Лабораторная работа № 3

«Обработка результатов многократных статических измерений»

Цель работы: проведение многократных измерений и оценка действительных значений измеряемых величин и их погрешностей при многократных измерениях.

Используемое оборудование: персональный компьютер, генератор сигналов NI PXI-5402, цифровой мультиметр NI PXI-4065.

Теоретические сведения

Случайная погрешность (измерения) – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных в определенных условиях.

Если каждое измерение одной и той же величины дает несколько отличные от других измерений результаты, то имеет место ситуация, когда случайная погрешность играет существенную роль. При необходимости определения случайной составляющей погрешности измерение следует производить несколько раз. В этом случае выполняют измерения с многократными **наблюдениями**.

Наблюдение – экспериментальная операция, выполняемая в процессе измерений, в результате которой получают одно значение из группы значений величины, подлежащих совместной обработке для получения результата измерения.

Совокупность результатов наблюдений, полученных в процессе одного измерения, называется выборкой наблюдений.

Сами результаты наблюдений могут быть получены в процессе выполнения измерения любого вида (*прямые, косвенные, совокупные, совместные)* как по *методу непосредственной оценки,* так и по *методу сравнения с мерой*.

Результаты измерений с многократными наблюдениями, как и сами наблюдения, являются случайными величинами, поскольку имеют погрешности, распределенные случайным образом.

Случайные величины характеризуются законами распределения. Часто на практике имеет место нормальный (гауссовский) закон распределения случайных величин. Кроме того, в том случае, если случайная погрешность является результатом совместного действия нескольких независимых случайных составляющих, каждая из которых вносит малую долю в общую погрешность, то, по какому бы закону ни были распределены эти составляющие, закон распределения результата их суммарного действия стремится к гауссовскому. Поэтому в методических указаниях МИ 1317-2004 определяется следующее:

если имеются основания полагать, что реальная функция плотности распределения - функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значения аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует, то следует принимать закон, близкий к нормальному усеченному. Вывод о форме реальной функции плотности распределения делается в ходе анализа выборочных значений многократно измеряемой физической величины.

Методику обработки результатов наблюдений, полученных в процессе проведения измерений с многократными наблюдениями, определяет ГОСТ Р-8736-2011 в случае, если априорно известно, что распределение случайной величины нормально. В более общем случае выделяются следующие этапы обработки многократных измерений:

1. Ставиться и проводится измерительный эксперимент, в результате которого получают выборочные значения физической величины.
2. Исключаются известные систематические погрешности из результатов измерений (например, методические погрешности);
3. Определяется графическим методом, в том числе с помощью гистограмм, предполагаемый тип распределения случайной величины.
4. Выдвигается гипотеза о форме распределения, на основе чего вычисляется оценка измеряемой величины из выборочных значений, как точечная оценка математического ожидания выбранного распределения.
5. Вычисляют другие точечные оценки параметров распределения, такие как выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочные коэффициент асимметрии и эксцесса.
6. Устраняются промахи и грубые погрешности (при их наличии).
7. Проверяют гипотезу о принадлежности результатов измерений выбранному распределению.
8. Вычисляют доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемой величины.

Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение, СКО) – параметр функции распределения измеренных значений или показаний, характеризующий их рассеивание и равный положительного корню квадратному из дисперсии этого распределения.

Истинным значением результата измерения случайной физической величины является математическое ожидание этой величины. Однако, как, согласно постулатам теории измерений, истинное значение случайной величины не может быть измерено, так и математическое ожидание этой величины не может быть получено на основе ее выборочных значений. В многократных измерениях за оценку измеряемой случайной величины принимается точечная оценка математического ожидания распределения этой случайной величины. Формулы точечных оценок математического ожидания зависят от распределения случайной величины и должны удовлетворять всем трем критериям качества: *состоятельность, несмещенность, эффективность.*

Так, в качестве точечной оценки математического ожидания результатов наблюдений нормально распределенной физической величины берут выборочное среднее арифметическое значение:

$$\tilde{A}_{\text{норм.}} = \tilde{M}\left[x\right] = \bar{X} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где x_i - значения наблюдений в выборке, n - количество наблюдений в выборке.

Для равномерного распределения – полуразмах:

$$\tilde{A}_{\text{равн.}} = \tilde{M}\left[x\right] = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2},$$

где $x_{\min}$ – минимальное значение наблюдений в выборке, $x_{\min}$ – максимальное.

