_u$ - направленность, сходящаяся к $(x, y) \in E \times F$, то $y = u(x)$ ввиду отделимости F, так как y и $u(x)$ оба являются пределами направленности $u(x_\alpha)$. □

Теорема 2.7.2 (О замкнутом графике). *Пусть E - бочечное ЛВП, а F - пространство Фреше. Пусть $u : E \to F$ - линейное отображение с замкнутым графиком (т.е. Γ_u замкнуто в $E \times F$). Тогда u непрерывно.*

Доказательство. Для начала заметим, что если $U \subset F$ - окрестность нуля, то $\overline{u^{-1}(U)} \subset E$ - окрестность нуля. Действительно, если $V \subset F$ - такая абсолютно выпуклая окрестность нуля, что $V \subset U$, то $\overline{u^{-1}(V)}$ - бочка, а значит окрестность нуля в E.

Пусть ρ - инвариантная относительно сдвигов метрика, порождающая топологию на E. Введем обозначение $W(\varepsilon) = \{y \in F : \rho(0, y) \leqslant \varepsilon\}$. Мы докажем, что $\overline{u^{-1}(W(\varepsilon))} \subset u^{-1}(W(2\varepsilon))$ для любого $\varepsilon > 0$. Если это удастся, то, с учетом того, что $\overline{u^{-1}(W(\varepsilon))}$ - окрестность нуля в E, мы докажем, что u непрерывно.

Рассмотрим произвольный $x \in \overline{u^{-1}(W(\varepsilon))}$. Построим по индукции такую последовательность $y_0, y_1, y_2, \ldots$ точек пространства F, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\rho(y_n, y_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $x \in \overline{u^{-1}(y_n + W(\varepsilon/2^n))}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Очевидно, что в качестве y_0 можно взять точку 0. Пусть в соответствии с условиями уже выбраны $y_0, \ldots, y_m$, где $m \geqslant 0$. Тогда

$$x \in \overline{u^{-1}(y_n + W(\varepsilon/2^n))} \subset u^{-1}(y_n + W(\varepsilon/2^n)) + \overline{u^{-1}(W(\varepsilon/2^{n+1}))}.$$

Значит, найдется такой $x' \in u^{-1}(y_n + W(\varepsilon/2^n))$, что $x \in x' + \overline{u^{-1}(W(\varepsilon/2^{n+1}))}$. В этом случае, точка $u(x') \in F$ удовлетворяет условиям:

$$\rho(y_n, u(x')) \leqslant \varepsilon/2^n \ , \ x \in \overline{x' + u^{-1}(W(\varepsilon/2^{n+1}))} = \overline{u^{-1}(u(x') + W(\varepsilon/2^{n+1}))}.$$

Значит, в качестве y_{n+1} можно взять точку $u(x')$. Таким образом, существует последовательность y_n, удовлетворяющая вышеописанным условиям.

Теперь положим, $F_n = y_n + W(\varepsilon/2^{n-1})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда нетрудно проверить, что $F_0 \supset F_1 \supset \ldots$, и $\operatorname{diam} F_n \leqslant \varepsilon/2^{n-2}$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Значит, по лемме 1.7.1, существует и единственна точка $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} F_n$. Докажем, что $y = f(x)$. Для этого достаточно показать, что $(x, y) \in \overline{\Gamma_u}$. Пусть $N \subset E$ и $M \subset F$ - окрестности нуля. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $F_n \subset y + M$. Поскольку $x \in \overline{u^{-1}(F_n)}$, имеем, $x \in \overline{u^{-1}(y + M)}$. Поскольку $x + N$ - окрестность точки x, получаем, что $(x + N) \cap u^{-1}(y + M) \neq \varnothing$. Это означает, что $(x + N) \times (y + M)$ пересекает Γ_u. Значит, любая окрестность точки (x, y) пересекает Γ_u. Значит, $y = u(x)$. Остается заметить, что $y \in F_0 = y_0 + W(2\varepsilon) = W(2\varepsilon)$. Значит, $x \in u^{-1}(W(2\varepsilon))$.

□

Следствие. *Если E - пространство Фреше, а F - отделимое бочечное ЛВП, то обратное отображение к непрерывному биективному линейному отображению $u : E \to F$ непрерывно.*

Доказательство. График обратного отображения имеет вид $\Gamma_{u^{-1}} = \{(u(x), x) : x \in E\} \subset F \times E$. Теперь легко видеть, что из замкнутости графика Γ_u следует замкнутость графика $\Gamma_{u^{-1}}$. □

Следствие. *Пусть E, F, G - ЛВП, G отделимо, E бочечно, а F - пространство Фреше. Пусть $u : E \to F$ и $v : F \to G$ - линейные отображения. Если v инъективно и непрерывно, а также $v \circ u$ непрерывно, то u непрерывно.*

Доказательство. Докажем, что у u замкнутый график. Для этого рассмотрим направленность $(x_\alpha, u(x_\alpha)) \in \Gamma_u$, сходящуюся к точке $(x, y) \in E \times F$. Направленность $v(u(x_\alpha))$ сходится к точкам $v(u(x))$ и $v(y)$ ввиду непрерывности отображений v и $v \circ u$. Из отделимости G следует равенство $v(u(x)) = v(y)$, откуда, с учетом инъективности v, вытекает равенство $y = u(x)$. Значит, $(x, y) \in \Gamma_u$. Значит, график u замкнут. □

Предложение 2.7.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ - открытое множество.*

1. $\mathcal{O}(\Omega)$ - замкнутое подмножество в $C^\infty(\Omega)$.

2. *Топология на $\mathcal{O}(\Omega)$, индуцированная из $C(\Omega, \mathbb{C})$, совпадает с топологией, индуцированной из $C^\infty(\Omega)$.*

3. *Линейный оператор $d/dz : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ непрерывен.*

Доказательство. 1. Введем оператор $d/d\overline{z}$ на пространстве $C^\infty(\Omega)$ по формуле:

$$\frac{df}{d\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Известно, что функция $f \in C^\infty(\Omega)$ голоморфна тогда и только тогда, когда $df/d\overline{z} = 0$. Ввиду непрерывности оператора $d/d\overline{z}$ получаем замкнутость $\mathcal{O}(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega)$.

2. Обе эти топологии превращают $\mathcal{O}(\Omega)$ в пространство Фреше (так как $\mathcal{O}(\Omega)$ замкнуто в обоих пространствах). Очевидно, что тождественный оператор этого пространства непрерывен как опретор из топологии пространства $C^\infty(\Omega)$ в топологию пространства $C(\Omega, \mathbb{C})$. Из теоремы о замкнутом графике теперь следует, что обратный к этому оператору также непрерывен.

3. Очевидно, что оператор d/dz непрерывен в топологии пространства $C^\infty(\Omega)$, которая совпадает с топологией пространства $C(\Omega, \mathbb{C})$.

□

2.8 Теорема Хана-Банаха

Данный параграф целиком будет посвящен теореме Хана-Банаха и некоторым ее следствиям.

Сначала нам понадобится утверждение, необходимое для доказательства теоремы Хана-Банаха в комплексном случае. Чтобы его сформулировать его введем следующую терминологию. Если E - линейное пространство над $\mathbb{C}$, то отображение $f : E \to \mathbb{R}$ мы будем называть $\mathbb{R}$-*линейным функционалом*, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех $x, y \in E$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, $f : E \to \mathbb{R}$ - линейный функционал на E, если считать E линейным пространством над $\mathbb{R}$. Обычные линейные (над $\mathbb{C}$) функционалы на E будем во избежание путаницы называть $\mathbb{C}$-линейными.

Лемма 2.8.1. *Пусть E - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.*

1. *Если $g : E \to \mathbb{C}$ - $\mathbb{C}$-линейный функционал, то $f(x) = \operatorname{Re} g(x)$ - $\mathbb{R}$-линейный функционал, причем $g(x) = f(x) - if(ix)$.*

2. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$-линейный функционал, то отображение $g : E \to \mathbb{C}$, заданное по формуле $g(x) = f(x) - if(ix)$, является $\mathbb{C}$-линейным функционалом.*

Доказательство. 1. $\mathbb{R}$-линейность отображения f очевидна. Заметим, что $\operatorname{Im} g(x) = -\operatorname{Re}(ig(x)) = -f(ix)$. Значит, $g(x) = f(x) - if(ix)$.

2. Очевидно, что $g(x+y) = g(x) + g(y)$ для всех $x, y \in E$. Докажем, что $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$. Пусть $\alpha = a + bi$. Тогда

$$g(\alpha x) = g(ax+bix) = g(ax)+g(bix) = f(ax)-if(iax)+f(bix)-if(-bx) = af(x)-aif(ix)+$$
$$+ bf(ix) + bif(x) = (a+bi)f(x) - (a+bi)if(ix) = (a+bi)(f(x) - if(ix)) = \alpha g(x).$$

□

Следствие. *Пусть E - линейное пространство над $\mathbb{C}$, а $L \subset E$ - вещественная гиперплоскость в E (то есть L - гиперплоскость, если E считать линейным пространством над $\mathbb{R}$). Тогда $L \cap iL$ - комплексная гиперплоскость.*

Доказательство. Действительно, пусть $f : E \to \mathbb{R}$ - такой ненулевой $\mathbb{R}$-линейный функционал, что $L = \ker f$. Тогда $g(x) = f(x)-if(ix)$ - ненулевой $\mathbb{C}$-линейный функционал. Нетрудно видеть, что $L \cap iL = \ker g$. □

Лемма 2.8.2. *Пусть E - ТВП над полем $\mathbb{R}$, $A \subset E$ - непустое выпуклое открытое множество. Пусть $L \subset E$ - такое подпространство, что $L \cap A = \varnothing$. Тогда, если L не является гиперплоскостью, то найдется такое $x \in E \backslash L$, что пространство $L + \operatorname{span}\{x\}$ не пересекается с A.*

Доказательство. Определим множество $C = L + \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$. Нетрудно видеть, что C - открытое множество. Также отметим равенство $-C = L + \bigcup_{\lambda<0} \lambda A$.

Докажем, что $C \cap (-C) = \varnothing$. Действительно, пусть $x \in C \cap (-C)$. Тогда $x = h + \lambda a = h' + \lambda' a'$, где $h, h' \in L$, $\lambda > 0$, $\lambda' < 0$ и $a, a' \in A$. Но тогда $(\lambda a - \lambda' a')/(\lambda - \lambda') \in A$, так как A выпукло. Но ввиду равенства $\lambda a - \lambda' a' = h' - h \in L$, получаем, что A пересекается с L. Полученное противоречие показывает, что $C \cap (-C) = \varnothing$.

Пусть $C \cup L \cup (-C) \neq E$. В этом случае найдется $x \in E \backslash (C \cup L \cup (-C))$. Если $L + \operatorname{span}\{x\}$ пересекается с A, то найдутся такие $h \in L$ и $\lambda in \mathbb{R}$, что $h + \lambda x \in A$. Если $\lambda = 0$, то получаем, что L пересекается с A. В противном случае, $x \in L + 1/\lambda\ A \subset C \cup (-C)$. Это противоречит выбору x. Значит, $L + \operatorname{span}\{x\}$ не пересекается с A.

