DOIS

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

Louis Leithold

editora HARBRA

DOIS

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

Tradução:

CYRO DE CARVALHO PATARRA

Professor do Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
Ph. D. Northwestern University

Revisão Técnica:

WILSON CASTRO FERREIRA, Jr.
SILVIO PREGNOLATTO

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas

DOIS

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

LOUIS LEITHOLD

editora HARBRA ltda.

Direção Geral:	Julio E. Emöd
Supervisão Editorial:	Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial:	Marilu Bernardes Sória
Revisão de Estilo:	Maria Lúcia G. Leite Rosa
Assistente Editorial:	Mônica Roberta Suguiyama
Revisão de Provas:	Melissa Mesquita Ponciano
Composição e Capa:	AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos:	STAP Stúdio Gráfico
Impressão e Acabamento:	Gráfica Paym

O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA – volume 2 – 3ª edição
Copyright © 1994 por **editora HARBRA ltda.**

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana
04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 5571-1122. Fax: (011) 5575-6876
Vendas: (011) 5549-2244 e 5571-0276. Fax: (011) 5571-9777

Tradução de *The Calculus with Analytic Geometry, 6th edition*
Copyright © 1990 por HarperCollins Publishers.
Publicado com a permissão de HarperCollins Publishers.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta edição pode ser utilizada ou reproduzida – em qualquer meio ou forma, seja mecânico ou eletrônico, fotocópia, gravação etc. – nem apropriada ou estocada em sistema de banco de dados, sem a expressa autorização da editora.

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Conteúdo

VOLUME II

Prefácio			ix
Agradecimentos			xiv
Um Pouco de História			xv
CAPÍTULO 12	12.1	Seqüências	688
SEQÜÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES	12.2	Seqüências Monótonas e Limitadas	695
	12.3	Séries Infinitas de Termos Constantes	701
	12.4	Quatro Teoremas sobre Séries Infinitas	710
	12.5	Séries Infinitas de Termos Positivos	714
	12.6	O Teste da Integral	724
	12.7	Séries Alternadas	727
	12.8	Convergência Absoluta e Condicional, o Teste da Razão e o Teste da Raiz	732
	12.9	Sumário dos Testes de Convergência ou Divergência para uma Série Infinita	739
		Exercícios de Revisão	741
CAPÍTULO 13	13.1	Introdução às Séries de Potências	744
SÉRIES DE POTÊNCIAS	13.2	Derivação de Séries de Potências	751
	13.3	Integração de Séries de Potências	761
	13.4	Série de Taylor	768
	13.5	Série Binomial	777
		Exercícios de Revisão	781
CAPÍTULO 14	14.1	Vetores no Plano	784
VETORES NO PLANO E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS	14.2	Produto Escalar	795
	14.3	Funções com Valores Vetoriais e Equações Paramétricas	802
	14.4	Cálculo de Funções com Valores Vetoriais	809
	14.5	Comprimento de Arco	815
	14.6	Os Vetores Unitários da Tangente e da Normal e o Comprimento de Arco como um Parâmetro	821
	14.7	Curvatura	825
	14.8	Movimento Plano	833
	14.9	Componentes Normal e Tangencial da Aceleração (Suplementar)	839
		Exercícios de Revisão	843

CAPÍTULO 15
VETORES EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL E GEOMETRIA ANALÍTICA SÓLIDA

15.1 O Espaço Numérico Tridimensional 847
15.2 Vetores no Espaço Tridimensional 853
15.3 Planos 862
15.4 Retas em R^3 869
15.5 Produto Vetorial 874
15.6 Cilindros e Superfícies de Revolução 884
15.7 Superfícies Quádricas 889
15.8 Curvas em R^3 895
15.9 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas 902
Exercícios de Revisão 906

CAPÍTULO 16
CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

16.1 Funções de mais de Uma Variável 909
16.2 Limites de Funções de mais de Uma Variável 918
16.3 Continuidade de Funções de mais de Uma Variável 928
16.4 Derivadas Parciais 932
16.5 Diferenciabilidade e Diferencial Total 940
16.6 A Regra da Cadeia 950
16.7 Derivadas Parciais de Ordem Superior 957
16.8 Condições Suficientes para a Diferenciabilidade (Suplementar) 964
Exercícios de Revisão 969

CAPÍTULO 17
DERIVADAS DIRECIONAIS, GRADIENTES E APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS

17.1 Derivadas Direcionais e Gradientes 973
17.2 Planos Tangentes e Normais a Superfícies 980
17.3 Extremos de Funções de Duas Variáveis 984
17.4 Funções Implícitas, Derivação 998
17.5 Multiplicadores de Lagrange 1006
17.6 Obtenção de Uma Função a partir de seu Gradiente e Diferencial Exata 1012
Exercícios de Revisão 1020

CAPÍTULO 18
INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

18.1 A Integral Dupla 1023
18.2 Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas 1028
18.3 Centro de Massa e Momentos de Inércia 1035
18.4 A Integral Dupla em Coordenadas Polares 1040
18.5 Área de Uma Superfície 1045
18.6 A Integral Tripla 1050
18.7 A Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas 1055
18.8 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 1061
Exercícios de Revisão 1070

CAPÍTULO 19
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE CAMPOS VETORIAIS

19.1 Campos Vetoriais 1073
19.2 Integrais de Linha 1081
19.3 Integrais de Linha Independentes do Caminho 1089
19.4 O Teorema de Green 1099
19.5 Integrais de Superfícies 1112
19.6 Teorema da Divergência de Gauss e Teorema de Stokes 1119
Exercícios de Revisão 1128

CAPÍTULO 20 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	20.1	Conceitos Básicos	1131
	20.2	Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	1134
	20.3	Equações Diferenciais de Primeira Ordem com Variáveis Separáveis	1141
	20.4	Equações Diferenciais Homogêneas,	1145
	20.5	Equação de Bernoulli	1149
	20.6	Equações Diferenciais Exatas	1154
	20.7	Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	1158
	20.8	Equações Não-Homogêneas	1164
	20.9	Resolução de Equações Diferenciais por Séries	1174
Apêndice	**A-1**	Uso de uma Tabela de Integrais	A-1
	A-2	Transformações Funcionais e Operadores	A-5
Fórmulas		O Alfabeto Grego	F-1
		Fórmulas de Geometria	F-1
		Fórmulas de Trigonometria	F-2
		Tabela de Derivadas	F-3
		Tabela de Integrais	F-3
Respostas dos Exercícios de Número Ímpar			R-1
Índice Remissivo			I-1

VOLUME I

CAPÍTULO 1	**NUMEROS REAIS, FUNÇÕES E GRÁFICOS**
CAPÍTULO 2	**LIMITES E CONTINUIDADE**
CAPÍTULO 3	**A DERIVADA E A DERIVAÇÃO**
CAPÍTULO 4	**VALORES EXTREMOS DAS FUNÇÕES, TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E A DIFERENCIAL**
CAPÍTULO 5	**INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA**
CAPÍTULO 6	**APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA**
CAPÍTULO 7	**FUNÇÕES INVERSAS, LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS**
CAPÍTULO 8	**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS**
CAPÍTULO 9	**TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO**
CAPÍTULO 10	**SECÇÕES CÔNICAS E COORDENADAS POLARES**
CAPÍTULO 11	**FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRAIS IMPRÓPRIAS E A FÓRMULA DE TAYLOR**
Apêndice	
Fórmulas	
Respostas dos Exercícios de Número Ímpar	
Índice Remissivo	

Prefácio

"Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado"

— ALBERT EINSTEIN

O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não-técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. Nas Secções Suplementares do final dos capítulos aparecem algumas discussões teóricas as quais, se o estudante desejar, poderão ser omitidas sem prejuízo da seqüência do texto.

A TERCEIRA EDIÇÃO DE O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

Desde a primeira edição deste livro em 1968, o curso de Cálculo sofreu mudanças significativas em seu conteúdo e ensino. A cada nova edição, tentei incorporar tais mudanças e manter um equilíbrio saudável entre uma abordagem rigorosa e um ponto de vista intuitivo. Os dezenove* capítulos de ***O Cálculo com Geometria Analítica*** formam quatro segmentos: capítulo 1, revisão de tópicos de pré-cálculo; capítulos 2-11 funções de uma única variável; capítulos 12-13, séries infinitas; e capítulos 14-19, vetores e funções de mais de uma variável. A terceira edição incorpora alterações em cada um desses segmentos, algumas delas foram feitas para refletir a importância cada vez maior de computadores e calculadoras programáveis, facilitando os cálculos.

* **N. do E.:** O Capítulo 20 foi escrito especialmente para a edição brasileira e trata das equações diferenciais.

TÓPICOS DE REVISÃO DO CÁLCULO

CAPÍTULO 1 Esse capítulo, "Números Reais, Funções e Gráficos", é menos detalhado do que nas edições anteriores. Uma secção sobre aspectos básicos do sistema de números reais é seguida por uma introdução à Geometria Analítica que inclui o material tradicional sobre retas e circunferências. É apresentada uma discussão sobre a definição de uma função, operações com funções e tipos de funções. A introdução de seis tipos de funções trigonométricas permite o seu uso nos exemplos de derivação e integração de funções não-algébricas.

FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

CAPÍTULO 2 Com a secção sobre limites no infinito introduzida neste capítulo, a discussão de limite e continuidade é concluída em um mesmo capítulo. Esses tópicos constituem a essência de um curso inicial de Cálculo. Todos os teoremas de limite são enunciados, e algumas provas são apresentadas no texto, enquanto outras são propostas como exercícios. Nesta edição há exemplos e exercícios novos que envolvem o uso de calculadoras para lançar conjecturas sobre um determinado limite.

CAPÍTULO 3 Na secção 3.1, defino a reta tangente a uma curva para demonstrar, antecipadamente, a interpretação geométrica da derivada, definida na secção 3.2. A aplicação física de velocidade instantânea no movimento retilíneo é apresentada após a demonstração de teoremas sobre diferenciação. As derivadas das seis funções trigonométricas são apresentadas, tornando-se disponíveis como exemplos para a apresentação da regra da cadeia. Há alguns execícios novos que requerem o uso de calculadora para se estimar um dado valor da derivada, a partir da definição.

CAPÍTULO 4 Esse capítulo apresenta as aplicações tradicionais da derivada a problemas envolvendo máximos e mínimos, bem como o esboço de curvas. Os tópicos sobre limites no infinito e assíntotas verticais e horizontais passam para o capítulo 2. A secção sobre aplicações na Economia que aparecia neste capítulo nas edições anteriores foi suprimida, mas parte desse assunto foi discutido em outros capítulos. A secção sobre a diferencial foi mudada para este capítulo, de modo a ficar mais próxima de sua referência no tratamento da antidiferenciação.

CAPÍTULO 5 A integral definida e a integração são assuntos tratados no capítulo 5. As duas primeiras secções envolvem a antidiferenciação. Uso o termo "antidiferenciação" em vez de "integração indefinida", mas a notação padrão $\int f(x)\,dx$ é conservada. Essa notação irá sugerir a existência de alguma relação entre integrais definidas e antiderivadas, mas não vejo nenhuma inconveniência nisso, pois a apresentação dá a visão teórica apropriada da integral definida como o limite de somas. Dois métodos numéricos para aproximar a integral definida são dados na secção final do capítulo. Esses procedimentos são importantes devido à sua adequação a computadores e calculadoras programáveis. O material sobre a aproximação de integrais definidas inclui o enunciado de teoremas sobre os limites do erro envolvido nessas aproximações. O capítulo também inclui uma secção sobre equações diferenciais com variáveis separáveis, e a discussão completa da área de uma região plana.

CAPÍTULO 6 Nesse capítulo introduzi aplicações de integral definida que esclarecem não apenas as técnicas de manipulação, mas também os princípios envolvidos. Em cada aplicação, as definições dos novos termos são intuitivamente motivadas e explicadas. O tratamento de volumes de sólidos, assunto das duas primeiras secções, foi revisado. A secção 6.1 começa com volumes apresentando secções planas, e depois volumes de sólidos de revolução por discos e anéis circulares são considerados como casos especiais de volumes por cortes. Volumes de sólidos de revolução por invólucros cilíndricos são discutidos na secção 6.2. Outra aplicação geométrica da integral definida é o comprimento de arco na secção 6.3. As secções restantes do capítulo são dedicadas a aplicações físicas incluindo centro de massa de barras e regiões planas, trabalho e pressão líquida.

CAPÍTULOS 7 e 8 Funções inversas são tratadas nas duas primeiras secções do capítulo 7, e as cinco secções seguintes são dedicadas às funções logarítmica e exponencial. A função logarítmica natural é definida primeiro e depois a função exponencial natural é definida como a sua inversa. Esse procedimento permite-nos dar um significado preciso a um expoente irracional de um número positivo. Em seguida definimos a função exponencial de base a, onde a é positivo e sua inversa é a função logarítmica de base a. Aplicações dessas funções incluem as leis do crescimento e decaimento, o crescimento limitado envolvendo a curva de aprendizado e a função densidade de probabilidade normal padrão. A secção 7.8, introduzida nesta edição, envolve a solução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. No capítulo 8, as demais funções transcendentais (não-algébricas) são introduzidas. Essas são as funções trigonométricas inversas e as funções hiperbólicas.

CAPÍTULO 9 Técnicas de integração envolvem um aspecto computacional importante do Cálculo. São discutidas nesse capítulo que foi reduzido para oito secções nesta edição. Expliquei os fundamentos teóricos de cada método diferente, após uma motivação inicial. O domínio das técnicas de integração depende de exemplos, e usei, como ilustrações, problemas que o estudante certamente encontrará na prática. Duas outras aplicações de integração são introduzidas na secção 9.5: crescimento logístico, ocorrendo em Economia, Biologia e Sociologia; e a lei da ação de massas na Química.

CAPÍTULO 10 A ordem dos tópicos da Geometria Analítica nesse capítulo foi alterada nesta edição. As quatro primeiras secções pertencem a secções cônicas: a parábola, a elipse e a hipérbole. Cada uma dessas cônicas é introduzida pela indicação de como ela é formada ao interceptarmos um plano com um cone; então a definição analítica é dada e sua equação em coordenadas retangulares é obtida. As coordenadas polares e algumas de suas aplicações são apresentadas nas secções de 10.5 a 10.7. As equações polares das cônicas aparecem na secção 10.8, onde ocorrem como parte de um tratamento unificado de secções cônicas.

CAPÍTULO 11 Esse capítulo, "Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor", foi posicionado de modo a preceder imediatamente as séries infinitas, onde muitos dos resultados são aplicados. As aplicações de integrais impróprias, que aparecem nas secções 11.3 e 11.4, incluem a função densidade de probabilidade, além de outras usadas em Geometria e Economia.

SÉRIES INFINITAS

CAPÍTULOS 12 e 13 O estudo de séries infinitas nesses dois capítulos é considerado como um segmento separado do curso, de forma a evidenciar que se trata de um conteúdo independente, que pode ser estudado quando se desejar, uma vez que o estudo do cálculo de funções de uma única variável tenha sido completado. O capítulo 12 é dedicado a seqüências e séries infinitas de termos constantes, e sua última secção apresenta um resumo de testes para convergências de uma série infinita. O capítulo 13 trata de séries infinitas de termos variáveis denominadas séries de potências. O conjunto de exercícios foi ampliado, em relação às edições anteriores, para incluir mais aplicações.

VETORES E FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

CAPÍTULOS 14 e 15 Esses dois capítulos contêm o cálculo de vetores, bem como uma abordagem vetorial à Geometria Analítica dos Sólidos. As primeiras secções do capítulo 14 sobre vetores no plano podem ser estudadas após o capítulo 5, se você desejar estudar os vetores mais cedo, em seu curso. O capítulo 15 trata de vetores no espaço tridimensional e, se desejado, os tópicos das secções 15.1 e 15.2 podem ser estudados simultaneamente com os seus correspondentes no capítulo 14. As aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia ocorrem em ambos os capítulos.

CAPÍTULOS 16, 17* e 18* A diferencial e o cálculo integral de funções de mais de uma variável são apresentados nesses três capítulos. Limites, continuidade, derivação parcial, diferenciabilidade e a diferencial total são discutidos no capítulo 16, onde as aplicações incluem taxas de variações e cálculos aproximados. No capítulo 17, uma secção sobre derivadas direcionais e gradientes é seguida por uma secção que mostra a aplicação do gradiente para encontrarmos uma equação do plano tangente à superfície. Outras aplicações de derivadas parciais no capítulo 17 são a solução de problemas de extremos e os multiplicadores de Lagrange. As equações diferenciais exatas são resolvidas na secção 17.5. A integral dupla de uma função de duas variáveis e a integral tripla de uma função de três variáveis, juntamente com algumas aplicações à Física, Engenharia e Geometria, são tratadas no capítulo 18.

CAPÍTULO 19 O capítulo "Introdução ao Cálculo de Campos Vetoriais", recebeu um tratamento mais detalhado de Cálculo Vetorial. O conteúdo inclui integrais de linha e de superfície, o teorema de Green, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stoke. A abordagem neste capítulo é intuitiva e são apresentadas aplicações à Física e à Engenharia.

---

* **N. do E.:** As secções 17.4, sobre funções implícitas e sua derivação, e 18.8, sobre mudança de variáveis e integrais múltiplas, foram especialmente elaboradas para a edição brasileira.

CAPÍTULO EXCLUSIVO PARA A EDIÇÃO BRASILEIRA

CAPÍTULO 20 Escrito pelo prof. Cyro Patarra, prof. do IME-USP, este capítulo sobre equações diferenciais foi especialmente concebido para atender às exigências do currículo das faculdades brasileiras. As suas secções apresentam os conceitos básicos das diferentes equações diferenciais e os métodos de resolução.

SECÇÕES SUPLEMENTARES

Dez secções, que aparecem no final de alguns capítulos, são designadas como suplementares. Esses tópicos independentes podem ser estudados ou omitidos sem afetar o entendimento da matéria subseqüente. As secções suplementares são de dois tipos. Algumas apresentam material adicional que não faz necessariamente parte do conteúdo tradicional de um curso de Cálculo: as secções 4.10, 6.7, 7.8, 8.5, 9.8, 10.9, 14.8. Outras incluem discussões teóricas, inserindo provas de alguns teoremas: as secções 2.9, 2.10 e 16.8. Ambos os tipos aumentam a flexibilidade do texto.

EXEMPLOS E ILUSTRAÇÕES

Os exemplos e ilustrações — quase 1.000 no total — aparecem em todas as secções. Os exemplos, que foram cuidadosamente escolhidos para preparar os estudantes para os exercícios, deveriam ser usados como modelos para suas soluções. Uma ilustração é utilizada para demonstrar um conceito particular, uma definição ou teorema; é um protótipo da idéia apresentada.

EXERCÍCIOS

Há, agora, mais de 7.400 exercícios, revisados e ordenados de acordo com o grau de dificuldade, para propiciar uma ampla variedade de tipos, abrangendo desde problemas téoricos e aplicados, até aqueles que são computacionais. Eles aparecem no final das secções e como exercícios de revisão seguindo a última secção de cada capítulo. As respostas aos exercícios de número ímpar são dadas no final do livro.

GRÁFICOS TRIDIMENSIONAIS

Para atender às necessidades dos estudantes de ter uma apresentação de gráficos tridimensionais mais moderna e fácil de visualizar, mais de 200 figuras fazem parte desta nova edição. Muitas delas foram geradas por computadores, para assegurar a precisão matemática. Essas figuras, que os instrutores acharão mais claras que o estilo de sólidos geométricos feitos com aerógrafo na edição anterior e nos textos mais antigos, foram criadas com auxílio do programa Mathematica e o uso de *Illustrator 88*.

Louis Leithold.

Agradecimentos

Aos professores que mais me influenciaram:

Florence Balensiefer; Inglês, Lowell High Scholl, São Francisco
Ivan Barker; Matemática, Lowell High Schooll, São Francisco
Alan McKeever; Jornalismo, Lowell High Scholl, São Francisco
Benjamin Bernstein; Matemática, University of California, Berkeley
Pauline Sperry; Matemática, University of California, Berkeley
Virginia Wakerling; Matemática, University of California, Berkeley

Aos que foram meus alunos em:

Phoenix College; California State University, Los Angeles; University of Southern California; Open University of Great Britain; Pepperdine University

Aprendi com todos eles.

Aos revisores da edição americana:

Peter P. Andre, United States Naval Academy; Leon E. Arnold, Delaware County Community College; Harold R. Bennett, Texas Tech University; Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College; John Broughton, Indiana University of Pennsylvania; Floyd A. Cohen, California State University, Long Beach; Joel Davis, Oregon State University; K. Joe Davis, East Carolina University; N. J. DeLillo, Manhattan College; William A. Echols, Houston Community College; John Garlow, Tarrant Country Junior College; Stuart Goldenberg, California Polytechnic State University, San Luis Obispo; Joel K. Haack, Oklahoma State University; Norvin Holm, Charles S. Mott Community College; Roy A. Johnson, Washington State University; Dan Kemp, South Dakota State University; Joh Klippert, James Madison University; Walter F. Martens, University of Alabama, Birmingham; Roger B. Nelsen, Lewis and Clark College; William L. Perry, Texas A&M University; Walter A. Rosenkrantz, University of Massachusetts, Amherst; Daniel B. Shapiro, Ohio State University; Charles R. Stone, Dekalb College; Jere Strickland, James H. Faulkner State Junior College; Richard B. Thompson, University of Arizona; G. B. Turney, University of Texas, Arlington; J. Terry Wilson, San Jacinto College; Richard M. Witt, University of Wisconsin-Eau Claire

Aos que auxiliaram na resolução dos exercícios:

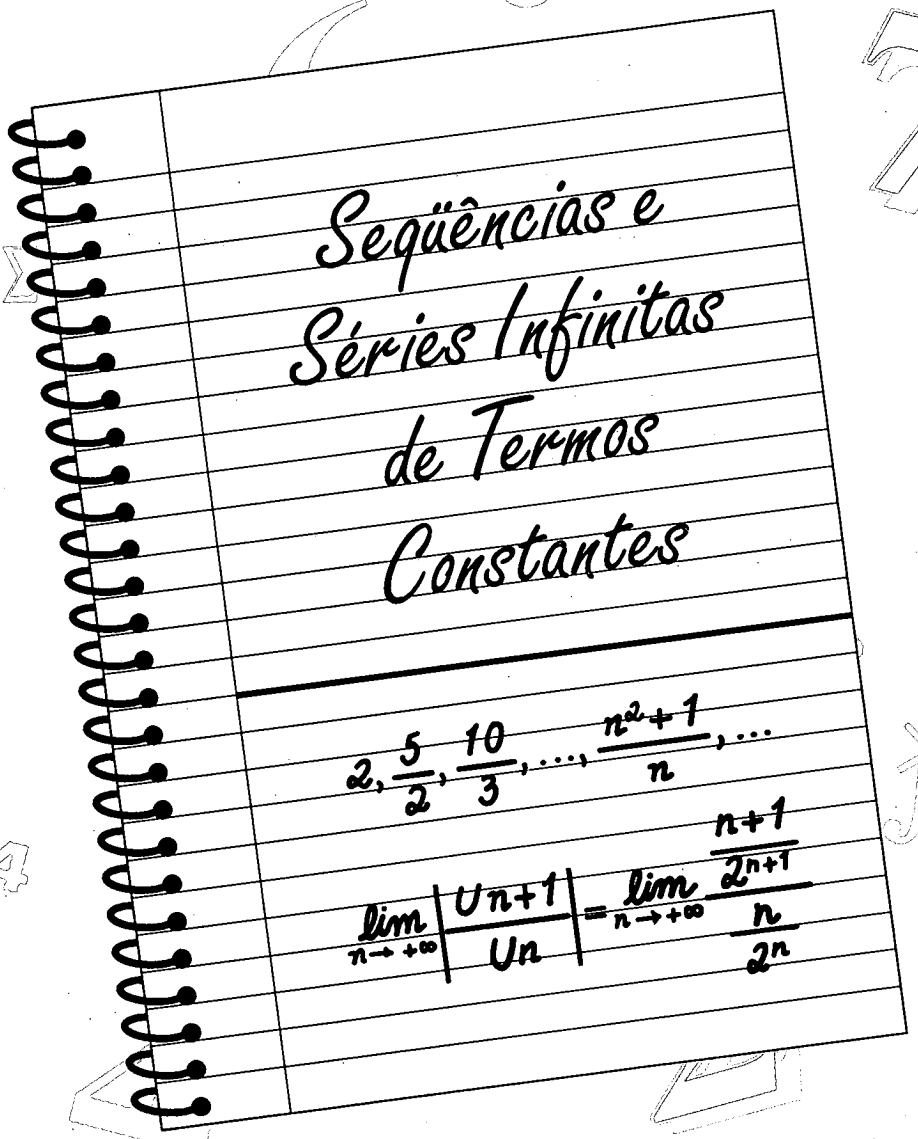
Leon Gerber, St. John's University; Gloria Langer, University of Colorado

A essas pessoas e a todos aqueles que usaram as primeiras edições e sugeriram mudanças, expresso a minha profunda admiração.

Um Pouco de História

Algumas idéias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, da época de Arquimedes (287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a invenção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).

DOZE



O estudo de *séries infinitas* neste capítulo e no Capítulo 13 utiliza conceitos de Cálculo que você já aprendeu. No entanto, nenhum conteúdo nos capítulos subseqüentes exige, como pré-requisito, conhecimentos de séries infinitas. Em conseqüência, os Capítulos de 14 a 19 poderão ser estudados antes dos Capítulos 12 e 13, se desejado.

Neste capítulo, estudamos outro tipo de função, tendo um conjunto de números reais como seu domínio e imagem. Na Secção 12.1, uma *seqüência* é definida como uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros. Na Secção 12.2 você encontrará a prova da equivalência de convergência e limitação de seqüências monótonas (Teoremas 12.2.6 e 12.2.9) baseada na propriedade de completamento de números reais. Na Secção 12.3, uma *série infinita* é definida como um tipo particular de seqüência, e quatro teoremas sobre séries infinitas

são discutidos na Secção 12.4. As quatro secções a seguir tratam de *testes de convergência* de séries infinitas. Nas Secções 12.5 e 12.6 consideramos séries de termos positivos, e então, na Secção 12.7 estamos interessados em séries cujos termos são positivos e negativos, alternadamente. Séries de termos arbitrários são tratadas na Secção 12.8. Um resumo dos testes para convergência ou divergência de uma série infinita é dado na Secção 12.9.

12.1 SEQÜÊNCIAS

Seqüências de números são freqüentes em Matemática. Por exemplo, os números

2, 4, 6, 8, 10

formam uma seqüência denominada **finita** pois há um último número. Se o conjunto de números que formam uma seqüência não tiver um último número, a seqüência será denominada **infinita**. Por exemplo, a seqüência

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{9}, \ldots \tag{1}$$

é infinita pois os três pontos sem nenhum número em seguida indicam que não há um último número. Estamos interessados aqui em seqüências infinitas e quando usamos a palavra "seqüência" devemos entender que se trata de uma seqüência infinita. Vamos dar agora uma definição formal de seqüência; ela é um tipo particular de função.

12.1.1 DEFINIÇÃO

Seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto

$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

de todos os números inteiros positivos.

Os números na imagem de uma seqüência são chamados de **elementos** da seqüência.

Se o n-ésimo elemento for dado por $f(n)$, então a seqüência será o conjunto de pares ordenados da forma $(n, f(n))$; onde n é um inteiro positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(n) = n/(2n + 1)$, então

$$f(1) = \tfrac{1}{3} \qquad f(2) = \tfrac{2}{5} \qquad f(3) = \tfrac{3}{7} \qquad f(4) = \tfrac{4}{9}$$

e assim por diante. A imagem de f consiste nos elementos da seqüência (1). Alguns dos pares ordenados na seqüência f são $(1, \frac{1}{3})$, $(2, \frac{2}{5})$, $(3, \frac{3}{7})$, $(4, \frac{4}{9})$ e $(5, \frac{5}{11})$. Um esboço do gráfico da seqüência está na Figura 1. ◀

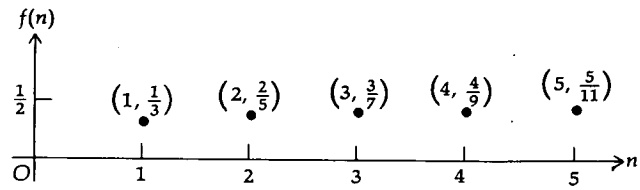


FIGURA 1

Geralmente o n-ésimo elemento da seqüência é dado quando os elementos aparecem em ordem. Assim, os elementos da seqüência (1) podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Como o domínio de toda seqüência é o mesmo, a notação $\{f(n)\}$ pode ser usada para denotar uma seqüência. Assim sendo, (1) pode ser denotada por $\{n/(2n + 1)\}$. A notação como subíndice $\{a_n\}$ é também usada para denotar a seqüência para a qual $f(n) = a_n$.

Dizemos que a seqüência

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

é **igual** à seqüência

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

se e somente se $a_i = b_i$, para todo i inteiro positivo. Lembre-se de que uma seqüência consiste em uma ordenação de elementos. Dessa forma, é possível duas seqüências terem os mesmos elementos e não serem iguais. Tal situação pode ser esclarecida na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A seqüência $\{1/n\}$ tem como elementos os recíprocos dos números inteiros positivos.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \tag{2}$$

A seqüência para a qual

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \dfrac{2}{n+2} & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

tem como elementos

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots \tag{3}$$

Os elementos das seqüências (2) e (3) são os mesmos, contudo, as seqüências são diferentes. Esboços dos gráficos das seqüências (2) e (3) são dados nas Figuras 2 e 3, respectivamente. ◀

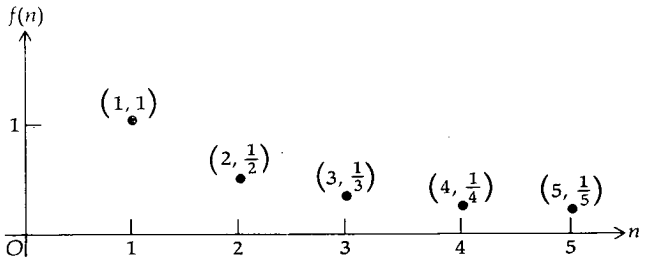


FIGURA 2

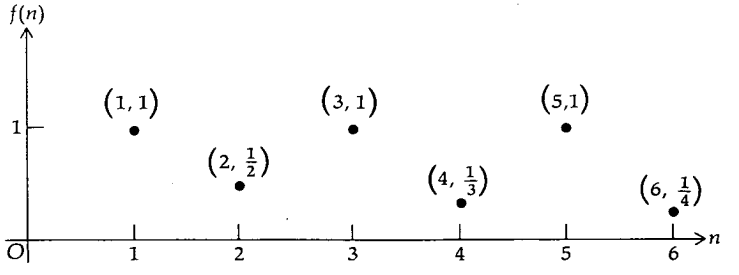


FIGURA 3

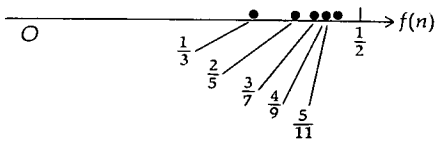


FIGURA 4

Vamos colocar agora, num eixo horizontal, os pontos correspondentes aos sucessivos elementos de uma seqüência. Isso foi efetuado na Figura 4 para a seqüência (1) que é $\{n/(2n + 1)\}$. Observe que os sucessivos elementos da seqüência estão cada vez mais próximos de $\frac{1}{2}$, muito embora nenhum elemento da seqüência assuma o valor $\frac{1}{2}$. Intuitivamente, vemos que é possível obter um elemento da seqüência tão próximo de $\frac{1}{2}$ quanto desejarmos, bastando tomar o número de elementos suficientemente grande. Ou, expressando isso de outra forma, $|n/(2n + 1) - \frac{1}{2}|$ pode se tornar menor que qualquer número positivo ϵ, contanto que n seja suficientemente grande. Por isso, dizemos que o limite da seqüência $\{n/(2n + 1)\}$ é $\frac{1}{2}$.

Em geral, se existe um número L tal que $|a_n - L|$ seja arbitrariamente pequeno para n suficientemente grande, dizemos que a seqüência $\{a_n\}$ tem o limite L. Segue a definição precisa de limite de uma seqüência.

12.1.2 DEFINIÇÃO A seqüência $\{a_n\}$ tem o limite L se para qualquer $\epsilon > 0$ existir um número $N > 0$, tal que se n for um inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

e escrevemos

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

EXEMPLO 1 Use a Definição 12.1.2 para provar que a seqüência tem limite $\frac{1}{2}$:

$$\left\{\frac{n}{2n + 1}\right\}$$

Solução Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$, tal que se n for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } \left|\frac{n}{2n + 1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \left|\frac{2n - 2n - 1}{2(2n + 1)}\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \left|\frac{-1}{2(2n + 1)}\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \frac{1}{2(2n + 1)} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } 2n + 1 > \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } n > \frac{1 - 2\epsilon}{4\epsilon}$$

Para que a afirmação anterior seja válida, tomamos $N = (1 - 2\epsilon)/(4\epsilon)$ e se n for um inteiro

$$\text{se } n > \frac{1 - 2\epsilon}{4\epsilon}, \text{ então } \left|\frac{n}{2n + 1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \tag{4}$$

Observe que no caso em que $\epsilon = \frac{1}{8}$, então $N = \frac{3}{2}$ e (4) torna-se

$$\text{se } n > \tfrac{3}{2} \quad \text{então} \quad \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}$$

Por exemplo, se $n = 4$,

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{18}$$

e $\frac{1}{18} < \frac{1}{8}$. O estabelecido em (4) prova que a seqüência dada tem limite $\frac{1}{2}$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Considere a seqüência $\{(-1)^{n+1}/n\}$. Note que o n-ésimo elemento dessa seqüência é $(-1)^{n+1}/n$, e $(-1)^{n+1}$ é igual a $+1$ quando n for ímpar e igual a -1 quando n for par. Assim sendo, podemos escrever os elementos da seqüência da seguinte forma:

$$1, \ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

Na Figura 5 foram colocados os pontos correspondentes a sucessivos elementos da seqüência. Na figura, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_6 = -\frac{1}{6}$, $a_7 = \frac{1}{7}$, $a_8 = -\frac{1}{8}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$. O limite dessa seqüência é 0, e os elementos oscilam em torno de 0. ◀

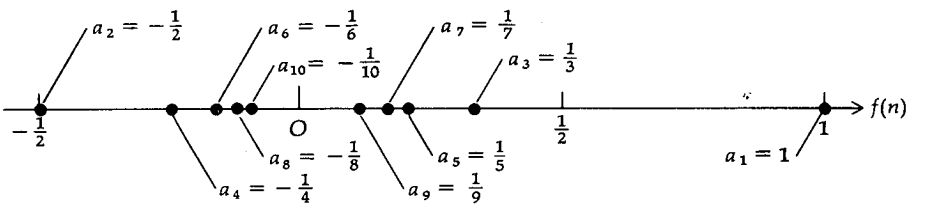


FIGURA 5

Compare a Definição 12.1.2 com a Definição 2.5.1 de limite de $f(x)$ quando x cresce sem limitação. As duas definições são quase idênticas; contudo, quando estabelecemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, a função f é definida para todos os números reais maiores do que um certo número real r, enquanto que quando consideramos $\lim_{n \to +\infty} a_n$, n está restrito aos números inteiros positivos. Porém, da Definição 2.5.1 segue imediatamente o teorema apresentado a seguir.

12.1.3 TEOREMA Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ e f estiver definida para todo inteiro positivo, então também $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$ quando n for um inteiro positivo qualquer.

A demonstração é proposta como exercício (veja o Exercício 26).

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos verificar o Teorema 12.1.3 para a seqüência do Exemplo 1, para a qual $f(n) = n/(2n + 1)$. Assim, $f(x) = x/(2x + 1)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$
$$= \tfrac{1}{2}$$

Segue, então, do Teorema 12.1.3, que $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$ quando n for qualquer inteiro positivo. Isso está de acordo com a solução dada no Exemplo 1. ◀

12.1.4 DEFINIÇÃO Se a seqüência $\{a_n\}$ tiver um limite, dizemos que ela é **convergente**, e a_n **converge** para o limite. Se a seqüência não for convergente, ela será **divergente**.

EXEMPLO 2 Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{\frac{4n^2}{2n^2+1}\right\}$$

Solução Queremos determinar se $\lim_{n \to +\infty} 4n^2/(2n^2 + 1)$ existe. Seja, então, $f(x) = 4x^2/(2x^2 + 1)$ e vamos estudar $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2 + \frac{1}{x^2}}$$
$$= 2$$

Assim sendo, pelo Teorema 12.1.3, $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 2$. Dessa forma, a seqüência dada é convergente e $4n^2/(2n^2 + 1)$ converge para 2.

EXEMPLO 3 Prove que se $|r| < 1$, então a seqüência $\{r^n\}$ será convergente e r^n convergirá para zero.

Solução Consideremos primeiro $r = 0$. Então, a seqüência é $\{0\}$ e $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$. Logo, a seqüência é convergente e o n-ésimo elemento converge para zero.

Se $0 < |r| < 1$, queremos mostrar então que a Definição 12.1.2 aplica-se com $L = 0$. Assim sendo, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |r^n - 0| < \epsilon \tag{5}$$

$\Leftrightarrow$ se $n > N$, então $|r|^n < \epsilon$

$\Leftrightarrow$ se $n > N$, então $\ln|r|^n < \ln \epsilon$

$\Leftrightarrow$ se $n > N$, então $n \ln|r| < \ln \epsilon$

Como $0 < |r| < 1$, $\ln|r| < 0$. Logo, a afirmação acima é equivalente a

$$\text{se } n > N, \text{ então } n > \frac{\ln \epsilon}{\ln|r|}$$

Assim sendo, se $N = \ln \epsilon / \ln|r|$, podemos concluir (5). Conseqüentemente, $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$. Dessa forma, pelas Definições 12.1.2 e 12.1.4, $\{r^n\}$ é convergente e r^n converge para zero.

EXEMPLO 4 Determine se a seqüência $\{(-1)^n + 1\}$ é convergente ou divergente.

Solução Os elementos dessa seqüência são 0, 2, 0, 2, 0, 2,..., $(-1)^n + 1$,... Como $a_n = 0$ se n for ímpar e $a_n = 2$ se n for par, parece que a seqüência é divergente. Para provar isso, vamos supor que a seqüência seja convergente e mostrar que tal hipótese leva a uma contradição. Se a seqüência tiver um limite L, então, pela Definição 12.1.2, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe um número $N > 0$ tal que se n for inteiro e

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } n > N \quad \text{então} \quad -\tfrac{1}{2} < a_n - L < \tfrac{1}{2}$$

Como $a_n = 0$ para n ímpar e $a_n = 2$ para n par, decorre dessa afirmação que

$$-\tfrac{1}{2} < -L < \tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2} < 2 - L < \tfrac{1}{2}$$

Mas se $-L > -\frac{1}{2}$, então $2 - L > \frac{3}{2}$ e, assim sendo, $2 - L$ não pode ser menor do que $\frac{1}{2}$. Logo, há uma contradição e a seqüência dada é divergente.

EXEMPLO 5 Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{ n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}$$

Solução Queremos determinar se o $\lim_{n \to +\infty} n \operatorname{sen}(\pi/n)$ existe. Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi/x)$ e vamos estudar o $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Uma vez que $f(x)$ pode ser escrita na forma $[\operatorname{sen}(\pi/x)]/(1/x)$ e $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$, bem como $\lim_{x \to +\infty} (1/x) = 0$, a regra de L'Hôpital pode ser aplicada para obtermos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{\pi}{x^2} \cos \dfrac{\pi}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \pi$, se n for inteiro positivo. Dessa forma, a seqüência dada é convergente e $n \operatorname{sen}(\pi/n)$ converge para π.

Existem teoremas de limite para seqüências, análogos aos que foram dados para funções no Capítulo 2. No enunciado desses teoremas é usada a terminologia de seqüências. As demonstrações não serão apresentadas pois são similares àquelas dos teoremas correspondentes, dadas no Capítulo 2.

12.1.5 TEOREMA Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem seqüências convergentes e c for uma constante, então

(i) a seqüência constante $\{c\}$ tem c como seu limite;

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} ca_n = c \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$;

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$;

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n \to +\infty} b_n\right)$;

(v) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} b^n}$ se $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \neq 0$ e todo $b_n \neq 0$.

EXEMPLO 6 Use o Teorema 12.1.5 para provar que a seqüência

$$\left\{\frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right\}$$

é convergente e ache o seu limite.

Solução

$$\frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1} \cdot n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

No Exemplo 1 comprovamos que a seqüência $\{n/(2n+1)\}$ é convergente e que $\lim\limits_{n \to +\infty} [n/(2n+1)] = \frac{1}{2}$. No Exemplo 5 ficou provado que a seqüência $\{n \operatorname{sen}(\pi/n)\}$ é convergente e que $\lim\limits_{n \to +\infty} [n \operatorname{sen}(\pi/n)] = \pi$. Assim sendo, pelo Teorema 12.1.5 (iv),

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n}{2n+1} \cdot n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \pi$$

Logo, a seqüência dada é convergente e seu limite é $\frac{1}{2}\pi$.

EXERCÍCIOS 12.1

Nos Exercícios de 1 a 19, escreva os quatro primeiros elementos da seqüência e determine se ela é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache o seu limite.

1. $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}$
3. $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$
4. $\left\{\dfrac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}$
5. $\left\{\dfrac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$
6. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$
7. $\left\{\dfrac{\ln n}{n^2}\right\}$
8. $\left\{\dfrac{\log_b n}{n}\right\}, b > 1$
9. $\{\operatorname{tgh} n\}$
10. $\{\operatorname{senh} n\}$
11. $\left\{\dfrac{n}{n+1} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right\}$
12. $\left\{\dfrac{\operatorname{senh} n}{\operatorname{sen} n}\right\}$
13. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$
14. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

15. $\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}$ $\left(\textit{Sugestão:}\text{ use } \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.\right)$

16. $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}$ Veja a sugestão para o Exercício 15.

17. $\{r^{1/n}\}$ e $r > 0$ (*Sugestão*: considere os dois casos: $r \leqslant 1$ e $r > 1$.)

18. $\{\cos n\pi\}$

19. $\left\{\frac{n}{c^n}\right\}$, $c > 1$

Nos Exercícios de 20 a 25, use a Definição 12.1.2 para provar que a seqüência dada tem o limite L.

20. $\left\{\frac{4}{2n-1}\right\}$; $L = 0$

21. $\left\{\frac{3}{n-1}\right\}$; $L = 0$

22. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$; $L = 0$

23. $\left\{\frac{8n}{2n+3}\right\}$; $L = 4$

24. $\left\{\frac{5-n}{2+3n}\right\}$; $L = -\frac{1}{3}$

25. $\left\{\frac{2n^2}{5n^2+1}\right\}$; $L = \frac{2}{5}$

26. Demonstre o Teorema 12.1.3.

27. Mostre que as seqüências $\left\{\frac{n^2}{n-3}\right\}$ e $\left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$ divergem; porém, a seqüência $\left\{\frac{n^2}{n-3}-\frac{n^2}{n+4}\right\}$ é convergente.

28. Dada a seqüência

$$\left\{\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^b}\right\}, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes e } b \neq 0$$

Determine se a seqüência é convergente ou divergente. Se for convergente, determine o seu limite.

29. Prove que se $|r| < 1$, a seqüência $\{nr^n\}$ é convergente e nr^n converge para zero.

30. Prove que se a seqüência $\{a_n\}$ converge, então $\lim_{n\to+\infty} a_n$ é único. (*Sugestão*: suponha que $\lim_{n\to+\infty} a_n$ tenha dois valores diferentes, L e M, e mostre que isso é impossível, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}|L-M|$ na Definição 12.1.2.)

31. Prove que se a seqüência $\{a_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, então a seqüência $\{a_n^2\}$ também será convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = L^2$.

32. Prove que se a seqüência $\{a_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, então a seqüência $\{|a_n|\}$ também será convergente e $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

12.2 SEQÜÊNCIAS MONÓTONAS E LIMITADAS

Certos tipos de seqüências recebem nomes especiais.

12.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma seqüência $\{a_n\}$ é

(i) **crescente**, se $a_n \leqslant a_{n+1}$ para todo n;
(ii) **decrescente**, se $a_n \geqslant a_{n+1}$ para todo n.

Chamamos de **monótona** uma seqüência que seja crescente ou decrescente.

No caso de $a_n < a_{n+1}$ (um caso especial de $a_n \leqslant a_{n+1}$), a seqüência é **estritamente crescente**; se $a_n > a_{n+1}$, a seqüência é **estritamente decrescente.**

EXEMPLO 1 Determine se as seguintes seqüências são crescentes, decrescentes ou não-monótonas: (a) $\{n/(2n+1)\}$; (b) $\{1/n\}$; (c) $\{(-1)^{n+1}/n\}$.

Solução

(a) Os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \ldots$$

Observe que obtemos a_{n+1} de a_n, substituindo n por $n + 1$. Logo, como $a_n = n/(2n + 1)$,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3}$$

Observando os quatro primeiros elementos da seqüência, vemos que eles crescem quando n cresce. Assim, suspeitamos que em geral

$$\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{n+1}{2n+3} \tag{1}$$

A desigualdade (1) pode ser comprovada se encontrarmos uma desigualdade equivalente que sabemos ser válida. Multiplicando cada membro de (1) por $(2n + 1)(2n + 3)$, obtemos as desigualdades equivalentes:

$$n(2n+3) \leqslant (n+1)(2n+1)$$

$$2n^2 + 3n \leqslant 2n^2 + 3n + 1 \tag{2}$$

A desigualdade (2) é, obviamente, verdadeira, pois o segundo membro é 1 maior do que o primeiro. Logo, a desigualdade (1) é verificada e, portanto, a seqüência dada é crescente.

(b) Os elementos da seqüência podem ser escritos como:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Como

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

para todo n, a seqüência é decrescente.

(c) Os elementos da seqüência são

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \ldots$$

Como $a_1 = 1$ e $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$. Porém $a_3 = \frac{1}{3}$; assim $a_2 < a_3$. Em geral, consideramos três elementos consecutivos da seqüência:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \qquad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Se n for ímpar, $a_n > a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_{n+2}$; por exemplo, $a_1 > a_2$ e $a_2 < a_3$. Se n for par, $a_n < a_{n+1}$ e $a_{n+1} > a_{n+2}$; por exemplo, $a_2 < a_3$ e $a_3 > a_4$. Dessa forma, a seqüência não é nem crescente, nem decrescente e, assim sendo, não é monótona.

12.2.2 DEFINIÇÃO O número C é chamado de **limitante inferior** da seqüência $\{a_n\}$ se $C \leqslant a_n$ para todo n inteiro positivo, e o número D é chamado de **limitante superior** da seqüência $\{a_n\}$ se $a_n \leqslant D$ para todo n inteiro positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** O número zero é um limitante inferior da seqüência $\{n/(2n+1)\}$ cujos elementos são

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Observe que $\frac{1}{3}$ é outro limitante inferior da seqüência. Na verdade, todo número menor ou igual a $\frac{1}{3}$ é um limitante inferior da seqüência. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para a seqüência $\{1/n\}$ cujos elementos são

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

1 é um limitante superior; 26 também é um limitante superior. Qualquer número que seja maior ou igual a 1 será um limitante superior, e qualquer número não-positivo servirá como limitante inferior para a seqüência. ◀

Com as Ilustrações 1 e 2 vemos que uma seqüência pode ter vários limitantes superiores e inferiores.

12.2.3 DEFINIÇÃO Se A for um limitante inferior de uma seqüência $\{a_n\}$ e se A satisfizer a propriedade de que para todo limitante inferior C de $\{a_n\}$, $C \leqslant A$, então A será chamado de **limitante inferior máximo** da seqüência. Analogamente, se B for um limitante superior de uma seqüência $\{a_n\}$ e se B satisfizer a propriedade de que para todo limitante superior D de $\{a_n\}$, $B \leqslant D$, então B será chamado de **limitante superior mínimo** da seqüência.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para a seqüência $\{n/(2n+1)\}$ da Ilustração 1, o limite inferior máximo é $\frac{1}{3}$, pois todo limitante inferior da seqüência é menor ou igual a $\frac{1}{3}$. Além disso, como

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$$

para todo n, então $\frac{1}{2}$ é o limite superior mínimo da seqüência.

Na Ilustração 2 há a seqüência $\{1/n\}$ cujo limitante superior mínimo é 1, pois todo limitante superior da seqüência é maior ou igual a 1. O limitante inferior máximo dessa seqüência é 0. ◀

12.2.4 DEFINIÇÃO Dizemos que uma seqüência $\{a_n\}$ é **limitada** se e somente se ela tiver limitantes superior e inferior.

Como a seqüência $\{1/n\}$ tem um limitante superior e um limitante inferior, ela é limitada. Além disso, $\{1/n\}$ também é decrescente; logo, é uma seqüência monótona limitada. Há um teorema (12.2.6) que garante que toda seqüência monótona limitada é convergente. Em particular, $\{1/n\}$ é convergente, pois $\lim_{n \to +\infty} (1/n) = 0$. A seqüência $\{n\}$ cujos elementos são

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

é monótona (pois é crescente); porém não é limitada (uma vez que não possui limitante superior). Ela não é convergente, pois $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Para demonstrar o Teorema 12.2.6 precisamos de uma propriedade muito importante do sistema de números reais que será enunciada a seguir.

12.2.5 O AXIOMA DO COMPLETAMENTO

Todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo. Da mesma forma, todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante superior possui um limite superior mínimo.

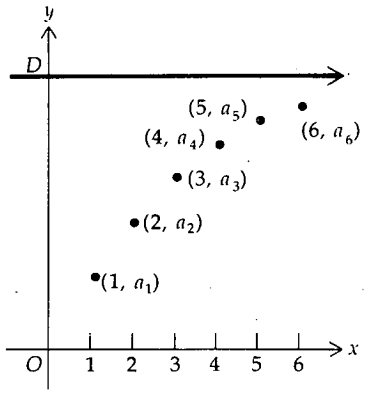


FIGURA 1

A segunda sentença no enunciado do axioma do completamento é desnecessária, uma vez que pode ser provada da primeira sentença. Ela foi incluída no axioma para facilitar a discussão.

Vamos supor que a seqüência $\{a_n\}$ seja crescente e limitada. Seja D um limitante superior da seqüência. Então, se os pontos (n, a_n) forem colocados num sistema cartesiano ortogonal, eles ficarão abaixo da reta $y = D$. Além disso, como a seqüência é crescente, à medida que n cresce, os pontos ficarão cada vez mais próximos da reta $y = D$. Veja a Figura 1. Assim sendo, quando n cresce, os elementos a_n crescem em direção a D. Intuitivamente, diremos que a seqüência $\{a_n\}$ tem um limite que é D ou algum número menor do que D. Isso é realmente o que acontece, como está provado no teorema a seguir.

12.2.6 TEOREMA

Uma seqüência monótona limitada é convergente.

Prova Demonstraremos o teorema para o caso das seqüências monótonas crescentes. Seja $\{a_n\}$ a seqüência.

Como $\{a_n\}$ é limitada, existe um limitante superior para a seqüência. Pelo axioma de completamento, $\{a_n\}$ tem um limitante superior mínimo que chamaremos de B. Então, se ϵ for um número positivo, $B - \epsilon$ não poderá ser um limitante superior para a seqüência, pois $B - \epsilon < B$ e B é o limitante superior mínimo dela. Assim sendo, para algum número inteiro positivo N,

$$B - \epsilon < a_N \tag{3}$$

Como B é o limitante superior mínimo de $\{a_n\}$, pela Definição 12.2.2 segue que

$$a_n \leqslant B \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo} \tag{4}$$

Como $\{a_n\}$ é uma seqüência crescente, pela Definição 12.2.1(i) segue que

$$a_n \leqslant a_{n+1} \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

e assim

$$\text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad a_N \leqslant a_n$$

Dessa afirmação e de (3) e (4) segue que

$$\text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad B - \epsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant B < B + \epsilon$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} & \text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad B - \epsilon < a_n < B + \epsilon \\ \Leftrightarrow\ & \text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad -\epsilon < a_n - B < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ & \text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad |a_n - B| < \epsilon \end{aligned}$$

Mas, pela Definição 12.1.2, essa afirmação é a condição para que $\lim_{n \to +\infty} a_n = B$. Logo, a seqüência $\{a_n\}$ é convergente.

Para provar o teorema quando $\{a_n\}$ for uma seqüência decrescente, basta considerar a seqüência $\{-a_n\}$, que será crescente, e aplicar os resultados acima. Propomos como um exercício que as etapas da demonstração sejam completadas. (veja o Exercício 17). ■

O Teorema 12.2.6 estabelece que se $\{a_n\}$ for uma seqüência monótona limitada, então existirá um número L tal que $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, mas não esclarece como encontrar L. Por essa razão, o Teorema 12.2.6 é chamado de *teorema de existência*. Muitos conceitos importantes em Matemática baseiam-se em teoremas de existência. Assim, existem diversas seqüências para as quais o limite não pode ser encontrado através do uso direto da definição ou da aplicação de teoremas de limite, mas o conhecimento de que tal limite existe pode ser importante para um matemático.

Na demonstração do Teorema 12.2.6, o limite de uma seqüência crescente limitada é o seu limitante superior mínimo B. Logo, se D for um limitante superior da seqüência, $\lim_{n \to +\infty} a_n = B \leqslant D$. Temos, então, o teorema a seguir.

12.2.7 TEOREMA Seja $\{a_n\}$ uma seqüência crescente, e suponhamos que D seja um limitante superior da seqüência. Então, $\{a_n\}$ será convergente e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \leqslant D$$

Na demonstração do Teorema 12.2.6 para o caso de seqüências monótonas decrescentes, o limite é o limitante inferior máximo. Assim sendo, existe um teorema similar ao Teorema 12.2.7.

12.2.8 TEOREMA Seja $\{a_n\}$ uma seqüência decrescente, e suponhamos que C seja um limitante inferior da seqüência. Então, $\{a_n\}$ será convergente e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \geqslant C$$

EXEMPLO 2 Use o Teorema 12.2.6 para provar que a seqüência é convergente:

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Solução Os elementos da seqüência dada são

$$\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \ldots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \ldots$$

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$. Assim sendo, os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \ldots$$

Então $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$; logo, a seqüência dada pode ser decrescente. Precisamos verificar se $a_n \geqslant a_{n+1}$; isto é, precisamos determinar se

$$\frac{2^n}{n!} \geqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n(n+1)! \geqslant 2^{n+1}n!$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n n!(n+1) \geqslant 2 \cdot 2^n n!$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 \geqslant 2 \tag{6}$$

Quando $n = 1$, a desigualdade (6) torna-se $2 = 2$ e (6) é, obviamente, verdadeira quando $n > 2$. Como a desigualdade (5) é equivalente a (6), segue que a seqüência dada é decrescente e, portanto, monótona. Um limitante superior para a seqüência dada é 2, e um limitante inferior é 0. Assim sendo, a seqüência é limitada.

A seqüência $\{2^n/n!\}$ é, então, uma seqüência monótona limitada e, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

O Teorema 12.2.6 estabelece que uma condição suficiente para uma seqüência monótona ser convergente é que ela seja limitada. Esta também é uma condição necessária e será dada no teorema a seguir.

12.2.9 TEOREMA Uma seqüência monótona convergente é limitada.

Prova Vamos demonstrar o teorema para o caso das seqüências monótonas crescentes. Seja $\{a_n\}$ a seqüência.

Para provar que $\{a_n\}$ é limitada, é preciso mostrar que ela tem um limitante inferior e um limitante superior. Como $\{a_n\}$ é uma seqüência crescente, seu primeiro elemento serve como um limitante inferior. Precisamos agora encontrar um limitante superior.

Como $\{a_n\}$ é convergente, a seqüência tem um limite; seja L esse limite. Então, $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$ e, pela Definição 12.1.2, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for um inteiro e

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |a_n - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } n > N \quad \text{então} \quad -\epsilon < a_n - L < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } n > N \quad \text{então} \quad L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

Como $\{a_n\}$ é crescente, segue dessa afirmação que

$$a_n < L + \epsilon \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Logo, $L + \epsilon$ servirá com um limitante superior para a seqüência $\{a_n\}$.

Para provar o teorema quando $\{a_n\}$ for uma seqüência decrescente, basta proceder como foi sugerido na demonstração do Teorema 12.2.6: considere a seqüência $\{-a_n\}$, que é crescente, e aplique os resultados acima. Você deverá fazer tal demonstração no Exercício 18. ■

EXERCÍCIOS 12.2

Nos Exercícios de 1 a 16, determine se a seqüência dada é crescente, decrescente ou não-monótona.

1. $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{2n-1}{4n-1}\right\}$
3. $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$
4. $\{\operatorname{sen} n\pi\}$
5. $\{\cos \frac{1}{3}n\pi\}$
6. $\left\{\dfrac{n^3-1}{n}\right\}$
7. $\left\{\dfrac{1}{n+\operatorname{sen} n^2}\right\}$
8. $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}$
9. $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$
10. $\left\{\dfrac{(2n)!}{5^n}\right\}$
11. $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$
12. $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$
13. $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$
14. $\{n^2 + (-1)^n n\}$
15. $\left\{\dfrac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right\}$
16. $\left\{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}\right\}$
17. Use o fato de que o Teorema 12.2.6 é válido para uma seqüência crescente, para provar que o teorema também é válido quando $\{a_n\}$ for uma seqüência decrescente. (*Sugestão*: considere a seqüência $\{-a_n\}$.)
18. Prove o Teorema 12.2.9 quando $\{a_n\}$ for uma seqüência decrescente, usando um método similar ao que foi usado no Exercício 17.

Nos Exercícios 19 e 20, determine se a seqüência dada é limitada.

19. $\left\{\dfrac{n^2+3}{n+1}\right\}$
20. $\{3 - (-1)^{n-1}\}$

Nos Exercícios de 21 a 30, prove que a seqüência dada é convergente, usando o Teorema 12.2.6.

21. A seqüência do Exercício 1. **22.** $\left\{\dfrac{n}{3^{n+1}}\right\}$

23. $\left\{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right\}$ **24.** A seqüência do Exercício 8.

25. A seqüência do Exercício 9.

26. A seqüência do Exercício 12.

27. A seqüência do Exercício 15.

28. A seqüência do Exercício 16.

29. $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ **30.** $\{k^{1/n}\}, k > 1$

31. Dê exemplo de uma seqüência que seja limitada e convergente, porém não-monótona.

32. Dada a seqüência $\{a_n\}$, onde $a_n > 0$ para todo n e $a_{n+1} < ka_n$ com $0 < k < 1$. Prove que $\{a_n\}$ é convergente.

12.3 SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES

Uma parte importante no estudo do Cálculo envolve a representação de funções como "somas infinitas". Isso requer que a operação usual de adição em conjuntos finitos de números seja estendida para conjuntos infinitos. Para tanto, usamos um processo de limite através de seqüências.

Associemos à seqüência

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

uma "soma infinita" denotada por

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Mas, qual o significado de tal expressão? Isto é, o que queremos denotar com a "soma" de um número infinito de termos e em quais circunstâncias essa soma existe? Para termos uma idéia intuitiva do conceito dessa soma, consideremos um pedaço de fio com 2 m de comprimento e suponhamos que ele seja cortado ao meio. Uma das partes é deixada de lado, enquanto que a outra é novamente dividida ao meio. Um dos pedaços com 1/2 m de comprimento é posto de lado, enquanto que o outro é cortado ao meio, e então obtemos dois pedaços com 1/4 m de comprimento cada um. Tomando apenas um deles e dividindo-o ao meio, obtemos dois pedaços com 1/8 m de comprimento. Novamente, cortamos um dos pedaços ao meio. Se esse procedimento continuar indefinidamente, o número de metros na soma dos comprimentos dos pedaços separados pode ser considerado como a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{1}$$

Como começamos com um pedaço de fio com 2 m de comprimento, nossa intuição indica que a soma infinita (1) deve ser 2. Na Ilustração 2 demonstraremos que é realmente o que ocorre. No entanto, precisamos primeiro de algumas definições preliminares.

Da seqüência

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

vamos formar uma nova seqüência $\{s_n\}$, adicionando os sucessivos elementos de $\{u_n\}$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_1 \\
s_2 &= u_1 + u_2 \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
s_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
&\vdots \\
s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n
\end{aligned}$$

A seqüência $\{s_n\}$ obtida dessa maneira da seqüência $\{u_n\}$ é chamada de *série infinita*.

12.3.1 DEFINIÇÃO Se $\{u_n\}$ for uma seqüência e

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

então a seqüência $\{s_n\}$ será chamada de **série infinita**, a qual é denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Os números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ são chamados de **termos** da série infinita. Os números $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ são chamados de **somas parciais** da série infinita.

Observe que a Definição 12.3.1 estabelece que uma série infinita é uma seqüência de somas parciais.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a seqüência $\{u_n\}$, onde $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

A partir dela, vamos formar uma seqüência de somas parciais:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 & & & s_1 &= 1\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} & &\Leftrightarrow & s_2 &= \frac{3}{2}\\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & &\Leftrightarrow & s_3 &= \frac{7}{4}\\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & &\Leftrightarrow & s_4 &= \frac{15}{8}\\
s_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & &\Leftrightarrow & s_5 &= \frac{31}{16}\\
&\vdots\\
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Essa seqüência de somas parciais $\{s_n\}$ é a série infinita denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Observe que essa é a soma infinita (1) obtida no começo desta secção, na discussão sobre o corte de um fio de 2 m de comprimento. Ela é exemplo de uma *série geométrica* a ser estudada posteriormente nesta secção. ◀

Quando $\{s_n\}$ é uma seqüência de somas parciais,

$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

Assim,

$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

Usaremos essa fórmula no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Dada a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(a) determine os quatro primeiros elementos da seqüência das somas parciais $\{s_n\}$, e
(b) determine a fórmula para s_n em termos de n.

Solução

(a) Como $s_n = s_{n-1} + u_n$

$$s_1 = u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \tfrac{1}{2} \qquad s_2 = s_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \tfrac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \tfrac{3}{4} \qquad s_4 = s_3 + u_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \tfrac{4}{5}$$

(b) Como $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ temos, por frações parciais,

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Logo,

$$u_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \qquad u_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \qquad u_3 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$

$$\cdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Assim, como $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Eliminando os parênteses e combinando os termos, obtemos

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

Tomando n igual a 1, 2, 3 e 4, vemos que os resultados estão de acordo.

O método de resolução do exemplo acima aplica-se somente a casos particulares. Em geral, não é possível obter tal expressão para s_n.

Vamos definir agora a *soma* de uma série infinita.

12.3.2 DEFINIÇÃO Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma dada série infinita, e seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais que definem a série. Então, se $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existir e for igual a S, dizemos que a série dada será **convergente**, sendo S a **soma** da série infinita dada. Se $\lim_{n \to +\infty} s_n$ não existir, a série será **divergente** e não terá uma soma.

Essencialmente, a Definição 12.3.2 estabelece que uma série infinita será convergente se e somente se a seqüência das somas parciais correspondentes for convergente.

Se uma série infinita tiver uma soma S, dizemos também que a série convergirá para S.

Observe que a soma de uma série convergente é o limite de uma seqüência de somas parciais e não é obtida pela adição ordinária. Para uma série convergente o símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é usado, denotando ambas a série e a soma da série. O uso do mesmo símbolo não deve causar confusão, pois a interpretação correta fica clara a partir do contexto em que ele for empregado.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A série infinita da Ilustração 1 é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{2}$$

e a seqüência das somas parciais é $\{s_n\}$, onde

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{3}$$

Para determinar se a série infinita (2) tem uma soma, precisamos calcular $\lim_{n \to +\infty} s_n$. Em primeiro lugar, encontramos uma fórmula para s_n. Da Álgebra, temos a identidade:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Aplicando essa fórmula com $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, temos

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

Comparando essa equação com (3), obtemos

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Como $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ temos

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$$

Assim sendo, a série infinita (2) tem por soma 2. ◀

EXEMPLO 2 Determine se a série infinita do Exemplo 1 tem uma soma.

Solução Na resolução do Exemplo 1 foi mostrado que a seqüência das somas parciais para a série dada é $\{s_n\} = \{n/(n + 1)\}$. Logo

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} s_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Assim sendo, a série infinita tem uma soma igual a 1, e escrevemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \\ &= 1\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Determine a série infinita que tem a seguinte seqüência de somas parciais:

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

Também determine se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, obtenha a sua soma.

Solução Como $s_1 = \frac{1}{2}$, então $u_1 = \frac{1}{2}$. Se $n > 1$,

$$\begin{aligned}u_n &= s_n - s_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Logo, a série infinita é

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Já que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$= 0$$

a série é convergente e sua soma é 0.

Como já foi mencionado acima, na maioria dos casos não é possível obter uma expressão para s_n em termos de n; assim sendo, precisamos de outros métodos para determinar se uma dada série infinita tem uma soma ou, equivalentemente, se uma dada série é convergente ou divergente.

12.3.3 TEOREMA Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for convergente, então $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Prova Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais para a série dada, e seja S a soma da série. Da Definição 12.3.2, $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |S - s_n| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Também

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |S - s_{n+1}| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= |s_{n+1} - s_n| \\ &= |S - s_n + s_{n+1} - S| \\ &\leqslant |S - s_n| + |s_{n+1} - S| \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad |u_{n+1}| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

■

O Teorema 12.3.3 fornece um teste simples para divergência, pois se $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

EXEMPLO 4 Prove que as duas séries seguintes são divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \ldots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} 3 = 3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$

Solução

(a) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1}$$
$$= 1$$
$$\neq 0$$

Portanto, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente.

(b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\,3$, que não existe. Logo, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente.

O inverso do Teorema 12.3.3 é falso. Isto é, se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, então não é necessariamente verdadeiro que a série seja convergente. Em outras palavras, é possível ter uma série divergente para a qual $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Um exemplo disso é a chamada **série harmônica**, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{4}$$

Obviamente, $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$. Na ilustração 3 provaremos que a série harmônica diverge, fazendo uso do teorema que estabelece o seguinte: a diferença entre duas somas parciais, s_R e s_T, de uma série convergente pode se tornar tão pequena quanto desejarmos, tomando R e T suficientemente grandes.

12.3.4 TEOREMA Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais de uma dada série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um número N tal que

se $R > N$ e $T > N$ então $|s_R - s_T| < \epsilon$

Prova Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, seja S a sua soma. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que se $n > N$, então $|S - s_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Logo, se $R > N$ e $T > N$,

$$|s_R - s_T| = |s_R - S + S - s_T| \leqslant |s_R - S| + |S - s_T| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Portanto,

se $R > N$ e $T > N$, então $|s_R - s_T| < \epsilon$ ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos provar que a série harmônica (4) é divergente. Para essa série,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

e

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Logo,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} \tag{5}$$

Se $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Há n termos em cada lado do sinal de desigualdade; assim, o lado direito é $n(1/2n) = \frac{1}{2}$. Logo, de (5) e da desigualdade acima,

$$\text{se } n > 1, \text{ então } \quad s_{2n} - s_n > \tfrac{1}{2} \tag{6}$$

Mas o Teorema 12.3.4 estabelece que se a série dada for convergente, $s_{2n} - s_n$ poderá se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando n suficientemente grande; isto é, se $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe um N tal que

$$\text{se } 2n > N \text{ e } n > N, \text{ então } \quad s_{2n} - s_n < \tfrac{1}{2}$$

Mas isso contradiz (6). Logo, a série harmônica é divergente, muito embora $\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$. ◀

Uma **série geométrica** é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

A série infinita (2), discutida nas Ilustrações 1 e 2, é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$. A n-ésima soma parcial da série geométrica acima é dada por

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \tag{7}$$

Da identidade

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

podemos escrever (7) como

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{se } r \neq 1 \tag{8}$$

12.3.5 TEOREMA A série geométrica converge para a soma $a/(1 - r)$ se $|r| < 1$ e a série geométrica diverge se $|r| \geqslant 1$.

Prova No Exemplo 3, Secção 12.1, mostramos que $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$. Logo, de (8), podemos concluir que se $|r| < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$$

Assim sendo, se $|r| < 1$, a série geométrica converge e sua soma é $a/(1 - r)$.

Se $r = 1$, $s_n = na$. Então, $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, se $a > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$ se $a < 0$.

Se $r = -1$, então a série geométrica torna-se

$$a - a + a - \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$$

Assim, $s_n = 0$, se n for par, e $s_n = a$, se n for ímpar. Logo, $\lim_{n \to +\infty} s_n$ não existe. Então, a série geométrica diverge quando $|r| = 1$.

Se $|r| > 1$, $\lim_{n \to +\infty} ar^{n-1} = a \lim_{n \to +\infty} r^{n-1}$. É claro que $\lim_{n \to +\infty} r^{n-1} \neq 0$ pois $|r^{n-1}|$ pode se tornar tão grande quanto desejarmos, tomando n suficientemente grande. Logo, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente. Isso completa a demonstração. ■

O exemplo a seguir ilustra de que modo o Teorema 12.3.5 pode ser usado para expressar uma dízima periódica como uma fração comum.

EXEMPLO 5 Expresse a dízima periódica 0,3333 ... como uma fração comum.

Solução

$$0{,}3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

Essa é uma série geométrica na qual $a = \frac{3}{10}$ e $r = \frac{1}{10}$. Como $|r| < 1$, do Teorema 12.3.5 segue que a série converge e sua soma é $a/(1 - r)$. Então,

$$0{,}3333\ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

EXERCÍCIOS 12.3

Nos Exercícios de 1 a 8, encontre os quatro primeiros elementos da seqüência de somas parciais $\{s_n\}$, e obtenha uma fórmula para s_n em termos de n. Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, encontre a sua soma.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} n$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

Nos Exercícios de 9 a 13, encontre a série infinita que produz a seqüência de somas parciais dada. Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, encontre a sua soma.

9. $\{s_n\} = \left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}$
10. $\{s_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$
11. $\{s_n\} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$
12. $\{s_n\} = \{3^n\}$
13. $\{s_n\} = \{\ln(2n+1)\}$

Nos Exercícios de 14 a 26, escreva os quatro primeiros termos da série infinita dada e determine se ela é convergente ou divergente. Se for convergente, obtenha a sua soma.

14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 + (-1)^n]$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1}$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{6}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} n}{n}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \pi n$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \pi n$

Nos Exercícios de 27 a 30, expresse a dízima periódica decimal como uma fração ordinária.

27. 0,272727 ... **28.** 2,045454 5 ...
29. 1,234234234 ... **30.** 0,465346534653 ...

31. A trajetória de cada oscilação de um pêndulo é 0,93 do comprimento da trajetória da oscilação anterior (de um lado até o outro). Se a trajetória da primeira oscilação mede 56 cm de comprimento e se a resistência do ar leva o pêndulo ao repouso, quanto mede o caminho percorrido pelo pêndulo até que ele pare?

32. Uma bola cai de uma altura de 12 m. Cada vez que ela bate no chão, sobe a uma altura de três quartos da altura da queda anterior. Determine a distância percorrida pela bola até o repouso.

33. Qual a distância total percorrida por uma bola de tênis até o repouso, se ela cai de uma altura de 100 m e se após cada queda ela rebate no chão e volta a uma distância de 11/20 da altura anterior?

34. Um triângulo equilátero tem lados medindo 4 unidades de comprimento. Portanto, o seu perímetro é 12 unidades. Outro triângulo equilátero é construído com segmentos de reta traçados através dos pontos médios dos lados do primeiro triângulo. Esse triângulo tem lados medindo 2 unidades de comprimento e seu perímetro é de 6 unidades. Se o procedimento puder ser repetido um número ilimitado de vezes, qual será o perímetro total de todos os triângulos formados?

35. Após tirar os pés dos pedais, a roda da frente de uma bicicleta gira 200 vezes durante os 10 primeiros segundos e em cada um dos 10 s seguintes ela gira 4/5 do que girou no período anterior. Determine o número de voltas da roda até que a bicicleta pare.

36. Determine uma série geométrica infinita cuja soma é 6 e tal que cada termo seja quatro vezes a soma de todos os termos que o sucedem.

12.4 QUATRO TEOREMAS SOBRE SÉRIES INFINITAS

O primeiro teorema desta secção estabelece que o caráter convergente ou divergente de uma série infinita não é afetado quando se muda um número finito de termos.

12.4.1 TEOREMA Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries infinitas que diferem somente pelo seus m primeiros termos (isto é, $a_k = b_k$ se $k > m$), então ambas convergem ou ambas divergem.

Prova Sejam $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ as seqüências das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Então,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

e

$$t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n$$

Como $a_k = b_k$ se $k > m$, então se $n \geqslant m$,

$$s_n - t_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$$

Assim sendo,

$$\text{se } n \geqslant m, \text{ então } s_n - t_n = s_m - t_m \tag{1}$$

Queremos provar que ambos os limites $\lim_{n \to +\infty} s_n$ e $\lim_{n \to +\infty} t_n$ existem ou ambos não existem.

Vamos supor que $\lim_{n \to +\infty} t_n$ exista. Então, de (1),

$$\text{se } n \geqslant m, \text{ então } s_n = t_n + (s_m - t_m)$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} t_n + (s_m - t_m)$$

Logo, quando $\lim_{n \to +\infty} t_n$ existe, $\lim_{n \to +\infty} s_n$ também existe e ambas as séries convergem.

Vamos supor agora que $\lim_{n \to +\infty} t_n$ não exista, enquanto que $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe. De (1), se $n \geqslant m$, então $t_n = s_n + (t_m - s_m)$

Como $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe, segue que

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} s_n + (t_m - s_m)$$

e, portanto, $\lim_{n \to +\infty} t_n$ deve existir, o que é uma contradição. Logo, se $\lim_{n \to +\infty} t_n$ não existir, também $\lim_{n \to +\infty} s_n$ não existirá e ambas as séries divergirão. ■

EXEMPLO 1 Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+4}$$

Solução A série dada é

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n+4} + \ldots$$

que pode ser escrita como

$$0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{2}$$

Mas, sabemos que a série harmônica é divergente, e

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

A série (2) difere da série harmônica somente nos quatro primeiros termos. Logo, pelo Teorema 12.4.1, a série (2) também é divergente.

EXEMPLO 2 Determine se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\cos \frac{3}{n}\pi + 2\right]\!\right]}{3^n}$$

Solução A série dada pode ser escrita como

$$\frac{[\![\cos 3\pi + 2]\!]}{3} + \frac{[\![\cos \frac{3}{2}\pi + 2]\!]}{3^2} + \frac{[\![\cos \pi + 2]\!]}{3^3} + \frac{[\![\cos \frac{3}{4}\pi + 2]\!]}{3^4}$$
$$+ \frac{[\![\cos \frac{3}{5}\pi + 2]\!]}{3^5} + \frac{[\![\cos \frac{1}{2}\pi + 2]\!]}{3^6} + \frac{[\![\cos \frac{3}{7}\pi + 2]\!]}{3^7} + \ldots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots \tag{3}$$

Consideremos a série geométrica com $a = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{1}{3}$:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \ldots \tag{4}$$

Essa é uma série convergente, pelo Teorema 12.3.5. Como a série (3) difere da série (4) somente pelos cinco primeiros termos, segue do Teorema 12.4.1 que a série (3) também é convergente.

Como conseqüência do Teorema 12.4.1, para uma dada série infinita, podemos adicionar ou subtrair um número finito de termos, sem afetar seu caráter convergente ou divergente. Por exemplo, no Exemplo 1, a série dada pode ser considerada como a série harmônica da qual foram subtraídos os quatro primeiros termos. Como a série harmônica é divergente, a série dada também será divergente. No Exemplo 2 poderíamos considerar a série geométrica convergente

$$\frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \tag{5}$$

e obter a série dada (3), somando cinco termos. Como a série (5) é convergente, segue que a série (3) também é convergente.

O teorema seguinte estabelece que se uma série infinita for multiplicada termo a termo por uma constante não-nula, seu caráter convergente ou divergente não será afetado.

12.4.2 TEOREMA Seja c uma constante não-nula.

(i) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for convergente e sua soma for S, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ também será convergente e sua soma será $c \cdot S$.

(ii) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ também será divergente.

Prova Seja s_n a n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Então, $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. A n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ é $c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cs_n$.

Prova de (i) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for convergente, então existe o $\lim_{n \to +\infty} s_n$ e será S. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} cs_n &= c \lim_{n \to +\infty} s_n \\ &= c \cdot S \end{aligned}$$

Assim sendo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ é convergente e sua soma é $c \cdot S$.

Prova de (ii) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for divergente, então não existirá $\lim_{n \to +\infty} s_n$. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ seja convergente. Então $\lim_{n \to +\infty} cs_n$ existe. Como $s_n = cs_n/c$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} s_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{c}(cs_n) \\ &= \frac{1}{c} \lim_{n \to +\infty} cs_n \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{n \to +\infty} s_n$ deve existir, o que é uma contradição. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ é divergente. ■

EXEMPLO 3 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$$

Solução

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4n} + \ldots$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica que é divergente, então, pelo Teorema 12.4.2(ii) com $c = \frac{1}{4}$, a série dada é divergente.

O Teorema 12.4.2(i) é uma extensão para séries infinitas convergentes da seguinte propriedade de somas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Outra propriedade de somas finitas é

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

e sua aplicação a séries infinitas convergentes é dada pelo teorema a seguir.

12.4.3 TEOREMA Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries infinitas convergentes com somas S e R, respectivamente, então

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $S + R$;

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $S - R$.

A demonstração desse teorema é deixada como exercício (veja o Exercício 24).

O próximo teorema é um corolário do teorema anterior, sendo usado algumas vezes para provar a divergência de uma série.

12.4.4 TEOREMA Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ será divergente.

Prova Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ seja convergente e que sua soma seja S. Seja R a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Então, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + b_n) - a_n]$$

segue, do Teorema 12.4.3(ii), que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e que sua soma é $S - R$. Mas isso contradiz a hipótese de que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é divergente. ■

EXEMPLO 4 Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n}\right)$$

Solução No Exemplo 3 ficou provado que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ é divergente. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ é uma série geométrica com $|r| = \frac{1}{4} < 1$, ela é convergente. Assim, pelo Teorema 12.4.4, a série dada é divergente.

Se ambas as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem divergentes, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ poderá ou não ser convergente. Por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, então $a_n + b_n = \frac{2}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ será divergente. Mas, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = -\frac{1}{n}$, então $a_n + b_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ será convergente.

EXERCÍCIOS 12.4

Nos Exercícios de 1 a 22, determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, ache a sua soma.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$
2. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3n}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\operatorname{sen}\frac{4}{n}\pi + 3\right]\!\right]}{4^n}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right]\!\right]}{2^n}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n}\right)$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3n}\right)$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} + e^n)$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + 3^n)$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right)$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n}\right)$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right)$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4^n} + \frac{4}{5^n}\right)$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right)$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$
23. Dê um exemplo para mostrar que mesmo sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentes, é possível que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ seja convergente.
24. Prove o Teorema 12.4.3.