Точечные оценки СКО нормального и равномерного распределений определяются следующими формулами соответственно:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad \text{и} \quad S = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}.$$

Грубая погрешность (промахи) – погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях погрешность.

Для определения промахов используют правило «трех сигм», так как при нормальном законе распределения случайной величины вероятность нахождения ее значений вне интервала $\tilde{M}[x] \pm 3\cdot\tilde{\sigma}$ мала и составляет P = 0,003. Здесь $\tilde{M}[x]$ - оценка математического ожидания результатов наблюдений; $\tilde{\sigma}$ - оценка среднего квадратичного отклонения результатов наблюдений.

Чтобы определить примерный характер распределения необходимо первым делом построить гистограмму, где рациональное количество интервалов гистограммы можно оценить по формулам:

$L = \log_2 n + 1$ - критерий Старджеса;

$L = 5 \cdot \lg n$ - критерий Брукса и Каррузера;

$L = \sqrt{n}$ - критерий Хайнхольда и Гаеде.

После построения практической гистограммы и выдвижении гипотезы о форме распределения, для удобства можно построить оба графика (практическую гистограмму и теоретическое распределение), как это показано на рисунке 1.

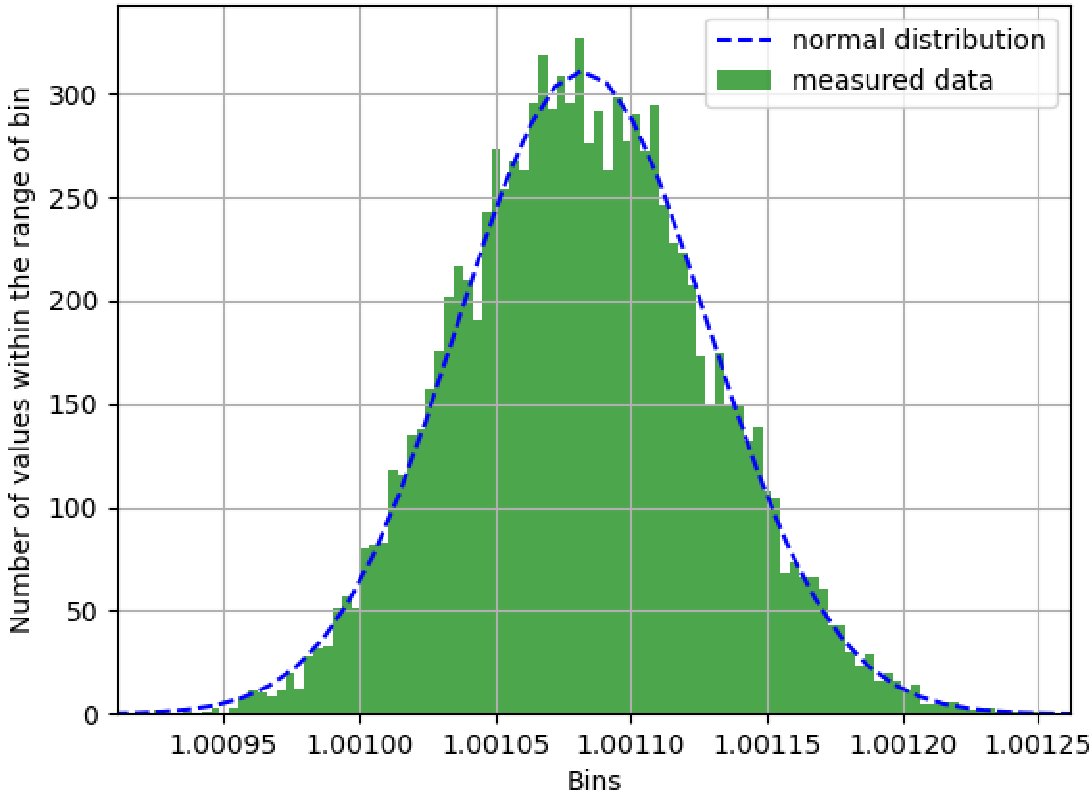

Рисунок 1 – Теоретическое распределение и практическая гистограмма

Для исключения промахов и грубых погрешностей применяются различные критерии, применимость которых зависит от выдвинутой гипотезы о распределении измеряемой величины. В лабораторной работе рассматривается частный пример критерия «трех сигм», основанный на неравенстве Чебышева для абсолютных отклонений от среднего, который постулирует, что все наблюдения выборки укладываются в интервал $\tilde{M}[x] \pm 3 \cdot \tilde{\sigma}$. Результаты наблюдений, которые выходят за пределы интервала $\tilde{M}[x] \pm 3 \cdot \tilde{\sigma}$, считают промахами и из выборки исключают.

