Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Карандеев Илья Дмитриевич

Отчёт по первому заданию курса "Современные вычислительные технологии"

Москва, 2021

Содержание

Список таблиц

1 Введение

Требуется написать программу для решения стационарного двумерного уравнения диффузии методом конечных разностей.

2 Математическая постановка дифференциальной задачи

В прямоугольнике

$$\Pi = (0,1) \times (0,1),$$

рассматривается стационарное двумерное уравнение диффузии

$$-\nabla * D\nabla C = f,$$

где ∇ – оператор Гамильтона(набла), C = C(x, y) - концентрация вещества, f = f(x, y) - функция источников, или стоков, D - тензор диффузии: D = $\begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix}$ Граничные условия в данной задаче двух типов.

1) Неймана:

$$-D * \frac{\partial C}{\partial \overline{n}} = g_N$$

2) Дирихле:

$$C = g_D$$

На границей рассматриваемой области:
1) x = 0, y = N - граница g$_D$
2) y = 0 и x != 0 - граница g$_N$
3) x = N и y != N - граница g$_N$

3 Уравнения метода

Введем равномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} \times \overline{\omega_2}$, где

$$\overline{\omega_1} = \{A_1 + i \cdot h_x, 0 \leq i \leq N\},$$

$$\overline{\omega_2} = \{B_1 + j \cdot h_y, 0 \leq j \leq N\},$$

$$h_x = \frac{A_2 - A_1}{M},$$

$$h_y = \frac{B_2 - B_1}{N}.$$

$$h_x = h_y = h$$

Узлам сетки сопоставим неизвестные w_{ij}, и, заменив производные на разностные отношения в узлах сетки, от исходной дифференциальной задачи перейдем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -d_x * \dfrac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} - d_y * \dfrac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij}, \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ \\ w_{i,j} = g_{D(y=N)}, \quad 0 \leq i \leq N, j = N, \\ w_{i,j} = g_{D(x=0)}, \quad 0 \leq j \leq N-1, i = 0 \\ -dx * \dfrac{w_{N,j} - w_{N-1,j}}{h^2} = g_{N(x=N)}, \quad i = N, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ -dy * \dfrac{w_{i,0} - w_{i,1}}{h^2} = g_{N(y=0)}, \quad j = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ -(dy + dx) * \dfrac{1}{\sqrt{2}} * \dfrac{w_{N,0} - w_{N-1,1}}{h^2} = g_{N(y=0,x=N)}, \quad j = 0, \quad i == N \end{cases}$$

которую можно представить в матричном виде

$$Aw = b.$$

4 Проверка сходимости решений

Таблица 1: $\mathrm{d}_x = 1, d_y = 1$

Сетка(n * n)	$\|\|err\|\|_{Ch}$	$\|\|err\|\|_{L2_h}$
10×10	$6.02 \cdot 10^{-4}$	$4.32 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1.98 \cdot 10^{-5}$	$3.35 \cdot 10^{-2}$
40×40	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$
80×80	$3.08 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$
160×160	$2.66 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: $\mathrm{d}_x = 1, d_y = 1$

Сетка(n * n)	$\|\|err\|\|_{Ch}$	$\|\|err\|\|_{L2_h}$
10×10	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$6.26 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$4.67 \cdot 10^{-2}$
40×40	$1.88 \cdot 10^{-5}$	$2.71 \cdot 10^{-2}$
80×80	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$
160×160	$6.08 \cdot 10^{-7}$	$7.48 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3: $\mathrm{d}_x = 1, d_y = 100$

Сетка(n * n)	$\lVert err \rVert_{Ch}$	$\lVert err \rVert_{L2_h}$
10×10	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$9.45 \cdot 10^{-2}$
20×20	$1 \cdot 10^{-3}$	$7.03 \cdot 10^{-2}$
40×40	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$
80×80	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
160×160	$1.74 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$

5 Аппроксимационные свойства вычислительных схем

Произвелась попытка приблизить схождение норм кривой y = a * x ^{b}.
ab.L_{2_h} норма имеет коэффициент b в -5.8, -6.18 и -6.319
при dy = 1, 10, 100 соответсвенно. Для C_h эти числа равны -4.82, -3.43 и -3.3.