12.5 SÉRIES INFINITAS DE TERMOS POSITIVOS

Se todos os termos de uma série infinita forem positivos, a seqüência das somas parciais será crescente. Assim sendo, dos Teoremas 12.2.6 e 12.2.9, segue imediatamente o teorema a seguir.

12.5.1 TEOREMA Uma série infinita de termos positivos será convergente se e somente se sua seqüência de somas parciais tiver um limitante superior.

Prova Para uma série infinita de termos positivos, a seqüência das somas parciais tem um limitante inferior de 0. Se a seqüência das somas parciais também tiver um limitante superior, então ela será limitada. Além disso, a seqüência das somas parciais de uma série infinita de termos positivos é crescente. Segue, então, do Teorema 12.2.6, que a seqüência das somas parciais é convergente e, portanto, a série infinita é convergente.

Vamos supor agora que uma série infinita de termos positivos seja convergente. Então, a seqüência das somas parciais também será convergente. Segue, do Teorema 12.2.9, que a seqüência das somas parciais será limitada e, assim sendo, terá um limitante superior. ■

EXEMPLO 1 Prove que a série é convergente, usando o Teorema 12.5.1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Solução Precisamos encontrar um limitante superior para a seqüência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}, s_3 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\vdots$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \tag{1}$$

Consideremos agora os n primeiros termos da série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2}$$

Pelo Teorema 12.3.5, a série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$ tem a soma $a/(1 - r) = 2$. Assim sendo, a soma (2) é menor do que 2. Observe que cada termo da soma (1) é menor ou igual ao termo correspondente da soma (2), isto é,

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

Isso é verdade, pois $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, que além do fator 1 contém $k - 1$ fatores, cada um maior ou igual a 2. Logo,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2$$

Segue que s_n tem um limitante superior de 2. Assim sendo, pelo Teorema 12.5.1 a série dada é convergente.

No exemplo acima, os termos da série dada foram comparados com os de uma série que sabemos ser convergente. Esse é um caso particular do teorema a seguir, conhecido como o *teste de comparação*.

12.5.2 TEOREMA
Teste de Comparação

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos.

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ for uma série de termos positivos que sabemos ser convergentes e se $u_n \leqslant v_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty}$ será convergente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ for uma série de termos positivos que sabemos ser divergentes e se $u_n \geqslant w_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ será divergente.

Prova de (i) Seja $\{s_n\}$ a seqüência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\{t_n\}$ a seqüência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é uma série convergente de termos positivos, segue do Teorema 12.5.1 que a seqüência $\{t_n\}$ tem um limitante superior, o qual chamaremos de B. Como $u_n \leqslant v^n$ para todo n inteiro positivo, podemos concluir que $s_n \leqslant t_n \leqslant B$ para todo n inteiro positivo. Logo, B é um limitante superior da seqüência $\{s_n\}$. Como os termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ são todos positivos, segue do Teorema 12.5.1 que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Prova de (ii) Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ seja convergente. Então, como ambas $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ são séries infinitas de termos positivos e $w_n \leqslant u_n$ para todo n inteiro positivo, segue da parte (i) que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ é convergente. Porém, isso contradiz a a hipótese; logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. ■

Como aprendemos na Secção 12.4, o caráter convergente ou divergente de uma série infinita não se altera quando descartamos um número finito de termos. Assim sendo, quando estivermos aplicando o teste de comparação, se $u_i \leqslant v_i$ ou $u_i \geqslant w_i$ para $i > m$, o teste será válido para qualquer escolha dos m primeiros termos das duas séries a serem comparados.

EXEMPLO 2 Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$$

Solução A série dada é

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + \ldots + \frac{4}{3^n + 1} + \ldots$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \ldots + \frac{4}{3^n} + \ldots \qquad r = \tfrac{1}{3} < 1$$

temos

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n}$$

para todo n inteiro positivo. Assim sendo, pelo teste de comparação, Teorema 12.5.2(i), a série dada é convergente.

EXEMPLO 3 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solução A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série harmônica divergente, temos

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Assim sendo, pelo Teorema 12.5.2(ii) a série dada é divergente.

O teorema a seguir, conhecido como *teste de comparação com limite*, é conseqüência do Teorema 12.5.2, e sua aplicação é, em muitos casos, mais fácil.

12.5.3 TEOREMA
Teste de Comparação com Limite

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ duas séries de termos positivos.

(i) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$, então ambas as séries convergem, ou ambas divergem.

(ii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

(iii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

Prova de (i) Como $\lim_{n \to +\infty} (u_n/v_n) = c$, segue que existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{u_n}{v_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } n > N \quad \text{então} \quad -\frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} - c < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } n > N \quad \text{então} \quad \frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3c}{2} \tag{3}$$

Do segundo membro da desigualdade (3),

$$u_n < \tfrac{3}{2}cv_n \tag{4}$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2}cv_n$ também o será. Segue, da desigualdade (4) e do teste de comparação, que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Do primeiro membro da desigualdade (3),

$$v_n < \frac{2}{c} u_n \tag{5}$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{c} u_n$ também o será. Da desigualdade (5) e do teste de comparação, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ for divergente, podemos mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ será divergente por contradição, supondo $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ convergente e aplicando o teste de comparação e a desigualdade (5).

Da mesma forma, se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for divergente, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente, pois obtemos uma contradição da desigualdade (4) e do teste de comparação, supondo que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ seja convergente.

Provamos, até agora, a parte (i). As demonstrações das partes (ii) e (iii) serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 30 e 31). ■

Uma advertência deve ser feita com respeito à parte (ii) do Teorema 12.5.3. Observe que se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, a divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *não* implica a divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

EXEMPLO 4 Resolva o Exemplo 2, usando o teste de comparação com limite.

Solução Seja u_n o n-ésimo termo da série dada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$ e seja v_n o n-ésimo termo da série geométrica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{4}{3^n + 1}}{\dfrac{4}{3^n}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + 3^{-n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Assim sendo, pela parte (i) do teste de comparação com limite, segue que a série dada é convergente.

EXEMPLO 5 Resolva o Exemplo 3, usando o teste de comparação com limite.

Solução Seja u_n o n-ésimo termo da série dada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ e seja v_n o n-ésimo termo da série harmônica divergente. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Assim, pela parte (iii) do teste de comparação com limite, segue que a série dada é divergente.

EXEMPLO 6 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Solução No Exemplo 1 provamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Pelo teste de comparação com limite, aplicado a $u_n = \frac{n^3}{n!}$ e $v_n = \frac{1}{n!}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^3 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

A parte (iii) do teste de comparação com limite não é aplicável, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge. Há, contudo, uma maneira de usar o teste. A série dada pode ser escrita como

$$\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \ldots + \frac{n^3}{n!} + \ldots$$

Uma vez que o Teorema 12.4.1 nos permite subtrair um número finito de termos sem alterar o comportamento (convergência ou divergência) de uma série, descartaremos os três primeiros termos, obtendo

$$\frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \frac{6^3}{6!} + \ldots + \frac{(n+3)^3}{(n+3)!} + \ldots$$

Seja agora $u_n = \dfrac{(n+3)^3}{(n+3)!}$ e, como anteriormente, seja $v_n = \dfrac{1}{n!}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\dfrac{1}{n!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{(n+3)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{n!(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+6n+9}{n^2+3n+2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Logo, segue, da parte (i) do teste de comparação com limite, que a série dada é convergente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{6}$$

que converge para 2, conforme foi mostrado na Ilustração 2 da Secção 12.3. Reagrupando os termos da série, obteremos

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}\right) + \ldots$$

que é a série

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2 \cdot 4^{n-1}} + \ldots \tag{7}$$

A série (7) é a série geométrica com $a = \frac{3}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$. Dessa forma, pelo Teorema 12.3.5, ela é convergente, com soma

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1-r} &= \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Portanto, a série (7), obtida da série convergente (6), através do reagrupamento dos termos, também é convergente. A soma da série (7) é a mesma que a da série (6). ◀

A Ilustração 1 é um caso particular do teorema a seguir.

12.5.4 TEOREMA Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for uma série convergente de termos positivos, seus termos poderão ser agrupados de qualquer maneira, e a série resultante continuará convergente e com a mesma soma que a série original.

Prova Seja $\{s_n\}$ a seqüência de somas parciais da série convergente de termos positivos. Então, o $\lim_{n \to +\infty} s_n$ existe; seja S esse limite. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ cujos termos foram obtidos agrupando-se os termos de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de alguma forma. Por exemplo, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ pode ser a série

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}) + \ldots$$

ou a série

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \ldots$$

e assim por diante. Seja $\{t_m\}$ a seqüência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Cada soma parcial da seqüência $\{t_m\}$ é também uma soma parcial da seqüência $\{s_n\}$. Logo, quando m cresce sem limitação, o mesmo acontece com n. Como $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$, concluímos que $\lim_{m \to +\infty} t_m = S$, o que prova o teorema. ■

O Teorema 12.5.4 e o próximo teorema estabelecem propriedades da soma de uma série convergente de termos positivos que são similares às propriedades válidas para a soma de um número finito de termos.

12.5.5 TEOREMA Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for uma série convergente de termos positivos, a ordem dos termos pode ser rearranjada, e a série resultante será também convergente e terá a mesma soma que a série dada.

Prova Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais de uma dada série convergente de termos positivos, e seja $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$. Seja ainda $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ a série formada ao se rearranjar a ordem dos termos de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Por exemplo, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ pode ser a série

$$u_4 + u_3 + u_7 + u_1 + u_9 + u_5 + \ldots$$

Seja $\{t_n\}$ a seqüência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Cada soma parcial da seqüência $\{t_n\}$ será menor que S, pois é a soma de n termos da série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Assim sendo, S é um limitante superior da seqüência $\{t_n\}$. Além disso, como todos os termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são positivos, $\{t_n\}$ é uma seqüência mo-

nótona crescente. Logo, pelo Teorema 12.2.7, a seqüência $\{t_n\}$ é convergente e $\lim_{n \to +\infty} t_n = T \leqslant S$. Agora, como a série dada $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pode ser obtida da série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ ao rearranjarmos a ordem dos termos, podemos usar o mesmo argumento e concluir que $S \leqslant T$. Como ambas as desigualdades, $T \leqslant S$ e $S \leqslant T$, devem ser válidas, segue que $S = T$, o que demonstra o teorema. ■

Uma série freqüentemente usada no teste de comparação é aquela conhecida como **série *p*** ou **série hiper-harmônica**. Ela é

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad \text{onde } p \text{ é uma constante} \tag{8}$$

Na ilustração a seguir vamos provar que a série p diverge se $p \leqslant 1$ e converge se $p > 1$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $p = 1$, a série p é a série harmônica a qual diverge. Se $p < 1$, então $n^p \leqslant n$; assim,

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Logo, pelo Teorema 12.5.2(ii), a série p é divergente, se $p < 1$.

Se $p > 1$, vamos agrupar os termos da seguinte forma:

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots \tag{9}$$

Consideremos a série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \ldots \tag{10}$$

Trata-se de uma série geométrica cuja razão é $2/2^p = 1/2^{p-1}$, que é um número positivo menor do que 1. Assim sendo, a série (10) é convergente. Vamos reescrever os termos da série (10) para obter

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots \tag{11}$$

Comparando as séries (9) e (11) vemos que o grupo de termos em cada conjunto entre parênteses, após o primeiro grupo, tem soma menor em (9) do que em (11). Logo, pelo teste de comparação, a série (9) é convergente. Como (9) é um mero reagrupamento da série p quando $p > 1$, segue, do Teorema 12.5.4, que a série p é convergente, se $p > 1$. ◀

Observe que a série do Exemplo 3 é uma série p com $p = \frac{1}{2} < 1$ e, portanto, é divergente.

EXEMPLO 7 Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$$

Solução Como para valores elevados de n, o número $n^2 + 2$ está próximo do número n^2, então o número $1/(n^2 + 2)^{1/3}$ está próximo do número $1/n^{2/3}$. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é divergente, pois é uma série p com $p = \frac{2}{3} < 1$. Aplicando o teste de comparação com limite a $u_n = \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$ e $v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}}{\dfrac{1}{n^{2/3}}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2 + 2)^{1/3}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 2}\right)^{1/3} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{2}{n^2}}\right)^{1/3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Logo, a série dada é divergente.

EXERCÍCIOS 12.5

Nos Exercícios de 1 a 26, determine se a série dada é convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{cosec} n|}{n}$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$
27. Use a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ para mostrar que o Teorema 12.5.1 não se aplica a uma série infinita de termos positivos e negativos; isto é, mostre que a seqüência das somas parciais tem um limitante superior, mas a série não é convergente.
28. Suponha que f seja uma função tal que $f(n) > 0$, para todo n inteiro positivo. Além disso, suponha que se p for um número positivo qualquer, $\lim_{n \to +\infty} n^p f(n)$ existirá e será positivo. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente se $p > 1$, e divergente se $0 < p \leqslant 1$.
29. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries convergentes de termos positivos, use o teste de comparação com limite para provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ também é convergente.
30. Prove o Teorema 12.5.3(ii).
31. Prove o Teorema 12.5.3(iii).

12.6 O TESTE DA INTEGRAL

O teorema conhecido como o *teste da integral* faz uso da teoria das integrais impróprias para testar a convergência de uma série de termos positivos.

12.6.1 TEOREMA
O Teste da Integral

Seja f uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geqslant 1$. Então, a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots f(n) + \ldots$$

será convergente se a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

existir e será divergente se $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx = +\infty$.

Prova Se i é um inteiro positivo e $i \geqslant 2$, então, pelo teorema do valor médio para integrais (5.7.1), existe um número X tal que $i - 1 \leqslant X \leqslant i$ e

$$\int_{i-1}^{i} f(x)\,dx = f(X) \cdot 1 \tag{1}$$

Como f é uma função decrescente,

$$f(i-1) \geqslant f(X) \geqslant f(i)$$

e assim de (1),

$$f(i-1) \geqslant \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx \geqslant f(i)$$

Logo, se n for um número inteiro positivo e $n \geqslant 2$,

$$\sum_{i=2}^{n} f(i-1) \geqslant \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx \geqslant \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geqslant \int_1^n f(x)\,dx \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1) \tag{2}$$

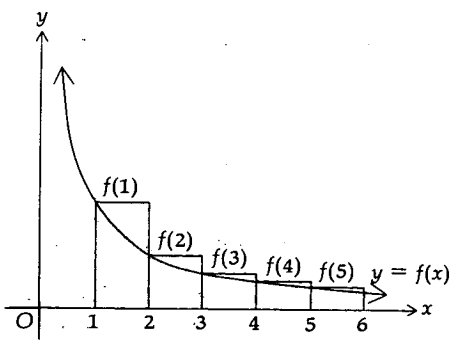


FIGURA 1

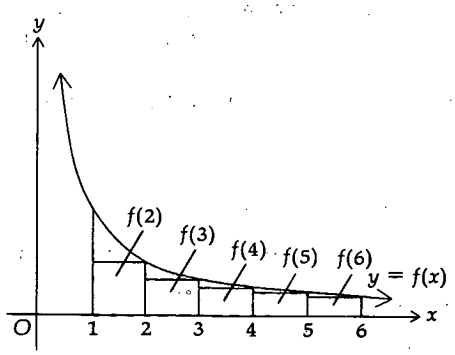


FIGURA 2

As Figuras 1 e 2 mostram a interpretação geométrica da argumentação acima, para $n = 6$. Na Figura 1 há um esboço do gráfico da função f satisfazendo as hipóteses. A soma das medidas das áreas dos retângulos sombreados é $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$, precisamente o primeiro membro da desigualdade (2) quando $n = 6$. Obviamente, a soma das medidas das áreas desses retângulos é maior do que a medida da área dada pela integral definida quando $n = 6$. Na Figura 2 a soma das medidas das áreas dos retângulos sombreados é $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$, precisamente o terceiro membro da desigualdade (2), quando $n = 6$. Essa soma é menor do que o valor da integral definida, quando $n = 6$.

Se a integral imprópria existe, seja L o seu valor. Então,

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant L \tag{3}$$

Do segundo e terceiro membros da desigualdade (2) e de (3),

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leqslant f(1) + L \tag{4}$$

Consideremos agora a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$. Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais dessa série, onde $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(i)$. De (4), $\{s_n\}$ tem um limitante superior $f(1) + L$. Logo, pelo Teorema 12.5.1, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente.

Suponha que $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx = +\infty$. De (2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

para todo n inteiro positivo. Segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} s_n &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é divergente. ■

EXEMPLO 1 Use o teste da integral para mostrar que a série p diverge se $p \leqslant 1$ e converge se $p > 1$.

Solução A série p é $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Se $f(x) = \frac{1}{x^p}$, então f é contínua e assume valores positivos para todo $x \geqslant 1$. Além disso, se $1 \leqslant x_1 < x_2$, então $\frac{1}{x_1^p} > \frac{1}{x_2^p}$, e assim f é decrescente para todo $x \geqslant 1$. Portanto, então verificadas as hipóteses do Teorema 12.6.1 para a função f. Consideraremos agora a integral imprópria e teremos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

Se $p = 1$, a integral acima resulta em

$$\begin{aligned}\lim_{b \to +\infty} \ln x \Big]_1^b &= \lim_{b \to +\infty} \ln b \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Se $p \neq 1$, a integral resulta em

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}$$

Esse limite é $+\infty$ quando $p < 1$ e $-1/(1-p)$ se $p > 1$. Assim sendo, pelo teste da integral, segue que a série p converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

EXEMPLO 2 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$$

Solução Seja $f(x) = xe^{-x}$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Como $f'(x) < 0$ para $x > 1$, segue do Teorema 4.4.3 que f é decrescente se $x \geqslant 1$. Além disso, f é contínua e seus valores são positivos para todo $x \geqslant 1$. Assim, as hipóteses do teste da integral estão verificadas. Aplicando a integração por partes,

$$\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x + 1) + C$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-x}(x + 1)\right]_1^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{b + 1}{e^b} + \frac{2}{e}\right] \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{b \to +\infty} (b + 1) = +\infty$ e $\lim\limits_{b \to +\infty} e^b = +\infty$, podemos usar a regra de L'Hôpital para obter

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +\infty} \frac{b + 1}{e^b} &= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{e^b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{2}{e}$$

Dessa forma, a série dada é convergente.

Se para uma série infinita o índice do somatório começa com $n = k$ em vez de $n = 1$, temos então a seguinte modificação do teste da integral:

Se f for uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geqslant k$, a série infinita $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} f(n)$ será convergente se a integral imprópria

$$\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$$

existir e será divergente se $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_k^b f(x)\,dx = +\infty$.

A demonstração é idêntica àquela do Teorema 12.6.1.

EXEMPLO 3 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Solução A função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

é contínua e tem valores positivos para todo $x \geqslant 2$. Além disso, se $2 \leqslant x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$; assim, f é decrescente para todo $x \geqslant 2$. Portanto, o teste da integral pode ser aplicado.

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{b \to +\infty} \int_2^b (\ln x)^{-1/2} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} [2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Assim sendo, a série dada é divergente.

EXERCÍCIOS 12.6

Nos Exercícios de 1 a 8, use o teste da integral para determinar se a série dada é convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n+5)^2}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$
5. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1}$

Nos Exercícios de 9 a 22, determine se a série dada é convergente ou divergente.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$
10. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n^2+1}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-n}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$
15. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cotg}^{-1} n$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cosech} n$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1} n}}{n^2+1}$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 n$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$
22. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$
23. Prove que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.
24. Prove que a série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.
25. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.
26. Se s_k for a k-ésima soma parcial da série harmônica, prove que $\ln(k+1) < s_k < 1 + \ln k$. (*Sugestão:* $\frac{1}{m+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{m}$ se $0 < m \leqslant x \leqslant m+1$. Integre cada membro da desigualdade de m a $m+1$; faça m assumir sucessivamente os valores $1, 2, \ldots, n-1$, e some os resultados).
27. Use o resultado do Exercício 26 para estimar a soma

$$\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \ldots + \frac{1}{100}$$

12.7 SÉRIES ALTERNADAS

Nesta secção e na seguinte consideraremos séries infinitas constando tanto de termos negativos como positivos. Discutiremos primeiramente um tipo de série cujos termos são alternadamente positivos e negativos — as chamadas *séries alternadas*.

12.7.1 DEFINIÇÃO

Se $a_n > 0$ para todo n inteiro positivo, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots \tag{1}$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots \tag{2}$$

são chamadas de **séries alternadas**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um exemplo de série alternada do tipo (1), onde o primeiro termo é positivo, é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Uma série alternada do tipo (2), onde o primeiro termo é negativo, é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$$ ◀

O teorema a seguir fornece um teste de convergência para uma série alternada. Ele é chamado de teste de séries alternadas; também é conhecido como teste de Leibniz, pois foi formulado por ele em 1705.

12.7.2 TEOREMA
Teste de Séries Alternadas

Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \left[\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n\right]$, onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo. Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, a série alternada converge.

Prova Suponhamos que o primeiro termo da série alternada seja positivo. Com essa hipótese não há perda da generalidade, pois, se assim não for, descartamos o primeiro termo, o que não afeta a convergência da série. Assim, temos a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Considere a soma parcial

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Como por hipótese $a_{n+1} < a_n$, cada quantidade entre parênteses em (3) é positiva. Logo,

$$0 < s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s_{2n} < \ldots \tag{3}$$

Podemos também escrever s_{2n} como

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Como $a_{n+1} < a_n$, cada quantidade entre parênteses é positiva. Logo

$$s_{2n} < a_1 \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo} \tag{4}$$

De (3) e de (4),

$$0 < s_{2n} < a_1 \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Assim sendo, a seqüência $\{s_{2n}\}$ é limitada. Além disso, de (3), a seqüência $\{s_{2n}\}$ é crescente. Logo, pelo Teorema 12.2.6, a seqüência $\{s_{2n}\}$ é convergente. Seja $\lim_{n \to +\infty} s_{2n} = S$ e, do Teorema 12.2.7, $S \leqslant a_1$. Como $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$,

$$\lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} s_{2n} + \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1}$$

Mas, por hipótese, $\lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 0$; logo $\lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} s_{2n}$. Assim sendo, a seqüência das somas parciais dos termos de índice par e a seqüência das somas parciais dos termos de índice ímpar têm o mesmo limite S.

Vamos mostrar que $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$. Como $\lim_{n \to +\infty} s_{2n} = S$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N_1 > 0$, tal que

$$\text{se } 2_n \geqslant N_1, \quad \text{então} \quad |s_{2n} - S| < \epsilon$$

E como $\lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} = S$, existe um inteiro $N_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 2n + 1 \geqslant N_2, \quad \text{então} \quad |s_{2n+1} - S| < \epsilon$$

Se N for maior do que os dois inteiros N_1 e N_2, segue que se n for qualquer inteiro, par ou ímpar, e

$$\text{se } n \geqslant N, \quad \text{então} \quad |s_n - S| < \epsilon$$

Logo, $\lim_{n \to +\infty} s_n = S$ e assim sendo, a série alternada é convergente. ■

EXEMPLO 1 Prove que a série alternada é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Solução A série dada é

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Como $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ para todo n inteiro positivo, e $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, segue, do Teorema 12.7.2, que a série alternada dada é convergente.

EXEMPLO 2 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

Solução A série dada é uma série alternada.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} a_n &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Antes de aplicar o teste de séries alternadas, devemos provar que $a_{n+1} < a_n$ ou, equivalentemente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+2}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$= \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4}$$

$$< 1$$

Então, do Teorema 12.7.2, segue que a série dada é convergente.

12.7.3 DEFINIÇÃO Se uma série infinita for convergente e sua soma for S, então o **resto** obtido quando aproximamos a soma da série pela k-ésima soma parcial s_k será denotado por R_k e

$$R_k = S - s_k$$

12.7.4 TEOREMA Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \left[\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n\right]$, onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo, e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Então, se R_k for o resto obtido quando aproximamos a soma da série pela soma dos k primeiros termos, $|R_k| < a_{k+1}$.

Prova A série dada converge pelo teste de séries alternadas. Suponha que os termos com índices ímpares da série dada sejam positivos e os termos com índices pares sejam negativos. Então, de (3), na demonstração do Teorema 12.7.2, a seqüência $\{s_{2n}\}$ é crescente. Assim, se S for a soma da série dada,

$$s_{2k} < s_{2k+2} < S \qquad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{5}$$

Para mostrar que a seqüência $\{s_{2n-1}\}$ é decrescente, escrevemos

$$s_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

Como $a_{n+1} < a_n$, segue que cada quantidade entre parênteses é positiva. Logo, como $a_1 > 0$

$$s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2n-1} > \ldots$$

Portanto, a seqüência $\{s_{2n-1}\}$ é decrescente. Assim,

$$S < s_{2k+1} < s_{2k-1} \qquad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{6}$$

Como $S < s_{2k+1}$

$$S - s_{2k} < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} \qquad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{7}$$

De (5), $s_{2k} < S$. Logo

$$0 < S - s_{2k} \qquad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Logo, dessa desigualdade e de (7),

$$0 < S - s_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{8}$$

De (5), $-S < -s_{2k}$. Assim,

$$s_{2k-1} - S < s_{2k-1} - s_{2k} = a_{2k} \quad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{9}$$

De (6),

$$0 < s_{2k-1} - S \quad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Então, dessa desigualdade e de (9),

$$0 < s_{2k-1} - S < a_{2k} \quad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{10}$$

Da Definição 12.7.3, $R_k = S - s_k$, então (8) pode ser escrita como

$$0 < R_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para todo } k \geqslant 1 \tag{11}$$

e (10) pode ser escrita como

$$0 < -R_{2k-1} < a_{2k} \quad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Combinando essa desigualdade e (11), temos

$$|R_k| < a_{k+1} \quad \text{para todo } k \geqslant 1$$

e o teorema está provado. ■

EXEMPLO 3 Uma série para calcular $\ln(1 + x)$ se x está no intervalo aberto $(-1, 1)$ é

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Ache um limitante superior para o erro cometido quando aproximamos o valor de ln 1,1 pela soma dos três primeiros termos da série.

Solução Vamos usar a série dada com $x = 0{,}1$ para obter

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} + \ldots$$

Tal série satisfaz as condições do Teorema 12.7.4; assim, se R_3 for a diferença entre o valor de ln 1,1 e a soma dos três primeiros termos, então

$$|R_3| < 0{,}000025$$

Assim sendo, a soma dos três primeiros termos fornece um valor para ln 1,1 com precisão de até pelo menos quatro casas decimais. Usando os três primeiros termos, obtemos

$$\ln 1{,}1 \approx 0{,}0953$$

EXERCÍCIOS 12.7

Nos Exercícios de 1 a 14 determine se a série alternada dada é convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{3}{n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{3n-2}$

5. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln n}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2}$

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{e^n}{n}$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{3^n}{n^2}$

12. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n}{2^n}$

14. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache um limitante superior para o erro, quando aproximamos a soma da série infinita dada pela soma dos quatro primeiros termos.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{2}{n^2}$

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$

20. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

22. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n!}$

Nos Exercícios de 23 a 30, obtenha a soma da série infinita dada, com precisão de três casas decimais.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$

24. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$

26. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$

27. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$

28. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)^3}$

29. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$

30. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$

12.8 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA E CONDICIONAL, O TESTE DA RAZÃO E O TESTE DA RAIZ

Se todos os termos de uma dada série infinita forem substituídos pelos seus valores absolutos e a série resultante for convergente, então dizemos que a série dada é *absolutamente convergente*.

12.8.1 DEFINIÇÃO Dizemos que a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ será **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ for convergente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \ldots \qquad (1)$$

Essa série será absolutamente convergente se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$$

for convergente. Como se trata de uma série geométrica com $r = \frac{1}{3} < 1$, ela será convergente. Logo, a série (1) é absolutamente convergente. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Uma série convergente que não é absolutamente convergente é, por exemplo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

No Exemplo 1 da Secção 12.7 ficou provado que tal série é convergente. A série não é absolutamente convergente, pois a série dos valores absolutos é a série harmônica, que é divergente. ◀

A série da Ilustração 2 é exemplo de uma série *condicionalmente convergente*.

12.8.2 DEFINIÇÃO Uma série que é convergente, mas não absolutamente convergente, é denominada **condicionalmente convergente**.

Então, é possível que uma série seja convergente, mas não absolutamente convergente. Por outro lado, se uma série for absolutamente convergente, ela deverá ser convergente; esse será o objeto do próximo teorema.

12.8.3 TEOREMA Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for absolutamente convergente, ela será convergente e

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Prova Consideremos as séries infinitas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$$

e sejam $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ e $\{r_n\}$ as seqüências de suas somas parciais, respectivamente. Para todo n inteiro positivo, $u_n + |u_n|$ é 0 ou $2|u_n|$; assim sendo, temos a desigualdade

$$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n| \tag{2}$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente, denotaremos a sua soma por T. Já que $\{t_n\}$ é uma seqüência crescente de números positivos, então $t_n \leqslant T$ para todo n inteiro positivo. De (2) segue que

$$0 \leqslant r_n \leqslant 2t_n \leqslant 2T$$

Logo, a seqüência $\{r_n\}$ tem um limitante superior igual a $2T$. Assim, pelo Teorema 12.5.1, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ é convergente. Seja R a sua soma. Como de (2), $\{r_n\}$ é uma seqüência crescente, podemos concluir, do Teorema 12.2.7, que $R \leqslant 2T$.

Cada uma das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente; logo, do Teorema 12.4.3, segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(u_n + |u_n|) - |u_n|] = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

também é convergente.

Seja S a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Então, novamente pelo Teorema 12.4.3, $S = R - T$. E como $R \leqslant 2T$, $S \leqslant 2T - T = T$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e tem soma S, segue, do Teorema 12.4.2, que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$ é convergente e tem soma $-S$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |-u_n|$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ são ambas iguais a T, podemos substituir $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ por $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$ na discussão acima e mostrar que $-S \leqslant T$. Como $S \leqslant T$ e $-S \leqslant T$, temos $|S| \leqslant T$; então $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, e o teorema está provado. ■

EXEMPLO 1 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{3}n\pi}{n^2}$$

Solução Denotando a série dada por $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} - \frac{\frac{1}{2}}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{\frac{1}{2}}{4^2} + \frac{\frac{1}{2}}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{\frac{1}{2}}{7^2} - \ldots + \frac{\cos \frac{1}{3}n\pi}{n^2} + \cdots$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{50} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{98} - \ldots$$

Essa é uma série de termos positivos e negativos. Podemos provar que tal série é convergente se pudermos mostrar que ela é absolutamente convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos \frac{1}{3}n\pi|}{n^2}$$

Como

$$|\cos \tfrac{1}{3}n\pi| \leqslant 1 \qquad \text{para todo } n$$

$$\frac{|\cos \frac{1}{3}n\pi|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série p, com $p = 2$ e, portanto, é convergente. Assim, pelo teste de comparação $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente. Logo, a série dada é absolutamente convergente, e então, pelo Teorema 12.8.3, ela é convergente.

Observe que os termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ nem crescem nem decrescem monotonamente. Por exemplo, $|u_4| = \frac{1}{32}$, $|u_5| = \frac{1}{50}$, $|u_6| = \frac{1}{36}$; e assim, $|u_5| < |u_4|$, mas $|u_6| > |u_5|$.

O *teste da razão*, dado no próximo teorema, é usado freqüentemente para determinar se uma dada série é absolutamente convergente.

12.8.4 TEOREMA Teste da Razão

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série infinita dada para a qual todo u_n é não-nulo. Então,

(i) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ ou se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, a série dada é divergente;

(iii) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

Prova de (i) É dado que $L < 1$. Seja R um número tal que $L < R < 1$. Seja $R - L = \epsilon < 1$. Como $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$, existe um inteiro $N > 0$ tal que

$$\text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \epsilon$$

Assim,

$$\text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad 0 < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L + \epsilon = R \tag{3}$$

Vamos supor que n assuma os valores sucessivos N, $N + 1$, $N + 2$, ... e assim por diante. De (3) obtemos,

$$|u_{N+1}| < R|u_N|$$
$$|u_{N+2}| < R|u_{N+1}| < R^2|u_N|$$
$$|u_{N+3}| < R|u_{N+2}| < R^3|u_N|$$
$$\cdots$$

Em geral,

$$|u_{N+k}| < R^k|u_N| \qquad \text{para todo } k \text{ inteiro positivo.} \tag{4}$$

A série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_N|R^k = |u_N|R + |u_N|R^2 + \ldots + |u_N|R^n + \ldots$$

é convergente, pois é uma série geométrica com razão menor que 1. De (4) e do teste de comparação, segue que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$ é convergente. A série $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$ difere da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ somente nos N primeiros termos. Assim sendo, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

Prova de (ii) Se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, então em ambos os casos existe um inteiro $N > 0$ tal que se $n \geqslant N$, então $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$. Vamos supor que n assuma os valores sucessivos N, $N + 1$, $N + 2$, ... e assim por diante. Obtemos

$$|u_{N+1}| > |u_N|$$
$$|u_{N+2}| > |u_{N+1}| > |u_N|$$
$$|u_{N+3}| > |u_{N+2}| > |u_N|$$
$$\cdots$$

Assim, se $n > N$, então $|u_n| > |u_N|$. Logo, $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ e, portanto, a série dada é divergente.

Prova de (iii) Aplicando o teste da razão à série p, teremos

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right|$$

$$= 1$$

Já que a série p diverge se $p \leqslant 1$ e converge se $p > 1$, mostramos que é possível ter tanto séries convergentes como divergentes para as quais $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$. Isso prova a parte (iii). ■

EXEMPLO 2 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

Solução $u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{2^n}$ e $u_{n+1} = (-1)^{n+2} \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Logo

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$< 1$$

Segue, pelo teste da razão, que a série dada é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 12.8.3, ela é convergente.

EXEMPLO 3 No Exemplo 2 da Secção 12.7 ficou provado que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

é convergente. Essa série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente?

Solução Para testar a convergência absoluta aplicamos o teste da razão. Na solução do Exemplo 2 da Secção 12.7 foi mostrado que a razão

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

$$= 1$$

Desta forma, o teste da razão falha. Como

$$|u_n| = \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$> \frac{1}{n}$$

o teste de comparação pode ser aplicado. Uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica, que diverge, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é divergente e então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ não é absolutamente convergente. Portanto, ela é condicionalmente convergente.

Devemos ressaltar que o teste da razão não inclui todas as possibilidades para $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$, pois é possível que o limite não exista e não seja $+\infty$. A discussão de tais casos não se insere no contexto deste livro.

A demonstração do teste da razão baseou-se na aplicação do teste de comparação com a série geométrica. Outro teste com demonstração similar é o *teste da raiz*.

12.8.5 TEOREMA
Teste da Raiz

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série infinita para a qual u_n é diferente de zero. Então,

(i) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$, ou se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, a série é divergente;

(iii) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$, nenhuma conclusão relativa à convergência pode ser tirada do teste.

Dada a semelhança entre a demonstração do teste da raiz e a do teste da razão, ela será proposta como exercício (veja os Exercícios de 26 a 28).

EXEMPLO 4 Use o teste da raiz para determinar se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

Solução Aplicando o teste da raiz, teremos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2+(1/n)}}{n^2} \\ &= 0 \\ &< 1\end{aligned}$$

Assim sendo, pelo teste da raiz, concluímos que a série dada é absolutamente convergente. Portanto, do Teorema 12.8.3, segue que ela é convergente.

Os testes da razão e da raiz são intimamente relacionados; contudo, o primeiro é, em geral, mais fácil de ser aplicado. Se os termos da série contiverem fatoriais, então certamente esse será o caso. Por outro lado, se os termos contiverem potências, como no Exemplo 4, poderá ser vantajoso o uso do teste da raiz. O próximo exemplo é um caso onde é mais indicado aplicar o teste da raiz.

EXEMPLO 5 Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$$

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}\right|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right| \\ &= 0 \\ &< 1\end{aligned}$$

Do teste da raiz, segue que a série dada é absolutamente convergente e, portanto, do Teorema 12.8.3, ela é convergente.

Existem séries para as quais o teste da raiz pode ser usado, a fim de determinar a convergência, quando o teste da razão falhar. Uma dessas séries aparece no Exercício 25.

EXERCÍCIOS 12.8

Nos Exercícios de 1 a 20, determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Prove a sua resposta.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - 2\operatorname{sen} n}{n^3}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^3}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$
13. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi n}{n}$
16. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\ln n}$
17. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$
21. Se $|r| < 1$, prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \operatorname{sen} nt$ é absolutamente convergente para todos os valores de t.
22. Prove que se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for absolutamente convergente e $u_n \neq 0$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|u_n|}$ será divergente.
23. Prove que se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ será convergente.
24. Mostre, por meio de um exemplo, que o inverso do Exercício 23 não é verdadeiro.
25. Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+(-1)^n}}$. (a) Mostre que o teste da razão falha para essa série. (b) Use o teste da raiz para determinar se a série é convergente ou divergente.
26. Prove a parte (i) do teste da raiz (Teorema 12.8.5). (*Sugestão*: como $L < 1$, seja R um número tal que $L < R < 1$, e seja $R - L = \epsilon < 1$. Mostre que existe um inteiro N tal que se $n > N$, então $|u_n| < R^n$. Em seguida, use o teste de comparação.)
27. Prove a parte (ii) do teste da raiz. Veja a sugestão do Exercício 26.
28. Prove a parte (iii) do teste da raiz, aplicando-o às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. (*Sugestão*: determine $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}$, expressando $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$ e usando a regra de L'Hôpital para achar $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n}$.)

12.9 SUMÁRIO DOS TESTES DE CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA PARA UMA SÉRIE INFINITA

Para concluir o estudo das séries infinitas de termos constantes, vamos resumir os vários testes que podem ser usados para determinar a convergência ou divergência de uma série dada. Nas Secções de 12.3 a 12.8 vimos alguns desses testes e para desenvolver a habilidade de reconhecer e aplicar o teste apropriado é necessária uma prática considerável. Você irá adquirir essa prática fazendo os Exercícios de 11 a 48 nos Exercícios de Revisão a seguir. Vamos dar aqui uma lista dos testes. Você deve tentar cada um deles, na ordem indicada. Se uma determinada etapa não se aplica ou não leva a conclusão alguma, você deverá tentar a seguinte. É claro que em alguns casos mais de um teste é aplicável, mas você deve selecionar o mais eficiente.

1. Calcule $\lim_{n \to +\infty} u_n$. Se $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, então a série diverge. Se $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, nenhuma conclusão pode ser tirada.
2. Examine a série para determinar se ela faz parte de algum dos tipos especiais:

   (i) Uma série geométrica: $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$. Ela converge para a soma $\frac{a}{1-r}$, se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$.

(ii) Uma série p: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (onde p é uma constante). Ela converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

(iii) Uma série alternada: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Aplique o teste de séries alternadas (Teorema 12.7.2): se $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo, e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, então a série alternada é convergente.

3. Tente o teste da razão (Teorema 12.8.4): seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série infinita dada, para a qual todo u_n é não-nulo. Então,

(i) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$ ou se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$, a série é divergente;

(iii) se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

4. Tente o teste da raiz (Teorema 12.8.5): seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série infinita dada, para a qual todo u_n é não-nulo. Então,

(i) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$, ou se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, a série é divergente;

(iii) se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$, nenhuma conclusão quanto à convergência pode de ser tirada do teste.

5. Tente o teste da integral (Teorema 12.6.1): seja f uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geqslant 1$. Então a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$$

será convergente se a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

existir, e será divergente se $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\, dx = +\infty$.

6. Tente o teste de comparação (Teorema 12.5.2): seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos.

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ for uma série convergente de termos positivos já conhecida e $u_n \leqslant v_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ será convergente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ for uma série divergente de termos positivos já conhecida e $u_n \geqslant w_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ será divergente.

Ou tente o teste de comparação com limite (Teorema 12.5.3): sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ duas séries de termos positivos.

(i) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$, então ambas as séries convergem ou divergem conjuntamente.

(ii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

(iii) Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12

Nos Exercícios de 1 a 8, escreva os quatro primeiros números da seqüência e ache o seu limite, se existir.

1. $\left\{\frac{3n}{n+2}\right\}$
2. $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}\right\}$
3. $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$
4. $\left\{\frac{n+3n^2}{4+2n^3}\right\}$
5. $\{2+(-1)^n\}$
6. $\left\{\frac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$
7. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$
8. $\left\{\frac{(n+2)^2}{n+4} - \frac{(n+2)^2}{n}\right\}$

Nos Exercícios 9 e 10, ache os quatro primeiros elementos da seqüência de somas parciais $\{s_n\}$ e encontre uma fórmula para s_n em termos de n. Também determine se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, ache a sua soma.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

Nos Exercícios de 11 a 20, determine se a série é convergente ou divergente. Se a série for convergente, ache a sua soma.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}$
14. $\sum_{n=0}^{+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$
15. $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^n \frac{1}{3}\pi$
16. $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n \frac{1}{3}\pi$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ (*Sugestão*: para obter a soma, ache primeiro a seqüência das somas parciais.)
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\!\left[\operatorname{sen}\frac{3}{n}\pi + 2\right]\!\right]}{3^n}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

Nos Exercícios de 21 a 38, determine se a série é convergente ou divergente.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+6n}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{n^2}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+2}}$
27. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}$
28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}$
29. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$
31. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5n} - \frac{3}{2n}\right)$
32. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}$
33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2\ln n}$
34. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sec n|}{n^{3/4}}$
35. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}$
36. $\sum_{n=1}^{+\infty} n3^{-n^2}$
37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + \operatorname{sen} n}$
38. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+3)!}$

Nos Exercícios de 39 a 48, determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Prove as suas respostas.

39. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$
40. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$
41. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{3/4}}$
42. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}}$
43. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{10n}$
44. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$

45. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{n^n}$

46. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{[\ln(n+2)]^n}$

47. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, onde $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ for um quadrado perfeito} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ não for um quadrado perfeito} \end{cases}$

48. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, onde $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{4}n \text{ for um inteiro} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } \frac{1}{4}n \text{ não for um inteiro} \end{cases}$

49. Expresse como uma fração ordinária a dízima periódica: 1,3242424 . . .

50. Deixa-se cair uma bola de uma altura de 18 m. Cada vez que ela bate no chão, sobe a uma altura correspondente a dois terços da altura da queda anterior. Ache a distância percorrida pela bola até o repouso.

51. A trajetória de cada oscilação de um pêndulo, após a primeira, é 80% da trajetória da oscilação anterior de um lado até o outro. Se a trajetória da primeira oscilação mede 18 cm de comprimento e se a resistência do ar leva o pêndulo ao repouso, quanto mede o trajeto total percorrido pelo pêndulo até que ele pare?

TREZE

Séries de Potências

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

As séries infinitas são tratadas aqui de forma completa e adequada a um texto elementar de Cálculo. Na Secção 13.1 introduzimos *séries de potências* e nas Secções de 13.2 a 13.5 você aprenderá a usar séries de potências para expressar como uma série infinita tem muitas funções, entre elas as racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. As provas (Teoremas 13.2.3 e 13.3.1) dos processos computacionais envolvendo derivação e integração de séries de potências estão incluídas.

Uma aplicação de séries de potências consiste em achar aproximações de números irracionais tais como $\sqrt{2}$, π, e, ln 5 e sen 0,3. Outra aplicação é feita para aproximar as integrais definidas para as quais o integrando não tem antiderivada que possa ser expressa em termos de funções elementares. Por exemplo, vo-

cê aprenderá a usar séries de potências para calcular valores de integrais tais como $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$, $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$, e $\int_0^{0,1} \ln(1 + \operatorname{sen} x)dx$ para qualquer precisão exigida. Além disso, soluções de muitas equações diferenciais podem ser expressas como séries de potências.

13.1 INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE POTÊNCIAS

As séries infinitas do Capítulo 12 envolvem termos constantes. Discutiremos agora um tipo importante de séries de termos variáveis chamado de *séries de potências*, que podem ser consideradas como uma generalização da função polinomial. Você aprenderá, neste capítulo, como usar séries de potências para calcular valores de funções como sen x, e^x, $\ln x$ e $\sqrt{x}$, os quais não podem ser calculados pelas operações da Aritmética, usadas para determinar os valores de funções racionais.

13.1.1 DEFINIÇÃO

Uma **série de potências** em $x - a$ é uma série da forma

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots \tag{1}$$

Usaremos a notação $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - a)^n$ para representar a série (1). (Observe que consideramos $(x - a)^0 = 1$ mesmo quando $x = a$, por conveniência, ao escrever o termo geral.) Se x for um determinado número, a série de potências (1) tornar-se-á uma série infinita de termos constantes. Um caso especial de (1) ocorre quando $a = 0$, e a série torna-se uma série de potências em x, que é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{2}$$

Além das séries de potências em $x - a$ e x, existem séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n[\phi(x)]^n = c_0 + c_1\phi(x) + c_2[\phi(x)]^2 + \ldots + c_n[\phi(x)]^n + \ldots$$

onde ϕ é uma função de x. Tais séries são chamadas de séries de potências em $\phi(x)$. Neste livro trataremos exclusivamente de séries de potências da forma (1) ou (2) e, quando usarmos o termo "série de potências", estaremos nos referindo a uma dessas duas formas. Restringiremos a nossa discussão às séries de potências da forma (2). A forma mais geral (1) pode ser obtida de (2) através da translação $x = \bar{x} - a$; assim sendo, nossos resultados aplicam-se igualmente às séries da forma (1).

Ao tratarmos de séries infinitas de termos constantes, estávamos interessados em questões de convergência ou divergência da série. Ao considerarmos séries de potências, perguntamos: para que valores de x a série converge? Para cada valor de x para o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma. Assim sendo, uma série de potências define uma função. A função f, com valores funcionais

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

tem como domínio todos os valores de x para os quais a série de potências converge. É claro que toda a série de potências (2) é convergente para $x = 0$. Existem algumas séries (veja o Exemplo 3) que são convergentes somente para esse valor de x, enquanto há também séries que convergem para todo valor de x (veja o Exemplo 2).

Os três exemplos a seguir ilustram como o teste da razão pode ser usado para determinar os valores de x para os quais uma série de potências é convergente. Quando $n!$ for usado na representação do n-ésimo termo de uma série de potências (como no Exemplo 2), convém lembrar que $0! = 1$, de tal forma que a representação do n-ésimo termo será válida também quando $n = 0$.

EXEMPLO 1 Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n3^n}$$

Solução Para a série dada,

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n3^n} \quad \text{e} \quad u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{2^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3} |x| \frac{n}{n+1} \\ &= \tfrac{2}{3}|x| \end{aligned}$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando $\frac{2}{3}|x| < 1$ ou, equivalentemente, quando $|x| < \frac{3}{2}$. A série é divergente quando $\frac{2}{3}|x| > 1$ ou, equivalentemente, quando $|x| > \frac{3}{2}$. Se $\frac{2}{3}|x| = 1$ (ou seja, $x = \pm\frac{3}{2}$), o teste da razão falha. Quando $x = \frac{3}{2}$, a série de potências dada torna-se:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$$

que é convergente, conforme foi mostrado no Exemplo 1 da Secção 12.7. Quando $x = -\frac{3}{2}$, temos

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots$$

que, pelo Teorema 12.4.2, é divergente. Concluímos, então, que a série de potências dada é convergente quando $-\frac{3}{2} < x \leqslant \frac{3}{2}$. A série é absolutamente convergente quando $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ e é condicionalmente convergente quando $x = \frac{3}{2}$. Se $x \leqslant -\frac{3}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$, a série é divergente.

EXEMPLO 2 Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solução Para a série dada,

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim, aplicando o teste da razão,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$= 0$$
$$< 1$$

Logo, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de x.

EXEMPLO 3 Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$$

Solução Para a série dada, $u_n = n!x^n$ e $u_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$. Aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to+\infty}|(n+1)x|$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Segue que a série é divergente para todos os valores de x, exceto 0.

No próximo exemplo, o teste da raiz será usado para determinar quando uma série de potências é convergente.

EXEMPLO 4 Ache os valores de x para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$$

Solução Usamos o teste da raiz e calculamos $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|n^3x^n|} = \lim_{n\to+\infty} n^{3/n}|x| \tag{3}$$

Para determinar $\lim_{n\to+\infty} n^{3/n}$, seja $y = n^{3/n}$. Então, $\ln y = \frac{3}{n}\ln n$. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty}\ln y = \lim_{n\to+\infty}\frac{3\ln n}{n} \tag{4}$$

Para calcular o limite no segundo membro de (4), vamos achar primeiro $\lim_{z\to+\infty}\frac{3\ln z}{z}$, onde z é um número real. Como $\lim_{z\to+\infty}\ln z = +\infty$ e

$\lim_{z \to +\infty} z = +\infty$, aplicaremos a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{3 \ln z}{z} = \lim_{z \to +\infty} \frac{3}{z}$$
$$= 0$$

Assim, do Teorema 12.1.3, $\lim_{n \to +\infty} \frac{3 \ln n}{n} = 0$. De (4), segue que

$$\lim_{n \to +\infty} \ln y = 0$$
$$\lim_{n \to +\infty} y = 1$$

Substituindo esse resultado em (3), temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|n^3 x^n|} = |x|$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando $|x| < 1$. A série é divergente quando $|x| > 1$. Se $x = 1$, a série de potências torna-se $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$, que é divergente, pois $\lim_{n \to +\infty} n^3 \neq 0$. Analogamente, a série de potências é divergente quando $x = -1$.

13.1.2 TEOREMA Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ for convergente para $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$), então ela será absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < |x_1|$.

Prova Se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ for convergente, então $\lim_{n \to +\infty} c_n x_1^n = 0$. Logo, se tomarmos $\epsilon = 1$ na Definição 2.5.1, existirá um inteiro $N > 0$ tal que

$$\text{se } n \geqslant N \quad \text{então} \quad |c_n x_1^n| < 1$$

Agora, se x for qualquer número tal que $|x| < |x_1|$, então se $n \geqslant N$

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n} \right|$$
$$|c_n x^n| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$
$$|c_n x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{5}$$

A série

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{6}$$

é convergente, porque é uma série geométrica com $r = |x/x_1| < 1$ (pois $|x| < |x_1|$). Compare a série $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$, onde $|x| < |x_1|$, com a série (6).

De (5) e do teste de comparação $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$ é convergente para $|x| < |x_1|$. Assim sendo, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < |x_1|$. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma ilustração do Teorema 13.1.2 é dada no Exemplo 1. A série de potências é convergente para $x = \frac{3}{2}$ e é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < \frac{3}{2}$. ◀

O seguinte teorema é um corolário do Teorema 13.1.2.

13.1.3 TEOREMA Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ for divergente para $x = x_2$, ela será divergente para todos os valores de x para os quais $|x| > |x_2|$.

Prova Suponha que a série de potências seja convergente para algum número x para o qual $|x| > |x_2|$. Então, pelo Teorema 13.1.2, a série deve convergir para $x = x_2$. Mas isso contradiz a hipótese. Logo, a série de potências dada é divergente para todos os valores de x para os quais $|x| > |x_2|$. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para ilustrar 13.1.3, considere novamente a série de potências do Exemplo 1. Ela diverge para $x = -\frac{3}{2}$ e também é divergente para todos os valores de x tais que $|x| > |-\frac{3}{2}|$. ◀

Podemos provar, a partir dos Teoremas 13.1.2 e 13.1.3, o importante teorema enunciado a seguir.

13.1.4 TEOREMA Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma dada série de potências. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) a série converge somente para $x = 0$;
(ii) a série é absolutamente convergente para todos os valores de x;
(iii) existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < R$ e é divergente para todos os valores de x para os quais $|x| > R$.

Prova Se x for substituído por zero na série de potências dada, temos $c_0 + 0 + 0 + \ldots$ que, obviamente, é convergente. Assim, toda série de potências da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é convergente quando $x = 0$. Se esse for o único valor de x para o qual a série converge, então a afirmação (i) é válida.

Suponha que a série dada seja convergente para $x = x_1$, onde $x_1 \neq 0$. Segue então, do Teorema 13.1.2, que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < |x_1|$. Além disso, se não existir valor de x para o qual a série dada seja divergente, então a série será absolutamente convergente para todos os valores de x. Assim, a afirmação (ii) é válida.

Se a série dada for convergente para $x = x_1$, onde $x_1 \neq 0$ e divergente para $x = x_2$, onde $|x_2| > |x_1|$, do Teorema 13.1.3 segue que a série é divergente para todos os valores de x tais que $|x| > |x_2|$. Logo, $|x_2|$ é um limitante superior para o conjunto de valores de $|x|$ para os quais a série é absolutamente convergente. Então, pelo axioma do completamento (12.2.5), esse conjunto de números tem um limitante superior mínimo, que é o número R da afirmação (iii). Isso completa a demonstração de que uma e somente uma das três afirmações é válida. ■

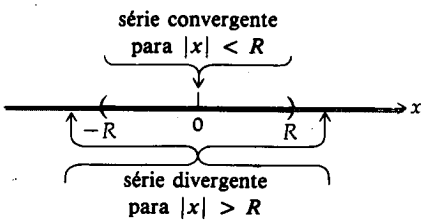


FIGURA 1

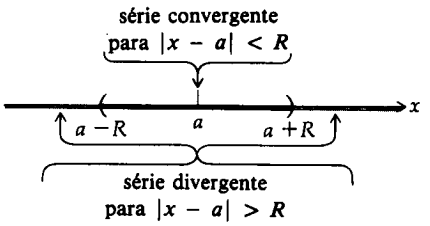


FIGURA 2

O Teorema 13.1.4(iii) pode ser ilustrado no eixo real. Veja a Figura 1.

Se, em vez da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, tivermos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$, então nas afirmações (i) e (iii) do Teorema 13.1.4, x será substituído por $x - a$. As afirmações alteram-se para:

(i) a série converge somente para $x = a$;
(iii) existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x - a| < R$ e é divergente para todos os valores de x para os quais $|x - a| > R$. (Veja a Figura 2 que ilustra isso no eixo real.)

Ao conjunto de todos os valores de x para os quais uma dada série de potências é convergente, chamamos **intervalo de convergência** da série de potências. O número R da afirmação (iii) do Teorema 13.1.4 é denominado **raio de convergência** da série de potências. Se a afirmação (i) for verdadeira, $R = 0$; se a afirmação (ii) for verdadeira, então $R = +\infty$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para a série de potências do Exemplo 1, $R = \frac{3}{2}$ e o intervalo de convergência é $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. No Exemplo 2, $R = +\infty$, e o intervalo de convergência é escrito como $(-\infty, +\infty)$. ◀

Se R for o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, o intervalo de convergência será um dos seguintes: $(-R, R)$, $[-R, R]$, $(-R, R]$ ou $[-R, R)$. No caso mais geral da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$, o intervalo de convergência será um dos seguintes:

$$(a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R] \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R)$$

Uma dada série de potências define uma função tendo como domínio o intervalo de convergência. O método mais vantajoso para determinar o intervalo de convergência de que dispomos é o teste da razão. No entanto, tal teste nada revela sobre o que acontece nos pontos extremos do intervalo de convergência, quanto à convergência ou divergência da série de potências. Nas extremidades do intervalo de convergência a série de potências pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente, ou ainda divergente. Se uma série de potências convergir absolutamente numa extremidade, segue da definição de convergência absoluta que a série será absolutamente convergente nas extremidades (veja o Exercício 33). Se uma série de potências convergir numa extremidade e divergir na outra, a série será condicionalmente convergente no extremo no qual convergir (veja o Exercício 34). Há casos para os quais a convergência ou divergência de uma série de potências nos extremos não pode ser determinada por métodos do Cálculo Elementar.

EXEMPLO 5 Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$$

Solução A série dada é

$$(x-2) + 2(x-2)^2 + \ldots + n(x-2)^n + (n+1)(x-2)^{n+1} + \ldots$$

Aplicando o teste da razão, teremos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n}\right|$$

$$= |x-2| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}$$

$$= |x-2|$$

A série dada será, então, absolutamente convergente se $|x-2| < 1$ ou, equivalentemente, $-1 < x - 2 < 1$, ou ainda, $1 < x < 3$.

Quando $x = 1$, a série será $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$, que é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. Quando $x = 3$, a série torna-se $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, que também diverge, pois $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. Assim, o intervalo de convergência será (1, 3). Logo, a série de potências define uma função cujo domínio é o intervalo (1, 3).

EXEMPLO 6 Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$$

Solução A série dada é

$$\frac{x}{2+1^2} + \frac{x^2}{2+2^2} + \frac{x^3}{2+3^2} + \ldots + \frac{x^n}{2+n^2} + \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} + \ldots$$

Aplicando o teste da razão, teremos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2}\cdot\frac{2+n^2}{x^n}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{2+n^2}{2+n^2+2n+1}$$

$$= |x|$$

Assim, a série dada será absolutamente convergente se $|x| < 1$ ou, equivalentemente, se $-1 < x < 1$. Quando $x = 1$, a série torna-se

$$\frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{2+3^2} + \ldots + \frac{1}{2+n^2} + \ldots$$

Já que $\frac{1}{2+n^2} < \frac{1}{n^2}$ para todo n inteiro positivo, e ainda como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série p convergente, segue então, do teste de comparação, que a série de po-

tências dada converge quando $x = 1$. Para $x = -1$, a série é $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 + n^2}$, que é convergente pois acabamos de ver que ela é absolutamente convergente. Assim sendo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-1, 1]$.

EXERCÍCIOS 13.1

Nos Exercícios de 1 a 28, determine o intervalo de convergência da série de potências dada.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-3}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2x^n}{2^n}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^nx^n}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2n}} x^n$
11. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$
12. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n!}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$
17. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{senh} 2n)x^n$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$
19. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$
22. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}x^{2n}}{n+3}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n(x-5)^n}{n+1}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n+1}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n(x-3)^n$
27. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$
28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^n$
29. Se a e b são inteiros positivos, determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+a)!}{n!(n+b)!} x^n$.
30. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for uma série absolutamente convergente, prove que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ será absolutamente convergente quando $|x| \leqslant 1$.
31. Prove que se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ for r, então o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{2n}$ será $\sqrt{r}$.
32. Prove que se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ $(L \neq 0)$, então o raio de covergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ será $\frac{1}{L}$.
33. Prove que se uma série de potências for absolutamente convergente num extremo do seu intervalo de convergência, então a série de potências será absolutamente convergente nos extremos.
34. Prove que se uma série de potências convergir num extremo de seu intervalo de convergência e divergir no outro extremo, então a série de potências será condicionalmente convergente no extremo onde converge.

13.2 DERIVAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Você aprendeu na Secção 13.1 que uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série geométrica com $a = 1$ e $r = x$, isto é, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Pelo Teorema 12.3.5, a série converge para a soma $1/(1 - x)$, se $|x| < 1$. Logo, a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ define a função f, tal que

$f(x) = 1/(1 - x)$ e $|x| < 1$. Logo,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{se } |x| < 1 \tag{1}$$

◀

A série em (1) pode ser usada para formar outras séries de potências cujas somas podem ser determinadas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se em (1) x for substituído por $-x$, teremos

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{1}{1 + x} \quad \text{se } |x| < 1 \tag{2}$$

Seja $x = x^2$ em (1), teremos

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{se } |x| < 1 \tag{3}$$

Se em (1) x for substituído por $-x^2$, obteremos

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{se } |x| < 1 \tag{4}$$

◀

Nesta secção e na próxima, outras séries interessantes são obtidas de séries como as acima referidas, por derivação e integração. Provaremos que se R (onde $R \neq 0$) for o raio de convergência de uma série de potências que define a função f, então f será diferenciável no intervalo aberto $(-R, R)$ e a derivada de f poderá ser obtida ao derivarmos a série de potências termo a termo. Além disso, mostraremos que f é integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$, e calculamos a integral de f, integrando a série de potências termo a termo. Precisamos primeiro de alguns teoremas preliminares.

13.2.1 TEOREMA Se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ for uma série de potências com um raio de convergência $R > 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ também terá R como raio de convergência.

Esse teorema estabelece que a série, obtida com a derivação de cada termo de uma dada série de potências, terá o mesmo raio de convergência que a série dada.

Prova Seja x qualquer número no intervalo aberto $(-R, R)$. Então $|x| < R$. Selecionamos um número x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$. Como $|x_1| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ é convergente. Logo, $\lim_{n \to +\infty} c_n x_1^n = 0$. Assim, se tomarmos $\epsilon = 1$ na Definição 2.5.1, existirá um número $N > 0$, tal que

se $n > N$, então $|c_n x_1^n| < 1$

Seja M o maior dos números $|c_1 x_1|, |c_2 x_1^2|, |c_3 x_1^3|, \ldots, |c_N x_1^N|, 1$. Então

$$|c_n x_1^n| \leqslant M \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo.} \tag{5}$$

Agora

$$|nc_n x^{n-1}| = \left| nc_n \cdot \frac{x^{n-1}}{x_1{}^n} \cdot x_1{}^n \right|$$
$$= n \frac{|c_n x_1{}^n|}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$$

De (5) e da equação acima,

$$|nc_n x^{n-1}| \leqslant n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \tag{6}$$

Se o teste da razão for aplicado à série

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \tag{7}$$

então

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)|x|^n}{|x_1|^n} \cdot \frac{|x_1|^{n-1}}{n|x|^{n-1}} \right|$$
$$= \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n}$$
$$= \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$$

Assim sendo, a série (7) é absolutamente convergente; logo, de (6) e do teste de comparação, segue que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$ também é absolutamente convergente. Como x é qualquer número em $(-R, R)$, segue que se o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$ for R', então $R' \geqslant R$.

Para completar a demonstração precisamos mostrar que R' não pode ser maior do que R. Vamos supor que $R' > R$ e seja x_2 um número tal que $R < |x_2| < R'$. Como $|x_2| > R$ segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2{}^n \text{ é divergente} \tag{8}$$

Como $|x_2| < R'$, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x_2{}^{n-1}$ é absolutamente convergente. Além disso,

$$|x_2| \sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2{}^{n-1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2{}^n|$$

e assim, do Teorema 12.4.2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2{}^n| \text{ será convergente} \tag{9}$$

Se n for qualquer inteiro positivo,

$$|c_n x_2{}^n| \leqslant n|c_n x_2{}^n| = |nc_n x_2{}^n|$$

Dessa desigualdade, da afirmação (9) e do teste de comparação, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n x_2^n|$ é convergente. Logo, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2^n$ é convergente, o que contradiz o resultado (8). Assim sendo, a hipótese de que $R' > R$ é falsa. Logo, R' não pode ser maior do que R; e como foi mostrado que $R' \geqslant R$, segue que $R' = R$, o que prova o teorema. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Verificaremos o Teorema 13.2.1 para a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots$$

Determinamos o raio de convergência aplicando o teste da razão.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2 x^{n+2}}{(n+2)^2 x^{n+1}}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}\right| \\ &= |x|\end{aligned}$$

Dessa forma, a série de potências é convergente quando $|x| < 1$; assim sendo, seu raio de convergência é $R = 1$.

A série de potências obtida da série dada com a derivação termo a termo é

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+2} + \ldots\end{aligned}$$

Aplicando o teste da razão a essa série de potências, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n+2}\right| \\ &= |x|\end{aligned}$$

Essa série é convergente se $|x| < 1$; assim, seu raio de convergência é $R' = 1$. Como $R = R'$, está cumprido o Teorema 13.2.1. ◀

13.2.2 TEOREMA Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ for $R > 0$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ também será R.

Prova Se aplicarmos o Teorema 13.2.1 à série $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$, obteremos o resultado desejado. ■

Estamos agora em condições de provar o teorema sobre derivação termo a termo de uma série de potências.

13.2.3 TEOREMA Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{10}$$

$f'(x)$ existirá para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$, sendo dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$$

Prova Sejam x e a dois números distintos no intervalo aberto $(-R, R)$. A fórmula de Taylor (fórmula (2) da Secção 11.5), com $n = 1$, é

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

Dessa fórmula, com $f(x) = x^n$, segue que para todo n inteiro positivo

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + \tfrac{1}{2}n(n-1)(\xi_n)^{n-2}(x-a)^2 \tag{11}$$

onde ξ_n está entre a e x para todo n inteiro positivo. De (10),

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x^n - a^n) \end{aligned}$$

Dividindo por $x - a$ (pois $x \neq a$) e usando (11), temos, das equações acima,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x-a} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n[na^{n-1}(x-a) + \tfrac{1}{2}n(n-1)(\xi_n)^{n-2}(x-a)^2]$$

Assim,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} + \tfrac{1}{2}(x-a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2} \tag{12}$$

Como a está em $(-R, R)$, concluímos do Teorema 13.2.1 que $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$ é absolutamente convergente.

Como ambos, a e x, estão em $(-R, R)$, existe algum número $K > 0$ tal que $|a| < K < R$ e $|x| < K < R$. Segue, do Teorema 13.2.2, que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n K^{n-2}$$

é absolutamente convergente. Então, como

$$|n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}| < |n(n-1)c_nK^{n-2}| \tag{13}$$

para cada ξ_n, podemos concluir do teste de comparação que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}$$

é absolutamente convergente.

De (12),

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_na^{n-1}\right| = \left|\tfrac{1}{2}(x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}\right| \tag{14}$$

Entretanto, do Teorema 12.8.3, se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Aplicando esse resultado ao segundo membro de (14), obtemos

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_na^{n-1}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-a|\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n|\,|\xi_n|^{n-2}$$

Dessa desigualdade e de (13),

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_na^{n-1}\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-a|\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n|K^{n-2} \tag{15}$$

onde $0 < K < R$. Como a série do segundo membro de (15) é absolutamente convergente, o limite do segundo membro, quando x tende a a, é zero. Então, de (15) e do teorema do confronto de limites (ou teorema do "sanduíche"),

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_na^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_na^{n-1}$$

e como a pode ser qualquer número no intervalo aberto $(-R, R)$, o teorema está provado. ■

EXEMPLO 1 Seja f a função definida pela série de potências da Ilustração 3. (a) Ache o domínio de f; (b) escreva a série de potências que define a função f' e determine o domínio de f'.

Solução

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

O domínio de f é o intervalo de convergência da série de potências. Na Ilustração 3 mostramos que o raio de convergência da série de potências é 1;

isto é, a série converge quando $|x| < 1$. Considere agora a série de potências quando $|x| = 1$. Para $x = 1$, a série é

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

que é convergente, pois é uma série p com $p = 2$. Para $x = -1$ temos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ que é convergente, pois é absolutamente convergente. Logo o intervalo $[-1, 1]$ é o domínio de f.

(b) Do Teorema 13.2.3 segue que f' é definida por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \tag{16}$$

e que $f'(x)$ existe para todo x no intervalo aberto $(-1, 1)$. Na Ilustração 3 ficou provado que o raio de convergência da série de potências em (16) é 1. Consideremos agora a série de potências em (16), para $x = \pm 1$. Quando $x = 1$, a série é

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

que é a série harmônica e, portanto, divergente. Para $x = -1$, a série fica

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots$$

que é uma série alternada convergente. Assim, o domínio de f' é o intervalo $[-1, 1)$.

O Exemplo 1 ilustra o fato de que se uma função f for definida por uma série de potências e se essa série for derivada termo a termo, a série de potências resultante, que define f', terá o mesmo raio de convergência, mas não necessariamente o mesmo intervalo de convergência.

EXEMPLO 2 Obtenha uma série de potências que represente

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

Solução De (1),

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad \text{se } |x| < 1$$

Usando o Teorema 13.2.3 e derivando ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \qquad \text{se } |x| < 1$$

EXEMPLO 3 Mostre que para todos os valores reais de x

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Solução No Exemplo 2 da Secção 13.1 foi mostrado que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para todos os valores reais de x. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{17}$$

o domínio de f será o conjunto de todos os números reais; isto é, o intervalo de convergência será $(-\infty, +\infty)$. Segue, do Teorema 13.2.3, que para todos os valores reais de x temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

Uma vez que $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, isso pode ser escrito como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dessa igualdade e de (17), $f'(x) = f(x)$ para todos os valores reais de x. Assim sendo, a função f satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y$$

a qual, pelo Teorema 7.7.1, tem como solução geral $y = Ce^x$. Logo, para alguma constante C, $f(x) = Ce^x$. De (17), $f(0) = 1$. (Lembre-se de que estamos tomando $x^0 = 1$ mesmo que $x = 0$, por conveniência, ao escrever o termo geral.) Portanto, $C = 1$; assim, $f(x) = e^x$, e teremos o resultado desejado.

EXEMPLO 4 Use o resultado do Exemplo 3 para achar uma representação em série de potências de e^{-x}.

Solução Se x for substituído por $-x$ na série de e^x, segue que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

para todos os valores reais de x.

EXEMPLO 5 Use a série do Exemplo 4 para determinar o valor exato de e^{-1} até a quinta casa decimal.

Solução Se $x = 1$ na série para e^{-x},

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \dots$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40.320} - \frac{1}{362.880} + \frac{1}{3.628.800} - \dots$$

$$\approx 1 - 1 + 0{,}5 - 0{,}166667 + 0{,}041667 - 0{,}008333 + 0{,}001389 - 0{,}000198 + 0{,}000025 - 0{,}000003 + 0{,}0000003 - \dots$$

Essa é uma série alternada convergente para a qual $|u_{n+1}| < |u_n|$. Assim, se usarmos os dez primeiros termos para aproximar a soma, pelo Teorema 12.7.4 o erro será menor do que o valor absoluto do décimo primeiro termo. Somando os dez primeiros termos obtemos 0,367880. Arredondando para cinco casas decimais, temos

$$e^{-1} \approx 0{,}36788$$

Nos cálculos com séries infinitas ocorrem dois tipos de erros. Um deles é o erro dado pelo resto após os n primeiros termos. O outro é o arredondamento, que ocorre quando cada termo da série é aproximado por um decimal com um número finito de casas. No caso do Exemplo 5, queríamos o resultado preciso com cinco casas decimais; assim, cada termo foi arredondado para seis casas decimais. Depois de calcular a soma, arredondamos o resultado para cinco decimais. Naturalmente, o erro dado pelo resto pode ser reduzido, se considerarmos termos adicionais da série, enquanto que o erro de arredondamento pode ser reduzido se usarmos mais casas decimais.

Se você fizer um curso de Equações Diferenciais, aprenderá que é possível expressar as soluções de muitas equações diferenciais como séries de potências. Tal situação será ilustrada no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6 Mostre que

$$y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{18}$$

é uma solução da equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y + x = 0$.

Solução A série de potências em (18) é convergente para todos os valores de x. Logo, do Teorema 13.2.3, para todo x,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{(n-1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y + x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \left(x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) + x$$
$$= 0$$

Então, a equação diferencial está satisfeita e, portanto, (18) é uma solução.

EXERCÍCIOS 13.2

Nos Exercícios de 1 a 10, faça o seguinte: (a) ache o raio de convergência da série de potências dada e o domínio de f; (b) escreva a série de potências que define a função f′ e ache seu raio de convergência, usando os métodos da Secção 13.1 (verificando assim o Teorema 13.2.1); (c) ache o domínio de f′.

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
3. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
4. $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n-1}}$
5. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
6. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$
7. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(3x-1)^n$
8. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$
9. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$
10. $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$
11. Use o resultado do Exemplo 2 para achar uma representação em série de potências de $\frac{1}{(1-x)^3}$.
12. Use o resultado do Exemplo 3 para achar uma representação em série de potências de $e^{\sqrt{x}}$.
13. Obtenha uma representação em série de potências de $\frac{1}{(1+x)^2}$, se $|x| < 1$, derivando a série (2) termo a termo.
14. Obtenha uma representação em série de potências de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$, se $|x| < 1$, derivando a série (4) termo a termo.
15. (a) Use a série (1) de modo a encontrar uma representação em série de potências para $\frac{1}{1-2x}$. (b) Derive termo a termo a série encontrada na parte (a), a fim de achar uma representação em série de potências para $\frac{2}{(1-2x)^2}$.
16. (a) Use a série (2) de modo a encontrar uma representação em série de potências para $\frac{1}{1+x^3}$. (b) Derive termo a termo a série encontrada na parte (a), a fim de achar uma representação em série de potências para $\frac{-3x^2}{(1+x^3)^2}$.
17. (a) Use o resultado do Exemplo 3, a fim de encontrar uma representação em série de potências para e^{x^2}. Derive termo a termo a série encontrada em (a) de modo a achar uma representação em série de potências para xe^{x^2}.
18. Seja f a função definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+2)}$. (a) Ache o domínio de f. (b) Ache $f'(x)$ e determine o domínio de f'.
19. Use o resultado do Exemplo 4 para determinar o valor de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ com precisão de cinco casas decimais.
20. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n}$, ache $f'(\frac{1}{2})$ com precisão de quatro casas decimais.
21. Use os resultados dos Exemplos 3 e 4 para encontrar uma representação em série de potências de (a) senh x e (b) cosh x.
22. Mostre que cada uma das séries de potências nas partes (a) e (b) do Exercício 21 pode ser obtida da outra por derivação termo a termo.
23. Use o resultado do Exemplo 2 para encontrar a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.
24. (a) Ache uma representação em série de potências para $\frac{e^x - 1}{x}$. (b) Por derivação termo a termo da série de potências da parte (a), mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.
25. (a) Ache uma representação em série de potências para $x^2 e^{-x}$. (b) Por derivação termo a termo da série de potências da parte (a), mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n+1} \frac{n+2}{n!} = 4$.
26. (a) Ache uma representação em série de potências para e^{-x^2}. (b) Por derivação da série de potências na parte (a), termo a termo duas vezes, mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = 1$.
27. Suponha que a função f tenha $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ como representação em série de potências, onde $R > 0$, se R for o raio de convergência. Se $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$, ache a série de potências usando somente propriedades de séries de potências e nenhuma informação sobre a função exponencial.

28. (a) Use somente propriedades de séries de potências para encontrar uma representação em série de potências da função f se $f(x) > 0$, $f'(x) = 2xf(x)$ para todo x e $f(0) = 1$. (b) Verifique o resultado obtido na parte (a), resolvendo a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$ com a condição inicial $y = 1$ se $x = 0$.

29. Suponha que uma função f tenha a representação dada pela série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. *Se* f for uma função par, mostre que $c_n = 0$ quando n for ímpar.

30. Suponha que a constante 0 tenha uma representação dada pela série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, onde o raio de convergência é $R > 0$. Prove que $c_n = 0$ para todo n.

Nos Exercícios de 31 a 35, mostre que a série de potências é uma solução da equação diferencial.

31. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n; \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

32. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}; \frac{dy}{dx} - xy = 0$

33. $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}; \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

34. $y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \frac{d^2y}{dx^2} + y - x = 0$

35. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

13.3 INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

O teorema que diz respeito à integração termo a termo de uma série de potências é uma conseqüência do Teorema 13.2.3.

13.3.1 TEOREMA Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

f será integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$, e calculamos a integral de f integrando termo a termo a série de potências dada; isto é, se x está em $(-R, R)$, então

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Além disso, o raio de convergência da série resultante é R.

Prova Seja g a função definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Como os termos da série de potências que representa $f(x)$ são as derivadas dos termos da série de potências que representa $g(x)$, as duas séries têm o mesmo raio de convergência pelo Teorema 13.2.1. Pelo Teorema 13.2.3

$$g'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } (-R, R)$$

Pelo Teorema 13.2.2 segue que $f'(x) = g''(x)$ para todo x em $(-R, R)$. Como f é diferenciável em $(-R, R)$, f é contínua neste intervalo; conseqüentemente, f é contínua em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$. Do Teorema 5.8.2 concluímos que se x está em $(-R, R)$, então

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= g(x) - g(0) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

■

O Teorema 13.3.1 é usado com freqüência para o cálculo de uma integral definida, a qual não pode ser determinada diretamente, achando uma antiderivada do integrando. Os Exemplos 1 e 2 ilustram essa técnica. A integral definida $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ que aparece nesses dois exemplos é similar àquela que representa a medida da área de uma região sob a "curva de probabilidade normal".

EXEMPLO 1 Ache uma representação em série de potências de $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Solução Do Exemplo 4 da Secção 13.2,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

para todos os valores de x. Se x for substituído por t^2,

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots \quad \text{para todos os valores de } t$$

Aplicando o Teorema 13.3.1, integramos termo a termo, obtendo

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots\end{aligned}$$

A série de potências representa a integral para todos os valores de x.

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1 para calcular, com precisão de até três casas decimais, o valor de $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$.

Solução Substituindo x por $\frac{1}{2}$ na série de potências obtida no Exemplo 1, teremos

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \ldots \\ &\approx 0{,}5 - 0{,}0417 + 0{,}0031 - 0{,}0002 + \ldots\end{aligned}$$

Essa é uma série alternada convergente com $|u_{n+1}| < |u_n|$. Assim, se usarmos os três primeiros termos para aproximar a soma, pelo Teorema 12.7.4 o erro será menor do que o valor absoluto do quarto termo. Dos três primeiros termos,

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt \approx 0{,}461$$

EXEMPLO 3 Obtenha uma representação em série de potências para $\ln(1 + x)$.

Solução Considere a função f definida por $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Uma representação dessa função em série de potências é dada pela série (2) da Secção 13.2, que é

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \qquad \text{se } |t| < 1$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt \qquad \text{se } |x| < 1$$

Logo,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad \text{se } |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{se } |x| < 1 \tag{1}$$

Como $|x| < 1$, $|1 + x| = 1 + x$. Assim, as barras de valor absoluto são desnecessárias ao escrevermos $\ln(1 + x)$.

No Exemplo 3, o Teorema 13.3.1 permite-nos concluir que a série de potências em (1) representa a função somente para os valores de x no intervalo aberto $(-1, 1)$. No entanto, a série de potências é convergente no extremo direito 1, conforme foi mostrado no Exemplo 1 da Secção 12.7. Quando $x = -1$, a série de potências torna-se a série harmônica negativa que é divergente. Logo, o intervalo de convergência da série de potências em (1) é $(-1, 1]$.

Na ilustração seguinte mostramos que a série de potências em (1) representa $\ln(1 + x)$ em $x = 1$, provando que a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é ln 2.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, a n-ésima soma parcial é

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \tag{2}$$

Assim, da Definição 12.3.2, se mostrarmos que $\lim_{n \to +\infty} s_n = \ln 2$, provamos que a soma da série é ln 2.

Da Álgebra, temos a seguinte fórmula para a soma de uma série geométrica finita:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Dessa fórmula com $a = 1$ e $r = -t$,

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

que pode ser escrita como

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{1+t}$$

Integrando de 0 a 1, obtemos

$$\int_0^1 [1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1}] \, dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

que dá

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \tag{3}$$

De (2), vemos que o primeiro membro de (3) é s_n. Seja

$$R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

então (3) pode ser escrito como

$$s_n = \ln 2 + R_n \tag{4}$$

Como $\dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$ para todo t em $[0, 1]$, segue, do Teorema 5.6.8, que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt$$

Logo,

$$0 \leqslant |R_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, segue da desigualdade acima e do Teorema 2.8.1 que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. Portanto, de (4),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} s_n &= \ln 2 + \lim_{n\to+\infty} R_n \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \\ &= \ln 2\end{aligned} \tag{5}$$

◀

A solução do Exemplo 3 mostra que a série de potências em (1) representa $\ln(x + 1)$ se $|x| < 1$. Então, com o resultado da Ilustração 1 podemos concluir que a série de potências em (1) representa $\ln(x + 1)$ para todo x em seu intervalo de convergência $(-1, 1]$.