Теперь предположим, что $C \cup L \cup (-C) = E$. Выберем $a \in E$ таким образом, чтобы $M = L + \operatorname{span}\{a\} \neq E$ (это возможно, так как L - не гиперплоскость). Не ограничивая общности, мы можем считать, что $a \in C$ (если $a \in -C$, то можно заменить a на $-a$) Далее, найдется такое $b \in E$, что $b \notin M$. Аналогичным образом, не ограничивая общности, можем считать, что $b \in -C$. Определим функцию $f(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$. Легко видеть, что эта функция непрерывна, причем $f(0) = a$, $f(1) = b$. Пусть $I = f^{-1}(C)$, $J = f^{-1}(-C)$. Тогда I и J открыты и не пересекаются. Пусть $t_0 = \sup_{t:t \in I}$. Очевидно, что $t_0 \in \overline{I}$ и $t_0 \in \overline{[0,1] \backslash I} = [0,1] \backslash I$. С другой стороны, $I \subset [0,1] \backslash J$, а значит, $t_0 \in [0,1] \backslash J$. Получается, что $t_0 \notin I$ и $t_0 \notin J$. Значит, $(1-t_0)a + t_0 b \in L$. Но тогда $b \in M$, что противоречит выбору b. Значит, если L не является гиперплоскостью, то $C \cup L \cup (-C) \neq E$. □

Теорема 2.8.1 (Хан, Банах). *Пусть E - ТВП, $A \subset E$ - открытое непустое выпуклое множество. Если $L \subset E$ - подпространство, не пересекающее A, то найдется такая гиперплоскость $M \subset E$, что $L \subset M$ и $M \cap A = \varnothing$. При этом M обязательно замкнуто.*

Доказательство. Докажем сначала для случая линейного пространства над $\mathbb{R}$. Определим множество S всех таких подпространств $N \subset E$, что $L \subset N$ и $N \cap A = \varnothing$. Очевидно, что $L \in S$. Определим отношение частичного порядка на S следующим образом: $N_1 \leqslant N_2 \Leftrightarrow N_1 \subset N_2$. Если $\mathcal{C} \subset S$ - цепь, то $U = \bigcup_{N \in C} N$ - множество, содержащее L и не пересекающее A. Пусть $x, y \in U$ тогда $x \in N_1 \in \mathcal{C}$ и $y \in N_2 \in \mathcal{C}$. Так как $\mathcal{C}$ - цепь, то либо $N_1 \subset N_2$, либо $N_2 \subset N_1$. В обоих случаях, как нетрудно видеть, $x + y \in U$. Далее, если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in U$, то $x \in N \in \mathcal{C}$ для некоторого N, а значит $\alpha x \in N \subset U$. Значит, U - подпространство в E. Значит, S индуктивно упорядочено, т.е. удовлетворяет условиям леммы Цорна. Значит, в S найдется максимальный элемент $M \in S$, который по лемме 2.8.2 является гиперплоскостью (если M - не гиперплоскость, то из леммы 2.8.2 следует, что M не максимально в S). Наконец, раз $M \cap A = \varnothing$, то M не всюду плотно, откуда следует, что M замкнуто.

Комплексный случай сводится к вещественному. Именно, найдется вещественная гиперплоскость $M' \subset E$, содержащая L и не пересекающая A. Значит, гиперплоскость $M = M' \cap iM'$ удовлетворяет всем необходимым требованиям. Замкнутость M, как и раньше, следует из того, что M не всюду плотно. □

Следствие. *Пусть E - ТВП, $A \subset E$ - открытое непустое выпуклое множество. Если $L \subset E$ - подпространство, не пересекающее A, то найдется такой непрерывный линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $L \subset \ker f$ и $f(x) \neq 0$ при $x \in A$.*

Доказательство. Действительно, пусть M - такая гиперплоскость в E, что $L \subset E$ и $M \cap A = \varnothing$. Тогда, если f - такой ненулевой функционал на E, что $\ker f = M$, то $L \subset \ker f$, $f(x) \neq 0$ при $x \in A$. Непрерывность f следует из замкнутости $\ker f = M$. □

Предложение 2.8.1. *Пусть E - ЛВП, $A, B \subset E$ - выпуклые непересекающиеся подмножества в E. Тогда, если A замкнуто, а B компактно, то найдется такой непрерывный линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $f(A) \cap \overline{f(B)} = \varnothing$.*

Доказательство. Если одно из множеств A или B пусто, то утверждение очевидно. В противном случае рассмотрим множество $C = A - B$. Легко видеть, C замкнуто, выпукло и не содержит 0. Рассмотрим такую абсолютно выпуклую окрестность нуля $V \subset E$, что $(x + V) \cap C = \varnothing$. Тогда $U = C + V$ - открытое выпуклое множество, не содержащее 0. Тогда найдется такой непрерывный линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $f(x) \neq 0$ при $x \in U$.

Докажем, что $f(A) \cap \overline{f(B)} = \varnothing$. Предположим противное: пусть $x \in A$ - такой элемент, что $f(x) \in \overline{f(B)}$. Заметим, что множество V - закругленное и поглощающее, а значит $f(V)$ - закругленное и поглощающее множество в $\mathbb{K}$. Но это означает, что $f(V)$ - окрестность нуля в $\mathbb{K}$. Следовательно, $(f(x) + f(V)) \cap f(B) \neq \varnothing$. Значит, $f(A + V) \cap f(B) \neq \varnothing$. Но тогда $0 \in f(U)$, что противоречит выбору f. □

Следствие. *Пусть E - ЛВП, $A \subset E$ - выпуклое множество. Тогда $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $f(x) \in \overline{f(A)}$ для всех непрерывных линейных функционалов $f : E \to \mathbb{K}$.*

Доказательство. Действительно, если $x \in \overline{A}$, то $f(x) \in \overline{f(A)}$ для любого непрерывного функционала f. Обратно, если $x \notin \overline{A}$, то применяя предложение 2.8.1 к компактному множеству $\{x\}$ и замкнутому выпуклому множеству $\overline{A}$, получим существование такого непрерывного линейного функционала $f : E \to \mathbb{K}$, что $f(x) \notin \overline{f(\overline{A})}$. Но тогда, тем более $f(x) \notin \overline{f(A)}$. □

Теорема 2.8.2. *Пусть E - линейное пространство, $p : E \to \mathbb{R}$ - полунорма. Пусть $L \subset E$ - подпространство, а $f : L \to \mathbb{K}$ - такой линейный функционал, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$. Тогда найдется такой линейный функционал $\widetilde{f} : E \to \mathbb{K}$, что $\widetilde{f}|_L = f$, а неравенство $|\widetilde{f}(x)| \leqslant p(x)$ выполнено для всех $x \in E$.*

Доказательство. Если f - нулевой функционал на L, то в качестве $\widetilde{f}$ можно взять нулевой функционал на E. В противном случае рассмотрим произвольный $x \in E$, на котором f принимает значение 1. Пусть $A = x + B_p$. Тогда A - открытое непустое выпуклое множество в E, если топологию на E задать полунормой p. Легко видеть, что $A \cap \ker f = \varnothing$. Действительно, если $p(x-y) < 1$, то $|f(x-y)| < 1$, а значит $f(y) \neq 0$. Таким образом, найдется такая гиперплоскость $M \subset E$, что $A \cap M = \varnothing$ и $\ker f \subset M$. Выберем такой линейный функционал $\widetilde{f}$ на E, что $\ker \widetilde{f} = M$ и $\widetilde{f}(x) = 1$.

Легко видеть, что $\widetilde{f}|_L = f$. Пусть найдется такое $y \in E$, что $p(y) < 1$, но $|\widetilde{f}(y)| \geqslant 1$. Пусть $\alpha = -1\Big/\widetilde{f}(y)$. Тогда $p(\alpha y) < 1$, а $\widetilde{f}(x-y) = 0$. Это означает, что $x - y \in A \cap M$. Полученное противоречие показывает, что из неравенства $p(y) < 1$ следует $|\widetilde{f}(y)| < 1$. Отсюда легко вывести, что $|\widetilde{f}(y)| \leqslant p(y)$ для всех $y \in E$. □

Следствие. *Пусть E - ЛВП, $L \subset E$ - подпространство. Если $f : L \to \mathbb{K}$ - непрерывный линейный функционал, то существует такой непрерывный линейный функционал $\widetilde{f} : E \to \mathbb{K}$, что $\widetilde{f}|_L = f$.*

Доказательство. Действительно, раз E - ЛВП, то топология на E порождается некоторым семейством полунорм. Значит, непрерывность f означает существование такой непрерывной полунормы $p : E \to \mathbb{R}$, что $|f(x)| \leqslant Cp(x)$ для всех $x \in L$. Но тогда функционал f можно по теореме 2.8.2 продолжить на E с сохранением оценки через полунорму p. Это продолжение будет непрерывно. □

2.9 Сопряженное пространство

Определение 2.9.1. *Пусть E - ЛВП. Сопряженным к E пространством называется пространство E' всех непрерывных линейных функционалов на E.*

Пусть E, F - ЛВП, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор. Тогда для любого $f \in F'$ линейный функционал $f \circ u : E \to \mathbb{K}$ непрерывен. Таким образом, задан линейный оператор

$u' : F' \to E'$ по формуле $u'(f) = f \circ u$, $f \in F'$. Оператор u' называется *сопряженным* к u. Легко проверить, что $(u+v)' = u' + v'$, $(\alpha u)' = \alpha u'$, где $u, v : E \to F$ - непрерывные линейные операторы, $\alpha \in \mathbb{K}$. Также, если G - еще одно ЛВП, а $u : E \to F$, $v : F \to G$ - непрерывные линейные операторы, то $(v \circ u)' = u' \circ v'$. Наконец, оператор, сопряженный к тождественному оператору $I : E \to E$ ($I(x) = x$, $x \in E$) является тождественным отображением пространства E' в себя.

Пусть E - ЛВП. Определим для каждого конечного набора функционалов $f_1, \dots, f_n \in E'$ полунорму $w_{f_1,\dots,f_n}(x) = \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$. Легко видеть, что совокупность всех таких полунорм образует направленное семейство полунорм на E. Топологию, порожденную этим семейством мы называем *слабой топологией* на E. Аналогичным образом, для каждого конечного набора $x_1, \dots, x_n \in E$ определим полунорму $w^*_{x_1,\dots,x_n}(f) = \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|\}$ на пространстве E'. Семейство полунорм такого вида направлено, а значит определяет топологию на E'. Эту топологию называют $*$-*слабой топологией* на E'.

Лемма 2.9.1. *Пусть E - линейное пространство, $f, f_1, \dots, f_n : E \to \mathbb{K}$ - линейные функционалы. Тогда, если $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$, то $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.*

Доказательство. Определим $F : E \to \mathbb{K}^n$ по формуле $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Тогда $\ker F \subset \ker f$. Это означает, что найдется такой линейный функционал $\widetilde{f} : F(E) \to \mathbb{K}$, что $\widetilde{f} \circ F = f$. Функционал $\widetilde{f}$ допускает продолжение $\overline{f}$ на $\mathbb{K}^n$. Теперь найдутся такие константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, что $\overline{f}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Теперь прямым вычислением получается, что $f = \overline{f} \circ F = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$. $\square$

Предложение 2.9.1. *Пусть E - ЛВП.*

1. *Слабая топология на E слабее исходной. В частности из замкнутости (открытости) множества $A \subset E$ в слабой топологии следует замкнутость (открытость) A относительно исходной топологии. Из ограниченности $A \subset E$ в исходной топологии на E следует его ограниченность в слабой топологии. Также каждая окрестность нуля в слабой топологии на E является окрестностью нуля в исходной топологии.*

2. *Направленность $x_\alpha \in E$ сходится к $x \in E$ относительно слабой топологии тогда и только тогда, когда $f(x_\alpha) \to f(x)$ для всех $f \in E'$. Направленность $f_\alpha \in E'$ сходится к $f \in E'$ (в $*$-слабой топологии) тогда и только тогда, когда $f_\alpha(x) \to f(x)$ для всех $x \in E$.*

3. *Множество $A \subset E$ ограничено в слабой топологии тогда и только тогда, когда все непрерывные функционалы $f \in E'$ ограничены на A.*

4. *Множество $A \subset E'$ ограничено в $*$-слабой топологии тогда и только тогда, когда A поточечно ограничено (т.е. множество $\{f(x) : f \in A\} \subset \mathbb{K}$ ограничено для каждого $x \in E$).*

5. *Если E отделимо, то E отделимо также относительно слабой топологии.*

6. *E' отделимо относительно $*$-слабой топологии.*

7. *Линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$ непрерывен относительно слабой топологии тогда и только тогда, когда он непрерывен относительно исходной топологии на E (т.е. $f \in E'$).*

8. *Линейный функционал $g : E' \to \mathbb{K}$ непрерывен относительно $*$-слабой топологии тогда и только тогда, когда найдется такое $x \in E$, что $g(f) = f(x)$ для всех $x \in E$.*

9. *Если F - ЛВП, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор, то и непрерывен относительно слабых топологий на E и F, а u' непрерывен относительно $*$-слабой топологии.*

10. *Если $A \subset E$ - выпуклое множество, то A замкнуто в исходной топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в слабой топологии на E.*

Доказательство. 1. Пусть топология на E порождается направленным семейством полунорм $\mathcal{P}$. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in E'$. Тогда найдутся такие полунормы $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ и константы $C_1, \ldots, C_n > 0$, что $f_k(x) \leqslant C_k p_k(x)$ для всех $x \in E$ и $k = 1, \ldots, n$. В силу направленности множества $\mathcal{P}$ найдется такая полунорма $p \in \mathcal{P}$, что $p_1, \ldots, p_n \leqslant p$. Но тогда $w_{f_1,\ldots,f_n}(x) \leqslant Cp(x)$, где $C = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$. Это означает, что слабая топология слабее исходной ввиду следствия из предложения 2.2.2.

