Моделирование нестационарной адвекции–диффузии

Денис Ануприенко

ИВМ РАН
denis-anuprienko@yandex.ru

18 октября 2021 г.

Стационарное уравнение диффузии

Стационарное уравнение диффузии:

$$-\nabla \cdot (\mathbb{D}\nabla u) = f$$

Здесь

- u – неизвестная (концентрация),
- $\mathbb{D} = \mathbb{D}^T > 0$ – тензор диффузии,
- f – функция источников.

Нестационарное уравнение диффузии

Нестационарное уравнение адвекции–диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbb{D}\nabla u) = f$$

Здесь

- u – неизвестная (концентрация),
- $\mathbb{D} = \mathbb{D}^T > 0$ – тензор диффузии,
- f – функция источников.

Нестационарное уравнение адвекции–диффузии

Нестационарное уравнение адвекции–диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{b} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\mathbb{D} \nabla u) = f$$

Здесь

- u – неизвестная (концентрация),
- $\mathbb{D} = \mathbb{D}^T > 0$ – тензор диффузии,
- f – функция источников,
- b – заданное поле адвективных потоков, $\nabla \cdot \mathrm{b} = 0$

Нестационарность: появление времени

Нужно решить задачу на отрезке времени $[0; T]$.
Что это значит?

Нестационарность: появление времени

Нужно решить задачу на отрезке времени $[0; T]$.
Что это значит?

- Разобьем $[0; T]$ на N_t кусков узлами $\{k \cdot \Delta t\}_{k=0}^{N_t}$
- Результатом расчета будет набор "снимков" в эти моменты времени
- Необходимы начальные условия

Дискретизация по времени

Посмотрим на уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{b} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\mathbb{D} \nabla u) = f$$

Перепишем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbb{D} \nabla u) - \mathrm{b} \cdot \nabla u + f \equiv L(u)$$

С учетом начальных условий имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u), \qquad u(0) = u_0$$

– **задачу Коши**

Вид оператора $L(u)$

С учетом пространственной дискретизации (МКР/МКЭ/МКО):

$$L(u) = A \cdot u - rhs(u, t)$$

Здесь:

- u – уже сеточное решение
- A – матрица дискретизации
- rhs – вектор правой части, включающий источники и граничные условия

Дискретизация по времени

Какие бывают схемы?

Дискретизация по времени

Какие бывают схемы?

- Явные, неявные
- Схемы Рунге–Кутты
- Адамса–Бэшфорта
- Формулы дифференцирования назад
- ...

Дискретизация по времени

Схемы в нашем курсе:

- Явная схема Эйлера
- Неявная схема Эйлера
- Схема Кранка-Николсон

Явная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L(u^n)$$

- Явно выражется u^{n+1}
- Условно устойчива по времени: $\Delta t < ?$

Явная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L(u^n)$$

- Явно выражется u^{n+1}
- Условно устойчива по времени: $\Delta t < C\Delta x^2$

Неявная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = L(u^{n+1})$$

- Абсолютно устойчива по времени
- Нужно решать линейную систему на каждом шаге

Схема Кранка-Николсон

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(L(u^n) + L(u^{n+1})\right)$$

- Второй порядок аппроксимации по времени

Добавление адвекции

Адвекционный член

$$\mathrm{b} \cdot \nabla u$$

на самом деле получается из упрощения выражения

$$\nabla \cdot (\mathrm{b} u) = (\nabla \cdot \mathrm{b})\, u + \mathrm{b} \cdot \nabla u$$

Нужна специальная аппроксимация против неустойчивости:

- Противопотоковая для МКР/МКО
- Специальная регуляризация SUPG для МКЭ
- Линейная система становится несимметричной

Сеточное число Пекле

$$Pe_h = \frac{h||\mathrm{b}||}{D_{\mathrm{b}}},$$

где

$$D_{\mathrm{b}} = \frac{(D\mathrm{b}, \mathrm{b})}{(\mathrm{b}, \mathrm{b})}$$

– коэффициент диффузии в направлении адвекционного потока.

Сеточное число Пекле показывает отношение между адвекцией и диффузией и может определить необходимость регуляризации

Второе задание

1. Создать код для моделирования нестационарной адвекции–диффузии
   - Для адвекции использовать и обычные, и устойчивые схемы
2. Провести расчеты на разных сетках и для разных значений коэффициента диффузии d_x
3. Определить, при каком значении числа Пекле необходима регуляризация

Спасибо за внимание!