Embora seja interessante que a soma da série em (5) seja ln 2, essa série converge muito vagarosamente para ser usada no cálculo de ln 2. Vamos obter agora uma série de potências para o cálculo dos logaritmos naturais.

De (1),

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{para } x \text{ em } (-1, 1] \tag{6}$$

Substituindo x por $-x$ nessa série,

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1) \tag{7}$$

Subtraindo termo a termo (7) de (6), obtemos

$$\boxed{\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \quad \text{se } |x| < 1} \tag{8}$$

A série em (8) pode ser usada para o cálculo do logaritmo natural de qualquer número positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se y for um número positivo qualquer, seja

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{e então} \quad x = \frac{y-1}{y+1} \quad \text{e} \quad |x| < 1$$

Por exemplo, se $y = 2$, então $x = \frac{1}{3}$. De (8),

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \ldots\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15{,}309} + \frac{1}{177{,}147} + \frac{1}{1{,}948{,}617} + \ldots\right)\\ &\approx 2(0{,}333333 + 0{,}012346 + 0{,}000823 + 0{,}000065 + 0{,}000006 + 0{,}000001 + \ldots)\end{aligned}$$

Usando os seis primeiros termos entre parênteses, multiplicando por 2 e arredondando para cinco casas decimais, obtemos

$$\ln 2 \approx 0{,}69315$$ ◀

EXEMPLO 4 Obtenha uma representação em série de potências de $\operatorname{tg}^{-1} x$.

Solução Da série (4) na Secção 13.2,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \qquad \text{se } |x| < 1$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Logo,

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{se } |x| < 1 \tag{9}$$

Embora o Teorema 13.3.1 nos permita concluir que a série de potências em (9) representa $\operatorname{tg}^{-1} x$ somente para os valores de x tais que $|x| < 1$, podemos mostrar que o intervalo de convergência da série de potências é $[-1, 1]$ e que ela é uma representação de $\operatorname{tg}^{-1} x$ para todo x em seu intervalo de convergên-

cia. (Será pedido que você prove isso no Exercício 36.) Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \text{ se } |x| \leqslant 1 \end{aligned}} \tag{10}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $x = 1$ em (10),

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$ ◀

A série da Ilustração 3 não é adequada ao cálculo de π, pois converge muito vagarosamente. O exemplo a seguir fornece um método melhor.

EXEMPLO 5 Prove que $\frac{1}{4}\pi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$. Use essa fórmula e a série de potências para $\operatorname{tg}^{-1} x$ do Exemplo 4, para calcular com precisão de cinco algarismos significativos o valor de π.

Solução Sejam $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2}$ e $\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3+2}{6-1} \\ &= 1 \\ &= \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

Logo, como $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\pi &= \alpha + \beta \\ \tfrac{1}{4}\pi &= \operatorname{tg}^{-1} \tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \tfrac{1}{3} \end{aligned} \tag{11}$$

Da fórmula (10) com $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{22{,}528} + \frac{1}{106{,}492} - \frac{1}{491{,}520} + \ldots \\ &\approx 0{,}500000 - 0{,}041667 + 0{,}006250 - 0{,}001116 + 0{,}000217 - 0{,}000044 + 0{,}000009 - 0{,}000002 + \ldots \end{aligned}$$

Como a série é alternada e $|u_{n+1}| < |u_n|$, segue, do Teorema 12.7.4, que se os sete primeiros termos forem usados para aproximar a soma da série, o erro

será menor do que o valor absoluto do oitavo termo. Logo,

$$\operatorname{tg}^{-1}\tfrac{1}{2} \approx 0{,}463648$$

Da fórmula (10) com $x = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1.215} - \frac{1}{15.309} + \frac{1}{177.147} - \frac{1}{1.948.617} + \dots \\ &\approx 0{,}333333 - 0{,}012346 + 0{,}000823 - 0{,}000065 + 0{,}000006 - 0{,}0000005 + \dots\end{aligned}$$

Se os cinco primeiros termos forem usados para aproximar a soma,

$$\operatorname{tg}^{-1}\tfrac{1}{3} \approx 0{,}321751$$

Substituindo os valores de $\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{3}$ em (11),

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\pi &\approx 0{,}463648 + 0{,}321751 \\ &\approx 0{,}78540\end{aligned}$$

Multiplicamos por 4 e o resultado com cinco algarismos signicativos é $\pi \approx 3{,}1416$.

EXERCÍCIOS 13.3

Nos Exercícios de 1 a 4, ache a representação em série de potências para a integral dada e determine o seu raio de convergência.

1. $\int_0^x e^t\,dt$
2. $\int_0^x \frac{dt}{t^2+4}$
3. $\int_2^x \frac{dt}{4-t}$
4. $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

Nos Exercícios de 5 a 8, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral dada por dois métodos: (a) use o segundo teorema fundamental do Cálculo; (b) use o resultado do exercício indicado.

5. $\int_0^1 e^t\,dt$; Exercício 1
6. $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}$; Exercício 2
7. $\int_2^3 \frac{dt}{4-t}$; Exercício 3
8. $\int_0^{1/3} \ln(1+t)\,dt$; Exercício 4

Nos Exercícios de 9 a 12, ache a série de potências que representa a integral dada e determine o seu raio de convergência.

9. $\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t-1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

10. $\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

11. $\int_0^x h(t)\,dt$, onde $h(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

12. $\int_0^x g(t)\,dt$, onde $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

Nos Exercícios de 13 a 16, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral definida obtida quando substituímos x pelo número dado no exercício indicado.

13. $x = 1$; Exercício 9
14. $x = \frac{1}{2}$; Exercício 10
15. $x = 1$; Exercício 11
16. $x = \frac{1}{4}$; Exercício 12

Nos Exercícios de 17 a 24, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral dada, usando séries.

17. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^3}$
18. $\int_0^{1/2} e^{-x^3}\,dx$
19. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$
20. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^4}$
21. $\int_0^{1/2} \operatorname{tg}^{-1} x^2\,dx$
22. $\int_0^{1/2} \cosh x^2\,dx$
23. $\int_0^1 x \operatorname{senh}\sqrt{x}\,dx$
24. $\int_0^1 g(x)\,dx$, onde $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

25. Dado $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ para todo x, obtenha uma representação em série de potências para senh x, integrando termo a termo de 0 a x a série dada.
26. Ache uma representação em série de potências para $\ln(1 + ax)$, integrando termo a termo de 0 a x a representação em série de potências para $\frac{1}{1 + at}$.
27. Use série de potências em (9) para calcular $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{4}$ com precisão de quatro casas decimais.
28. Use série de potências em (8) para calcular ln 3 com precisão de quatro casas decimais.
29. Se $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!}$, ache $f(\frac{5}{4})$ com precisão de três casas decimais.
30. Se $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 + 3}$, ache $g(1)$ com precisão de duas casas decimais.
31. Ache uma representação em série de potências para $\operatorname{tgh}^{-1} x$, integrando termo a termo de 0 a x a representação em série de potências para $(1 - t^2)^{-1}$.
32. Ache uma série de potências para xe^x, multiplicando a série de e^x por x, e então integre a série termo a termo de 0 a 1, mostrando que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$.
33. Integrando termo a termo de 0 a x uma representação em série de potências de $\ln(1 - t)$, mostre que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1 - x)\ln(1 - x)$$
34. Integrando termo a termo de 0 a x uma representação em série de potências para $\ln(1 + t)$, mostre que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2\ln 2 - 1$$
35. Integrando termo a termo de 0 a x uma representação em série de potências para $t \operatorname{tg}^{-1} t$, mostre que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{1}{2}[(x^2 + 1)\operatorname{tg}^{-1} x - x]$$
36. Mostre que o intervalo de convergência da série de potências em (9) é $[-1, 1]$ e que a série de potências é uma representação de $\operatorname{tg}^{-1} x$ para todo x em seu intervalo de convergência.
37. Ache a série de potências em x de $f(x)$ se $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Ache também o raio de convergência da série resultante.
38. Integre termo a termo de 0 a x uma representação em série de potências para $(1 - t^2)^{-1}$, a fim de obter a série de potências para $\ln \frac{1+x}{1-x}$ em (8).

13.4 SÉRIE DE TAYLOR

Se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{1}$$

cujo raio de convergência é $R > 0$, segue, de sucessivas aplicações do Teorema 13.2.3, que f tem derivadas de todas as ordens em $(-R, R)$. Dizemos que tal função é *infinitamente derivável* em $(-R, R)$. Sucessivas derivações da função em (1) resultam em

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots \tag{2}$$
$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \ldots \tag{3}$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + \ldots \tag{4}$$
$$f^{(iv)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)nc_n x^{n-4} + \ldots \tag{5}$$

e assim por diante. Se $x = 0$ em (1),

$$f(0) = c_0$$

Se $x = 0$ em (2),

$$f'(0) = c_1$$

Se $x = 0$ em (3),

$$f''(0) = 2c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

De (4), se $x = 0$,

$$f'''(0) = 2 \cdot 3c_3 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Da mesma forma, de (5), se $x = 0$,

$$f^{(iv)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}$$

Em geral,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Essa fórmula também é válida para $n = 0$, se tomarmos $f^{(0)}(0)$ como sendo $f(0)$ e $0! = 1$. Assim, dessa fórmula e de (1), a série de potências de f em x pode ser escrita como

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots} \tag{6}$$

Em um sentido mais geral, consideremos a função f como uma série de potências em $x - a$, isto é,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Se o raio de convergência dessa série for R, então f será infinitamente derivável em $(a - R, a + R)$. Sucessivas derivações da função em (7) resultam em

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \ldots + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n(x-a)^{n-3} + \ldots$$

e assim por diante. Tomando $x = a$ nas representações de f em séries de potências, bem como nas de suas derivadas, obtemos

$$c_0 = f(a) \qquad c_1 = f'(a) \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

e em geral

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{8}$$

Dessa fórmula e de (7) podemos escrever a série de potências de f em $x - a$ como

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots} \tag{9}$$

A série (9) é chamada de **série de Taylor** de f em a. O caso especial de (9) quando $a = 0$, isto é, (6), é chamado de **série de Maclaurin**.

Observe que a n-ésima soma parcial da série infinita (9) é polinômio de Taylor de n-ésimo grau da função f em a, discutido na Secção 11.5.

EXEMPLO 1 Ache a série de Maclaurin para e^x.

Solução Se $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo x; logo $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n. Assim, de (6) temos a série de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{10}$$

Tal série é a mesma que foi obtida no Exemplo 3 da Secção 13.2.

EXEMPLO 2 Ache a série de Taylor para sen x em a.

Solução Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, temos então que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x$, e assim por diante. Assim, da fórmula (8), $c_0 = \operatorname{sen} a$, $c_1 = \cos a$, $c_2 = (-\operatorname{sen} a)/2!$, $c_3 = (-\cos a)/3!$, $c_4 = (\operatorname{sen} a)/4!$ e assim por diante. A série de Taylor é obtida de (9), sendo

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (\cos a)(x - a) - (\operatorname{sen} a)\frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a)\frac{(x-a)^3}{3!} + (\operatorname{sen} a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots$$

Podemos deduzir que a representação de uma função em série de potências é única. Isto é, se duas funções têm os mesmos valores funcionais em algum intervalo contendo o número a, e se ambas as funções têm uma representação em série de potências em $x - a$, então trata-se da mesma série, pois os seus coeficientes são obtidos a partir dos valores das funções e de suas derivadas em a. Logo, se uma função tem uma representação em série de potências em $x - a$, essa série deve ser sua série de Taylor em a. Assim sendo, a série de Taylor para uma dada função não precisa ser obtida da fórmula (9). Qualquer método que resulte em uma série em $x - a$ representando a função será a série de Taylor da função em a.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para encontrar a série de Taylor para e^x em a, vamos escrever $e^x = e^a e^{x-a}$ e então usar a série (10), onde substituímos x por $x - a$. Então,

$$e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots\right] \quad ◀$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A série para $\ln(1 + x)$, encontrada no Exemplo 3 da Secção 13.3, pode ser usada para determinar a série de Taylor de $\ln x$ em a ($a > 0$), escrevendo

$$\ln x = \ln[a + (x - a)]$$

$$\ln x = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) \tag{11}$$

Como

$$\ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} \qquad \text{se } -1 < t \leqslant 1$$

então

$$\ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots$$

Logo, de (11),

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots$$

e a série representa $\ln x$ se $-1 < \dfrac{x-a}{a} \leqslant 1$ ou, equivalentemente, $0 < x \leqslant 2a$.

◀

Uma questão natural que surge é: se uma função tem uma série de Taylor em $x - a$, com raio de convergência $R > 0$, essa série representa a função para todos os valores de x no intervalo $(a - R, a + R)$? Para a maioria das funções elementares a resposta é afirmativa. Há, contudo, funções para as quais a resposta é *não*. O exemplo a seguir mostra isso.

EXEMPLO 3 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ache a série de Maclaurin para f e mostre que ela converge para todos os valores de x, mas que ela representa $f(x)$ somente se $x = 0$.

Solução Para encontrar $f'(0)$, vamos usar a definição de derivada.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} (1/x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} e^{1/x^2} = +\infty$, a regra de L'Hôpital pode ser usada. Logo,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}}$$

$$= 0$$

De forma análoga, usando a definição de derivada e a regra de L'Hôpital, obtemos 0 para todas as derivadas. Assim, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n. Logo, a série de Maclaurin para a função dada é $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ Essa série converge para 0 para todo x; contudo, se $x \neq 0$, $f(x) = e^{-1/x^2}$ e $e^{-1/x^2} \neq 0$.

O teorema a seguir fornece um teste para determinar se uma função está representada por sua série de Taylor.

13.4.1 TEOREMA Seja f uma função tal que f e todas as suas derivadas existam em algum intervalo $(a - r, a + r)$. Então, a função é representada por sua série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

para todo x, tal que $|x - a| < r$, se e somente se

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} = 0$$

onde cada ξ_n está entre x e a.

Prova No intervalo $(a - r, a + r)$, a função f satisfaz as hipóteses do Teorema 11.5.1 para o qual

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{12}$$

onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de grau n de f em a e $R_n(x)$ é o resto, dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \tag{13}$$

onde cada ξ_n está entre x e a.

Agora $P_n(x)$ é a n-ésima soma parcial da série de Taylor de f em a. Assim, se mostrarmos que $\lim_{n \to +\infty} P_n(x)$ existe e é igual a $f(x)$ se e somente se $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, o teorema estará provado. De (12),

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Se $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, segue dessa equação que

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} P_n(x) &= f(x) - \lim_{n \to +\infty} R_n(x)\\ &= f(x) - 0\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Queremos mostrar agora que se $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = f(x)$, então $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. De (12),

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \to +\infty} P_n(x)\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Isso prova o teorema. ■

O Teorema 13.4.1 também é válido para outras formas do resto $R_n(x)$, além da fórmula de Lagrange.

Freqüentemente, é difícil aplicar o Teorema 13.4.1, pois os valores de ξ_n são arbitrários. Mas, às vezes pode ser encontrado um limitante superior para $R_n(x)$ e pode ser possível provar que o limite dos limitantes superiores é zero quando $n \to +\infty$. O seguinte limite é de grande valia em alguns casos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo } x \tag{14}$$

Isto segue do Exemplo 2 da Secção 13.1, onde mostramos que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todos os valores de x e assim sendo, o limite de seu n-ésimo termo deve ser zero. Da mesma forma, como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$ é convergente para todos os valores de x,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo } x \tag{15}$$

EXEMPLO 4 Use o Teorema 13.4.1 para mostrar que a série de Maclaurin para e^x, encontrada no Exemplo 1, representa a função para todos os valores de x.

Solução A série de Maclaurin para e^x é (10) e

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

onde cada ξ_n está entre 0 e x.

Precisamos mostrar que $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$ para todo x. Há três casos a considerar: $x > 0$, $x < 0$ e $x = 0$.

Se $x > 0$, então $0 < \xi_n < x$; logo, $e^{\xi_n} < e^x$. Assim,

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16}$$

De (14) segue que $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, e assim

$$\lim_{n \to +\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Logo, de (16) e do Teorema 2.8.1, segue que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

Se $x < 0$, então $x < \xi_n < 0$ e $0 < e^{\xi_n} < 1$. Logo, se $x^{n+1} > 0$,

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

e se $x^{n+1} < 0$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0$$

Em ambos os casos, como $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, concluímos que $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

Finalmente, se $x = 0$, a série tem soma 1, que é e^0. Logo, a série (10) representa e^x para todos os valores de x.

Dos resultados do exemplo acima, podemos escrever

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ para todo } x \end{aligned}}$$

o que está de acordo com o exemplo 3 da Secção 13.2.

EXEMPLO 5 Mostre que a série de Taylor para sen x em a, do Exemplo 2, representa a função para todos os valores de x.

Solução Vamos usar o Teorema 13.4.1. Precisamos então mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} R_n(x) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f(x) = \text{sen } x$, $f^{(n+1)}(\xi_n)$ será um dos seguintes números: $\cos \xi_n$, $\text{sen } \xi_n$, $-\cos \xi_n$, ou $-\text{sen } \xi_n$. De qualquer modo, $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leqslant 1$. Logo,

$$0 < |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{17}$$

De (15), $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Assim, pelo teorema do "sanduíche" (2.8.1) e de (17), segue que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

EXEMPLO 6 Calcule o valor de sen 47° com precisão de quatro casas decimais.

Solução A série de Taylor para sen x em a foi obtida nos Exemplos 2 e 5. Ela representa a função para todos os valores de x. A série é

$$\text{sen } x = (\text{sen } a) + (\cos a)(x-a) - (\text{sen } a)\frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots$$

Para tornar $x - a$ pequeno devemos escolher um valor de a próximo do valor de x para o qual a função esteja sendo calculada. O seno e o co-seno de a também devem ser conhecidos. Assim sendo, escolhemos $a = \frac{1}{4}\pi$ e obtemos

$$\text{sen } x = \text{sen } \tfrac{1}{4}\pi + (\cos \tfrac{1}{4}\pi)(x - \tfrac{1}{4}\pi) - (\text{sen } \tfrac{1}{4}\pi)\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - (\cos \tfrac{1}{4}\pi)\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \ldots$$

Como 47° é equivalente a $\frac{47}{180}\pi$ rad ou $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{90}\pi)$ rad, dessa série com $x = \frac{47}{180}\pi$, segue que

$$\begin{aligned} \text{sen } \tfrac{47}{180}\pi &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3 + \ldots \\ &\approx \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 + 0{,}03490 - 0{,}00061 - 0{,}000002 + \ldots) \end{aligned}$$

Tomando $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$ e usando os três primeiros termos da série, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \tfrac{47}{180}\pi &\approx (0{,}70711)(1{,}03429) \\ &\approx 0{,}73136 \end{aligned}$$

Arredondando para quatro casas decimais, obtemos sen $47° \approx 0{,}7314$. O erro introduzido com a utilização dos três primeiros termos é $R_2(\frac{47}{180}\pi)$ e, de (17),

$$\left| R_2\left(\frac{47}{180}\pi\right) \right| \leqslant \frac{(\frac{1}{90}\pi)^3}{3!} \approx 0{,}00001$$

O resultado, então, está entre $0{,}73136 - 0{,}00001$ e $0{,}73136 + 0{,}00001$, isto é, o resultado está entre 0,73135 e 0,73137. Assim, para uma precisão de quatro casas decimais, temos

$$\operatorname{sen} \tfrac{47}{180}\pi \approx 0{,}7314$$

A seguinte série de Maclaurin representa a função dada para todos os valores de x:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \operatorname{senh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}}$$

A série para sen x resulta diretamente dos Exemplos 2 e 5, com $a = 0$. Você deverá verificar os resultados das outras séries nos Exercícios 1, 2 e 3.

EXEMPLO 7 Calcule com precisão de cinco casas decimais

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Solução Uma antiderivada do integrando, em termos de funções elementares, não pode ser encontrada. Mas, da série de Maclaurin para sen x,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{1}{x}\cdot \operatorname{sen} x \\ &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots\end{aligned}$$

que é verdadeira para todo $x \neq 0$. Usando integração termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \frac{x^9}{9\cdot 9!} - \dots\Big]_{1/2}^{1} \\ &\approx (1 - 0{,}0555555 + 0{,}0016667 - 0{,}0000283 + 0{,}0000003 - \dots) \\ &\quad - (0{,}5 - 0{,}0069444 + 0{,}0000521 - 0{,}0000002 + \dots)\end{aligned}$$

Entre cada par de parênteses há uma série alternada convergente com $|u_{n+1}| < |u_n|$. Primeiro colocamos os quatro primeiros termos, pois o erro cometido é menor do que 0,0000003. Em seguida, colocamos entre parênteses os três primeiros termos, onde o erro cometido é menor do que 0,0000002. Fazendo os cálculos aritméticos e arredondando para cinco casas decimais, obtemos

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \approx 0{,}45298$$

EXERCÍCIOS 13.4

1. Prove que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ representa cos x para todos os valores de x.
2. Prove que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ representa senh x para todos os valores de x.
3. Prove que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ representa cosh x para todos os valores de x.
4. Obtenha a série de Maclaurin para a função co-seno, derivando a série de Maclaurin para a função seno. Também, obtenha a série de Maclaurin para a função seno, derivando a série da função co-seno.
5. Obtenha a série de Maclaurin para a função seno hiperbólico, derivando a série de Maclaurin para a função co-seno hiperbólico. Também, derive a série de Maclaurin para a função seno hiperbólico, de modo a obter a série da função co-seno hiperbólico.
6. Ache a série de Taylor para e^x em 3, usando a série de Maclaurin para e^x.
7. Use a série de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ para encontrar a série de Taylor para $\ln x$ em 2.
8. Dado $\ln 2 = 0{,}6931$, use a série obtida no Exercício 7 para encontrar $\ln 3$ com precisão de quatro casas decimais.

Nos Exercícios de 9 a 14, ache uma representação em série de potências para a função em torno do ponto a e determine o raio de convergência.

9. $f(x) = \ln(x + 1)$; $a = 1$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = 1$
11. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$
12. $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$
13. $f(x) = \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$
14. $f(x) = 2^x$; $a = 0$
15. Ache a série de Maclaurin para $\operatorname{sen}^2 x$. (*Sugestão*: use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)
16. Ache a série de Maclaurin para $\cos^2 x$. (*Sugestão*: use $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)
17. (a) Ache os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para tg x. (b) Use o resultado de (a) e a derivação termo a termo para encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para $\sec^2 x$. (c) Use o resultado de (a) e a integração termo a termo, de modo a encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para $\ln|\sec x|$.
18. (a) Ache os três primeiros termos não-nulos da série de Taylor para cotg x em $\frac{1}{2}\pi$. (b) Use o resultado de (a) e a integração termo a termo, a fim de encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Taylor para ln sen x em $\frac{1}{2}\pi$.

Nos Exercícios de 19 a 24, use séries de potências para calcular, com a precisão exigida, o valor da quantidade dada.

19. cos 58°; quatro casas decimais
20. $\sqrt[5]{e}$; quatro casas decimais
21. $\sqrt[5]{30}$; cinco casas decimais
22. senh $\frac{1}{2}$; cinco casas decimais
23. ln (0,8); quatro casas decimais
24. $\sqrt[3]{29}$; três casas decimais

25. Calcule o valor de e com precisão de sete casas decimais e comprove sua resposta.

Nos Exercícios de 26 a 31, calcule com três casas decimais de precisão o valor da integral definida.

26. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x^2}\,dx$

27. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen} x^2\,dx$

28. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$

29. $\int_0^{0,1} \ln(1 + \operatorname{sen} x)\,dx$

30. $\int_0^{1/3} f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

31. $\int_0^1 g(x)\,dx$, onde $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

32. A função E definida por

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é chamada de *função erro* e é importante em Estatística Matemática. Ache a série de Maclaurin para a função erro.

33. Determine a_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de tal modo que o polinômio

$$f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17$$

possa ser escrito na forma:

$$f(x) = a_4(x - 1)^4 + a_3(x - 1)^3 + a_2(x - 1)^2 + a_1(x - 1) + a_0$$

34. Determine a_n ($n = 0, 1, 2, 3$) de tal modo que o polinômio

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$

possa ser escrito na forma:

$$f(x) = a_3(x + 2)^3 + a_2(x + 2)^2 + a_1(x + 2) + a_0$$

13.5 SÉRIE BINOMIAL

Em Álgebra você aprendeu que o teorema binomial expressa $(a + b)^m$ como uma soma de potências de a e b, onde m é um inteiro positivo, como segue:

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(m-k+1)}{k!}a^{m-k}b^k + \ldots + b^m$$

Vamos tomar $a = 1$ e $b = x$ e aplicar o teorema binomial para expressar $(1 + x)^m$, onde m não é inteiro positivo. Obtemos a série de potências

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (1)$$

Essa é a série de Maclaurin para $(1 + x)^m$. Ela é chamada de **série binomial.** Para determinar o raio de convergência da série (1), aplicamos o teste da razão e obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{m(m-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{m(m-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(m-n+1)}{n!}x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right||x|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{m}{n} - 1}{1 + \dfrac{1}{n}}\right||x|$$

$$= |x|$$

Assim, a série é convergente se $|x| < 1$. Agora provaremos que a série (1) representa $(1 + x)^m$ para todo número real m se x estiver no intervalo aberto $(-1, 1)$. Isso não será feito calculando $R_n(x)$ e mostrando que seu limite é zero, pois é um procedimento difícil, como você pode ver se tentar aplicá-lo. Em vez disso, usaremos o método a seguir. Seja

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \qquad |x| < 1 \tag{2}$$

Queremos mostrar que $f(x) = (1 + x)^m$, onde $|x| < 1$. Pelo Teorema 13.2.3,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \qquad |x| < 1 \tag{3}$$

Multiplicando ambos os lados de (3) por x, obtemos, pelo Teorema 12.4.2,

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^n \tag{4}$$

Reescrevendo o segundo membro de (3),

$$f'(x) = m + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

Reescrevendo essa somatória com o extremo inferior diminuído de 1, sendo n substituído por $n + 1$, temos

$$f'(x) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} (m-n) \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (4) por n, obtemos

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

As séries para $f'(x)$ e $xf'(x)$ são absolutamente convergentes para $|x| < 1$. Então, pelo Teorema 12.4.3, elas podem ser somadas termo a termo, e a série resultante será absolutamente convergente, para $|x| < 1$. Então, da adição,

$$(1 + x)f'(x) = m\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n\right]$$

Como por (2) a expressão entre colchetes é $f(x)$, então

$$(1 + x)f'(x) = mf(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1 + x}$$

O primeiro membro da equação acima é $D_x[\ln f(x)]$; assim,

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{m}{1 + x}$$

Mas também sabemos que

$$\frac{d}{dx}[\ln(1 + x)^m] = \frac{m}{1 + x}$$

Como $\ln f(x)$ e $\ln(1 + x)^m$ têm a mesma derivada, eles diferem por uma constante. Logo,

$$\ln f(x) = \ln(1 + x)^m + C$$

De (2), $f(0) = 1$. Logo $C = 0$; assim,

$$f(x) = (1 + x)^m$$

Provamos o teorema binomial geral, que agora enunciaremos.

13.5.1 TEOREMA Teorema Binomial

Se m for um número real qualquer, então

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot(m-n+1)}{n!} x^n$$

para todos os valores de x, tais que $|x| < 1$.

Se m for um inteiro positivo, a série binomial terminará após um número finito de termos.

EXEMPLO 1 Expresse como uma série de potência em x:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Solução Do Teorema 13.5.1, quando $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}(1 + x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 \\ &\quad + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot \ldots \cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n + \ldots\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Do resultado do Exemplo 1, obtenha uma série binomial para $(1 - x^2)^{-1/2}$ e use-a, de modo a achar uma série de potências para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Solução Substitua x por $-x^2$ na série para $(1 + x)^{-1/2}$ e obtenha para $|x| < 1$

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \ldots$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

O exemplo a seguir mostra como a série binomial é usada para o cálculo de raízes.

EXEMPLO 3 Calcule o valor de $\sqrt[3]{25}$ com precisão de três casas decimais, usando a série binomial para $(1 + x)^{1/3}$.

Solução Do Teorema 13.5.1,

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{se } |x| < 1$$

Como $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{\frac{25}{27}}$, podemos escrever

$$\sqrt[3]{25} = 3(1 - \tfrac{2}{27})^{1/3} \tag{5}$$

Da série para $(1 + x)^{1/3}$ com $x = -\frac{2}{27}$,

$$\left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 + \dots$$

$$\approx 1 - 0{,}0247 - 0{,}0006 - 0{,}00003 - \dots \tag{6}$$

Se os três primeiros termos da série acima forem usados, segue de (13) da Secção 13.4 que o resto é

$$R_2\left(-\frac{2}{27}\right) = \frac{f'''(\xi_2)}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{3!}\right)(1 + \xi_2)^{(1/3)-3}\left(-\frac{2}{27}\right)^3$$

onde $-\frac{2}{27} < \xi_2 < 0$. Logo,

$$\left|R_2\left(-\frac{2}{27}\right)\right| = \left(\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\right)\frac{(1 + \xi_2)^{1/3}}{(1 + \xi_2)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^3 \tag{7}$$

Como $-\frac{2}{27} < \xi_2 < 0$, segue que

$$(1 + \xi_2)^{1/3} < 1^{1/3} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1 + \xi_2)^3} < \frac{1}{(\frac{25}{27})^3} \tag{8}$$

Além disso,

$$\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} < \frac{1}{9}$$

Assim, da desigualdade acima e de (8) em (7),

$$\left|R_2\left(-\frac{2}{27}\right)\right| < \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(\frac{25}{27})^3} \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^3 = \frac{8}{140.625} < 0{,}00006$$

Usando, então, os três primeiros termos da série (6), obtemos

$$\left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} \approx 0{,}9747$$

com um erro menor do que 0,00006. De (5), obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{25} &\approx 3(0{,}9747)\\ &= 2{,}9241\end{aligned}$$

com um erro menor do que 3(0,00006) = 0,00018. Arredondando para três casas decimais, $\sqrt[3]{25} \approx 2{,}924$.

EXERCÍCIOS 13.5

Nos Exercícios de 1 a 10, use uma série binomial de modo a encontrar a série de Maclaurin para a função dada e determine seu raio de convergência.

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$
2. $f(x) = (3-x)^{-2}$
3. $f(x) = (4+x)^{-1/2}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$
6. $f(x) = (4+x^2)^{-1}$
7. $f(x) = (9+x^4)^{-1/2}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Nos Exercícios de 11 a 16, calcule o valor da quantidade dada com três casas decimais de precisão, usando uma série binomial.

11. $\sqrt{24}$
12. $\sqrt{51}$
13. $\sqrt[4]{630}$
14. $\sqrt[3]{66}$
15. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$
16. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{31}}$

17. Integre termo a termo de 0 a x a série binomial para $(1+t^2)^{-1/2}$, de modo a obter a série de Maclaurin para $\operatorname{senh}^{-1} x$. Determine o raio de convergência.
18. Use um método similar ao do Exercício 17, a fim de encontrar a série de Maclaurin para $\operatorname{tgh}^{-1} x$. Determine o raio de convergência.
19. (a) Expresse $\sqrt[4]{1+x}$ como uma série de potências em x. (b) Use o resultado da parte (a) para expressar $\sqrt[4]{1+x^2}$ como uma série de potências em x. (c) Use o resultado da parte (b) para calcular, com três casas decimais de precisão, o valor de $\int_0^{1/2} \sqrt[4]{1+x^2}\,dx$.
20. Use o procedimento indicado no Exercício 19 para calcular, com três casas decimais de precisão, o valor de $\int_0^{1/4} (1-\sqrt{x})^{2/3}\,dx$.

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule com três casas decimais de precisão, o valor da integral definida.

21. $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3}\,dx$
22. $\int_0^{2/5} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx$
23. $\int_0^{1} \sqrt[3]{8+x^2}\,dx$
24. $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^3}\,dx$
25. $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$
26. $\int_0^{1/3} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
27. $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$
28. $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$, onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
29. Ache a série de Maclaurin para $\int_0^x \dfrac{t^p}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, se p for um inteiro não-negativo. Determine o raio de convergência da série.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13

Nos Exercícios de 1 a 12, determine o intervalo de convergência da série de potências dada.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n(n^2+n)}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}(x-3)^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{6^n}(x+1)^n$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x-1)^n$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$
11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{sen} 2n)x^n$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

Nos Exercícios de 13 a 16 faça o seguinte: (a) ache o raio de convergência da série de potências dada e o domínio de f; (b) escreva a série de potências que define a função f' e encontre o seu raio de convergência; (c) ache o domínio de f'.

13. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$
14. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$

15. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$

16. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache a série de potências que representa a integral dada e determine seu raio de convergência.

17. $\int_0^x \frac{dt}{t^2+16}$

18. $\int_3^x \frac{dt}{t-1}$

19. $\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

20. $\int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

Nos Exercícios de 21 a 24, calcule com a precisão de três casas decimais, o valor da integral definida com a substituição de x pelo número dado no exercício indicado.

21. $x = 3$; Exercício 17

22. $x = 4$; Exercício 18

23. $x = \frac{1}{2}$; Exercício 19

24. $x = \frac{1}{4}$; Exercício 20

Nos Exercícios de 25 a 34, use uma série de potências para calcular, com precisão quatro casas decimais, o valor da quantidade dada.

25. $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{5}$

26. sen 0,3

27. $\sqrt[3]{130}$

28. $\operatorname{sen}^{-1} 1$

29. cos 3°

30. $\sqrt[4]{e}$

31. ln 5

32. $\int_0^1 \cos x^3\,dx$

33. $\int_0^{1/4} \sqrt{x} \operatorname{sen} x\,dx$

34. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^5}$

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a série de Maclaurin para a função dada e ache o seu intervalo de convergência.

35. $f(x) = a^x \ (a > 0)$

36. $f(x) = \frac{1}{2-x}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

38. $f(x) = \sqrt{x+1}$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache a série de Taylor para a função dada no número indicado.

39. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$; em $-\frac{1}{3}\pi$

40. $f(x) = \frac{1}{x}$; em 2

41. $f(x) = \ln|x|$; em -1

42. $f(x) = e^{x-2}$; em 2

Os Exercícios de 43 a 47 referem-se às funções J_0 e J_1 definidas por séries de potências, como segue:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!n!2^{2n}} \qquad J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

As funções J_0 e J_1 são chamadas de funções de Bessel da primeira espécie de ordem zero e um, respectivamente.

43. Mostre que ambas J_0 e J_1 convergem para todo valor real de x.

44. Mostre que $y = J_0(x)$ é uma solução da equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

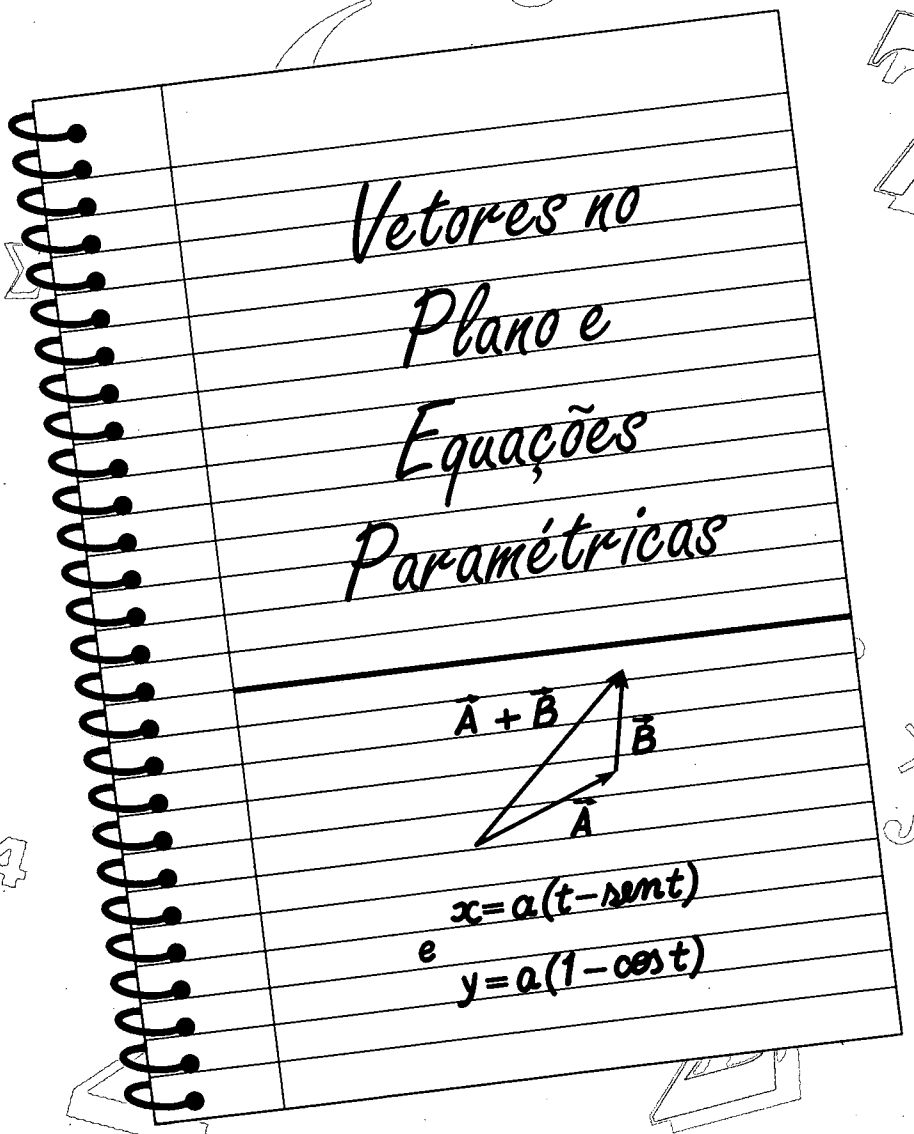
45. Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

46. Mostre que $D_x(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$.

47. Mostre que $y = J_1(x)$ é uma solução da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-1)y = 0$$

QUATORZE



Neste capítulo e no Capítulo 15 os vetores* serão tratados de forma moderna e essa abordagem serve como introdução à perspectiva da Álgebra Linear e, ainda, à análise vetorial clássica. Na Secção 14.1 definimos um *vetor no plano* como um par ordenado de números reais e realizamos operações com vetores, aplicando operações algébricas em suas coordenadas reais, o que também será feito na Secção 14.2. Na Secção 14.3 nós introduzimos um novo tipo de função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Essas funções são chamadas de funções com valores vetoriais. O gráfico de uma função com valores vetoriais é uma curva que também pode ser representada por *equações paramétricas*. Tais equações expressam as coor-

* **N. do T.:** No texto, onde aparecem vetores dados por seu módulo e direção, está subentendido tratar-se de *direção orientada*.

denadas x e y dos pontos sobre uma curva plana como funções de uma terceira variável t, a qual representa, freqüentemente, o tempo. O cálculo de funções com valores vetoriais, apresentado na Secção 14.3, envolve o cálculo de funções com valores reais definidas por suas equações paramétricas correspondentes.

As demais secções do capítulo envolvem aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia. As aplicações geométricas incluem o *comprimento de arco, o vetor tangente e o vetor normal* a curvas, e a *curvatura*. Quanto às aplicações em Física e Engenharia, usamos vetores para calcular o *trabalho* e para discutir o *movimento ao longo de uma curva.*

14.1 VETORES NO PLANO

As aplicações de Matemática envolvem, freqüentemente, quantidades que possuem tanto módulo como direção e sentido. Exemplo de tal quantidade é a *velocidade*. Assim, a velocidade de um avião tem módulo (a velocidade escalar do avião), direção (que determina o curso) e o sentido (que determina o destino do avião). Outros exemplos de tais quantidades são *força, deslocamento* e *aceleração*. Físicos e engenheiros referem-se a um segmento de reta orientado como sendo um *vetor*, e aquelas quantidades que têm módulo, direção e sentido são chamadas de **quantidades vetoriais**. Em contraste, denominaremos **quantidades escalares** aquelas que têm módulo, mas não direção. Exemplos de quantidades escalares são comprimento, área, volume e velocidade. O estudo de vetores é chamado de **análise vetorial**.

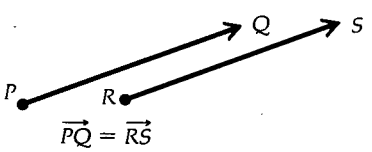


FIGURA 1

Podemos abordar a análise vetorial geométrica ou analiticamente. Se a abordagem geométrica for escolhida, definimos primeiro um segmento de reta orientado de um ponto P a um ponto Q e denotamos esse segmento de reta orientado por $\overrightarrow{PQ}$. O ponto P é chamado de **ponto inicial**, e o ponto Q é chamado de **ponto final**. Então, dizemos que dois segmentos orientados $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ são iguais se tiverem o mesmo *comprimento* e a mesma *direção* e *sentido*, e escrevemos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (veja a Figura 1). O segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ é denominado o **vetor** de P a Q. Um vetor será denotado por uma única letra, em negrito, tal como **A**. Em alguns livros, letras em tipo claro, com uma seta em cima, são usadas para indicar um vetor, por exemplo $\vec{A}$. Quando estiver fazendo o seu trabalho, você poderá usar essa notação ou $\underline{A}$, de modo a distinguir o símbolo para um vetor do símbolo usado para um número real.

Continuando a abordagem geométrica à análise vetorial, note que se o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ for o vetor **A**, e $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, o segmento de reta orientado $\overrightarrow{RS}$ também será o vetor A. Então, um vetor não muda quando o movemos paralelamente a si mesmo*. Com essa interpretação de vetor podemos supor, por conveniência, que todo vetor tem seu ponto inicial em algum ponto de referência fixo. Se tomarmos esse ponto como a origem de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, um vetor poderá ser definido analiticamente em termos de números reais. Tal definição permite o estudo da análise vetorial de um ponto de vista puramente matemático.

Neste livro usaremos a abordagem analítica; porém, a interpretação geométrica será usada com finalidades ilustrativas. Um vetor no plano é denotado por um par ordenado de números reais e a notação $\langle x, y\rangle$ será usada, em vez de (x, y), para evitar confusão entre a notação de um vetor e de um ponto. V_2 é o conjunto de todos esses pares ordenados.

* **N. do T.:** O autor não está considerando aqui os vetores aplicados, tais como uma força, em relação aos quais essa afirmativa não é verdadeira.

14.1.1 DEFINIÇÃO Um **vetor no plano** é um par ordenado de números reais $\langle x, y\rangle$. Os números x e y são chamados de **componentes** do vetor $\langle x, y\rangle$.

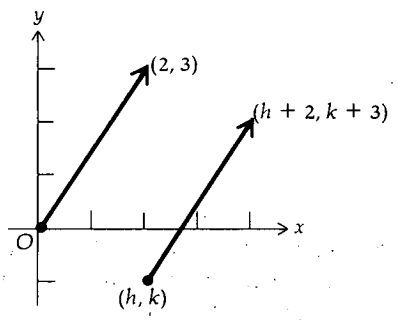


FIGURA 2

Há uma correspondência biunívoca entre os vetores $\langle x, y\rangle$ no plano e os pontos (x, y) do plano. Seja **A** o vetor dado pelo par ordenado de números reais $\langle a_1, a_2\rangle$. Se **A** for o ponto (a_1, a_2), então o vetor **A** poderá ser representado geometricamente pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{OA}$. Tal segmento de reta orientado é chamado de **representação** do vetor **A**. Qualquer outro segmento de reta orientado que seja igual a $\overrightarrow{OA}$ também será uma representação do vetor **A**. A representação específica de um vetor que tem seu ponto inicial na origem é chamada de **representação posicional** do vetor.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** O vetor $\langle 2, 3\rangle$ tem por representação posicional o segmento de reta orientado da origem ao ponto (2, 3). A representação do vetor $\langle 2, 3\rangle$ cujo ponto inicial é (h, k), tem como ponto final $(h + 2, k + 3)$; veja a Figura 2. ◀

O vetor $\langle 0, 0\rangle$ é chamado de **vetor zero**, sendo denotado por **0**; isto é,

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$$

Qualquer ponto é uma representação do vetor zero.

14.1.2 DEFINIÇÃO O **módulo*** de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações, e a **direção** e o **sentido** de um vetor não-nulo são a direção e o sentido de qualquer uma de suas representações.

O módulo do vetor **A** é denotado por $\|\mathbf{A}\|$.

14.1.3 TEOREMA Se **A** for o vetor $\langle a_1, a_2\rangle$, então $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Prova Como pela Definição 14.1.2 $\|\mathbf{A}\|$ é o comprimento de qualquer uma de suas representações, então $\|\mathbf{A}\|$ será o comprimento da representação posicional de **A** que é a distância da origem ao ponto (a_1, a_2). Assim, da fórmula da distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2}\\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\end{aligned}$$ ■

Observe que $\|\mathbf{A}\|$ é um número não-negativo, e não um vetor. Do Teorema 14.1.3 segue que $\|\mathbf{0}\| = 0$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $\mathbf{A} = \langle -3, 5\rangle$, então

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2}\\ &= \sqrt{34}\end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 1 Seja **A** o vetor $\langle -4, 5\rangle$ e P o ponto $(6, -2)$. (a) Trace a representação posicional de **A** e também a representação específica de **A**, tendo P como ponto inicial. (b) Ache o módulo de **A**.

---

* **N. do R.:** Também denominado *norma* e em Física às vezes é denominado *magnitude* ou *intensidade* do vetor.

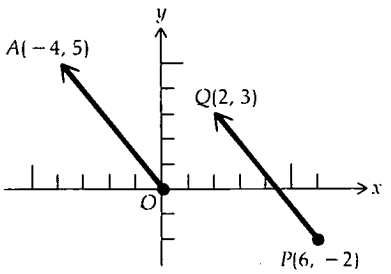


FIGURA 3

Solução

(a) Seja A o ponto $(-4, 5)$. A Figura 3 mostra $\overrightarrow{OA}$, que é a representação posicional do vetor **A**. Seja $\overrightarrow{PQ}$ a representação específica de **A**, tendo P como ponto inicial. Se $Q = (x, y)$, então

$$x - 6 = -4 \qquad y + 2 = 5$$
$$x = 2 \qquad y = 3$$

Logo, $Q = (2, 3)$ e $\overrightarrow{PQ}$ aparece na Figura 3.

(b) Do Teorema 14.1.3,

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{41}$$

O **ângulo de direção** de qualquer vetor não-nulo é o ângulo θ medido do lado positivo do eixo x no sentido anti-horário, até a representação posicional do vetor. Se θ for medido em radianos, $0 \leqslant \theta < 2\pi$*. Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_2}{a_1} \qquad \text{se } a_1 \neq 0 \tag{1}$$

Se $a_1 = 0$ e $a_2 > 0$, então $\theta = \frac{1}{2}\pi$; se $a_1 = 0$ e $a_2 < 0$, então $\theta = \frac{3}{2}\theta$. As Figuras de 4 a 6 mostram o ângulo de direção θ para alguns vetores cujas representações posicionais estão traçadas.

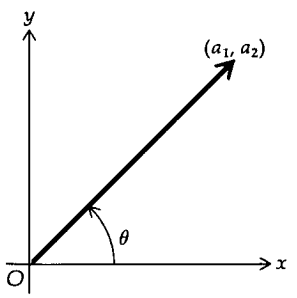


FIGURA 4

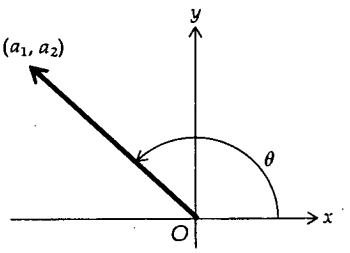


FIGURA 5

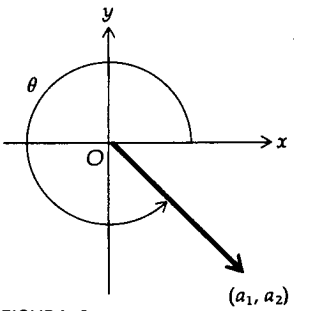


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Ache a medida em radianos do ângulo de direção de cada um dos seguintes vetores: (a) $\langle -1, 1 \rangle$; (b) $\langle 0, -5 \rangle$; (c) $\langle 1, -2 \rangle$.

Solução A representação posicional de cada um dos vetores em (a), (b) e (c) está nas Figuras 7, 8 e 9, respectivamente. (a) $\operatorname{tg} \theta = -1$, e $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$; assim $\theta = \frac{3}{4}\pi$. (b) $\operatorname{tg} \theta$ não existe, e $a_2 < 0$; assim, $\theta = \frac{3}{2}\pi$. (c) $\operatorname{tg} \theta = -2$ e $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$; logo, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-2) + 2\pi$; isto é, $\theta \approx 5{,}176$.

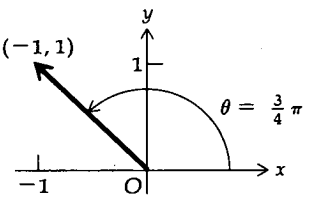


FIGURA 7

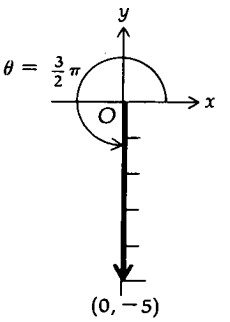


FIGURA 8

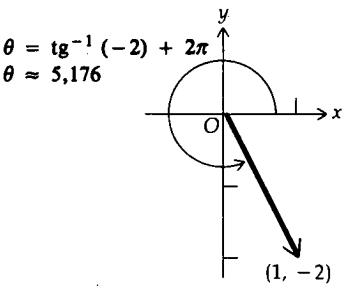


FIGURA 9

---

* **N. do R.:** Observe que um *ângulo de direção*, apesar do nome abreviado, caracteriza não somente uma *direção*, mas também um *sentido* de uma família de vetores não-nulos de diferentes módulos.

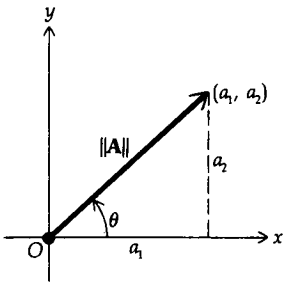


FIGURA 10

Observe que se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, sendo θ o ângulo de direção de $\mathbf{A}$, então

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \theta \qquad a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen} \theta \tag{2}$$

Veja a Figura 10, onde o ponto (a_1, a_2) está no primeiro quadrante.

Se o vetor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, então a representação de $\mathbf{A}$ cujo ponto inicial é (x, y) tem como pontos finais $(x + a_1, y + a_2)$. Dessa forma, um vetor pode ser considerado como uma translação do plano nele mesmo. A Figura 11 ilustra cinco representações do vetor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Em cada caso, $\mathbf{A}$ translada o ponto (x_i, y_i) no ponto $(x_i + a_1, y_i + a_2)$.

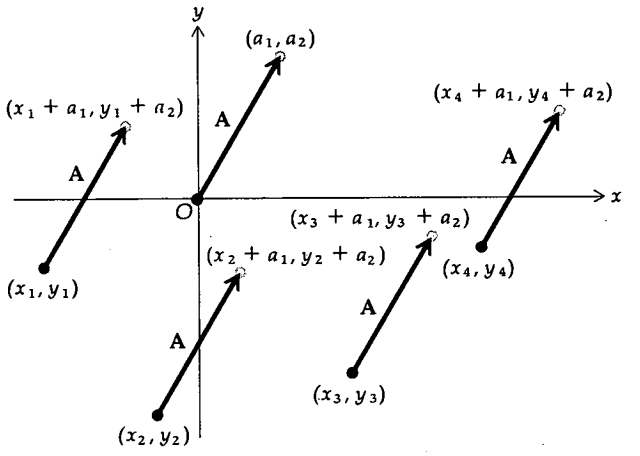


FIGURA 11

EXEMPLO 3 Seja P o ponto $(-1, 8)$ e Q o ponto $(3, 2)$. Ache o vetor $\mathbf{A}$ cuja representação é $\overrightarrow{PQ}$. Trace $\overrightarrow{PQ}$ e a representação posicional de $\mathbf{A}$.

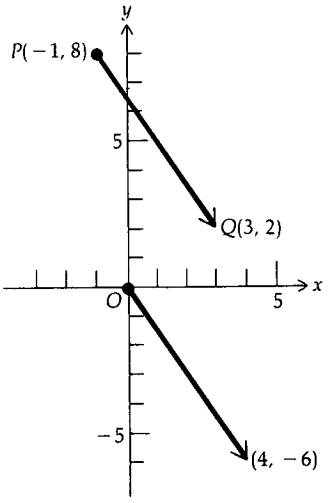


FIGURA 12

Solução A Figura 12 mostra o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Como $\overrightarrow{PQ}$ é uma representação de $\mathbf{A}$, o vetor $\mathbf{A}$ translada o ponto $P(-1, 8)$ no ponto $Q(3, 2)$. Mas o vetor $\langle a_1, a_2 \rangle$ translada o ponto $(-1, 8)$ no ponto $\langle -1 + a_1, 8 + a_2 \rangle$. Assim,

$$-1 + a_1 = 3 \qquad 8 + a_2 = 2$$
$$a_1 = 4 \qquad a_2 = -6$$

Logo, $\mathbf{A} = \langle 4, -6 \rangle$. A Figura 12 também mostra a representação posicional de $\mathbf{A}$.

A definição a seguir fornece-nos o método para somar dois vetores.

14.1.4 DEFINIÇÃO A **soma** de dois vetores $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ é o vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definido por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $\mathbf{A} = \langle 3, -1 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle -4, 5 \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 3 + (-4), -1 + 5 \rangle \\ &= \langle -1, 4 \rangle \end{aligned}$$

◀

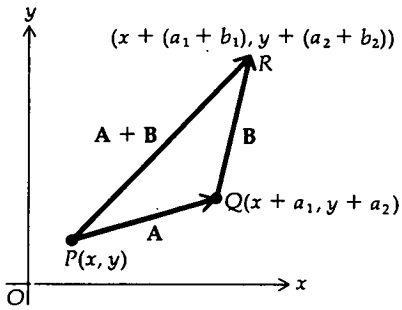


FIGURA 13

A interpretação geométrica da soma de dois vetores está mostrada na Figura 13. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, e seja P o ponto (x, y). Então, $\mathbf{A}$ translada o ponto P no ponto $(x + a_1, y + a_2) = Q$. O vetor $\mathbf{B}$ translada o ponto Q no ponto $((x + a_1) + b_1, (y + a_2) + b_2)$ ou, equivalentemente, $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$. Além disso,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Logo, o vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ translada no ponto $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$ o ponto P. Assim, na Figura 13 $\overrightarrow{PQ}$ é uma representação do vetor $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{QR}$ é uma representação do vetor $\mathbf{B}$, e $\overrightarrow{PR}$ é uma representação do vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. As representações dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são os lados adjacentes de um paralelogramo, e a representação do vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é uma diagonal do paralelogramo. Essa diagonal é chamada de a **resultante** dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. A regra para adição de vetores é, às vezes, chamada de **lei do paralelogramo**.

Força é uma quantidade vetorial cuja magnitude é expressa em unidades de força e o ângulo de direção é determinado pela direção da força. Mostra-se em Física que duas forças aplicadas a um objeto num dado ponto podem ser substituídas por uma força equivalente que é a sua resultante.

EXEMPLO 4 Duas forças de 200 N e 250 N de magnitude formam um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ entre si e estão aplicadas a um objeto no mesmo ponto. Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o ângulo que ela faz com a força de 200 N.

Solução Consulte a Figura 14, onde os eixos foram escolhidos de tal forma que a representação posicional da força de 200 N seja ao longo da parte positiva do eixo x. O vetor $\mathbf{A}$ representa essa força, e $\mathbf{A} = \langle 200, 0 \rangle$. O vetor $\mathbf{B}$ representa a força de 250 N. Das fórmulas (2), se $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então

$$b_1 = 250 \cos \tfrac{1}{3}\pi = 125 \qquad b_2 = 250 \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi \approx 216{,}5$$

Assim, $\mathbf{B} = \langle 125, 216{,}5 \rangle$. A força resultante é $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, e

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 200, 0 \rangle + \langle 125, 216{,}5 \rangle = \langle 325, 216{,}5 \rangle$$

(a) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{(325)^2 + (216{,}5)^2} \approx 390{,}5$

(b) Se θ for o ângulo entre os vetores $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$, então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{216{,}5}{325}$$

$$\operatorname{tg} \theta \approx 0{,}6662$$

$$\theta \approx 0{,}5877$$

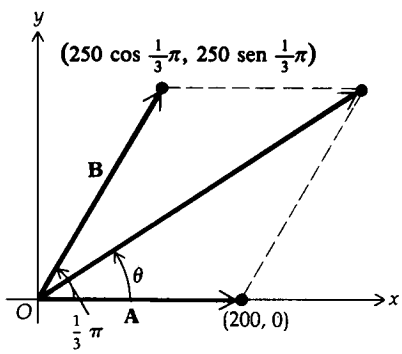


FIGURA 14

14.1.5 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, então o vetor $\langle -a_1, -a_2 \rangle$ é definido como o **oposto** de $\mathbf{A}$, denotado por $-\mathbf{A}$.

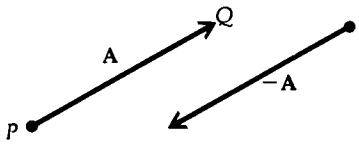


FIGURA 15

Se o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ for uma representação do vetor **A**, então o segmento de reta $\overrightarrow{QP}$ será uma representação de $-\mathbf{A}$. Qualquer segmento de reta orientado que seja paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, tenha o mesmo comprimento que $\overrightarrow{PQ}$ e possua um sentido oposto àquele de $\overrightarrow{PQ}$ também será uma representação de $-\mathbf{A}$. Veja a Figura 15. Definiremos agora a subtração de dois vetores.

14.1.6 DEFINIÇÃO A **diferença** de dois vetores **A** e **B**, denotada por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é o vetor obtido ao somarmos **A** ao oposto de **B**; isto é,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Assim, se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, então $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, e

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

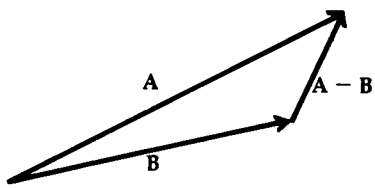


FIGURA 16

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se $\mathbf{A} = \langle 4, -2 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle 6, -3 \rangle$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 4, -2 \rangle - \langle 6, -3 \rangle \\ &= \langle 4, -2 \rangle + \langle -6, 3 \rangle \\ &= \langle -2, 1 \rangle \end{aligned}$$ ◀

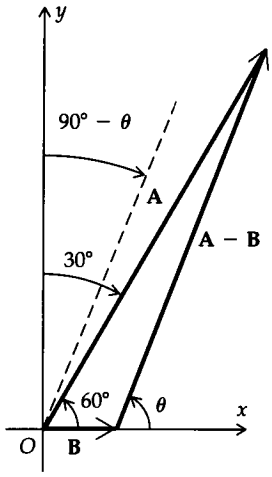


FIGURA 17

Para interpretar geometricamente a diferença entre dois vetores, vamos supor que os vetores **A** e **B** tenham o mesmo ponto inicial. Então, o segmento de reta do ponto final da representação de **B** ao ponto final da representação de **A** será uma representação do vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Isso obedece à lei do paralelogramo $\mathbf{B} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$. Veja a Figura 16.

O exemplo a seguir, envolvendo a diferença de dois vetores, diz respeito à navegação. A *velocidade escalar no ar* de um avião refere-se à sua velocidade em relação ao ar, e a *velocidade escalar no solo* indica sua velocidade relativa ao solo. Quando venta, a velocidade do avião em relação ao solo é a resultante do vetor que representa a velocidade do vento e de um vetor que indica a velocidade do veículo com relação ao ar. Em navegação, o *curso* de um navio ou de um avião é o ângulo medido em graus, no sentido horário, na direção em que o veículo está se deslocando, a partir do Norte. O ângulo é considerado positivo, se estiver no sentido horário.

EXEMPLO 5 Um avião pode voar a uma velocidade escalar no ar de 300 mi/h. Se o vento soprar do Leste a 50 mi/h, que orientação o avião deverá seguir, para que seu curso seja de 30°? Qual será a velocidade escalar do avião, se ele seguir esse trajeto?

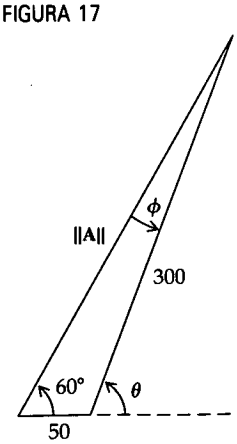


FIGURA 18

Solução Refira-se à Figura 17, que mostra as representações posicionais dos vetores **A** e **B**, bem como de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. O vetor **A** representa a velocidade do avião em relação ao solo, considerando-se um curso de 30°. O ângulo de direção de **A** é 60°. O vetor **B** indica a velocidade do vento. Como **B** tem um módulo de 50 e um ângulo de direção de 0°, $\mathbf{B} = \langle 50, 0 \rangle$. O vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ representa a velocidade do avião em relação ao ar. Assim, $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 300$. Seja θ o ângulo de direção de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. Da Figura 17 obtemos o triângulo mostrado na Figura 18.

Aplicando a lei dos senos a esse triângulo, obtemos

$$\frac{\text{sen } \phi}{50} = \frac{\text{sen } 60°}{300}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{50 \text{ sen } 60°}{300}$$

$$\text{sen } \phi = 0{,}1433$$

$$\phi = 8{,}3°$$

Então,

$$\theta = 60° + 8{,}3°$$
$$= 68{,}3°$$

Novamente, aplicando a lei dos senos ao triângulo na Figura 18, temos

$$\frac{\|\mathbf{A}\|}{\text{sen } (180° - \theta)} = \frac{300}{\text{sen } 60°}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \frac{300 \text{ sen } 111{,}7°}{\text{sen } 60°}$$

$$\|\mathbf{A}\| = 322$$

A bússola do avião deveria indicar um rumo de $90° - \theta$, ou seja, 21,7°, e se o avião seguir esse curso, sua velocidade escalar de solo será de 322 mi/h.

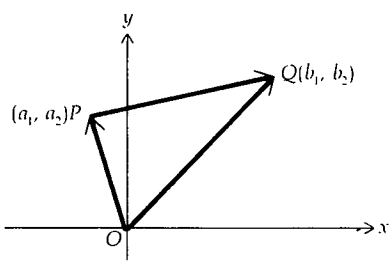


FIGURA 19

Suponha que P seja o ponto (a_1, a_2) e Q seja o ponto (b_1, b_2). Usaremos a notação $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ para denotar o vetor que tem o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ como uma representação. Veja a Figura 19, onde estão mostradas as representações dos vetores $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{OQ})$. Observe que

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1, b_2\rangle - \langle a_1, a_2\rangle$$

$$\boxed{\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2\rangle}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Se P for o ponto $(-6, 7)$ e Q for o ponto $(2, 9)$, então

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2 - (-6), 9 - 7\rangle$$
$$= \langle 8, 2\rangle$$ ◀

Outra operação com vetores é a *multiplicação por um escalar*. Segue a definição da multiplicação de um vetor por um escalar (um número real).

14.1.7 DEFINIÇÃO Se c for um escalar e $\mathbf{A}$ for o vetor $\langle a_1, a_2\rangle$, então o produto de c e $\mathbf{A}$, denotado por $c\mathbf{A}$, será um vetor dado por

$$c\mathbf{A} = c\langle a_1, a_2\rangle$$
$$= \langle ca_1, ca_2\rangle$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Se $\mathbf{A} = \langle 4, -5\rangle$, então

$$3\mathbf{A} = 3\langle 4, -5\rangle$$
$$= \langle 12, -15\rangle$$ ◀

No Exercício 45 você deverá mostrar que se **A** for um vetor e c for um escalar qualquer

$$0(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

O módulo do vetor $c\mathbf{A}$ é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{A}\| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1{}^2 + a_2{}^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} \\ &= |c|\,\|\mathbf{A}\|\end{aligned}$$

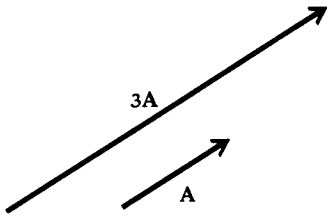


FIGURA 20

Logo, o módulo de $c\mathbf{A}$ é o valor absoluto de c vezes o módulo de **A**.

A interpretação geométrica do vetor $c\mathbf{A}$ é dada nas Figuras 20 e 21. Se $c > 0$, então $c\mathbf{A}$ será um vetor cuja representação tem um comprimento c vezes o módulo de **A** e o mesmo sentido que **A**; um exemplo disso aparece na Figura 20, onde $c = 3$. Se $c < 0$, então $c\mathbf{A}$ será um vetor cuja representação tem um comprimento $|c|$ vezes o módulo de **A**, a mesma direção e o sentido oposto ao de **A**. Isso aparece na Figura 21, onde $c = -\frac{1}{2}$.

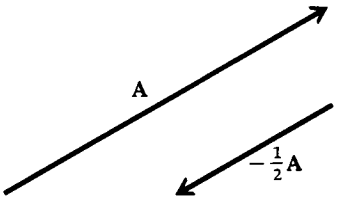


FIGURA 21

O teorema a seguir fornece leis satisfeitas pelas operações de adição vetorial e multiplicação por escalar para quaisquer vetores em V_2.

14.1.8 TEOREMA Se **A**, **B** e **C** forem vetores quaisquer em V_2 e c e d forem quaisquer escalares, então a adição de vetores e a multiplicação por escalar satisfarão as seguintes propriedades:

(i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (lei comutativa)
(ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (lei associativa)
(iii) Existe um vetor $\mathbf{0}$ em V_2 para o qual $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (existência de identidade aditiva)
(iv) Existe um vetor $-\mathbf{A}$ em V_2 tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (existência do oposto)
(v) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ (lei associativa)
(vi) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (lei distributiva)
(vii) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (lei distributiva)
(viii) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ (existência de identidade para a multiplicação por escalar)

Prova Daremos as demonstrações de (i) e (vi) e deixaremos as demais como exercícios (veja os Exercícios de 40 a 50). Na demonstração de (i) usaremos a lei comutativa para números reais e na demonstração de (vi) empregaremos a lei distributiva para números reais. Sejam $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$.

Prova de (i)

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle \\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2\rangle \\ &= \langle b_1, b_2\rangle + \langle a_1, a_2\rangle \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A}\end{aligned}$$

Prova de (vi)

$$\begin{aligned}c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c(\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle) \\ &= c(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle) \\ &= \langle c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2)\rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2\rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2\rangle + \langle cb_1, cb_2\rangle \\ &= c\langle a_1, a_2\rangle + c\langle b_1, b_2\rangle \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B}\end{aligned}$$

■

O Teorema 14.1.8 é importante, pois das oito propriedades nele estabelecidas podem ser tiradas todas as leis algébricas para as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar em V_2. Essas leis são similares às leis da Aritmética de números reais. Além disso, em Álgebra Linear, um *espaço vetorial real* é definido como um conjunto de vetores associado a um conjunto de números reais (*escalares*) e duas operações de adição vetorial e multiplicação por escalar que satisfazem as oito propriedades dadas no Teorema 14.1.8.

14.1.9 DEFINIÇÃO Um **espaço vetorial real** V é um conjunto de elementos chamados de *vetores*, associado a um conjunto de números reais, denominados *escalares*, com duas operações chamadas de *adição vetorial* e *multiplicação por escalar*, tais que para todo par de vetores **A** e **B** em V e para todo escalar c, estejam definidos os vetores **A** + **B** e c**A** em V, satisfazendo as propriedades (i)-(viii) do Teorema 14.1.8.

Da Definição 14.1.9 e do Teorema 14.1.8, segue que V_2 é um espaço vetorial real.

Consideremos um vetor arbitrário em V_2, escrevendo-o na seguinte forma:

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle$$
$$\langle a_1, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle \tag{3}$$

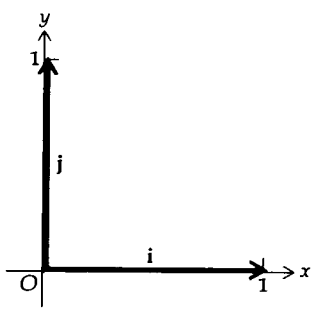


FIGURA 22

Como o módulo de cada um dos vetores $\langle 1, 0\rangle$ e $\langle 0, 1\rangle$ é unitário, eles são chamados de **vetores unitários**. Introduziremos a seguinte notação para esses vetores unitários:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

Com essas notações, temos de (3)

$$\boxed{\langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}} \tag{4}$$

A representação posicional de cada um dos vetores **i** e **j** é mostrada na Figura 22. A equação (4) estabelece que qualquer vetor em V_2 pode ser escrito como uma combinação linear de **i** e **j**. Desse fato e dado que **i** e **j** são independentes (suas representações posicionais não são colineares), dizemos que os vetores **i** e **j** formam uma **base** para o espaço vetorial V_2. Como exemplo de uma base formada por vetores não-unitários, veja o Exercício 52. O número de elementos numa base de um espaço vetorial é chamado de **dimensão** do espaço vetorial. Logo, V_2 é um espaço vetorial bidimensional.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** De (4),

$$\langle 3, -4\rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$ ◀

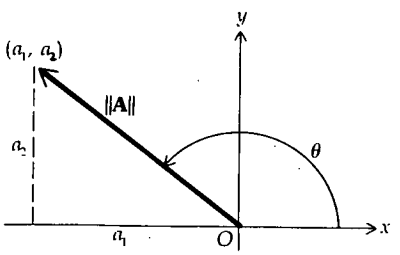


FIGURA 23

Seja **A** o vetor $\langle a_1, a_2\rangle$ e θ o ângulo de direção de **A**. Veja a Figura 23, onde o ponto (a_1, a_2) está no segundo quadrante e está mostrada a representação posicional de **A**. Como $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos\theta$ e $a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta$, podemos escrever

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})} \tag{5}$$

Essa equação expressa o vetor **A** em termos de seu módulo, do seno e co-seno do seu ângulo de direção e dos vetores unitários **i** e **j**.

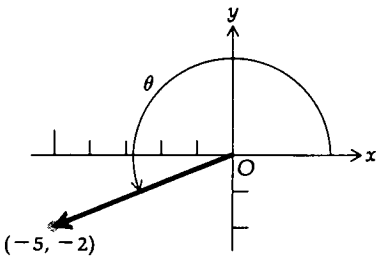


FIGURA 24

EXEMPLO 6 Expresse o vetor $\langle -5, -2\rangle$ na forma da igualdade (5).

Solução Veja a Figura 24 que mostra a representação posicional do vetor $\langle -5, -2\rangle$.

$$\|\langle -5, -2\rangle\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \qquad \cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Logo, de (5), temos

$$\langle -5, -2\rangle = \sqrt{29}\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$

14.1.10 TEOREMA Se o vetor $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ não for nulo, então o vetor unitário $\mathbf{U}$, que tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{A}$, será dado por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{j}$$

Prova Devemos mostrar que o vetor $\mathbf{U}$ é um vetor unitário, tendo a mesma direção e sentido de $\mathbf{A}$.

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = 1$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(\mathbf{A})$$

Como $\|\mathbf{U}\| = 1$, $\mathbf{U}$ é um vetor unitário e já que $\mathbf{U}$ é um escalar positivo vezes o vetor $\mathbf{A}$, a direção de $\mathbf{U}$ é a mesma que a direção de $\mathbf{A}$. ■

EXEMPLO 7 Dado $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, ache o vetor unitário tendo a mesma direção que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Solução

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

Assim,

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Pelo Teorema 14.1.10, o vetor unitário desejado é

$$\mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{j}$$

EXERCÍCIOS 14.1

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) esboce a representação posicional do vetor dado **A** *e também a representação específica através do ponto P dado. (b) Ache o módulo de* **A**.

1. $\mathbf{A} = \langle 3, 4\rangle$; $P = (2, 1)$
2. $\mathbf{A} = \langle -2, 5\rangle$; $P = (-3, 4)$
3. $\mathbf{A} = \langle e, -\frac{1}{2}\rangle$; $P = (-2, -e)$
4. $\mathbf{A} = \langle 4, 0\rangle$; $P = (2, 6)$

Nos Exercícios 5 e 6, ache a medida exata em radianos do ângulo de direção do vetor dado. Na parte (c) aproxime a medida em radianos até o centésimo mais próximo.

5. (a) $\langle 1, -1\rangle$; (b) $\langle -3, 0\rangle$; (c) $\langle 5, 2\rangle$
6. (a) $\langle \sqrt{3}, 1\rangle$; (b) $\langle 0, 4\rangle$; (c) $\langle -3, 2\rangle$

Nos Exercícios de 7 a 10, ache o vetor **A** *cuja representação é* $\overrightarrow{PQ}$. *Esboce* $\overrightarrow{PQ}$ *e a representação posicional de* **A**.

7. $P = (3, 7)$; $Q = (5, 4)$
8. $P = (5, 4)$; $Q = (3, 7)$
9. $P = (-5, -3)$; $Q = (0, 3)$
10. $P = (-\sqrt{2}, 0)$; $Q = (0, 0)$

Nos Exercícios de 11 a 14, ache o ponto S, tal que $\overrightarrow{PQ}$ *e* $\overrightarrow{RS}$ *representem o mesmo vetor.*

11. $P = (2, 5)$; $Q = (1, 6)$; $R = (-3, 2)$
12. $P = (-2, 0)$; $Q = (-3, -4)$; $R = (4, 2)$
13. $P = (0, 3)$; $Q = (5, -2)$; $R = (7, 0)$
14. $P = (-1, 4)$; $Q = (2, -3)$; $R = (-5, -2)$

Nos Exercícios 15 e 16, ache a soma do par de vetores dados e ilustre geometricamente.

15. (a) $\langle 2, 4\rangle$, $\langle -3, 5\rangle$; (b) $\langle -3, 0\rangle$, $\langle 4, -5\rangle$
16. (a) $\langle 0, 3\rangle$, $\langle -2, 3\rangle$; (b) $\langle 2, 3\rangle$, $\langle -\sqrt{2}, -1\rangle$

Nos Exercícios 17 e 18, subtraia o segundo vetor do primeiro e ilustre geometricamente.

17. (a) $\langle -3, -4\rangle$, $\langle 6, 0\rangle$; (b) $\langle 1, e\rangle$, $\langle -3, 2e\rangle$
18. (a) $\langle 0, 5\rangle$, $\langle 2, 8\rangle$; (b) $\langle 3, 7\rangle$, $\langle 3, 7\rangle$

Nos Exercícios 19 e 20, ache o vetor ou o escalar, sendo $\mathbf{A} = \langle 2, 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3\rangle$ e $\mathbf{C} = \langle -3, 2\rangle$.

19. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (b) $\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|$; (c) $\|7\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$
20. (a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (b) $\|\mathbf{C}\|$; (c) $\|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}\|$

Nos Exercícios de 21 a 24, ache o vetor ou o escalar, sendo $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

21. (a) $5\mathbf{A}$; (b) $-6\mathbf{B}$; (c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (d) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|$
22. (a) $-2\mathbf{A}$; (b) $3\mathbf{B}$; (c) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (d) $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$
23. (a) $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$; (b) $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$; (c) $\|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}\|$; (d) $\|5\mathbf{A}\| - \|6\mathbf{B}\|$
24. (a) $\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|$; (b) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$; (c) $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\|$; (d) $\|3\mathbf{B}\| - \|2\mathbf{A}\|$

Nos Exercícios 25 e 26, $\mathbf{A} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

25. Ache: (a) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$ e (b) $\|5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}\|$.
26. Ache: (a) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}$ e (b) $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}\|$.

Nos Exercícios 27 e 28, $\mathbf{A} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

27. Ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
28. Ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Nos Exercícios de 29 a 32, escreva o vetor dado na forma $r(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$, *onde r é o módulo e* θ *é o ângulo de direção. Ache também o vetor unitário tendo a mesma direção e sentido.*

29. (a) $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; (b) $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
30. (a) $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; (b) $2\sqrt{5}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
31. (a) $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$; (b) $-16\mathbf{i}$
32. (a) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; (b) $2\mathbf{j}$

33. Se $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, ache os escalares h e k, tais que $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.
34. Se $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, ache os escalares h e k, tais que $\mathbf{B} = h\mathbf{C} - k\mathbf{A}$.
35. Se $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, mostre que **C** não pode ser escrito na forma $h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$, onde h e k são escalares.
36. Duas forças com magnitudes de 340 N e 475 N estão aplicadas no mesmo ponto de um objeto e formam entre si um ângulo de 34,6°. Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o valor do ângulo que ela faz com a força de 475 N com a precisão de até um décimo de grau.
37. Duas forças com magnitudes de 60 N e 80 N formam entre si um ângulo de 30° e estão aplicadas ao mesmo ponto de um objeto. Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o ângulo que ela forma com a força de 60 N, com precisão de um grau.
38. Uma força com magnitude de 22 N e outra de 34 N são aplicadas ao mesmo ponto de um objeto e formam entre si um ângulo θ. Se a força resultante tem uma magnitude de 46 N, ache θ aproximado ao grau mais próximo.
39. Uma força com 112 N de magnitude e outra com 84 N são aplicadas a um objeto, no mesmo ponto, e a força resultante tem uma magnitude de 162 N. Ache, com a precisão de um décimo de grau, o ângulo entre a força resultante e a força de 112 N.
40. Um avião possui uma velocidade escalar no ar de 560 km/h. Para que o curso que está realizando siga o rumo norte, a bússola deve marcar 340°. Se o vento soprar do oeste, (a) Qual será o módulo de sua velocidade? (b) Qual será a velocidade escalar no solo?
41. Em um avião com velocidade escalar no ar de 400 km/h, o piloto deseja voar rumo ao norte. Se o vento soprar a 96 km/h em direção ao leste, (a) Qual deverá ser a orientação da bússola? (b) Qual será a velocidade escalar do avião se ele seguir esse trajeto?
42. Um barco pode viajar a 28 km/h em relação à água. Em um rio cuja corrente é de 5 km/h em relação ao oeste, o barco tem sua bússola rumo ao sul. Qual será a velocidade escalar do barco em relação à terra e qual será o seu curso?
43. Um nadador que pode nadar a uma velocidade escalar de 1,5 mi/h em relação à água deixa a margem sul de um rio

e se dirige para a margem norte, atravessando-o. Se a corrente do rio for para o leste a 0,8 mi/h, (a) Em que direção o nadador estará indo? (b) Qual será a velocidade escalar do nadador em relação à terra? (c) Se a distância para se atravessar o rio é de 1 milha, quanto o nadador deverá percorrer para chegar à margem norte do rio?

44. Suponha que o nadador no Exercício 43 deseje chegar a um ponto da margem norte, atravessando diretamente o rio. (a) Qual a direção que ele deverá tomar? (b) Qual será a velocidade escalar em relação à terra, se essa direção for tomada?