Промахи из выборки исключают по одному, начиная с наиболее удаленного от оценки математического ожидания. При этом вновь вычисляются оценки математического ожидания $\tilde{M}[x]$ и среднего квадратичного отклонения $\tilde{\sigma}$ после исключения каждого промаха.

Для проверки выдвинутой ранее гипотезы ГОСТ Р 8736-2011 рекомендует использовать критерий согласия χ^2 Пирсона, который основан на сравнении двух гистограмм: практической из выборки наблюдений и теоретической из предположения, что наблюдения действительно распределены по предполагаемому закону. При этом необходимо наложить условия: $M[x] = \tilde{M}[x]$ $\sigma = \tilde{\sigma}$, $n_T = n$, $\Delta x_{iT} = \Delta x_i$, Теоретическая гистограмма формируется из предположения, что моменты теоретического распределения равны соответствующим оценкам моментов практического распределения $M[x]=\tilde{M}[x]; D[x]=\tilde{D}[x]$. Интервалы целесообразно располагать симметрично относительно математического ожидания. При соблюдении данных условий сравнение гистограмм можно свести к сравнению практического N_j' и теоретического N_j количеств попаданий результатов наблюдений в одноименные интервалы гистограмм:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{L} \frac{(N_j - N_j')^2}{N_j}.$$

Практическое количество N_j' попаданий определяется непосредственным подсчетом соответствующих результатов наблюдений выборки. Теоретическое количество N_j попаданий определяется следующим образом:

- Рассчитывают ширину интервалов h по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

где r - число интервалов, определенное по одному из правил выше.

- Далее вычисляют середины интервалов x_0, среднее арифметическое - $\bar{x}$ и выборочное СКО - S.
- Для выбранного закона распределения вычисляют N_j по формуле:

$$N_j = n \cdot h \cdot \varphi\left(\frac{x_{i0} - \bar{x}}{S}\right),$$

где $\varphi\left(\frac{x_{i0} - \bar{x}}{S}\right)$, например, плотность нормального распределения.

В соответствии с критерием χ^2 Пирсона нет оснований отвергнуть проверяемую гипотезу, если выполняется условие $\chi^2_{\text{теор}(q,k)} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\text{теор}(1-q,k)}$, где $\chi^2_{\text{теор}}$ определяется из таблицы распределения χ^2; q - уровень значимости выбирается равным 0,05, 1 - q - вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии принятия решения отвергнуть проверяемую гипотезу; k - число степеней свободы, k = L - 3 для нормального распределения.

Случайная погрешность, приписываемая значению результата измерений, может быть представлена в виде доверительного интервала, в котором с доверительной вероятностью $P_д$ находится истинное значение измеряемой величины.

Доверительные границы погрешности результата измерений - верхняя и нижняя границы интервала, накрывающего с заданной вероятностью погрешность измерения.

Доверительные границы $\varepsilon(P_д)$ (без учета знака) случайной составляющей погрешности результата измерения находят по формуле:

$$\varepsilon\left(P_{д}\right)=\tilde{\sigma}\left[A\right]\cdot t_{P_{д},n},$$

где $\tilde{\sigma}[A]$ - оценка среднего квадратичного отклонения результата измерения, $t_{P_{д},n}$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $P_{д}$ и числа n результатов наблюдений. Рекомендуемое значение доверительной вероятности $P_{д}$ = 0,95%.

Оценка среднего квадратического отклонения результата измерения $\tilde{\sigma}[A]$ находится по формуле:

$$\tilde{\sigma}[A]=\tilde{\sigma}_{\bar{x}}=\frac{\tilde{\sigma}[x]}{\sqrt{n}}.$$

Если распределение нельзя признать нормальным, то точно функцию распределения установить не удается. В этом случае, опираясь на симметричность распределения можно рекомендовать следующую схему решения задачи:

1. В качестве числовой характеристики типа распределения экспериментальных данных принимаем значение к, вычисляемое по формуле:

$$\kappa=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{nS^4}$$

где S – выборочное СКО.