2. Если направленность $x_\alpha \in E$ сходится к $x \in E$ в слабой топологии, то $|f(x_\alpha) - f(x)| = w_f(x_\alpha - x) \to 0$ для всех $f \in E'$. Это означает, что $f(x_\alpha) \to f(x)$ для всех $f \in E'$. Обратно, пусть имеет место сходимость $f(x_\alpha) \to f(x)$ для любого $f \in E'$. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in E'$ и $\varepsilon > 0$. Найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $|f_k(x_\alpha) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$. Далее найдется такой индекс α_0, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \alpha_0$. Это означает, что $w_{f_1,\ldots,f_n}(x_\alpha - x) \leqslant \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Утверждение для направленностей в E' доказывается абсолютно аналогично.

3. Действительно, ограниченность функционала $f \in E'$ на множестве $A \subset E'$ равносильна ограниченности полунормы w_f на A. Значит, из ограниченности в слабой топологии следует ограниченность всех функционалов $f \in E'$ на A. Обратно, ввиду равенства $w_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \max\{w_{f_1}(x), \ldots, w_{f_n}(x)\}$ из ограниченности на A всех функционалов $f_1, \ldots, f_n$ следует ограниченность полунормы $w_{f_1,\ldots,f_n}$ на A.

4. Доказательство аналогично доказательству предыдущего пункта.

5. Пусть $x \in E$ - ненулевой элемент. Если E отделимо, то ввиду предложения 2.8.1, примененного к $A = \{0\}$ и $B = \{x\}$, получаем существование такого непрерывного линейного функционала $f \in E$, что $f(x) \neq 0$. Но тогда $w_f(x) \neq 0$. Значит, E отделимо в слабой топологии.

6. Пусть $f \in E'$ - ненулевой функционал. Но тогда найдется такое $x \in E$, что $f(x) \neq 0$. Но тогда $w_x^*(f) \neq 0$. Это доказывает отделимость E' в $*$-слабой топологии.

7. Пусть $f : E \to \mathbb{K}$ - линейный функционал, непрерывный в исходной топологии. Тогда $|f(x)| = w_f(x)$, а значит f непрерывен в слабой топологии. Обратно, если $f : E \to \mathbb{K}$ непрерывен в слабой топологии, то он также непрерывен в исходной, так как она сильнее слабой.

8. Пусть $g : E \to \mathbb{K}$ - линейный функционал, имеющий вид $g(f) = f(x)$ для некоторого $x \in E$. Тогда $|g(f)| = w_x^*(f)$, а значит g непрерывен в $*$-слабой топологии. Обратно, если $g : E \to \mathbb{K}$ непрерывен в $*$-слабой топологии, то $|g(f)| \leqslant C w^*_{x_1,\ldots,x_n}(f)$ для некоторых $C > 0$ и $x_1, \ldots, x_n \in E$. Пусть $g_k(f) = f(x_k)$ - линейный функционал на E'. Тогда $\ker g \supset \bigcap_{k=1}^n \ker g_k$. Ввиду леммы 2.9.1 отсюда следует, что $g \in \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_n\}$, то есть $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$. Но тогда $g(f) = f(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k)$.

9. Пусть $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор. Если $f_1, \ldots, f_n \in F'$, то $w_{f_1,\ldots,f_n}(u(x)) = w_{u'(f_1),\ldots,u'(f_n)}(x)$ для всех $x \in E$. Это означает непрерывность u в слабых топологиях. Аналогично для $x_1, \ldots, x_n \in E$ имеет место равенство $w^*_{x_1,\ldots,x_n}(u'(f)) = w^*_{u(x_1),\ldots,u(x_n)}(f)$ для всех $f \in F'$. Это означает непрерывность u' в $*$-слабых топологиях.

10. Пусть $A \subset E$ выпукло. Если A замкнуто в слабой топологии, то оно замкнуто и в исходной, так как она сильнее слабой. Если A замкнуто в исходной топологии, то для любого $x \in E \backslash A$ найдется такой непрерывный линейный функционал $f : E \to K$, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$. Это означает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $w_f(x - y) \geqslant \varepsilon$ при $y \in A$. Значит, у x есть окрестность в слабой топологии, не пересекающая A. Значит, A замкнуто в слабой топологии.

□

Определим теперь еще одну топологию на сопряженном пространстве к ЛВП E. Именно, для каждого ограниченного подмножества $A \subset E$ определим полунорму $w_A^*(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$ на пространстве E'. По определению $w_A^*, w_B^* \leqslant w_{A \cup B}^*$ для ограниченных $A, B \subset E$. Значит, совокупность полунорм w_A^* по всем ограниченным $A \subset E$ является направленным семейством полунорм на E'. Топология, порожденная этим семейством называется *сильной топологией* на E'.

Предложение 2.9.2. *Пусть E - ЛВП.*

1. *Сильная топология на E' сильнее $*$-слабой. В частности, E' отделимо относительно сильной топологии. Также из замкнутости (открытости) множества $A \subset E'$ в $*$-слабой топологии следует его замкнутость (открытость) в сильной топологии. Из ограниченности множества $A \subset E'$ в сильной топологии следует его ограниченность в $*$-слабой топологии. Если $U \subset E'$ - окрестность нуля относительно $*$-слабой топологии, то U - окрестность нуля в сильной топологии.*

2. *Если F - ЛВП, а $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор, то $u' : F' \to E'$ непрерывен относительно сильных топологий на F' и E'.*

3. *Линейный функционал g на E' заданный по правилу $g(f) = f(x)$ для некоторого фиксированного $x \in E$ непрерывен относительно сильной топологии на E'.*

Доказательство. 1. Действительно, если $x_1, \dots, x_n \in E$, то $w^*_{x_1,\dots,x_n} = w_A$, где $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Это означает, что сильная топология сильнее, чем $*$-слабая, так как она порождается более широким семейством полунорм.

2. Пусть $B \subset E$ - ограниченное множество. Тогда $w^*_B(u'(f)) \leqslant w_{u(B)}(f)$ для всех $f \in F'$. Это означает непрерывность u' относительно сильных топологий.

3. Линейный функционал g, заданный по правилу $g(f) = f(x)$ для некоторого $x \in E$ и всех $f \in E'$, непрерывен относительно $*$-слабой топологии, а значит непрерывен и в сильной топологии.

□

Пусть теперь $A \subset E$ - произвольное множество. Определим *поляру* множества A следующим образом: $A^\circ = \{f \in E' : |f(x)| \leqslant 1 \text{ для всех } x \in A\}$. Аналогично, для множества $B \subset E'$ определим множество $B_\circ = \{x \in E : |f(x)| \leqslant 1 \text{ для всех } f \in B\}$. Это множество мы также будем называть *полярой* (множества B).

Предложение 2.9.3. *Пусть E - ЛВП.*

1. *Если $A \subset E$, то $A^\circ \subset E$ абсолютно выпукло и замкнуто относительно $*$-слабой топологии.*

2. *Если $B \subset E'$, то $B_\circ \subset E$ абсолютно выпукло и замкнуто относительно исходной топологии (и тем более относительно слабой топологии) на E.*

3. *Если $A \subset E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ - ненулевое число, то $(\alpha A)^\circ = 1/\alpha\ A^\circ$.*

4. *Если $B \subset E'$, $\alpha \in \mathbb{K}$ - ненулевое число, то $(\alpha B)_\circ = 1/\alpha\ B_\circ$.*

5. *Пусть $A, B \subset E$. Если $A \subset B$ то $B^\circ \subset A^\circ$. Если A поглощает B, то B° поглощает A°.*

6. *Пусть $A, B \subset E'$. Если $A \subset B$ то $B_\circ \subset A_\circ$. Если A поглощает B, то $B_\circ$ поглощает $A_\circ$.*

7. *Если $A \subset E$ - непустое множество, то $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{achull} A}$.*

8. *Если $B \subset F$ - непустое множество, то $(B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{achull} B}$, причем замыкание понимается в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. 1. Абсолютная выпуклость множества A° очевидна. Пусть $f_\alpha \in A^\circ$ - направленность, сходящаяся к $f \in E'$ в $*$-слабой топологии. Тогда $|f(x)| = \lim |f_\alpha(x)| \leqslant 1$, если $x \in A$. Это означает, что $f \in A^\circ$.

2. Аналогично предыдущему пункту доказывается, что $B_\circ$ абсолютно выпукло и замкнуто относительно слабой топологии. Остается заметить, что из замкнутости в слабой топологии и выпуклости следует замкнутость в исходной топологии.

7. Множество $(A^\circ)_\circ$, очевидно, абсолютно выпукло и содержит A. Это означает, что $\operatorname{achull} A \subset (A^\circ)_\circ$. Наконец, из замкнутости множества $(A^\circ)_\circ$ следует, что $\overline{\operatorname{achull} A} \subset (A^\circ)_\circ$.

   Пусть $x \in E \backslash \overline{\operatorname{achull} A}$. Тогда найдется такой линейный функционал $f \in E'$, что $f(x) \notin \overline{f(\operatorname{achull} A)}$. Это означает, что $|f(x)| > \sup_{x \in A} |f(x)|$ (в противном случае $f(x) \in \overline{f(\operatorname{achull} A)}$ ввиду абсолютной выпуклости множества $f(\operatorname{achull} A)$). Выберем такое $\alpha > 0$, что $\alpha|f(x)| > 1$, но $\alpha \sup_{x \in A} |f(x)| \leqslant 1$. Значит, $\alpha f \in A^\circ$, откуда следует, что $x \notin (A^\circ)_\circ$.

8. Доказательство абсолютно аналогично доказательству предыдущего пункта с учетом того, что функционалы, непрерывные на E' в $*$-слабой топологии отождествляются с точками пространства E.

3 – 6 пункты проверяются элементарно. □

Лемма 2.9.2. *Пусть E - ЛВП.*

1. *Множество $A \subset E'$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда $A \subset U^\circ$ для некоторой окрестности нуля $U \subset E$.*

2. *Если $A \subset E'$ равностепенно непрерывно, то A ограничено в сильной топологии.*

3. *Если E бочечно, а $A \subset E$ ограничено в $*$-слабой топологии, то A равностепенно непрерывно и, следовательно, ограничено в сильной топологии.*

Доказательство. 1. Если A равностепенно непрерывно, то найдется такая окрестность нуля $U \subset E$, что $f(U) \subset B$, где $B = \{\alpha \in K : |\alpha| \leqslant 1\}$, для всех $f \in A$. Но это означает, что $A \subset U^\circ$. Обратное очевидно.