45. Prove que se **A** for um vetor qualquer e c for um escalar qualquer, então $0(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ e $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

46. Prove o Teorema 14.1.8(ii).

47. Prove o Teorema 14.1.8(iii) e (viii).

48. Prove o Teorema 14.1.8(iv).

49. Prove o Teorema 14.1.8(v).

50. Prove o Teorema 14.1.8(vii).

51. Dado $\mathbf{A} = \langle 2, -5\rangle$; $\mathbf{B} = \langle 3, 1\rangle$; $\mathbf{C} = \langle -4, 2\rangle$. (a) Ache $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ e ilustre geometricamente. (b) Ache $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ e ilustre geometricamente.

52. Dizemos que dois vetores são *independentes* se e somente se suas representações posicionais não forem colineares. Além disso, dois vetores **A** e **B** formam uma *base* do espaço vetorial V_2 se e somente se qualquer vetor em V_2 puder ser escrito como uma combinação linear de **A** e **B**. O teorema que estabelece que dois vetores formam uma base para o espaço vetorial V_2 se eles forem independentes pode ser provado. Mostre que esse teorema é válido para os dois vetores $\langle 2, 5\rangle$ e $\langle 3, -1\rangle$, da seguinte forma: (a) comprove que os vetores são independentes, mostrando que suas representações posicionais não são colineares; (b) comprove que os vetores formam uma base, mostrando que todo vetor $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ pode ser escrito como $c(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + d(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$, onde c e d são escalares. (*Sugestão:* ache c e d em termos de a_1 e a_2.)

53. Considere as duas primeiras sentenças do Exercício 52. Pode-se provar um teorema, o qual estabelece que dois vetores do espaço vetorial V_2 formam uma base somente se forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os vetores $\langle 3, -2\rangle$ e $\langle -6, 4\rangle$, da seguinte forma: (a) comprove que os vetores são dependentes (não independentes), mostrando que suas representações posicionais são colineares; (b) demonstre que os vetores não formam uma base, obtendo um vetor que não pode ser escrito como $c(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + d(-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$, onde c e d são escalares.

54. Dizemos que um conjunto de vetores $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \ldots, \mathbf{V}_n$ é *linearmente dependente* se e somente se existirem escalares $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, nem todos nulos, tais que

$$k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2 + k_3\mathbf{V}_3 + \ldots + k_n\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$$

Mostre que se $\mathbf{V}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{V}_3 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, então $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ são linearmente dependentes.

55. Seja $\overrightarrow{PQ}$ a representação do vetor **A**, $\overrightarrow{QR}$ a representação do vetor **B**, e $\overrightarrow{RS}$ a representação do vetor **C**. Prove que se $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ e $\overrightarrow{RS}$ são os lados de um triângulo, então $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

56. Prove analiticamente a desigualdade triangular para vetores

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

14.2 PRODUTO ESCALAR

Na Secção 14.1, a adição e a subtração de vetores, bem como a multiplicação de um vetor por um escalar, foram definidas. Definiremos agora uma operação de multiplicação entre dois vetores, chamada de *produto escalar*.

14.2.1 DEFINIÇÃO

Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$ forem dois vetores em V_2, então o **produto escalar** de **A** e **B**, denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, será dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle b_1, b_2\rangle \\ &= a_1b_1 + a_2b_2\end{aligned}$$

O produto escalar de dois vetores é um número real (ou escalar), e não um vetor. Às vezes é também chamado de **produto interno**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $\mathbf{A} = \langle 2, -3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle -\frac{1}{2}, 4\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 2, -3\rangle \cdot \langle -\tfrac{1}{2}, 4\rangle \\ &= (2)(-\tfrac{1}{2}) + (-3)(4) \\ &= -13\end{aligned}$$ ◀

Os seguintes produtos escalares são úteis e facilmente verificáveis (veja o Exercício 5).

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$$

O teorema a seguir estabelece a comutatividade e distributividade do produto escalar em relação à soma de vetores.

14.2.2 TEOREMA Se **A**, **B** e **C** forem vetores quaisquer em V_2, então

(i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (lei comutativa)
(ii) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (lei distributiva)

Deixaremos as demonstrações de (i) e (ii) como exercícios (veja os Exercícios 6 e 7).

Como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é um escalar, a expressão $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ não tem sentido. Por esse motivo, não consideraremos a associatividade do produto escalar.

Algumas outras leis do produto escalar são dadas no teorema a seguir.

14.2.3 TEOREMA Se **A** e **B** forem vetores quaisquer em V_2 e c for um escalar qualquer, então

(i) $c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$
(ii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$
(iii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2$

As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 8 a 10).

Discutiremos agora o que entendemos por ângulo entre dois vetores e isso nos levará a outra expressão para o produto escalar de dois vetores.

14.2.4 DEFINIÇÃO Sejam **A** e **B** dois vetores não-nulos, tais que **A** não seja um múltiplo escalar de **B**. Se $\overrightarrow{OP}$ for a representação posicional de **A** e $\overrightarrow{OQ}$ for a representação posicional de **B**, então o **ângulo entre os vetores A e B** será definido como o ângulo de medida positiva entre $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, interior ao triângulo determinado pelos pontos O, P e Q. Se $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, onde c é um escalar, então se $c > 0$, o ângulo entre os vetores terá medida 0 em radianos; se $c < 0$, o ângulo entre os vetores terá por medida π radianos.

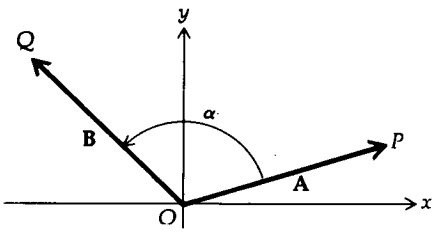


FIGURA 1

O símbolo usado para denotar o ângulo entre dois vetores também é usado para denotar a medida daquele ângulo. Da Definição 14.2.4, se α for a medida em radianos do ângulo entre dois vetores, então $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. A Figura 1 mostra o ângulo entre dois vetores, se **A** não for um múltiplo escalar de **B**.

O teorema a seguir é, talvez, o fato mais importante sobre o produto escalar de dois vetores.

14.2.5 TEOREMA Se α for o ângulo entre os dois vetores não-nulos **A** e **B**, então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos \alpha$$

Prova Seja $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Seja $\overrightarrow{OP}$ a representação posicional de **A** e $\overrightarrow{OQ}$ a representação posicional de **B**. Então, o ângulo entre **A** e **B** é o ângulo na origem, no triângulo POQ (veja a Figura 2); P é o ponto (a_1, b_2) e Q é o ponto (b_1, b_2). No triângulo POQ, $\|\mathbf{A}\|$ é o comprimento do lado OP e $\|\mathbf{B}\|$ é o comprimento do lado OQ. Assim, da lei dos co-senos,

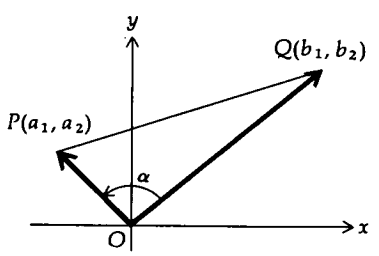


FIGURA 2

$$\cos \alpha = \frac{\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - |\overline{PQ}|^2}{2\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

$$= \frac{(a_1{}^2 + a_2{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2) - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

Logo,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \cos \alpha$$ ■

O Teorema 14.2.5 estabelece que o produto escalar de dois vetores é o produto de seus módulos pelo co-seno do ângulo entre eles.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e α for o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, então, do Teorema 14.2.5,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{(3)(2) + (-2)(1)}{\sqrt{9+4}\sqrt{4+1}} \\ &= \frac{6-2}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$ ◀

Vimos, na Secção 14.1, que se dois vetores não-nulos forem múltiplos escalares um do outro, então terão o mesmo sentido ou sentidos opostos. Temos, assim, a definição a seguir.

14.2.6 DEFINIÇÃO Dizemos que dois vetores são **paralelos** se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro*.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Os vetores $\langle 3, -4 \rangle$ e $\langle \frac{3}{4}, -1 \rangle$ são paralelos pois $\langle 3, -4 \rangle = 4\langle \frac{3}{4}, -1 \rangle$. ◀

Se $\mathbf{A}$ for um vetor qualquer, $\mathbf{0} = 0\mathbf{A}$; assim, da Definição 14.2.6, segue que o vetor nulo será paralelo a qualquer vetor.

Será proposto como exercício provar que dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou π (veja o Exercício 37).

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem vetores não-nulos, então, do Teorema 14.2.5, segue que

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, segue disto que

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Temos, então, a definição a seguir.

14.2.7 DEFINIÇÃO Dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são **ortogonais (perpendiculares)** se e somente se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

---

* **N. do R.:** Um conjunto de vetores não-nulos e paralelos caracteriza uma *direção*, isto é, o que eles têm em comum.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Os vetores $\langle -4, 5\rangle$ e $\langle 10, 8\rangle$ são ortogonais pois

$$\begin{aligned}\langle -4, 5\rangle \cdot \langle 10, 8\rangle &= (-4)(10) + (5)(8)\\ &= 0\end{aligned}$$ ◀

Se **A** for um vetor qualquer, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$; logo, segue da Definição 14.2.7 que o vetor nulo será ortogonal a qualquer vetor.

EXEMPLO 1 Dados $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + k\mathbf{j}$, onde k é um escalar, ache (a) k tal que **A** e **B** sejam ortogonais; (b) k tal que **A** e **B** sejam paralelos.

Solução

(a) Pela Definição 14.2.7, **A** e **B** são ortogonais se e somente se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, isto é,

$$(3)(2) + 2(k) = 0$$
$$k = -3$$

(b) Pela Definição 14.2.6, **A** e **B** são paralelos se e somente se houver um escalar c tal que $\langle 3, 2\rangle = c\langle 2, k\rangle$, isto é,

$$3 = 2c \quad \text{e} \quad 2 = ck$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $k = \frac{4}{3}$.

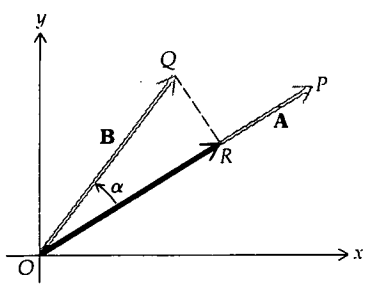


FIGURA 3

Obtemos uma interpretação geométrica do produto escalar se considerarmos a *projeção escalar* de um vetor no outro. Veja a Figura 3, onde $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ são as representações posicionais dos vetores **A** e **B**, respectivamente. O ponto R é o pé da perpendicular de Q sobre a reta contendo $\overrightarrow{OP}$. A projeção escalar de **B** em **A** é o módulo do vetor, tal que $\overrightarrow{OR}$ seja sua representação posicional.

14.2.8 DEFINIÇÃO Se **A** e **B** forem vetores não-nulos, a **projeção escalar** de **B** sobre **A** é definida como sendo $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre **A** e **B**.

Observe que a projeção escalar pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal de $\cos \alpha$.

Do teorema 14.2.5,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{B}\| \cos \alpha) \tag{1}$$

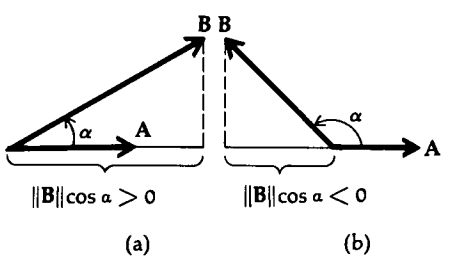


FIGURA 4

Assim, o produto escalar de **A** e **B** é o produto do módulo de **A** pela projeção escalar de **B** sobre **A**. Veja a Figura 4(a) e (b). Como o produto escalar é comutativo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ também é o módulo de **B** multiplicado pela projeção escalar de **A** sobre **B**.

Se $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, então

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{B} = b_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = b_2$$

Logo, o produto escalar de **i** e **B** dá a componente de **B** na direção de **i** e o produto escalar de **j** e **B** resulta a componente de **B** na direção de **j**. Para generalizar esse resultado, seja **U** um vetor unitário qualquer. Então de (1), se α for o ângulo entre **U** e **B**,

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \cdot \mathbf{B} &= \|\mathbf{U}\|\,\|\mathbf{B}\| \cos \alpha\\ &= \|\mathbf{B}\| \cos \alpha\end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$ é a projeção escalar de **B** sobre **U**, que é denominada a *componente* do vetor **B** na direção de **U**. No caso geral, a **componente** de um vetor **B** na direção de um vetor **A** é a projeção escalar de **B** sobre o vetor unitário na direção de **A**.

O seguinte teorema pode ser usado para calcular a projeção escalar de um vetor em outro.

14.2.9 TEOREMA A projeção escalar do vetor **B** sobre o vetor **A** é

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|}$$

Prova Da Definição 14.2.8, a projeção escalar de **B** sobre **A** é $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre **A** e **B**. Do Teorema 14.2.5,

$$\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\|\mathbf{B}\| \cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \blacksquare$$

Consulte novamente a Figura 3. Se **C** for o vetor tal que $\overrightarrow{OR}$ seja sua representação posicional, então **C** será chamado de **projeção vetorial** de **B** sobre **A**. Para determinar **C**, multiplicamos $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$ pelo vetor unitário, tendo a mesma direção que **A**. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= (\|\mathbf{B}\| \cos \alpha) \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \\
&= \frac{\|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{B}\| \cos \alpha)}{\|\mathbf{A}\|^2} \mathbf{A} \\
&= \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right) \mathbf{A} \qquad \text{(do Teorema 14.2.5)}
\end{aligned}$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

14.2.10 TEOREMA A projeção vetorial do vetor **B** sobre o vetor **A** é

$$\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A}$$

EXEMPLO 2 Dados os vetores

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Ache: (a) a projeção escalar de **B** sobre **A**; (b) a projeção vetorial de **B** sobre **A**; (c) mostre com uma figura as representações posicionais de **A**, **B** e a projeção vetorial de **B** sobre **A**.

Solução Primeiro calculamos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\|\mathbf{A}\|$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle -5, 1 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle \\
&= -20 + 2 \\
&= -18
\end{aligned} \qquad \begin{aligned}
\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{26}
\end{aligned}$$

(a) Do Teorema 14.2.9, a projeção escalar de **B** sobre **A** é

$$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} = -\frac{18}{\sqrt{26}}$$

(b) Do Teorema 14.2.10, a projeção vetorial de **B** sobre **A** é

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A} &= -\tfrac{18}{26}(-5\mathbf{i}+\mathbf{j})\\ &= -\tfrac{9}{13}(-5\mathbf{i}+\mathbf{j})\\ &= \tfrac{45}{13}\mathbf{i} - \tfrac{9}{13}\mathbf{j}\end{aligned}$$

(c) A Figura 5 mostra as representações posicionais de **A**, **B** e **C**, onde **C** é a projeção vetorial de **B** sobre **A**.

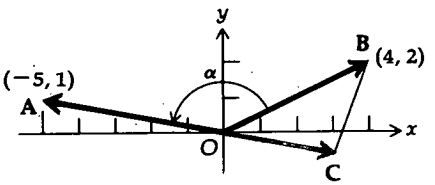


FIGURA 5

Na Secção 6.6 estabelecemos que se uma força constante de F N move um objeto numa distância de d metros ao longo de uma linha reta e a força está atuando na direção do movimento, então se W for o número de joules do trabalho exercido pela força, $W = Fd$. Suponha, contudo, que a força constante não esteja atuando na direção da linha de movimento. Nesse caso, os físicos definem o **trabalho** realizado como o *produto da componente da força ao longo da linha de movimento vezes o deslocamento*. Se o objeto desloca-se de um ponto A para um ponto B, chamamos o vetor, cuja representação é $\overrightarrow{AB}$, de **vetor deslocamento** e o denotamos por $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$. O módulo do vetor força constante **F** é expresso em quilogramas, a distância de **A** para **B** é medida em metros, e α é a medida em radianos do ângulo entre os vetores **F** e $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$. Portanto, se W for o número de joules do trabalho realizado pela força **F** ao deslocar um objeto de A para B temos,

$$\begin{aligned}W &= (\|\mathbf{F}\|\cos\alpha)\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\|\\ &= \|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\|\cos\alpha\\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Suponha que uma força **F** tenha uma intensidade de 6 N e $\frac{1}{6}\pi$ seja a medida em radianos do ângulo que dá a sua direção. Ache o trabalho realizado por **F** ao deslocar um objeto ao longo de uma linha reta, da origem ao ponto $P(7, 1)$, onde a distância é medida em metros.

Solução A Figura 6 mostra as representações posicionais de **F** e $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$. Como $\mathbf{F} = \langle 6\cos\frac{1}{6}\pi, 6\,\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi\rangle$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = \langle 7, 1\rangle$, então se W for o trabalho realizado, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})\\ &= \langle 6\cos\tfrac{1}{6}\pi, 6\,\text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi\rangle\cdot\langle 7, 1\rangle\\ &= \langle 3\sqrt{3}, 3\rangle\cdot\langle 7, 1\rangle\\ &= 21\sqrt{3}+3\\ &\approx 39{,}37\end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é de aproximadamente 39,37 J.

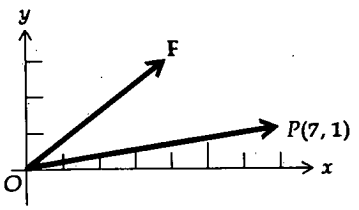


FIGURA 6

Os vetores têm representações geométricas que são independentes do sistema de coordenadas usado. Por isso, a análise vetorial pode ser usada para provar certos teoremas de Geometria Plana. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Prove, usando a análise vetorial, que as alturas de um triângulo encontram-se num ponto.

Solução Seja ABC um triângulo com alturas AP e BQ interceptando-se no ponto S. Trace uma reta por C e S que intercepte AB no ponto R. Queremos provar que RC é perpendicular a AB (veja a Figura 7).

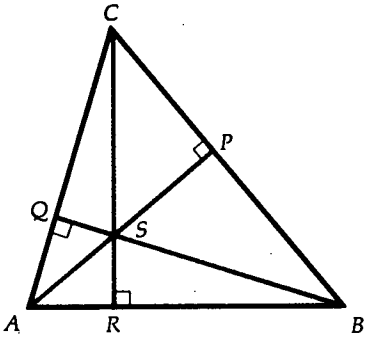


FIGURA 7

Sejam $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ e $\overrightarrow{CS}$ representações de vetores. Seja $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ o vetor cuja representação é o segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Da mesma forma, sejam $\mathbf{V}(\overrightarrow{BC})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AS})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{BS})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{CS})$ os vetores cujas representações são os segmentos de reta orientados entre parênteses.

Como AP é uma altura do triângulo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{BC}) = 0 \tag{2}$$

Também, como BQ é uma altura do triângulo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = 0 \tag{3}$$

Para provar que RC é perpendicular a AB, mostraremos que $\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot [\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})] \\
&= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\
&= [\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + [\mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\
&= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})
\end{aligned}$$

Substituindo $\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$ por $-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ e usando (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + 0 + [-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, as alturas AP, BQ e RC encontram-se num ponto.

EXERCÍCIOS 14.2

Nos Exercícios de 1 a 4 encontre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

1. $\mathbf{A} = \langle -1, 2\rangle$; $\mathbf{B} = \langle -4, 3\rangle$
2. $\mathbf{A} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\rangle$; $\mathbf{B} = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3}\rangle$
3. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
4. $\mathbf{A} = -2\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
5. Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$.
6. Prove o Teorema 14.2.2(i).
7. Prove o Teorema 14.2.2(ii).
8. Prove o Teorema 14.2.3(i).
9. Prove o Teorema 14.2.3(ii).
10. Prove o Teorema 14.2.3(iii).

Nos Exercícios de 11 a 14, se α *for o ângulo entre* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$, *ache* $\cos \alpha$.

11. $\mathbf{A} = \langle 4, 3\rangle$; $\mathbf{B} = \langle 1, -1\rangle$
12. $\mathbf{A} = \langle -2, -3\rangle$; $\mathbf{B} = \langle 3, 2\rangle$
13. $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
14. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -5\mathbf{j}$
15. Ache k, tal que a medida em radianos do ângulo entre os vetores do Exemplo 1 desta secção seja $\frac{1}{4}\pi$.
16. Dados $\mathbf{A} = k\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, onde k é um escalar, ache k tal que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam ortogonais.
17. Dados $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - k\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, onde k é um escalar, ache (a) k tal que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam ortogonais; (b) k tal que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam paralelos.
18. Ache k de tal forma que os vetores dados no Exercício 16 tenham direções opostas.
19. Dados $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$, onde k é um escalar, ache k de tal forma que a medida em radianos do ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ seja $\frac{1}{3}\pi$.
20. Ache dois vetores unitários, cada um deles tendo uma representação posicional cujo ponto inicial é (2, 4) e sendo tangente à parábola $y = x^2$ nesse ponto.
21. Ache dois vetores unitários, cada um deles tendo uma representação posicional cujo ponto inicial é (2, 4) e sendo normal à parábola $y = x^2$ nesse ponto.
22. Se $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, ache os vetores unitários ortogonais a $\mathbf{A}$.
23. Se $\mathbf{A}$ for o vetor $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, ache os vetores unitários ortogonais a $\mathbf{A}$.
24. Se $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 9c\mathbf{i}$ e $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 4c\mathbf{j}$, mostre que existe um valor real para c, tal que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam ortogonais.

25. Se $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, ache (a) a projeção escalar de **A** sobre **B** e (b) a projeção vetorial de **A** sobre **B**.
26. Para os vetores do Exercício 25, ache (a) a projeção escalar de **B** sobre **A** e (b) a projeção vetorial de **B** sobre **A**.
27. Ache as componentes do vetor $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ na direção do vetor $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
28. Para os vetores **A** e **B** do Exercício 27, ache as componentes do vetor **B** na direção do vetor **A**.
29. Um vetor **F** representa uma força que tem uma intensidade de 8 N e $\frac{1}{3}\pi$ é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao mover um objeto (a) ao longo do eixo x, da origem ao ponto (6, 0) e (b) ao longo do eixo y, da origem ao ponto (0, 6). A distância é medida em metros.
30. Um vetor **F** representa uma força que tem uma intensidade de 10 N e $\frac{1}{4}\pi$ é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao mover um objeto ao longo do eixo y, do ponto $(0, -2)$ ao ponto (0, 5). A distância é medida em metros.
31. Um vetor **F** representa uma força com 9 N de intensidade e $\frac{2}{3}\pi$ é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao deslocar um objeto da origem ao ponto $(-4, -2)$. A distância é medida em metros.
32. Duas forças representadas pelos vetores $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ atuando numa partícula, fazem com que ela se desloque ao longo de uma linha reta, do ponto (2, 5) ao ponto (7, 3). Se $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{F}_2 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, sendo as intensidades das forças medidas em newtons e a distância em metros, ache o trabalho realizado pelas duas forças atuando juntas.
33. Se **A** e **B** são vetores, prove que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

34. Prove, usando a análise vetorial, que as medianas de um triângulo encontram-se em um ponto.
35. Prove, usando a análise vetorial, que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e que seu comprimento é a metade do comprimento do terceiro lado.
36. Prove, usando a análise vetorial, que o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo ao lados paralelos e que seu comprimento é a metade da soma dos comprimentos dos lados paralelos.
37. Prove que dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou π.
38. Se **A** e **B** são vetores, prove que $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$, onde a igualdade ocorre se e somente se existir um escalar c, tal que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$.

14.3 FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Suponha que uma partícula se movimenta de tal forma que as coordenadas (x, y) de sua posição em qualquer instante t sejam dadas pelas equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Então, para todo número t no domínio comum a f e g haverá um vetor $f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, e os pontos finais das representações posicionais desses vetores traçarão uma curva C percorrida pela partícula. Isso nos leva a considerar uma função cujo domínio seja um conjunto de números reais e cuja imagem seja um conjunto de vetores. Tal função é chamada de *função com valores vetoriais*.

14.3.1 DEFINIÇÃO Sejam f e g duas funções com valores reais de uma variável real t. Então, para todo número t do domínio comum a f e g haverá um vetor **R** definido por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

e **R** será chamado **função com valores vetoriais.**

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja **R** a função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t - 2}\,\mathbf{i} + (t - 3)^{-1}\mathbf{j}$$

Se $f(t) = \sqrt{t - 2}$ e $g(t) = (t - 3)^{-1}$, o domínio de **R** será o conjunto dos valores de t para os quais ambas $f(t)$ e $g(t)$ estão definidas. Como $f(t)$ está definida para $t \geqslant 2$ e $g(t)$ está definida para todo número real exceto 3, o domínio de **R** é $\{t \mid t \geqslant 2,\ t \neq 3\}$. ◀

A equação $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i},\ g(t)\mathbf{j}$ é chamada de **equação vetorial** e define uma curva C. Essa mesma curva C também é definida pelas equações

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t) \tag{1}$$

que são chamadas de **equações paramétricas** de C. A variável t é um parâmetro. A curva C também é chamada de **gráfico**; isto é, o conjunto de todos os pontos (x, y) satisfazendo (1) é o gráfico da função com valores vetoriais $\mathbf{R}$.

A equação vetorial de uma curva, bem como as equações paramétricas de uma curva, dão a ela uma direção em cada ponto. Isto é, se considerarmos a curva como sendo descrita por uma partícula, poderemos identificar a direção positiva ao longo da curva como a direção na qual a partícula movimenta-se quando t cresce. Em tal caso, t pode ser tomado como a medida do tempo, e o vetor $\mathbf{R}(t)$ é chamado de **vetor posição**. Algumas vezes $\mathbf{R}(t)$ é referido como o **vetor raio**.

Se o parâmetro t for eliminado do par de equações (1), obteremos uma equação em x e y chamada de **equação cartesiana** de C. Pode acontecer que a eliminação do parâmetro leve a uma equação cartesiana cujo gráfico contenha mais pontos do que o gráfico definido pela equação vetorial ou pelas equações paramétricas. Essa situação ocorre no Exemplo 2.

EXEMPLO 1 Dada a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

(a) Faça um esboço do gráfico dessa equação e (b) ache a equação cartesiana do gráfico.

Solução

(a) O domínio de $\mathbf{R}$ é o conjunto de todos os números reais. Os valores de x e y para valores específicos de t podem ser dispostos em uma tabela. Calculemos o módulo do vetor posição. Para todo t,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \operatorname{sen}^2 t} \\ &= 2\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Assim sendo, o ponto final da representação posicional de cada vetor $\mathbf{R}(t)$ está a duas unidades da origem. Fazendo t assumir todos os valores do intervalo fechado $[0, 2\pi]$, obtemos uma circunferência de raio 2 e centro na origem. Com isso completamos o gráfico, pois qualquer valor de t dará um ponto sobre essa circunferência. Um esboço dela está na Figura 1. As equações paramétricas do gráfico são

$$x = 2 \cos t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sen} t$$

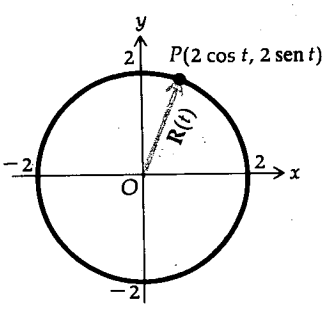


FIGURA 1

(b) Uma equação cartesiana do gráfico pode ser encontrada, bastando eliminar t das duas equações paramétricas. Isso pode ser feito se elevarmos ao quadrado cada equação e somarmos para obter:

$$x^2 + y^2 = 4$$

EXEMPLO 2 Dadas as equações paramétricas

$$x = \cosh t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{senh} t$$

(a) Faça um esboço do gráfico definido por essas equações e (b) ache uma equação cartesiana do gráfico.

Solução

(a) Elevando ao quadrado as equações e subtraindo, teremos

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t$$

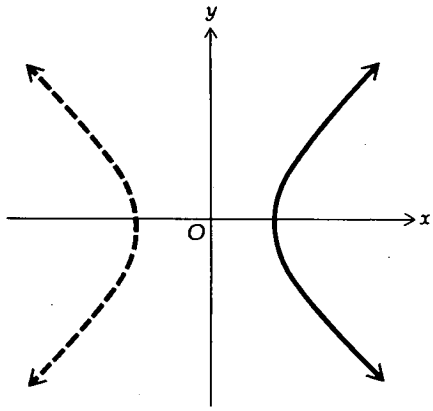


FIGURA 2

Da identidade $\cosh^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1$, teremos a equação

$$x^2 - y^2 = 1$$

Essa é a equação de uma hipérbole equilátera. Entretanto, observe que para todo t real, $\cosh t$ nunca é menor do que 1. Assim, a curva definida pelas equações paramétricas consiste somente nos pontos sobre o ramo direito da hipérbole. Um esboço dessa curva está na Figura 2. A curva pontilhada na figura é o ramo esquerdo da hipérbole equilátera.

(b) Uma equação cartesiana é

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad x \geqslant 1$$

Vimos que, eliminando t das equações paramétricas (1), obtemos a equação cartesiana. Esta, implícita ou explicitamente, define y como uma ou mais funções de x. Isto é, se $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $y = h(x)$. Se h for uma função diferenciável de x e f for uma função diferenciável de t, então, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da igualdade acima por $\dfrac{dx}{dt}$ e obter

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}} \tag{2}$$

A igualdade (2) possibilita-nos encontrar a derivada de y em relação a x diretamente das equações paramétricas.

Como $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y')}{dx}$. Assim,

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d(y')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}} \tag{3}$$

EXEMPLO 3 Dada as equações paramétricas

$$x = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = 4t^3$$

ache $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sem eliminar t.

Solução Como $\dfrac{dy}{dt} = 12t^2$ e $\dfrac{dx}{dt} = 6t$, de (2) temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{6t}$$

$$= 2t$$

Como $y' = 2t$, $\dfrac{d(y')}{dt} = 2$. Então, de (3),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d(y')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{2}{6t}$$

$$= \frac{1}{3t}$$

Tabela 1

t	x	y
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	3	4
2	12	32
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-1	3	-4
-2	12	-32

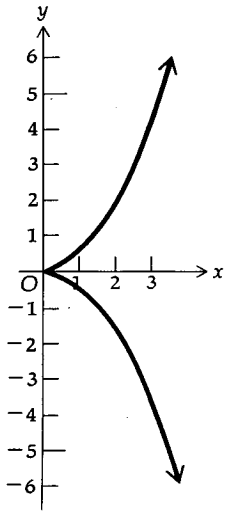


FIGURA 3

EXEMPLO 4 (a) Faça um esboço do gráfico definido pelas equações paramétricas do Exemplo 3, e (b) ache uma equação cartesiana do gráfico.

Solução As equações paramétricas são

$$x = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = 4t^3$$

(a) Observamos que x é não-negativo. Assim, o gráfico está restrito ao primeiro e quarto quadrantes. A Tabela 1 dá os valores de x e y para valores específicos de t. Como $\dfrac{dy}{dx} = 2t$, então quando $t = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Logo, no ponto $(0, 0)$, a reta tangente é horizontal. Partindo desse fato e com os pontos obtidos da Tabela 1, obtemos o esboço do gráfico que aparece na Figura 3.

(b) Das duas equações paramétricas obtemos $x^3 = 27t^6$ e $y^2 = 16t^6$. Resolvendo essas equações para t^6 e eliminando t^6, obtemos

$$\frac{x^3}{27} = \frac{y^2}{16}$$

$$16x^3 = 27y^2 \tag{4}$$

que é a equação cartesiana pedida.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se em (4) derivarmos implicitamente,

$$48x^2 = 54y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y}$$

Substituindo x e y em termos de t pelos valores dados nas equações paramétricas, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3)}$$

$$= 2t$$

o que está de acordo com o valor já obtido de $\dfrac{dy}{dx}$ no Exemplo 3. ◀

Segue de (2) que se num dado ponto $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$, então $\frac{dy}{dx} = 0$ e o gráfico do par de equações paramétricas terá uma reta tangente horizontal no ponto. Além disso, se num dado ponto $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} \neq 0$, então $\frac{dy}{dx}$ não existirá no ponto e o gráfico poderá ter uma reta tangente vertical passando nesse ponto. Essas retas tangentes podem nos ser de grande ajuda para traçarmos um esboço do gráfico das equações paramétricas.

Tabela 2

t	x	y
−4	−12	0
−3	−5	−3
−2	0	−4
−1	3	−3
0	4	0
1	3	5
2	0	12
3	−5	21

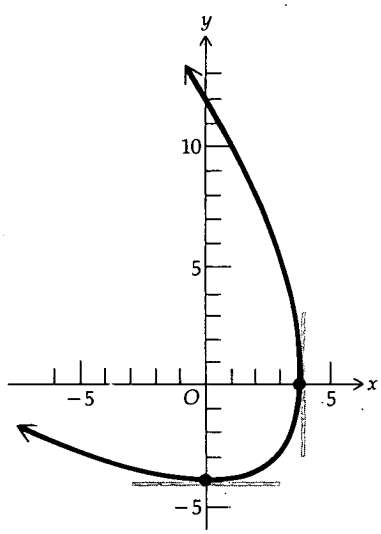


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Dadas as equações paramétricas

$$x = 4 - t^2 \quad \text{e} \quad y = t^2 + 4t$$

ache as retas tangentes, horizontal e vertical, ao gráfico desse par de equações e faça um esboço do gráfico.

Solução

$$\frac{dx}{dt} = -2t \qquad \frac{dy}{dt} = 2t + 4$$

Logo $\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 4}{-2t}$, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t + 2}{-t}$$

Quando $t = -2$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 0$ e $y = -4$. Assim sendo, o gráfico tem uma reta tangente horizontal em $(0, -4)$. Quando $t = 0$, $\frac{dy}{dx}$ não existe, $x = 4$ e $y = 0$; o gráfico tem uma reta tangente vertical em $(4, 0)$. A Tabela 2 dá os valores de x e y para valores determinados de t. Com os pontos obtidos desses valores e sabendo onde estão as retas tangentes horizontal e vertical, fazemos o esboço do gráfico mostrado na Figura 4.

Agora iremos mostrar como as equações paramétricas podem ser usadas para definir uma curva descrita por um movimento físico. Consideraremos a **ciclóide**, que é a curva descrita por um ponto na circunferência de um círculo, quando esta rola ao longo de uma linha reta. Suponha que a circunferência tenha raio a. Seja o eixo x, a reta fixa sobre a qual a circunferência rola, e seja a origem um dos pontos onde o ponto P dado toca o eixo x. Veja a Figura 5, que mostra a circunferência após ter-se deslocado por um ângulo de t radianos. Da Figura 5,

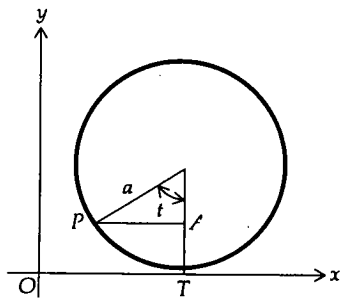


FIGURA 5

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \tag{5}$$

O comprimento de arco PT é $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})\| = at$. Como o sentido de $\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})$ é o mesmo do eixo x positivo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) = at\mathbf{i} \tag{6}$$

Também $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})\| = a - a\cos t$. E como o sentido de $\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})$ é o mesmo de $\mathbf{j}$,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} \tag{7}$$

$\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\| = a \operatorname{sen} t$, e o sentido de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ é igual ao de $-\mathbf{i}$; assim,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i}$$

Fazendo as substituições a partir dessa equação, de (6) e (7) em (5), teremos

$$at\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} - a \operatorname{sen} t\mathbf{i} = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

Essa é uma equação vetorial da ciclóide. Assim, as equações paramétricas da ciclóide são

$$x = a(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos t) \tag{8}$$

onde t é um número real qualquer. Um esboço de parte da ciclóide está na Figura 6.

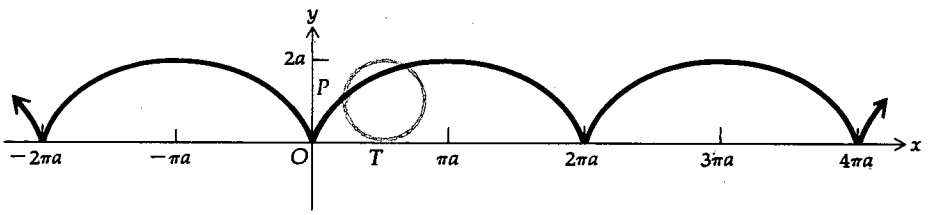


FIGURA 6

Na Secção 11.1, onde o teorema do valor médio de Cauchy (11.1.3) foi enunciado e provado, indicamos que uma interpretação geométrica seria dada aqui, pois são necessárias as equações paramétricas. Lembre-se de que o teorema afirma que se f e g forem duas funções tais que (i) f e g sejam contínuas em $[a, b]$, (ii) f e g sejam diferenciáveis em (a, b) e (iii) para todo x em (a, b) $g'(x) \neq 0$, então existirá z no intervalo aberto (a, b), tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

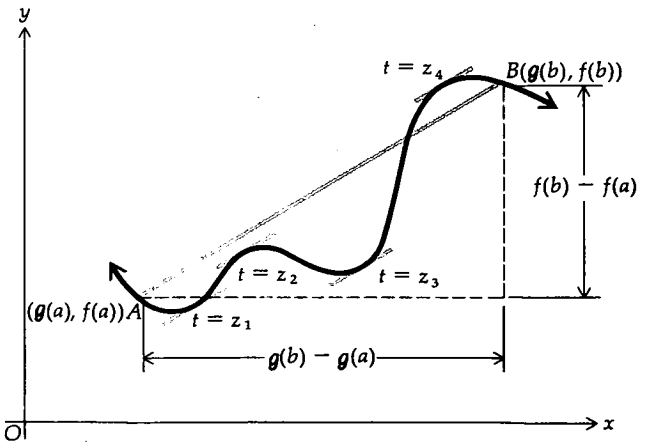


FIGURA 7

A Figura 7 mostra uma curva com equações paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$, onde $a \leqslant t \leqslant b$. A inclinação da curva da figura num dado ponto é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

e a inclinação do segmento de reta que une os pontos $A(g(a), f(a))$ e $B(g(b), f(b))$ é dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

O teorema do valor médio de Cauchy afirma que as inclinações são iguais em pelo menos um valor de t entre a e b. Para a curva da Figura 7 existem quatro valores de t satisfazendo a conclusão do teorema: $t = z_1$, $t = z_2$, $t = z_3$ e $t = z_4$.

EXERCÍCIOS 14.3

Nos Exercícios de 1 a 6, ache o domínio da função **R** *com valores vetoriais.*

1. $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4 - t}\,\mathbf{j}$
2. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{R}(t) = (\text{sen}^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 1)\mathbf{i} + (\text{tg}^{-1} t)\mathbf{j}$
5. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 2t - 8}\,\mathbf{j}$
6. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t - 4}\,\mathbf{i} + \sqrt{4 - t}\,\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 12, ache $\dfrac{dy}{dx}$ *e* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, *sem eliminar o parâmetro.*

7. $x = 3t, y = 2t^2$
8. $x = 1 - t^2, y = 1 + t$
9. $x = t^2e^t, y = t \ln t$
10. $x = e^{2t}, y = 1 + \cos t$
11. $x = a \cos t, y = b \text{ sen } t$
12. $x = a \cosh t, y = b \text{ senh } t$

Nos Exercícios de 13 a 19, faça um esboço do gráfico da equação vetorial dada e ache a equação cartesiana do gráfico.

13. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$
14. $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + (t^2 + 4)\mathbf{j}$
15. $\mathbf{R}(t) = 3 \cosh t\mathbf{i} + 5 \text{ senh } t\mathbf{j}$
16. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{4}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{4}{t}\mathbf{j}$
17. $\mathbf{R}(t) = \sec t\mathbf{i} + \text{tg } t\mathbf{j}$; t em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
18. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; t em $[0, \frac{1}{2}\pi]$
19. $\mathbf{R}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 3 \text{ sen } t\mathbf{j}$; t em $[0, 2\pi]$
20. Ache uma equação da reta tangente à curva $x = 1 + 3 \text{ sen } t$, $y = 2 - 5 \cos t$, no ponto onde $t = \frac{1}{6}\pi$.
21. Ache uma equação da reta tangente à curva $x = 2 \text{ sen } t$, $y = 5 \cos t$, no ponto onde $t = \frac{1}{3}\pi$.

Nos Exercícios de 22 a 24, ache as retas tangentes, horizontal e vertical, ao gráfico dado pelo par de equações paramétricas e faça um esboço do gráfico.

22. $x = t^2 + t, y = t^2 - t$
23. $x = 4t^2 - 4t, y = 1 - 4t^2$
24. $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$
25. As equações paramétricas para a *trocóide* são

$$x = at - b \text{ sen } t \quad \text{e} \quad y = a - b \cos t$$

Mostre que essa curva não tem reta tangente vertical se $a > b > 0$.

26. Um projétil move-se de tal forma que sua posição em cada instante t seja dada pelas equações paramétricas $x = 60t$ e $y = 80t - 16t^2$. Faça um esboço da trajetória do projétil.
27. Dada a ciclóide descrita pelas equações (8), obtenha $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ e $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ no ponto em que y atinge o seu valor máximo para x no intervalo fechado $[0, 2\pi a]$.
28. Mostre que a inclinação da reta tangente, em $t = t_1$, à ciclóide descrita pelas equações (8) é $\text{cotg } \frac{1}{2}t_1$. Deduza, então, que a reta tangente é vertical quando $t = 2n\pi$, onde n é um inteiro qualquer.
29. A *hipociclóide* é uma curva traçada por um ponto P da circunferência de raio b que rola por dentro de uma outra circunferência fixa de raio a, $a > b$. Se a origem é o centro da circunferência fixa, $A(a, 0)$ é um dos pontos no qual o ponto P entra em contato com a circunferência fixa, B é o ponto de tangência móvel entre as duas circunferências e o parâmetro t é o número de radianos no ângulo AOB, prove que as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t$$

e

$$y = (a - b) \text{ sen } t - b \text{ sen } \frac{a - b}{b} t$$

30. Se $a = 4b$ no Exercício 29, temos uma *hipociclóide de quatro vértices*. Mostre que as equações paramétricas dessa curva são $x = a \cos^3 t$ e $y = a \text{ sen}^3 t$.
31. Use as equações paramétricas do Exercício 30 para achar uma equação cartesiana da hipociclóide de quatro vértices e faça um esboço do gráfico da equação resultante.

32. As equações paramétricas da *tratriz* são
$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a} \quad \text{e} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$
Faça um esboço da curva para $a = 4$.

33. Prove que o parâmetro t nas equações paramétricas de uma tratriz (veja o Exercício 32) é a intersecção da reta tangente com o eixo x.

34. Mostre que a tratriz do Exercício 32 é uma curva, tal que o comprimento do segmento de toda reta tangente do ponto de tangência ao ponto de intersecção com o eixo x é constante e igual a a.

35. Ache a área da região limitada pelo eixo x e um arco de ciclóide tendo as equações (8).

36. Ache o centróide da região do Exercício 35.

14.4 CÁLCULO DE FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS

As definições de limites, continuidade, derivadas e integrais indefinidas de funções com valores vetoriais envolvem as definições correspondentes para funções com valores reais.

14.4.1 DEFINIÇÃO Seja **R** uma função com valores vetoriais cujos valores funcionais são dados por
$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$
Então, o **limite de R(*t*) quando *t* tende a t_1** será definido por
$$\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \left[\lim_{t \to t_1} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to t_1} g(t)\right]\mathbf{j}$$
se $\lim_{t \to t_1} f(t)$ e $\lim_{t \to t_1} g(t)$ existirem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2e^t\mathbf{j}$, então
$$\lim_{t \to 0} \mathbf{R}(t) = (\lim_{t \to 0} \cos t)\mathbf{i} + (\lim_{t \to 0} 2e^t)\mathbf{j}$$
$$= \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$ ◀

14.4.2 DEFINIÇÃO A função **R** com valores vetoriais será **contínua** em t_1 se e somente se as três condições seguintes forem satisfeitas:

(i) $\mathbf{R}(t)$ existe;
(ii) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t)$ existe;
(iii) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$.

Das Definições 14.4.1 e 14.4.2, segue que a função com valores vetoriais **R**, definida por $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, será contínua em t_1 se e somente se f e g forem contínuas em t_1.

Na definição que segue, a expressão
$$\frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$
será usada para indicar a divisão de um vetor por um escalar. Essa expressão significa
$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]$$

14.4.3 DEFINIÇÃO Se **R** for uma função com valores vetoriais, então a **derivada** de **R** também será uma função com valores vetoriais, denotada por $\mathbf{R}'$ e definida por
$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$
se esse limite existir.

A notação $D_t\mathbf{R}(t)$ é usada, por vezes, em lugar de $\mathbf{R}'(t)$.

Da Definição 14.4.3 e da definição da derivada de uma função com valores reais, decorre o teorema a seguir.

14.4.4 TEOREMA Se $\mathbf{R}$ for uma função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

se $f'(t)$ e $g'(t)$ existirem.

Prova Da Definição 14.4.3,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t + \Delta t) - f(t)]}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]}{\Delta t}\mathbf{j} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

■

A direção de $\mathbf{R}'(t)$ é a mesma da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{R}(t)$, no ponto $(f(t), g(t))$, isto é, a direção de $\mathbf{R}'(t)$ é dada por θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, onde $\operatorname{tg}\theta = g'(t)/f'(t)$, isto é,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

Uma interpretação geométrica da Definição 14.4.3 pode ser obtida se considerarmos as representações dos vetores $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ e $\mathbf{R}'(t)$. Consulte a Figura 1. A curva C é traçada pelo ponto final da representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ quando t assume todos os valores do domínio de $\mathbf{R}$. Seja $\overrightarrow{OP}$ a representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ e $\overrightarrow{OQ}$ a representação posicional de $\mathbf{R}(t + \Delta t)$. Então $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ será um vetor tendo $\overrightarrow{PQ}$ como representação. Se o vetor $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ for multiplicado pelo escalar $1/\Delta t$, obtemos um vetor com a mesma direção e cujo módulo é $1/|\Delta t|$ vezes o módulo de $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$. Quando Δt tende a zero, o vetor $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ tende a um vetor tendo uma de suas representações tangente à curva C no ponto P.

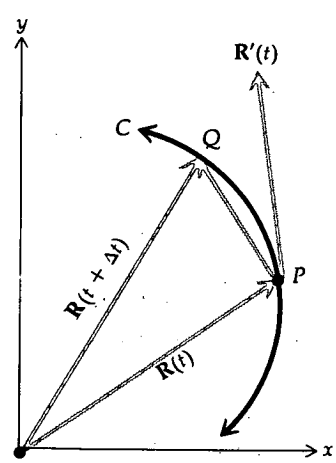


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $\mathbf{R}(t) = (2 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$, então

$$\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$ ◀

Derivadas de ordem superior de funções com valores vetoriais são definidas como as derivadas de ordem superior para funções com valores reais. Assim, se $\mathbf{R}$ for uma função com valores vetoriais definida por $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$,

a derivada segunda de **R**, denotada por $\mathbf{R}''(t)$, será dada por

$$\boxed{\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)]}$$

A notação $D_t^2\mathbf{R}(t)$ pode ser usada em lugar de $\mathbf{R}''(t)$. Aplicando o Teorema 14.4.4 a $\mathbf{R}'(t)$,

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}$$

se $f''(t)$ e $g''(t)$ existirem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$, então

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j} \qquad \mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{2}{t^3}\mathbf{j}$$ ◀

14.4.5 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função com valores vetoriais **R** é **diferenciável** num intervalo se $\mathbf{R}'(t)$ existir para todos os valores de t no intervalo.

Os teoremas a seguir dão as fórmulas de derivação para funções com valores vetoriais. As demonstrações baseiam-se no Teorema 14.4.4 e nos teoremas sobre derivação de funções com valores reais.

14.4.6 TEOREMA Se **R** e **Q** forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então **R** + **Q** será diferenciável no intervalo, e

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$$

A demonstração desse teorema será deixada como um exercício (veja o Exercício 25).

EXEMPLO 1 Verifique o Teorema 14.4.6 se

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Solução

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t([t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}] + [\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}]) \\
&= D_t[(t^2 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t - 1 + \cos t)\mathbf{j}] \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \\
D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}] + D_t(\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \\
&= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}) \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Logo, $D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$.

14.4.7 TEOREMA Se **R** e **Q** forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então **R** · **Q** será diferenciável no intervalo e

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]$$

Prova Seja $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$. Então, pelo Teorema 14.4.4,

$$D_t\mathbf{R}(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j} \qquad D_t\mathbf{Q}(t) = f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = [f_1(t)][f_2(t)] + [g_1(t)][g_2(t)]$$

Logo,

$$\begin{aligned} &D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)] \\ &\quad = [f_1'(t)][f_2(t)] + [f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)] \\ &\quad = \{[f_1'(t)][f_2(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)]\} + \{[f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)]\} \\ &\quad\quad [D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{Q}(t)] \end{aligned}$$ ■

EXEMPLO 2 Verifique o Teorema 14.4.7 para os vetores do Exemplo 1.

Solução Os vetores são

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} \qquad \mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Assim, $\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t) = t^2 \operatorname{sen} t + (t-1)\cos t$. Logo,

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)] &= 2t \operatorname{sen} t + t^2\cos t + \cos t + (t-1)(-\operatorname{sen} t) \\ &= (t+1)\operatorname{sen} t + (t^2+1)\cos t \qquad (1) \end{aligned}$$

Como $D_t\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $D_t\mathbf{Q}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, temos que

$$\begin{aligned} &[D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{Q}(t)] \\ &\quad = (2t\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot(\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}) + [t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}]\cdot(\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \\ &\quad = (2t\operatorname{sen} t + \cos t) + [t^2\cos t - (t-1)\operatorname{sen} t] \\ &\quad = (t+1)\operatorname{sen} t + (t^2+1)\cos t \qquad (2) \end{aligned}$$

Comparando (1) e (2), vemos que o Teorema 14.4.7 é válido para esses vetores.

14.4.8 TEOREMA Se $\mathbf{R}$ for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e se f for uma função com valores reais, diferenciável no intervalo, então

$$D_t\{[f(t)][\mathbf{R}(t)]\} = [D_t f(t)]\mathbf{R}(t) + f(t)\,D_t\mathbf{R}(t)$$

A demonstração desse teorema será proposto como exercício (veja o Exercício 26).

Será necessário aplicar, em discussões futuras, o teorema a seguir. É a regra da cadeia para funções com valores vetoriais. A sua demonstração será proposta como um exercício (veja o Exercício 27) e baseia-se no Teorema 14.4.4 e na regra da cadeia para funções com valores reais.

14.4.9 TEOREMA Suponha que $\mathbf{F}$ seja uma função com valores vetoriais, h seja uma função com valores reais e $\mathbf{G}$, uma função com valores vetoriais definida por $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$. Se $\phi = h(t)$ e ambas $\dfrac{d\phi}{dt}$ e $D_\phi\mathbf{G}(t)$ existirem, então $D_t\mathbf{G}(t)$ existe e é dada por

$$D_t\mathbf{G}(t) = [D_\phi\mathbf{G}(t)]\,\frac{d\phi}{dt}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Sejam $\mathbf{F}$ e h do Teorema 14.4.9 as funções definidas por

$$\mathbf{F}(\phi) = \phi^2\mathbf{i} + e^\phi\mathbf{j} \quad \text{e} \quad h(t) = \operatorname{sen} t$$

Se $\phi = h(t)$ e $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$, temos

$$\phi = \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t}\mathbf{j}$$

Calculando $D_t\mathbf{G}(t)$ pelo Teorema 14.4.4 temos

$$D_t\mathbf{G}(t) = 2 \text{ sen } t \cos t\mathbf{i} + e^{\text{sen } t} \cos t\mathbf{j} \tag{3}$$

Vamos mostrar que aplicando o Teorema 14.4.9 obteremos o mesmo resultado. Uma vez que $\mathbf{G}(t)$ também pode ser escrita como $\phi^2\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j}$, temos

$$\begin{aligned} D_\phi\mathbf{G}(t) &= D_\phi[\phi^2\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j}] \\ &= 2\phi\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Mas $\phi = \text{sen } t$; assim,

$$D_\phi\mathbf{G}(t) = 2 \text{ sen } t\mathbf{i} + e^{\text{sen } t}\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dt} = \cos t$$

Substituindo esses valores no segundo membro da fórmula do Teorema 14.4.9, teremos

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{G}(t) &= [2 \text{ sen } t\mathbf{i} + e^{\text{sen } t}\mathbf{j}] \cos t \\ &= 2 \text{ sen } t \cos t\mathbf{i} + e^{\text{sen } t} \cos t\mathbf{j} \end{aligned}$$

que está de acordo com (3). ◀

Vamos definir agora uma integral indefinida (ou antiderivada) de uma função com valores vetoriais.

14.4.10 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{Q}$ for a função com valores vetoriais dada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então a **integral indefinida de $\mathbf{Q}(t)$** será definida por

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}\int f(t)\,dt + \mathbf{j}\int g(t)\,dt \tag{4}$$

Essa definição é consistente com a definição de integral indefinida de uma função com valores reais, pois se tomarmos a derivada de ambos os membros de (4) em relação a t,

$$D_t\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}D_t\int f(t)\,dt + \mathbf{j}D_t\int g(t)\,dt$$

$$D_t\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}f(t) + \mathbf{j}g(t)$$

Cada uma das integrais no segundo membro de (4) dá origem a uma constante escalar arbitrária. Quando multiplicamos cada uma das constantes por $\mathbf{i}$ ou $\mathbf{j}$, obtemos um vetor constante arbitrário na soma. Assim,

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

onde $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ e C é um vetor constante arbitrário.

EXEMPLO 3 Ache a função com valores vetoriais mais geral, cuja derivada é

$$\mathbf{Q}(t) = \text{sen } t\mathbf{i} - 3 \cos t\mathbf{j}$$

Solução Se $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$, então $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t)\,dt$, isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{i}\int \operatorname{sen} t\,dt - 3\mathbf{j}\int \cos t\,dt\\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3\mathbf{j}(\operatorname{sen} t + C_2)\\ &= -\cos t\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + (C_1\mathbf{i} - 3C_2\mathbf{j})\\ &= -\cos t\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Ache o vetor $\mathbf{R}(t)$ para o qual

$$D_t\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Solução

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{i}\int e^{-t}\,dt + \mathbf{j}\int e^t\,dt\\ &= \mathbf{i}(-e^{-t} + C_1) + \mathbf{j}(e^t + C_2)\end{aligned}$$

Como $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{i}(-1 + C_1) + \mathbf{j}(1 + C_2)$$

Logo,

$$C_1 - 1 = 1 \qquad C_2 + 1 = 1$$
$$C_1 = 2 \qquad C_2 = 0$$

Assim sendo,

$$\mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$$

O seguinte teorema nos será útil mais adiante.

14.4.11 TEOREMA Se $\mathbf{R}$ for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e $\|\mathbf{R}(t)\|$ for constante para todo t no intervalo, então os vetores $\mathbf{R}(t)$ e $D_t\mathbf{R}(t)$ serão ortogonais.

Prova Seja $\|\mathbf{R}(t)\| = k$. Então, pelo Teorema 14.2.3(iii),

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = k^2$$

Diferenciando ambos os membros em relação a t e usando o Teorema 14.4.7, obtemos

$$[D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{R}(t)] = 0$$
$$2\mathbf{R}(t) \cdot D_t\mathbf{R}(t) = 0$$

Como o produto escalar de $\mathbf{R}(t)$ e $D_t\mathbf{R}(t)$ é nulo, segue da Definição 14.2.7 que $\mathbf{R}(t)$ e $D_t\mathbf{R}(t)$ são ortogonais. ■

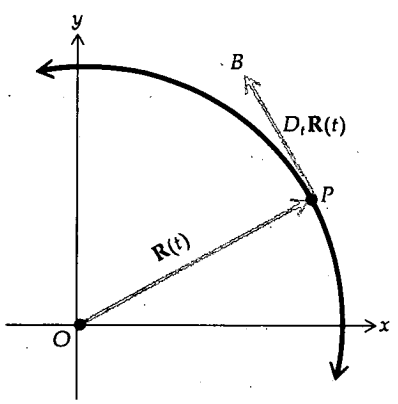


FIGURA 2

A interpretação geométrica do Teorema 14.4.11 é evidente. Se o vetor $\mathbf{R}(t)$ tiver módulo constante, então a representação posicional $\overrightarrow{OP}$ de $\mathbf{R}(t)$ terá seu ponto final P sobre a circunferência, com centro na origem e raio k. Assim, o gráfico de $\mathbf{R}$ é essa circunferência. Como $D_t\mathbf{R}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ são ortogonais, $\overrightarrow{OP}$ é perpendicular a uma representação de $D_t\mathbf{R}(t)$. A Figura 2 mostra o esboço de uma parte da circunferência, a representação posicional de $\mathbf{R}(t)$, $\overrightarrow{OP}$ e a representação $\overrightarrow{PB}$ de $D_t\mathbf{R}(t)$.

EXERCÍCIOS 14.4

Nos Exercícios de 1 a 5, ache o limite indicado, se ele existir.

1. $\mathbf{R}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $\lim_{t \to 2} \mathbf{R}(t)$
2. $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + \dfrac{t^2 - 4}{t - 2}\mathbf{j}$; $\lim_{t \to 2} \mathbf{R}(t)$
3. $\mathbf{R}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $\lim_{t \to \pi/2} \mathbf{R}(t)$
4. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}\mathbf{i} + \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t - 3}\mathbf{j}$; $\lim_{t \to 3} \mathbf{R}(t)$
5. $\mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + |t + 1|\mathbf{j}$; $\lim_{t \to -1} \mathbf{R}(t)$

Nos Exercícios de 6 a 14, ache $\mathbf{R}'(t)$ *e* $\mathbf{R}''(t)$.

6. $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$
7. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j}$
8. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}$
9. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{tg}^{-1} t\mathbf{i} + 2^t\mathbf{j}$
10. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}\mathbf{i} + \dfrac{t - 2}{t}\mathbf{j}$
11. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1 - 5t}\mathbf{j}$
12. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{2t + 1}\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j}$
13. $\mathbf{R}(t) = 5 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - \sec 4t\mathbf{j}$
14. $\mathbf{R}(t) = (e^{3t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j}$

Nos Exercícios 15 e 16, ache $D_t\|\mathbf{R}(t)\|$.

15. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$
16. $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

Nos Exercícios 17 e 18, verifique o Teorema 14.4.6 para os vetores dados.

17. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + e^t)\mathbf{i} + (t - e^{2t})\mathbf{j}$; $\mathbf{Q}(t) = (t^3 + 2e^t)\mathbf{i} - (3t + e^{2t})\mathbf{j}$
18. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j}$

Nos Exercícios 19 e 20, verifique o Teorema 14.4.7 para os vetores do exercício indicado.

19. Exercício 17
20. Exercício 18

Nos Exercícios de 21 a 24, ache $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$.

21. $\mathbf{R}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 3)\mathbf{j}$
22. $\mathbf{R}(t) = \ln(t - 1)\mathbf{i} - 3t^{-1}\mathbf{j}$
23. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$
24. $\mathbf{R}(t) = -\cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$

25. Prove o Teorema 14.4.6.
26. Prove o Teorema 14.4.8.
27. Prove o Teorema 14.4.9.

Nos Exercícios de 28 a 33, ache o vetor mais geral cuja derivada é a função dada.

28. $(t^2 - 9)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$
29. $\operatorname{tg} t\mathbf{i} - \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$
30. $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j}$
31. $e^{3t}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t - 1}\mathbf{j}$
32. $\dfrac{1}{4 + t^2}\mathbf{i} - \dfrac{4}{1 - t^2}\mathbf{j}$
33. $\ln t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

34. Se $\mathbf{R}'(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t - 2}\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(3) = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, ache $\mathbf{R}(t)$.
35. Se $\mathbf{R}'(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + 2\cos^2 t\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0}$, ache $\mathbf{R}(t)$.
36. Se $\mathbf{R}'(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, ache $\mathbf{R}(t)$.

Nos Exercícios 37 e 38, ache uma equação cartesiana da curva que seja descrita pelo ponto final da representação posicional de $\mathbf{R}'(t)$. Ache $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t)$. *Interprete o resultado geometricamente.*

37. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$
38. $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} - \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

Nos Exercícios 39 e 40, se $\alpha(t)$ *for a medida em radianos do ângulo entre* $\mathbf{R}(t)$ *e* $\mathbf{Q}(t)$, *ache* $D_t\alpha(t)$.

39. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i}$ e $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$
40. $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q}(t) = 3t\mathbf{i}$

41. Suponha que $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}'$ sejam funções com valores vetoriais, definidas em um intervalo, e $\mathbf{R}'$ seja diferenciável no intervalo. Prove que
$$D_t[\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}(t)] = \|\mathbf{R}'(t)\|^2 + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$$
42. Se $\|\mathbf{R}(t)\| = h(t)$, prove que $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = [h(t)][h'(t)]$.
43. Se a função com valores vetoriais $\mathbf{R}$ e a função com valores reais f forem ambas diferenciáveis em um intervalo e $f(t) \neq 0$ no intervalo, prove que $\mathbf{R}/f$ também será diferenciável no intervalo e
$$D_t\left[\frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)}\right] = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$
44. Prove que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem vetores constantes e f e g forem funções integráveis, então
$$\int [\mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t)]\,dt = \mathbf{A}\int f(t)\,dt + \mathbf{B}\int g(t)\,dt$$
(*Sugestão*: expresse $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em termos de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.)

14.5 COMPRIMENTO DE ARCO

Na Secção 6.3 obtivemos uma fórmula para encontrar o comprimento de arco do gráfico de uma função. Tal gráfico é um tipo especial de curva, pois o gráfico de uma função não pode ser interceptado por uma reta vertical em mais de um ponto.

Desenvolveremos agora um método para encontrar o comprimento de arco de outros tipos de curvas. Seja C a curva tendo como equações paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

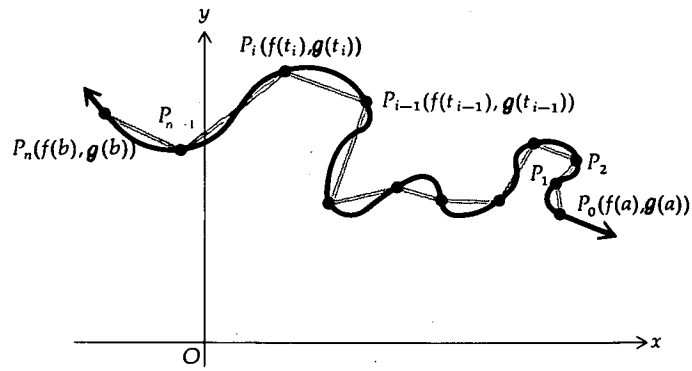


FIGURA 1

Suponha que f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Queremos especificar um número L para representar o número de unidades para o comprimento do arco de C entre $t = a$ e $t = b$. Vamos proceder como na Secção 6.3

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, formada pela divisão do intervalo em n subintervalos, sendo escolhidos $(n - 1)$ números entre a e b. Sejam $t_0 = a$ e $t_n = b$, e sejam $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ os números intermediários:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

O i-ésimo subintervalo é $[t_{i-1}, t_i]$ e $\Delta_i t$ é a medida de seu comprimento, sendo $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, e $i = 1, 2, \ldots, n$. Seja $\|\Delta\|$ a norma da partição, de tal forma que $\Delta_i t \leqslant \|\Delta\|$.

Há um ponto $P_i(f(t_i), g(t_i))$ em C associado a cada número t_i. De cada ponto P_{i-1} traçamos um segmento de reta, ligando-o ao próximo ponto P_i. Veja a Figura 1. Vamos denotar por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$ a medida do comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i. Da fórmula da distância temos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \tag{1}$$

A soma das medidas de comprimento dos n segmentos de reta é

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

Nossa noção intuitiva de comprimento de arco de $t = a$ até $t = b$ leva-nos a definir a medida do comprimento do arco como o limite da soma quando $\|\Delta\|$ tende a zero.

14.5.1 DEFINIÇÃO Seja C a curva com equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Vamos supor que exista um número L com a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ para a qual $\Delta < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim escrevemos

$$L = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

e L é chamado o **comprimento de arco** da curva C do ponto $(f(a), g(a))$ ao ponto $(f(b), g(b))$.

O arco da curva é retificável se o limite na Definição 14.5.1 existir. Se f' e g' forem contínuas em $[a, b]$, procederemos da seguinte forma, de modo a achar uma fórmula para calcular esse limite.

Como f' e g' são contínuas em $[a, b]$, elas são contínuas em cada subintervalo da partição Δ. Assim, a hipótese do teorema do valor médio (Teorema 4.3.2) está satisfeita por f e g em cada $[t_{i-1}, t_i]$; logo, existem os números z_i e w_i no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i), tais que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i)\,\Delta_i t \quad \text{e} \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(w_i)\,\Delta_i t$$

Substituindo em (1), obtemos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)\,\Delta_i t]^2 + [g'(w_i)\,\Delta_i t]^2}$$

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\,\Delta_i t \tag{2}$$

onde z_i e w_i estão no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i). Então, da Definição 14.5.1 e de (2), se o limite existir,

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\,\Delta_i t \tag{3}$$

A soma em (3) não é uma soma de Riemann pois z_i e w_i não são necessariamente os mesmos números. Assim sendo, não podemos aplicar a definição de integral definida para calcular o limite em (3). Há, contudo, um teorema que pode ser aplicado ao cálculo desse limite. Vamos enunciar o teorema, mas não daremos sua demonstração, pois ela está fora do contexto desse livro. Você poderá encontrá-la em textos de Cálculo Avançado.

14.5.2 TEOREMA Se as funções F e G forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então a função $\sqrt{F^2 + G^2}$ também será contínua em $[a, b]$, e se Δ for uma partição do intervalo $[a, b]$ (Δ: $a = t_0 < t_i < \ldots < t_{i-1} < t_i \ldots < t_n = b$), e z_i, w_i forem números em (t_{i-1}, t_i), então

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[F(z_i)]^2 + [G(w_i)]^2}\,\Delta_i t = \int_a^b \sqrt{(F(t)]^2 + [G(t)]^2}\,dt$$

Aplicando o Teorema 14.5.2 a (3), onde F é f' e G é g', temos

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

14.5.3 TEOREMA Seja C a curva com equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, e vamos supor que f' e g' sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Então, se L for o comprimento de arco da curva C entre os pontos $(f(a), g(a))$, $(f(b)$ e $g(b))$,

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

EXEMPLO 1 Ache o comprimento de arco da curva com equações paramétricas

$$x = t^3 \quad \text{e} \quad y = 2t^2$$

nos seguintes casos: (a) de $t = 0$ a $t = 1$; (b) de $t = -2$ a $t = 0$.

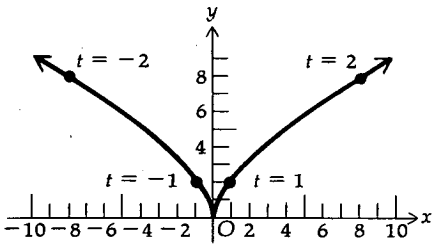


FIGURA 2

Solução Um esboço da curva está na Figura 2. Seja

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = 2t^2$$
$$f'(t) = 3t^2 \qquad g'(t) = 4t$$

A curva tem equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Aplicamos o Teorema 14.5.3 nas partes (a) e (b), onde L_a é o comprimento de arco de $t = 0$ a $t = 1$ e L_b é o comprimento de arco de $t = -2$ a $t = 0$.

(a)
$$\begin{aligned} L_a &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= \tfrac{1}{18} \cdot \tfrac{2}{3}(9t^2 + 16)^{3/2}\Big]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{27}[(25)^{3/2} - (16)^{3/2}] \\ &= \tfrac{1}{27}(125 - 64) \\ &= \tfrac{61}{27} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} L_b &= \int_{-2}^0 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt \\ &= \int_{-2}^0 \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= \int_{-2}^0 -t\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= -\tfrac{1}{18} \cdot \tfrac{2}{3}(9t^2 + 16)^{3/2}\Big]_{-2}^0 \\ &= -\tfrac{1}{27}[(16)^{3/2} - (52)^{3/2}] \\ &= \tfrac{1}{27}(104\sqrt{13} - 64) \\ &\approx 11{,}5 \end{aligned}$$

Observe que na terceira integral da parte (a) substituímos $\sqrt{t^2}$ por t, pois $0 \leqslant t \leqslant 1$. Mas, na terceira integral da parte (b) substituímos $\sqrt{t^2}$ por $-t$, pois $-2 \leqslant t \leqslant 0$.

Para a curva C tendo como equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, seja s o comprimento de arco de C do ponto $(f(t_0), g(t_0))$ ao ponto $(f(t), g(t))$ e vamos supor que s seja crescente enquanto t cresce. Então, s será uma função de t dada por

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du$$

Do primeiro teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.1),

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \tag{4}$$

Uma equação vetorial para C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \tag{5}$$

Como

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

então

$$\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \tag{6}$$

Substituindo (6) em (4), obtemos

$$\boxed{\|\mathbf{R}'(t)\| = \frac{ds}{dt}}$$

Da equação acima segue que se s for o comprimento de arco da curva C tendo (5) como equação vetorial, medido entre um ponto fixo e o ponto $(f(t), g(t))$, onde s é crescente quando t cresce, então a derivada de s com relação a t será o módulo da derivada do vetor posição no ponto $(f(t), g(t))$.

Substituímos (6) na fórmula do Teorema 14.5.3 e obtemos $L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\|\, dt$. Assim, o Teorema 14.5.3 pode ser enunciado vetorialmente da seguinte maneira.

14.5.4 TEOREMA Seja C a curva com equação vetorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, e vamos supor que f' e g' sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Então, o comprimento de arco de C, traçado pelo ponto final da representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ quando t cresce de a até b, é determinado por

$$L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\|\, dt$$

EXEMPLO 2 Ache o comprimento de arco traçado pelo ponto final da representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ quando t cresce de 1 para 4 se

$$\mathbf{R}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$$

Solução

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'(t) &= (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \\
\|\mathbf{R}'(t)\| &= \sqrt{(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)^2} \\
&= \sqrt{e^{2t}}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t} \\
&= e^t\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Do Teorema 14.5.4,

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^4 \sqrt{2}e^t\, dt \\
&= \sqrt{2}e^t\Big]_1^4 \\
&= \sqrt{2}(e^4 - e)
\end{aligned}$$

Outra fórmula do Teorema 14.5.3 para o comprimento de arco de uma curva C tendo como equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, é obtida, substituindo $f'(t)$ por $\dfrac{dx}{dt}$ e $g'(t)$ por $\dfrac{dy}{dt}$, o que nos dará

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{7}$$

Vamos supor que queiramos encontrar o comprimento de arco de uma curva C cuja equação polar seja $r = F(\theta)$. Se (x, y) for a representação cartesiana de um ponto P em C e (r, θ) for a representação polar de P, então

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

Substituindo r por $F(\theta)$ nessas duas equações, temos

$$x = F(\theta)\cos\theta \quad \text{e} \quad y = F(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Tais equações podem ser consideradas como equações paramétricas de C, onde θ é o parâmetro, em vez de t. Logo, se F' for contínua no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$, obtemos de (7) a fórmula para o comprimento de arco da curva C cuja

equação polar é $r = F(\theta)$, tomando $t = \theta$. Assim,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{8}$$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$,

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\,\text{sen}\,\theta \quad \text{and} \quad \frac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\,\text{sen}\,\theta\right)^2 + \left(\text{sen}\,\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\right)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2\,\text{sen}^2\,\theta + \text{sen}^2\,\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + (\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta)r^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}
\end{aligned}$$

Substituindo em (8), obtemos

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta} \tag{9}$$

EXEMPLO 3 Ache o comprimento da cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Solução Um esboço da curva está na Figura 3. Para obter o comprimento da curva toda podemos tomar θ com valores de 0 a 2π, ou então podemos usar a simetria da curva e calcular a metade do comprimento, fazendo com que θ assuma apenas os valores entre 0 e π.

Como $r = 2(1 + \cos\theta)$, $\dfrac{dr}{d\theta} = -2\,\text{sen}\,\theta$. Substituindo em (9), integrando de 0 a π e multiplicando por 2, temos

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^\pi \sqrt{(-2\,\text{sen}\,\theta)^2 + 4(1 + \cos\theta)^2}\, d\theta \\
&= 4\int_0^\pi \sqrt{\text{sen}^2\,\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta
\end{aligned}$$

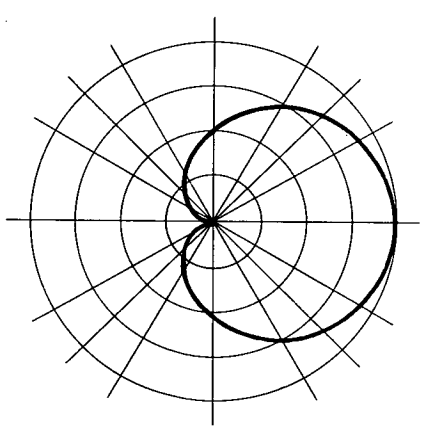


FIGURA 3

Para calcular essa integral, usamos a identidade $\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ que dá $\sqrt{1 + \cos\theta} = \sqrt{2}\,|\cos\frac{1}{2}\theta|$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \frac{1}{2}\theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$; assim, $\cos\frac{1}{2}\theta \geqslant 0$. Logo, $\sqrt{1 + \cos\theta} = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}
L &= 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta \\
&= 16\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^\pi \\
&= 16
\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 14.5

Nos Exercícios de 1 a 28, ache o comprimento do arco dado. Quando aparecer a, a > 0.

1. $x = \frac{1}{2}t^2 + t$, $y = \frac{1}{2}t^2 - t$; de $t = 0$ a $t = 1$.
2. $x = 3t^2$, $y = 2t^3$; de $t = 0$ a $t = 3$.
3. $x = t^2 + 2t$, $y = t^2 - 2t$; de $t = 0$ a $t = 2$.
4. $x = t^3$, $y = 3t^2$; de $t = -2$ a $t = 0$.
5. $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$; de $t = 1$ a $t = 2$.
6. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$; de $t = 0$ a $t = 3$.
7. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$; de $t = 0$ a $t = \ln 5$.
8. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$; de $t = 1$ a $t = 4$.
9. $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; de $t = 0$ a $t = 1$.
10. $\mathbf{R}(t) = \ln \operatorname{sen} t\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$; de $t = \frac{1}{6}\pi$ a $t = \frac{1}{2}\pi$.
11. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{tg}^{-1} t\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1)\mathbf{j}$; de $t = 0$ a $t = 1$.
12. $\mathbf{R}(t) = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}$; de $t = 0$ a $t = \frac{1}{3}\pi$.
13. A hipociclóide de quatro vértices inteira:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a \operatorname{sen}^3 t.$$

14. $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$; de $t = 0$ a $t = \pi$.
15. $x = 4 \operatorname{sen} 2t$, $y = 4\cos 2t$; de $t = 0$ a $t = \pi$.
16. Um arco da ciclóide: $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
17. A tratriz

$$x = t - a \operatorname{tgh}\frac{t}{a} \qquad y = a \operatorname{sech}\frac{t}{a};$$

de $t = -a$ a $t = 2a$.

18. A circunferência descrita por: $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$.
19. A circunferência descrita por: $r = 5\cos\theta$.
20. A circunferência descrita por: $r = a \operatorname{sen}\theta$.
21. A circunferência descrita por: $r = a$.
22. A curva inteira: $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$.
23. A curva inteira: $r = 3\cos^2\frac{1}{2}\theta$.
24. $r = a\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.
25. $r = e^{2\theta}$; de $\theta = 0$ a $\theta = 4$.
26. $r = a\theta^2$; de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.
27. $r = a \operatorname{sen}^3\frac{1}{3}\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_1$.
28. $r = \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$; de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{2}\pi$.
29. Ache a distância percorrida por um percevejo em um pneu de bicicleta se o raio do pneu for 40 cm e a bicicleta percorrer uma distância de 5π m. (*Sugestão*: a trajetória do percevejo é uma ciclóide.)

14.6 OS VETORES UNITÁRIOS DA TANGENTE E DA NORMAL E O COMPRIMENTO DE ARCO COMO UM PARÂMETRO

A cada ponto da curva no plano agora associamos dois outros vetores unitários, o *vetor tangente unitário* e o *vetor normal unitário*. Esses valores aparecem em muitas aplicações de funções com valores vetoriais.

14.6.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{R}(t)$ for o vetor posição da curva C num ponto P de C, então o **vetor tangente unitário** de C em P, denotado por $\mathbf{T}(t)$, será o vetor unitário na direção de $D_t\mathbf{R}(t)$, se $D_t\mathbf{R}(t) \neq 0$.

O vetor unitário na direção de $D_t\mathbf{R}(t)$ é dado por $D_t\mathbf{R}(t)/\|D_t\mathbf{R}(t)\|$; assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} \tag{1}$$

Como $\mathbf{T}(t)$ é um vetor unitário, segue do Teorema 14.4.11 que $D_t\mathbf{T}(t)$ deve ser ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. $D_t\mathbf{T}(t)$ não é necessáriamente um vetor unitário. Entretanto, o vetor $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$ é de módulo unitário e tem a mesma direção que $D_t\mathbf{T}(t)$, logo $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$ é um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{T}(t)$, sendo chamado de *vetor normal unitário*.

14.6.2 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário da curva C no ponto P, então o **vetor normal unitário** denotado por $\mathbf{N}(t)$, será o vetor unitário na direção de $D_t\mathbf{T}(t)$.

Da Definição 14.6.2 e da discussão anterior,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} \tag{2}$$

EXEMPLO 1 Dada a curva descrita pelas equações paramétricas

$$x = t^3 - 3t \quad \text{e} \quad y = 3t^2$$

ache $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Faça um esboço de uma parte da curva em $t = 2$ e trace as representações de $\mathbf{T}(2)$ e $\mathbf{N}(2)$ tendo como ponto inicial $t = 2$.

Solução Uma equação vetorial da curva é

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Assim,

$$D_t\mathbf{R}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} = \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)} = 3(t^2 + 1)$$

De (1),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

Diferenciando $\mathbf{T}(t)$ em relação a t obtemos

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}$$

Logo,

$$\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}} = \frac{2}{t^2 + 1}$$

De (2),

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

Determinamos $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$, para $t = 2$.

$$\mathbf{R}(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}(2) = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{N}(2) = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} - \tfrac{3}{5}\mathbf{j}$$

O esboço pedido está na Figura 1.