2. В зависимости от рассчитанного значения к определяем формулу для оценки измеряемой величины:

- $\kappa<2{,}5$, тогда $A=\dfrac{x_{\min}+x_{\max}}{2}$;
- $2{,}5\le\kappa<4$ тогда $A=\bar{x}$;
- $\kappa\ge 4$, тогда $A=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}\right)\\ x_{\frac{n+1}{2}}\end{cases}$ (первая формула – n четные, вторая - нечетные).

В случае если распределение неизвестно, доверительная граница погрешности должна быть посчитана на основе неравенства Чебышева, которое имеет вид:

$$P_{д}\left\{\left|X-A\right|\ge t\sigma\right\}\le\frac{1}{t^2}$$

Вероятность того, что случайная величина X (значение величины + случайная погрешность) отклоняется от истинного значения величины A на величину большую или равную $t\sigma$ (где t – квантиль, σ - СКО), меньше или равна $\frac{1}{t^2}$.

С учетом того, что у нас есть только выборочные значения СКО S и необходимо найти границы $\varepsilon(P_д)$, за которые отклонение от оцениваемого параметра A не выходит (т.е. меньше или равно), то выражение выше можно переписать следующим образом:

$$P_д\left\{\left|X - A\right| \le tS\right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2} = \alpha$$

Т.е. погрешность $\varepsilon(P_д)$ задается с вероятность $\alpha = 1 - \frac{1}{t^2}$. Если задать значение α, то можно рассчитать значение квантиля t:

$$t = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Доверительная граница будет рассчитываться как $\varepsilon(P_д) = \varepsilon(\alpha) = tS$.

Результат измерения должен быть записан в соответствии с требованиями МИ 1317-86 с учетом количества значащих цифр, заслуживающих доверие:

- результат измерений представляется именованным или неименованным числом;
- совместно с результатом измерений должны быть представлены характеристики его погрешности;
- характеристики погрешности измерений могут быть представлены в виде границ интервала, в пределах которого погрешность измерений находится с заданной вероятностью;
- характеристики погрешности измерений, представленные в виде границ интервала, должны сопровождаться указанием вероятности, с которой они получены;
- характеристики погрешности выражаются числом, содержащим не более двух значащих цифр;
- наименьшие разряды числовых значений результатов измерений должны быть такими же, как наименьшие разряды характеристики погрешности;
- представление результатов измерений, полученных как среднее арифметическое значение результатов многократных наблюдений, должно сопровождаться указанием числа наблюдений.

Лабораторное задание

1. Рассчитать параметры выборок №1-4 (методика получения выборок представлена ниже): размер выборки, выборочные среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение, дисперсию, СКО среднего арифметического, минимальное и максимальное значение выборки, выборочные коэффициенты эксцесса и асимметрии.
2. Для каждой выборки построить гистограмму и на ее основе и значениях выборочных коэффициентах эксцесса и асимметрии выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной погрешности по форме гистограммы и значениям параметров выборки.
3. Исключить промахи по правилу трех сигм (неравенство Чебышева).
4. Проверить гипотезу о принадлежности случайной погрешности к выбранному распределению (нормальному или равномерному) с помощью критерия Пирсона.
5. Если принимается гипотеза о нормальном распределении, то рассчитать доверительную границу интервала с помощью квантиля Стьюдента и СКО среднего. Если гипотеза о нормальном распределении отвергается, но принимается гипотеза о равномерном распределении, то оценить действительное значение и выборочное СКО для равномерного распределения, а границы случайной погрешности рассчитать через неравенство Чебышева, в противном случае использовать критерий каппа.
6. Записать результат измерения выборок №1-4 с учетом цифр, заслуживающих доверия.
7. Пронормировать выборки №1 и №2 и с помощью теста Колмогорова-Смирнова оценить близость распределений нормированных выборок.

Методика получения выборок

1. Включите PXI-1033, NI Elvis и «прогрейте» их в течение 15 минут.
2. Соберите схему согласно рисунку 2.