2. Это легко следует из того, что U° ограничено в сильной топологии для любой окрестности нуля $U \subset E$.

3. Это прямое следствие теоремы Банаха-Штейнгауза.

□

Теорема 2.9.1 (Банах, Алаоглу)**.** *Пусть E - ЛВП. Тогда U° компактно относительно $*$-слабой топологии для любой окрестности нуля $U \subset E$.*

Доказательство. Пусть $U \subset E$ - окрестность нуля. Ввиду локально выпуклости E найдется такая непрерывная полунорма $p : E \to \mathbb{K}$, что $V = \widetilde{B}_p \subset U$. Поскольку $U^\circ \subset V^\circ$ достаточно доказать, что V° компактно в $*$-слабой топологии (дейтвительно, U° будет замкнутым подмножеством в V°). Далее, $f \in V^\circ$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| \leqslant 1$ при $x \in V$. Нетрудно видеть, что это равносильно выполнению неравенства $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$.

Рассмотрим топологическое пространство $S = \prod_{x \in E} p(x)D$, где $D = \{\alpha \in L : |\alpha| \leqslant 1\}$. Оно компактно по теореме Тихонова. Каждый элемент в $f \in S$ задает функцию $f' : E \to \mathbb{K}$ по формуле $f'(x) = \pi_x(f)$. Эта функция удовлетворяет неравенству $|f'(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$. И наоборот, любая такая функция задает элемент в S. Тем самым мы V° отождествляем с подмножеством в S.

Заметим, что сходимость направленности функций из S равносильна поточечной сходимости. А это значит, что $*$-слабая топология на V° совпадает с топологией, индуцированной из S. Значит, компактность V° будет доказана, если доказать, что V° замкнуто в S.

Пусть $f_\alpha \in V^\circ$ - направленность, сходящаяся в S к функции f. Тогда для любых $x, y \in E$ имеет место равенство $f(x+y) = \lim f_\alpha(x+y) = \lim(f_\alpha(x) + f_\alpha(y)) = f(x) + f(y)$. Аналогично проверяется, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{K}$. Этим доказано, что f линейно. Наконец, принадлежность f к S означает выполнение неравенства $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$. Это означает, что $f \in V^\circ$. □

Лемма 2.9.3. *Пусть E - ЛВП.*

1. *Совокупность $\{A^\circ : A \subset E$ конечно$\}$ образует базис окрестностей нуля $*$-слабой топологии на E'. Эта совокупность состоит из замкнутых (в $*$-слабой топологии) абсолютно выпуклых множеств.*

2. *Совокупность $\{B_\circ : B \subset E'$ конечно$\}$ образует базис окрестностей нуля слабой топологии на E. Эта совокупность состоит из замкнутых абсолютно выпуклых множеств.*

3. *Совокупность $\{A^\circ : A \subset E$ ограничено$\}$ образует базис окрестностей нуля сильной топологии на E'. Эта совокупность состоит из замкнутых в $*$-слабой топологии абсолютно выпуклых множеств.*

Доказательство. Доказательства всех трех утверждений практически одинаковы, а потому мы докажем только первое. Заметим, что если $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то A° - замкнутый единичный шар полунормы $w^*_{x_1,\ldots,x_n}$. Значит, каждое из множеств A°, где $A \subset E$ конечно, является окрестностью нуля в E' относительно $*$-слабой топологии. Теперь $\varepsilon B_{w^*_{x_1,\ldots,x_n}} = (1/\varepsilon\ A)^\circ$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, множества вида A°, где $A \subset E$ конечно, образуют базис окрестностей нуля в $*$-слабой топологии (поскольку базис окрестностей нуля образуют множества вида $\varepsilon B_{w^*_{x_1,\ldots,x_n}}$). □

Лемма 2.9.4. *Пусть E - отделимое ЛВП, $A \subset E$ - абсолютно выпуклое непустое множество.*

1. *Множество $E_A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$ - линейное подпространство в E, а $A \subset E_A$ - поглощающее множество.*

2. *Если A ограничено, то m_A - норма на E_A, причем линейное отображение вложения $j : E_A \to E$ ($j(x) = x$, $x \in E_A$) непрерывно.*

3. *Если A компактно, то пространство E_A, наделенное нормой m_A, банахово.*

Доказательство. 1. Это проверяется элементарно.

2. Пусть A ограничено. По определению m_A - полунорма на E_A. Пусть $p : E \to \mathbb{R}$ - непрерывная полунорма на E. Тогда $p(x) \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех $x \in A$. Это означает, что $p(x) \leqslant Cm_A(x)$ для всех $x \in E_A$. Этим доказана непрерывность отображения j. Пусть теперь $x \in E_A$ - ненулевой элемент. Тогда найдется такая непрерывная полунорма $p : E \to \mathbb{R}$, что $p(x) > 0$. Но тогда и $m_A(x) > 0$. Значит, m_A - норма.

3. Чтобы доказать полноту E_A рассмотрим произвольную последовательность Коши $x_n \in E_A$. Эта последовательность ограничена, а значит лежит в λA для некоторого $\lambda > 0$. Далее, из-за непрерывности вложения E_A в E последовательность x_n является последовательностью Коши в E. Наконец, благодаря компактности множества λA последовательность x_n сходится к некоторому $x \in \lambda A$ (см. предложение 2.3.3).

   Докажем, что x_n сходится к x в пространстве E_A. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n - x_m \in \varepsilon A$ при $m, n \geqslant N$. Но тогда, переходя к пределу по n с учетом замкнутости A в E, получаем, что $x - x_m \in \varepsilon A$ при $m \geqslant N$. Это означает, что $x_n \to x$ в E_A.

□

Следствие. *Если E - отделимое ЛВП, то любая бочка в E поглощает все абсолютно выпуклые компактные подмножества в E.*

Доказательство. Пусть $B \subset E$ - бочка, а $A \subset E$ - компактное абсолютно выпуклое множество. Тогда E_A - банахово пространство, а $B \cap E_A$ - бочка. Ввиду бочечности банаховых пространств (см. предложение 2.7.2), получаем, что $B \cap E_A$ поглощает A. □

Теорема 2.9.2 (Макки)**.** *Пусть E - ЛВП. Множество $A \subset E$ ограничено в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно ограничено в исходной топологии.*

Доказательство. Пусть $A \subset E$ ограничено в слабой топологии. Докажем, что любая замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля (в исходной топологии) $U \subset E$ поглощает A. По теореме Банаха-Алаоглу множество U° $*$-слабо компактно. Из ограниченности A следует, что A° - бочка в $*$-слабой топологии. Значит, A° поглощает U°. Следовательно, $(U^\circ)_\circ$ поглощает $(A^\circ)_\circ$. Остается заметить, что $U = (U^\circ)_\circ$ и $A \subset (A^\circ)_\circ$. □

Предложение 2.9.4. *Пусть E - отделимое ЛВП. Подпространство $L \subset E'$ всюду плотно в $*$-слабой топологии тогда и только тогда, когда для любого ненулевого $x \in E$ найдется такое $f \in L$, что $f(x) \neq 0$.*

Доказательство. Заметим, что $\overline{L} = (L_\circ)^\circ$, где замыкание понимается в $*$-слабой топологии. Легко видеть, что $L_\circ = \{x \in E : f(x) = 0, f \in L\}$. Далее, пусть $A \subset E$. Легко проверить, что $A^\circ = E'$ тогда и только тогда, когда $A = \{0\}$ или $A = \varnothing$. Значит, $\overline{L} = E'$ тогда и только тогда, когда $L_\circ = \{0\}$. □

2.10 Второе сопряженное пространство и рефлексивность

Пусть E - ЛВП. Через E'' будем обозначать пространство, сопряженное к пространству E', наделенному сильной топологией. Каждый элемент $x \in E$ определяет непрерывный (в сильной топологии) функционал $\tau_x^E : E' \to \mathbb{K}$ по формуле $\tau_x^E(f) = f(x)$, $f \in E'$. Таким образом, мы имеем линейный оператор $\tau^E : E \to E''$.

Пусть E, F - ЛВП, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор. Тогда $u' : F' \to E'$ непрерывен относительно сильных топологий. А потому задан сопряженный к u' оператор $u'' : E'' \to F''$.

Предложение 2.10.1.

1. *Пусть E, F - ЛВП, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор. Тогда $u'' \circ \tau^E = \tau^F \circ u$.*
2. *Пусть E - ЛВП. τ^E инъективен тогда и только тогда, когда E отделимо.*
3. *Пусть E - ЛВП. Направленность $x_\alpha \in E$ сходится к $x \in E$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда $\tau_{x_\alpha}^E \to \tau_x^E$ в $*$-слабой топологии на E''.*
4. *Пусть E - ЛВП, $A \subset E'$. Тогда $(\tau^E)^{-1}(A^\circ) = A_\circ$.*
5. *Пусть E - отделимое ЛВП. Тогда оператор $(\tau^E)^{-1} : \tau^E(E) \to E$ непрерывен относительно сильной топологии на $\tau^E(E)$ и исходной топологии на E.*

Доказательство.

1. Действительно, пусть $x \in E$, $f \in F'$. Тогда $u''(\tau_x^E)(f) = \tau_x^E(u'(f)) = u'(f)(x) = f(u(x)) = \tau_{u(x)}^F(f)$.
2. Пусть $x \in E$. τ_x^E - нулевой функционал на E' тогда и только тогда, когда все функционалы $f \in E'$ обнуляются на x. Далее, E отделимо тогда и только тогда, когда для любого ненулевого $x \in E$ найдется такой $f \in E'$, что $f(x) \neq 0$. Далее очевидно.
3. Направленность x_α сходится к x тогда и только тогда, когда $f(x_\alpha)$ сходится к $f(x)$ для всех $f \in E'$. Далее равенства $f(x_\alpha) = \tau_{x_\alpha}^E(f)$, $f(x) = \tau_x^E(f)$ завершают доказательство.
4. $x \in A_\circ$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $f \in A$. Требуемое равенство теперь очевидно с учетом того, что $f(x) = \tau_x^E(f)$.
5. Пусть $U \subset E$ - абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля. Надо доказать, что $\tau^E(U)$ - окрестность нуля в $\tau^E(E)$. Из равенства $U = (U^\circ)_\circ = (\tau^E)^{-1}(U^{\circ\circ})$ следует, что $\tau^E(U) = \tau^E(E) \cap U^{\circ\circ}$. Но U° - ограниченное подмножество в сильной топологии на E', а потому $U^{\circ\circ}$ - окрестность нуля в сильной топологии на E''. Этим доказано, что $\tau^E(U)$ - окрестность нуля в $\tau^E(E)$.

$\square$

Определение 2.10.1. *Пусть E - ЛВП. E называется полурефлексивным, если τ^E - биективное отображение. E называется рефлексивным, если τ^E - гомеоморфизм между E и E'', наделенным сильной топологией.*

Пусть E - ЛВП. Заметим, что любая замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в E является полярой абсолютно выпуклого $*$-слабо компактного подмножества в E'. Воспользуемся этой идеей и введем на E следующую топологию топологию. Пусть $A \subset E'$ - абсолютно выпуклое $*$-слабо компактное множество. Определим полунорму $w_A = \sup_{f \in A} |f(x)|$ на пространстве E. Заметим, что для двух абсолютно выпуклых $*$-слабо компактных множеств $A, B \subset E'$ выполнено $w_A, w_B \leqslant w_{A+B}$ (множество $A + B$ тоже абсолютно выпукло и $*$-слабо компактно). Значит, совокупность полунорм w_A определяет топологию на E. Эта топология называется *топологией Макки.* Заметим, что имеет место аналог леммы 2.9.3: в топологии Макки базисом окрестностей нуля служит совокупность множеств $A_\circ$, где $A \subset E'$ - абсолютно выпукло и $*$-слабо компактно.