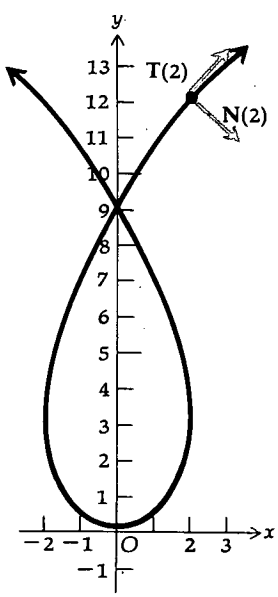


FIGURA 1

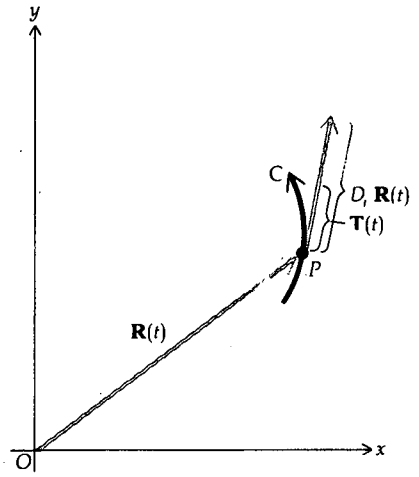


FIGURA 2

De (1),

$$D_t\mathbf{R}(t) = \|D_t\mathbf{R}(t)\|\mathbf{T}(t) \tag{3}$$

Essa equação expressa o vetor $D_t\mathbf{R}(t)$ como o produto de um escalar pelo vetor tangente unitário. A Figura 2 mostra parte de uma curva C com a representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ e as representações de $\mathbf{T}(t)$ e $D_t\mathbf{R}(t)$ cujos pontos iniciais estão no ponto P em C.

Agora usaremos (3) para calcular $D_t^2\mathbf{R}(t)$, aplicando o Teorema 14.4.8.

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + \|D_t\mathbf{R}(t)\|(D_t\mathbf{T}(t)) \tag{4}$$

De (2),

$$D_t\mathbf{T}(t) = \|D_t\mathbf{T}(t)\|\mathbf{N}(t)$$

Substituindo em (4), obtemos

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + (\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t) \tag{5}$$

Essa equação expressa o vetor $D_t^2\mathbf{R}(t)$ como a soma do vetor tangente unitário multiplicado por um escalar e do vetor normal unitário multiplicado por um escalar. O coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ no segundo membro de (5) é a componente de $D_t^2\mathbf{R}(t)$ na direção do vetor tangente unitário. O coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ no segundo membro de (5) é a componente de $D_t^2\mathbf{R}(t)$ na direção do vetor normal unitário.

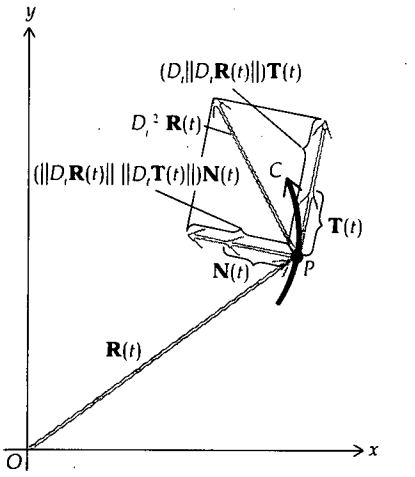


FIGURA 3

A Figura 3 mostra a representação posicional de $\mathbf{R}(t)$ e a mesma parte da curva C, mostrada na Figura 2. Também na Figura 3 estão as representações dos seguintes vetores, todos eles tendo os pontos iniciais no ponto P em C:

$$D_t^2\mathbf{R}(t) \qquad \mathbf{T}(t) \qquad (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) \qquad \mathbf{N}(t) \qquad (\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t)$$

Observe que a representação do vetor normal unitário $\mathbf{N}(t)$ está no lado côncavo da curva. Esse fato está provado em geral, na Secção 14.7.

Algumas vezes, em vez de um parâmetro t, queremos usar o parâmetro s, que é o comprimento do arco compreendido entre um ponto arbitrariamente escolhido $P_0(x_0, y_0)$ na curva C e o ponto $P(x, y)$ na mesma curva. Vamos supor que s seja crescente quando t cresce; assim, s será positivo se o comprimento do arco for medido na direção crescente de t e será negativo, se o comprimento de arco for medido na direção oposta. Portanto, s é uma distância orientada. Também, $\dfrac{ds}{dt} > 0$. A cada valor de s corresponde um único ponto P sobre a curva C. Conseqüentemente, as coordenadas de P são funções de s, e s é uma função de t. Da Secção 14.5 temos

$$\|D_t\mathbf{R}(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

Substituindo em (3), obtemos

$$D_t\mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t)$$

Se o parâmetro for s em vez de t, temos dessa equação, tomando $t = s$ e levando em conta que $\dfrac{ds}{ds} = 1$,

$$D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

14.6.3 TEOREMA Se a equação vetorial de uma curva C for $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$, onde s é a medida do comprimento de arco entre um dado ponto P_0 em C e o ponto P, então o vetor tangente unitário de C em P será dado por

$$\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$$

se existir.

Suponha agora que as equações paramétricas de uma curva C envolvam um parâmetro t, e queremos encontrar as equações paramétricas de C, com s, o comprimento de arco medido a partir de um ponto fixo, como parâmetro. Freqüentemente as operações envolvidas são bastante complicadas. Mas, o método usado será ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Suponha que as equações paramétricas da curva C sejam

$$x = t^3 \quad \text{e} \quad y = t^2 \qquad t \geqslant 0$$

Ache as equações paramétricas de C tendo s como um parâmetro, onde s é o comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$.

Solução O ponto onde $t = 0$ é a origem. Uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = \|D_t\mathbf{R}(t)\|$, diferenciamos o vetor acima e obtemos

$$D_t\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\|D_t\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{9t^4 + 4t^2}\\ &= \sqrt{t^2}\,\sqrt{9t^2 + 4}\\ &= t\sqrt{9t^2 + 4} \qquad (\text{pois } t \geqslant 0)\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{ds}{dt} = t\sqrt{9t^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}s &= \int t\sqrt{9t^2 + 4}\,dt\\ &= \tfrac{1}{18}\int \sqrt{9t^2 + 4}(18t\,dt)\\ &= \tfrac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Como $s = 0$ quando $t = 0$, obtemos $C = -\frac{8}{27}$. Logo,

$$s = \tfrac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2} - \tfrac{8}{27}$$

Resolvendo para t em termos de s, temos

$$(9t^2 + 4)^{3/2} = 27s + 8$$

$$9t^2 + 4 = (27s + 8)^{2/3}$$

Como $t \geqslant 0$,

$$t = \tfrac{1}{3}\sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}$$

Substituindo esse valor de t nas equações paramétricas de C, obtemos

$$x = \tfrac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2} \quad \text{e} \quad y = \tfrac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4] \tag{6}$$

Como $D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$, então se $\mathbf{R}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$, $\mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j}$. Assim, como $\mathbf{T}(s)$ é um vetor unitário,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \tag{7}$$

A equação (7) pode ser usada para testar as equações (6). Esse teste será deixado como exercício (veja o Exercício 17).

EXERCÍCIOS 14.6

Nos Exercícios de 1 a 10, ache, para a curva dada, $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ *e, em* $t = t_1$, *faça um esboço de uma parte da curva e trace as representações de* $\mathbf{T}(t_1)$ *e* $\mathbf{N}(t_1)$ *com ponto inicial em* $t = t_1$.

1. $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2$; $t_1 = 2$
2. $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$; $t_1 = 1$
3. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$; $t_1 = 0$
4. $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$; $t_1 = 0$
5. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$
6. $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$; $t_1 = 0$
7. $x = \cos kt$, $y = \operatorname{sen} kt$, $k > 0$; $t_1 = \pi/k$
8. $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$; $t_1 = \pi$
9. $\mathbf{R}(t) = \ln\cos t\mathbf{i} + \ln\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 < t < \frac{1}{2}\pi$; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$
10. $\mathbf{R}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 11 a 16, ache $\mathbf{T}(t)$ *e* $\mathbf{N}(t)$.

11. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$
12. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$; $t \geq 0$
13. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen}^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$
14. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{1 + t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$
15. $\mathbf{R}(t) = 4t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$
16. $\mathbf{R}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + \ln\cos t\mathbf{j}$
17. Teste as equações (6) da solução do Exemplo 2, usando a equação (7).

Nos Exercícios de 18 a 23, ache as equações paramétricas da curva tendo o comprimento de arco s como parâmetro, onde s é medido a partir do ponto onde t = 0. Comprove o seu resultado usando a equação (7).

18. $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$
19. $x = 2 + \cos t$, $y = 3 + \operatorname{sen} t$
20. $x = 2(\cos t + t\operatorname{sen} t)$, $y = 2(\operatorname{sen} t - t\cos t)$
21. $y = x^{3/2}$
22. $x = t^2 - 1$, $y = \frac{1}{3}t^3$
23. Um vértice da hipociclóide de quatro vértices:

$$\mathbf{R}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\pi.$$

24. Dada a ciclóide $x = 2(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, expresse o comprimento de arco s como uma função de t, onde s é medido a partir do ponto onde $t = 0$.
25. Dada a curva com equações paramétricas $x = e^t \cos t$ e $y = e^t \operatorname{sen} t$, expresse o comprimento de arco s como uma função de t, onde s é medido a partir do ponto onde $t = 0$.
26. Se a equação vetorial da curva C for $\mathbf{R}(t) = 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$, ache o co-seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{R}(\frac{1}{6}\pi)$ e $\mathbf{T}(\frac{1}{6}\pi)$.
27. Se a curva C tiver $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ como equação vetorial, ache o co-seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{R}(2)$ e $\mathbf{T}(2)$.
28. Se a curva C tiver $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t)\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ como equação vetorial, ache a medida em radianos do ângulo entre os vetores $\mathbf{N}(1)$ e $D_t^2\mathbf{R}(1)$.

14.7 CURVATURA

A *geometria diferencial* e o *movimento curvilíneo* (movimento ao longo de uma trajetória curva) envolvem o estudo de curvas através do cálculo de funções com valores vetoriais. Um conceito importante nesse estudo é o de *curvatura*, que dá a taxa de variação da direção de uma curva em relação à variação em seu comprimento. Relacionado com esse conceito está o ângulo que dá a direção do vetor tangente unitário associado à curva C. Portanto, seja ϕ o ângulo, em radianos, medido a partir da direção do eixo x positivo no sentido anti-horário até a direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$; veja a Figura 1. Calculamos $D_\phi\mathbf{T}(t)$. Como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, segue da equação (5) da Secção 14.1 que

$$\mathbf{T}(t) = \cos\phi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\mathbf{j}$$

Diferenciando em relação a ϕ, obtemos

$$D_\phi\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen}\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$$

Uma vez que $D_\phi\mathbf{T}(t) = \sqrt{(-\operatorname{sen}\phi)^2 + (\cos\phi)^2}$, que é 1, $D_\phi\mathbf{T}(t)$ é um vetor unitário. Mais tarde, nesta secção, mostraremos a relação entre o vetor $D_\phi\mathbf{T}(t)$ e o vetor normal unitário $\mathbf{N}(t)$.

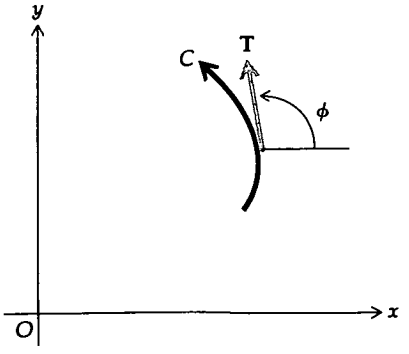


FIGURA 1

Para chegar à definição de curvatura, vamos considerar o vetor $D_s\mathbf{T}(t)$, onde s é o comprimento de arco medido desde um ponto arbitrariamente escolhido em C ao ponto P, com s crescente quando t cresce. Pela regra da cadeia (Teorema 14.4.9),

$$D_s\mathbf{T}(t) = D_\phi\mathbf{T}(t)\frac{d\phi}{ds}$$

Logo,

$$\|D_s\mathbf{T}(t)\| = \left\|D_\phi\mathbf{T}(t)\frac{d\phi}{ds}\right\|$$

$$= \|D_\phi\mathbf{T}(t)\|\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Como $D_\phi\mathbf{T}(t)$ é um vetor unitário, $\|D_\phi\mathbf{T}(t)\| = 1$; assim,

$$\boxed{\|D_s\mathbf{T}(t)\| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|} \tag{1}$$

O número $\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$ é o valor absoluto da taxa de variação da medida do ângulo que dá a direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ num ponto da curva em relação à medida de arco ao longo da curva. Esse número é o que definiremos como a curvatura da curva no ponto; contudo, antes de dar a definição formal, vamos mostrar que ele é consistente com a nossa noção intuitiva de curvatura. Por exemplo, num ponto P em C, ϕ é a medida em radianos do ângulo que dá a direção do vetor $\mathbf{T}(t)$, e s é o comprimento de arco em C desde P_0 até P. Seja Q o ponto em C para o qual a medida em radianos do ângulo que dá a direção de $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ em Q é $\phi + \Delta\phi$, e $s + \Delta s$ é o comprimento de arco de P_0 a Q. Então, o comprimento de arco de P a Q será Δs e a razão $\Delta\phi/\Delta s$ parece ser uma boa medida do que consideramos intuitivamente ser a *curvatura média* ao longo do arco PQ.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Veja a Figura 2(a), (b), (c) e (d): em (a) $\Delta\phi > 0$ e $\Delta s > 0$; em (b) $\Delta\phi > 0$ e $\Delta s < 0$; em (c) $\Delta\phi < 0$ e $\Delta s > 0$; e em (d) $\Delta\phi < 0$ e $\Delta s < 0$. ◀

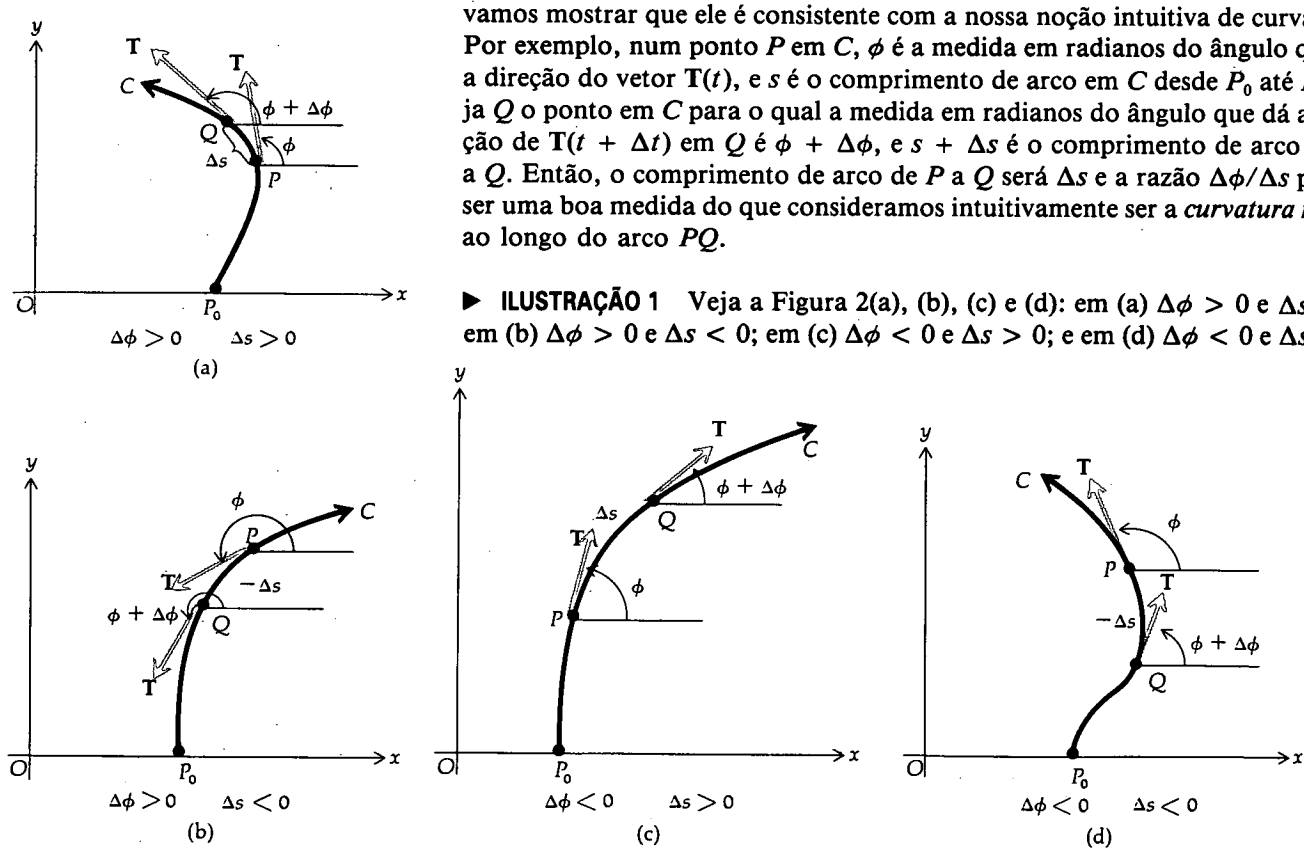


FIGURA 2

Vamos definir agora o *vetor curvatura*, seu módulo e a curvatura de uma curva em um ponto.

14.7.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário à curva C no ponto P, s for o comprimento de arco medido a partir de um ponto arbitrariamente escolhido em C até P, e s for crescente quando t cresce, então o **vetor curvatura** de C em P, denotado por $\mathbf{K}(t)$, será dado por

$$\mathbf{K}(t) = D_s\mathbf{T}(t)$$

A **curvatura** de C em P, denotada por $K(t)$, é o módulo do vetor curvatura, isto é

$$K(t) = \|D_s\mathbf{T}(t)\|$$

Observe que substituindo (1) na fórmula para $K(t)$ da Definição 14.7.1, poderíamos também definir a curvatura $K(t)$ como sendo

$$K(t) = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Para encontrar o vetor curvatura e a curvatura para uma determinada curva é conveniente ter uma fórmula que expresse o vetor curvatura em termos das derivadas em relação a t. Pela regra da cadeia,

$$D_t\mathbf{T}(t) = D_s\mathbf{T}(t)\frac{ds}{dt}$$

Da Secção 14.5, $\dfrac{ds}{dt} = \|D_t\mathbf{R}(t)\|$. Assim,

$$D_t\mathbf{T}(t) = [D_s\mathbf{T}(t)]\|D_t\mathbf{R}(t)\|$$

$$D_s\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

Substituindo na fórmula para $\mathbf{K}(t)$ da Definição 14.7.1, obtemos

$$\boxed{\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}} \tag{2}$$

Como $K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$, a curvatura é dada por

$$\boxed{K(t) = \left\|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}\right\|} \tag{3}$$

EXEMPLO 1 Dada a circunferência com raio a:

$$x = a\cos t \qquad y = a \operatorname{sen} t \qquad a > 0$$

ache o vetor curvatura e a curvatura em qualquer t.

Solução A equação vetorial da circunferência é

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

Assim,

$$D_t\mathbf{R}(t) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a\cos t)^2} = a$$

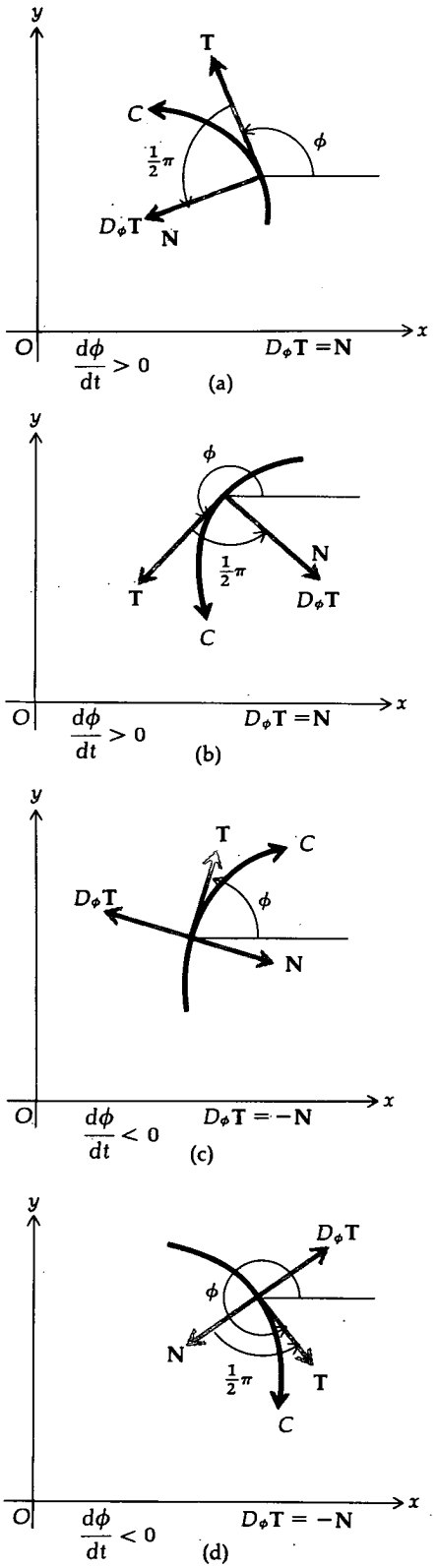


FIGURA 3

Logo,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} \qquad D_t\mathbf{T}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

$$= -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

$$\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} = -\frac{\cos t}{a}\mathbf{i} - \frac{\operatorname{sen} t}{a}\mathbf{j}$$

Portanto, o vetor curvatura e a curvatura são dados por

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{a}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{a}\operatorname{sen} t\mathbf{j} \qquad K(t) = \|\mathbf{K}(t)\| = \frac{1}{a}$$

O resultado do Exemplo 1 estabelece que a curvatura de uma circunferência é constante, como seria de se esperar. Além disso, é o inverso do raio.

Vamos agora retornar ao vetor unitário $D_\phi\mathbf{T}(t)$ definido por

$$D_\phi\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen}\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j} \tag{4}$$

Como $\mathbf{T}(t)$ tem módulo constante, segue do Teorema 14.4.11 que $D_\phi\mathbf{T}(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Substituindo $-\operatorname{sen}\phi$ por $\cos(\frac{1}{2}\pi + \phi)$ e $\cos\phi$ por $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + \phi)$, escrevemos (4) como

$$D_\phi\mathbf{T}(t) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + \phi)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + \phi)\mathbf{j}$$

Assim, o vetor $D_\phi\mathbf{T}(t)$ é um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{T}(t)$, fazendo um ângulo com $\mathbf{T}(t)$ de $\frac{1}{2}\pi$, no sentido anti-horário. O vetor normal unitário $\mathbf{N}(t)$ também é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Pela regra da cadeia,

$$D_t\mathbf{T}(t) = D_\phi\mathbf{T}(t)\frac{d\phi}{dt}$$

Como $\mathbf{N}(t)$ e $D_t\mathbf{T}(t)$ têm o mesmo sentido, segue dessa equação que o sentido de $\mathbf{N}(t)$ será o mesmo de $D_\phi\mathbf{T}(t)$ se $\frac{d\phi}{dt} > 0$ (isto é, se $\mathbf{T}(t)$ gira no sentido anti-horário quando t for crescente), e o sentido de $\mathbf{N}(t)$ é oposto ao de $D_\phi\mathbf{T}(t)$ se $\frac{d\phi}{dt} < 0$ (isto é, se $\mathbf{T}(t)$ gira no sentido horário quando t for crescente). Como ambos $D_\phi\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ são vetores unitários, concluímos que

$$D_\phi\mathbf{T}(t) = \begin{cases} \mathbf{N}(t) & \text{se } \dfrac{d\phi}{dt} > 0 \\ -\mathbf{N}(t) & \text{se } \dfrac{d\phi}{dt} < 0 \end{cases}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Na Figura 3(a), (b), (c) e (d) várias situações são mostradas; em (a) e (b), $\frac{d\phi}{dt} > 0$, e em (c) e (d), $\frac{d\phi}{dt} < 0$. A direção positiva ao longo da curva C está indicada pela ponta da seta em C. Em cada figura estão desenhados os ângulos medidos em θ rad e as representações dos vetores $\mathbf{T}(t)$, $D_\phi\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. ◀

Observe, na Figura 3, que *a representação do vetor normal unitário* $\mathbf{N}(t)$ *está sempre no lado côncavo da curva.*

Suponhamos que exista uma curva C e que num dado ponto P a curvatura exista, sendo $K(t)$, onde $K(t) \neq 0$. Consideremos a circunferência que é tangente à curva C em P e tem curvatura $K(t)$ em P. Do Exemplo 1, o raio dessa circunferência é $1/K(t)$ e o centro está sobre a reta perpendicular à reta tangente na direção de $N(t)$. Essa circunferência é chamada de **circunferência de curvatura** e seu raio é o *raio da curvatura* de C em P. A circunferência de curvatura é chamada, às vezes, de **circunferência osculadora**.

14.7.2 DEFINIÇÃO Se $K(t)$ for a curvatura de uma curva C num ponto P e $K(t) \neq 0$, então o **raio de curvatura** de C em P, denotado por $\rho(t)$, será definido por

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)}$$

EXEMPLO 2 Dado que uma equação vetorial de uma curva C é

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

(a) Ache o vetor tangente unitário, a curvatura e o raio de curvatura em $t = 1$.
(b) Faça um esboço de parte da curva, do vetor tangente unitário e da circunferência de curvatura em $t = 1$.

Solução

$$D_t\mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$$

$$D_t\mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}$$

$$= -\frac{t}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{1}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{j}$$

$$K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$$

$$= \sqrt{\frac{t^2}{4(1 + t^2)^4} + \frac{1}{4(1 + t^2)^4}}$$

$$= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$$

(a) $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \qquad K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \qquad \rho(1) = 4\sqrt{2}$

(b) A Figura 4 mostra o esboço pedido. A Tabela 1 dá os valores de x e de y quando t é -2, -1, 0, 1 e 2.

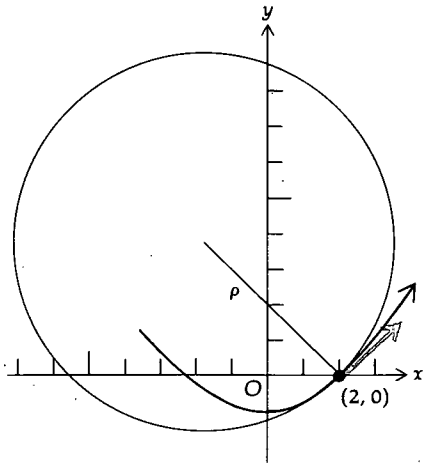


FIGURA 4

Tabela 1

t	x	y
-2	-4	3
-1	-2	0
0	0	-1
1	2	0
2	4	3

Vamos obter agora uma fórmula para calcular a curvatura diretamente das equações paramétricas da curva, $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Como $K(t) = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$, calculamos primeiro $\dfrac{d\phi}{ds}$.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\dfrac{d\phi}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}$$

Com a hipótese de que s é crescente quando t cresce, $\dfrac{ds}{dt} > 0$. Assim,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\dfrac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \tag{5}$$

Para encontrar $\dfrac{d\phi}{dt}$ observamos que sendo ϕ a medida em radianos do ângulo que dá a direção do vetor tangente temos, $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{dy}{dx}$. Logo,

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Derivando implicitamente em relação a t ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2 \phi \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2} \tag{6}$$

Como $\sec^2 \phi = 1 + \operatorname{tg}^2 \phi$, temos

$$\sec^2 \phi = 1 + \frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

Substituindo essa expressão de $\sec^2 \phi$ em (6), temos

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$$

Substituindo o resultado em (5), e como $K(t) = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$, temos

$$\boxed{K(t) = \frac{\left|\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\right|}{\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}} \tag{7}$$

EXEMPLO 3 Ache a curvatura da curva do Exemplo 2 usando a fórmula (7).

Solução As equações paramétricas de C são $x = 2t$ e $y = t^2 - 1$. Logo,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Assim sendo, de (7),

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{|2(2) - 2t(0)|}{[(2)^2 + (2t)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Suponha que a equação cartesiana de uma curva seja dada em uma das duas formas $y = F(x)$ ou $x = G(y)$. Casos especiais da fórmula (7) podem ser usados para encontrar a curvatura da curva em tais situações.

Se $y = F(x)$ for uma equação de uma curva C, um conjunto de equações paramétricas de C será $x = t$ e $y = F(t)$. Então,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Substituindo em (7), obtemos

$$\boxed{K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}} \tag{8}$$

Da mesma forma, se uma equação de uma curva C for $x = G(y)$,

$$\boxed{K = \frac{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

EXEMPLO 4 Se uma curva C tem uma equação

$$y = \frac{1}{x}$$

ache o raio de curvatura de C no ponto (1, 1), e faça um esboço da curva e da circunferência de curvatura em (1, 1).

Solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

Calculamos K a partir de (8) e então $\rho = 1/K$.

$$K = \frac{\left|\dfrac{2}{x^3}\right|}{\left[1 + \dfrac{1}{x^4}\right]^{3/2}} \qquad \rho = \frac{(x^4 + 1)^{3/2}}{2|x^3|}$$

$$= \frac{2|x^3|}{(x^4 + 1)^{3/2}}$$

Logo, em (1, 1), $\rho = \sqrt{2}$. O esboço pedido está na Figura 5.

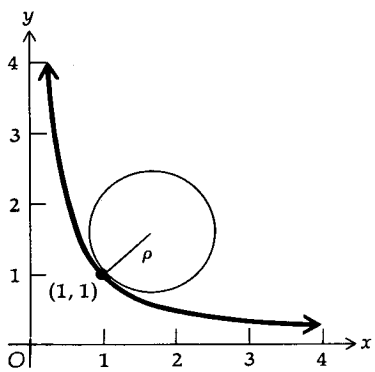


FIGURA 5

EXERCÍCIOS 14.7

Nos Exercícios de 1 a 4, ache a curvatura K e o raio de curvatura ρ no ponto onde $t = t_1$. Use a fórmula (3) para encontrar K. Faça um esboço mostrando uma parte da curva, o vetor tangente unitário e a circunferência de curvatura em $t = t_1$.

1. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$; $t_1 = 1$
2. $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j}$; $t_1 = 1$
3. $\mathbf{R}(t) = 2e^t\mathbf{i} + 2e^{-t}\mathbf{j}$; $t_1 = 0$
4. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$

Nos Exercícios 5 e 6, ache a curvatura K usando a fórmula (7). Então ache K e ρ no ponto onde $t = t_1$ e faça um esboço mostrando uma parte da curva, o vetor tangente unitário e a circunferência de curvatura em $t = t_1$.

5. $x = \dfrac{1}{1 + t}$, $y = \dfrac{1}{1 - t}$; $t_1 = 0$
6. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$; $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache a curvautra K e o raio de curvatura ρ no ponto dado. Faça um esboço mostrando uma parte da curva, parte da reta tangente e a circunferência de curvatura no ponto dado.

7. $y = 2\sqrt{x}$; (0, 0)
8. $y^2 = x^3$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$
9. $y = e^x$; (0, 1)
10. $y = \ln x$; $(e, 1)$
11. $x = \operatorname{sen} y$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$
12. $4x^2 + 9y^2 = 36$; (0, 2)
13. $x = \sqrt{y - 1}$; (2, 5)
14. $x = \operatorname{tg} y$; $(1, \frac{1}{4}\pi)$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache o raio de curvatura num ponto genérico da curva.

15. $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
16. $y = \ln \sec x$
17. $4x^2 - 9y^2 = 16$
18. $x = \operatorname{tg}^{-1} y$
19. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$
20. $\mathbf{R}(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$
21. A ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$
22. A tratriz $x = t - a \operatorname{tgh} \dfrac{t}{a}$, $y = a \operatorname{sech} \dfrac{t}{a}$
23. Mostre que a curvatura da catenária $y = a \cosh (x/a)$ num ponto qualquer (x, y) da curva é a/y^2. Trace a circunferência de curvatura em $(0, a)$. Mostre que a curvatura K é um máximo absoluto no ponto $(0, a)$, sem se referir a $K'(x)$.

Nos Exercícios de 24 a 28, ache um ponto na curva dada no qual a curvatura é um máximo absoluto.

24. $y = e^x$
25. $y = 6x - x^2$
26. $y = \operatorname{sen} x$
27. $\mathbf{R}(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$
28. $y = x^2 - 2x + 3$

29. Ache uma equação da circunferência de curvatura de $y = e^x$ no ponto (0, 1).

30. Se uma equação polar de uma curva for $r = F(\theta)$, prove que a curvatura K será dada pela fórmula

$$K = \frac{\left| r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right) \right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

Nos Exercícios de 31 a 34, ache a curvatura K e o raio de curvatura ρ no ponto indicado. Use a fórmula do Exercício 30 para achar K.

31. $r = 4\cos 2\theta$; $\theta = \frac{1}{12}\pi$

32. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$; $\theta = 0$

33. $r = a\sec^2 \frac{1}{2}\theta$; $\theta = \frac{2}{3}\pi$

34. $r = a\theta$; $\theta = 1$

35. O centro da circunferência de curvatura de uma curva C em um ponto P é chamado de *centro de curvatura em P*. Prove que as coordenadas do centro de curvatura de uma curva em $P(x, y)$ são dadas por

$$x_c = x - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad y_c = y + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Nos Exercícios de 36 a 38, ache a curvatura K, o raio de curvatura ρ e o centro de curvatura no ponto dado. Faça um esboço da curva e a circunferência de curvatura.

36. $y = \ln x$; (1, 0)

37. $y = x^4 - x^2$; (0, 0)

38. $y = \cos x$; $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache as coordenadas do centro de curvatura num ponto qualquer.

39. $y^2 = 4px$

40. $y^3 = a^2x$

41. $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j}$

42. $\mathbf{R}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\mathbf{j}$

43. Mostre que a curvatura de uma linha reta é zero em qualquer ponto da reta.

14.8 MOVIMENTO PLANO

Nossa discussão anterior sobre movimento de uma partícula ficou restrita ao movimento retilíneo. Definimos então a velocidade e a aceleração de uma partícula em movimento ao longo de uma linha reta. Considere agora o movimento de uma partícula ao longo de uma curva no plano, chamado de **movimento curvilíneo**.

Suponha que C seja uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde t denota o tempo. Então,

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

é uma equação vetorial de C. Enquanto t varia, o ponto final $P(f(t), g(t))$ de $\overrightarrow{OP}$ move-se ao longo da curva C. A posição após t unidades de tempo para uma partícula movendo-se ao longo de C é o ponto $P(f(t), g(t))$. O **vetor velocidade** da partícula no instante t é definido como sendo $\mathbf{R}'(t)$, sendo denotado por $\mathbf{V}(t)$.

14.8.1 DEFINIÇÃO

Seja C a curva tendo equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Se uma partícula estiver se movendo ao longo de C de tal forma que sua posição em qualquer instante t seja o ponto (x, y), então a **velocidade instantânea** da partícula no instante t será determinada pelo vetor velocidade

$$\mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

se $f'(t)$ e $g'(t)$ existirem.

Como a direção de $\mathbf{R}'(t)$ no ponto $P(f(t), g(t))$ é ao longo da reta tangente à curva C em P, o vetor velocidade $\mathbf{V}(t)$ tem o mesmo sentido de $\mathbf{R}'(t)$ em P.

O módulo do vetor velocidade é uma medida da **velocidade escalar** da partícula no instante t sendo dada por

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \tag{1}$$

Note que a velocidade é um vetor e a velocidade escalar é um escalar. Conforme foi mostrado na Secção 14.5, a expressão do segundo membro de (1) é ds/dt.

Assim sendo, a velocidade escalar é a taxa de variação de s em relação a t, e escrevemos

$$\boxed{\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{ds}{dt}}$$

O **vetor aceleração** da partícula no instante t é denotado por $\mathbf{A}(t)$, sendo definido como a derivada do vetor velocidade ou, equivalentemente, a derivada segunda do vetor posição.

14.8.2 DEFINIÇÃO

A **aceleração instantânea** no instante t de uma partícula movendo-se ao longo de uma curva C, tendo como equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, é determinada pelo vetor aceleração

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) \Leftrightarrow \mathbf{A}(t) = \mathbf{R}''(t)$$

onde $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}''(t)$ existe.

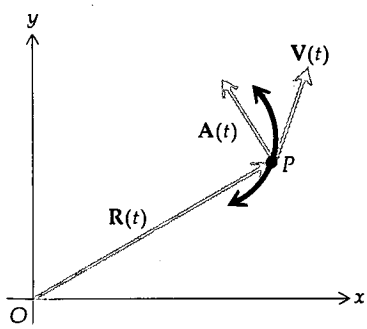


FIGURA 1

A Figura 1 mostra as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração cujo ponto inicial é o ponto P em C.

EXEMPLO 1 Uma partícula está se movendo ao longo da curva tendo como equações paramétricas

$$x = 4\cos\tfrac{1}{2}t \quad \text{e} \quad y = 4\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t$$

Se x e y são medidos em centímetros, ache a velocidade escalar e o módulo do vetor aceleração da partícula em t segundos. Faça um esboço da trajetória da partícula, e trace as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração tendo como ponto inicial $t = \frac{1}{3}\pi$.

Solução Uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = 4\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t)\\ &= -2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t)\\ &= -\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} - \text{sen}\,\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{(-2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t)^2 + (2\cos\tfrac{1}{2}t)^2}\\ &= \sqrt{4\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}t + 4\cos^2\tfrac{1}{2}t}\\ &= 2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{(-\cos\tfrac{1}{2}t)^2 + (-\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Logo, a velocidade escalar da partícula é constante, sendo 2 cm/s. O módulo do vetor aceleração também é constante, sendo 1 cm/s^2.

Eliminando t entre as equações paramétricas de C, obtemos a equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = 16$$

que é uma circunferência com seu centro na origem e raio 4. Agora encontraremos o vetor velocidade e o vetor aceleração para $t = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\tfrac{1}{3}\pi) &= -2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 2\cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}\\ &= -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathbf{A}(\tfrac{1}{3}\pi) &= -\cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} - \text{sen}\,\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}\\ &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

A direção de $\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi)$ é dada por

$$\text{tg}\,\theta_1 = -\sqrt{3} \qquad \tfrac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$$

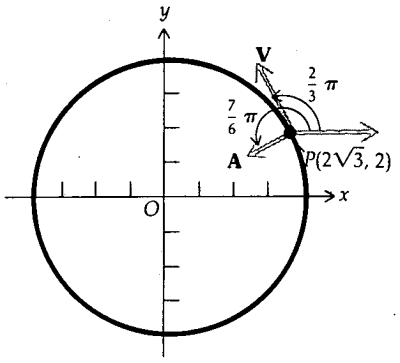


FIGURA 2

e a direção de $\mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi)$ é dada por

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \pi < \theta_2 < \tfrac{3}{2}\pi$$

Assim, $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ e $\theta_2 = \frac{7}{6}\pi$. A Figura 2 mostra a trajetória da partícula e as representações do vetor aceleração e do vetor velocidade, tendo ponto inicial onde $t = \frac{1}{3}\pi$.

EXEMPLO 2 A posição de uma partícula em movimento no instante t é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j}$$

Ache $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$, $\|\mathbf{A}(t)\|$. Faça um esboço da trajetória da partícula e das representações do vetor velocidade e do vetor aceleração, tendo ponto inicial onde $t = \frac{1}{2}$.

Solução

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) & \mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) \\ &= -2e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j} & &= 4e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{4e^{-4t} + 9e^{2t}} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{16e^{-4t} + 9e^{2t}} \\ \|\mathbf{V}(\tfrac{1}{2})\| &= \sqrt{4e^{-2} + 9e} & \|\mathbf{A}(\tfrac{1}{2})\| &= \sqrt{16e^{-2} + 9e} \\ &\approx 5{,}00 & &\approx 5{,}16 \end{aligned}$$

As equações paramétricas da trajetória da partícula são

$$x = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y = 3e^{t}$$

Eliminamos t entre essas equações, obtendo

$$e^{2t} = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad e^{2t} = \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y^2}{9}$$

$$xy^2 = 9$$

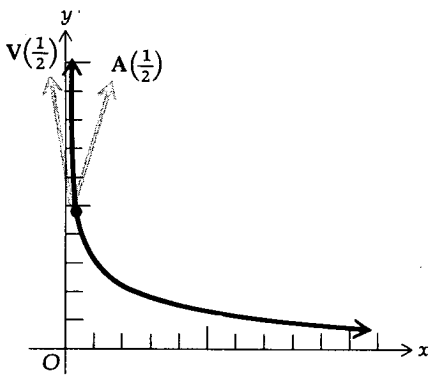


FIGURA 3

Como $x > 0$ e $y > 0$, a trajetória da partícula é a parte da curva $xy^2 = 9$ no primeiro quadrante. A Figura 3 mostra a trajetória da partícula e as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração quando $t = \frac{1}{2}$. A inclinação da representação de $\mathbf{V}(\frac{1}{2})$ é $\frac{3}{2}e^{3/2} \approx -6{,}7$, e a inclinação da representação de $\mathbf{A}(\frac{1}{2})$ é $\frac{3}{4}e^{3/2} \approx 3{,}4$.

Vamos deduzir agora as equações do movimento de um projétil, supondo que esse movimento aconteça num plano vertical. Vamos supor também que a única força atuando sobre o projétil seja seu peso, que tem seu sentido voltado para baixo e uma intensidade de mg N, onde m é sua massa e g m/s² é a aceleração constante causada pela gravidade. Estamos desprezando a força atribuída à resistência do ar (que não apresenta efeitos sensíveis para corpos pesados movendo-se com pequenas velocidades escalares). O sentido positivo é tomado verticalmente para cima e horizontalmente para a direita.

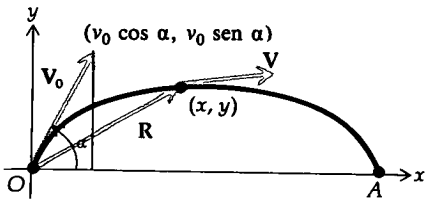


FIGURA 4

Suponha, então, que um projétil seja atirado por um revólver, com um ângulo de elevação medido em α rad. Seja v_0 o número de metros por segundo da velocidade escalar inicial ou *velocidade na boca da arma*. Os eixos coordenados estão dispostos de tal maneira que a arma esteja localizada na origem. Consulte a Figura 4. O vetor velocidade inicial, $\mathbf{V}_0$, do projétil é dado por

$$\mathbf{V}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j} \tag{2}$$

Seja t s o tempo decorrido desde que a arma foi disparada, seja x a distância horizontal percorrida pelo projétil entre o instante inicial e t s, e y m, a distância vertical percorrida pelo projétil entre o instante inicial e t s. $\mathbf{R}(t)$ é o vetor posição do projétil em t s, $\mathbf{V}(t)$ é o vetor velocidade do projétil em t s, e $\mathbf{A}(t)$ é o vetor aceleração do projétil em t s.

Como x é uma função de t, escrevemos $x(t)$. Da mesma forma, y é uma função de t e escrevemos $y(t)$. Então,

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

Como a única força atuando no projétil tem uma intensidade de mg N e está dirigida para baixo, então, se $\mathbf{F}$ denotar essa força,

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} \tag{3}$$

A segunda lei do movimento de Newton afirma que a força que age sobre um corpo é igual a "massa vezes aceleração". Assim,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}$$

Do estabelecido acima e de (3),

$$m\mathbf{A} = -mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = -g\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$, temos, do resultado,

$$\mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j}$$

Integrando ambos os membros em relação a t, obtemos

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \tag{4}$$

onde $\mathbf{C}_1$ é um vetor constante de integração.

Quando $t = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$. Assim $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$. Logo, de (4),

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

ou, como $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$,

$$\mathbf{R}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

Integrando ambos os lados dessa equação vetorial em relação a t, obtemos

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{C}_2$$

onde $\mathbf{C}_2$ é um vetor constante de integração.

Quando $t = 0$, $\mathbf{R} = 0$ pois o projétil está na origem, no começo. Assim, $\mathbf{C}_2 = 0$. Logo,

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t$$

Substituindo o valor de $\mathbf{V}_0$ de (2) no resultado acima, obtemos

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0 \cos\alpha\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos\alpha\mathbf{i} + (tv_0 \operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \tag{5}$$

A equação (5) dá o vetor posição do projétil no instante em que o tempo decorrido é de t s. A partir dessa equação podemos discutir o movimento do projétil. Em geral estamos interessados nas seguintes questões:

1. Qual é o alcance do projétil? O alcance é a distância $|OA|$ ao longo do eixo x (veja a Figura 4).
2. Qual é o tempo total de vôo, isto é, o tempo que o projétil leva para ir de O até A?
3. Qual é a altura máxima do projétil?
4. Qual é a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil?
5. Qual é o vetor velocidade do projétil no impacto?

Essas questões estão respondidas no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 Um projétil é atirado de uma arma com um ângulo de elevação cuja medida em radianos é $\frac{1}{6}\pi$. Sua velocidade na boca da arma é 480 m/s. Ache (a) o vetor posição do projétil em qualquer instante; (b) o tempo de vôo; (c) o alcance; (d) a altura máxima; (e) o vetor velocidade no impacto; (f) o vetor posição e o vetor velocidade em 2 s; (g) a velocidade escalar em 2 s; e (h) a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil.

Solução De (2) com $v_0 = 480$ e $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, o vetor velocidade inicial é

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0 &= 480 \cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 480 \operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}\\ &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j}\end{aligned}$$

(a) Podemos obter o vetor posição em t s, aplicando (5); obtemos então

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

Fazendo $g = 9{,}8$ temos

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - 4{,}9t^2)\mathbf{j} \tag{6}$$

Assim, se (x, y) for a posição do projétil em t s,

$$x = 240\sqrt{3}t \quad \text{e} \quad y = 240t - 4{,}9t^2 \tag{7}$$

(b) Para determinar o tempo de vôo, precisamos encontar t quando $y = 0$. Tomando $y = 0$ na segunda equação em (7), temos

$$240t - 4{,}9t^2 = 0$$

$$t(240 - 4{,}9t) = 0$$

$$t = 0 \qquad t = 49$$

O valor $t = 0$ ocorre quando o projétil é disparado. O valor $t = 49$ dá o tempo de vôo. Assim sendo, o tempo de vôo é de 49 s.

(c) Para achar o alcance, determinamos x para $t = 49$. Da primeira equação em (7) com $t = 49$ obtemos $x = 11.760\sqrt{3}$. Logo, o alcance é $11.760\sqrt{3}$ m ≈ 20.369 m.

(d) A altura máxima é obtida quando a componente vertical do vetor velocidade é 0, isto é, quando $\dfrac{dy}{dt} = 0$. Calculamos $\dfrac{dy}{dt}$ a partir da segunda equação de (7) e obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 240 - 9{,}8t$$

Expressando $\dfrac{dy}{dt} = 0$ obtemos $t = 24{,}5$, que é a metade do tempo total de vôo. Quando $t = 24{,}5$, $y \approx 2.938{,}8$. Assim sendo, a altura máxima obtida é de 2.938,8 m.

(e) Como o tempo de vôo é 49 s, o vetor velocidade no impacto é $\mathbf{V}(49)$. Como $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$, então, de (6),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - 9{,}8t)\mathbf{j} \qquad (8) \\ \mathbf{V}(49) &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240{,}2\mathbf{j} \end{aligned}$$

(f) Se $t = 2$ em (6) e (8), temos

$$\mathbf{R}(2) = 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 460{,}4\mathbf{j} \qquad \mathbf{V}(2) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 220{,}4\mathbf{j}$$

(g)
$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}(2)\| &= \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (220{,}4)^2} \\ &\cong \sqrt{(415{,}7)^2 - (220{,}4)^2} \\ &\cong 470{,}5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Logo, em 2 s a velocidade escalar é 470,5 m/s.

(h) Para encontrar a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil, eliminamos t entre as equações (7). Substituindo o valor de t da primeira equação na segunda, temos

$$y = 240\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right) - 4{,}9\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \left(\frac{4{,}9}{240\sqrt{3}}\right)^2 x^2$$

que é uma equação de uma parábola.

EXERCÍCIOS 14.8

Nos Exercícios de 1 a 8, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo as equações paramétricas dadas, onde t s é o tempo. Ache: (a) o vetor velocidade $\mathbf{V}(t)$*; (b) o vetor aceleração* $\mathbf{A}(t)$*; (c) a velocidade escalar em* $t = t_1$*; (d) o módulo do vetor aceleração em* $t = t_1$*. Faça um esboço da trajetória da partícula e trace as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração em* $t = t_1$*.*

1. $x = t^2 + 4$, $y = t - 2$; $t_1 = 3$
2. $x = \ln(t - 2)$, $y = t^3 - 1$; $t_1 = 3$
3. $x = 5\cos 2t$, $y = 3\,\text{sen}\,2t$; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$
4. $x = 2/t$, $y = -\frac{1}{4}t$; $t_1 = 4$
5. $x = t$, $y = \ln\sec t$; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$
6. $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$
7. $x = \text{sen}\,t$, $y = \text{tg}\,t$; $t_1 = \frac{1}{6}\pi$
8. $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$; $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 9 a 16, a posição de uma partícula no instante t s é determinada por uma equação vetorial. Ache: (a) $\mathbf{V}(t_1)$*; (b)* $\mathbf{A}(t_1)$*; (c)* $\|\mathbf{V}(t_1)\|$*; (d)* $\|\mathbf{A}(t_1)\|$*. Faça um esboço de uma parte da trajetória da partícula contendo a posição da partícula em* $t = t_1$ *e trace as representações de* $\mathbf{V}(t_1)$ *e* $\mathbf{A}(t_1)$*, tendo como ponto inicial aquele dado por* $t = t_1$*.*

9. $\mathbf{R}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$; $t_1 = 3$
10. $\mathbf{R}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$; $t_1 = -1$

11. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$; $t_1 = \ln 2$
12. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3t)\mathbf{i} + (1 - 3t^2)\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{2}$
13. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $t_1 = \pi$
14. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$; $t_1 = \ln 2$
15. $\mathbf{R}(t) = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2(1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{5}{6}\pi$
16. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 2)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j}$; $t_1 = 1$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache o vetor posição $\mathbf{R}(t)$.

17. $\mathbf{V}(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2}\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j}$, e $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
18. $\mathbf{V}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + 3t^{-2}\mathbf{j}$, e $\mathbf{R}(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
19. $\mathbf{A}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, e $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{j}$
20. $\mathbf{A}(t) = 2 \cos 2t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, e $\mathbf{R}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$
21. Um projétil é atirado por uma arma, num ângulo de elevação de 45°, com uma velocidade na boca da arma de 2.500 cm/s. Ache (a) o alcance do projétil; (b) a altura máxima atingida; (c) a velocidade no impacto.
22. Um projétil é atirado por uma arma com um ângulo de elevação de 60°. A velocidade na boca da arma é de 160 m/s. Ache (a) o vetor posição do projétil em t s; (b) o tempo de vôo; (c) o alcance; (d) a altura máxima atingida; (e) a velocidade no impacto; (f) a velocidade escalar em 4 s.
23. Um projétil é atirado do alto de um edifício por uma arma, formando um ângulo de 30° com a horizontal. Se a velocidade na boca da arma é 1.600 cm/s, ache o tempo de vôo e a distância do ponto onde cai o projétil até a base do edifício.
24. A velocidade na boca de uma arma é de 160 m/s. Sob que ângulo de elevação deve ser disparada a arma para que o projétil atinja um objeto no mesmo nível que a arma e a uma distância de 400 m dela?
25. Qual é a velocidade na boca de uma arma, se um projétil disparado por ela tem um alcance de 2.000 m e atinge uma altura máxima de 1.000 m?
26. Uma bola é atirada horizontalmente, de cima de um penhasco com 256 m de altura, com uma velocidade inicial de 50 m/s. Ache o tempo de vôo da bola e a distância entre a base do penhasco e o ponto de queda.
27. Uma pessoa atira uma bola com velocidade escalar inicial de 50 m/s e com um ângulo de elevação de 60° em direção a um alto edifício, distante 25 m da pessoa. Se a mão da pessoa está a 1 m do chão, mostre que bola atinge o prédio e ache a direção da bola no momento em que ela atingir o edifício.
28. Do alto de um edifício com 60 m de altura, uma menina joga uma pedra em direção ao chão, fazendo um ângulo de 45° com a horizontal e a uma velocidade inicial de 4 m/s. Determine a distância no chão entre a base do edifício e o ponto onde cai a pedra.
29. Resolva o Exercício 28 se a menina joga a pedra horizontalmente, com a velocidade escalar inicial de 4 m/s.
30. A que ângulo de elevação deve ser disparada uma arma para obter o máximo alcance para uma dada velocidade na boca da arma?

14.9 COMPONENTES NORMAL E TANGENCIAL DA ACELERAÇÃO *(Suplementar)*

Se uma partícula está se movendo ao longo de uma curva C tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

o vetor velocidade num ponto P é dado por

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) \tag{1}$$

Da Secção 14.6, se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário em P e se s for o comprimento de arco de C desde um ponto fixo P_0 até P, com s crescente quando t cresce,

$$D_t\mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t)$$

Substituindo a equação acima em (1), temos

$$\mathbf{V}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t)$$

Essa igualdade expressa o vetor velocidade em um ponto como um escalar vezes o vetor tangente unitário no ponto. O coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ é chamado de **componente tangencial do vetor velocidade** e é $\dfrac{ds}{dt}$. Obteremos em seguida a expressão do vetor aceleração em um ponto, em termos de um vetor tangente à direção do movimento e de um vetor normal à direção do movimento.

O vetor aceleração em P é dado por

$$\mathbf{A}(t) = D_t^2\mathbf{R}(t) \tag{2}$$

De (5) da Secção 14.6,

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = (D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + (\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t) \tag{3}$$

Da Secção 14.5,

$$\frac{ds}{dt} = \|D_t\mathbf{R}(t)\| \tag{4}$$

Diferenciando em relação a t ambos os membros de (4) obtemos

$$\frac{d^2s}{dt^2} = D_t\|D_t\mathbf{R}(t)\| \tag{5}$$

Além disso,

$$\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \|D_t\mathbf{R}(t)\|^2\left\|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}\right\| \tag{6}$$

Aplicando (4) acima e a equação (3) da Secção 14.7 ao segundo membro de (6) temos

$$\|D_t\mathbf{R}(t)\|\,\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \tag{7}$$

Substituindo (2), (5) e (7) em (3) obtemos

$$\boxed{\mathbf{A}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t)\mathbf{N}(t)} \tag{8}$$

A igualdade (8) expressa o vetor aceleração como a soma de um escalar vezes o vetor tangente unitário e um escalar vezes o vetor normal unitário; isto é, converte $\mathbf{A}(t)$ na soma de dois vetores, um na direção tangente à do movimento e o outro na direção normal à do movimento. O coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ é chamado de **componente tangencial do vetor aceleração**, sendo denotado por $A_T(t)$, enquanto que o coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ é chamado de **componente normal do vetor aceleração**, sendo denotado por $A_N(t)$. Assim,

$$\boxed{A_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2}} \tag{9}$$

e

$$\boxed{A_N(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \quad \Leftrightarrow \quad A_N(t) = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho(t)}} \tag{10}$$

Como $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$ é a taxa de variação de $\mathbf{V}(t)$. A variação em $\mathbf{V}(t)$ pode ser causada ou por uma variação em seu módulo ou em sua direção. Como $\|\mathbf{V}(t)\|$ é a medida da velocidade escalar da partícula no instante t unidades e $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\|$, então $A_T(t)$ é a taxa de variação da medida da velocidade escalar da partícula; isto é, $A_T(t)$ está relacionada com a mudança no módulo de $\mathbf{V}(t)$. Como $A_N(t)$ envolve a curvatura $K(t)$, $A_N(t)$ está relacionada com a variação na direção de $\mathbf{V}(t)$. Esses resultados são importantes em Mecânica. Da segunda lei do movimento de Newton temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \tag{11}$$

onde **F** é o vetor força aplicado a um objeto móvel, m é a medida constante da massa do objeto e **A** é o vetor aceleração do objeto. Substituindo (8) em (11) e tomando $v = \dfrac{ds}{dt}$ temos

$$\mathbf{F}(t) = m\frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + mv^2 K(t)\mathbf{N}(t)$$

Assim, no movimento curvilíneo a componente normal de **F** é

$$mv^2 K(t) \Leftrightarrow \frac{mv^2}{\rho(t)}$$

que é a intensidade da força normal à curva necessária para manter o objeto na curva. Por exemplo, se um automóvel está indo ao longo de uma curva em alta velocidade escalar, então a força normal deve ter uma grande intensidade, a fim de manter o carro na estrada. Também, se a curva for fechada, a medida do raio de curvatura será pequena; assim, o valor da intensidade da força normal deve ser grande.

Substituindo (9) e (10) em (8), temos

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t)$$

de onde segue que

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}$$

Resolvendo em termos de $A_N(t)$ e notando de (10) que $A_N(t)$ é não-negativo, temos

$$\boxed{A_N(t) = \sqrt{\mathbf{A}(t)^2 - [A_T(t)]^2}}$$

EXEMPLO 1 Uma partícula move-se ao longo de uma curva com a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$$

Ache as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

Solução

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t\mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t\mathbf{V}(t) \\ &= \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} & &= e^t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{1 + e^{2t}} & \|\mathbf{A}(t)\| &= e^t \end{aligned}$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\|$, $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1 + e^{2t}}$ e $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$. Logo,

$$A_T(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1 + e^{2t}}} \qquad A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t} - \frac{e^{4t}}{1 + e^{2t}}}$$

$$= \frac{e^t}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$$

EXEMPLO 2 Uma partícula está se movendo ao longo da curva com equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{j}$$

Ache cada um dos seguintes vetores: $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Ache também os seguintes escalares: $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ e $K(t)$. Ache os valores específicos quando $t = 2$. Faça um esboço mostrando uma parte da curva no ponto onde $t = 2$ e trace as representações de $\mathbf{V}(2)$, $\mathbf{A}(2)$, $A_T(2)\mathbf{T}(2)$ e $A_N(2)\mathbf{N}(2)$, tendo como ponto inicial o ponto onde $t = 2$.

Solução Como $\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t)$ e $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} & \mathbf{A}(t) &= 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} & &= 2\sqrt{1 + t^2} \\ &= t^2 + 1 \end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{ds}{dt} = t^2 + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \frac{d^2s}{dt^2} & A_N(t) &= \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} \\ &= 2t & &= \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} \\ & & &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Para calcular $\mathbf{N}(t)$ usamos as seguintes fórmulas que decorrem de (8):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(D_t s)^2 K(t)}[\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t)] \tag{12}$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = \frac{2}{t^2 + 1}[(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}] \tag{13}$$

De (12), $\mathbf{N}(t)$ é um escalar vezes o vetor em (13). Como $\mathbf{N}(t)$ é um vetor unitário, podemos obter $\mathbf{N}(t)$ dividindo o vetor em (13) pelo seu módulo. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1 - t^2)^2 + (2t)^2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1 + t^2}\mathbf{j} \end{aligned}$$

A curvatura $K(t)$ é encontrada através da primeira equação em (10). Como $\dfrac{ds}{dt} = t^2 + 1$, obtemos

$$K(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$$

Os vetores pedidos e os escalares em $t = 2$ são os seguintes:

$$\mathbf{V}(2) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \qquad \mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{V}(2)\| = 5 \qquad A_T(2) = 4$$

$$\mathbf{T}(2) = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{N}(2) = -\tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$

$$A_N(2) = 2 \qquad K(2) = \tfrac{2}{25}$$

O esboço aparece na Figura 1.

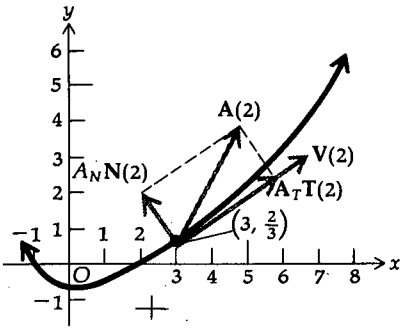


FIGURA 1

EXERCÍCIOS 14.9

Nos Exercícios de 1 a 4, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Ache os vetores $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$ *e os escalares* $A_T(t)$ *e* $A_N(t)$.

1. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
2. $\mathbf{R}(t) = 2\,\text{sen}\,4t\mathbf{i} + 2\cos 4t\mathbf{j}$
3. $\mathbf{R}(t) = (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (\text{sen}\,t - t\cos t)\mathbf{j};\ t \geqslant 0$
4. $\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 5 a 8, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Ache $\mathbf{V}(t_1)$, $\mathbf{A}(t_1)$, $A_T(t_1)$ e $A_N(t_1)$ *para o valor dado de* t_1.

5. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j};\ t_1 = 0$
6. $\mathbf{R}(t) = \cos^2 t\mathbf{i} + \text{sen}^2\, t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{6}\pi$
7. $\mathbf{R}(t) = \text{sen}^3\, t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{4}\pi$
8. $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j};\ t_1 = \ln 2$

Nos Exercícios 9 e 10, ache os seguintes escalares: $\mathbf{V}(t)$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ e $K(t)$.

9. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j};\ t \geqslant 0$
10. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 11 a 16, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Em cada exercício, ache os vetores $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ *e* $\mathbf{N}(t)$, *e os seguintes escalares para um valor arbitrário de t:* $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ *e* $K(t)$. *Ache também os valores particulares quando* $t = t_1$. *Em* $t = t_1$ *faça um esboço de parte da curva e trace as representações dos vetores* $\mathbf{V}(t_1)$, $\mathbf{A}(t_1)$, $A_T(t_1)\mathbf{T}(t_1)$ *e* $A_N(t_1)\mathbf{N}(t_1)$.

11. $\mathbf{R}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j};\ t_1 = 2$
12. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t_1 = 1$
13. $\mathbf{R}(t) = 5\cos 3t\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,3t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{3}\pi$
14. $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j};\ t_1 = 1$
15. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j};\ t_1 = 0$
16. $\mathbf{R}(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \text{sen}\,t^2\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Nos Exercícios 17 e 18, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação cartesiana dada. No ponto dado ache (a) o vetor posição, (b) o vetor velocidade, (c) o vetor aceleração, (d) A_T *e (e)* A_N.

17. $y = 4x^2;\ (1, 4)$
18. $y^2 = x^3;\ (4, 8)$
19. Uma partícula está se movendo ao longo da parábola $y^2 = 8x$ e sua velocidade escalar é constante. Ache cada um dos seguintes, quando a partícula está em (2,4): o vetor posição, o vetor velocidade, o vetor aceleração, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário, A_T e A_N.
20. Uma partícula está se movendo ao longo do ramo superior da hipérbole $y^2 - x^2 = 9$, de forma que $\dfrac{dx}{dt}$ seja uma constante positiva. Quando a partícula estiver em (4,5) obtenha: o vetor posição, o vetor velocidade, o vetor aceleração, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário, A_T e A_N.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14

Nos Exercícios de 1 a 18, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{C} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

1. Ache $3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}$.
2. Ache $5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$.
3. Ache $\|3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}\|$.
4. Ache $\|5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}\|$.
5. Ache $\|3\mathbf{B}\| - \|7\mathbf{A}\|$.
6. Ache $\|5\mathbf{B}\| - \|3\mathbf{C}\|$.
7. Ache $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.
8. Ache $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$.
9. Ache um vetor unitário tendo a mesma direção que $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
10. Ache os vetores unitários que são ortogonais a $\mathbf{B}$.
11. Ache escalares h e k, tais que $\mathbf{A} = h\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.
12. Ache escalares h e k, tais que $h\mathbf{A} + k\mathbf{B} = -\mathbf{C}$.
13. Ache a projeção escalar de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{B}$.
14. Ache a projeção escalar de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{A}$.

15. Ache o vetor projeção de **A** em **B**.
16. Ache o vetor projeção de **C** em **A**.
17. Ache as componentes de **B** na direção de **A**.
18. Ache cos α se α for o ângulo entre **A** e **C**.
19. Duas forças com 50 N e 70 N de intensidade formam um ângulo de 60° entre si e são aplicadas a um objeto no mesmo ponto. Encontre (a) a intensidade da força resultante e (b) o ângulo formado com a força de 50 N.
20. Determine o ângulo entre duas forças de 112 N e 136 N aplicadas em um mesmo ponto de um objeto, se a força resultante tem intensidade igual a 168 N.
21. Uma força é representada por um vetor **F** tendo um módulo de 30 N e um ângulo de direção cuja medida em radianos é $\frac{3}{4}\pi$. Se a distância for medida em metros, ache o trabalho realizado pela força ao deslocar uma partícula ao longo de uma reta, entre os pontos (3, 6) e (−2, 7).
22. A bússola de um avião marca um rumo de 107° e sua velocidade escalar é 340 km/h. Se houver um vento soprando do oeste a 58 km/h, quais serão: (a) a velocidade escalar do avião no solo e (b) seu trajeto?

Nos Exercícios 23 e 24, para a função com valores vetoriais, ache (a) o domínio de **R**; *(b)* $\lim_{t \to 1} \mathbf{R}(t)$; *(c)* $D_t\mathbf{R}(t)$.

23. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}\mathbf{j}$

24. $\mathbf{R}(t) = |t-1|\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j}$

Nos Exercícios 25 e 26, ache $\dfrac{dy}{dx}$ *e* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, *sem eliminar o parâmetro.*

25. $x = 9t^2 - 1$, $y = 3t + 1$

26. $x = e^{2t}$, $y = e^{-3t}$

Nos Exercícios 27 e 28, ache equações das retas tangentes horizontal e vertical, e faça um esboço do gráfico descrito pelo par de equações paramétricas dadas.

27. $x = 12 - t^2$, $y = 12t - t^3$

28. $x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2at^2}{1+t^3}$, $a > 0$ (a cissóide de Diocles)

29. Se $\mathbf{R}(t) = \ln(t^2 - 1)\mathbf{i} - 2t^{-3}\mathbf{j}$, ache $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$.
30. Ache o comprimento de arco da curva tendo equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, de $t = 1$ a $t = 2$.
31. Ache o comprimento de arco da curva $\mathbf{R}(t) = (2 - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, de $t = 0$ a $t = 3$.
32. Ache o comprimento de arco da curva $r = 3 \sec \theta$, de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{4}\pi$.
33. (a) Mostre que a curva definida pelas equações paramétricas $x = a \operatorname{sen} t$ e $y = b \cos t$ é uma elipse. (b) Se s é a medida do comprimento de arco da elipse da parte (a), mostre que

$$s = 4\int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

onde $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Essa integral é chamada uma *integral elíptica* e não pode ser calculada em termos de funções elementares.

34. Faça um esboço do gráfico da equação vetorial $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$, e ache uma equação cartesiana do gráfico.
35. Mostre que a curvatura da curva $y = \ln x$ em qualquer ponto (x, y) é $x/(x^2 + 1)^{3/2}$. Mostre também que a curvatura máxima absoluta é $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, a qual ocorre no ponto $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.
36. Ache a curvatura em todos os pontos do ramo da hipérbole definida por $x = a \cosh t$, $y = b \operatorname{senh} t$. Mostre também que a curvatura tem um máximo absoluto no vértice.
37. Ache o raio de curvatura em todos os pontos da curva $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.
38. Ache a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura da curva $y = e^{-x}$ no ponto (0, 1).
39. Ache a curvatura e o raio de curvatura da curva $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ no ponto onde $t = 2$.
40. Se $\mathbf{R}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{i} + e^{-\lambda t}\mathbf{j}$, onde λ é uma constante, mostre que $\mathbf{R}(t)$ satisfaz a equação $\mathbf{R}''(t) - \lambda^2\mathbf{R}(t) = \mathbf{0}$.
41. Uma partícula está se movendo ao longo de uma curva tendo a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$. (a) Ache uma equação cartesiana da trajetória da partícula. (b) Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração. (c) Ache $\mathbf{V}(1)$ e $\mathbf{A}(1)$.
42. Siga as instruções do Exercício 41, se $\mathbf{R}(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j}$.
43. Para a hipociclóide de quatro vértices, $x = a \cos^3 t$ e $y = a \operatorname{sen}^3 t$, ache $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sem eliminar o parâmetro.
44. Se uma partícula está se movendo ao longo de uma curva, sob que condições terão o mesmo sentido ou sentidos opostos os vetores aceleração e tangente unitário?

Nos Exercícios 45 e 46, para a curva dada ache $\mathbf{T}(t)$ *e* $\mathbf{N}(t)$, *e em* $t = t_1$ *faça um esboço de parte da curva e trace as representações de* $\mathbf{T}(t_1)$ *e* $\mathbf{N}(t_1)$ *tendo como ponto inicial* $t = t_1$.

45. $\mathbf{R}(t) = (e^t + e^{-t})\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $t_1 = 2$

46. $\mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 3(\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}$, $t > 0$; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$

47. Dada a curva com equações paramétricas $x = 4t$, $y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}$, $t \geqslant 0$, ache as equações paramétricas tendo como parâmetro o comprimento do arco s, medido a partir do ponto onde $t = 0$. Teste seu resultado usando a expressão (7) da Secção 14.6.
48. Ache a medida em radianos do ângulo de elevação segundo o qual uma arma deveria ser disparada, a fim de obter o máximo alcance para uma dada velocidade na boca da arma.
49. Ache uma fórmula para obter a altura máxima atingida por um projétil disparado por uma arma, tendo uma velocidade na boca da arma de v_0 m/s e um ângulo de elevação de α rad.
50. Uma menina joga uma bola horizontalmente, do topo de um penhasco com 88,2 m de altura, a uma velocidade escalar inicial de 9,8 m/s. Ache (a) o tempo de vôo, e (b) a distância do penhasco ao ponto onde a bola atinge o chão.
51. Prove, usando a análise vetorial, que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.

52. Ache o vetor posição $\mathbf{R}(t)$, se o vetor aceleração $\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j}$ e $\mathbf{V}(1) = \mathbf{j}$, e $\mathbf{R}(1) = \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

53. Uma *epiciclóide* é a curva traçada por um ponto P sobre a circunferência de raio b que rola externamente sobre uma circunferência fixa de raio a. Dado que a origem está no centro da circunferência fixa, que $A(a, 0)$ é um dos pontos no qual o ponto P dado entra em contato com a circunferência fixa, B é o ponto móvel de tangência entre as duas circunferências e o parâmetro t é a medida em radianos do ângulo AOB, prove que as equações paramétricas da epiciclóide são

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a + b}{b}t$$

e

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a + b}{b}t$$

54. Dados o triângulo ABC, os pontos D, E e F sobre os lados AB, BC e AC, respectivamente, e

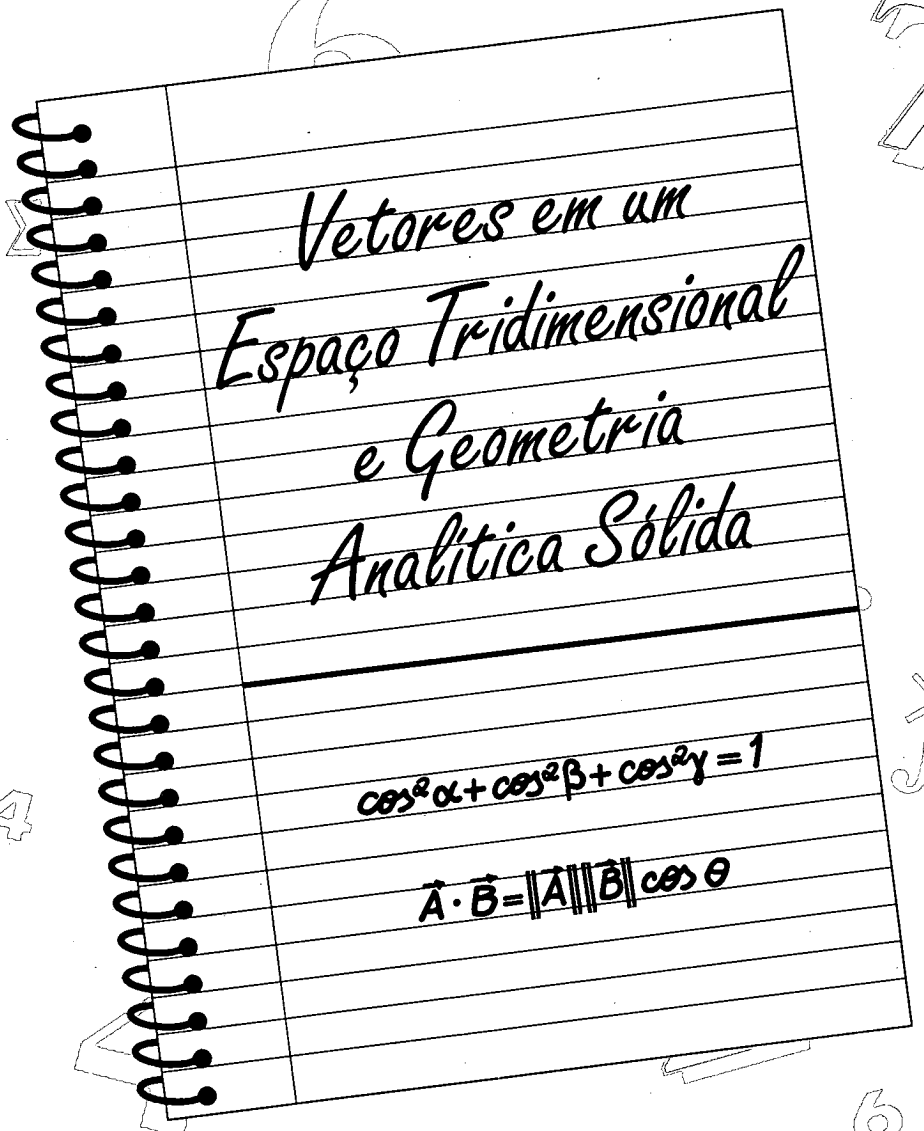
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AD}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB});\ \mathbf{V}(\overrightarrow{BE}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{BC});\ \mathbf{V}(\overrightarrow{CF}) = \tfrac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$$

Prove que $\mathbf{V}(\overrightarrow{AE}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BF}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \mathbf{0}$.

Os Exercícios de 55 a 58 referem-se à Secção Suplementar 14.9. Nos exercícios 55 e 56, ache (a) o vetor velocidade e o vetor aceleração, (b) a velocidade escalar e (c) as componentes normal e tangencial da aceleração.

55. $\mathbf{R}(t) = \cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}$
56. $\mathbf{R}(t) = (2\operatorname{tg}^{-1} t - t)\mathbf{i} + \ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
57. Ache as componentes normal e tangencial do vetor aceleração para a partícula do Exercício 41.
58. Ache as componentes normal e tangencial do vetor aceleração para a partícula do Exercício 42.

QUINZE



Neste capítulo tratamos de vetores no espaço tridimensional. A Geometria Sólida também é incluída, pois sua discussão é simplificada com o uso de vetores. Começamos na Secção 15.1, estabelecendo um sistema de coordenadas num espaço semelhante àquele no plano. Na Secção 15.2, aplicamos as definições e teoremas dados na Secção 14.1, para vetores no plano, a um espaço tridimensional. Os tópicos de Geometria Sólida aparecem nas Secções 15.3, 15.4, 15.6 e 15.7. Esses tópicos incluem *planos*, *retas*, *cilindros*, *superfícies de revolução* e *superfícies quádricas*. O *produto vetorial*, discutido na Secção 15.5, é uma operação vetorial para vetores tridimensionais, que nós não efetuamos para vetores no plano.

Funções com valores vetoriais no espaço tridimensional, juntamente com uma breve introdução à *Geometria Diferencial* de curvas e superfícies, são apresentadas na Secção 15.8. *Coordenadas cilíndricas e esféricas* são generalizações de coordenadas polares a espaços tridimensionais. Serão discutidas na Secção 15.9, para que possam ser utilizadas em aplicações na Engenharia, no Capítulo 18.

15.1 O ESPAÇO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL

Até aqui estivemos interessados com a reta numérica R (o espaço numérico unidimensional) e o plano numérico R^2 (o espaço numérico bidimensional). Identificamos os números reais em R com os pontos de um eixo horizontal e os pares numéricos reais em R^2 com os pontos de um plano geométrico. Da mesma forma, vamos introduzir agora o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais.

15.1.1 DEFINIÇÃO

O conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais é chamado de **espaço numérico tridimensional**, sendo denotado por R^3. Cada tripla ordenada (x, y, z) é chamada de um **ponto** no espaço numérico tridimensional.

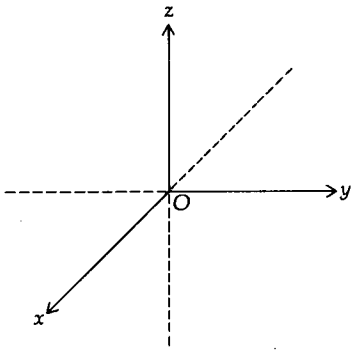


FIGURA 1

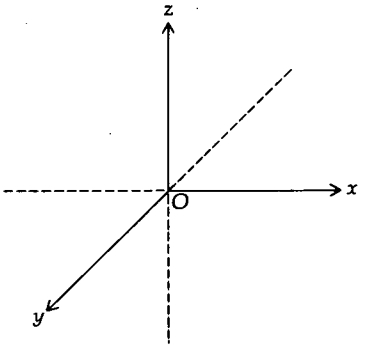


FIGURA 2

Para representar R^3 no espaço geométrico tridimensional, consideremos as distâncias orientadas de um ponto a três planos mutuamente perpendiculares. Os planos foram formados considerando primeiro três retas mutuamente perpendiculares que se interceptam em um ponto, o qual denominaremos **origem**, sendo denotado pela letra O. Essas retas, chamadas de eixos coordenados, são designadas como os eixos x, y e z. Usualmente, os eixos x e y são tomados no plano horizontal e o eixo z é vertical. Uma direção positiva é escolhida em cada eixo. Se as direções positivas forem escolhidas como na Figura 1, o sistema de coordenadas será chamado de **dextrogiro.*** Essa terminologia decorre do fato de que se a mão direita for colocada de tal forma que o polegar aponte na direção positiva do eixo x e o indicador aponte na direção positiva do eixo y, então o dedo médio estará apontando na direção positiva do eixo z. Se o dedo médio estiver apontando na direção negativa do eixo z, então o sistema de coordenadas será chamado de **sinistrogiro.**** Um sistema sinistrogiro está na Figura 2. Em geral usaremos o sistema dextrogiro. Os três eixos determinam três planos coordenados: o plano xy contendo os eixos x e y, o plano xz, contendo os eixos x e z e o plano yz, contendo os eixos y e z.

Uma tripla ordenada de números reais (x, y, z) está associada a cada ponto P do espaço geométrico tridimensional. A distância orientada de P até o plano yz é chamada de **coordenada** x, a distância orientada de P ao plano xz é chamada de **coordenada** y e a **coordenada** z é a distância orientada de P ao plano xy. Essas três coordenadas são chamadas de **coordenadas cartesianas retangulares** do ponto e há uma correspondência biunívoca (chamada de **sistema de coordenadas cartesianas retangulares**) entre todas as triplas ordenadas de números reais e os pontos no espaço tridimensional geométrico. Assim sendo, identificamos R^3 com o espaço tridimensional geométrico e a tripla ordenada (x, y, z) será um ponto. O ponto $(3, 2, 4)$ está mostrado na Figura 3 e o ponto $(4, -2, -5)$ está na Figura 4. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, denominadas **octantes**. O primeiro octante é aquele onde todas as três coordenadas são positivas.