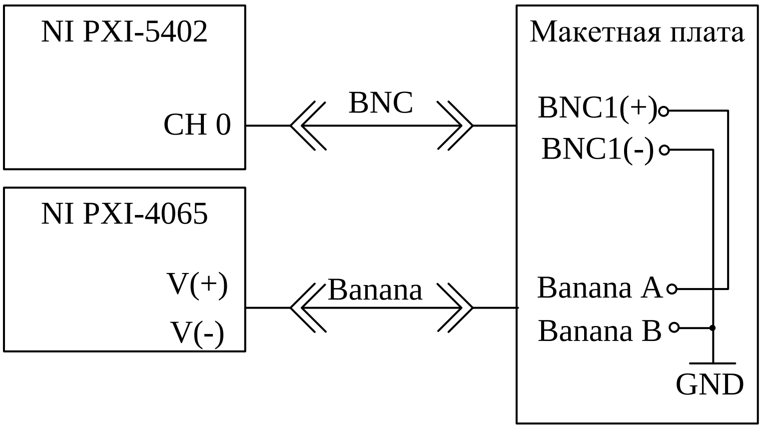

Рисунок 2 – Схема получения выборки с генератора

3. Скопируйте на рабочий стол пакетный файл ***blackbox.bat*** и запустите его.

4. Скопируйте на рабочий стол и запустите пакетный файл ***collect_data.bat,*** который должен исполняться не менее чем 3 минуты. После чего нажмите сочетание клавиш «Ctrl+C» для остановки работы пакетных файлов.

5. На рабочем столе должен появиться файл ***data_x1.txt*** с выборкой №1, где x1 - среднее арифметическое значений выборки.

6. Повторите пункты 3-5 и получите файл в ***data_x2.txt*** с выборкой №2, где x2 - среднее арифметическое значений выборки**.**

7. Соберите схему согласно рисунку 3.

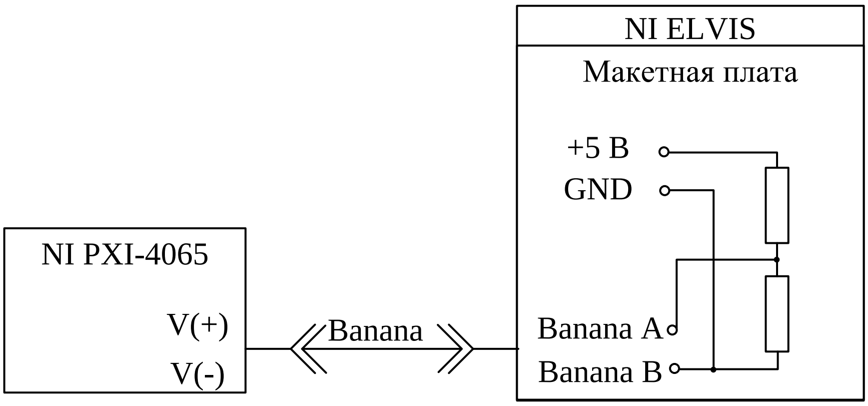

Рисунок 3 – Схема получения выборки с источника напряжения

8. Повторите пункты 3-5 и переименуйте последний файл в ***data_x3.txt*** с выборкой №3**.**

9. Соберите схему согласно рисунку 4.

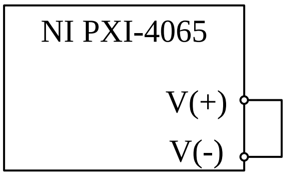

Рис.4. Схема получения выборки без источника напряжения

10. Повторите пункты 4-5 и переименуйте последний файл в ***data_kz.txt*** с выборкой №4**.**

Методика обработки выборок для получения их числовых и графических характеристик

Обработка выборок многократных измерений может проводиться с применением любого доступного инструмента. Некоторые из скриптов даны как приложения к данному лабораторному практикуму на языке python 3.x.

1. Скопируйте на рабочий стол папку ***«python_statistic»***.
2. В скопированной папке запустите командную строку («Shift+ПМК», «Открыть окно команд»).
3. Определение основных характеристик выборки.

3.1. В открывшемся окне запустить скрипт «calculate sample params.py», для чего в окне команд написать:

python "calculate sample params.py" data.txt

где data.txt – имя файл с выборкой.

