



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Карандеев Илья Дмитриевич

**Отчёт по первому заданию курса "Современные
вычислительные технологии"**

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая постановка дифференциальной задачи	3
3	Уравнения метода	3
4	Проверка сходимости решений	4
5	Аппроксимационные свойства вычислительных схем	5

Список таблиц

1	$d_x = 1, d_y = 1$	4
2	$d_x = 1, d_y = 1$	4
3	$d_x = 1, d_y = 100$	5

1 Введение

Требуется написать программу для решения стационарного двумерного уравнения диффузии методом конечных разностей.

2 Математическая постановка дифференциальной задачи

В прямоугольнике

$$\Pi = (0, 1) \times (0, 1),$$

рассматривается стационарное двумерное уравнение диффузии

$$-\nabla * D \nabla C = f,$$

где ∇ – оператор Гамильтона (набла), $C = C(x, y)$ – концентрация вещества, $f = f(x, y)$ – функция источников, или стоков, D – тензор диффузии: $D = \begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix}$ Граничные условия в данной задаче двух типов.

1) Неймана:

$$-D * \frac{\partial C}{\partial n} = g_N$$

2) Дирихле:

$$C = g_D$$

На границей рассматриваемой области:

- 1) $x = 0, y = N$ – граница g_D
- 2) $y = 0$ и $x \neq 0$ – граница g_N
- 3) $x = N$ и $y \neq N$ – граница g_N

3 Уравнения метода

Введем равномерную прямоугольную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{A_1 + i \cdot h_x, 0 \leq i \leq N\},$$

$$\bar{\omega}_2 = \{B_1 + j \cdot h_y, 0 \leq j \leq N\},$$

$$h_x = \frac{A_2 - A_1}{M},$$

$$h_y = \frac{B_2 - B_1}{N}.$$

$$h_x = h_y = h$$

Узлам сетки сопоставим неизвестные w_{ij} , и, заменив производные на разностные отношения в узлах сетки, от исходной дифференциальной задачи перейдем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -d_x * \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} - d_y * \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij}, \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ w_{i,j} = g_{D(y=N)}, \quad 0 \leq i \leq N, j = N, \\ w_{i,j} = g_{D(x=0)}, \quad 0 \leq j \leq N-1, i = 0 \\ -dx * \frac{w_{N,j} - w_{N-1,j}}{h^2} = g_{N(x=N)}, \quad i = N, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ -dy * \frac{w_{i,0} - w_{i,1}}{h^2} = g_{N(y=0)}, \quad j = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ -(dy + dx) * \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{w_{N,0} - w_{N-1,1}}{h^2} = g_{N(y=0,x=N)}, \quad j = 0, \quad i = N \end{array} \right.$$

которую можно представить в матричном виде

$$Aw = f.$$

4 Проверка сходимости решений

Таблица 1: $d_x = 1, d_y = 1$

Сетка(n * n)	$\ err\ _{Ch}$	$\ err\ _{L2h}$
10×10	$6.02 \cdot 10^{-4}$	$4.32 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1.98 \cdot 10^{-5}$	$3.35 \cdot 10^{-2}$
40×40	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$
80×80	$3.08 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$
160×160	$2.66 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: $d_x = 1, d_y = 1$

Сетка(n * n)	$\ err\ _{Ch}$	$\ err\ _{L2h}$
10×10	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$6.26 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$4.67 \cdot 10^{-2}$
40×40	$1.88 \cdot 10^{-5}$	$2.71 \cdot 10^{-2}$
80×80	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$
160×160	$6.08 \cdot 10^{-7}$	$7.48 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3: $d_x = 1, d_y = 100$

Сетка($n * n$)	$\ err\ _{C_h}$	$\ err\ _{L2_h}$
10×10	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$9.45 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1 \cdot 10^{-3}$	$7.03 \cdot 10^{-2}$
40×40	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$
80×80	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
160×160	$1.74 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$

5 Аппроксимационные свойства вычислительных схем

Произвелась попытка приблизить сходжение норм кривой $y = a * x^b$.
 То есть найти a и b . L_{2_h} норма имеет коэффициент b в -5.8, -6.18 и -6.319
 при $d_y = 1, 10, 100$ соответственно. Для C_h эти числа равны -4.82, -3.43 и -3.3.