N. do T.: * Também denominado *sistema direto* ou *positivo*.
** Também denominado *sistema retrógrado* ou *negativo*.

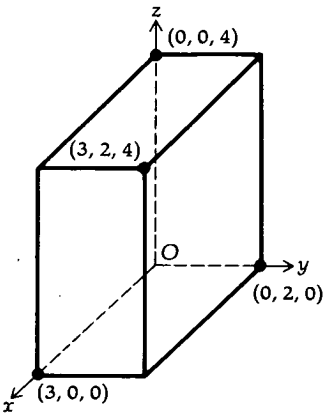


FIGURA 3

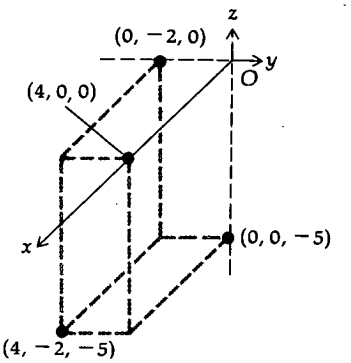


FIGURA 4

Uma reta é paralela a um plano se e somente se a distância de qualquer ponto da reta ao plano for a mesma.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma reta paralela ao plano yz, uma paralela ao plano xz e uma paralela ao plano xy estão nas Figuras 5, 6 e 7, respectivamente. ◀

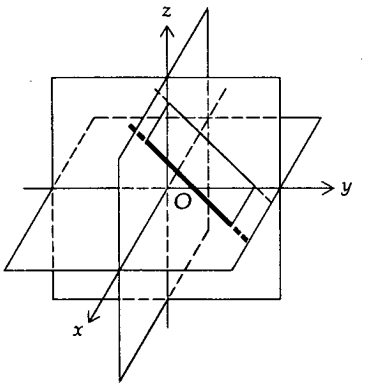


FIGURA 5

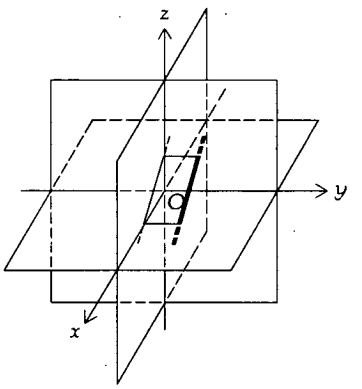


FIGURA 6

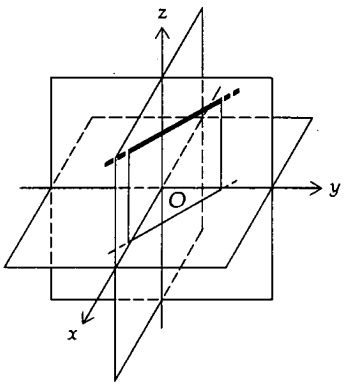


FIGURA 7

Consideraremos todas as retas contidas num dado plano como sendo paralelas a ele e, nesse caso, a distância de qualquer ponto da reta ao plano é zero. O seguinte teorema segue imediatamente.

15.1.2 TEOREMA

(i) Uma reta é paralela ao plano yz se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada x.
(ii) Uma reta é paralela ao plano xz se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada y.
(iii) Uma reta é paralela ao plano xy se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada z.

No espaço tridimensional, se uma reta for paralela a dois dos planos que se interceptam, ela será paralela à reta de intersecção dos dois planos. Também, se uma dada reta for paralela a uma segunda reta, então a reta dada será paralela a qualquer plano que contenha a segunda reta. O Teorema 15.1.3 segue desses fatos de Geometria Sólida e do Teorema 15.1.2.

15.1.3 TEOREMA

(i) Uma reta será paralela ao eixo x se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada y e uma mesma coordenada z.
(ii) Uma reta será paralela ao eixo y se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada x e uma mesma coordenada z.
(iii) Uma reta será paralela ao eixo z se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada x e uma mesma coordenada y.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Uma reta paralela ao eixo x, uma reta paralela ao eixo y e uma reta paralela ao eixo z estão nas Figuras 8, 9 e 10, respectivamente. ◀

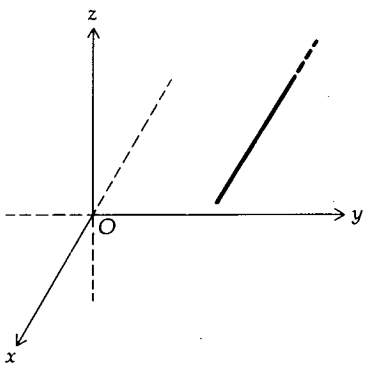


FIGURA 8

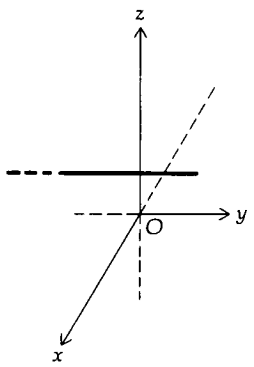


FIGURA 9

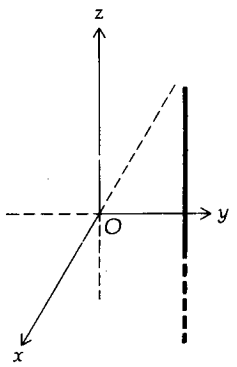


FIGURA 10

As fórmulas para encontrar a distância orientada de um ponto a outro sobre uma reta paralela ao eixo coordenado seguem da definição de distância orientada, dada na Secção 1.2, e estão enunciadas no teorema a seguir.

15.1.4 TEOREMA

(i) Se $A(x_1, y, z)$ e $B(x_2, y, z)$ forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo x, então a distância orientada de A a B, denotada por $\overline{AB}$, será dada por

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

(ii) Se $C(x, y_1, z)$ e $D(x, y_2, z)$ forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo y, então a distância orientada de C a D, denotada por $\overline{CD}$, será dada por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

(iii) Se $E(x, y, z_1)$ e $F(x, y, z_2)$ forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo z, então a distância orientada de E a F, denotada por $\overline{EF}$, será dada por

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A distância orientada $\overline{PQ}$ do ponto $P(2, -5, -4)$ ao ponto $Q(2, -3, -4)$ é dada pelo Teorema 15.1.4(ii).

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-3) - (-5)\\ &= 2\end{aligned}$$ ◀

O teorema a seguir dá uma fórmula para achar a distância não-orientada entre dois pontos no espaço tridimensional.

15.1.5 TEOREMA A distância não-orientada entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

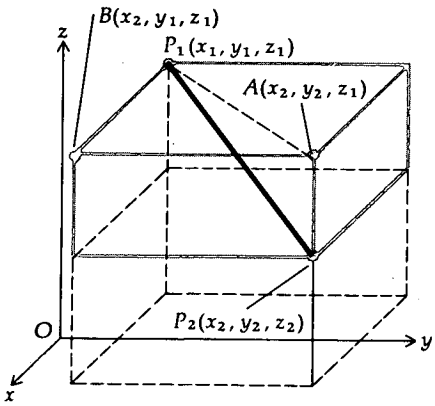


FIGURA 11

Prova Construa um paralelepípedo retangular tendo P_1 e P_2 como vértices opostos e faces paralelas aos planos coordenados (veja a Figura 11).

Pelo teorema de Pitágoras,

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \tag{1}$$

Como

$$|\overline{P_1A}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2$$

obtemos, substituindo na equação (1),

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2$$

Aplicando o Teorema 15.1.4(i), (ii) e (iii) ao segundo membro de (3), obtemos

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ ■

EXEMPLO 1 Ache a distância não-orientada entre os pontos $P(-3, 4, -1)$ e $Q(2, 5, -4)$.

Solução Do Teorema 15.1.5,

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2 + 3)^2 + (5 - 4)^2 + (-4 + 1)^2}$$
$$= \sqrt{35}$$

A fórmula para a distância entre dois pontos em R^3 é uma mera extensão da fórmula correspondente para a distância entre dois pontos em R^2. É importante notar que a distância não-orientada entre dois pontos x_2 e x_1 em R é dada por

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

As fórmulas para as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta são deduzidas formando-se triângulos semelhantes e procedendo de modo análogo ao caso bidimensional. As fórmulas são dadas no teorema a seguir e a prova será deixada como exercício (veja o Exercício 18).

15.1.6 TEOREMA As coordenadas do ponto médio do segmento de reta com extremos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ são dadas por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

15.1.7 DEFINIÇÃO O **gráfico de uma equação** em R^3 é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

O gráfico de uma equação em R^3 é chamado de **superfície**. Uma superfície particular é a *esfera*, que definiremos a seguir.

15.1.8 DEFINIÇÃO Uma **esfera** é o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional, eqüidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de **centro** da esfera e a medida da distância constante é chamada de **raio** da esfera.

15.1.9 TEOREMA Uma equação da esfera de raio r e centro em (h, k, l) é

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \tag{2}$$

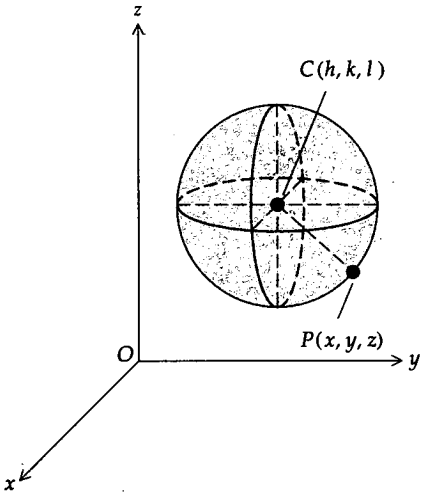


FIGURA 12

Prova Seja C o ponto (h, k, l) (veja a Figura 12). O ponto $P(x, y, z)$ é um ponto da esfera se e somente se

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação acima, obtemos o resultado desejado. ■

Se o centro da esfera estiver na origem, então $h = 0$, $k = 0$, $l = 0$, e, portanto, uma equação dessa esfera será

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Se expandirmos os termos de (2) e os reagruparmos, teremos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0$$

Essa equação é da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{3}$$

onde G, H, I e J são constantes. A equação (3) é chamada de **forma geral** da equação de uma esfera, enquanto que (2) é chamada de **forma centro-raio**. Como toda esfera tem um centro e um raio, sua equação pode ser posta na forma centro-raio e, portanto, na forma geral.

Pode ser mostrado que toda equação da forma (3) pode ser escrita na forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K \tag{4}$$

onde

$$h = -\tfrac{1}{2}G \qquad k = -\tfrac{1}{2}H \qquad l = -\tfrac{1}{2}I \qquad K = \tfrac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício (veja o Exercício 19).

Se $k > 0$, então (4) será da forma da equação (2); assim, o gráfico da equação será uma esfera, tendo seu centro em (h, k, l) e raio $\sqrt{K}$. Se $K = 0$, o gráfico da equação será o ponto (h, k, l). Se $K < 0$, o gráfico será o conjunto vazio, pois uma soma de quadrados de três números reais é não-negativa. Vamos apresentar esse resultado como um teorema.

15.1.10 TEOREMA O gráfico de toda equação do segundo grau em x, y e z, da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

é uma esfera, um ponto ou um conjunto vazio.

EXEMPLO 2 Faça um esboço do gráfico da equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 2$$

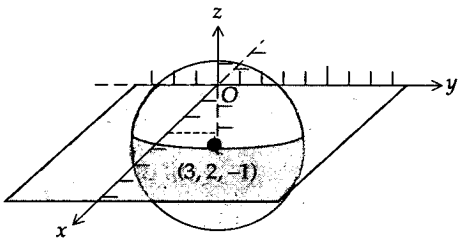


FIGURA 13

Solução Reagrupando os termos e completando os quadrados, temos

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 2 + 9 + 4 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

Assim, o gráfico é uma esfera, tendo o seu centro em (3, 2, −1) e raio 4. Um esboço do gráfico está na Figura 13.

EXEMPLO 3 Ache uma equação da esfera tendo os pontos $A(-5, 6, -2)$ e $B(9, -4, 0)$ como extremos de um diâmetro.

Solução O centro da esfera é o ponto médio do segmento de reta AB. Seja $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ esse ponto. Então, pelo Teorema 15.1.6, temos que

$$\bar{x} = \frac{9-5}{2} \qquad \bar{y} = \frac{-4+6}{2} \qquad \bar{z} = \frac{0-2}{2}$$

$$= 2 \qquad\qquad = 1 \qquad\qquad = -1$$

Assim, C é o ponto (2, 1, −1). O raio da esfera é $|\overline{CB}|$. Assim,

$$r = \sqrt{(9-2)^2 + (-4-1)^2 + (0+1)^2}$$
$$= \sqrt{75}$$

Logo, do Teorema 15.1.9, uma equação da esfera é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 75$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 69 = 0$$

EXERCÍCIOS 15.1

Nos Exercícios de 1 a 5, os pontos A e B dados são vértices opostos de um paralelepípedo retangular, tendo suas faces paralelas aos planos coordenados. Em cada exercício, (a) faça um esboço da figura, (b) ache as coordenadas dos seis outros vértices, (c) ache o comprimento da diagonal AB.

1. $A(0, 0, 0)$; $B(7, 2, 3)$
2. $A(1, 1, 1)$; $B(3, 4, 2)$
3. $A(-1, 1, 2)$; $B(2, 3, 5)$
4. $A(2, -1, -3)$; $B(4, 0, -1)$
5. $A(1, -1, 0)$; $B(3, 3, 5)$
6. O vértice oposto a um canto de um salão está 8 m a leste, 5 m ao sul e 3 m para cima do primeiro canto. (a) Faça um esboço da figura; (b) determine o comprimento da diagonal que liga dois vértices opostos; (c) ache as coordenadas dos oito vértices do salão.

Nos Exercícios de 7 a 11, ache (a) a distância não-orientada entre os pontos A e B e (b) o ponto médio do segmento de reta que une os pontos A e B.

7. $A(3, 4, 2)$; $B(1, 6, 3)$
8. $A(4, -3, 2)$; $B(-2, 3, -5)$
9. $A(2, -4, 1)$; $B(\frac{1}{2}, 2, 3)$
10. $A(-2, -\frac{1}{2}, 5)$; $B(5, 1, -4)$
11. $A(-5, 2, 1)$; $B(3, 7, -2)$
12. Mostre que os três pontos (1, −1, 3), (2, 1, 7), e (4, 2, 6) são os vértices de um triângulo retângulo e ache sua área.
13. Uma reta é traçada pelo ponto (6, 4, 2), perpendicular ao plano yz. Ache as coordenadas do ponto sobre a reta a uma distância de 10 unidades do ponto (0, 4, 0).
14. Resolva o Exercício 13 se a reta for perpendicular ao plano xy.
15. Prove que os três pontos (−3, 2, 4), (6, 1, 2) e (−12, 3, 6) são colineares, usando a fórmula da distância.
16. Ache os vértices do triângulo cujos lados têm os pontos médios em (3, 2, 3), (−1, 1, 5) e (0, 3, 4).
17. Para o triângulo com vértices em $A(2, -5, 3)$, $B(-1, 7, 0)$ e $C(-4, 9, 7)$, ache (a) o comprimento de cada lado e (b) o ponto médio de cada lado.
18. Prove o Teorema 15.1.6.
19. Mostre que toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

pode ser posta na forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K$$

Nos Exercícios de 20 a 25, determine o gráfico da equação dada.

20. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z - 25 = 0$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$
22. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$
24. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 4z + 13 = 0$
25. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0$

Nos Exercícios de 26 a 28, ache uma equação da esfera satisfazendo as condições dadas.

26. Um diâmetro é o segmento de reta tendo extremidades em $(6, 2, -5)$ e $(-4, 0, 7)$.

27. Ela é concêntrica com a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$ e tem raio 3.

28. Ela contém os pontos $(0, 0, 4)$, $(2, 1, 3)$ e $(0, 2, 6)$ e tem seu centro no plano yz.

29. Prove analiticamente que as quatro diagonais unindo vértices opostos de um paralelepípedo retangular se interceptam ao meio.

30. Se P, Q, R e S são quatro pontos no espaço tridimensional e A, B, C e D são os pontos médios de PQ, QR, RS e SP, respectivamente, prove analiticamente que $ABCD$ é um paralelogramo.

31. Prove analiticamente que as quatro diagonais de um cubo têm o mesmo comprimento.

15.2 VETORES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Definimos um vetor no plano como um par ordenado de números reais. Agora aplicaremos essa definição a um vetor no espaço tridimensional.

15.2.1 DEFINIÇÃO

Um **vetor no espaço tridimensional** é uma tripla ordenada de números reais $\langle x, y, z\rangle$. Os números x, y e z são chamados de **componentes** do vetor $\langle x, y, z\rangle$.

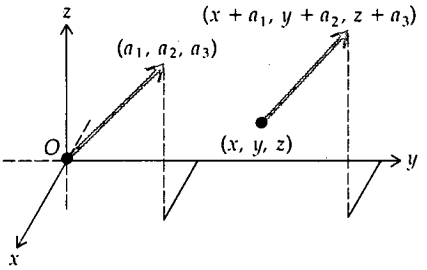


FIGURA 1

Seja V_3 o conjunto de triplas ordenadas $\langle x, y, z\rangle$ para as quais x, y e z são números reais. Nesse capítulo, um vetor estará sempre em V_3, a não ser que seja explicitamente dito de outra maneira.

Um vetor em V_3 pode ser representado, como fizemos para vetores em V_2, por um segmento de reta orientado. Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, então o segmento de reta orientado, tendo seu ponto inicial na origem e seu ponto final no ponto (a_1, a_2, a_3), será chamado de **representação posicional** de $\mathbf{A}$. Um segmento de reta orientado, tendo seu ponto inicial em (x, y, z) e seu ponto final em $(x + a_1, y + a^2, z + a_3)$ será também uma representação do vetor $\mathbf{A}$. Veja a Figura 1.

O **vetor zero** é o vetor $\langle 0, 0, 0\rangle$, sendo denotado por $\mathbf{0}$. Qualquer ponto é uma representação do vetor zero.

O **módulo*** de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações. Se o vetor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, o módulo de $\mathbf{A}$ será denotado por $\|\mathbf{A}\|$, e segue que

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

A **direção** e o **sentido** de um vetor não-nulo em V_3 são dados por três ângulos, chamados *ângulos de direção* do vetor.

15.2.2 DEFINIÇÃO

Os **ângulos de direção** de um vetor não-nulo são os três ângulos que têm a menor medida não-negativa em radianos α, β e γ medidos a partir dos eixos positivos x, y e z, respectivamente, até a representação posicional do vetor.

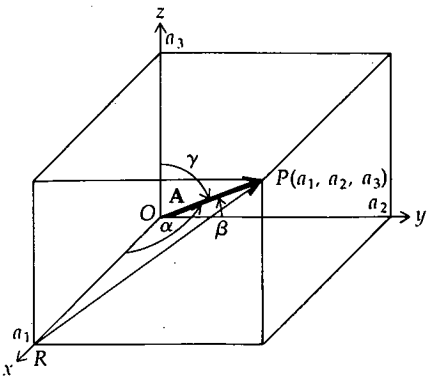


FIGURA 2

A medida em radianos de cada ângulo de direção de um vetor é maior ou igual a zero e menor ou igual a π. Os ângulos de direção com medidas α, β e γ em radianos do vetor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ estão na Figura 2. Nessa figura, as componentes de $\mathbf{A}$ são todas de números positivos e os ângulos de direção desse vetor têm todos medida positiva em radianos, menores do que $\frac{1}{2}\pi$. Na figura, vemos que o triângulo POR é retângulo e

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}$$

Pode ser provado que a mesma fórmula é válida se $\frac{1}{2}\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Fórmulas análogas podem ser encontradas para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$, e temos que

N. do T.: Também denominado *norma* em Matemática e, às vezes, *magnitude* ou *intensidade* do vetor em Física.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \quad \cos\gamma = \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}} \tag{1}$$

Os três números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são chamados de **co-senos diretores** do vetor **A**. O vetor nulo não tem ângulos de direção e, portanto, não possui co-senos diretores.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Encontraremos o módulo e os co-senos diretores do vetor $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6\rangle$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2}\\ &= 7\end{aligned}$$

Das fórmulas (1),

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{7} \qquad \cos\beta = \tfrac{2}{7} \qquad \cos\gamma = -\tfrac{6}{7}$$ ◀

Se o módulo de um vetor e seus co-senos diretores forem conhecidos, o vetor por (1) ficará univocamente determinado e segue que

$$a_1 = \|\mathbf{A}\|\cos\alpha \qquad a_2 = \|\mathbf{A}\|\cos\beta \qquad a_3 = \|\mathbf{A}\|\cos\gamma \tag{2}$$

Os três co-senos diretores de um vetor não são independentes uns dos outros, como veremos no teorema a seguir.

15.2.3 TEOREMA Se $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ forem os co-senos diretores de um vetor, então

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Prova Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, então os co-senos diretores de **A** serão dados por (1) e

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \frac{a_1{}^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_2{}^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_3{}^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= \frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= \frac{\|\mathbf{A}\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}\\ &= 1\end{aligned}$$ ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Verificaremos o Teorema 15.2.3 para o vetor da Ilustração 1.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= (\tfrac{3}{7})^2 + (\tfrac{2}{7})^2 + (-\tfrac{6}{7})^2\\ &= \tfrac{9}{49} + \tfrac{4}{49} + \tfrac{36}{49}\\ &= \tfrac{49}{49}\\ &= 1\end{aligned}$$ ◀

O vetor $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ é um vetor unitário se $\|\mathbf{A}\| = 1$, e das fórmulas (1) as componentes de um vetor unitário são seus co-senos diretores.

As operações de adição, subtração e multiplicação escalar de vetores em V_3 recebem definições análogas às correspondentes definições para vetores em V_2.

15.2.4 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, então a **soma** desses vetores será dada por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$$

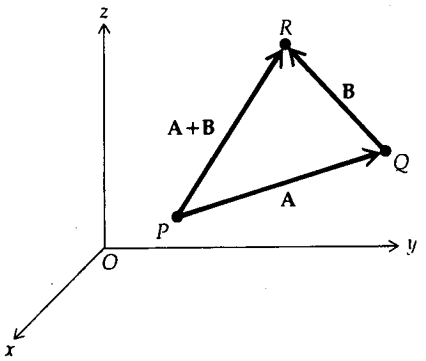


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Dados $\mathbf{A} = \langle 5, -2, 6\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle 8, -5, -4\rangle$, ache $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Solução

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 5 + 8, (-2) + (-5), 6 + (-4)\rangle \\ &= \langle 13, -7, 2\rangle\end{aligned}$$

A interpretação geométrica da soma de dois vetores em V_3 é análoga àquela que foi dada para vetores em V_2. Veja a Figura 3. Se P for o ponto (x, y, z) e $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, e $\overrightarrow{PQ}$ for uma representação de $\mathbf{A}$, então Q será o ponto $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$. Seja $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ e seja $\overrightarrow{QR}$ uma representação de $\mathbf{B}$. Então, $\mathbf{R}$ é o ponto $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2), z + (a_3 + b_3))$. Logo, $\overrightarrow{PR}$ é a representação do vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e a lei do paralelogramo é válida.

15.2.5 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, então o vetor $\langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle$ é definido como o **oposto** de $\mathbf{A}$, denotado por $-\mathbf{A}$.

15.2.6 DEFINIÇÃO A **diferença** de dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é definida como sendo

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Das Definições 15.2.5 e 15.2.6, segue que se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, então $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2, -b_3\rangle$ e

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$$

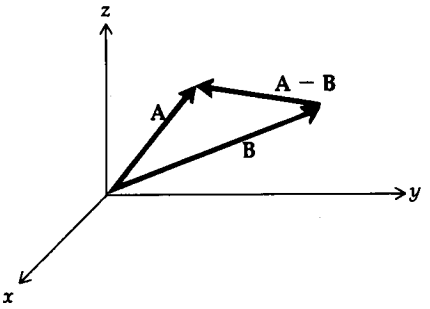


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Para os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do Exemplo 1, ache $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Solução

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 5, -2, 6\rangle - \langle 8, -5, -4\rangle \\ &= \langle 5, -2, 6\rangle + \langle -8, 5, 4\rangle \\ &= \langle -3, 3, 10\rangle\end{aligned}$$

A diferença entre dois vetores em V_3 também é interpretada geometricamente como em V_2. Veja a Figura 4. Uma representação do vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é obtida se escolhermos representações de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$ com o mesmo ponto inicial. Então, uma representação do vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é o segmento orientado do ponto final da representação de $\mathbf{B}$ ao ponto final da representação de $\mathbf{A}$.

A Figura 5 mostra os pontos $P(a_1, a_2, a_3)$ e $Q(b_1, b_2, b_3)$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$. Observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \\ &= \langle b_1, b_2, b_3\rangle - \langle a_1, a_2, a_3\rangle\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\rangle$$

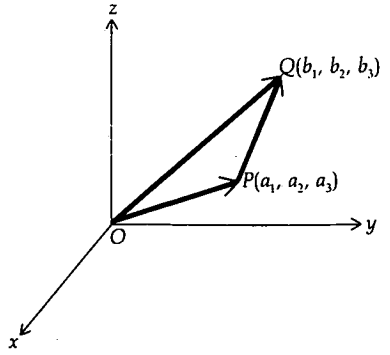


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 6 mostra o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$, onde P é o ponto (1, 3, 5) e Q é o ponto (2, −1, 4).

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2-1, -1-3, 4-5\rangle$$
$$= \langle 1, -4, -1\rangle$$ ◀

15.2.7 DEFINIÇÃO Se c for um escalar e $\mathbf{A}$ um vetor $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, então o produto de c e $\mathbf{A}$, denotado por $c\mathbf{A}$, será um vetor, dado por

$$c\mathbf{A} = c\langle a_1, a_2, a_3\rangle$$
$$= \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$$

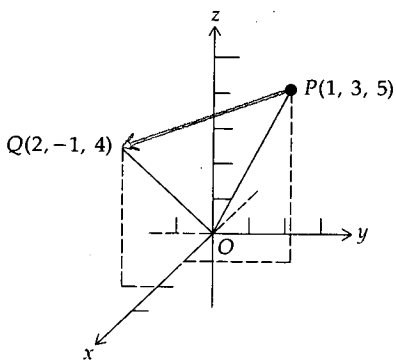


FIGURA 6

EXEMPLO 3 Dado $\mathbf{A} = \langle -4, 7, -2\rangle$, ache $3\mathbf{A}$ e $-5\mathbf{A}$.

Solução

$$3\mathbf{A} = 3\langle -4, 7, -2\rangle \qquad -5\mathbf{A} = (-5)\langle -4, 7, -2\rangle$$
$$= \langle -12, 21, -6\rangle \qquad = \langle 20, -35, 10\rangle$$

Suponha que $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ seja um vetor não-nulo, tendo por co-senos diretores cos α, cos β e cos γ, e seja c qualquer escalar não-nulo. Então $c\mathbf{A} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$; e se cos α_1, cos β_1 e cos γ_1 forem os co-senos diretores de $c\mathbf{A}$, teremos nas expressões (1),

$$\cos\alpha_1 = \frac{ca_1}{\|c\mathbf{A}\|} \qquad \cos\beta_1 = \frac{ca_2}{\|c\mathbf{A}\|} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{ca_3}{\|c\mathbf{A}\|}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos\beta_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{c}{|c|}\frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{c}{|c|}\cos\alpha \qquad \cos\beta_1 = \frac{c}{|c|}\cos\beta \qquad \cos\gamma_1 = \frac{c}{|c|}\cos\gamma \tag{3}$$

Assim, se $c > 0$, segue das expressões (3) que os co-senos diretores do vetor $c\mathbf{A}$ serão os mesmos que os co-senos diretores de $\mathbf{A}$. E se $c < 0$, os co-senos diretores de $c\mathbf{A}$ serão os opostos dos co-senos diretores de $\mathbf{A}$. Logo, se c for um escalar não-nulo, então o vetor $c\mathbf{A}$ terá o seu módulo igual a $|c|$ vezes o módulo de $\mathbf{A}$. Se $c > 0$, $c\mathbf{A}$ terá a mesma direção e sentido que $\mathbf{A}$, enquanto que se $c < 0$, $c\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$ terão direção e sentido opostos.

As operações de adição de vetores, bem como a multiplicação por escalar de vetores em V_3, satisfazem propriedades idênticas àquelas dadas no Teorema 14.1.8. Elas serão dadas no teorema a seguir, cuja prova será deixada como um exercício (veja os Exercícios 19 e 20). Desse fato e da Definição 14.1.9, segue que V_3 é um espaço vetorial real. Os três vetores unitários

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

formam uma base para o espaço vetorial V_3, pois todo vetor $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ pode ser escrito em termos deles, da seguinte forma:

$$\langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle$$

Logo, se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, também podemos escrever

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \tag{4}$$

Como em uma base de V_3 temos três elementos, V_3 é um espaço tridimensional.

Substituindo (2) em (4), temos que

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos \alpha \mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \cos \beta \mathbf{j} + \|\mathbf{A}\| \cos \gamma \mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|(\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})} \tag{5}$$

A expressão (5) possibilita-nos expressar qualquer vetor não-nulo em termos de seu módulo e co-senos diretores.

EXEMPLO 4 Expresse o vetor da Ilustração 1 em termos do seu módulo e co-senos diretores.

Solução Na Ilustração 1, temos que $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6\rangle$, $\|\mathbf{A}\| = 7$, $\cos \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \beta = \frac{2}{7}$ e $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$. Logo, de (5),

$$\mathbf{A} = 7(\tfrac{3}{7}\mathbf{i} + \tfrac{2}{7}\mathbf{j} - \tfrac{6}{7}\mathbf{k})$$

15.2.8 TEOREMA Se $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{k}$ for um vetor não-nulo, então o vetor unitário $\mathbf{U}$, tendo a mesma direção e sentido que $\mathbf{A}$, será dado por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{k}$$

A demonstração do Teorema 15.2.8 é análoga à que foi dada no Teorema 14.1.10 para um vetor em V_2 e será deixada como exercício (veja o Exercício 46).

EXEMPLO 5 Dados os pontos $R(2, -1, 3)$ e $S(3, 4, 6)$, ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$.

Solução

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 3, 4, 6\rangle - \langle 2, -1, 3\rangle = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \|\mathbf{V}(\overrightarrow{RS})\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

Logo, pelo Teorema 15.2.9, o vetor unitário pedido é

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\mathbf{k}$$

A definição de produto escalar de dois vetores em V_3 é uma extensão da definição dada para vetores em V_2.

15.2.9 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, então o **produto escalar** de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, será dado por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se $\mathbf{A} = \langle 4, 2, -6\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle -5, 3, -2\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 4, 2, -6\rangle \cdot \langle -5, 3, -2\rangle \\ &= 4(-5) + 2(3) + (-6)(-2) \\ &= -20 + 6 + 12 \\ &= -2\end{aligned}$$

◀

Para os vetores unitários **i**, **j** e **k**,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0 \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$

As leis para o produto escalar são as mesmas que aquelas dos Teoremas 14.2.2 e 14.2.3 para vetores em V_2. As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 27 e 28).

Vamos definir agora o ângulo entre dois vetores e então expressar o produto escalar em termos do co-seno da medida em radianos desse ângulo.

15.2.10 DEFINIÇÃO Sejam **A** e **B** dois vetores não-nulos em V_3, tais que **A** não seja um múltiplo escalar de **B**. Se $\overrightarrow{OP}$ for a representação posicional de **A** e $\overrightarrow{OQ}$ a representação posicional de **B**, então o **ângulo entre os vetores A e B** será definido como o ângulo de medida positiva entre $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, interno ao triângulo POQ. Se $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, onde c é um escalar, então se $c > 0$, o ângulo entre os vetores terá medida de 0 rad e se $c < 0$, o ângulo entre os vetores será π rad.

A Figura 7 mostra o ângulo θ entre os dois vetores, quando **A** não for um múltiplo escalar de **B**.

15.2.11 TEOREMA Se θ for o ângulo entre os vetores não-nulos **A** e **B** em V_3, então

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\cos\theta$$

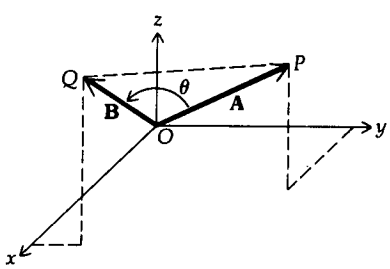


FIGURA 7

A demonstração do Teorema 15.2.11 é semelhante à do Teorema 14.2.5 para vetores em V_2 e será deixada como exercício (veja o Exercício 47).

A definição de vetores *paralelos* em V_3 é análoga à Definição 14.2.6 para vetores em V_2; isto é, dois vetores em V_3 são **paralelos** se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro. Da mesma forma que vetores em V_2, podemos provar dessa definição e do Teorema 15.2.11 que dois vetores não-nulos em V_3 serão paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou π.

A definição de vetores *ortogonais* em V_3 corresponde à Definição 14.2.7 para vetores em V_2; isto é, se **A** e **B** forem dois vetores em V_3, dizemos que **A** e **B** são **ortogonais** se e somente se $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

EXEMPLO 6 Prove, usando vetores, que os pontos $A(4, 9, 1)$, $B(-2, 6, 3)$ e $C(6, 3, -2)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

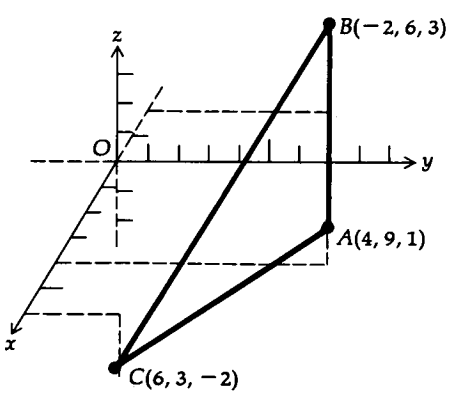


FIGURA 8

Solução O triângulo CAB aparece na Figura 8. Da figura, parece que o ângulo reto está em A. Vamos encontrar $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ e se o produto escalar desses vetores for zero, então o ângulo entre eles será reto.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle -2-4, 6-9, 3-1\rangle = \langle -6, -3, 2\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = \langle 6-4, 3-9, -2-1\rangle = \langle 2, -6, -3\rangle$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) &= \langle -6, -3, 2\rangle\cdot\langle 2, -6, -3\rangle\\ &= -12+18-6\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ são ortogonais; assim, o ângulo em A do triângulo CAB é um ângulo reto e, portanto, CAB é um triângulo retângulo.

Se **U** for um vetor unitário na direção e sentido de **A** e θ for o ângulo entre **A** (ou **U**) e um vetor **B**, então, do Teorema 15.2.11,

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\cdot\mathbf{B} &= \|\mathbf{U}\|\,\|\mathbf{B}\|\cos\theta\\ &= \|\mathbf{B}\|\cos\theta\end{aligned}$$

Como ocorre com os vetores em V_2, $\|\mathbf{B}\|\cos\theta$ é a **projeção escalar** de **B** sobre **A** e a **componente** de **B** na direção de **A**.

A fórmula do Teorema 14.2.9 dando a projeção escalar de **B** sobre **A** é válida para vetores em V_3 e a demonstração é idêntica àquela para vetores em V_2. Assim, a projeção escalar de **B** sobre **A** é

$$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} \tag{6}$$

O Teorema 14.2.10, para vetores em V_2, dá uma fórmula para calcular o **vetor projeção** do vetor **B** sobre o vetor **A**. Esse teorema e sua prova são idênticos para vetores em V_3, sendo o vetor

$$\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A} \tag{7}$$

EXEMPLO 7 Dados os vetores

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Ache: (a) $\cos\theta$, se θ for o ângulo entre **A** e **B**; (b) a componente de **B** na direção de **A**; (c) o vetor projeção de **B** sobre **A**.

Solução Primeiro vamos calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\|\mathbf{A}\|$ e $\|\mathbf{B}\|$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \langle 6, -3, 2\rangle\cdot\langle 2, 1, -3\rangle\\ &= 12 - 3 - 6\\ &= 3\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{36+9+4}\\ &= \sqrt{49}\\ &= 7\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\|\mathbf{B}\| &= \sqrt{4+1+9}\\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

(a) Do Teorema 15.2.11,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|}\\ &= \frac{3}{7\sqrt{14}}\end{aligned}$$

(b) A componente de **B** na direção de **A** é a projeção escalar de **B** sobre **A**, que é

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}\|\cos\theta &= \sqrt{14}\left(\frac{3}{7\sqrt{14}}\right)\\ &= \tfrac{3}{7}\end{aligned}$$

(c) De (7), o vetor projeção de **B** sobre **A** é

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A} &= \tfrac{3}{49}(6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\\ &= \tfrac{18}{49}\mathbf{i} - \tfrac{9}{49}\mathbf{j} + \tfrac{6}{49}\mathbf{k}\end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Ache a distância do ponto $P(4, 1, 6)$ à reta que passa pelos pontos $A(8, 3, 2)$ e $B(2, -3, 5)$.

Solução A Figura 9 mostra o ponto P e um esboço da reta que passa por A e B. O ponto M é o pé da perpendicular de P à reta pelos pontos A e B. Sejam d unidades a distância $|\overline{PM}|$. Assim, do teorema de Pitágoras,

$$d = \sqrt{|\overline{AP}|^2 - |\overline{AM}|^2} \tag{8}$$

Para aplicar (8), precisamos calcular $|\overline{AP}|$, que é o módulo de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$, e $|\overline{AM}|$, que é a projeção escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ sobre $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$. Vamos achar primeiro $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = \langle 4-8, 1-3, 6-2\rangle = \langle -4, -2, 4\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle 2-8, -3-3, 5-2\rangle = \langle -6, -6, 3\rangle$$

Calculamos $|\overline{AP}|$ encontrando $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\|$ e calculamos $|\overline{AM}|$ usando (6) com $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$.

$$\begin{aligned}|\overline{AP}| &= \|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\| \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6\end{aligned} \qquad \begin{aligned}|\overline{AM}| &= \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AP})}{\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\|} \\ &= \frac{\langle -6, -6, 3\rangle \cdot \langle -4, -2, 4\rangle}{\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{24 + 12 + 12}{\sqrt{81}} \\ &= \tfrac{48}{9}\end{aligned}$$

Substituindo esses valores de $|\overline{AP}|$ e $|\overline{AM}|$ em (8), obtemos

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{6^2 - (\tfrac{48}{9})^2} \\ &= 6\sqrt{1 - \tfrac{64}{81}} \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{17}\end{aligned}$$

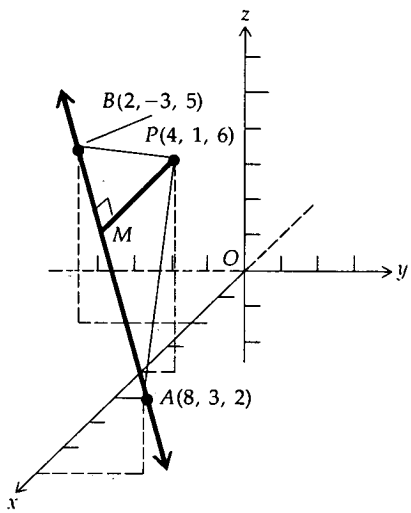


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 15.2

Nos Exercícios de 1 a 6, $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$ e $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$.

1. Ache: (a) $\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$; (b) $7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}$; (c) $\|7\mathbf{C}\| - \|5\mathbf{D}\|$; (d) $\|7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}\|$.
2. Ache: (a) $2\mathbf{A} - \mathbf{C}$; (b) $\|2\mathbf{A}\| - \|\mathbf{C}\|$; (c) $4\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$; (d) $\|4\mathbf{B}\| + \|6\mathbf{C}\| - \|2\mathbf{D}\|$.
3. Ache: (a) $\mathbf{C} + 3\mathbf{D} - 8\mathbf{A}$; (b) $\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|(\mathbf{C} - \mathbf{D})$.
4. Ache: (a) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C} - 12\mathbf{D}$; (b) $\|\mathbf{A}\|\mathbf{C} - \|\mathbf{B}\|\mathbf{D}$.
5. Ache os escalares a e b, tais que $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + b(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$.
6. Ache os escalares a, b e c, tais que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

Nos Exercícios de 7 a 10, ache os co-senos diretores do vetor $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$ *e teste as respostas, verificando que a soma dos seus quadrados é 1.*

7. $P_1(3, -1, -4)$; $P_2(7, 2, 4)$
8. $P_1(-2, 6, 5)$; $P_2(2, 4, 1)$
9. $P_1(4, -3, -1)$; $P_2(-2, -4, -8)$
10. $P_1(1, 3, 5)$; $P_2(2, -1, 4)$
11. Use os pontos P_1 e P_2 do Exercício 7 e ache o ponto Q, tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = 3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1Q})$.
12. Use os pontos P_1 e P_2 do Exercício 10 e ache o ponto R, tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1R}) = -2\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2R})$.
13. Dados $P_1(3, 2, -4)$ e $P_2(-5, 4, 2)$, ache o ponto P_3, tal que $4\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = -3\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.
14. Dados $P_1(7, 0, -2)$ e $P_2(2, -3, 5)$, ache o ponto P_3, tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_3}) = 5\mathbf{V}(\overrightarrow{P_2P_3})$.

Nos Exercícios 15 e 16, expresse o vetor dado em termos de seu módulo e co-senos diretores.

15. (a) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; (b) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. (a) $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; (b) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

Nos Exercícios 17 e 18, ache os vetores unitários tendo a mesma direção e sentido que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$.

17. (a) $P_1(4, -1, -6)$ e $P_2(5, 7, -2)$; (b) $P_1(-2, 5, 3)$ e $P_2(-4, 7, 5)$

18. (a) $P_1(3, 0, -1)$ e $P_2(-3, 8, -1)$;
(b) $P_1(-8, -5, 2)$ e $P_2(-3, -9, 4)$

Nos Exercícios 19 e 20, prove a propriedade se **A**, **B** *e* **C** *forem quaisquer vetores em* V_3 *e* c *e* d *forem quaisquer escalares.*

19. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (lei comutativa)
(b) Há um vetor $\mathbf{0}$ em V_3 para o qual $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (existência de identidade aditiva)
(c) Há um vetor $-\mathbf{A}$ em V_3 tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (existência do oposto)
(d) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (lei distributiva)

20. (a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (lei associativa)
(b) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ (lei associativa)
(c) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (lei distributiva)

Nos Exercícios de 21 a 26, $\mathbf{A} = \langle -4, -2, 4\rangle$; $\mathbf{B} = \langle 2, 7, -1\rangle$; $\mathbf{C} = \langle 6, -3, 0\rangle$ e $\mathbf{D} = \langle 5, 4, -3\rangle$.

21. Ache: (a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$; (b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$; (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$; (d) $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$.

22. Ache: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$; (b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$; (c) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$; (d) $(2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}) \cdot (4\mathbf{C} - \mathbf{D})$.

23. Ache: (a) $\cos\theta$, se θ for o ângulo entre **A** e **C**; (b) a componente de **C** na direção de **A**; (c) o vetor projeção de **C** sobre **A**.

24. Ache: (a) $\cos\theta$, se θ for o ângulo entre **B** e **D**; (b) a componente de **B** na direção de **D**; (c) o vetor projeção de **B** em **D**.

25. Ache: (a) a projeção escalar de **A** sobre **B**; (b) o vetor projeção de **A** sobre **B**.

26. Ache: (a) a projeção escalar de **D** sobre **C**; (b) o vetor projeção de **D** sobre **C**.

Nos Exercícios 27 e 28, prove a lei da multiplicação por escalar se **A**, **B** *e* **C** *forem quaisquer vetores em* V_3 *e* c *for um escalar.*

27. (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (lei comutativa)
(b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (lei distributiva)

28. (a) $c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$; (b) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$; (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2$

29. Ache a distância do ponto $(2, -1, -4)$ à reta que passa pelos pontos $(3, -2, 2)$ e $(-9, -6, 6)$.

30. Ache a distância do ponto $(3, 2, 1)$ à reta que passa pelos pontos $(1, 2, 9)$ e $(-3, -6, -3)$.

31. Prove, usando vetores, que os pontos $(2, 2, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(4, 1, -1)$ e $(4, 3, 0)$ são os vértices de um retângulo.

32. Prove, usando vetores, que os pontos $(2, 2, 2)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 3, 3)$ e $(3, 0, 1)$ são os vértices de um paralelogramo.

33. Ache a área do triângulo com vértices em $(-2, 3, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(3, -1, 2)$.

34. Prove, usando vetores, que os pontos $(-2, 1, 6)$, $(2, 4, 5)$ e $(-1, -2, 1)$ são os vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.

35. Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, ache a componente de **B** na direção de $\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$.

36. Ache os co-senos dos ângulos do triângulo com vértices em $A(0, 0, 0)$, $B(4, -1, 3)$ e $C(1, 2, 3)$.

37. Se uma força tiver a representação vetorial $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ache o trabalho realizado pela força ao deslocar um objeto do ponto $P_1(-2, 4, 3)$ até o ponto $P_2(1, -3, 5)$, ao longo de uma linha reta. A intensidade da força é medida em newtons (N) e a distância em metros. (*Sugestão*: releia a Secção 14.2.)

38. Se uma força tiver a representação vetorial $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$, ache o trabalho realizado por uma força ao deslocar um objeto de um ponto $P_1(4, 1, 3)$ até o ponto $P_2(-5, 6, 2)$, ao longo de uma linha reta. A intensidade da força é medida em newtons (N) e a distância em metros. (Veja a sugestão do Exercício 37.)

39. Uma força, representada pelo vetor **F**, tem uma magnitude de 10 N e como co-senos diretores $\cos\alpha = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ e $\cos\beta = \frac{1}{6}\sqrt{6}$. Se a força desloca um objeto da origem até o ponto $(7, -4, 2)$, ao longo de uma linha reta, ache o trabalho realizado. A distância é medida em metros. (Veja a sugestão do Exercício 37.)

40. Se **A** e **B** forem vetores não-nulos, prove que o vetor $\mathbf{A} - c\mathbf{B}$ é ortogonal a **B**, se $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/\|\mathbf{B}\|^2$.

41. Se $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, use o resultado do Exercício 40 para encontrar o valor do escalar c, tal que $\mathbf{B} - c\mathbf{A}$ seja ortogonal a **A**.

42. Para os vetores do Exercício 41, use o resultado do Exercício 40 de modo a encontrar o valor do escalar d, tal que o vetor $\mathbf{A} - d\mathbf{B}$ seja ortogonal a **B**.

43. Prove que se **A** e **B** forem vetores, então os vetores $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$ e $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} - \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$ serão ortogonais.

44. Prove que se **A** e **B** forem vetores não-nulos e $\mathbf{C} = \|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$, então o ângulo entre **A** e **C** terá a mesma medida que o ângulo entre **B** e **C**.

45. Se as medidas em radianos dos ângulos de direção de um vetor são iguais, qual será o valor comum? Prove sua resposta.

46. Prove o Teorema 15.2.8.

47. Prove o Teorema 15.2.11.

48. Dizemos que três vetores em V_3 são *independentes* se e somente se sua representação posicional não estiver num plano e dizemos que três vetores $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{E}_3$ formam uma base para o espaço vetorial V_3 se e somente se qualquer vetor em V_3 puder ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{E}_3$. Um teorema pode ser provado, estabelecendo que três vetores do espaço vetorial V_3 formam uma base se e somente se eles forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os vetores $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 1, 1, 0\rangle$ e $\langle 1, 1, 1\rangle$, fazendo o seguinte: (a) verifique se os vetores são independentes, pois suas representações posicionais não são coplanares; (b) comprove que os vetores formam uma base, mostrando que qualquer vetor **A** de V_3 pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = r\langle 1, 0, 0\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, 1, 1\rangle \tag{9}$$

onde r, s e t são escalares. (c) Se $\mathbf{A} = \langle 6, -2, 5\rangle$, ache os valores de r, s e t para os quais (9) é válido.

49. Veja o Exercício 48. (a) Prove que os vetores $\langle 2, 0, 1\rangle$, $\langle 0, -1, 0\rangle$ e $\langle 1, -1, 0\rangle$ formam uma base para V_3, mostrando que todo vetor **A** pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = r\langle 2, 0, 1\rangle + s\langle 0, -1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle \tag{10}$$

onde r, s e t são escalares. (b) Se $\mathbf{A} = \langle -2, 3, 5\rangle$, ache os valores de r, s e t para os quais (10) é válido.

50. Releia a primeira sentença do Exercício 48. Um teorema pode ser provado, estabelecendo que três vetores formam uma base do espaço vetorial V_3 se e somente se eles forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os três vetores $\mathbf{F}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 1, 1, 1\rangle$ e $\mathbf{F}_3 = \langle 2, 1, 2\rangle$, fazendo o seguinte: (a) comprove que os vetores $\mathbf{F}_1$, F_2 e $\mathbf{F}_3$ não são independentes, pois suas representações posicionais são coplanares; (b) comprove que os vetores não formam uma base, uma vez que todo vetor em V_3 não pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$.

15.3 PLANOS

O gráfico de uma equação em duas variáveis, x e y, é uma curva no plano xy. O tipo mais simples de curva no espaço bidimensional é uma linha reta, sendo a forma da equação geral de uma linha reta $Ax + By + C = 0$, que é uma equação do primeiro grau. No espaço tridimensional, o gráfico de uma equação em três variáveis, x, y e z é uma superfície. O tipo mais simples de superfície é um *plano*, e veremos que uma equação de um plano é uma equação do primeiro grau em três variáveis.

15.3.1 DEFINIÇÃO Se $\mathbf{N}$ for um vetor não-nulo e se P_0 for um ponto dado, então o conjunto de todos os pontos P para os quais $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ e $\mathbf{N}$ são ortogonais, será definido como um **plano** que passa por P_0, tendo $\mathbf{N}$ como um **vetor normal**.

A Figura 1 mostra parte de um plano que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e a representação do vetor normal $\mathbf{N}$, tendo seu ponto inicial em P_0.

Em Geometria Analítica Plana, podemos obter uma equação de uma reta se forem dados um ponto da reta e sua direção (inclinação). De forma análoga, em Geometria Analítica Sólida, uma equação de um plano pode ser determinada se conhecermos um ponto do plano e a direção de um vetor normal.

15.3.2 TEOREMA Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ for um ponto de um plano e $\langle a, b, c\rangle$ for o vetor normal ao plano, então uma equação do plano será

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

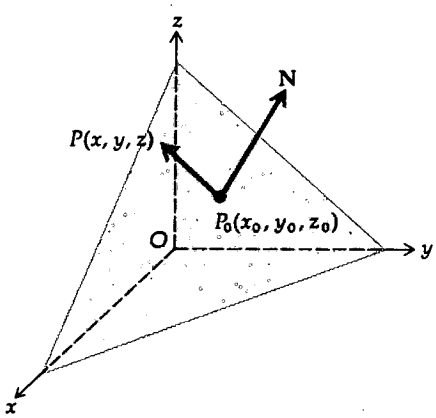


FIGURA 1

Prova Consulte a Figura 1, onde $\mathbf{N} = \langle a, b, c\rangle$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano. $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ é o vetor tendo $\overrightarrow{P_0P}$ como sua representação; assim,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle \tag{1}$$

Da Definição 15.3.1 e do fato que o produto escalar de dois vetores ortogonais é zero, temos

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) \cdot \langle a, b, c\rangle = 0$$

De (1) e da igualdade acima,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é a equação pedida. ■

EXEMPLO 1 Ache uma equação do plano que contenha o ponto (2, 1, 3) e que tenha $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ como um vetor normal.

Solução Usando o Teorema 15.3.2 onde o ponto (x_0, y_0, z_0) é (2, 1, 3) e o vetor $\langle a, b, c\rangle$ é $\langle 3, -4, 1\rangle$, temos que a equação pedida é

$$3(x - 2) - 4(y - 1) + (z - 3) = 0$$
$$3x - 4y + z - 5 = 0$$

15.3.3 TEOREMA Se a, b e c forem não-nulos, o gráfico de uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

será um plano e $\langle a, b, c\rangle$ será um vetor normal ao plano.

Prova Suponha que $b \neq 0$. Então, o ponto $(0, -d/b, 0)$ está no gráfico da equação, pois suas coordenadas satisfazem a equação. Esta pode ser escrita como

$$a(x - 0) + b\left(y + \frac{d}{b}\right) + c(z - 0) = 0$$

que, do Teorema 15.3.2, é uma equação de um plano que passa pelo ponto $(0, -d/b, 0)$ e para o qual $\langle a, b, c\rangle$ é um vetor normal. Isto prova o teorema, se $b \neq 0$. Um argumento similar pode ser aplicado se $b = 0$ e $a \neq 0$ ou então $c \neq 0$. ■

As equações dos Teoremas 15.3.2 e 15.3.3 são chamadas de equações *cartesianas* de um plano. A equação do Teorema 15.3.2 é análoga à forma ponto-inclinação da equação da reta em duas dimensões. A equação do Teorema 15.3.3 é a forma geral da equação do primeiro grau em três variáveis, sendo denominada *equação linear*.

Um plano fica determinado por três pontos não-colineares, por uma reta e um ponto que não esteja nela, por duas retas que se interceptam ou por duas retas paralelas.

EXEMPLO 2 Ache uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -2, 2)$ e $R(2, 1, 3)$.

Solução Do Teorema 15.3.3, o gráfico de uma equação linear

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2}$$

é um plano. Se essa equação estiver satisfeita pelas coordenadas dos pontos P, Q e R, o plano irá conter os pontos. Substituindo x, y e z em (2) pelas coordenadas dos três pontos, vamos obter as três equações

$$a + 3b + 2c + d = 0$$

$$3a - 2b + 2c + d = 0$$

$$2a + b + 3c + d = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações para a, b e c em termos de d, iremos obter

$$a = -\tfrac{5}{9}d \qquad b = -\tfrac{2}{9}d \qquad c = \tfrac{1}{9}d$$

Substituindo a, b e c em (2) por esses valores, teremos

$$-\tfrac{5}{9}dx - \tfrac{2}{9}dy + \tfrac{1}{9}dz + d = 0$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por $-9/d$, iremos obter

$$5x + 2y - z - 9 = 0$$

que é a equação pedida.

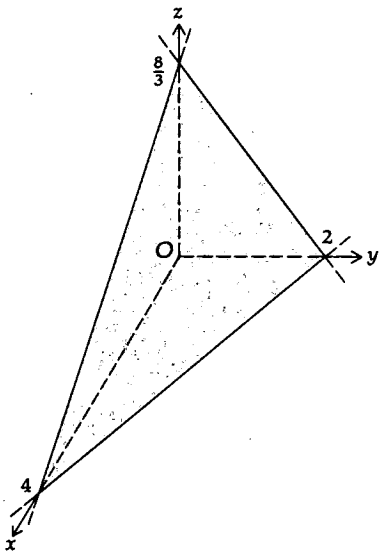


FIGURA 2

Para traçar um esboço de um plano a partir de sua equação é conveniente encontrar os pontos nos quais o plano intercepta os eixos coordenados. A coordenada x do ponto no qual o plano intercepta o eixo x é chamada de *intercepto* x do plano; a coordenada y do ponto no qual o plano intercepta o eixo y é chamada de *intercepto* y do plano; e o *intercepto* z do plano é a coordenada z do ponto no qual o plano intercepta o eixo z.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos traçar um esboço do plano com a equação

$$2x + 4y + 3z = 8$$

Substituindo y e z por zero, obtemos $x = 4$; assim sendo, o intercepto x do plano é 4. De forma similar, obtemos os interceptos y e z que são 2 e $\frac{8}{3}$, respectivamente. Ligando os pontos correspondentes a esses interceptos temos um esboço do plano, conforme aparece na Figura 2. Observe que somente uma parte do plano está na figura. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para traçar um esboço do plano com a equação

$$3x + 2y - 6z = 0$$

note primeiro que como a equação está satisfeita quando x, y e z são iguais a zero, o plano intercepta cada eixo na origem. Se $x = 0$ na equação dada, obtemos $y - 3z = 0$, que é uma reta no plano yz; essa é a reta de intersecção do plano yz com o plano dado. Analogamente, a reta de intersecção do plano xz com o plano dado é obtida ao expressarmos $y = 0$, resultando $x - 2z = 0$. Traçando um esboço de cada uma dessas duas retas e traçando um segmento de reta de um ponto de uma reta a um ponto da outra reta, obtemos a Figura 3. ◀

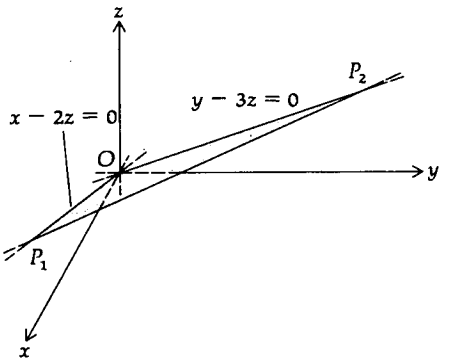


FIGURA 3

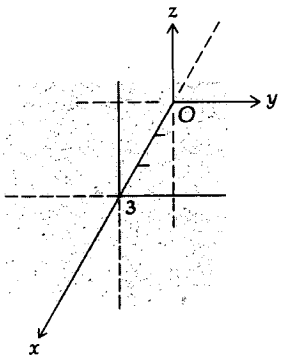


FIGURA 4

Na Ilustração 2, a reta no plano yz e a reta no plano xz, usadas para fazer o esboço do plano, são chamadas de **traços** do plano dado no plano yz e xz, respectivamente. A equação $x = 0$ é uma equação do plano yz, pois o ponto (x, y, z) estará no plano yz se e somente se $x = 0$. Analogamente, $y = 0$ e $z = 0$ são as equações dos planos xz e xy, respectivamente.

Um plano paralelo ao plano yz tem uma equação da forma $x = k$, onde k é uma constante. A Figura 4 mostra um esboço do plano que tem por equação $x = 3$. Um plano paralelo ao plano xz tem uma equação de forma $y = k$ e

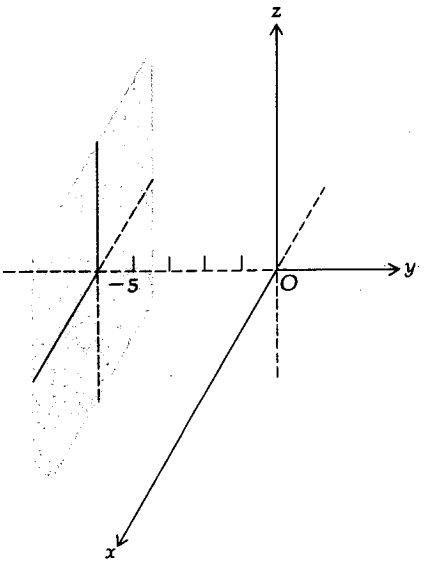


FIGURA 5

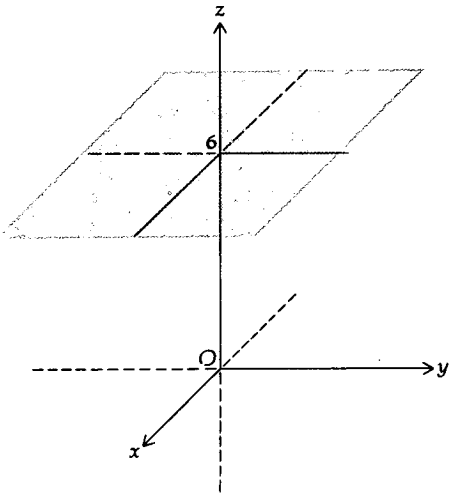


FIGURA 6

um plano paralelo ao plano xy tem uma equação da forma $z = k$. As Figuras 5 e 6 mostram esboços de planos com as equações $y = -5$ e $z = 6$, respectivamente.

15.3.4 DEFINIÇÃO O **ângulo entre dois planos** é definido como o ângulo entre os vetores normais aos dois planos.

Há dois ângulos entre os dois planos. Se um desses ângulos for θ, o outro será o complementar de θ.

EXEMPLO 3 Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos

$$5x - 2y + 5z - 12 = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 7z + 11 = 0$$

Solução Seja $\mathbf{N}_1$ o vetor normal ao primeiro plano e $\mathbf{N}_2$ o vetor normal ao segundo plano. Então,

$$\mathbf{N}_1 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \qquad \mathbf{N}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

Da Definição 15.3.4, o ângulo entre os dois planos é o ângulo entre $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$. Assim, do Teorema 15.2.11, se θ for a medida em radianos desse ângulo,

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1\|\,\|\mathbf{N}_2\|} \\
&= \frac{\langle 5, -2, 5\rangle \cdot \langle 2, 1, -7\rangle}{\sqrt{25+4+25}\,\sqrt{4+1+49}} \\
&= \frac{10 - 2 - 35}{\sqrt{54}\,\sqrt{54}} \\
&= -\tfrac{27}{54} \\
&= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Um ângulo agudo entre dois planos é o complementar de θ, que é $\frac{1}{3}\pi$.

15.3.5 DEFINIÇÃO Dois planos são **paralelos** se e somente se seus vetores normais forem paralelos.

Lembre-se de que dois vetores são paralelos se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro. Assim, da Definição 15.3.5 segue que se $\mathbf{N}_1$ for o vetor normal a um plano e $\mathbf{N}_2$ o vetor normal ao outro, então os dois planos serão paralelos se e somente se

$$\mathbf{N}_1 = k\mathbf{N}_2$$

onde k é uma constante. A Figura 7 mostra esboços de dois planos paralelos e as representações de alguns de seus vetores normais.

15.3.6 DEFINIÇÃO Dois planos são **perpendiculares** se e somente se seus valores normais forem ortogonais.

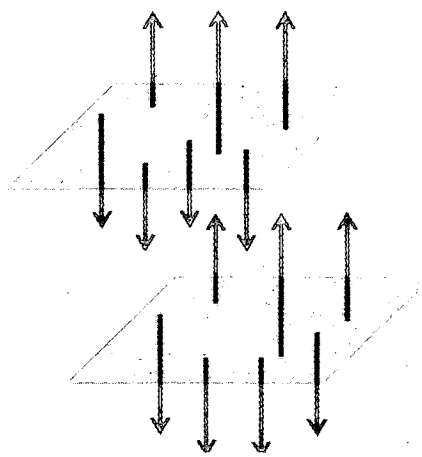


FIGURA 7

Da Definição 15.3.6 e do fato de que dois vetores são ortogonais se e somente se seu produto escalar for zero, segue então que dois planos tendo vetores normais $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ são perpendiculares se e somente se

$$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0 \tag{3}$$

EXEMPLO 4 Ache uma equação do plano contendo o ponto $(4, 0, -2)$ e perpendicular a cada um dos planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

Solução Seja M o plano pedido e $\langle a, b, c\rangle$, $a \neq 0$, o vetor normal de M. Seja M_1 o plano tendo a equação $x - y + z = 0$. Pelo Teorema 15.3.3, $\langle 1, -1, 1\rangle$ é um vetor normal a M_1. Como M e M_1 são perpendiculares, segue de (3) que

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 1, -1, 1\rangle = 0$$

$$a - b + c = 0 \tag{4}$$

Seja M_2 o plano tendo a equação $2x + y - 4z - 5 = 0$. Então, $\langle 2, 1, -4\rangle$ é um vetor normal a M_2. Como M e M_2 são perpendiculares,

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 2, 1, -4\rangle = 0$$

$$2a + b - 4c = 0$$

Resolvendo essa equação e (4) simultaneamente para b e c em termos de a, obtemos $b = 2a$ e $c = a$. Logo, um vetor normal a M é $\langle a, 2a, a\rangle$. Como $(4, 0, -2)$ é um ponto em M, segue, do Teorema 15.3.2, que uma equação de M é

$$a(x - 4) + 2a(y - 0) + a(z + 2) = 0$$

Como $a \neq 0$, dividimos por a e combinamos os termos para obter

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

Considere agora o plano tendo a equação $ax + by + d = 0$ e o plano xy cuja equação é $z = 0$. Os vetores normais a esses planos são $\langle a, b, 0\rangle$ e $\langle 0, 0, 1\rangle$, respectivamente. Como $\langle a, b, 0\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle = 0$, os dois planos são perpendicula-

res. Isso significa que um plano cuja equação não tem termo em z é perpendicular ao plano xy. A Figura 8 ilustra isso. De forma análoga, concluímos que um plano tendo uma equação sem o termo em x é perpendicular ao plano yz (veja a Figura 9) e um plano tendo uma equação sem o termo em y é perpendicular ao plano xz (veja a Figura 10).

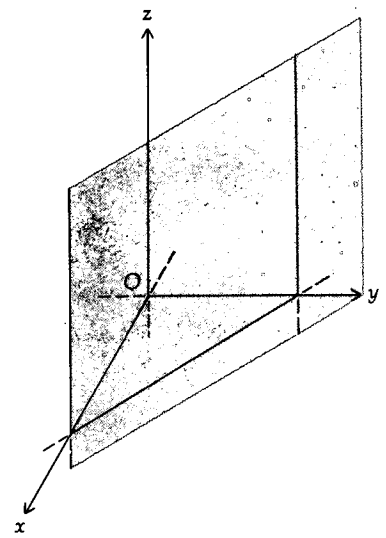


FIGURA 8

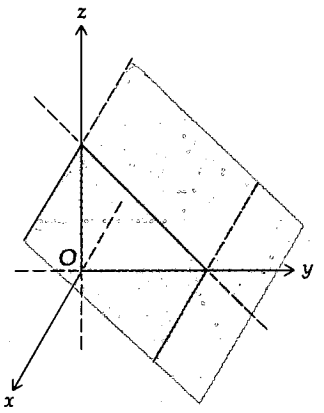


FIGURA 9

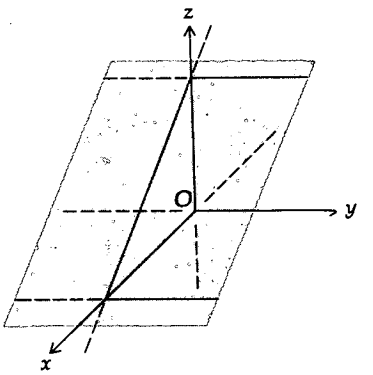


FIGURA 10

Podemos usar vetores para achar a distância de um ponto a um plano. O exemplo a seguir ilustra tal procedimento.

EXEMPLO 5 Ache a distância entre o ponto (1, 4, 6) e o plano

$$2x - y + 2z + 10 = 0$$

Solução Seja P o ponto (1, 4, 6) e escolha um ponto Q qualquer no plano. Para simplificar, seja Q o ponto onde o plano intercepta o eixo x, isto é, o ponto $(-5, 0, 0)$. O vetor cuja representação é $\overrightarrow{PQ}$ é dado por

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Um vetor normal ao plano dado é

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

O oposto de $\mathbf{N}$ também é um vetor normal ao plano dado e

$$-\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Não estamos certos sobre qual dos dois vetores, $\mathbf{N}$ ou $-\mathbf{N}$, faz com $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ o menor ângulo. Seja $\mathbf{N}'$ aquele vetor entre $\mathbf{N}$ e $-\mathbf{N}$ que faz com $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ um ângulo com medida em radianos $\theta < \frac{1}{2}\pi$. Na Figura 11 há uma parte do plano dado contendo o ponto $Q(-5, 0, 0)$, a representação do vetor $\mathbf{N}'$ tendo seu ponto inicial em Q, o ponto $P(1, 4, 6)$, o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ e o ponto R, que é o pé da perpendicular de P ao plano. Para simplificar, os eixos coordenados não foram incluídos nesta figura. A distância $|\overline{RP}|$ é a distância pedida, que indicaremos por d. Como d é uma distância não-orientada, é não-negativa. Vemos, da Figura 11, que d é o valor absoluto da projeção escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ sobre $\mathbf{N}'$. Assim, de (6) na Secção 15.2, obtemos

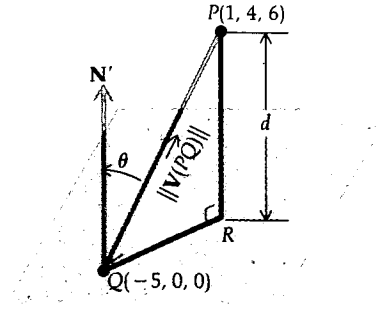


FIGURA 11

$$d = \frac{|\mathbf{N}' \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{N}'\|}$$

Como temos o valor absoluto do produto escalar no numerador e o módulo de $\mathbf{N}'$ no denominador, podemos substituir $\mathbf{N}'$ por $\mathbf{N}$ e teremos

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})|}{\|\mathbf{N}\|} \\ &= \frac{|\langle 2, -1, 2\rangle \cdot \langle -6, -4, -6\rangle|}{\sqrt{4+1+4}} \\ &= \frac{|-12+4-12|}{\sqrt{9}} \\ &= \tfrac{20}{3} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 15.3

Nos Exercícios de 1 a 6, ache uma equação do plano contendo o ponto P dado e tendo o vetor **N** *dado como um vetor normal.*

1. $P(3, 1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 1, 2, -3\rangle$
2. $P(-3, 2, 5)$; $\mathbf{N} = \langle 6, -3, -2\rangle$
3. $P(0, -1, 2)$; $\mathbf{N} = \langle 0, 1, -1\rangle$
4. $P(-1, 8, 3)$; $\mathbf{N} = \langle -7, -1, 1\rangle$
5. $P(2, 1, -1)$; $\mathbf{N} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
6. $P(1, 0, 0)$; $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

Nos Exercícios 7 e 8, ache uma equação do plano que contenha os três pontos dados.

7. $(3, 4, 1), (1, 7, 1), (-1, -2, 5)$
8. $(0, 0, 2), (2, 4, 1), (-2, 3, 3)$

Nos Exercícios de 9 a 14, faça um esboço do plano dado e ache dois vetores unitários normais ao plano.

9. $2x - y + 2z - 6 = 0$
10. $4x - 4y + 2z - 9 = 0$
11. $4x + 3y - 12z = 0$
12. $y + 2z - 4 = 0$
13. $3x + 2z - 6 = 0$
14. $z = 5$

Nos Exercícios de 15 a 20, ache uma equação do plano satisfazendo as condições dadas.

15. Perpendicular à reta que passa pelos pontos $(2, 2, -4)$ e $(7, -1, 3)$ e contendo o ponto $(-5, 1, 2)$.
16. Paralelo ao plano $4x - 2y + z - 1 = 0$ e contendo o ponto $(2, 6, -1)$.
17. Perpendicular ao plano $x + 3y - z - 7 = 0$ e contendo os pontos $(2, 0, 5)$ e $(0, 2, -1)$.
18. Perpendicular a cada um dos planos $x - y + z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ e contendo o ponto $(4, 0, -2)$.
19. Perpendicular ao plano yz, contendo o ponto $(2, 1, 1)$ e fazendo um ângulo com o plano $2x - y + 2z - 3 = 0$ com medida de $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ rad.
20. Contendo o ponto $P(-3, 5, -2)$ e perpendicular às representações do vetor $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$.

Nos Exercícios de 21 a 23, ache o co-seno do ângulo entre os dois planos dados.

21. $2x - y - 2z - 5 = 0$ e $6x - 2y + 3z + 8 = 0$
22. $2x - 5y + 3z - 1 = 0$ e $y - 5z + 3 = 0$
23. $3x + 4y = 0$ e $4x - 7y + 4z - 6 = 0$

24. Ache a distância do ponto $(2, 2, -4)$ ao plano $2x + 2y - z - 6 = 0$.
25. Ache a distância do ponto $(-2, 6, 3)$ ao plano $5x + 11y + 2z - 30 = 0$.
26. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos $4x - 8y - z + 9 = 0$ e $4x - 8y - z - 6 = 0$.
27. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos $4y - 3z - 6 = 0$ e $8y - 6z - 27 = 0$.
28. Prove que a distância não-orientada do ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $ax + by + cz + d = 0$ é dada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

29. Prove que a distância perpendicular entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é dada por

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

30. Se a, b e c forem interceptos não-nulos de um plano nos eixos x, y e z, respectivamente, prove que a equação do plano será

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Esta é a chamada *forma interceptual* da equação do plano.

15.4 RETAS EM R^3

Seja L uma reta em R^3 tal que contenha um dado ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e seja paralela às representações de um dado vetor $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$. A Figura 1 mostra um esboço da reta L e a representação posicional do vetor $\mathbf{R}$. A reta L é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$, tal que $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ seja paralela ao vetor R. Assim, P está sobre a reta L se e somente se existir um escalar não-nulo t, tal que

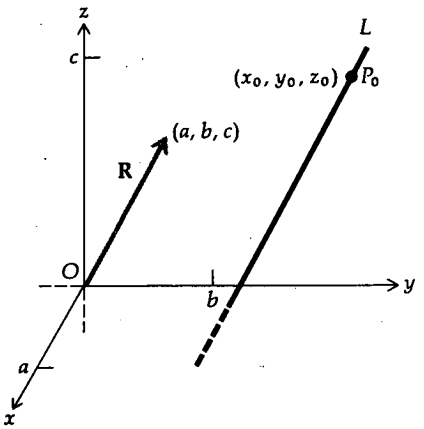


FIGURA 1

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = t\mathbf{R}$$

Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$, obtemos dessa equação

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t\langle a, b, c \rangle$$

de onde segue que

$$x - x_0 = ta \qquad y - y_0 = tb \qquad z - z_0 = tc$$

$$\boxed{x = x_0 + ta \qquad y = y_0 + tb \qquad z = z_0 + tc} \tag{1}$$

Seja o parâmetro t um número real qualquer (isto é, t assume todos os valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$), podendo o ponto P ser qualquer ponto da reta L. Assim sendo, as equações (1) representam a reta L; essas equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** De (1), as equações paramétricas da reta L que é paralela às representações do vetor $\mathbf{R} = \langle 11, 8, 10 \rangle$ e que contém o ponto (8, 12, 6) são

$$x = 8 + 11t \qquad y = 12 + 8t \qquad z = 6 + 10t$$

A Figura 2 mostra um esboço da reta e a representação posicional de $\mathbf{R}$. ◀

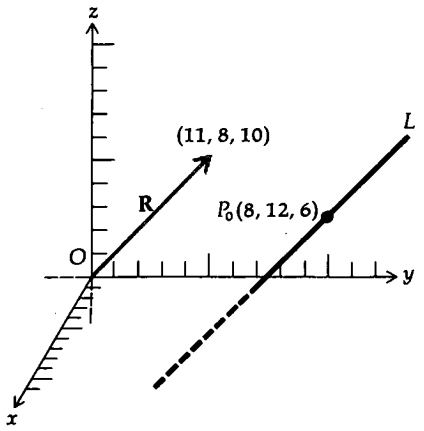


FIGURA 2

Se nenhum dos números a, b e c for zero, podemos eliminar t das equações (1) e obter

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \tag{2}$$

Essas equações são chamadas de **equações simétricas** da reta. As equações (2) são equivalentes ao sistema de três equações

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$
$$c(x - x_0) = a(z - z_0)$$
$$c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

Na realidade, as três equações não são independentes, pois cada uma delas pode ser deduzida das outras duas. Cada uma delas é uma equação de um plano que contém a reta L, representada pelas equações (2). Dois planos, quaisquer que sejam dentre os três, têm por intersecção a reta L; assim sendo, cada par das equações define a reta. Há, contudo, um número ilimitado de planos contendo a reta dada e como qualquer par deles determinará a reta, há um número ilimitado de pares que a representam.

O vetor $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$ determina a direção da reta com as equações simétricas (2), e os números a, b e c são chamados de **números direcionais*** da reta. Todo vetor paralelo a $\mathbf{R}$ tem a mesma direção e mesmo sentido ou sentido oposto

N. do T.: Também chamados números diretores ou números de direção.

ao de **R**; assim sendo, esse vetor pode ser usado em lugar de **R**, na discussão acima. Como as componentes de qualquer vetor paralelo a **R** são proporcionais às componentes de **R**, qualquer conjunto de três números proporcionais a a, b e c também serve como um conjunto de números direcionais para a reta. Assim sendo, uma reta tem um número ilimitado de conjuntos de números direcionais. Um conjunto de números direcionais de uma reta é escrito entre colchetes como $[a, b, c]$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $[2, 3, -4]$ representar um conjunto de números direcionais de uma reta, outros conjuntos de números direcionais da mesma reta poderão ser representados por $[4, 6, -8]$, $[1, \frac{3}{2}, -2]$ e $[2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}]$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Um conjunto de números direcionais da reta da Ilustração 1 é $[11, 8, 10]$ e a reta contém o ponto $(8, 12, 6)$. Assim, de (2), as equações simétricas da reta são

$$\frac{x-8}{11} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-6}{10}$$ ◀

EXEMPLO 1 Ache dois conjuntos de equações simétricas da reta que passa pelos pontos $(-3, 2, 4)$ e $(6, 1, 2)$.

Solução Seja P_1 o ponto $(-3, 2, 4)$ e P_2 o ponto $(6, 1, 2)$. Então, a reta pedida é paralela às representações do vetor $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2})$, e assim as componentes desse vetor constituem um conjunto de números direcionais da reta. $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 9, -1, -2\rangle$. Tomando P_0 como o ponto $(-3, 2, 4)$ temos, de (2), as equações

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

Outro conjunto de equações simétricas da reta, obtido ao tomarmos P_0 como o ponto $(6, 1, 2)$, é

$$\frac{x-6}{9} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

Se um dos números a, b ou c for zero, não usamos equações simétricas (2). Entretanto, suponha, por exemplo, que $b = 0$ e nem a, nem c sejam nulos. Então, as equações da reta são

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c} \quad \text{e} \quad y = y_0$$

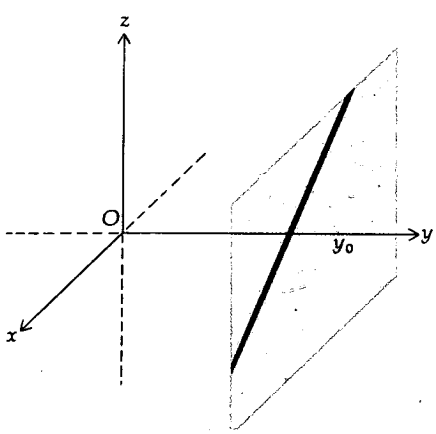


FIGURA 3

Uma reta tendo essas equações simétricas está no plano $y = y_0$ e, logo, é paralela ao plano xz. A Figura 3 mostra uma reta como essa.

EXEMPLO 2 Dados os dois planos

$$x + 3y - z - 9 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 3y + 4z + 3 = 0$$

Para a reta de intersecção desses planos, ache (a) um conjunto de equações simétricas, (b) um conjunto de equações paramétricas e (c) a direção dos co-senos diretores de um vetor cujas representações são paralelas a ele.