Теорема 2.10.1 (Макки, Аренс)**.** *Пусть E - ЛВП.*

1. *Топология на E слабее, чем топология Макки.*

2. *Линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$ непрерывен в топологии Макки тогда и только тогда, когда он непрерывен в исходной топологии.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно ввиду теоремы Банаха-Алаоглу (теорема 2.9.1). Пусть линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$ непрерывен в исходной топологии. Тогда он также непрерывен в топологии Макки, так как она сильнее исходной. Обозначим через F пространство всех непрерывных в топологии Макки функционалов на E. Тогда $E' \subset F$ и, как нетрудно видеть, $*$-слабая топология на E' индуцируется из $*$-слабой топологии на F. Значит, если $A \subset E'$ - абсолютно выпуклое $*$-слабо компактное множество, то A также $*$-слабо компактное подмножество в F, а значит A замкнуто в F. Это означает, что $(A_\circ)^\circ = A$ ввиду предложения 2.9.3 (поляры берутся в смысле пространства E с топологией Макки и его сопряженного F).

Пусть теперь $f : E \to \mathbb{K}$ - линейный функционал, непрерывный в топологии Макки. Тогда найдутся константа $C > 0$ и такое абсолютно выпуклое $*$-слабо компактное множество $A \subset E'$, что $f(x) \leqslant Cw_A(x)$ для всез $x \in E$. Но отсюда следует, что $f \in ((CA)_\circ)^\circ = CA$. Значит, $f \in E'$. $\square$

Теорема Макки-Аренса напрямую дает возможность получить критерий полурефлексивности локально-выпуклого пространства.

Предложение 2.10.2. *Пусть E - отделимое ЛВП. E полурефлексивно тогда и только тогда, когда любое ограниченное замкнутое в слабой топологии подмножество в E слабо компактно.*

Доказательство. Пусть F обозначает пространство E', наделенное $*$-слабой топологией. Тогда $F' = \tau^E(E)$. Если любое ограниченное замкнутое в слабой топологии подмножество в E компактно, то сильная топология на F совпадает с топологией Макки на F. Действительно, если $A \subset E$ ограничено, то $\overline{\operatorname{achull} A}$ тоже ограничено, а значит слабо компактно. Но это означает, что сильная топология на E' порождается полунормами w_A^*, где $A \subset E$ абсолютно выпукло и компактно в слабой топологии. Остается заметить, что τ^E отождествляет слабую топологию на E и $*$-слабую топологию на $\tau^E(E)$. Получается, что сильная топология и топология Макки на F порождаются одними и те ми же полунормами. Значит, из теоремы Макки-Аренса следует, что сопряженное пространство к E', наделенному сильной топологией есть $\tau^E(E)$.

Обратно, пусть E полурефлексивно. Теперь обозначим через F пространство E', наделенное сильной топологией. Его сопряженное совпадает с $\tau^E(E)$. По теореме Макки-Аренса сильная топология на F слабее топологии Макки. Базисом окрестностей нуля в сильной топологии служат множества B°, где $B \subset E$ ограничено, а базисом окрестностей нуля в топологии Макки - множества B°, где $B \subset E$ абсолютно выпукло и компактно в слабой топологии. Получается, что для любого ограниченного множества $B \subset E$ найдется такое абсолютно выпуклое компактное в слабой топологии множество $D \subset E$, что $D^\circ \subset B^\circ$. Но тогда $(B^\circ)_\circ \subset D$. Отсюда следует, что любое ограниченное подмножество в E содержится в некотором слабо компактном множестве. $\square$

Мы охарактеризовали только полурефлексивность. Заметим, что рефлексивность пространства E равносильна полурефлексивности E и непрерывности оператора τ^E.

Определение 2.10.2. *Пусть E - ТВП. Множество $A \subset E$ называется ограниченно поглощающим, если A поглощает все ограниченные подмножества в E.*

Заметим, что любая окрестность нуля является ограниченно поглощающим множеством.

Определение 2.10.3. *Пусть E - ЛВП. E называется квазибочечным, если любая ограниченно поглощающая бочка в E является окрестностью нуля.*

Легко видеть, что любое бочечное пространство квазибочечно.

Предложение 2.10.3. *Пусть E - ЛВП. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Любое ограниченное в сильной топологии множество $A \subset E'$ является равностепенно непрерывным.*

2. *Отображение τ^E непрерывно по отношению к сильной топологии на E''.*

3. *E квазибочечно.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Базисом окрестностей нуля в E'' служат множества вида B°, где $B \subset E'$ - ограничено в сильной топологии. По условию B равностепенно непрерывно, а значит $B \subset U^\circ$, где $U \subset E$ - окрестность нуля. Без ограничения общности можно считать, что U замкнута и абсолютно выпукла. Поскольку $U^{\circ\circ} \subset B^\circ$ имеем, $\tau^E(U) \subset B^\circ$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $A \subset E$ - ограниченно поглощающая бочка. Заметим, что A° ограничено в сильной топологии, так как поглощается множествами B°, где $B \subset E$ ограничено. Значит, A - окрестность нуля, так как $A = (\tau^E)^{-1}(A^{\circ\circ})$ и τ^E непрерывно.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $B \subset E'$ - множество, ограниченное в сильной топологии. Тогда $B_\circ$ - ограниченно поглощающая бочка. Отсюда следует, что $B \subset (B_\circ)^\circ$ равностепенно непрерывно. $\square$

Следствие. *Пусть E - ЛВП. E рефлексивно тогда и только тогда, когда E квазибочечно и любое слабо замкнутое ограниченное подмножество в E слабо компактно.*

Предложение 2.10.4. *Пусть E - рефлексивное ЛВП.*

1. *Если E рефлексивно, то E бочечно.*
2. *Если E рефлексивно, то E' рефлексивно.*

Доказательство. 1. Мы покажем, что любая бочка в E является ограниченно поглощающей (в этом случае из квазибочечности E следует, что любая бочка - окрестность нуля). Пусть $B \subset E$ - бочка, а $A \subset E$ - ограниченное множество. Тогда $\overline{\operatorname{achull} A}$ - множество, компактное в слабой топологии на E, так как E полурефлексивно. Далее B замкнуто в слабой топологии, так как B выпукло, а значит B - бочка в слабой топологии. Но тогда B поглощает $\overline{\operatorname{achull} A}$ по следствию из леммы 2.9.4.

2. Это легко следует из определения.

□

2.11 Борнологические пространства

Определение 2.11.1. *Пусть E - ЛВП. E называется борнологическим, если любое абсолютно выпуклое ограниченно поглощающее подмножество в E является окрестностью нуля.*

Предложение 2.11.1. *Пусть E - ЛВП.*

1. *E борнологично тогда и только тогда, когда любая полунорма в E, ограниченная на ограниченных подмножествах в E, непрерывна.*
2. *Если E борнологично, то E квазибочечно.*
3. *Если E метризуемо, то E борнологично.*

Доказательство. 1. Пусть E борнологично. Если $p : E \to \mathbb{R}$ - полунорма, ограниченная на всех ограниченных в E подмножествах, то $\widetilde{B}_p$ - ограниченно поглощающее абсолютно выпуклое подмножество в E. Значит, $\widetilde{B}_p$ - окрестность нуля, откуда следует, что p непрерывна.

Обратно, пусть любая полунорма на E, ограниченная на ограниченных подмножествах в E, непрерывна. Тогда, если $A \subset E$ - абсолютно выпуклое ограниченно поглощающее множество, то m_A - полунорма, ограниченная на ограниченных подмножествах в E. Значит, m_A непрерывна, откуда следует, что A - окрестность нуля.

2. Это следует напрямую из определения.

3. Пусть E метризуемо. Тогда в E найдется счетный базис окрестностей нуля $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Пусть A - абсолютно выпуклое ограниченно поглощающее множество. Если A не является окрестностью нуля, то можно выбрать последовательность $x_n \in U_n \backslash nA$ (действительно, если $U_n \subset nA$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то A - окрестность нуля). Но тогда последовательность x_n сходится к нулю, а значит множество $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. Это означает, что A поглощает S, что противоречит условию $x_n \notin nA$, $n \in \mathbb{N}$.

□

Отметим, что существуют бочечные пространства, не являющиеся борнологическими, и борнологические пространства, не являющиеся бочечными. Также существуют квазибочечные пространства, не являющиеся ни бочечными, ни борнологическими.

Лемма 2.11.1. *Пусть E - ТВП, $x_n \in E$ - ограниченная последовательность, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ - последовательность, сходящаяся к нулю. Тогда последовательность $\alpha_n x_n$ сходится к нулю.*

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 2.11.2. *Пусть E, F - ЛВП, $u : E \to F$ - линейный оператор, E борнологично. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *u непрерывно.*
2. *Для любой последовательности $x_n \in E$, сходящейся к нулю, последовательность $u(x_n) \in F$ сходится к нулю.*
3. *u переводит ограниченные подмножества в E в ограниченные подмножества в F.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Это очевидно.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $A \subset E$ ограничено, $U \subset F$ - абсолютно выпуклая окрестность нуля. Если U не поглощает $u(A)$, то найдется такая последовательность $x_n \in A$, что $u(x_n) \notin nU$. Но тогда последовательность $y_n = 1/n \ x_n$ сходится к нулю, в то время как $u(y_n) \notin U$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получаем противоречие.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $p : F \to \mathbb{R}$ - непрерывная полунорма. Тогда полунорма $q = p \circ u : E \to \mathbb{R}$ ограничена на ограниченных подмножествах в E. Значит, q непрерывна. При этом по определению $p(u(x)) \leqslant q(x)$ для всех $x \in E$. Это означает, что u - непрерывный линейный оператор. □

Предложение 2.11.3. *Пусть E - борнологическое пространство. Тогда E' полно относительно сильной топологии.*

Доказательство. Пусть $f_\alpha \in E'$ - направленность Коши относительно сильной топологии. Тогда $f_\alpha(x)$ - направленность Коши в $\mathbb{K}$ для всех $x \in E$. Предел этой направленности обозначим через $f(x)$. Легко проверить, что f - линейный функционал на E. Пусть $A \subset E$ - ограниченное множество. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что $|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \leqslant \varepsilon|$ для любых $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$ и $x \in A$. Переходя к пределу, получаем, что $|f(x) - f_\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $x \in A$. Отсюда следует, что f непрерывен, так как ограничен на всех ограниченных подмножествах в E, а направленность f_α сходится к f в сильной топологии. □

2.12 Монтелевские пространства

Определение 2.12.1. *Пусть E - отделимое ЛВП. E называется монтелевским, если E отделимо, бочечно и любое замкнутое ограниченное подмножество в E компактно.*

Очевидно, что любое конечномерное пространство является монтелевским.

Предложение 2.12.1. *Пусть E - монтелевское пространство. Тогда E рефлексивно.*

Доказательство. Надо проверить, что E полурефлексивно. Пусть $A \subset E$ - слабо замкнутое ограниченное множество. Тогда A компактно в исходной топологии на E. Легко видеть, что A также компактно в слабой топологии, так как она слабее исходной. Значит, E полурефлексивно. □

Лемма 2.12.1. *Пусть E - ТВП, $A \subset E$ компактно, $U \subset E$ - окрестность нуля. Тогда найдется такое конечное множество $F \subset A$, что $A \subset F + U$.*

Доказательство. Пусть $W = \operatorname{int} U$. Множества вида $x = W$, $x \in K$ открыты и покрывают A, а значит найдется такой конечный набор $x_1, \ldots, x_n \in A$, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + W)$. Но тогда $A \subset F + U$, где $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. □

Замечание. *Лемму 2.12.1 можно воспринимать как аналог результата о том, что компактные метрические пространства вполне ограничены.*

Предложение 2.12.2. *Пусть E - монтелевское пространство.*

1. *Множество $A \subset E'$ ограничено в сильной топологии тогда и только тогда, когда A ограничено в $*$-слабой топологии.*

2. *На ограниченном множестве $A \subset E'$ $*$-слабая и сильная топологии совпадают.*

3. *E' - монтелевское пространство относительно сильной топологии.*

Доказательство. 1. Это следует из бочечности E.