После чего будут рассчитаны следующие параметры выборки:

- среднее арифметическое выборки - *Mean;*
- минимальное значение в выборке - *Minimum value;*
- максимальное значение в выборке - *Maximum value;*
- выборочное среднеквадратическое отклонение - *Standard deviation;*
- число элементов в выборке - *Number of elements;*
- выборочное медианное значение - *Median;*
- выборочная дисперсия - *Variance;*
- выборочный коэффициент эксцесса – *Kurtosis;*
- выборочный коэффициент асимметрии – *skew.*

Внесите данные значения в протокол измерения А.1. для каждой выборки

4. Для исключения промахов по правилу 3-х сигм необходимо использовать рассчитанные значения в предыдущем пункте. При исключении промаха необходимо пересчитывать все параметры в пункте 3. Вам необходимо самостоятельно написать скрипт по исключению промахов.
5. Построение гистограммы. Запустите скрипт «plot histogram.py» с двумя параметрами - файл с выборкой без промахов, предполагаемое распределение из трех возможных:

- Нормальное распределение - *normal*;
- Распределение Каши - *Cauchy*;
- Равномерное распределение - *uniform*.

5.1. Определите по виду гистограммы к какому распределению она относится с большей вероятностью. Сохраните построенную гистограмму для отчета.

6. Проверка гипотезы о нормальности распределения (критерий χ^2).

6.1. Запустить скрипт «practical chi2 calculate.py» с параметрами нужного распределения и выборкой и получить практическое значение χ^2.

6.2. Запустить скрипт «table values of chi2.py» с указанием числа степеней свободы и уровнями значимости верхней и нижней значений теоретического χ^2.

6.3. Сравнить теоретическое значение χ^2 с практическим и сделать выводы относительно гипотезы о том, что выборка подчиняется нормальному или равномерному закону распределения.

7. Расчет значений результата измерений в зависимости от результатов применения критерия Пирсона:

- в случае нормального распределения - определить среднее квадратическое отклонение результата измерения $\tilde{\sigma}[A] = \dfrac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$. Рассчитать доверительные границы интервала случайной составляющей погрешности измерения без учета знака: $\Delta A = t_{P\partial,n} \cdot \tilde{\sigma}[A]$. Значение квантили Стьюдента рассчитать при помощи скрипта «table values of two-tailed student distribution.py» с указанием параметров - доверительную вероятность принять равной 95%, «Two-tailed», «df» определяется размером выборки;
- в случае равномерного распределения – действительное значение ФВ – полуразмах, доверительная граница – по неравенству Чебышева;
- в случае если обе гипотезы были отклонены – действительно значение оценивается по *к*, доверительная граница – по неравенству Чебышева;

8. Нормирование выборки для проверки гипотезы о принадлежности двух выборок к одному распределению выполняется с помощью скрипта «norm sample.py».

9. Проверка гипотезы о принадлежности двух пронормированных выборок к одному распределению осуществляется с помощью скрипта «kolmogorov-smirnov statistic.py».

Требования к отчету

Отчет должен соответствовать требованиям к оформлению отчетов и содержать:

1. заполненные протоколы по каждой выборке;
2. результаты проверки наличия промахов в выборке и пересчет параметров выборки после исключения промахов;
3. графики теоретической и практической гистограммы для каждой выборки;
4. расчет значений $\chi^2_{практ}$ и сравнение с $\chi^2_{теор}$ для каждой выборки;
5. предварительную запись результата измерения по каждой выборке: действительное значение, доверительные границы интервала, вероятность доверительных границ, количество элементов выборки, уровень значимости критерия Пирсона, по которому принята гипотеза о законе распределения случайной погрешности;
6. результат измерения, записанный в соответствии с требованиями МИ1317-86;
7. анализ принадлежности выборок 1 и 2 к одной генеральной совокупности;
8. выводы.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях имеет место гауссовский закон распределения?
2. Какое значение измеряемой величины можно выбрать в качестве базового?
3. В чем заключается правило «трех сигм»?
4. Определить область применения критерия согласия Пирсона?
5. Что означает уровень значимости в критерии Пирсона?
6. Что означает число степеней свободы в критерии Пирсона?
7. Что такое $\tilde{\sigma}_{\bar{X}} = \tilde{\sigma}[A]$?
8. Что означает доверительный интервал?
9. Как определить количество значащих цифр, заслуживающих доверие в результате измерения?

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Протокол измерений по выборкам

Параметр	**Значение**
Номер выборки	
Среднее арифметическое выборки	
Выборочная дисперсия	
Минимальное значение в выборке	
Максимальное значение в выборке	
Выборочное среднеквадратическое отклонение	
Число элементов в выборке	
Выборочное медианное значение	
Выборочный эксцесс	
Выборочный коэффициент асимметрии	