Solução

(a) Um conjunto de equações simétricas é da forma (2). Para obter tais equações, resolvemos o par de equações dadas para x e y, em termos de z. Os cálculos são os seguintes:

$$\begin{array}{r} x + 3y - z - 9 = 0 \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0 \; (+) \\ \hline 3x \quad + 3z - 6 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x + 6y - 2z - 18 = 0 \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0 \; (-) \\ \hline 9y - 6z - 21 = 0 \end{array}$$

$$x = -z + 2 \qquad\qquad y = \tfrac{2}{3}z + \tfrac{7}{3}$$

Resolvendo cada equação para z, obtemos

$$\frac{x-2}{-1} = z \qquad \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = z$$

Assim, um conjunto de equações simétricas é

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y - \frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y - \frac{7}{3}}{2} = \frac{z-0}{3}$$

(b) Um conjunto de equações paramétricas é obtido ao igualarmos cada uma das razões da parte (a) a t, obtendo

$$\frac{x-2}{-3} = t \qquad \frac{y - \frac{7}{3}}{2} = t \qquad \frac{z-0}{3} = t$$

$$x = 2 - 3t \qquad y = \tfrac{7}{3} + 2t \qquad z = 3t$$

(c) Das equações simétricas na parte (a), um conjunto de números direcionais da reta é $[-3, 2, 3]$. Portanto, o vetor $\langle -3, 2, 3\rangle$ tem suas representações paralelas à reta. Como $\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22}$, os co-senos diretores desse vetor são

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{22}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{22}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

EXEMPLO 3 Ache as equações da reta que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ perpendicular à reta

$$3x = 2y = z \tag{3}$$

e paralela ao plano

$$x + y - z = 0 \tag{4}$$

Solução Seja $[a, b, c]$ um conjunto de números direcionais da reta pedida. As equações (3) podem ser escritas como

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{1}$$

que são as equações simétricas da reta. Um conjunto de números direcionais dessa reta é $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$. Como a reta pedida é perpendicular a essa reta, segue que os vetores $\langle a, b, c\rangle$ e $<\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1>$ são ortogonais.

Assim,

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1\rangle = 0$$

$$\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}b + c = 0 \tag{5}$$

Um vetor normal ao plano (4) é $\langle 1, 1, -1\rangle$. Como a reta pedida é paralela a esse plano, ela é perpendicular às representações do vetor normal. Assim sendo, os vetores $\langle a, b, c\rangle$ e $\langle 1, 1, -1\rangle$ são ortogonais, portanto

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 1, 1, -1\rangle = 0$$

$$a + b - c = 0$$

Supondo $c \neq 0$, resolvemos essa equação e (5) simultaneamente para a e b em termos de c e obtemos $a = 9c$ e $b = -8c$. A reta pedida tem, então, o conjunto de números direcionais $[9c, -8c, c]$ e contém o ponto $(1, -1, 1)$. Logo, as equações simétricas da reta são

$$\frac{x-1}{9c} = \frac{y+1}{-8c} = \frac{z-1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}$$

No exemplo a seguir usamos o conceito de **retas reversas**, que são duas retas que não estão no plano.

EXEMPLO 4 Se l_1 for a reta que passa por $A(1, 2, 7)$ e $B(-2, 3, -4)$ e l_2 for a reta que passa por $C(2, -1, 4)$ e $D(5, 7, -3)$, prove que l_1, e l_2 são retas reversas.

Solução Para mostrar que as duas retas não estão num único plano, demonstramos que elas não se interceptam e não são paralelas. As equações paramétricas da reta são

$$x = x_0 + ta \qquad y = y_0 + tb \qquad z = z_0 + tc$$

onde $[a, b, c,]$ é um conjunto de números direcionais da reta e (x_0, y_0, z_0) é qualquer ponto da reta. Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle -3, 1, -11\rangle$, um conjunto de números direcionais de l_1 é $[-3, 1, -11]$. Tomando A como o ponto P_0, temos as equações paramétricas de l_1

$$x = 1 - 3t \qquad y = 2 + t \qquad z = 7 - 11t \tag{6}$$

Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \langle 3, 8, -7\rangle$ e l_2 contém o ponto C, as equações paramétricas de l_2 são

$$x = 2 + 3s \qquad y = -1 + 8s \qquad z = 4 - 7s \tag{7}$$

Como os conjuntos de números direcionais não são proporcionais, l_1 e l_2 não são paralelas. Para que as retas se interceptem, deve haver um valor de t e um valor de s que coincidam no mesmo ponto (x_1, y_1, z_1) para ambos os conjuntos de equações (6) e (7). Assim sendo, equacionamos os primeiros membros das respectivas equações e obtemos

$$1 - 3t = 2 + 3s$$

$$2 + t = -1 + 8s$$

$$7 - 11t = 4 - 7s$$

Resolvendo simultaneamente as duas primeiras equações, obtemos $s = \frac{8}{27}$ e $t = -\frac{17}{27}$. Esse conjunto de valores não satisfaz a terceira equação; logo as duas retas não se interceptam. Portanto, l_1 e l_2 são retas reversas.

EXERCÍCIOS 15.4

Nos Exercícios de 1 a 8, ache as equações simétrica e paramétrica da reta que satisfaz as condições dadas.

1. Passa pelos pontos (1, 2, 1) e (5, −1, 1).
2. Passa pelo ponto (5, 3, 2) com números direcionais [4, 1, −1].
3. Passa pela origem e é perpendicular à reta
$$\tfrac{1}{4}(x - 10) = \tfrac{1}{3}y = \tfrac{1}{2}z$$
por intersecção.
4. Passa pela origem é é perpendicular às retas que têm por números direcionais [4, 2, 1] e [−3, −2, 1].
5. É perpendicular às retas com números direcionais [−5, 1, 2] e [2, −3, −4] no ponto (−2, 0, 3).
6. Passa pelo ponto (−3, 1, −5) e é perpendicular ao plano $4x - 2y + z - 7 = 0$.
7. Passa pelo ponto (4, −5, 20) e é perpendicular ao plano $x + 3y - 6z - 8 = 0$.
8. Passa pelo ponto (2, 0, −4) e é paralela a cada um dos planos $2x + y - z = 0$ e $x + 3y + 5z = 0$.
9. Ache um conjunto de equações simétricas para a reta
$$\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$
10. Mostre que as retas
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$$
são coincidentes.
11. Prove que a reta $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1)$ está no plano $x - 2y + z = 6$.
12. Prove que a reta $x + 1 = -\frac{1}{2}(y - 6) = z$ está no plano $3x + y - z = 3$.

Os planos que passam por uma reta e são perpendiculares aos planos coordenados são chamados de **planos projetores** *da reta. Nos Exercícios de 13 a 16, ache as equações dos planos projetores da reta dada e faça um esboço da reta.*

13. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ 4x - y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$
17. Ache o co-seno do menor ângulo entre o vetor cujas representações são paralelas à reta $x = 2y + 4$, $z = -y + 4$ e o vetor cujas representações são paralelas à reta $x = y + 7$, $2z = y + 2$.
18. Ache uma equação do plano contendo o ponto (6, 2, 4) e a reta $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{6}(y + 2) = \frac{1}{7}(z - 3)$.

Nos Exercícios 19 e 20, ache uma equação do plano que contém as retas concorrentes (que se interceptam).

19. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ e $\begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$
20. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ e $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$
21. Mostre que as retas
$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$
são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.
22. Mostre que as retas
$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z + 4 \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$
são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.
23. Ache as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta $\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$ e o plano $5x - y + 2z - 12 = 0$.
24. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (1, −1, 1), é perpendicular à reta $3x = 2y = z$ e paralela ao plano $x + y - z = 0$.
25. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (3, 6, 4), intercepta o eixo z e é paralela ao plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$.
26. Ache a distância da origem à reta $x = -2 + \frac{6}{7}t$, $y = 7 - \frac{2}{7}t$, $z = 4 + \frac{3}{7}t$.
27. Ache a distância entre o ponto (−1, 3, −1) e a reta $x - 2z = 7$, $y = 1$.
28. Ache as equações da reta que passa pela origem, é perpendicular às retas $x = y - 5$; $z = 2y - 3$ e intercepta a reta $y = 2x + 1$, $z = x + 2$.
29. Prove que as retas
$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$$
são reversas.
30. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (3, −4, −5) e intercepta cada uma das reversas do Exercício 29.
31. Quais são as equações simétricas de uma reta se dois números direcionais a e b são nulos?

15.5 PRODUTO VETORIAL

Se **A** e **B** forem dois vetores não-paralelos, as representações desses vetores com o mesmo ponto inicial determinarão um plano, como está indicado na Figura 1. Vamos mostrar que um vetor cujas representações são perpendiculares a esse plano é obtido por uma operação chamada de *produto vetorial* de **A** e **B**. Primeiro vamos definir essa operação para depois considerarmos suas propriedades algébricas e geométricas.

15.5.1 DEFINIÇÃO

Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, então o produto vetorial de **A** e **B**, denotado por $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, é dado por

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

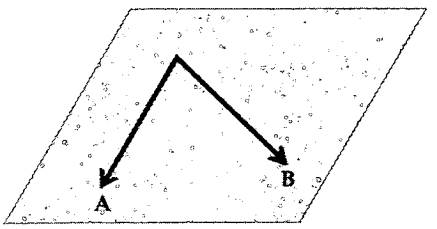


FIGURA 1

A operação de obtenção do produto vetorial é chamada de **multiplicação vetorial.**

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -3\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle 3, -1, 4\rangle$, então, da Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \langle 2, 1, -3\rangle \times \langle 3, -1, 4\rangle\\ &= \langle (1)(4) - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4), (2)(-1) - (1)(3)\rangle\\ &= \langle 4 - 3, -9 - 8, -2 - 3\rangle\\ &= \langle 1, -17, -5\rangle\\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$ ◄

Há uma regra mnemônica para guardar a fórmula que faz uso da notação de determinantes. Um determinante de segunda ordem é definido pela equação

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

onde a, b e c são números reais. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 6\\ -2 & 5\end{vmatrix} &= 3(5) - (6)(-2)\\ &= 27\end{aligned}$$

Assim sendo, a fórmula pode ser escrita como

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

O segundo membro da expressão acima pode ser escrito simbolicamente como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

que é a notação para um determinante de terceira ordem. No entanto, observe que a primeira linha contém vetores, e não números reais, como é usual em determinantes, o que indica o caráter heurístico dessa notação.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar a regra mnemônica com determinantes para encontrar o produto vetorial dos vetores da Ilustração 1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= [(1)(4) - (-3)(-1)]\mathbf{i} - [(2)(4) - (-3)(3)]\mathbf{j} + [(2)(-1) - (1)(3)]\mathbf{k} \\
&= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

◀

15.5.2 TEOREMA Se $\mathbf{A}$ for um vetor qualquer em V_3, então

(i) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
(ii) $\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
(iii) $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Prova de (i) Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, então pela Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{A} &= \langle a_2a_3 - a_3a_2, a_3a_1 - a_1a_3, a_1a_2 - a_2a_1 \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

As demonstrações de (ii) e (iii) serão deixadas como exercício (veja o Exercício 13). ■

Aplicando a Definição 15.5.1 a pares dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, obteremos o seguinte:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\
\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\
\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}
\end{array}$$

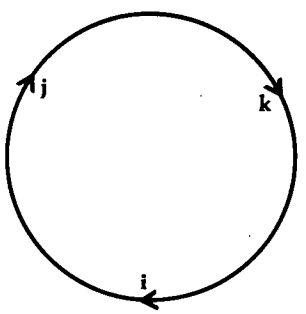


FIGURA 2

Para lembrar das fórmulas acima, primeiro observe que o produto vetorial de cada um dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$ por si mesmo é o vetor nulo. Os outros seis produtos vetoriais podem ser obtidos da Figura 2, com a aplicação da seguinte regra: o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido horário é o vetor seguinte e o produto de dois vetores no sentido anti-horário é o anterior a eles.

Pode ser facilmente observado que o produto vetorial de dois vetores não é comutativo, pois em particular $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$. Temos contudo, que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$; assim, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$. Em geral, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem vetores quaisquer em V_3, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$; isso será enunciado e provado como teorema.

15.5.3 TEOREMA Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem vetores quaisquer em V_3,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

Prova Se $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então, da Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle \\
&= -1\langle a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2 \rangle \\
&= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})
\end{aligned}$$

■

A multiplicação vetorial não é associativa. Isso pode ser visto no seguinte exemplo:

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} \qquad (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j}$$
$$= -\mathbf{j} \qquad\qquad = \mathbf{0}$$

Assim,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$$

A multiplicação vetorial é distributiva em relação à adição de vetores, conforme pode ser visto no teorema a seguir.

15.5.4 TEOREMA Se **A**, **B** e **C** forem vetores quaisquer em V_3, então

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

Para demonstrar o Teorema 15.5.4, seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ e $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, então mostre que as componentes do vetor no primeiro membro de (2) são as mesmas componentes do vetor no segundo membro. Os detalhes serão deixados como exercícios (veja o Exercício 35).

15.5.5 TEOREMA Se **A** e **B** forem dois vetores quaisquer em V_3 e c for um escalar, então

(i) $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B})$;
(ii) $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

A demonstração do Teorema 15.5.5 será deixada como exercício (veja o Exercício 36).

Os Teoremas 15.5.4 e 15.5.5 podem ser aplicados para calcularmos o produto vetorial de dois vetores, usando as leis da Álgebra, desde que a ordem dos vetores na multiplicação vetorial não seja alterada, pois isso não é permitido pelo Teorema 15.5.3. A ilustração a seguir demonstra esse procedimento.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos encontrar o produto vetorial dos vetores na Ilustração 1, aplicando os Teoremas 15.5.4 e 15.5.5.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\
&= 6(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - 1(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\
&\qquad + 4(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 9(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 12(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\
&= 6(\mathbf{0}) - 2(\mathbf{k}) + 8(-\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{k}) - 1(\mathbf{0}) + 4(\mathbf{i}) - 9(\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{i}) - 12(\mathbf{0}) \\
&= -2\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{i} \\
&= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

◀

O método usado na Ilustração 3 mostra uma maneira de encontrarmos o produto vetorial, sem a necessidade de recorrermos à fórmula da Definição 15.5.1 ou de usarmos a notação heurística de determinantes. Na realidade, todas as etapas mostradas na solução não precisam ser incluídas, pois os vários produtos vetoriais de vetores unitários podem ser obtidos imediatamente, ao usarmos a Figura 2 e a regra correspondente.

Há dois *produtos triplos* que deveremos considerar. Um deles é o produto $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, chamado de **produto escalar triplo** dos vetores **A**, **B** e **C**. De fato, os parênteses não são necessários, pois $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é um escalar e, assim sendo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ pode ser interpretado de uma única maneira.

15.5.6 TEOREMA Se **A**, **B** e **C** forem vetores de V_3, então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

O Teorema 15.5.6 pode ser provado se supusermos que

$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad \mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \qquad \mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$$

e então mostrarmos que o escalar à esquerda da equação é igual ao escalar à sua direita. Os detalhes serão propostos como exercício (veja o Exercício 37).

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos verificar o Teorema 15.5.6 se

$$\mathbf{A} = \langle 1, -1, 2 \rangle \qquad \mathbf{B} = \langle 3, 4, -2 \rangle \qquad \mathbf{C} = \langle -5, 1, -4 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\
&= 3\mathbf{k} - 12(-\mathbf{j}) - 20(-\mathbf{k}) - 16\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2(-\mathbf{i}) \\
&= -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k} \\
\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -14, 22, 23 \rangle \\
&= -14 - 22 + 46 \\
&= 10 \\
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\
&= 4\mathbf{k} - 2(-\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{k}) + 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8(-\mathbf{i}) \\
&= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \\
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \langle -6, 8, 7 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle \\
&= 30 + 8 - 28 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Isso comprova o teorema para esses três vetores. ◀

O outro produto triplo é $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, chamado de **produto vetorial triplo**.

15.5.7 TEOREMA Se **A**, **B** e **C** forem vetores em V_3, então

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

A demonstração do Teorema 15.5.7 é semelhante à do Teorema 15.5.6. Usando as componentes dos vetores **A**, **B** e **C**, podemos mostrar que o vetor à esquerda da igualdade é igual ao vetor à sua direita. Os cálculos serão pedidos no Exercício 38.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Verificaremos o Teorema 15.5.7 para os vetores **A**, **B** e **C** da Ilustração 4. Como $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -14 & 22 & 23 \end{vmatrix} \\
&= -23\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 22\mathbf{k} - 14\mathbf{k} - 44\mathbf{i} - 23\mathbf{j} \\
&= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} &= \langle 1, -1, 2\rangle \cdot \langle -5, 1, -4\rangle \\ &= -5 - 1 - 8 \\ &= -14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \langle 1, -1, 2\rangle \cdot \langle 3, 4, -2\rangle \\ &= 3 - 4 - 4 \\ &= -5\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} &= -14\langle 3, 4, -2\rangle - (-5)\langle -5, 1, -4\rangle \\ &= \langle -42, -56, 28\rangle - \langle 25, -5, 20\rangle \\ &= \langle -67, -51, 8\rangle \\ &= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\end{aligned}$$

Comparando esse resultado com (1), vemos que o Teorema 15.5.7 está comprovado para esses três vetores. ◀

O teorema a seguir é usado para dar uma interpretação geométrica do produto vetorial.

15.5.8 TEOREMA Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem dois vetores em V_3 e θ for a medida em radianos do ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, então

$$\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \operatorname{sen}\theta$$

Prova Do Teorema 14.2.3(iii), aplicado a vetores em V_3

$$\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|^2 = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{2}$$

Do Teorema 15.5.6, tomando $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ como os vetores, temos que:

$$(\mathbf{U}\times\mathbf{V})\cdot\mathbf{W} = \mathbf{U}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{W})$$

Se nessa equação expressarmos $\mathbf{U} = \mathbf{A}$, $\mathbf{V} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{W} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$, temos

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]$$

Aplicando o Teorema 15.5.7 ao vetor entre colchetes à direita, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}] \\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \\ &= \|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\end{aligned} \tag{3}$$

Do Teorema 15.2.11, se θ for o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\cos\theta$$

Substituindo essa equação em (3), temos

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

Substituindo (2) na relação acima, e como $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, temos

$$\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{B}\|^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Como $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$. Logo, tomamos a raiz quadrada de ambos os membros e obtemos

$$\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\operatorname{sen}\theta$$ ■

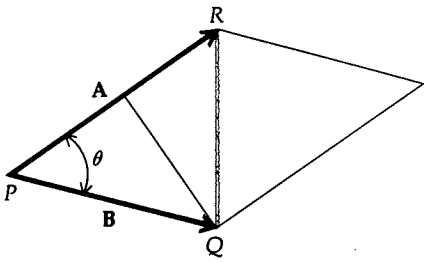


FIGURA 3

Vamos considerar agora uma interpretação geométrica de $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$. Seja $\overrightarrow{PR}$ uma representação de $\mathbf{A}$ e seja $\overrightarrow{PQ}$ uma representação de $\mathbf{B}$. Então, o ângulo entre os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é o ângulo em P do triângulo RPQ (veja a Figura 3). Seja θ a medida em radianos desse ângulo. Portanto, a área do paralelogramo tendo $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PQ}$ como lados adjacentes é $\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$ sen θ, pois a altura do paralelogramo tem comprimento $\|\mathbf{B}\|$ sen θ e o comprimento da base é $\|\mathbf{A}\|$. Assim, do Teorema 15.5.8, segue que $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$ é a área desse paralelogramo.

EXEMPLO 1 Mostre que o quadrilátero tendo vértices em $P(1, -2, 3)$, $Q(4, 3, -1)$, $R(2, 2, 1)$ e $S(5, 7, -3)$ é um paralelogramo e ache a sua área.

Solução A Figura 4 mostra o quadrilátero $PQSR$.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 4-1, 3+2, -1-3\rangle = \langle 3, 5, -4\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \langle 2-1, 2+2, 1-3\rangle = \langle 1, 4, -2\rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 5-2, 7-2, -3-1\rangle = \langle 3, 5, -4\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{QS}) = \langle 5-4, 7-3, -3+1\rangle = \langle 1, 4, -2\rangle$$

Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{QS})$, segue que $\overrightarrow{PQ}$ é paralelo a $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{PR}$ é paralelo a $\overrightarrow{QS}$. Logo, $PQSR$ é um paralelogramo.

Seja $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$; então,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k})\\ &= 3(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + 5(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) - 4(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + 12(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + 20(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) - 16(\mathbf{j}\times\mathbf{k})\\ &\qquad - 6(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) - 10(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + 8(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\ &= 3(\mathbf{0}) + 5(\mathbf{k}) - 4(-\mathbf{j}) + 12(-\mathbf{k}) + 20(\mathbf{0}) - 16(\mathbf{i}) - 6(\mathbf{j}) - 10(-\mathbf{i}) + 8(\mathbf{0})\\ &= -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| &= \sqrt{36+4+49}\\ &= \sqrt{89}\end{aligned}$$

Logo, a área do paralelogramo é $\sqrt{89}$.

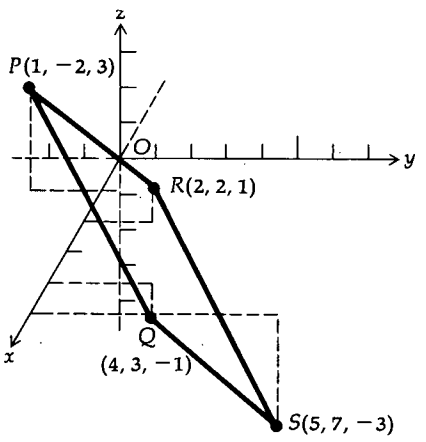


FIGURA 4

O teorema a seguir que fornece um método para determinar se dois vetores em V_3 são paralelos, decorre do Teorema 15.5.8.

15.5.9 TEOREMA Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem dois vetores em V_3, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ serão paralelos se e somente se $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Prova Se um dos dois vetores $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ for o vetor nulo, então, do Teorema 15.5.2, $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Como o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor, o teorema é válido.

Se nem $\mathbf{A}$ nem $\mathbf{B}$ forem o vetor nulo, $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ e $\|\mathbf{B}\| \neq 0$. Logo, pelo Teorema 15.5.8, $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| = \mathbf{0}$ se e somente se sen $\theta = 0$. Como $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| = \mathbf{0}$ se e somente se $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e sen $\theta = 0$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ se e somente se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, podemos concluir que

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ se e somente se } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

Por outro lado, dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se o ângulo entre eles for 0 ou π. Assim, segue o teorema. ■

15.5.10 TEOREMA Se **A** e **B** forem dois vetores em V_3, então o vetor $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ será ortogonal a ambos **A** e **B**.

Prova Do Teorema 15.5.6,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

Do Teorema 15.5.2(i), $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Logo, da equação acima,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \mathbf{0}\cdot\mathbf{B}\\ &= 0\end{aligned}$$

Como o produto escalar de **A** por $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ é zero, segue que **A** e $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ são ortogonais.

Também, do Teorema 15.5.6,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{B}$$

Aplicando de novo o Teorema 15.5.2(i), obtemos $\mathbf{B}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$; assim, da equação acima,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Como o produto escalar de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ por **B** é zero, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ e **B** são ortogonais e o teorema está provado. ■

Do Teorema 15.5.10 podemos concluir que se as representações dos vetores **A**, **B** e $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ têm o mesmo ponto inicial, então a representação de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ será perpendicular ao plano formado pelas representações de **A** e **B**.

EXEMPLO 2 Dados os pontos $P(-1, -2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$ e $R(0, 5, 1)$, ache o vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que passa por P, Q e R.

Solução Seja $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$. Então,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \langle -2+1, 1+2, 0+3\rangle & \mathbf{B} &= \langle 0+1, 5+2, 1+3\rangle\\ &= \langle -1, 3, 3\rangle & &= \langle 1, 7, 4\rangle\end{aligned}$$

O plano que passa pelos pontos P, Q e R é o plano formado por $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ que são, respectivamente, as representações dos vetores **A** e **B**. Logo, qualquer representação do vetor $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ será perpendicular a esse plano.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+7\mathbf{j}+4\mathbf{k})\\ &= -9\mathbf{i}+7\mathbf{j}-10\mathbf{k}\end{aligned}$$

O vetor pedido é um vetor unitário, paralelo a $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Para achar esse vetor unitário, aplicamos o Teorema 15.2.8 e dividimos $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ por $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$, obtendo

$$\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|} = -\frac{9}{\sqrt{230}}\mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{230}}\mathbf{j} - \frac{10}{\sqrt{230}}\mathbf{k}$$

Os dois exemplos que seguem mostram o uso do produto vetorial para encontrarmos uma equação de um plano. Esses exemplos envolvem o uso das mesmas informações usadas nos Exemplos 2 e 4 da Secção 15.3, respectivamente.

EXEMPLO 3 Ache uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -2, 2)$ e $R(2, 1, 3)$.

Solução $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Um vetor normal ao plano pedido é o produto vetorial $\mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$, que é

$$(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Assim, se $P_0 = (1, 3, 2)$ e $\mathbf{N} = \langle 5, 2, -1 \rangle$, do Teorema 15.3.2 uma equação do plano é

$$5(x - 1) + 2(y - 3) - (z - 2) = 0$$

$$5x + 2y - z - 9 = 0$$

Esse resultado está de acordo com o Exemplo 2 da Secção 15.3.

EXEMPLO 4 Ache uma equação do plano que contém o ponto $(4, 0, -2)$ e é perpendicular a cada um dos planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

Solução Pelo Teorema 15.3.3, um vetor normal ao plano $x - y + z = 0$ é $\langle 1, -1, 1 \rangle$ e um vetor normal ao plano $2x + y - 4z - 5 = 0$ é $\langle 2, 1, -4 \rangle$. Assim, um vetor normal ao plano pedido é ortogonal a ambos $\langle 1, -1, 1 \rangle$ e $\langle 2, 1, -4 \rangle$. Pelo Teorema 15.5.10 tal vetor é

$$\langle 1, -1, 1 \rangle \times \langle 2, 1, -4 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

O plano pedido contém o ponto $(4, 0, -2)$ e tem $\langle 3, 6, 3 \rangle$ como vetor normal. Do Teorema 15.3.2, uma equação desse plano é

$$3(x - 4) + 6(y - 0) + 3(z + 2) = 0$$

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

Essa equação está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 4 da Secção 15.3

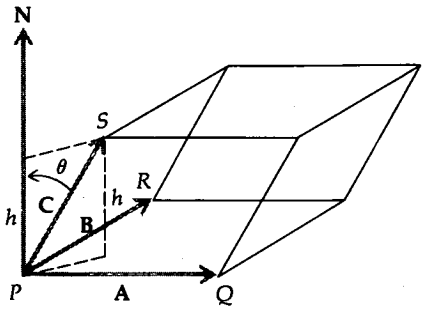


FIGURA 5

Uma interpretação geométrica do produto escalar triplo é obtida se considerarmos um paralelepípedo com arestas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ e expressarmos $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ e $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$. Veja a Figura 5. O vetor $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é normal ao plano de $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$. O vetor $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ também é normal a esse plano. Não temos certeza de qual desses vetores $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ou $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ forma com $\mathbf{C}$ o menor ângulo. Seja $\mathbf{N}$ o vetor dentre $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ que faz com $\mathbf{C}$ um ângulo cuja medida em radianos é $\theta < \frac{1}{2}\pi$. Então, as representações de $\mathbf{N}$ e $\mathbf{C}$ tendo seu ponto inicial em P estarão do mesmo lado do plano de $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$, como mostra a Figura 5. A área da base do paralelepípedo é $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Se h for a altura do paralelepípedo e V o seu volume, teremos

$$V = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| h \tag{4}$$

Considere agora o produto escalar $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$. Pelo Teorema 15.2.11,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| \, \|\mathbf{C}\| \cos \theta$$

Mas $h = \|\mathbf{C}\| \cos \theta$; assim,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| h \tag{5}$$

Como $\mathbf{N}$ é $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ou $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, segue que $\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Assim, de (5),

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| h$$

Comparando essa relação e (4), temos

$$V = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$$

Segue então que a medida do volume do paralelepípedo é $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ou $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$; isto é, a medida do volume do paralelepípedo é o valor absoluto do produto escalar triplo $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

EXEMPLO 5 Ache o volume do paralelepípedo tendo vértices $P(5, 4, 5)$, $Q(4, 10, 6)$, $R(1, 8, 7)$ e $S(2, 6, 9)$ e arestas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$.

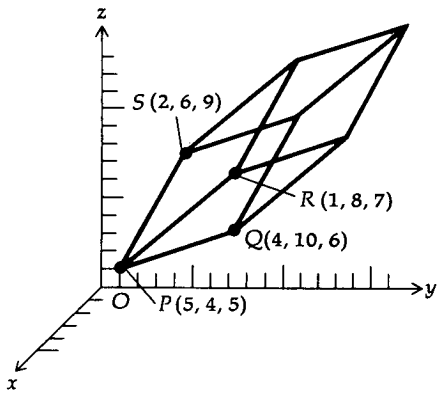


FIGURA 6

Solução A Figura 6 mostra o paralelepípedo. Seja $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, então $\mathbf{A} = \langle -1, 6, 1 \rangle$. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$, então $\mathbf{B} = \langle -4, 4, 2 \rangle$. Seja $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$, então $\mathbf{C} = \langle -3, 2, 4 \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (-\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 20\mathbf{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \langle 8, -2, 20 \rangle \cdot \langle -3, 2, 4 \rangle \\ &= -24 - 4 + 80 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Portanto, o volume é 52 em unidades de volume.

EXEMPLO 6 Ache a distância entre as duas retas reversas l_1 e l_2 do Exemplo 4 da Secção 15.4.

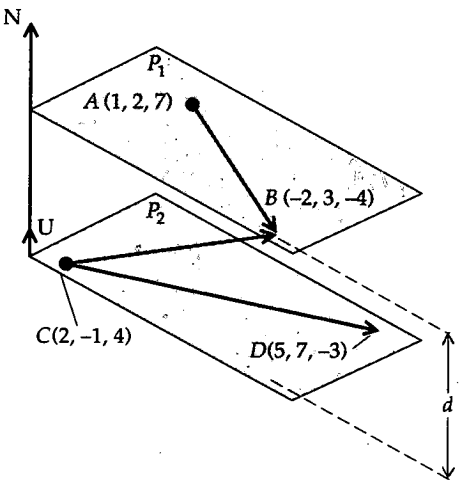


FIGURA 7

Solução A reta l_1 contém os pontos $A(1, 2, 7)$ e $B(-2, 3, -4)$. A reta l_2 contém os pontos $C(2, -1, 4)$ e $D(5, 7, -3)$. Como l_1 e l_2 são reversas, existem planos paralelos P_1 e P_2 que contêm as retas l_1 e l_2, respectivamente. Veja a Figura 7. Seja d a distância entre os planos P_1 e P_2. A distância entre l_1 e l_2 também é d. Um vetor normal aos dois planos será

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})$$

Seja $\mathbf{U}$ um vetor normal na direção de $\mathbf{N}$. Então,

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})}{\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})\|} \tag{6}$$

Agora consideremos dois pontos, um em cada plano (por exemplo, B e C). Então, a projeção escalar de $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})$ sobre $\mathbf{N}$ será $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}$ e

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}| \tag{7}$$

Agora faremos os cálculos

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle -2-1, 3-2, -4-7\rangle \qquad \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \langle 5-2, 7+1, -3-4\rangle$$
$$= \langle -3, 1, -11\rangle \qquad\qquad = \langle 3, 8, -7\rangle$$

Assim,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -11 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= 27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Logo, de (6),

$$\mathbf{U} = \frac{27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\sqrt{27^2(3^2 + 2^2 + 1^2)}}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \tag{8}$$

Além disso,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = \langle -2-2, 3+1, -4-4\rangle$$
$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = \langle -4, 4, -8\rangle$$

Substituindo essa equação e (8) em (7), obtemos

$$d = \left|\langle -4, 4, -8\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\langle 3, -2, -1\rangle\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}|-12 - 8 + 8|$$
$$= \frac{12}{\sqrt{14}}$$
$$\approx 3{,}21$$

EXERCÍCIOS 15.5

Nos Exercícios de 1 a 12, $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$, $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$, $\mathbf{E} = \langle 4, 0 -7\rangle$ *e* $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1\rangle$.

1. Ache $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.
2. Ache $\mathbf{D}\times\mathbf{E}$.
3. Ache $(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}\times\mathbf{F})$.
4. Ache $(\mathbf{C}\times\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D}\times\mathbf{F})$.
5. Verifique o Teorema 15.5.3 para os vetores **A** e **B**.
6. Verifique o Teorema 15.5.4 para os vetores **A**, **B** e **C**.
7. Verifique o Teorema 15.5.5(i) para os vetores **A** e **B** e $c = 3$.
8. Verifique o Teorema 15.5.5(ii) para os vetores **A** e **B** e $c = 3$.
9. Verifique o Teorema 15.5.6 para os vetores **A**, **B** e **C**.
10. Verifique o Teorema 15.5.7 para os vetores **A**, **B** e **C**.
11. Ache $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\times(\mathbf{C} - \mathbf{D})$ e $(\mathbf{D} - \mathbf{C})\times(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e verifique que são iguais.
12. Ache $\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|\ \|\mathbf{C}\times\mathbf{D}\|$.
13. Prove o Teorema 15.5.2(ii) e (iii).
14. Dados os dois vetores $\mathbf{A} = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ e sendo θ o ângulo entre **A** e **B**, ache sen θ de duas maneiras: (a) usando o produto vetorial (Teorema 15.5.8); (b) usando o produto escalar e uma identidade trigonométrica.
15. Siga as instruções do Exercício 14 para os dois vetores unitários
$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

16. Mostre que o quadrilátero com vértices em $(-2, 1, -1)$, $(1, 1, 3)$, $(-5, 4, 0)$ e $(8, 4, -4)$ é um paralelogramo e ache sua área.
17. Mostre que o quadrilátero com vértices em $(1, -2, 3)$, $(4, 3, -1)$, $(2, 2, 1)$ e $(5, 7, -3)$ é um paralelogramo e ache sua área.
18. Ache a área do paralelogramo $PQRS$ se $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
19. Ache a área do triângulo tendo vértices em $(0, 2, 2)$, $(8, 8, -2)$ e $(9, 12, 6)$.
20. Ache a área do triângulo tendo vértices em $(4, 5, 6)$, $(4, 4, 5)$ e $(3, 5, 5)$.

Nos Exercícios 21 e 22, use o produto vetorial para encontrar uma equação do plano contendo os três pontos dados.

21. $(-2, 2, 2)$, $(-8, 1, 6)$, $(3, 4, -1)$
22. $(2, 3, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 3, 4)$
23. Faça o Exercício 18 nos Exercícios 15.3, usando produto vetorial.
24. Ache um vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que contém $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ se $\overrightarrow{PQ}$ for uma representação do vetor $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\overrightarrow{PR}$ for uma representação do vetor $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Nos Exercícios de 25 a 27, ache um vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que passa pelos pontos P, Q e R, dados

25. $P(5, 2, -1)$, $Q(2, 4, -2)$, $R(11, 1, 4)$
26. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, -2, -1)$, $R(-5, 0, 2)$
27. $P(1, 4, 2)$, $Q(3, 2, 4)$, $R(4, 3, 1)$
28. Ache o volume do paralelepípedo com arestas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ se os pontos P, Q, R e S forem, respectivamente, $(1, 3, 4)$, $(3, 5, 3)$, $(2, 1, 6)$ e $(2, 2, 5)$.
29. Ache o volume do paralelepípedo $PQRS$ se os vetores $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS})$ forem, respectivamente, $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
30. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem dois vetores quaisquer em V_3, prove que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Nos Exercícios 31 e 32, ache a distância entre as duas retas reversas.

31. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ e $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$
32. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{-3}$ e $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$
33. Sejam P, Q e R três pontos não-alinhados em R^3 e sejam $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ as representações posicionais dos vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente. Prove que as representações do vetor $\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$ são perpendiculares ao plano contendo os pontos P, Q e R.
34. Ache uma equação do plano contendo os pontos finais das representações dos vetores $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
35. Prove o Teorema 15.5.4.
36. Prove o Teorema 15.5.5.
37. Prove o Teorema 15.5.6.
38. Prove o Teorema 15.5.7.
39. Seja $\overrightarrow{OP}$ a representação posicional do vetor $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{OQ}$ a representação posicional do vetor $\mathbf{B}$ e $\overrightarrow{OR}$ a representação posicional do vetor $\mathbf{C}$. Prove que a área do triângulo PQR é $\frac{1}{2}\|(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A})\|$.

15.6 CILINDROS E SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Conforme mencionado previamente, o gráfico de uma equação em três variáveis é uma **superfície**. Uma superfície será representada por uma equação se as coordenadas de cada ponto na superfície satisfizerem a equação e se todo ponto cujas coordenadas satisfazem a equação estiver na superfície. Já discutimos dois tipos de superfície, um plano e uma esfera. Outro tipo de superfície, que é razoavelmente simples, é um cilindro. Você já deve estar familiarizado com cilindros circulares retos, de seus estudos anteriores. Vamos considerar agora uma superfície cilíndrica mais genérica.

15.6.1 DEFINIÇÃO

Um **cilindro** é uma superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana dada, de tal forma que ela se mantenha paralela a uma reta fixa não pertencente ao plano da curva dada. A reta móvel é chamada de **geratriz** do cilindro e a curva plana dada é denominada **diretriz** do cilindro. Qualquer posição de uma geratriz é chamada de **determinante** do cilindro.

Essa discussão está restrita a cilindros com uma diretriz, num plano coordenado e determinantes perpendiculares a esse plano. Se as determinantes de um cilindro forem perpendiculares ao plano da diretriz, dizemos que elas são perpendiculares ao plano.

O cilindro circular reto é aquele para o qual a diretriz é uma circunferência em um plano perpendicular ao cilindro.

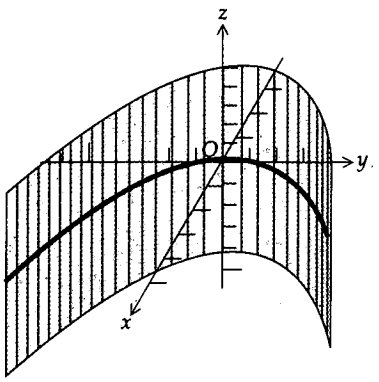


FIGURA 1

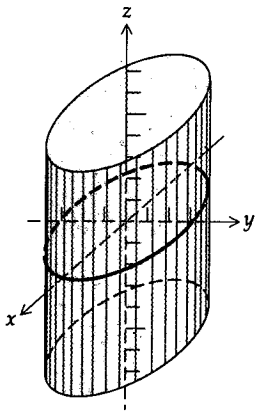


FIGURA 2

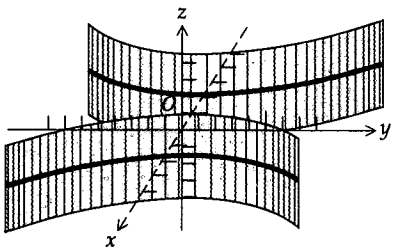


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 1 há um cilindro cuja diretriz é a parábola $y^2 = 8x$, no plano xy e cujas determinantes são paralelas ao eixo z. O cilindro é chamado de **cilindro parabólico**. Um **cilindro elíptico** está na Figura 2; sua diretriz é a elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, no plano xy e suas determinantes são paralelas ao eixo z. A figura 3 mostra um **cilindro hiperbólico**, tendo como diretriz a hipérbole $25x^2 - 4y^2 = 100$, no plano xy e determinantes paralelas ao eixo z. ◀

Considere o problema de encontrar uma equação de um cilindro tendo diretriz em um plano coordenado e determinantes paralelas ao eixo coordenado não pertencente ao plano da diretriz. Especificamente, considere a diretriz no plano xy e as determinantes paralelas ao eixo z. Consulte a Figura 4. Suponha que uma equação da diretriz no plano xy seja $y = f(x)$. Se o ponto $(x_0, y_0, 0)$ no plano xy satisfizer essa equação, então todo ponto (x_0, y_0, z) do espaço tridimensional, onde z é um número real qualquer, irá satisfazer a mesma equação, pois z não aparece nela. Os pontos com representações (x_0, y_0, z) estão todos na reta paralela ao eixo z, passando pelo ponto $(x_0, y_0, 0)$. Essa reta é uma determinante do cilindro. Logo, todo ponto cujas coordenadas x e y satisfazem a equação $y = f(x)$ está no cilindro. Inversamente, se o ponto $P(x, y, z)$ estiver no cilindro (veja a Figura 5), então o ponto $(x, y, 0)$ estará na diretriz do cilindro, no plano xy e assim as coordenadas x e y de P satisfazem a equação $y = f(x)$. Logo, se $y = f(x)$ for considerada como equação de um gráfico no espaço tridimensional, o gráfico será um cilindro com determinantes paralelas ao eixo z e cuja diretriz é a curva $y = f(x)$ no plano $z = 0$. Uma discussão similar ocorre quando a diretriz estiver nos outros planos coordenados. Os resultados estão resumidos no teorema a seguir.

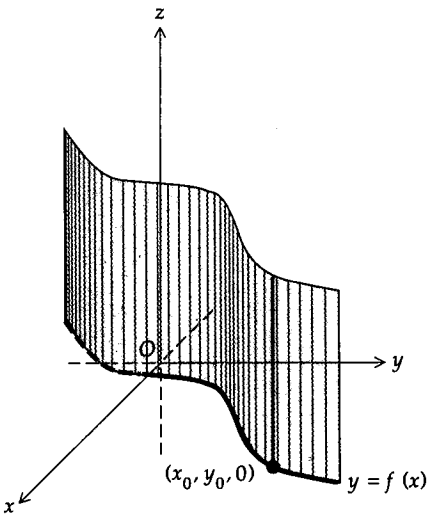


FIGURA 4

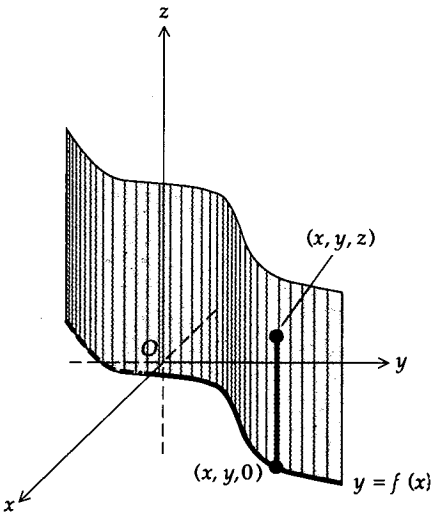


FIGURA 5

15.6.2 TEOREMA No espaço tridimensional, o gráfico de uma equação em duas das três variáveis x, y e z é um cilindro cujas determinantes são paralelas ao eixo associado com a variável que está ausente e cuja diretriz é uma curva no plano associado com as variáveis que aparecem na equação.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Segue, do Teorema 15.6.2, que uma equação do cilindro parabólico da Figura 1 é $y^2 = 8x$, considerada como uma equação em R^3. Analogamente, as equações do cilindro elíptico da Figura 2 e do cilindro hiperbólico da Figura 3 são, respectivamente,

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \text{e} \quad 25x^2 - 4y^2 = 100$$

ambas consideradas como equações em R^3. ◀

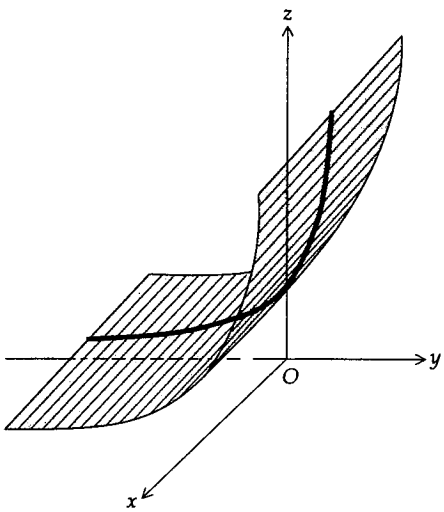


FIGURA 6

Uma **secção transversal** de uma superfície em um plano é o conjunto de todos os pontos da superfície que estejam no plano dado. Se um plano for paralelo ao plano da diretriz de um cilindro, a secção transversal do cilindro será igual à diretriz. Por exemplo, a secção transversal do cilindro elíptico da Figura 2 em qualquer plano paralelo ao plano xy é uma elipse.

EXEMPLO 1 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações: (a) $y = \ln z$; (b) $z^2 = x^3$.

Solução

(a) O gráfico é um cilindro cuja diretriz, estando no plano yz, é a curva $y = \ln z$ e cujas determinantes são paralelas ao eixo x. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

(b) O gráfico é um cilindro cuja diretriz está no plano xz e cujas determinantes são paralelas ao eixo y. Uma equação da diretriz é $z^2 = x^3$, no plano xz. Um esboço do gráfico está na Figura 7.

15.6.3 DEFINIÇÃO

Se uma curva plana girar em torno de uma reta fixa situada no plano da curva, a superfície gerada será chamada de **superfície de revolução**. A reta fixa será denominada **eixo** da superfície de revolução e a curva plana será a **curva geratriz**.

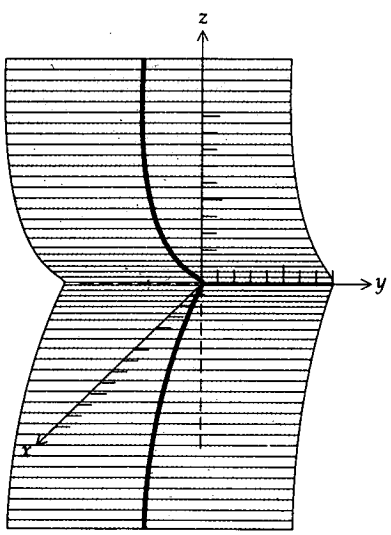


FIGURA 7

A Figura 8 mostra uma superfície de revolução cuja curva geratriz é a curva C no plano yz e cujo eixo é z. Uma esfera é exemplo de uma superfície de revolução, pois pode ser gerada com a rotação de uma semicircunferência em torno de um diâmetro.

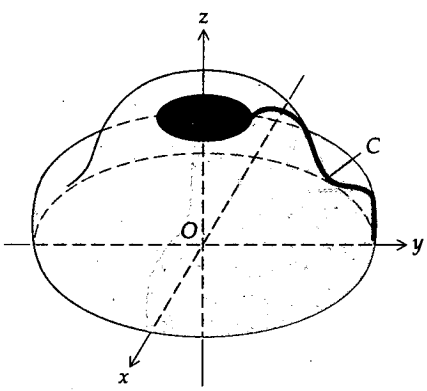


FIGURA 8

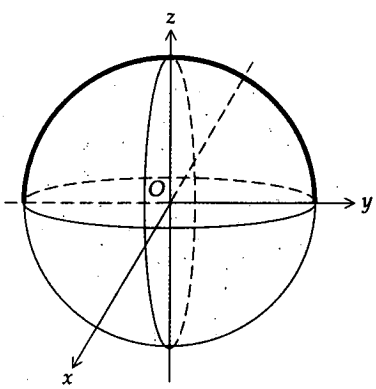


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 9 mostra uma esfera que pode ser gerada com a rotação da semicircunferência $y^2 + z^2 = r^2$, $z \geqslant 0$, em torno do eixo y.

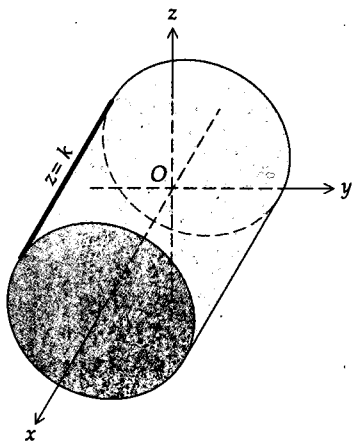


FIGURA 10

Outro exemplo de superfície de revolução é o cilindro circular reto para o qual a curva geradora e o eixo são retas paralelas. Se a curva geradora for a reta $z = k$ no plano xz e o eixo for o eixo x, obtemos o cilindro circular reto da Figura 10. ◀

Vamos achar uma equação da superfície gerada pela revolução da curva no plano yz, em torno do eixo y tendo a equação bidimensional

$$z = f(y) \tag{1}$$

Consulte a Figura 11. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície de revolução. Vamos passar por P um plano perpendicular ao eixo y e denotar o ponto de intersecção desse plano com o eixo y por $Q(0, y, 0)$. Seja $P_0(0, y, z_0)$ o ponto de intersecção do plano com a curva geradora. Como a secção transversal da superfície com o plano que passa por P é uma circunferência, P está na superfície se e somente se

$$|\overline{QP}|^2 = |\overline{QP_0}|^2$$

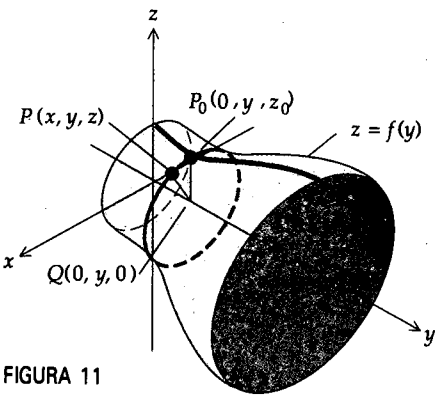


FIGURA 11

Como $|\overline{QP}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ e $|\overline{QP_0}| = z_0$, obtemos dessa equação

$$x^2 + z^2 = z_0^2 \tag{2}$$

O ponto P_0 está na curva geradora; assim suas coordenadas devem satisfazer (1). Logo,

$$z_0 = f(y)$$

Dessa equação e de (2), o ponto P está na superfície de revolução se e somente se

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \tag{3}$$

Essa é a equação desejada para a superfície de revolução. Como (3) é equivalente a

$$\pm\sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$$

podemos obter (3) substituindo z em (1) por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.

Da mesma forma, podemos mostrar que se a curva no plano yz com equação bidimensional

$$y = g(z) \tag{4}$$

for girada em torno do eixo z, uma equação da superfície de revolução gerada será obtida ao substituirmos y em (4) por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Observações análogas são feitas quando uma curva em qualquer plano coordenado for girada em torno de um dos eixos coordenados contido naquele plano. Resumindo, os gráficos das seguintes equações são superfícies de revolução em torno do eixo indicado: $x^2 + y^2 = [F(z)]^2$, eixo z; $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$, eixo y; $y^2 + z^2 = [F(x)]^2$, eixo x. Em cada caso, as secções transversais das superfícies em planos perpendiculares aos eixos são circunferências com centros no eixo.

EXEMPLO 2 Ache uma equação da superfície de revolução gerada ao girarmos a parábola $y^2 = 4x$ no plano xy, em torno do eixo x. Faça um esboço do gráfico da superfície.

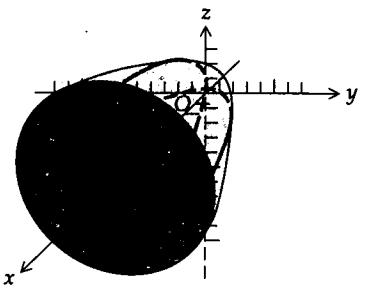


FIGURA 12

Solução Na equação da parábola, substituímos y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, obtendo

$$y^2 + z^2 = 4x$$

Um esboço do gráfico está na Figura 12. A mesma superfície é gerada se a parábola $z^2 = 4x$, no plano xz, for girada em torno do eixo x.

A superfície obtida no Exemplo 2 é chamada de **parabolóide de revolução**. Se uma elipse for girada em torno de um de seus eixos, a superfície obtida será denominada **elipsóide de revolução**. Obtemos um **hiperbolóide de revolução** quando uma hipérbole for girada em torno de um eixo.

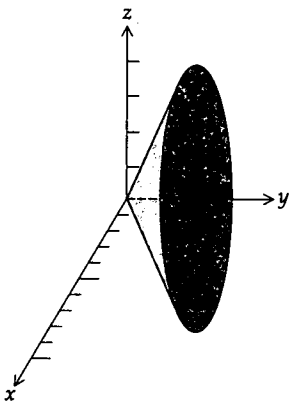


FIGURA 13

EXEMPLO 3 Faça um esboço da superfície $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$, se $y \geqslant 0$.

Solução A equação dada é da forma $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$; assim, seu gráfico é uma superfície de revolução tendo y como eixo. Resolvendo em y a equação dada, obtemos

$$2y = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

Logo, a curva geradora pode ser a reta $2y = x$ no plano xy, ou a reta $2y = z$ no plano yz. Traçando esboços das duas curvas geradoras possíveis e usando o fato de que as secções transversais da superfície em planos perpendiculares ao eixo y são circunferências com centro no eixo y, obtemos a superfície mostrada na Figura 13 (observe que como $y \geqslant 0$, há somente uma parte do cone).

A superfície obtida no Exemplo 3 é chamada de **cone circular reto**.

EXERCÍCIOS 15.6

Nos Exercícios de 1 a 4, faça um esboço da secção transversal do cilindro dado no plano indicado.

1. $4x^2 + y^2 = 16$; plano xy
2. $4z^2 - y^2 = 4$; plano yz
3. $z = e^x$; plano xz
4. $x = |y|$; plano xy

Nos Exercícios de 5 a 12, faça um esboço do cilindro, tendo as equações dadas.

5. $4x^2 + 9y^2 = 36$
6. $z = \text{sen } y$
7. $y = |z|$
8. $x^2 - z^2 = 4$
9. $z = 2x^2$
10. $z^2 = 4y^2$
11. $y = \cosh x$
12. $x^2 = y^3$

Nos Exercícios de 13 a 20, ache uma equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana dada em torno do eixo indicado. Faça um esboço da superfície.

13. $x^2 = 4y$ no plano xy, em torno do eixo y.
14. $x^2 + 4z^2 = 16$ no plano xz, em torno do eixo z.
15. $x^2 + 4z^2 = 16$ no plano xz, em torno do eixo x.
16. $x^2 = 4y$ no plano xy, em torno do eixo x.
17. $y = 3z$ no plano yz, em torno do eixo y.
18. $9y^2 - 4z^2 = 144$ no plano yz, em torno do eixo z.
19. $y = \text{sen } x$ no plano xy, em torno do eixo x.
20. $y^2 = z^3$ no plano yz, em torno do eixo z.

Nos Exercícios de 21 a 28, ache a curva geradora e o eixo da superfície de revolução dada. Faça um esboço da superfície.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
22. $x^2 + z^2 = y$
23. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
24. $y^2 + z^2 = e^{2x}$
25. $x^2 + z^2 = |y|$
26. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
27. $9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$
28. $4x^2 + 4y^2 - z = 9$
29. A tratriz

$$x = t - a \text{ tgh } \frac{t}{a} \qquad y = a \text{ sech } \frac{t}{a}$$

de $x = -a$ a $x = 2a$ é girada em torno do eixo x. Faça um esboço da superfície de revolução.

15.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Aprendemos no Capítulo 10 que o gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis x e y,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma secção cônica. O gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e z,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

é chamado de **superfície quádrica**. O tipo mais simples de superfícies quádricas constitui os cilindros parabólico, elíptico e hiperbólico que foram discutidos na secção anterior. Há mais seis tipos de superfícies quádricas que iremos considerar agora. Escolhemos os eixos coordenados de modo que as equações estejam em sua forma mais simples. Na discussão de cada uma dessas superfícies iremos nos referir a secções transversais das superfícies em planos paralelos aos planos coordenados. Essas secções transversais ajudam a visualizar a superfície.

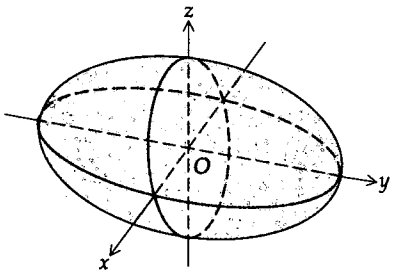


FIGURA 1

O elipsóide

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (2)$$

onde a, b e c são positivos (veja a Figura 1).

Se em (2) z for substituído por zero, obtemos a secção transversal do elipsóide no plano xy, que é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para obter a secção transversal da superfície com os planos $z = k$, substituímos z por k na equação do elipsóide, obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Se $|k| < c$, a secção transversal é uma elipse e os comprimentos dos semi-eixos decrescem para zero quando $|k|$ cresce para o valor c. Se $|k| = c$, a intersecção do plano $z = k$ com o elipsóide é um único ponto $(0, 0, k)$. Se $|k| > c$, não há intersecção. A discussão é análoga se considerarmos secções transversais formadas por planos paralelos a cada um dos outros planos coordenados.

Os números a, b e c são os comprimentos dos semi-eixos do elipsóide. Se dois números quaisquer desses três forem iguais, teremos um elipsóide de revolução que também será chamado de **esferóide**. Um esferóide para o qual o terceiro número seja maior do que os outros dois iguais é chamado de **prolato** (alongado nos pólos). O esferóide prolato tem o formato de uma bola de futebol americano. Um esferóide **oblato** será obtido se o terceiro número for menor do que os outros dois, que são iguais. Se todos os três números a, b e c na equação de um elipsóide forem iguais, o elipsóide será uma **esfera**.

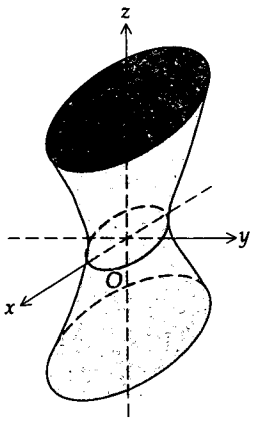


FIGURA 2

O hiperbolóide elíptico de uma folha

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (3)$$

onde a, b, e c são positivos (veja a Figura 2).

As secções transversais em planos $z = k$ são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Quando $k = 0$, os comprimentos dos semi-eixos da elipse são os menores e aumentam à medida que $|k|$ aumenta. As secções transversais nos planos $x = k$ são as hipérboles

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

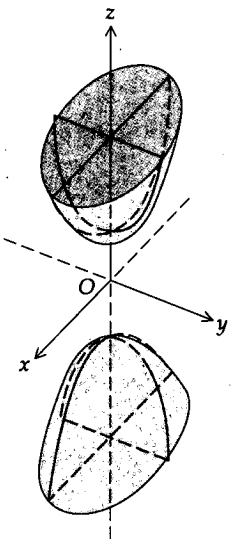


FIGURA 3

Se $|k| < a$, o eixo transverso da hipérbole é paralelo ao eixo y, e se $|k| > a$, o eixo transverso é paralelo ao eixo z. Se $k = a$, a hipérbole degenera em duas retas:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

De forma análoga, as secções transversais nos planos $y = k$ também são hipérboles. O eixo desse hiperbolóide é z.

Se $a = b$, a superfície é um hiperbolóide de revolução para o qual o eixo é a reta contendo os eixos conjugados.

O hiperbolóide elíptico de duas folhas

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{4}$$

onde a, b e c são positivos (veja a Figura 3).

Substituindo z por k em (4), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

Se $|k| < c$, não há intersecção do plano $z = k$ com a superfície; logo, entre os planos $z = -c$ e $z = c$ não há pontos da superfície. Se $|k| = c$, a intersecção do plano $z = k$ com a superfície é um único ponto $(0, 0, k)$. Quando $|k| > c$, a secção transversal da superfície no plano $z = k$ é uma elipse, e os comprimentos dos semi-eixo aumentam quando $|k|$ aumenta.

As secções transversais da superfície nos planos $x = k$ são as hipérboles

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$

cujos eixos transversos são paralelos ao eixo z. De forma análoga, as secções transversais nos planos $y = k$ são as hipérboles

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

para as quais os eixos transversos também são paralelos ao eixo z.

Se $a = b$, a superfície é um hiperbolóide de revolução no qual o eixo é a reta contendo o eixo transverso da hipérbole.

Cada uma das três superfícies quádricas anteriores é simétrica a cada um dos planos coordenados e simétrica em relação à origem. Seus gráficos são chama-

dos de **quádricas centrais** e seu centro está na origem. O gráfico de qualquer equação da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a, b e c são positivos, é uma quádrica central.

EXEMPLO 1 Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

e dê o nome da superfície.

Solução Dividindo ambos os termos da equação por 100, obtemos

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

que é da mesma forma que (3), se trocarmos y por z. Logo, a superfície é um hiperbolóide elíptico de uma folha cujo eixo é y. As secções transversais nos planos $y = k$ são as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

As secções transversais nos planos $x = k$ são as hipérboles

$$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{25}$$

e as secções transversais nos planos $z = k$ são as hipérboles

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{4}$$

Um esboço da superfície está na Figura 4.

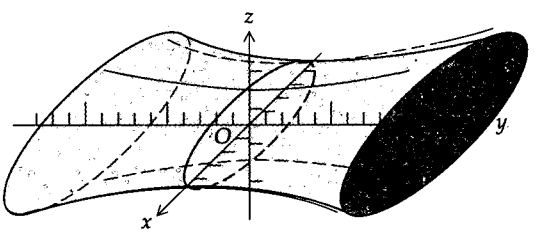


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

e dê o nome da superfície.

Solução Dividindo ambos os membros da equação por 100 podemos escrever a equação dada como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

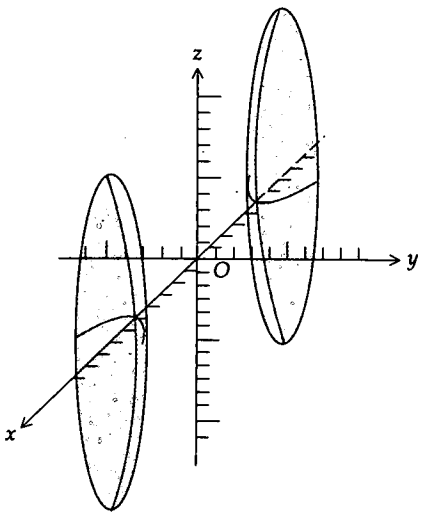


FIGURA 5

que é da mesma forma que (4) com x e z trocados um pelo outro; assim, a superfície é um hiperbolóide elíptico de duas folhas cujo eixo é x. As secções transversais nos planos $x = k$, onde $|k| > 5$, são as elipses

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{100} = \frac{k^2}{25} - 1$$

Os planos $x = k$, onde $|k| < 5$, não interceptam a superfície. As secções transversais nos planos $y = k$ são as hipérboles

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1 + \frac{k^2}{4}$$

e as secções transversais nos planos $z = k$ são as hipérboles

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

O esboço pedido está na Figura 5.

As duas quádricas a seguir são chamadas de quádricas não-centrais.

O parabolóide elíptico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c}} \tag{5}$$

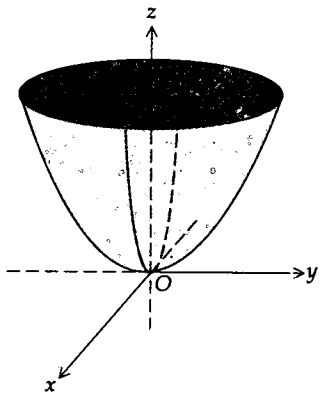


FIGURA 6

onde a e b são positivos e $c \neq 0$. A Figura 6 mostra a superfície, se $c > 0$.

Substituindo k por z em (5), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$$

Quando $k = 0$, essa equação torna-se $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$, que representa um único ponto, a origem. Se $k \neq 0$ e k e c tiverem o mesmo sinal, a equação será de uma elipse. Assim, concluímos que as secções transversais da superfície nos planos $z = k$, onde k e c têm o mesmo sinal, são elipses e os comprimentos dos semi-eixos aumentam quando $|k|$ cresce. Se k e c tiverem sinais opostos, os planos $z = k$ não interceptam a superfície. As secções transversais da superfície com os planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. Quando $c > 0$, as parábolas abrem-se para cima, conforme mostra a Figura 6; quando $c < 0$, as parábolas abrem-se para baixo.

Se $a = b$, a superfície é um parabolóide de revolução.

O parabolóide hiperbólico

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}} \tag{6}$$

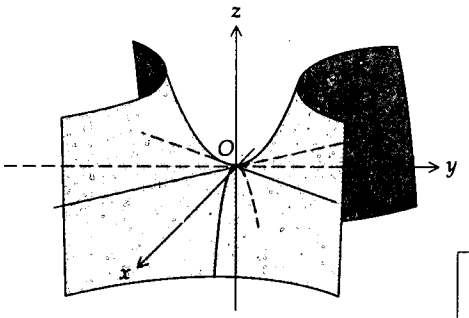


FIGURA 7

onde a e b são positivos e $c \neq 0$. A superfície está na Figura 7 para $c > 0$.

As secções transversais da superfície nos planos $z = k$, onde $k \neq 0$, são hipérboles com seus eixos transversos paralelos ao eixo y se k e c tiverem o mesmo sinal, e paralelos ao eixo x se k e c tiverem sinais opostos. A secção transversal da superfície no plano $z = 0$ consiste em duas retas passando pela origem. As secções transversais nos planos $x = k$ são parábolas abrindo-se para cima se $c > 0$, e para baixo se $c < 0$. As secções transversais nos planos $y = k$ são parábolas abrindo-se para baixo se $c > 0$, e para cima se $c < 0$.

EXEMPLO 3 Faça um esboço do gráfico da equação

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

e dê o nome da superfície.

Solução As equações dadas podem ser escritas como

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

que é da mesma forma que (5), com x e z trocados um pelo outro. Logo, o gráfico da equação é um parabolóide elíptico cujo eixo é x. As secções transversais nos planos $x = k$, onde $k > 0$, são as elipses

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

Os planos $x = k$, onde $k < 0$, não interceptam a superfície. As secções transversais nos planos $y = k$ são as parábolas $12z^2 = 16x - 3k^2$, e as secções transversais nos planos $z = k$ são as parábolas $3y^2 = 16x - 12k^2$. A Figura 8 mostra um esboço do parabolóide elíptico.

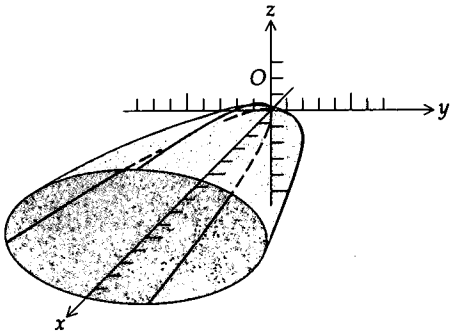


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Faça um esboço do gráfico da equação

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

e dê o nome da superfície.

Solução Se a equação dada for escrita como

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

ela será da mesma forma que (6), com x e z trocados entre si. A superfície será, então, um parabolóide hiperbólico. As secções transversais nos planos $x = k$, onde $k \neq 0$, são as hipérboles

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

A secção transversal no plano yz consiste em duas retas $y = 2z$ e $y = -2z$. Nos planos $z = k$, as secções transversais são as parábolas $3y^2 = 16x + 12k^2$; nos planos $y = k$, as secções transversais são as parábolas $12z^2 = 3k^2 - 16x$. Um esboço do parabolóide hiperbólico está na Figura 9.

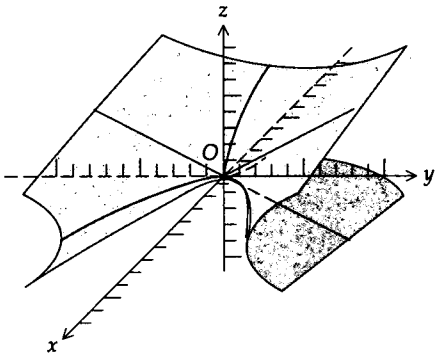


FIGURA 9

O cone elíptico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0} \tag{7}$$

onde a, b e c são positivos (veja a Figura 10).

A intersecção do plano $z = 0$ com a superfície é um único ponto, a origem. As secções transversais da superfície nos planos $z = k$, onde $k \neq 0$, são elipses, e os comprimentos dos semi-eixos aumentam quando k cresce. As secções trans-

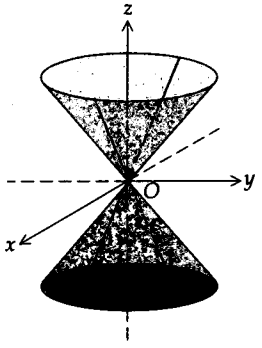


FIGURA 10

versais nos planos $x = 0$ e $y = 0$ são pares de retas concorrentes. Nos planos $x = k$ e $y = k$, onde $k \neq 0$, as secções transversais são hipérboles.

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

e dê o nome da superfície.

Solução A equação dada pode ser escrita como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

que é da mesma forma que (7), com y e z trocados entre si. Logo, a superfície é um cone elíptico, tendo y como seu eixo. A superfície intercepta o plano $y = 0$ apenas na origem. A intersecção da superfície com o plano $x = 0$ é o par de retas concorrentes $y = \pm 5z$, e a intersecção com o plano $z = 0$ é o par de retas concorrentes $y = \pm 2x$. As secções transversais nos planos $y = k$, onde $k \neq 0$, são as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{100}$$

Nos planos $x = k$ e $z = k$, onde $k \neq 0$, as secções transversais são, respectivamente, as hipérboles

$$\frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{25} \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = \frac{k^2}{4}$$

A Figura 11 mostra um esboço da superfície.

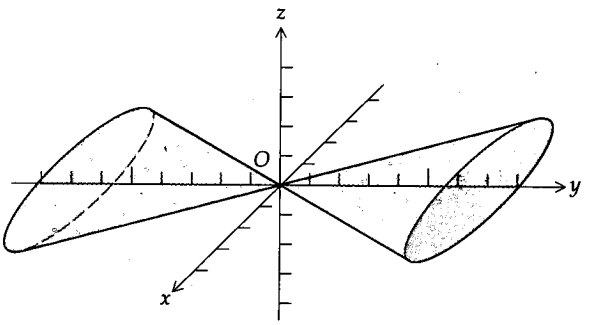


FIGURA 11

A equação (1) é a equação geral do segundo grau em x, y e z. Pode ser mostrado que por translação e rotação dos três eixos coordenados (esse estudo está fora do contexto desse livro), tal equação pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \tag{8}$$

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0 \tag{9}$$

Os gráficos das equações do segundo grau serão de um dos seis tipos de quádricas citados ou degeneram em cilindro, plano, reta, ponto ou conjunto vazio.

As curvas não-degeneradas, associadas a equações da forma (8), são as quádricas centrais e o cone elíptico, enquanto que as equações da forma (9) são quádricas não-centrais. A seguir são dados exemplos de alguns casos degenerados:

$x^2 - y^2 = 0$; dois planos, $x - y = 0$ e $x + y = 0$
$z^2 = 0$; um plano, o plano xy
$x^2 + y^2 = 0$; uma reta, o eixo z
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$; um único ponto, a origem
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; o conjunto vazio

EXERCÍCIOS 15.7

Nos Exercícios de 1 a 6, dê o nome da superfície dada.

1. $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 36$
2. $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$
3. $5x^2 - 2z^2 - 3y = 0$
4. $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$
5. $4y^2 - 25x^2 = 100$
6. $3y^2 + 7z^2 = 6x$

Nos Exercícios de 7 a 18, faça um esboço do gráfico da equação dada e dê o nome da superfície.

7. $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
8. $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$
9. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$
10. $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$
11. $x^2 = y^2 - z^2$
12. $x^2 = y^2 + z^2$
13. $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$
14. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{36} = 4$
15. $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$
16. $x^2 = 2y + 4z$
17. $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 16$
18. $9y^2 - 4z^2 + 18x = 0$
19. Ache os valores de k para os quais a intersecção do plano $x + ky = 1$ com o hiperbolóide elíptico de duas folhas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ é (a) uma elipse e (b) uma hipérbole.
20. Ache o vértice e o foco da parábola que é a intersecção do plano $y = 2$ com o parabolóide hiperbólico $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = \frac{z}{9}$.
21. Ache o vértice e o foco da parábola que é a intersecção do plano $x = 1$ com o parabolóide hiperbólico $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \frac{y}{3}$.
22. Ache a área da secção plana formada pela intersecção do plano $y = 3$ com o sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$.
23. Mostre que a intersecção da superfície $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ com o plano $x + z = 9$ é uma circunferência.
24. Mostre que a intersecção do parabolóide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ com o plano $z = bx + ay$ consiste em duas retas concorrentes.

Nos Exercícios de 25 a 27, use o método das secções planas paralelas (Secção 6.1) para achar o volume do sólido dado. A medida da área da região limitada pela elipse com semi-eixos a e b é πab.

25. O sólido limitado pelo elipsóide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.
26. O sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
27. O sólido limitado pelo plano $z = h$, onde $h > 0$, e o parabolóide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, onde $c > 0$.

15.8 CURVAS EM R^3

Vamos considerar agora funções com valores vetoriais no espaço tridimensional.

15.8.1 DEFINIÇÃO

Sejam f_1, f_2 e f_3 três funções da variável real t e com valores reais. Então, para todo número t no domínio comum a f_1, f_2 e f_3, há um vetor **R** definido por

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

e **R** é chamada de **função com valores vetoriais.**

O gráfico de uma função com valores vetoriais no espaço tridimensional é obtido de forma análoga ao que foi feito para uma função com valores vetoriais no espaço bidimensional, na Secção 14.3 Quando t assume todos os valo-

Table 1

t	x	y	z
0	a	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	b	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
π	$-a$	0	π
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-b$	$\frac{3\pi}{2}$

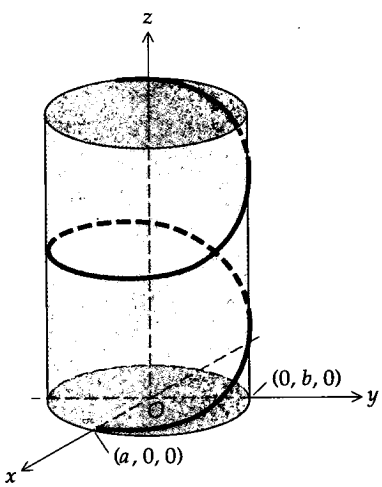


FIGURA 1

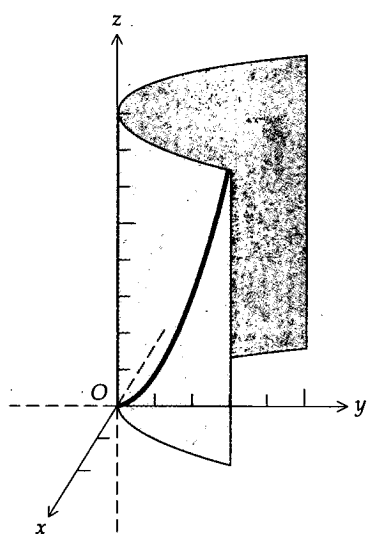


FIGURA 2

res no domínio de **R**, o ponto final da representação posicional do vetor $\mathbf{R}(t)$ traça uma curva C, e essa curva é chamada de gráfico de **R**. Um ponto na curva C tem a representação cartesiana (x, y, z), onde

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t) \tag{1}$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas** de C, enquanto que a Definição 15.8.1 é chamada de uma **equação vetorial** de C. Eliminando t das equações (1), obtemos duas equações em x, y e z que são chamadas de **equações cartesianas** de C. Cada uma delas é a equação de uma superfície e a curva C é a intersecção de duas superfícies. As equações de qualquer par de superfícies transversais em C podem ser tomadas como as equações cartesianas de C.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos traçar um esboço da curva com a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

As equações paramétricas da curva dada são

$$x = a \cos t \qquad y = b \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Para eliminar t das duas primeiras equações, escrevemos

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2 t$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo, a curva está inteiramente no cilindro elíptico cuja diretriz é uma elipse no plano xy e cujas determinantes são paralelas ao eixo z. A Tabela 1 dá os valores de x, y e z para certos valores de t. Um esboço da curva está na Figura 1. ◀

A curva da Ilustração 1 é chamada de **hélice**. Se $a = b$, a hélice é uma **hélice circular** e está no cilindro circular reto $x^2 + y^2 = a^2$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A curva tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

é chamada de **cúbica retorcida**. As equações paramétricas da cúbica retorcida são

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

Eliminando t das duas primeiras equações, obtemos $y = x^2$ que é um cilindro cuja diretriz no plano xy é uma parábola. A cúbica retorcida está sobre esse cilindro. A Figura 2 mostra um esboço do cilindro e uma parte da cúbica retorcida de $t = 0$ a $t = 2$. ◀

A Definição 14.4.1, relativa ao limite de uma função com valores vetoriais em duas dimensões, pode ser estendida a funções com valores vetoriais em três dimensões, como segue. Se

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

então

$$\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \to t_1} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to t_1} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \to t_1} f_3(t)\mathbf{k}$$

se $\lim_{t \to t_1} f_1(t)$, $\lim_{t \to t_1} f_2(t)$ e $\lim_{t \to t_1} f_3(t)$ existirem.

As definições de continuidade (14.4.2) e da derivada (14.4.3) de funções com valores vetoriais em V_2 são as mesmas para aquelas em V_3. A prova do teorema a seguir é análoga à prova do Teorema 14.4.4, sendo deixada como exercício (veja o Exercício 13).

15.8.2 TEOREMA Se $\mathbf{R}$ for uma função com valores vetoriais, definida por

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

e se $\mathbf{R}'(t)$ existir, então

$$\mathbf{R}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}$$

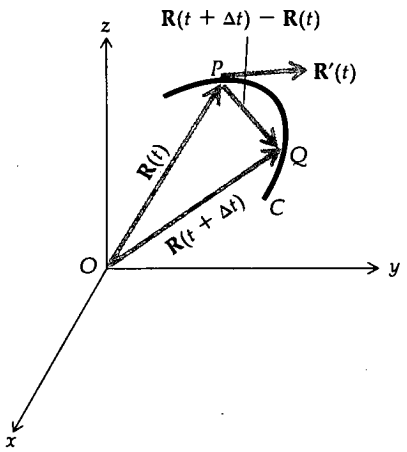


FIGURA 3

A interpretação geométrica da derivada de $\mathbf{R}$ é a mesma que aquela dada para a derivada de uma função com valores vetoriais em R^2. A Figura 3 mostra parte da curva C, que é o gráfico de $\mathbf{R}$. Na figura, $\overrightarrow{OP}$ é a representação posicional de $\mathbf{R}(t)$, $\overrightarrow{OQ}$ é a representação posicional de $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ e assim $\overrightarrow{PQ}$ é uma representação do vetor $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$. Quando Δt tende a zero, o vetor $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ tem uma representação aproximando-se de um segmento de reta orientado, tangente à curva C em P.

A definição de **vetor tangente unitário** é análoga à Definição 14.6.1 para vetores no plano. Assim, se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário ao gráfico de $\mathbf{R}$, então

$$\boxed{\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|}} \tag{2}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos encontrar o vetor tangente unitário para a cúbica retorcida da Ilustração 2.

Como $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$,

$$D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \qquad \|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

De (2), então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})$$

Logo, em particular,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

A Figura 4 mostra a representação de $\mathbf{T}(1)$ no ponto (1,1,1). ◀

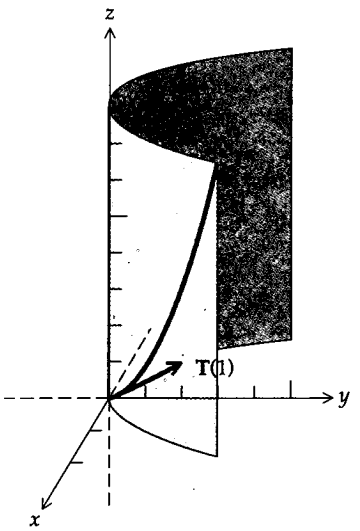


FIGURA 4

Os Teoremas 14.4.6, 14.4.7 e 14.4.8, relativos às derivadas de somas e produtos de duas funções com valores vetoriais bidimensionais, também valem para vetores em três dimensões. O seguinte teorema referente à derivada do produto vetorial de duas funções com valores vetoriais é similar à fórmula correspondente para a derivada do produto de duas funções com valores reais; contu-

do, é importante manter a ordem correta das funções com valores vetoriais, pois o produto vetorial não é comutativo.