2. Пусть $A \subset E'$ - ограниченное множество, $f \in A$, $U \subset E'$ - окрестность нуля в сильной топологии. Будем считать, что $U = K^\circ$, где $K \subset E$ - компактное множество. Надо найти такую окрестность нуля $V \subset E'$ в $*$-слабой топологии, что $(f + V) \cap A \subset (f + U) \cap A$. A - ограниченное множество, а значит оно равностепенно непрерывно. Значит, найдется окрестность нуля $W \subset E$, что $A \subset W^\circ$. Далее найдется такое конечное множество $F \subset K$, что $K \subset F + 1/3\ W$. Пусть $g \in (f + 1/3\ F^\circ) \cap A$. Для любого $x \in K$ найдется такое $y \in F$, что $x - y \in 1/3 : K$. Но тогда $|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$. Здесь $|g(y) - f(y)| \leqslant 1/3$, так как $f - g \in 1/3\ F^\circ$, $y \in F$. Далее, $|g(x - y)| \leqslant 1/3$, так как $g \in A \subset W^\circ$, а $x - y \in 1/3\ W$. Аналогично $|f(x - y)| \leqslant 1/3$. Значит, $f - g \in K^\circ$. Значит, $(f + 1/3\ F^\circ) \cap A \subset (f + U) \cap A$.

3. Пусть $A \subset E$ - ограниченное замкнутое множество. Пусть B - замыкание абсолютно выпуклой оболочки множества A (замыкание в сильной и в $*$-слабой топологии будет одинаковым ввиду рефлексивности E). B ограничено, а значит на B сильная и $*$-слабая топологии совпадают. Отсюда следует, что A - $*$-слабо замкнутое подмножество в B. Далее, из полурефлексивности E' вытекает, что B компактно в $*$-слабой топологии на E (которая совпадает со слабой топологией), а потому A компактно в сильной топологии.

□

Следствие. *Пусть E - монтелевское пространство. Тогда в пространстве E' последовательность f_n сходится к f в $*$-слабой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f в сильной топологии.*

Теперь мы докажем, что пространство бесконечно гладких функций на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$ является монтелевским.

Пусть X - компактное топологическое пространство. Тогда $C(X, \mathbb{K})$ - пространство с нормой $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $f \in C(x, \mathbb{K})$. Если X предполагать метрическим пространством, то следующая теорема дает критерий вполне ограниченности подмножества $A \subset C(X, \mathbb{K})$.

Теорема 2.12.1 (Арцела)**.** *Пусть X - компактное метрическое пространство. Тогда множество $A \subset C(X, \mathbb{K})$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *A ограничено.*

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ при $\rho(x, y) \leqslant \delta$.*

Доказательство. Пусть A вполне ограничено. Тогда его ограниченность очевидна. Далее выберем $\varepsilon > 0$. Найдутся такие непустые $A_1, \ldots, A_n \subset A$, что $A \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ и $\operatorname{diam} A_k \leqslant \varepsilon/3$. Выберем $f_k \in A_k$. Поскольку функции $f_1, \ldots, f_n$ равномерно непрерывны (см. предложение 1.7.3), существует такое $\delta > 0$, что $|f_k(x) - f_k(y)| \leqslant \varepsilon/3$ при $k = 1, \ldots, n$ и $\rho(x, y) \leqslant \delta$. Но тогда нетрудно проверить, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ при $f \in A$ и $\rho(x, y) \leqslant \delta$.

Пусть теперь выполнены вышеописанные условия. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/3$ при $\rho(x, y) \leqslant \delta$ и $f \in A$. Пусть $\sup_{x \in X, f \in A} |f(x)| = C$. Множество $D = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leqslant C\}$ вполне ограничено, а потому $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, где $\operatorname{diam} D_k \leqslant \varepsilon/3$ при $k = 1, \ldots, n$. Также из компактности X следует, что X вполне ограничено, а потому $X = \bigcup_{k=1}^{m} X_k$, где $\operatorname{diam} X_k \leqslant \delta$. Выберем $x_k \in X_k$, $k = 1, \ldots, m$. Пусть теперь

$$A_{j_1, \ldots, j_m} = \{f \in A : f(x_k) \in D_{j_k}, k = 1, \ldots, m\},$$

где $j_1, \ldots, j_m$ - набор, состоящий из целых чисел от 1 до n. Тогда, как нетрудно видеть, $A = \bigcup_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{n} A_{j_1, \ldots, j_m}$. Теперь, если $f, g \in A_{j_1, \ldots, j_m}$, то $||f - g|| \leqslant \varepsilon$. Значит, $\operatorname{diam} A_{j_1, \ldots, j_m} \leqslant \varepsilon$. Таким образом, A вполне ограничено. □

Лемма 2.12.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое множество. Пусть $f_n \in C^1(\Omega)$ - ограниченная последовательность. Тогда в ней найдется подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся в пространстве $C(\Omega, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Пусть $K \subset \Omega$. Докажем, что множество $\{f_n|_K : n \in \mathbb{N}\}$ вполне ограничено в $C(K, \mathbb{C})$. Действительно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, K) \leqslant \varepsilon\}$ является подмножеством в Ω. Тогда, если $x, y \in K$ и $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, то отрезок, соединяющий точки x и y лежит в K_ε. Из теоремы Лагранжа легко выводится оценка: $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y) \sup_{x \in K_\varepsilon} |\operatorname{grad} f(x)|$. Но уже из этой оценки с учетом теоремы Арцела выводится вполне ограниченность множества $\{f_n|_K : n \in \mathbb{N}\}$, ввиду ограниченности последовательности f_n по полунорме $p_{1,K_\varepsilon} = \sup_{x \in K_\varepsilon, |\alpha| \leqslant 1} |D^\alpha f(x)|$.

Значит, для любого компакта $K \subset \Omega$ из последовательности f_n выделяется подпоследовательность, сходящаяся в $C(K, \mathbb{C})$. Выберем такую последовательность компактов $K_1, K_2 \cdots \subset \Omega$, что $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$. Пользуясь диагональным процессом из f_n легко выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C(K_n, \mathbb{C})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Эта подпоследовательность сходится в $C(\Omega, \mathbb{C})$. □

Пользуясь индукцией нетрудно из леммы 2.12.2 получить следующее утверждение (детали оставляются читателю):

Лемма 2.12.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое множество. Пусть $f_n \in C^{k+1}(\Omega)$ - ограниченная последовательность, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда в ней найдется подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся в пространстве $C^k(\Omega)$.*

Теорема 2.12.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - открытое множество. Тогда $C^\infty(\Omega)$ - монтелевское пространство.*

Доказательство. Достаточно из любой ограниченной в $C^\infty(\Omega)$ последовательности f_n выделить сходящуюся подпоследовательность. Пользуясь леммой 2.12.3 и диагональным процессом из f_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C^k(\Omega)$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Эта подпоследовательность сходится в $C^\infty(\Omega)$. □

Следствие. *Пусть Ω - открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{O}(\Omega)$ - монтелевское пространство.*

2.13 Нормированные пространства

Предложение 2.13.1. *Пусть E, F - линейные пространства с нормами $||\cdot||_E, ||\cdot||_F$ соответственно. Пусть $B = \{x \in E : ||x||_E < 1\}$, $\widetilde{B} = \{x \in E : ||x||_E \leqslant 1\}$, $S = \{x \in E : ||x||_E = 1\}$. Пусть $u : E \to F$ - линейный оператор.*

1. *Непрерывность u равносильна тому, что $\sup_{x \in \widetilde{B}} ||u(x)||_F < \infty$. Выражение $||u||_{EF} = \sup_{x \in \widetilde{B}} ||u(x)||_F$ является нормой на пространстве $\mathcal{L}_c(E, F)$ всех непрерывных линейных операторов из E в F.*

2. *Если u непрерывен, а $x \in E$, то $||u(x)||_F \leqslant ||u||_{EF}||x||_E$.*

3. *Если u непрерывен, то $||u||_{EF} = \sup_{x\in B} ||u(x)||_F = \sup_{x\in S} ||u(x)||_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} ||u(x)||_F/||x||_E$.*

4. *Если F - банахово пространство, то $\mathcal{L}_c(E, F)$ - тоже банахово пространство.*

5. *Если G - еще одно линейное пространство с нормой $||\cdot||_G$, а $u : E \to F$, $v : F \to G$ - непрерывные линейные операторы, то $||v \circ u||_{EG} \leqslant ||v||_{FG}||u||_{EF}$.*

Доказательство. Все эти утверждения тривиальны, кроме, может быть, четвертого. Пусть F - банахово пространство. Если $u_\alpha \in \mathcal{L}_c$ - направленность Коши, то $u_\alpha(x)$ - направленность Коши для всех $x \in E$. Обозначим предел этой направленности через $u(x)$. $u : E \to F$ - линейный оператор. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое α_0, что $||u_\alpha(x) - u_\beta(x)||_F \leqslant \varepsilon$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$ и $x \in \widetilde{B}$. Но тогда $||u(x) - u_\alpha(x)||_F \leqslant \varepsilon$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $x \in \widetilde{B}$. Это означает непрерывность u и сходимость направленности u_α к u в пространстве $\mathcal{L}_c(E, F)$. □

Предложение 2.13.2. *Пусть E - пространство с нормой $||\cdot||$. Тогда сильная топология на E' задается нормой $||\cdot||'$, где $||f||' = \sup_{x\in E, ||x||\leqslant 1} |f(x)|$. E' относительно сильной топологии является банаховым пространством.*

Доказательство. Еще не доказанным является только то, что сильная топология порождается нормой $||\cdot||'$. Для доказательства заметим, что если $A \subset E$ - ограниченное множество, то $w_A^* \leqslant C||\cdot||'$ для некоторого $C > 0$. Это означает, что топология, порожденная нормой $||\cdot||'$ будет сильнее, чем сильная топология на E'. С другой стороны $||\cdot||' = w_B^*$, где B - единичный шар пространства E. □

Пусть E - пространство с нормой $||\cdot||$. Заметим, что сильная топология на втором сопряженном пространстве E'' порождается нормой $||h||'' = \sup_{f\in E':||f||'\leqslant 1} |h(f)|$

Лемма 2.13.1. *Пусть E - пространство с нормой $||\cdot||$. Тогда для любого ненулевого $x \in E$ найдется такое $f \in E'$, что $||f||' = 1$ и $|f(x)| = ||x||$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство $L = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{K}\}$. На этом пространстве, очевидно, существует и единствен такой функционал $f_0 : L \to \mathbb{K}$, что $f_0(x) = ||x||$. При этом имеет место оценка $|f_0(y)| \leqslant ||y||$ для всех $y \in L$. По теореме 2.8.2 найдется такое продолжение функционала f_0 на пространство E, что $|f(y)| \leqslant ||y||$ для всех $y \in L$. f - искомый функционал. □

Предложение 2.13.3. *Пусть E - пространство с нормой $||\cdot||$. Тогда $\tau^E : E \to E''$ - изометрическое отображение (т.е. $||\tau_x^E||'' = ||x||$ для всех $x \in E$).*

Доказательство. Пусть $x \in E$ - ненулевой вектор. Заметим, что $||\tau_x^E||'' = \sup_{f\in E':||f||'\leqslant 1} |\tau^E(f)| = \sup_{f\in E':||f||'\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{f\in E':||f||'\leqslant 1} ||f||'||x|| \leqslant ||x||$. Для доказательства обратного неравенства достаточно взять такой функционал $f : E' \to \mathbb{K}$, что $f(x) = ||x||$ и $||f|| = 1$. Легко видеть, что $||\tau_x^E||'' \geqslant |\tau_x^E(f)| = ||x||$. □

