Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Карандеев Илья Дмитриевич

Отчёт по второму заданию курса "Современные вычислительные технологии"

Москва, декабрь 2021

Содержание

1 Введение

Требуется написать программу для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии методом конечных объемов при помощи неявной схемы.

2 Математическая постановка дифференциальной задачи

Рассматривается нестационарное двумерное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{b} * \nabla C - \nabla * D \nabla C = f,$$

где ∇ – оператор Гамильтона(набла), C = C(x, y, t) - концентрация вещества, f = f(x, y) - функция источников, или стоков, D - тензор диффузии: D = $\begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix}$,

$$\bar{b}$$

- поле конвекционных потоков, в наше случае: $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Граничные условия в данной задаче для всех сеток имеют тип Дирихле:

$$C = g_D$$

3 Разностная схема

Введем равномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} \times \overline{\omega_2} \times t$, где

$$\overline{\omega_1} = \{A_1 + i \cdot h_x, 0 \le i \le M\},$$

$$\overline{\omega_2} = \{B_1 + j \cdot h_y, 0 \le j \le N\},$$

$$h_x = \frac{A_2 - A_1}{M},$$

$$h_y = \frac{B_2 - B_1}{N}.$$

Введем равномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} \times \overline{\omega_2}$, где

$$\overline{\omega_1} = \{A_1 + i \cdot h_x, 0 \le i \le N\},$$

$$\overline{\omega_2} = \{B_1 + j \cdot h_y, 0 \le j \le N\},$$

$$h_x = \frac{A_2 - A_1}{M},$$

$$h_y = \frac{B_2 - B_1}{N}.$$

$$h_x = h_y = h$$

t имеет шаг δt

Узлам сетки сопоставим неизвестные w_{ij}, и, заменив производные на разностные отношения в узлах сетки, от исходной дифференциальной задачи перейдем к системе линейных алгебраических уравнений

Для потоковой аппроксимации:

$$\begin{cases} \dfrac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^{n}}{\delta t} + \dfrac{w_{i+1,j}^{n+1} - w_{i-1,j}^{n+1}}{h*2} - d_x * \dfrac{w_{i-1,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} - d_y * \dfrac{w_{i,j-1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} = f_{ij}, \\ \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(y=N)}, \quad 0 \le i \le N, j = N, \\ w_{i,j}^{n+1 n+1} = g_{D(x=0)}, \quad 0 \le j \le N, i = 0 \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(y=0)}, \quad 0 \le i \le N, j = 0, \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(x=N)}, \quad 0 \le j \le N, i = N \end{cases}$$

Для противопотоковой аппроксимации:

$$\begin{cases} \dfrac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^{n}}{\delta t} + \dfrac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i-1,j}^{n+1}}{h} - d_x * \dfrac{w_{i-1,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} - d_y * \dfrac{w_{i,j-1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} = f_{ij}, \\ \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(y=N)}, \quad 0 \le i \le N, j = N, \\ w_{i,j}^{n+1 n+1} = g_{D(x=0)}, \quad 0 \le j \le N, i = 0 \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(y=0)}, \quad 0 \le i \le N, j = 0, \\ w_{i,j}^{n+1} = g_{D(x=N)}, \quad 0 \le j \le N, i = N \end{cases}$$

Эту систему можно представить в матричном виде

$$Aw = f.$$

4 Число Пекле и вычисления

Число Пекле P_e показывает насколько хорошо работает потоковый метод в сравнении с противопотоковым. Чем оно больше, тем хуже. При больших числах Пекле схема идет в разнос, то есть решение проявляет свойства, которые не должны быть по физической теории. Для данного вектора

$$\bar{b}$$

и тензора Диффузии D число Пекле в нашем случае равно:

$$\frac{h}{d_x}.$$

5 Эксперименты

Пусть область рассчета фиксирована и имеет размер

$$20 \times 20$$

. На верхней границе типа Дирехле посередине, длиной в 6.666 задается поток $g_D = 1$ При шаге

$$\delta t = 1.5$$

посмотрим какой разнос имеет потоковая схема.

6 Заключение

"Разнос"схемы может появиться уже при $P_e = 0.202$. То есть сетка размера 100×100, соответственно,

$$h = \frac{20}{100 - 1}$$

, а $dx = 1$
При $P_e >= 2$ могут начать возникать отрицательные числа. В целом, при росте числа Пекле возрастает и ошибка физических свойств решения. Но иногда при больших P_e она заметно, а при меньших - нет.