Следствие. *Пусть E, F - линейные пространства с нормами $||\cdot||_E$, $||\cdot||_F$ соответственно, $u : E \to F$ - непрерывный линейный оператор. Тогда $||u||_{EF} = ||u'||_{F'E'}$.*

Доказательство. Заметим, что из изометричности отображений τ^E и τ^F с учетом предложения 2.10.1 следует, что $||u''||_{E''F''} \geqslant ||u||_{EF}$. Докажем, что $||u||_{EF} \geqslant ||u'||_{F'E'}$. Для этого запишем

$$||u'||_{F'E'} = \sup_{f \in F' : ||f||'_F \leqslant 1} ||u'(f)||'_E = \sup_{f \in F' : ||f||'_F \leqslant 1} ||f \circ u||'_E \leqslant \sup_{f \in F' : ||f||'_F \leqslant 1} ||u||_{EF} ||f||'_F \leqslant ||u||_{EF}.$$

Теперь получаем цепочку неравенств $||u||_{EF} \geqslant ||u'||_{F'E'} \geqslant ||u''||_{E''F''} \geqslant ||u||_{EF}$. Из нее вытекает требуемое равенство. □

Предложение 2.13.4. *Пусть E - нормированное пространство с нормой $||\cdot||$. E рефлексивно тогда и только тогда, когда единичный шар $\{x \in E : ||x|| \leqslant 1\}$ компактен в слабой топологии на E.*

Доказательство. Раз E нормировано, то E борнологично и, тем более, квазибочечно. Полурефлексивность E в свою очередь равносильна слабой компактности единичного шара. □

Лемма 2.13.2. *Пусть E - ЛВП, $L \subset E$ - подпространство. Тогда слабая топология на L совпадает с топологией, индуцированной из E, если E наделить слабой топологией.*

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ - непрерывные линейные функционалы на L. Ввиду следствия из теоремы 2.8.2, эти функционалы продолжаются до непрерывных функционалов $g_1, \ldots, g_n$ на E соответственно. Но тогда полунорма $w_{f_1,\ldots,f_n}$ - ограничение на L полунормы $w_{g_1,\ldots,g_n}$. Значит слабая топология на L порождена ограничениями полунорм, определяющих слабую топологию на E. □

Предложение 2.13.5. *Пусть E - рефлексивное нормированное пространство.*

1. *E полно.*

2. *Любое замкнутое линейное подпространство в E рефлексивно.*

Доказательство.

1. E'' относительно сильной топологии всегда полно ввиду предложения 2.13.2. Значит, если τ^E - гомеомоморфизм, то E также полно.

2. Пусть $L \subset E$ - замкнутое подпространство. Тогда L слабо замкнуто, поскольку L выпукло. Но тогда единичный шар в L слабо компактен ввиду леммы 2.13.2. Значит, L рефлексивно.

□

Следствие. *Пусть E - банахово пространство. E рефлексивно тогда и только тогда, когда E' рефлексивно.*

Пусть E' рефлексивно. Тогда E'' рефлексивно. Поскольку τ^E изометрично, а E полно, то $\tau^E(E)$ - замкнутое подпространство в E'', а потому оно рефлексивно. Но отсюда следует рефлексивность E, так как $\tau^E : E \to \tau^E(E)$ - гомеоморфизм.

Теорема 2.13.1. *Пусть E - нормированное пространство, а E' сепарабельно (относительно сильной топологии). Тогда E сепарабельно.*

Доказательство. Выберем на единичной сфере $S = \{f \in E' : ||f||' = 1\}$ всюду плотную последовательность $f_1, f_2, \dots \in S$. Для каждого n выберем такое $x_n \in E$, что $||x_n|| \leqslant 1$, но $|f_n(x_n)| > 1/2$. Докажем, что $E = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Если это удастся сделать, то E окажется сепарабельным, так как линейные комбинации элементов последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ с рациональными коэффициентами окажутся счетным всюду плотным подмножеством в E.

Пусть $L = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Если $L \neq E$, то найдется такой линейный функционал $f \in E'$, что $||f||' = 1$, но $f|_L = 0$. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $||f - f_n|| \leqslant 1/4$. Далее получаем, что

$$1/2 < |f_n(x_n)| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \leqslant ||f - f_n||'||x_n|| \leqslant 1/4\,.$$

Полученное противоречие показывает, что $E = L$. $\square$

Следствие. *Если E - сепарабельное рефлексивное нормированное пространство, то E' сепарабельно по норме $||\cdot||'$.*

Лемма 2.13.3. *Пусть E - сепарабельное нормированное пространство. Тогда любое ограниченное (по норме $||\cdot||'$) подмножество в E', наделенное $*$-слабой топологией, метризуемо.*

Доказательство. Пусть $s_n \in E$ - последовательность, всюду плотная на единичном шаре в E. Докажем, что метрика $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(s_n) - g(s_n)|/2^n$ задает на любом ограниченном подмножестве A в E' $*$-слабую топологию. Для этого мы покажем, что сходимость направленности $f_\alpha \in A$ к элементу $f \in A$ по метрике ρ эквивалентна ее сходимости к f в $*$-слабой топологии. Пусть $C > 0$ - такое число, что $||g||' \leqslant C$ для всех $g \in A$.

Пусть $f_\alpha \in A$ - направленность, сходящаяся по метрике ρ к $f \in A$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $x \neq 0$. Пусть $x' = x/||x||$. Найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $||s_n - x'|| \leqslant \varepsilon/4C$. Далее найдется такое α_0, что $\rho(f, f_\alpha) \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Но тогда

$$|f(x) - f_\alpha(x)| = ||x|||f(x') - f_\alpha(x')| \leqslant ||x||\left(|f(x') - f(s_n)| + |f(s_n) - f_\alpha(s_n)| + |f_\alpha(s_n) - f_\alpha(x')|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, f_α сходится к f в $*$-слабой топологии.

Наоборот, пусть $f_\alpha \in A$ - направленность, сходящаяся к $f \in A$ в $*$-слабой топологии, $\varepsilon > 0$. Выберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=N}^\infty 2C/2^n < \varepsilon/2$. Далее найдется такое α_0, что $|f_\alpha(s_k) - f(s_k)| \leqslant \varepsilon/2N$ при $k = 1, \dots, N-1$ и $\alpha \geqslant \alpha_0$. Но тогда, очевидно, что $\rho(f_\alpha, f) \leqslant \varepsilon$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. $\square$

Предложение 2.13.6. *Пусть E - рефлексивное нормированное пространство. Тогда из любой ограниченной последовательности в E можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $x_n \in E$ - ограниченная последовательность. Пусть $L = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Легко видеть, что L сепарабельно и рефлексивно. Значит, ограниченные подмножества в L относительно слабой топологии метризуемы, откуда следует, что из последовательности x_n

выделяется сходящаяся в слабой топологии на L подпоследовательность. Остается применить лемму 2.13.2, чтобы доказать, что эта подпоследовательность сходится по отношению к слабой топологии на E. □

2.14 Пополнение нормированного пространства

Пусть E - линейное пространство с нормой $||\cdot||_E$. Пара (j, F) называется *пополнением* пространства E, если F - банахово пространство с нормой $||\cdot||_F$, $j : E \to F$ - линейное изометрическое отображение, и образ $j(E)$ всюду плотен в F. Таким образом, пополнение - полное пространство, содержащее E (точнее его изометрическую копию) в качестве всюду плотного подпространства.

Предложение 2.14.1. *Пусть E - линейное пространство с нормой $||\cdot||_E$, (j, F) - пополнение пространства E. Пусть G - банахово пространство с нормой $||\cdot||_G$, $u : E \to G$ - непрерывное линейное отображение. Тогда существует и единственно такое непрерывное линейное отображение $\widetilde{u} : F \to G$, что $\widetilde{u} \circ j = u$. При этом $||\widetilde{u}||_{FG} = ||u||_{EG}$.*

Доказательство. Это элементарно следует из теоремы 2.3.1. □

Следствие. *Пусть E - линейное пространство с нормой $||\cdot||_E$, (j, F), (k, G) - два пополнения пространства E. Тогда существует такой единственный изометрический изоморфизм v : $F \to G$, что $v \circ j = k$.*

Таким образом, имеет место единственность пополнения в том смысле, что любые два пополнения будут отождествляться при помощи изометрии, которая будет оставлять неподвижным образ E в пополнениях.

Теорема 2.14.1. *Пусть E - нормированное пространство. Тогда у E существует пополнение.*

Доказательство. Пусть $L = \overline{\tau^E(E)}$, где замыкание понимается в смысле нормы $||\cdot||''$. Тогда пара (τ^E, L) - пополнение пространства E. □

2.15 Индуктивная топология

Здесь мы обсудим один способ построения локально выпуклой топологии на линейном пространстве, если дано семейство его подпространств, уже наделенных некоторой локально выпуклой топологией. Эта конструкция будет использоваться в дальнейшем при построении обобщенных функций и мер на локально компактных пространствах.

Пусть E - линейное пространство, а E_α, $\alpha \in I$ - семейство подпространств в E, наделенных локально выпуклой топологией. Пусть $\mathcal{P}$ обозначает семейство всех таких полунорм $p : E \to \mathbb{R}$, что $p|_{E_\alpha}$ непрерывно для всех $\alpha \in I$. Нетрудно видеть, что если $p, q \in \mathcal{P}$, то $p + q \in \mathcal{P}$, а значит семейство $\mathcal{P}$ направлено. Топология, порожденная семейством $\mathcal{P}$ в дальнейшем будет называться *индуктивной топологией, порожденной семейством E_α, $\alpha \in I$.*

Предложение 2.15.1. *Пусть E - линейное пространство, а E_α, $\alpha \in I$ - семейство подпространств в E, наделенных локально выпуклой топологией. Предположим, что E наделено индуктивной топологией, порожденной семейством E_α, $\alpha \in I$.*

1. *Пусть $p : E \to \mathbb{R}$ - полунорма. p непрерывна тогда и только тогда, когда $p|_{E_\alpha}$ непрерывно на E_α для всех $\alpha \in I$.*

2. *Пусть $A \subset E$ - поглощающее абсолютно выпуклое множество. A является окрестностью нуля тогда и только тогда, когда $A \cap E_\alpha$ - окрестность нуля в E_α для всех $\alpha \in I$.*

3. *Пусть $j_\alpha : E_\alpha \to E$ - оператор вложения ($j_\alpha(x) = x$, $x \in E_\alpha$), где $\alpha \in I$. Тогда j_α непрерывно.*

4. *Пусть F - ЛВП, а $u : E \to F$ - линейный оператор. u непрерывен тогда и только тогда, когда $u|_{E_\alpha} : E_\alpha \to F$ непрерывно для всех $\alpha \in I$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ обозначает семейство всех таких полунорм p на E, что $p|_{E_\alpha}$ непрерывно для всех $\alpha \in I$.

1. Если p - непрерывная полунорма на E, то найдутся такое $q \in \mathcal{P}$ и такое $C > 0$, что $p \leqslant Cq$. Но тогда $p|_{E_\alpha} \leqslant Cq|_{E_\alpha}$ для всех $\alpha \in I$. Но тогда, ввиду непрерывности $q|_{E_\alpha}$, получаем непрерывность $p|_{E_\alpha}$ для всех $\alpha \in I$. Значит, $p \in \mathcal{P}$. Обратно, если $p \in \mathcal{P}$, то p непрерывна на E по определению.

2. Пусть $A \subset E$ - поглощающее абсолютно выпуклое множество. A - окрестность нуля тогда и только тогда, когда m_A - непрерывная полунорма на E. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $(m_A)|_{E_\alpha}$ непрерывно для любого $\alpha \in I$. Наконец, последнее равносильно тому, что $A \cap E_\alpha$ - окрестность нуля для всех $\alpha \in I$.

3. Действительно, по предыдущему пункту для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля $U \subset E$ множество $j_\alpha^{-1}(U) = U \cap E_\alpha$ - окрестность нуля в E_α.

4. Пусть $u : E \to F$ непрерывен. Тогда $u|_{E_\alpha} = u \circ j_\alpha : E_\alpha \to F$ непрерывен для любого $\alpha \in I$. Обратно, пусть $u|_{E_\alpha}$ непрерывен для всех $\alpha \in I$. Если $U \subset F$ - абсолютно выпуклая окрестность нуля, то $u^{-1}(U) \cap E_\alpha = (u|_{E_\alpha})^{-1}(U)$ - окрестность нуля в E_α. Но тогда $u^{-1}(U)$ - окрестность нуля в E. Отсюда следует, что u непрерывен.

$\square$

Рассмотрим одну конструкцию в качестве примера. Пусть X обозначает локально компактное хаусдорфово пространство. Пусть $C_{comp}(X, \mathbb{K})$ обозначает множество всех таких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{K}$, что $\operatorname{supp} f$ компактен. Легко проверить, что $C_{comp}(X, \mathbb{K})$ - линейное подпространство в $C(X, \mathbb{K})$. Пусть теперь $K \subset X$ - компакт. Определим $C_K(X, \mathbb{K})$ - пространство всех таких $f \in C(X, \mathbb{K})$, что $\operatorname{supp} f \subset K$ (или, что равносильно, $f(x) = 0$

при $x \notin K$). Пространство $C_K(X,\mathbb{K})$ мы будем наделять топологией, порожденной нормой $p_K(f) = \sup_{x\in K}|f(x)| = \sup_{x\in X}|f(x)|$, где $f \in C_K(X,\mathbb{K})$. Нетрудно проверить, что топология на $C_K(X,\mathbb{K})$ индуцирована из $C(X,\mathbb{K})$. Теперь заметим, что $C_K(X,\mathbb{K})$ - подпространство в $C_{comp}(X,\mathbb{K})$. Наделим $C_{comp}(X,\mathbb{K})$ индуктивной топологией, порожденной семейством $C_K(X,\mathbb{K})$, $K \subset X$ - компакт.

Предложение 2.15.2. *Пусть X - хаусдорфово локально компактное пространство.*

1. *Линейный функционал $\phi : C_{comp}(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset X$ найдется такое $C > 0$, что $|\phi(f)| \leqslant Cp_K(f) = C\sup_{x\in X}|f(x)|$ для всех таких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{K}$, что $\operatorname{supp} f \subset K$.*

2. *Пространство $C_{comp}(X,\mathbb{K})$ отделимо.*

Доказательство. 1. Это очевидно, так как вышеописанная оценка для компакта K по определению означает непрерывность линейного функционала $\phi|_{C_K(X,\mathbb{K})}$.

2. Пусть $f \in C_{comp}(X,\mathbb{K})$ - ненулевая функция. Тогда найдется такое $x \in X$, что $f(x) \neq 0$. Определим линейный функционал $\delta_x : C_{comp}(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ по формуле $\delta_x(g) = g(x)$, $g \in C_{comp}(X,\mathbb{K})$. Используя первый пункт, легко проверить, что δ_x непрерывен. Но тогда получается, что $C_{comp}(X,\mathbb{K})$ отделимо, так как для любого ненулевого $f \in C_{comp}(X,\mathbb{K})$ найдется непрерывный линейный функционал ϕ на $C_{comp}(X,\mathbb{K})$ не равный нулю на f.

□

Предложение 2.15.3. *Пусть E - линейное пространство, а E_α, $\alpha \in I$ - семейство подпространств в E, наделенных локально выпуклой топологией. Если E_α бочечно (борнологично, квазибочечно) для всех $\alpha \in I$, то E, наделенное индуктивной топологией, порожденной семейством E_α, $\alpha \in I$, тоже бочечно (борнологично, квазибочечно).*

Доказательство. Пусть $B \subset E$ - бочка. Тогда $B \cap E_\alpha$ - бочка в E_α, а значит B - окрестность нуля в E. Для квазибочечности и борнологичности доказательства идентичны. □

Замечание. *Отметим, что индуктивная топология не сохраняет в общем случае практически никаких свойств подпространств, которыми она порождена. Все свойства пространств, которые мы изучали, кроме бочечности, борнологичности и квазибочечности (а именно, полнота, отделимость, нормируемость, метризуемость, полурефлексивность и рефлексивность), не будут в общем случае переноситься на индуктивную топологию.*

2.A Элементы наилучшего приближения в нормированных пространствах

Определение 2.A.1. *Пусть X - метрическое пространство, $x \in X$, $A \subset X$. Элемент $y \in A$ называется элементом наилучшего приближения к x на множестве A, если $\rho(x,y) = \rho(x,A)$.*

Определение 2.A.2. *Пусть X - топологическое пространство, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция f называется полунепрерывной снизу, если $f^{-1}((a, +\infty))$ открыто в X для любого $a \in \mathbb{R}$.*

Замечание. *Можно также определить полунепрерывную сверху функцию на пространстве X, как такую функцию $f : X \to \mathbb{R}$, что $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто для любого $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, что f полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда $(-f)$ полунепрерывна снизу. Также непрерывность f равносильна тому, что f одновременно полунепрерывна сверху и снизу.*

Предложение 2.A.1. *Пусть X - компактное топологическое пространство, а $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу. Тогда f ограничена снизу и $\inf_{x \in X} f(x) \in f(X)$.*

Доказательство. Совокупность множеств $U_a = f^{-1}((a, +\infty))$, $a \in \mathbb{R}$ образует открытое покрытие пространства X. Отсюда следует, что найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $X = f^{-1}((a, +\infty))$. Отсюда следует, что f ограничена снизу.

Пусть $\inf_{x \in X} f(x) \notin f(X)$. Тогда совокупность множеств U_a, $a > \inf_{x \in X} f(x)$ - открытое покрытие X, а значит найдется такое $a > \inf_{x \in X} f(x)$, что $X = f^{-1}((a, +\infty))$. Но в этом случае $a > \inf_{x \in X} f(x) \geqslant a$. Полученное противоречие показывает, что $\inf_{x \in X} f(x) \in f(X)$. □

Лемма 2.A.1. *Пусть E - нормированное пространство. Тогда для любого $y \in E$ функция $f(x) = ||x - y||$ полунепрерывна снизу в слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}((-\infty, a])$ - выпуклое замкнутое подмножество в E, а значит оно слабо замкнуто. Отсюда следует, что $f^{-1}((a, +\infty))$ открыто в слабой топологии. □

Теорема 2.A.1. *Пусть E - нормированное пространство, $C \subset E$ - замкнутое выпуклое множество. Если $C \subset L$, где L - некоторое рефлексивное подпространство в E, то для любого $x \in E$ найдется элемент наилучшего приближения к x в C.*

Доказательство. Пусть $l = \rho(x, C)$. Если $l = 0$, то x - искомый элемент наилучшего приближения. Предположим, что $l > 0$. Пусть $D = (2l + ||x||)B \cap C$, где $B = \{y \in E : ||y|| \leqslant 1\}$. Тогда, если $y \in C \backslash D$, то $||y - x|| + ||x|| \geqslant ||y||$. Отсюда следует, что $||x - y|| \geqslant ||y|| - ||x|| \geqslant 2l$. Значит, $l = \rho(x, D)$, так как $\rho(x, C \backslash D) \geqslant 2l > l$. Теперь заметим, что D компактно в слабой топологии, так как это замкнутое ограниченное выпуклое подмножество в рефлексивном пространстве L. Значит, ввиду полунепрерывности функции $f(y) = ||x - y||$ в слабой топологии, получаем существование такого $z \in D$, что $||x - z|| = l$. z - искомый элемент наилучшего приближения. □

2.B Теорема Крейна-Мильмана

Определение 2.B.1. *Пусть E - линейное пространство, $A \subset E$ - выпуклое множество. Непустое выпуклое множество $C \subset A$ называется крайним в A, если из того, что $a, b \in A$, $t \in (0, 1)$ и $ta + (1 - t)b \in C$, следует, что $a, b \in C$. Точка $x \in A$ называется крайней, если $\{x\}$ - крайнее множество в A.*

Пусть $A \subset \mathbb{K}$ - замкнутое ограниченное выпуклое подмножество, а $z \in A$ - такая точка, что $|z| = \sup_{x \in A} |x|$. Тогда, как нетрудно видеть, z - крайняя точка в A. Таким образом, в замкнутом непустом ограниченном подмножестве в $\mathbb{K}$ обязательно существует хотя бы одна крайняя точка.

Лемма 2.B.1. *Пусть E - линейное пространство, $A \subset E$ выпукло.*

1. *Если C - крайнее множество в A, а D - крайнее множество в C, то D - крайнее множество в A.*
2. *Если C_α, $\alpha \in I$ - семейство крайних подмножеств в A, то либо $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ пусто, либо $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ - крайнее подмножество в A.*
3. *Пусть F - другое линейное пространство, а $u : E \to F$ - линейное отображение. Если C - крайнее подмножество в $u(A)$, то $u^{-1}(C) \cap A$ - крайнее подмножество в A.*

Доказательство. Все проверки элементарны. □

Лемма 2.B.2. *Пусть E - отделимое ЛВП, $A \subset E$ - компактное выпуклое множество. Тогда любое крайнее подмножество $C_0 \subset A$ содержит хотя бы одну крайнюю точку множества A.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$, состоящее из всех замкнутых крайних подмножеств в A. Введем отношение частичного порядка на $\mathcal{S}$ следующим образом: $C \leqslant D \Leftrightarrow D \subset C$. Докажем, что $\mathcal{S}$ индуктивно упорядочено.

Действительно, пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ - цепь. Докажем, что $D = \bigcap_{C \in \mathcal{R}} C$ - крайнее множество в A. Ввиду леммы 2.B.1 достаточно показать, что D непусто. Заметим, что раз $\mathcal{R}$ - цепь, то $\mathcal{R}$ является центрированным семейством замкнутых подмножеств в A (см. определение 1.8.1), а значит из леммы 1.8.1 следует, что $D \neq \varnothing$, так как A компактно.

Из леммы Цорна (теорема 1.0.1) следует, что найдется такое крайнее подмножество $M \subset A$, что $M \subset C_0$ и M максимально в $\mathcal{S}$. Нам достаточно доказать, что M состоит ровно из одной точки. Действительно, если в M найдутся две различные точки $x, y \in M$, то найдется такой непрерывный линейный функционал $f : E \to \mathbb{K}$, что $f(x) \neq f(y)$. $f(A)$ - ограниченное замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbb{K}$. В нем найдется крайняя точка $\alpha \in f(A)$. Тогда $N = \{z \in M : f(z) = \alpha\}$ - крайнее подмножество в M, а значит и крайнее подмножество в A. Отсюда следует, что $M = N$ ввиду максимальности M в $\mathcal{S}$ и замкнутости N. Но тогда $f(x) = f(y) = \alpha$, что противоречит выбору f. Значит, M состоит из одной точки. □

Теорема 2.B.1 (Крейн-Мильман)**.** *Пусть E - отделимое ЛВП, $A \subset E$ - компактное выпуклое множество. Тогда A совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.*

Доказательство. Очевидно, что условие не зависит от того, является ли E пространством над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$. Поэтому достаточно доказать теорему для вещественного пространства E.

Пусть B - замыкание выпуклой оболочки множества крайних точек в A. Если $B \neq A$, то найдется $x \in A \backslash B$, а по предложению 2.8.1 найдется такой непрерывный линейный функционал

$f : E \to \mathbb{R}$, что $f(x) \notin f(B)$. $f(B)$ - выпуклое замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$, а значит $f(B) = [a, b]$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Значит, либо $f(x) < a$, либо $f(x) > b$. Если $f(x) < a$, то $\{x \in A : f(x) = \inf_{y \in A} f(y)\}$ - крайнее подмножество в A, не пересекающее B, что противоречит лемме 2.B.2. Аналогичное противоречие получается в случае $f(x) > b$. $\square$