15.8.3 TEOREMA Se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{Q}$ forem funções com valores vetoriais, então

$$D_t[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t) + \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t)$$

para todos os valores de t para os quais $\mathbf{R}'(t)$ e $\mathbf{Q}'(t)$ existem.

A demonstração do Teorema 15.8.3 será deixada como exercício (veja o Exercício 14).

O comprimento de um arco de uma curva C no espaço tridimensional pode ser definido exatamente da mesma maneira como foi feito no caso de uma curva no plano (veja a Definição 14.5.1). Se C for a curva com equações paramétricas (1), f_1', f_2' e f_3' forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e nenhum par de valores de t resultar no mesmo ponto (x, y, z) em C, então podemos provar (como foi feito para o plano) um teorema similar ao Teorema 14.5.3, o qual estabelece que o comprimento de arco L, da curva C entre o ponto $(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$ e o ponto $(f_1(b), f_2(b), f_3(b))$ é determinado por

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}\, dt} \tag{3}$$

Se s for a medida do comprimento de arco de C entre um ponto fixo $(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$ e um ponto variável $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e s crescer com t crescente, então s será uma função de t, dada por

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f_1'(u)]^2 + [f_2'(u)]^2 + [f_3'(u)]^2}\, du$$

Conforme foi mostrado na Secção 14.5 para curvas planas

$$\frac{ds}{dt} = \|D_t\mathbf{R}(t)\|$$

e o comprimento de arco, L unidades, dado por (3), também pode ser determinado por

$$\boxed{L = \int_a^b \|D_t\mathbf{R}(t)\|\, dt} \tag{4}$$

EXEMPLO 1 Dada a hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

onde $a > 0$, encontre o comprimento de arco de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

Solução

$$D_t\mathbf{R}(t) = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Assim, de (4),

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Então, o comprimento de arco é $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$ unidades.

As definições do **vetor curvatura** $\mathbf{K}(t)$ e da **curvatura** $K(t)$ da curva C de R^3 num ponto P são as mesmas que foram dadas na Definição 14.7.1 para curvas planas. Logo, se $\mathbf{T}(t)$ for o vetor tangente unitário a C em P e s for a medida do comprimento de arco de um ponto escolhido arbitrariamente em C até P, onde s cresce com t crescente, então

$$\mathbf{K}(t) = D_s\mathbf{T}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{||D_t\mathbf{R}(t)||}} \tag{5}$$

e

$$K(t) = ||D_s\mathbf{T}(t)||$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K(t) = \left\|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{||D_t\mathbf{R}(t)||}\right\|}$$

Tomando o produto escalar de $\mathbf{K}(t)$ por $\mathbf{T}(t)$ e usando (5), obtemos

$$\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{||D_t\mathbf{R}(t)||}\cdot\mathbf{T}(t)$$

$$= \frac{1}{||D_t\mathbf{R}(t)||}D_t\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) \tag{6}$$

O Teorema 14.4.11 estabelece que se uma função com valores vetoriais no plano tem módulo constante, ela será ortogonal à sua derivada. Esse teorema, bem como sua demonstração, também valem para vetores em três dimensões. Logo, como $||\mathbf{T}(t)|| = 1$, podemos concluir de (6) que $\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0$. Assim sendo, o vetor curvatura e o vetor tangente unitário de uma curva em um ponto são ortogonais.

O **vetor normal unitário** é definido como sendo o vetor unitário com a mesma direção e sentido do vetor curvatura, desde que o vetor curvatura não seja nulo. Assim, se $\mathbf{N}(t)$ denotar o vetor normal unitário à curva C num ponto P e se $\mathbf{K}(t) \neq 0$, temos

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{K}(t)}{||\mathbf{K}(t)||}} \tag{7}$$

De (7) e da discussão anterior, segue que o vetor normal unitário e o vetor tangente unitário são ortogonais. Assim, o ângulo entre esses dois vetores tem uma medida de $\frac{1}{2}\pi$ rad e, do Teorema 15.5.8,

$$||\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)|| = ||\mathbf{T}(t)||\,||\mathbf{N}(t)||\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\pi$$
$$= 1$$

Logo, o produto vetorial de $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ é um vetor unitário. Pelo Teorema 15.5.10, $\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$ é ortogonal a ambos $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$; logo, o vetor $\mathbf{B}(t)$, definido por

$$\boxed{\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)} \tag{8}$$

é um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ e é chamado de **vetor binormal unitário** à curva C no ponto P.

Os três vetores unitários mutuamente ortogonais, $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ de uma curva C são chamados de **triedro móvel** de C (veja a Figura 5).

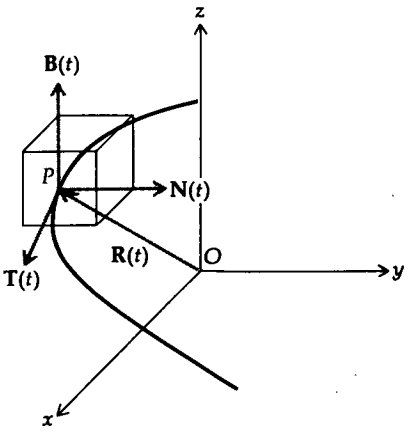


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Ache o triedro móvel e a curvatura em qualquer ponto da hélice circular do Exemplo 1.

Solução A equação vetorial da hélice circular é

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Assim, $D_t\mathbf{R}(t) = -a\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\|D_t\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{a^2+1}$. De (2),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Logo,

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\cos t\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,t\mathbf{j})$$

Aplicando (5), obtemos

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{a^2+1}(-a\cos t\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,t\mathbf{j})$$

Como a curvatura $K(t) = ||\mathbf{K}(t)||$, temos

$$K(t) = \frac{a}{a^2+1}$$

Assim, a curvatura da hélice circular é constante. De (7),

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j}$$

Aplicando (8), temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(\text{sen}\,t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$$

Um estudo geral de curvas e superfícies usando o Cálculo é dado num curso de Geometria Diferencial. O uso de Cálculo de Vetores enriquece esse assunto. A discussão anterior é apenas uma breve introdução.

Vamos considerar agora, resumidamente, o movimento de uma partícula ao longo de uma curva no espaço tridimensional. Se o parâmetro t na equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \tag{9}$$

medir o tempo, então a posição em t de uma partícula que se move ao longo da curva C, tendo equação vetorial (9), será o ponto $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. O **vetor velocidade, $\mathbf{V}(t)$**, e o **vetor aceleração, $\mathbf{A}(t)$**, são definidos como no plano. O vetor $\mathbf{R}(t)$ é chamado **vetor posição** e

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) \qquad \mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$$

A velocidade escalar de uma partícula em t é o módulo do vetor velocidade. Como $\|D_t\mathbf{R}(t)\| = ds/dt$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

EXEMPLO 3 Uma partícula está se movendo ao longo de uma curva com equações paramétricas

$$x = 3t \qquad y = t^2 \qquad z = \tfrac{2}{3}t^3$$

Ache os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula em $t = 1$. Faça um esboço de parte da curva em $t = 1$ e trace representações dos vetores velocidade e aceleração em $t = 1$.

Solução Uma equação vetorial da curva é dada por

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}t^3\mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t\mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t\mathbf{V}(t) \\ &= 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} & &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{A}(1) = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{17}$$

O esboço pedido está na Figura 6.

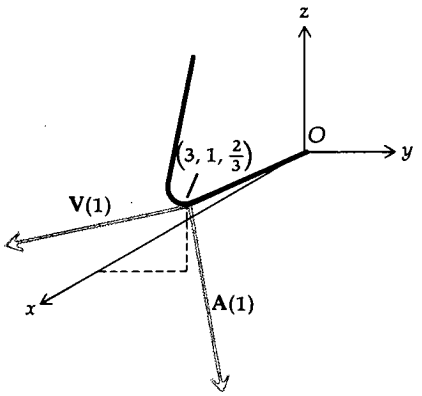


FIGURA 6

EXERCÍCIOS 15.8

Nos Exercícios de 1 a 5, ache o vetor tangente unitário para a curva tendo a equação vetorial dada.

1. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$
2. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$
3. $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$
5. $\mathbf{R}(t) = 2t \cos t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t \operatorname{sen} t\mathbf{k}$
6. Ache o vetor tangente unitário à curva tendo equação vetorial $\mathbf{R}(t) = 4 \cosh 2t\mathbf{i} + 4 \operatorname{senh} 2t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$ no ponto onde $t = 0$.

Nos Exercícios de 7 a 11, ache o comprimento de arco da curva de t_1 até t_2.

7. A curva do Exercício 1; $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.
8. A curva do Exercício 2; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
9. A curva do Exercício 3; $t_1 = 0$, $t_2 = 3$.
10. A curva do Exercício 4; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.
11. $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$; $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.
12. Prove que o vetor tangente unitário da hélice circular do Exemplo 1 faz um ângulo constante com o vetor unitário $\mathbf{k}$.
13. Prove o Teorema 15.8.2.
14. Prove o Teorema 15.8.3.
15. Escreva a equação vetorial da curva de intersecção das superfícies $y = e^x$ e $z = xy$.
16. Escreva a equação vetorial da curva de intersecção das superfícies $x = \ln(z^2 + 2)$ e $y = xz^3$.
17. Ache o co-seno do ângulo entre o vetor unitário $\mathbf{j}$ e o vetor tangente unitário à curva $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$ no ponto onde $t = \pi$.
18. Ache a curvatura em $t = 1$ da curva $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (4 + t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$.
19. Ache o triedro móvel e a curvatura no ponto onde $t = 1$ da cúbica retorcida da Ilustração 2.
20. Ache o triedro móvel e a curvatura em um ponto qualquer da curva $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Nos Exercícios 21 a 24, ache o triedro móvel e a curvatura da curva dada em $t = t_1$, se existirem.

21. A curva do Exercício 1; $t_1 = -1$.
22. A curva do Exercício 2; $t_1 = 0$.
23. A curva do Exercício 3; $t_1 = 0$.
24. A curva do Exercício 4; $t_1 = 1$.

Nos Exercícios de 25 a 28, uma partícula move-se ao longo de uma curva dada. Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em $t = t_1$. Faça um esboço da parte da curva em $t = t_1$ e trace os vetores velocidade e aceleração.

25. A hélice circular do Exemplo 1; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.
26. $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$; $t_1 = 2$.
27. $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$, $z = te^{2t}$; $t_1 = 1$.
28. $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)^{-1}$, $y = \ln(1 + t^2)$, $z = \operatorname{tg}^{-1} t$; $t_1 = 1$.

29. Prove que se $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ for a equação vetorial da curva C e $K(t)$ for a curvatura de C, então

$$K(t) = \frac{\|D_t\mathbf{R}(t) \times D_t^2\mathbf{R}(t)\|}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|^3}$$

30. Use a fórmula do Exercício 29 para mostrar que a curvatura da hélice circular do Exemplo 1 é $a/(a^2 + 1)$.

Nos Exercícios 31 e 32, ache a curvatura da curva dada no ponto indicado.

31. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; na origem.

32. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$; $t = 0$.

33. Prove que se $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ for uma equação vetorial da curva C, $K(t)$ for a curvatura de C no ponto P e s o comprimento de arco medido entre um ponto arbitrariamente escolhido em C até P, então $D_s\mathbf{R}(t) \cdot D_{s^3}\mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2$.

34. Uma partícula move-se ao longo de uma curva com equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \text{tg } t\mathbf{i} + \text{senh } 2t\mathbf{j} + \text{sech } t\mathbf{k}$. Prove que os vetores velocidade e aceleração são ortogonais entre si em $t = 0$.

35. Prove que se a velocidade escalar de uma partícula for constante, então os vetores velocidade e aceleração serão sempre ortogonais entre si.

36. Prove que a cúbica retorcida da Ilustração 2, se $t \neq 0$, nenhum par de vetores entre $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{A}(t)$ é ortogonal.

15.9 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

A representação da **coordenada cilíndrica** de um ponto P é (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P em um plano polar e z é a distância orientada desse plano polar até P. Veja a Figura 1.

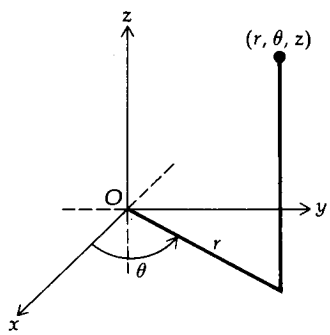


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações, onde c é uma constante: (a) $r = c$; (b) $\theta = c$; (c) $z = c$.

Solução

(a) Para um ponto $P(r, \theta, z)$ do gráfico de $r = c$, θ e z podem assumir quaisquer valores e r é uma constante. O gráfico é um cilindro circular reto, tendo $|c|$ como raio e z como seu eixo. Um esboço do gráfico está na Figura 2.

(b) Para todos os pontos $P(r, \theta, z)$ do gráfico de $\theta = c$, r e z podem assumir qualquer valor, enquanto que θ permanece constante. O gráfico é um plano pelo eixo z. Veja a Figura 3 para um esboço do gráfico.

(c) O gráfico de $z = c$ é um plano paralelo ao plano polar e a uma distância orientada de c unidades. A Figura 4 mostra um esboço do gráfico.

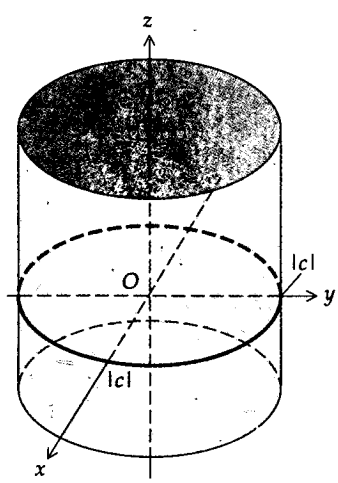


FIGURA 2

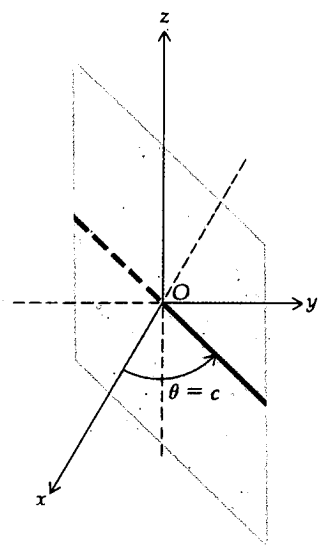


FIGURA 3

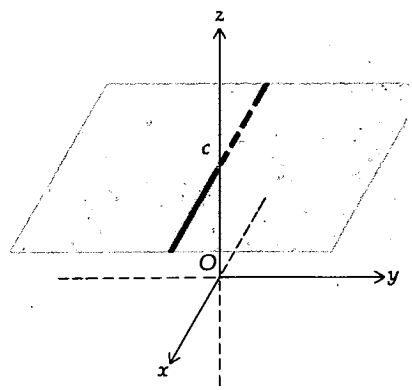


FIGURA 4

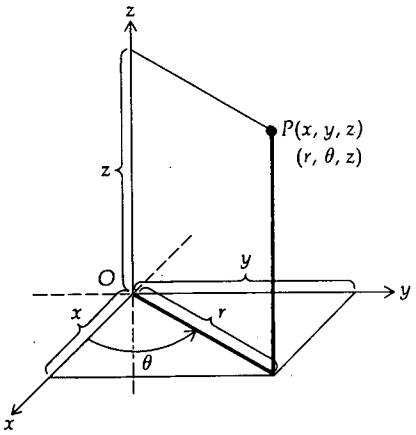


FIGURA 5

O nome "coordenadas cilíndricas" vem do fato de que o gráfico de $r = c$ é um cilindro circular reto, como no Exemplo 1(a). Coordenadas cilíndricas são usadas em um problema físico quando há um eixo de simetria.

Suponha que sejam colocados um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema de coordenadas cilíndricas tais que o plano xy seja o plano polar e o lado positivo do eixo x seja o eixo polar, conforme mostra a Figura 5. Então, o ponto P tem por coordenadas (x, y, z) e $(r, \theta\ z)$, relacionadas pelas equações

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z} \tag{1}$$

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \ \text{se}\ x \neq 0 \qquad z = z} \tag{2}$$

EXEMPLO 2 Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas e identifique a superfície: (a) $r = 6\,\text{sen}\,\theta$; (b) $r(3\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta) + 6z = 0$.

Solução

(a) Multiplicando ambos os lados da equação por r, obtemos $r^2 = 6r\,\text{sen}\,\theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r\,\text{sen}\,\theta = y$, então $x^2 + y^2 = 6y$. Essa equação pode ainda ser escrita como $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, mostrando que o seu gráfico é um cilindro circular reto cuja secção transversal no plano xy é a circunferência com centro em $(0, 3)$ e raio 3.

(b) Substituindo $r\cos\theta$ por x e $r\,\text{sen}\,\theta$ por y, obtemos a equação $3x + 2y + 6z = 0$. Assim, o gráfico é um plano passando pela origem e com $\langle 3, 2, 6\rangle$ como vetor normal.

EXEMPLO 3 Ache uma equação em coordenadas cilíndricas para cada uma das seguintes superfícies, cujas equações são dadas em coordenadas cartesianas e identifique a superfície: (a) $x^2 + y^2 = z$; (b) $x^2 - y^2 = z$.

Solução

(a) A equação é similar à equação (5) da Secção 15.7 sendo, portanto, o gráfico é um parabolóide elíptico. Se $x^2 + y^2$ for substituído por r^2, a equação será $r^2 = z$.

(b) A equação é similar à (6) da Secção 15.7, se x for substituído por y. O gráfico é, portanto, um parabolóide hiperbólico, tendo z como eixo. Quando x for substituído por $r\cos\theta$ e y por $r\,\text{sen}\,\theta$, obtemos a equação $r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta = z$; uma vez que $\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$, podemos escrever a equação como $z = r^2\cos 2\theta$.

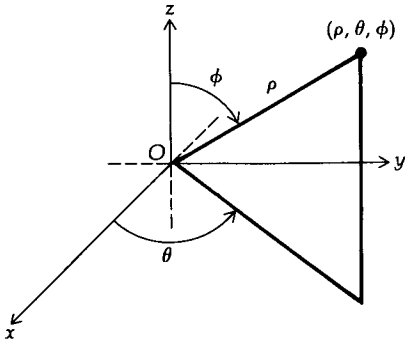


FIGURA 6

Num sistema de coordenadas esféricas há um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar, com a origem do eixo z na origem do plano polar. Um ponto é localizado por três números e a representação de um ponto P em **coordenadas esféricas** é (ρ, θ, ϕ), onde $\rho = |\overline{OP}|$, θ é a medida em radianos do ângulo polar da projeção de P sobre o plano polar e ϕ é a medida não-negativa em radianos do menor ângulo medido entre o lado positivo do eixo z e a reta OP. Veja a Figura 6. A origem tem como representação com coordenadas esféricas (O, θ, ϕ), onde θ e ϕ podem ter qualquer valor. Se o ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ não for a origem, então $\rho > 0$ e $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, onde $\phi = 0$, se P estiver no lado positivo do eixo z, e $\phi = \pi$ se P estiver no lado negativo do eixo z.

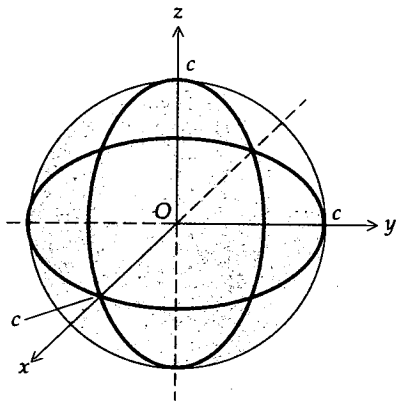


FIGURA 7

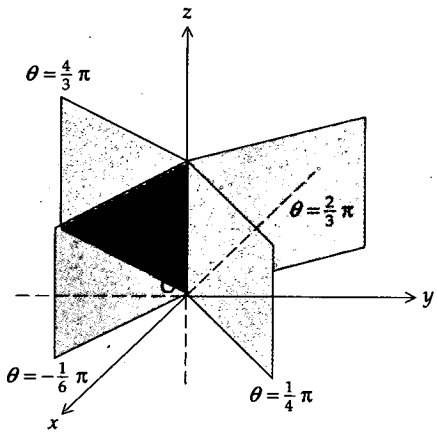


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações, onde c é uma constante: (a) $\rho = c$ e $c > 0$; (b) $\theta = c$; (c) $\phi = c$ e $0 < c < \pi$.

Solução

(a) Todo ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ do gráfico de $\rho = c$ tem o mesmo valor de ρ, θ pode ser qualquer número, e $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Segue que o gráfico é uma esfera de raio c e centro na origem. A Figura 7 mostra um esboço da esfera.

(b) Para qualquer ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ no gráfico de $\theta = c$, ρ pode ser qualquer número não-negativo e ϕ qualquer número no intervalo fechado $[0, \pi]$, e θ é constante. O gráfico é um semiplano contendo o eixo z e é obtido girando o semiplano $x \geqslant 0$ do plano xz de um ângulo de c rad em torno do eixo z. A Figura 8 mostra esboços dos semiplanos para $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $\theta = \frac{4}{3}\pi$ e $\theta = -\frac{1}{6}\pi$.

(c) O gráfico de $\phi = c$ contém todos os pontos $P(\rho, \theta, \phi)$ para os quais ρ é qualquer número não-negativo, θ é qualquer número e φ é a constante c. O gráfico é a metade de um cone, tendo seu vértice na origem e o eixo z como eixo. A Figura 9 (a) e (b) mostra esboços do meio cone para $0 < c < \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi < c < \pi$, respectivamente.

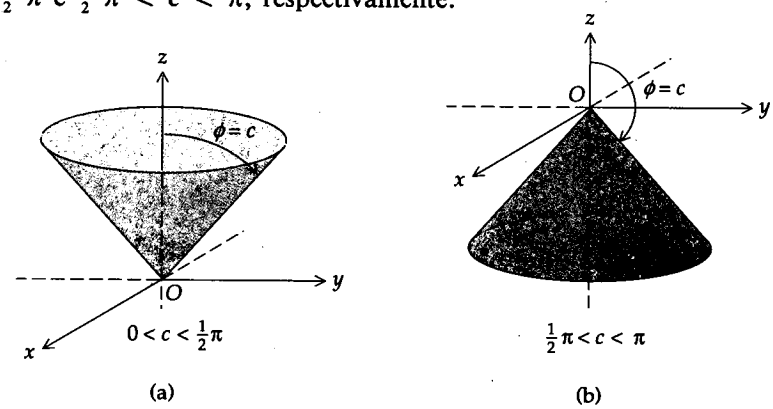


FIGURA 9

Como o gráfico de $\rho = c$ é uma esfera, conforme foi visto no Exemplo 4 (a), temos o nome "coordenadas esféricas". Em problemas físicos, onde existe um ponto de simetria, as coordenadas esféricas são freqüentemente utilizadas.

Colocando juntos um sistema de coordenadas esféricas e um sistema de coordenadas cartesianas, conforme mostra a Figura 10, obtemos relações entre os dois tipos de coordenadas de um ponto P através de

$$x = |\overline{OQ}| \cos\theta \qquad y = |\overline{OQ}| \operatorname{sen}\theta \qquad z = |\overline{QP}|$$

Como $|\overline{OQ}| = \rho \operatorname{sen}\phi$ e $|\overline{QP}| = \rho\cos\phi$, essas equações tornam-se

$$\boxed{x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi} \tag{3}$$

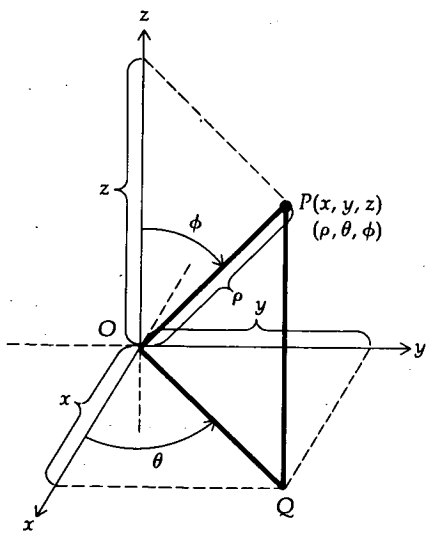


FIGURA 10

Elevando ao quadrado cada uma das relações em (3) e somando

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2\cos^2\phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2}$$

EXEMPLO 5 Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas esféricas, e identifique a superfície: (a) $\rho \cos \phi = 4$; (b) $\rho \operatorname{sen} \phi = 4$.

Solução

(a) Como $z = \rho \cos \phi$, a equação torna-se $z = 4$. Logo, o gráfico é um plano paralelo ao plano xy e 4 unidades acima dele.

(b) Para coordenadas esféricas $\rho \geqslant 0$ e $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$ (pois $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$); logo, elevando ao quadrado ambos os lados da equação dada, obtemos a equação equivalente $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 16$ a qual, por sua vez, equivale a

$$\rho^2(1 - \cos^2 \phi) = 16$$
$$\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi = 16$$

Substituindo ρ^2 por $x^2 + y^2 + z^2$ e $\rho \cos \phi$ por z, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

Logo, o gráfico é o cilindro circular reto tendo o eixo z como seu eixo e raio 4.

EXEMPLO 6 Ache uma equação em coordenadas esféricas para (a) o parabolóide elíptico do Exemplo 3(a); (b) o plano do Exemplo 2(b).

Solução

(a) Uma equação cartesiana do parabolóide elíptico do Exemplo 3(a) é $x^2 + y^2 = z$. Substituindo x por $\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, y por $\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e z por $\rho \cos \phi$, obtemos

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta = \rho \cos \phi$$
$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho \cos \phi$$

que é equivalente a

$$\rho = 0 \text{ e } \rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$$

A origem é o único ponto cujas coordenadas satisfazem $\rho = 0$. Como a origem $(0, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ está em $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$, descartamos a equação $\rho = 0$. Além disso, $\operatorname{sen} \phi \neq 0$ pois não existe valor de ϕ para o qual ambos $\operatorname{sen} \phi$ e $\cos \phi$ são nulos. Logo, a equação $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$ pode ser escrita como $\rho = \operatorname{cosec}^2 \phi \cos \phi$ ou, equivalentemente, $\rho = \operatorname{cosec} \phi \operatorname{cotg} \phi$.

(b) Uma equação cartesiana do plano do Exemplo 2(b) é $3x + 2y + 6z = 0$. Usando as relações (3), essa equação se torna

$$3\rho \operatorname{sen} \phi \cos \phi + 2\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 6\rho \cos \phi = 0$$

EXERCÍCIOS 15.9

1. Ache as coordenadas cartesianas de um ponto com as coordenadas cilíndricas dadas:
(a) $(3, \frac{1}{2}\pi, 5$; (b) $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$; (c) $(1, 1, 1)$

2. Ache as coordenadas cilíndricas do ponto com as coordenadas cartesianas dadas: (a) $(4, 4 - 2)$; (b) $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$; (c) $(1, 1, 1)$.

3. Ache as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas esféricas são: (a) $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $(4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$; (c) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

4. Ache um conjunto de coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cartesianas são: (a) $(1, -1, -\sqrt{2})$; (b) $(-1, \sqrt{3}, 2)$; (c) $(2, 2, 2)$.

5. Ache um conjunto de coordenadas cilíndricas do ponto cujas coordenadas esféricas são: (a) $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$; (b) $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$; (c) $(2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.
6. Ache um conjunto de coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cilíndricas são: (a) $(3, \frac{1}{6}\pi, 3)$; (b) $(3, \frac{1}{2}\pi, 2)$; (c) $(2, \frac{5}{6}\pi, -4)$.

Nos Exercícios de 7 a 12, encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície dada e identifique a superfície.

7. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$
8. $x^2 - y^2 = 9$
9. $x^2 + y^2 = 3z$
10. $9x^2 + 4y^2 = 36$
11. $x^2 - y^2 = 3z^2$
12. $x^2 + y^2 = z^2$

Nos Exercícios de 13 a 17, encontre uma equação em coordenadas esféricas da superfície dada e identifique a superfície.

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$
14. $x^2 + y^2 = z^2$
15. $x^2 + y^2 = 9$
16. $x^2 + y^2 = 2z$
17. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

Nos Exercícios de 18 a 22, encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação é dada em coordenadas cilíndricas. Nos Exercícios 18 e 19, identifique a superfície.

18. $r = 3\cos\theta$
19. (a) $r = 4$; (b) $\theta = \frac{1}{4}\pi$
20. $r = 3 + 2\cos\theta$
21. $r^2\cos 2\theta = z^3$
22. $z^2\sin^3\theta = r^3$

Nos Exercícios de 23 a 28, encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação é dada em coordenadas esféricas. Nos Exercícios de 23 a 25, identifique a superfície.

23. (a) $\rho = 9$; (b) $\theta = \frac{1}{4}\pi$; (c) $\phi = \frac{1}{4}\pi$
24. $\rho = 9\sec\phi$
25. $\rho = 6\operatorname{cosec}\phi$
26. $\rho = 3\cos\phi$
27. $\rho = 2\operatorname{tg}\theta$
28. $\rho = 6\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 3\cos\phi$
29. A curva C em R^3 tem as seguintes equações paramétricas em coordenadas cilíndricas: $r = F_1(t)$, $\theta = F_2(t)$, $z = F_3(t)$. Use a fórmula (3) da Secção 15.8 e as fórmulas (1) desta secção para provar que se L for o comprimento de arco da curva C, do ponto onde $t = a$ até o ponto onde $t = b$, então
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$
30. A curva C em R^3 tem as seguintes equações paramétricas em coordenadas esféricas: $\rho = G_1(t)$, $\theta = G_2(t)$, $\phi = G_3(t)$. Use a fórmula (3) da Secção 15.8 e as fórmulas (3) desta secção para provar que se L unidades for o comprimento de arco da curva C do ponto onde $t = a$ até o ponto onde $t = b$, então
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\,dt$$
31. (a) Mostre que as equações paramétricas da hélice circular do Exemplo 1, Secção 15.8, são $r = a$, $\theta = t$, $z = t$. (b) Use a fórmula do Exercício 29 para encontrar o comprimento de arco da hélice circular da parte (a), de $t = 0$ a $t = 2\pi$. Teste o seu resultado com o do Exemplo 1, Secção 15.8.
32. Uma *hélice cônica* enrola-se num cone, da mesma forma que uma hélice circular enrola-se num cilindro. Use a fórmula do Exercício 30 para encontrar o comprimento de arco de $t = 0$ a $t = 2\pi$ da hélice cônica, tendo equações paramétricas $\rho = t$, $\theta = t$, $\phi = \frac{1}{4}\pi$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15

1. Faça um esboço do gráfico de $x = 3$ em R, R^2 e R^3.
2. Faça um esboço do conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente as equações $x = 6$ e $y = 3$ em R^2 e R^3.

Nos Exercícios de 3 a 12, descreva em palavras o conjunto de pontos em R^3 que satisfazem a equação ou o par de equações dadas. Faça um esboço do gráfico.

3. $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$
6. $y^2 - z^2 = 0$
7. $x = y$
8. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
9. $x^2 + y^2 = 9z$
10. $x^2 + y^2 = z^2$
11. $x^2 - y^2 = z^2$
12. $x^2 + z^2 = 4$

Nos Exercícios de 13 a 22, $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *e* $\mathbf{E} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

13. Ache $6\mathbf{C} + 4\mathbf{D} - \mathbf{E}$.
14. Ache $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$.
15. Ache $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}\times\mathbf{C}$.
16. Ache $(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) - (\mathbf{D}\times\mathbf{E})$.
17. Ache $||\mathbf{A}\times\mathbf{B}||\ ||\mathbf{D}\times\mathbf{E}||$
18. Ache $2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + 3\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$
19. Ache a projeção escalar de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{B}$.
20. Ache a projeção escalar de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.
21. Ache o vetor projeção de $\mathbf{E}$ em $\mathbf{C}$.
22. Ache o vetor projeção de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{E}$.

Nos Exercícios de 23 a 28, há somente uma maneira de obter uma expressão com sentido, inserindo-se parênteses. Faça isto e ache o vetor ou o escalar indicados se $\mathbf{A} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -5, 7, 2\rangle$ *e* $\mathbf{C} = \langle 4, 6, -1\rangle$.

23. $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C}$
24. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC}$
25. $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
26. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}$
27. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$
28. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$
29. Uma reta é traçada pelo ponto $(-3, 5, 1)$ e é perpendicular ao plano xz. Ache as coordenadas dos pontos dessa reta a uma distância de 13 unidades de $(-2, 0, 0)$.
30. Ache uma equação da esfera tendo como diâmetro o segmento de reta cujos extremos são os pontos $(3, 5, -4)$ e $(-1, 7, 4)$.
31. Ache uma equação da esfera concêntrica com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ e contendo o ponto $(-4, 2, 5)$.
32. Prove que os pontos $(4, 1, -1)$, $(2, 0, 1)$ e $(4, 3, 0)$ são vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.
33. Ache a curva geradora e o eixo da superfície de revolução cuja equação é $x^2 + z^2 = e^{4y}$.
34. Ache a equação de uma superfície de revolução gerada com a rotação da elipse $9x^2 + 4z^2 = 36$ no plano xz, em torno do eixo x. Faça um esboço da superfície.

35. Determine o valor de c de tal forma que os vetores $3\mathbf{i} + c\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sejam ortogonais.
36. Mostre que há representações de três vetores $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, as quais formam um triângulo.
37. Dados os pontos $A(5, 9, -3)$ e $B(-2, 4, -5)$, ache (a) os co-senos diretores de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ e (b) o vetor unitário tendo a mesma direção que $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$.
38. Se $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{D} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, ache escalares a, b, e c tais que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.
39. Se $\mathbf{A} = \langle 7, -1, 5\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle -2, 3, 1\rangle$, ache (a) a projeção escalar de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$ e (b) o vetor projeção de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$.
40. Ache uma equação do plano que contém os pontos $(1, 7, -3)$ e $(3, 1, 2)$ e que não intercepta o eixo x.
41. Ache uma equação do plano que passa pelos pontos $(-1, 2, 1)$, $(1, 4, 0)$ e $(1, -1, 3)$ por dois métodos: (a) usando o produto vetorial; (b) sem usar o produto vetorial.
42. Ache uma equação do plano que contém o ponto $(7, -2, -5)$ e é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-3, 0, 4)$ e $(3, 2, 1)$.
43. Ache a distância da origem ao plano que passa pelo ponto $(-6, 3, -2)$ e tem $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ como vetor normal.
44. Ache dois vetores ortogonais a $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e cujas representações são paralelas ao plano yz.
45. Ache a distância do ponto $P(4, 6, -4)$ à reta que passa pelos pontos $A(2, 2, 1)$ e $B(4, 3, -1)$.
46. Ache a distância entre o plano $9x - 2y + 6z + 44 = 0$ e o ponto $(-3, 2, 0)$.
47. Se θ for o ângulo entre os vetores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, ache $\cos\theta$ de duas maneiras: (a) usando o produto escalar; (b) usando o produto vetorial e uma identidade trigonométrica.
48. Prove que as retas

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2} \text{ e } \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-5}{1}$$

são reversas e ache a distância entre elas.
49. Ache as equações simétrica e paramétrica da reta que passa pela origem e é perpendicular a cada uma das retas do Exercício 48.
50. Ache as equações simétrica e paramétrica da reta que passa pelos pontos $(-3, 5, 2)$ e $(-1, -3, 4)$.
51. Mostre que as retas

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{4} \text{ e } \frac{x+1}{-6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

são coincidentes.
52. Ache uma equação do plano que contém a reta

$$\tfrac{1}{2}(x-3) = -(y+5) = \tfrac{1}{3}(z+2)$$

e o ponto $(5, 0, -4)$.
53. Ache a área da secção transversal do elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

no plano $z = 4$.
54. Ache a área do paralelogramo tal que dois de seus lados sejam as representações posicionais dos vetores $2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.
55. Ache o volume do paralelepípedo tendo vértices em $(1, 3, 0)$, $(2, -1, 3)$, $(-2, 2, -1)$ e $(-1, 1, 2)$.
56. Ache o comprimento de arco da curva

$$x = t\cos t \qquad y = t\sin t \qquad z = t$$

de $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}\pi$.
57. Ache o comprimento de arco da curva

$$\mathbf{R}(t) = (2 - 3t)\mathbf{i} + (4t - 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

de $t = 0$ a $t = \frac{5}{2}$.
58. Uma partícula move-se ao longo da curva com equações paramétricas

$$x = \ln(t^2 + 1) \qquad y = t^2 + 1 \qquad z = \operatorname{tg}^{-1} t.$$

Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em $t = 0$.
59. Uma partícula move-se ao longo da curva do Exercício 56. Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em $t = \frac{1}{2}\pi$. Faça um esboço da parte da curva em $t = \frac{1}{2}\pi$ e trace em t as representações dos vetores velocidade e aceleração.
60. Ache o vetor tangente unitário e a curvatura em qualquer ponto da curva cuja equação vetorial é

$$\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

61. Ache o triedro móvel da curva

$$\mathbf{R}(t) = 3\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 3\cos 2t\mathbf{k}$$

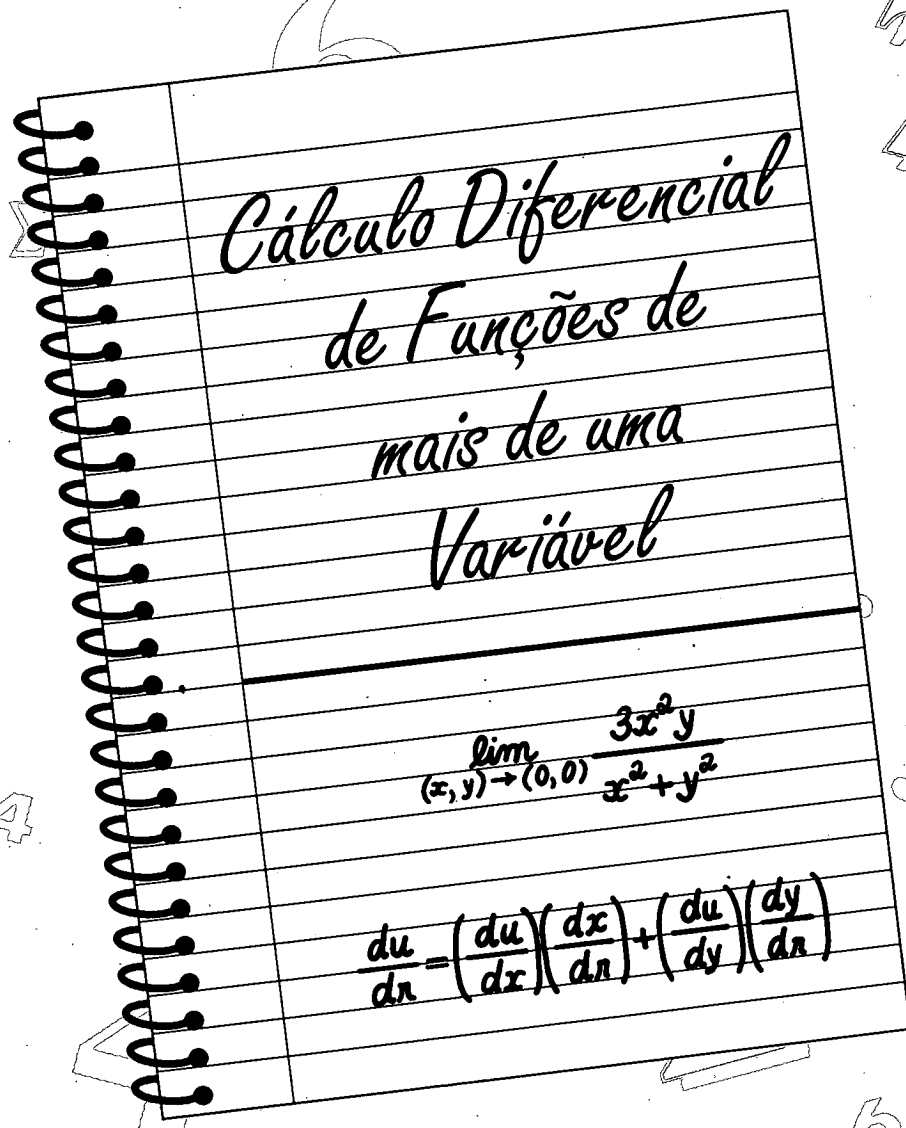
no ponto onde $t = \frac{1}{2}\pi$.
62. Ache as coordenadas esféricas para o ponto cujas coordenadas cartesianas são $(-3, \sqrt{3}, 2)$.
63. Ache um conjunto de coordenadas cilíndricas para o ponto cujas coordenadas esféricas são $(3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$.
64. Ache uma equação em coordenadas esféricas do gráfico de cada uma das equações: (a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$; (b) $4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$.
65. Ache uma equação em coordenadas cilíndricas do gráfico de cada uma das equações: (a) $(x + y)^2 + 1 = z$; (b) $25x^2 + 4y^2 = 100$.
66. Se $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{W}$ são três funções com valores vetoriais cujas derivadas em relação a t existem, prove que

$$D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\times\mathbf{W}(t)] =$$
$$D_t\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\times\mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot D_t\mathbf{Q}(t)\times\mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\times D_t\mathbf{W}(t)$$

67. Se $\mathbf{A}$ for um vetor qualquer, prove que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

DEZESSEIS



Na Secção 16.1 aplicamos o conceito de função a uma *função de n variáveis* e nas duas secções seguintes aplicamos à função de *n* variáveis os conceitos de *limite* e *continuidade*. A maior parte de nossa discussão restringe-se a funções de duas e três variáveis; no entanto, apresentamos as definições para funções de *n* variáveis e então mostramos as aplicações dessas definições a funções de duas e três variáveis. Também mostramos que quando cada uma dessas definições é aplicada a uma função de uma variável, temos a definição previamente dada.

Nosso tratamento de diferenciação de funções de várias variáveis começa na Secção 16.4, onde definimos as *derivadas parciais* de tal função. Então, na Secção 16.5, discutimos a *diferenciabilidade* dessas funções, bem como a *diferen-*

cial total. A versão da *regra da cadeia* com várias variáveis é apresentada na Secção 16.6, e as derivadas parciais de ordem superior são tratadas na Secção 16.7. As aplicações de diferenciação neste capítulo destinam-se a determinar taxas de variação e a calcular aproximações. Concluímos o capítulo com a Secção Suplementar 16.8, envolvendo a prova de um teorema, dando condições suficientes para a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis.

16.1 FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos agora estender o conceito de função a funções de mais de uma variável independente. Tais funções ocorrem freqüentemente em situações práticas. Por exemplo, a área aproximada da superfície do corpo de uma pessoa depende do seu peso e altura. O volume de um cilindro circular reto depende de seu raio e altura. De acordo com a lei do gás ideal, o volume ocupado por um gás confinado é diretamente proporcional à sua temperatura e inversamente proporcional à sua pressão. O custo de um determinado produto pode depender do custo do trabalho, preço de materiais e despesas gerais.

Para ampliar o conceito de função a funções de um número qualquer de variáveis, precisamos primeiro considerar pontos num espaço numérico n-dimensional. Da mesma forma que denotamos um ponto em R por um número real x, um ponto em R^2 por um par ordenado de números reais (x, y) e um ponto em R^3 por uma tripla ordenada de números reais (x, y, z), um ponto no espaço numérico n-dimensional, R^n, é representado por uma ênupla de números reais, sendo comumente denotado por $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Em particular, se $n = 1$, $P = x$; se $n = 2$, $P = (x, y)$; se $n = 3$, $P = (x, y, z)$, se $n = 6$, $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

16.1.1 DEFINIÇÃO O conjunto de todas as ênuplas de números reais é chamado de **espaço numérico n-dimensional**, sendo denotado por R^n. Cada ênupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é chamada de **ponto** no espaço numérico n-dimensional.

16.1.2 DEFINIÇÃO Uma **função de n variáveis** é um conjunto de pares ordenados (P, w), onde dois pares distintos não podem ter os primeiros elementos iguais*. P é um ponto no espaço n-dimensional numérico e w é um número real. O conjunto de todos os valores possíveis de P é chamado de **domínio** da função, enquanto que o conjunto de todos os valores possíveis de w é chamado de **imagem** da função.

Dessa definição, o domínio de uma função de n variáveis é um conjunto de pontos em R^n e a imagem é um conjunto de números reais ou, equivalentemente, um conjunto de pontos em R. Quando $n = 1$, temos uma função de uma variável; assim, o domínio é um conjunto de pontos em R ou, equivalentemente, um conjunto de números reais e a imagem também é um conjunto de números reais. Assim, a Definição 1.4.1 é um caso particular de Definição 16.1.2. Se $n = 2$, temos uma função de duas variáveis e o domínio é um conjunto de pontos em R^2 ou, equivalentemente, de pares ordenados de números reais (x, y).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja f a função de x e y dada pelos pares ordenados (P, z), tal que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

* **N. do R.**: Isso significa que se (P, w_1) e (P, w_2) são dois pares de uma função, então $w_1 = w_2$, ou seja, em *cada* ponto P ela pode ter apenas um único valor correspondente, $w_1 = w_2$.

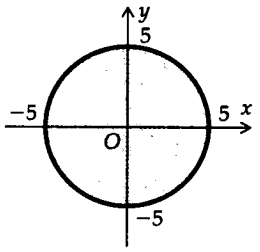


FIGURA 1

O domínio de f é o conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$. Esse conjunto consiste nos pontos do plano xy sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ e no interior da região limitada pela circunferência. Na Figura 1 há um esboço do conjunto de pontos no domínio de f, mostrado como uma região sombreada em R^2.

Como $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, então $0 \leqslant z \leqslant 5$; assim a imagem de f é o conjunto de todos os números reais no intervalo fechado $[0, 5]$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A função g de duas variáveis x e y é o conjunto dos pares ordenados da forma (P, z), para os quais temos

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

O domínio de g é o conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 25\}$. Esse é o conjunto dos pontos que estão na região exterior limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Um esboço mostrando o domínio de g como uma região sombreada está na Figura 2. ◀

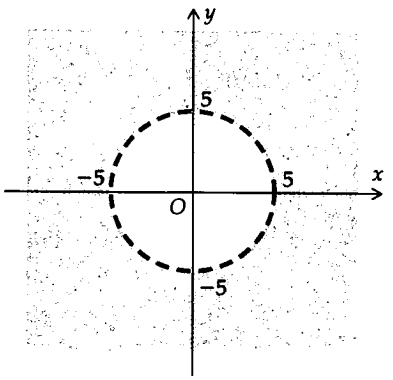


FIGURA 2

Se f for uma função de n variáveis, então, de acordo com a Definição 16.1.2, f será um conjunto de pares ordenados da forma (P, w), onde $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um ponto em R^n e w, um número real. O valor particular de w que corresponde a um ponto P é denotado pelo símbolo $f(P)$ ou $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Especificamente, se $n = 2$ e $P = (x, y)$, podemos representar o valor funcional por $f(P)$ ou $f(x, y)$. Analogicamente, se $n = 3$ e $P = (x, y, z)$, denotamos o valor funcional por $f(P)$ ou $f(x, y, z)$. Note que se $n = 1$, $P = x$; logo, se f for uma função de uma variável, $f(P) = f(x)$. Assim sendo, essa notação é compatível com a notação de funções de uma variável.

Uma função f de n variáveis pode ser definida pela equação

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

As variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamadas de *variáveis independentes*, enquanto que w é denominada *variável dependente*.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f a função da Ilustração 1; isto é,

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(3, -4) &= \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} \\ &= \sqrt{25 - 9 - 16} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(-2, 1) &= \sqrt{25 - (-2)^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{25 - 4 - 1} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u, 3v) &= \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} \\ &= \sqrt{25 - u^2 - 9v^2} \end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 1 A função g está definida por

$$g(x, y, z) = x^3 - 4yz^2$$

Ache: (a) $g(1, 3, -2)$; (b) $g(2a, -4b, 3c)$; (c) $g(x^2, y^2, z^2)$; (d) $g(y, z, -x)$.

Solução

(a) $$\begin{aligned} g(1, 3, -2) &= 1^3 - 4(3)(-2)^2 \\ &= 1 - 48 \\ &= -47 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} g(2a, -4b, 3c) &= (2a)^3 - 4(-4b)(3c)^2 \\ &= 8a^3 + 144bc^2 \end{aligned}$$

(c) $g(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^3 - 4y^2(z^2)^2$
$= x^6 - 4y^2z^4$

(d) $g(y, z, -x) = y^3 - 4z(-x)^2$
$= y^3 - 4x^2z$

16.1.3 DEFINIÇÃO Se f for uma função com uma única variável e g uma função de duas variáveis, então a **função composta** $f \circ g$ será a função de duas variáveis definida por

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

e o domínio de $f \circ g$ será o conjunto de todos os pontos (x, y) no domínio de g para os quais $g(x, y)$ está no domínio de f.

EXEMPLO 2 Dada $f(t) = \ln t$ e $g(x, y) = x^2 + y$, ache $h(x, y)$ se $h = f \circ g$, e determine o domínio de h.

Solução

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

O domínio de g é o conjunto de todos os pontos em R^2, e o domínio de f é $(0, +\infty)$. Logo, o domíno de h é o conjunto $\{(x, y) | x^2 + y > 0\}$.

A Definição 16.1.3 pode ser estendida à função composta de n variáveis, pela definição a seguir.

16.1.4 DEFINIÇÃO Se f for uma função de uma única variável e g for uma função de n variáveis, então a **função composta** $f \circ g$ será a função de n variáveis definida por

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \ldots x_n))$$

e o domínio de $f \circ g$ será o conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no domínio de g para os quais $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está no domínio de f.

EXEMPLO 3 Dada a função $F(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ e $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$, ache a função $F \circ G$ e seu domínio.

Solução

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ &= \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \end{aligned}$$

O domínio de G é o conjunto $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geqslant 0\}$ e o domínio de F é $[-1, 1]$. Assim, o domínio de $F \circ G$ é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3, para os quais $0 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leqslant 1$ ou, equivalentemente, $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5$.

Uma **função polinomial** de duas variáveis x e y é uma função f tal que $f(x, y)$ seja a soma de termos da forma cx^ny^m, onde c é um número real e m e n são inteiros não-negativos. O **grau** da função polinomial é determinado pela maior soma, $n + m$, dos expoentes de x e y dos termos em que $c \neq 0$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) A função f definida por

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 - y^3$$

é uma função polinomial de grau 4, pois o termo de mais alto grau é $2x^2y^2$.
(b) Se

$$g(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y + 4$$

g é uma função polinomial de grau 5. ◀

O gráfico de uma função f de uma única variável consiste no conjunto de pontos (x, y) em R^2 para os quais $y = f(x)$. Analogamente, o gráfico de uma função de duas variáveis é um conjunto de pontos em R^3.

16.1.5 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis, então o **gráfico** de f será o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3 para os quais (x, y) é um ponto no domínio de f e $z = f(x, y)$.

Logo, o gráfico de uma **função** f de duas variáveis é uma superfície que representa o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas são dadas por triplas ordenadas de números reais (x, y, z). Como o domínio de f é um conjunto de pontos no plano xy, e como a cada par ordenado (x, y) no domínio de f corresponde um único valor de z, nenhuma reta perpendicular ao plano xy pode interceptar o gráfico de f em mais de um ponto.

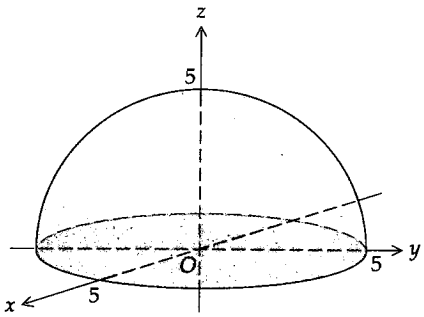


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** A função f da Ilustração 1 é o conjunto de todos os pares da forma (P, z), tais que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Assim sendo, o gráfico de f é o hemisfério sobre e acima do plano xy, tendo um raio de 5 unidades e cujo centro está na origem. Um esboço do gráfico desse hemisfério está na Figura 3. ◀

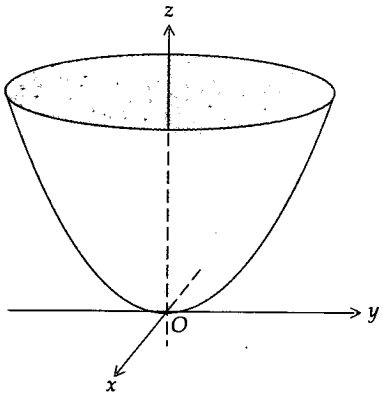


FIGURA 4

EXEMPLO 4 Faça um esboço do gráfico da função f cujos valores funcionais são dados por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução O gráfico de f é a superfície cuja equação é $z = x^2 + y^2$. O traço da superfície no plano xy pode ser encontrado usando a equação $z = 0$ simultaneamente com a equação da superfície. Obtemos então $x^2 + y^2 = 0$, que é a origem. Os traços nos planos xz e yz são encontrados usando as equações $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, com a equação $z = x^2 + y^2$. Esses traços são as parábolas $z = x^2$ e $z = y^2$. A secção transversal da superfície em um plano $z = k$, paralelo ao plano xy, é uma circunferência com centro no eixo z e raio $\sqrt{k}$. Com essas informações temos o esboço pedido na Figura 4.

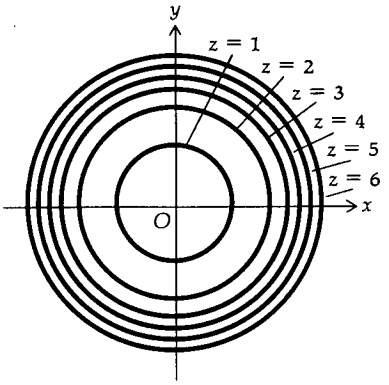


FIGURA 5

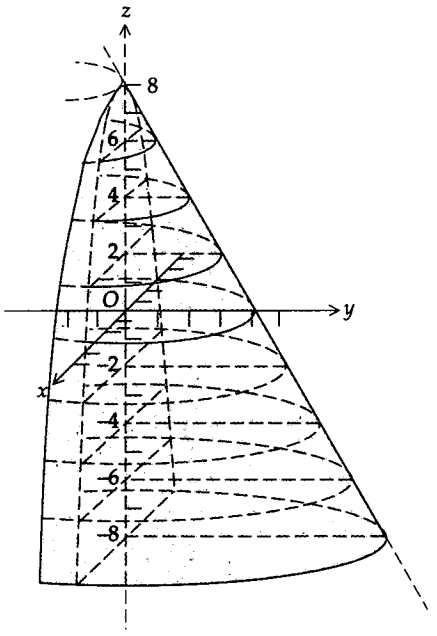


FIGURA 6

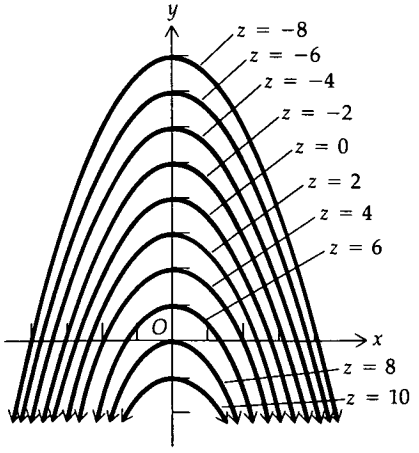


FIGURA 7

Outro método de representar uma função de duas variáveis geometricamente é similar à representação de uma paisagem tridimensional por um mapa topológico bidimensional. Suponha que a superfície $z = f(x, y)$ seja interceptada por um plano $z = k$ e que a curva de intersecção seja projetada no plano xy. A curva projetada tem por equação $f(x, y) = k$ e é chamada de **curva de nível** (ou **curva de contorno**) da função f em k. Cada ponto da curva de nível corresponde a um único ponto na superfície que está k unidades acima, se k for positivo, ou k unidades abaixo, se k for negativo. Considerando diferentes valores para a constante k, obtemos um conjunto de curvas de nível chamado de **mapa de contorno**. O conjunto de todos os valores possíveis de k é a imagem da função f e cada curva de nível, $f(x, y) = k$ no mapa de contorno consiste em pontos (x, y) no domínio de f, tendo o mesmo valor funcional k. Por exemplo, para a função f do Exemplo 4, as curvas de nível são circunferências com o centro na origem. As curvas de nível para $z = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 estão na Figura 5.

Um mapa de contorno mostra as variações de z com x e y. Em geral, as curvas de nível são mostradas para valores de z em intervalos constantes e os valores de z variam mais rapidamente quando as curvas de nível estão mais próximas; isto é, quando isso acontece, a superfície é íngreme e quando estão afastadas, a elevação da superfície está mudando lentamente. Em um mapa topográfico bidimensional de uma paisagem, uma noção geral da declividade é obtida considerando-se a distância entre as curvas de nível. Por outro lado, num mapa topográfico, seguindo um caminho sobre uma curva de nível, a elevação permanece constante.

EXEMPLO 5 Seja f a função para a qual $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$. Faça um esboço do gráfico de f e um mapa de contorno de f mostrando suas curvas de nível em $10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6$ e -8.

Solução Um esboço do gráfico de f aparece na Figura 6. É a superfície $z = 8 - x^2 - 2y$. O traço no plano xy é obtido fazendo $z = 0$, e que dá a parábola $x^2 = -2(y - 4)$. Com $y = 0$ e $x = 0$, obtemos os traços nos planos xy e yz, que são, respectivamente, a parábola $x^2 = -(z - 8)$ e a reta $2y + z = 8$. A secção transversal da superfície feita pelo plano $z = k$ é uma parábola tendo seu vértice na reta $2y + z = 8$, no plano yz e abrindo-se para a esquerda. As secções transversais para $z = 8, 6, 4, 2, -2, -4, -6$ e -8 estão na figura.

As curvas de nível de f são as parábolas $x^2 = -2(y - 4 + \frac{1}{2}k)$. O mapa de contorno de f com esboços das curvas de nível pedidas está na Figura 7.

Para ilustrar o uso das curvas de nível, suponha que a temperatura em qualquer ponto de uma placa de metal plana seja dada pela função f; isto é, se t graus for a temperatura, então no ponto (x, y), $t = f(x, y)$. Assim, as curvas com equações da forma $f(x, y) = k$, onde k é uma constante, são curvas nas quais a temperatura é constante. Essas são as curvas de nível de f e são chamadas de **isotermas**. Além disso, se V volts for a medida do potencial elétrico num ponto (x, y) qualquer do plano xy, e $V = f(x, y)$, então as curvas de nível de f serão chamadas de **curvas eqüipotenciais**, pois o potencial em todos os pontos da curva será o mesmo.

Para uma aplicação das curvas de nível em Economia, consideremos a produtividade (ou saída) de uma indústria que depende de várias entradas. Entre

elas podemos considerar o número de máquinas usadas na produção, o número de pessoas-hora disponíveis, o capital de giro, a quantidade de material usado e o espaço disponível. Suponha que os montantes das entradas sejam dados por x e y, sendo o montante das saídas dado por z, e $z = f(x, y)$. Tal função é chamada de **função de produção** e as curvas de nível de f, cujas equações são da forma $f(x, y) = k$, onde k é uma constante, são chamadas de **curvas de produção constante**.

EXEMPLO 6 Seja f a função de produção para a qual

$$f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

Faça um mapa de contorno de f mostrando as curvas de produção constante em 8, 6, 4 e 2.

Solução O mapa de contorno consiste nas curvas que são a intersecção da superfície

$$z = 2x^{1/2}y^{1/2} \tag{1}$$

com os planos $z = k$, onde $k = 8, 6, 4$ e 2. Substituindo $z = 0$ na equação (1) obtemos $4 = x^{1/2}y^{1/2}$ ou, equivalentemente,

$$xy = 16 \qquad x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0 \tag{2}$$

A curva no plano xy representada por (2) é um ramo de uma hipérbole no primeiro quadrante. Com cada um dos números 6, 4 e 2 também obtemos um ramo de uma hipérbole no primeiro quadrante. Essas são as curvas de produção constante, apresentadas na Figura 8.

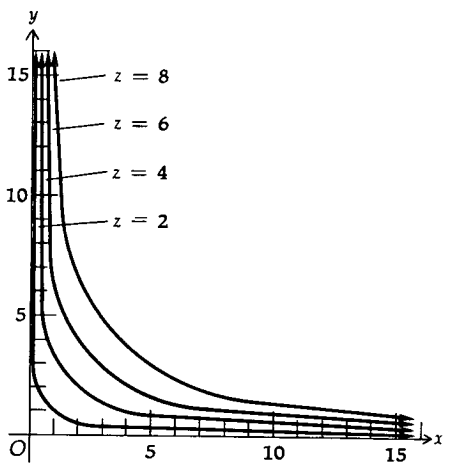


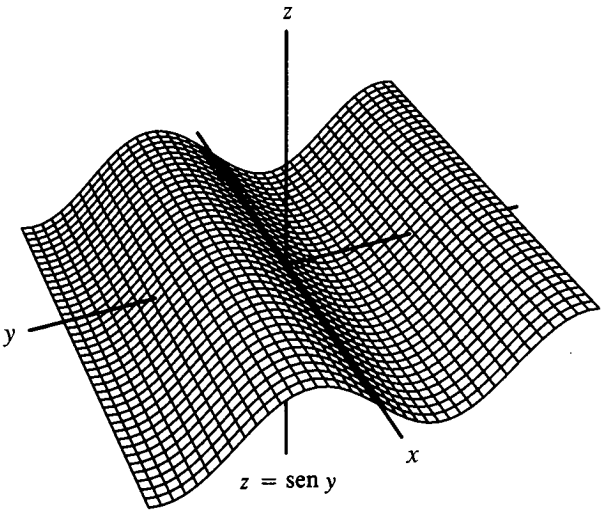
FIGURA 8

A seguinte definição estende, para uma função de n variáveis, a noção de gráfico de uma função.

16.1.6 DEFINIÇÃO Se f for uma função de n variáveis, então o **gráfico** de f será o conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ em R^{n+1} para os quais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um ponto no domínio de f e $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

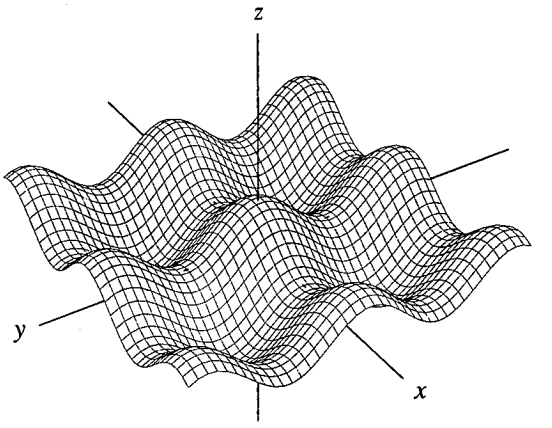
Da mesma forma que estudamos curvas de nível para funções de duas variáveis, podemos considerá-las para funções de três variáveis. Se f for uma função cujo domínio é um conjunto de pontos em R^3, então, se k for um número na imagem de f, o gráfico da equação $f(x, y, z) = k$ será uma superfície, a qual será chamada de **superfície de nível** de f em k. Toda superfície no espaço tridimensional pode ser considerada como uma superfície de nível de alguma função de três variáveis. Por exemplo, se a função g for definida pela equação $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, então a superfície da Figura 4 será a superfície de nível de g em 0. Analogamente, a superfície com equação $z - x^2 - y^2 + 5 = 0$ será uma superfície de nível de g em 5.

Programas computacionais podem ser usados para gerar superfícies que seria difícil ou impossível desenhar. Esses programas são chamados de **gráficos computacionais**. Muitos deles mostram secções transversais feitas por planos $x = k$ e $y = k$ para valores igualmente espaçados de k. Para demonstrar as superfícies diversas e intrincadas que surgem, mostramos os gráficos computacionais associados a funções específicas nas Figuras de 9 a 16.



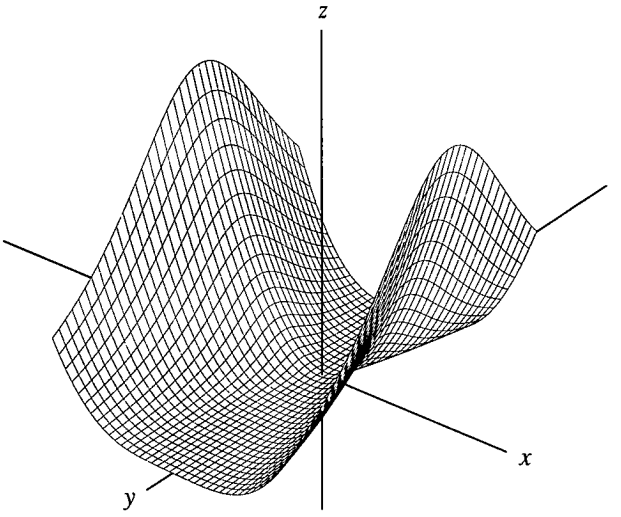
$z = \text{sen } y$

FIGURA 9



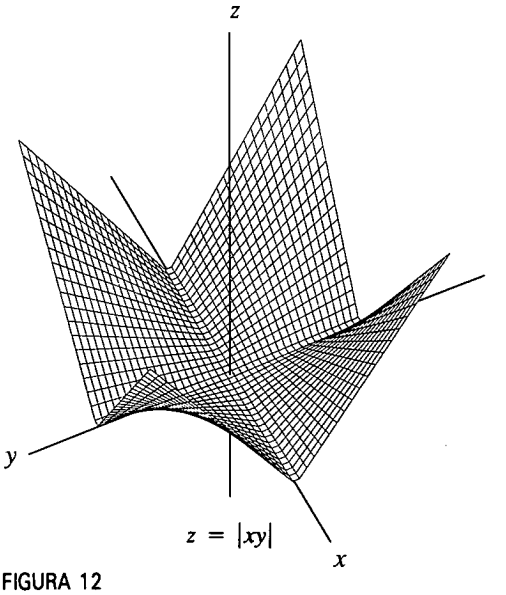
$z = \cos x + \cos y$

FIGURA 10



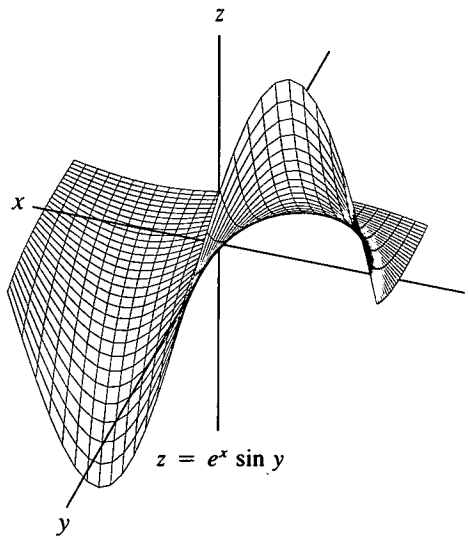
$$z = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 11



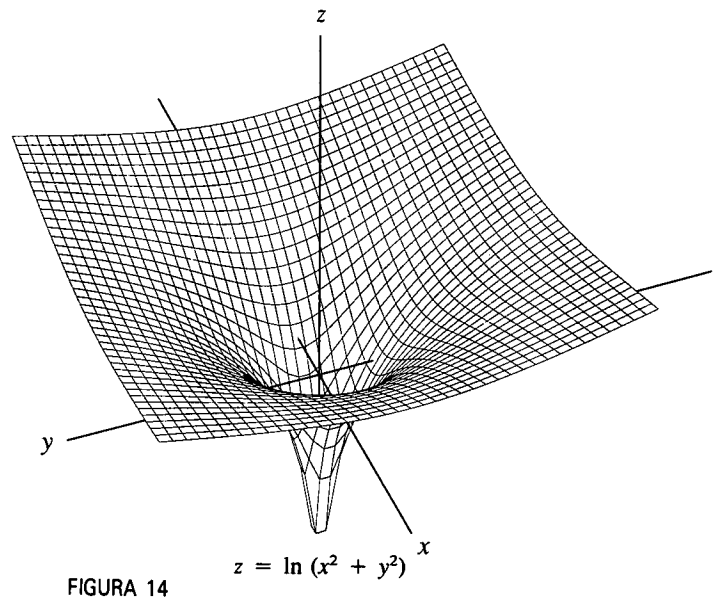
$z = |xy|$

FIGURA 12



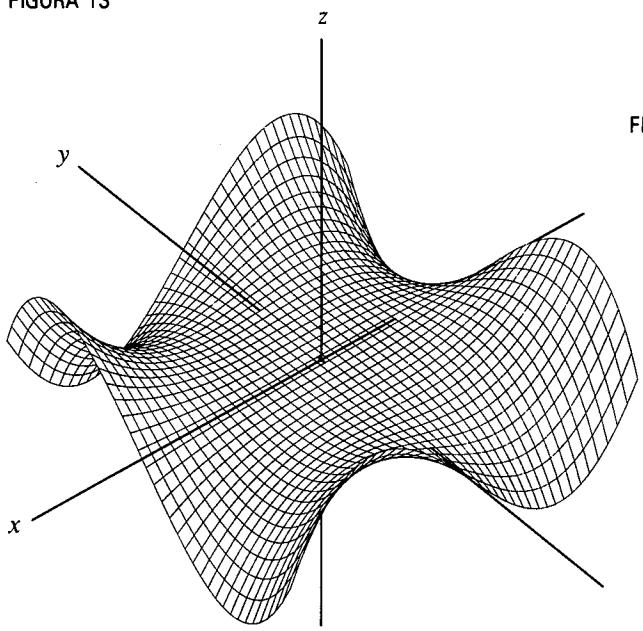
$z = e^x \sin y$

FIGURA 13



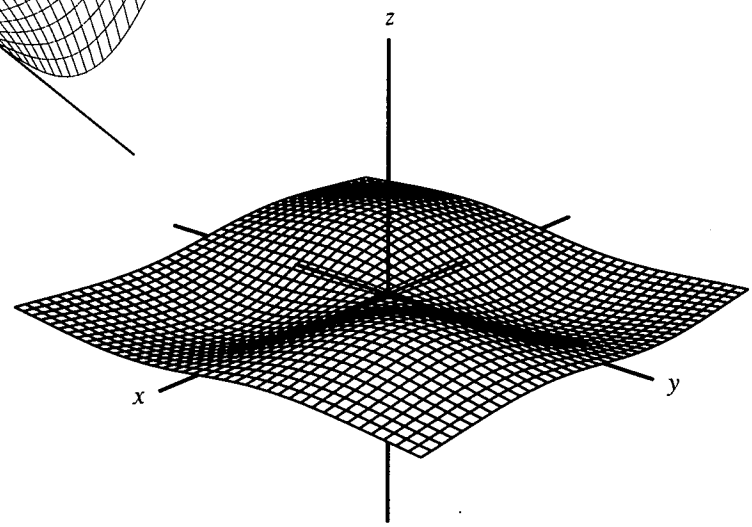
$z = \ln (x^2 + y^2)$

FIGURA 14



$z = \frac{1}{4}xy(y^2 - x^2)$

FIGURA 15



$z = xye^{-x^2-y^2}$

FIGURA 16

EXERCÍCIOS 16.1

1. Seja a função f de duas variáveis x e y o conjunto dos pares ordenados da forma (P, z), tal que

$$z = \frac{x+y}{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Ache: (a) $f(-3, 4)$; (b) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; (c) $f(x+1, y-1)$; (d) $f(-x, y) - f(x, -y)$.

2. Seja a função g de duas variáveis x e y o conjunto dos pares ordenados da forma (P, z), tal que

$$z = \sqrt{x^2 - y} \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

Ache: (a) $g(3, 5)$; (b) $g(-4, -9)$; (c) $g(x+2, 4x+4)$; (d) $g\left(\frac{1}{x}, \frac{-3}{x^2}\right)$.

3. Seja a função g de três variáveis x, y e z o conjunto de todos os pares ordenados (P, w), tal que

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Ache: (a) $g(1, -1, -1)$; (b) $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; (c) $g(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$; (d) $[g(x, y, z)]^2 - [g(x+2, y+2, z)]^2$.

4. Seja f uma função de três variáveis x, y e z que é o conjunto de todos os pares ordenados (P, w), tal que

$$w = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y, z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Ache: (a) $f(1, 2, 3)$; (b) $f(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; (c) $f\left(-\frac{2}{x}, \frac{2}{x}, -\frac{1}{x}\right)$; (d) $f(x+2, 1, x-2)$.

Nos Exercícios de 5 a 20, determine o domínio da função f e faça um esboço mostrando como uma região em R^2 seja o conjunto de pontos do domínio de f. Use curvas pontilhadas para indicar qualquer parte do limite que não esteja no domínio e curvas em linhas contínuas para indicar partes do limite no domínio.

5. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$
6. $f(x, y) = \dfrac{4}{4 - x^2 - y^2}$
7. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
8. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$
9. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$
10. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$
11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$
13. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
14. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$
15. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$
16. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$
17. $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y)$
18. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$
19. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y)$

No Exercícios de 21 a 28, ache o domínio de f e descreva a região em R^3 que seja o conjunto de pontos no domínio.

21. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x - y - z}$
22. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 - y}$
23. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$
24. $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$
25. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} y + \operatorname{sen}^{-1} z$
26. $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$
27. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$
28. $f(x, y, z) = xz \cos^{-1}(y^2 - 1)$

Nos Exercícios de 29 a 36, ache o domínio da função f e faça um esboço do gráfico.

29. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
30. $f(x, y) = 6 - 2x + 2y$
31. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
32. $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$
33. $f(x, y) = x^2 - y^2$
34. $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$
35. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$
36. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

Nos Exercícios de 37 a 44 faça um esboço do mapa de contorno da função f, mostrando as curvas de nível de f nos números dados.

37. A função do Exercício 29 em 0, 1, 2, 3 e 4.
38. A função do Exercício 30 em 10, 6, 2, 0, -2, -6 e -10.
39. A função do Exercício 31 em 16, 12, 7, 0, -9 e -20.
40. A função do Exercício 32 em 0, 2, 4, 6, 8 e 10.
41. A função do Exercício 33 em 16, 9, 4, 0, -4, -9 e -16.
42. A função do Exercício 36 em 10, 8, 6, 5 e 0.
43. A função f para a qual $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ em 8, 6, 4, 2 e 0.
44. A função f para a qual $f(x, y) = (x - 3)/(y + 2)$ em 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -2 e -4.

Nos Exercícios 45 e 46 ache h(x, y) se $h = f \circ g$; ache também o domínio de h.

45. $f(t) = \operatorname{sen}^{-1} t$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
46. $f(t) = e^t$; $g(x, y) = y \ln x$
47. Dada $f(x, y) = x - y$, $g(t) = \sqrt{t}$, $h(s) = s^2$. Ache (a) $(g \circ f)(5, 1)$; (b) $f(h(3), g(9))$; (c) $f(g(x), h(y))$; (d) $g((h \circ f)(x, y))$; (e) $(g \circ h)(f(x, y))$.
48. Dada $f(x, y) = x/y^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$. Ache (a) $(h \circ f)(2, 1)$; (b) $f(g(2), h(4))$; (c) $f(g(\sqrt{x}), h(x^2))$; (d) $h((g \circ f)(x, y))$; (e) $(h \circ g)(f(x, y))$.
49. O potencial elétrico no ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ volts e $V(x, y) = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Trace as curvas eqüipotenciais de V em 16, 12, 8, 4, 1, $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$.
50. A função de produção de certa mercadoria tem valores funcionais $f(x, y) = 4x^{1/3} y^{2/3}$, onde x e y medem os insumos. Faça um mapa de contorno de f mostrando as curvas de produção constante em 16, 12, 8, 4 e 2.
51. Suponha que o número de unidades produzidas de certa mercadoria seja z e $z = 6xy$, onde x é o número de máquinas que foram usadas na produção e y é o número de pessoas-hora disponíveis. Então, a função f, definida por $f(x, y) = 6xy$,

é uma função de produção. Trace o mapa de contorno de f mostrando as curvas de produção constantes para z igual a 30, 24, 18, 12 e 6.

52. A temperatua t em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é dada por $t(x, y) = 4x^2 + 2y^2$. Trace as isotermas de t em 12, 8, 4, 1 e 0.

Nos Exercícios 53 e 54, faça esboços das superfícies de nível da função f nos números dados.

53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ em 8, 4, 0, -4 e -8.

54. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em 9, 4, 1 e 0.

16.2 LIMITES DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Em R, a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre dois números reais. Isto é, $|x - a|$ é a distância entre os pontos x e a. Em R^2, a distância entre os pontos $P(x, y)$ e $P_0(x_0, y_0)$ é dada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Em R^3, a distância entre dois pontos $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é dada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Em R^n, a distância entre dois pontos é definida analogamente.

16.2.1 DEFINIÇÃO Se $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ forem dois pontos em R^n, então a distância entre P e A, denotada por $\|P - A\|$, será dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

O símbolo $\|P - A\|$ representa um número não-negativo, sendo lido como "a distância entre P e A".

Em R, R^2 e R^3, a fórmula da Definição 16.2.1 torna-se, respectivamente

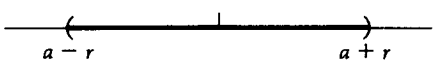
$$\|x - a\| = |x - a|$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

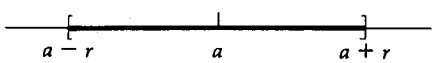
16.2.2 DEFINIÇÃO Se A for um ponto em R^n e r for um número positivo, então a **bola aberta** $B(A; r)$ será definida como o conjunto de todos os pontos P em R^n, tais que $\|P - A\| < r$.

16.2.3 DEFINIÇÃO Se A for um ponto em R^n e r for um número positivo, então a **bola fechada** $B[A; r]$ será definida como o conjunto de todos os pontos P em R^n, tais que $\|P - A\| \leqslant r$.



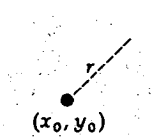
bola aberta $B(a; r)$ em R

FIGURA 1



bola fechada $B[a; r]$ em R

FIGURA 2



bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ em R^2

FIGURA 3

Para ilustrar essas definições, vamos mostrar o seu significado em R, R^2 e R^3. Primeiro, se a for um ponto em R, então a bola aberta $B(a; r)$ será o conjunto de todos os pontos x em R, tais que

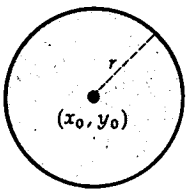
$$|x - a| < r$$

O conjunto de todos os pontos x satisfazendo essa desigualdade é o conjunto de todos os pontos no intervalo aberto $(a - r, a + r)$; assim, a bola aberta $B(a; r)$ em R (veja a Figura 1) é simplesmente um intervalo aberto, tendo seu ponto médio em a e extremos em $a - r$ e $a + r$. A bola fechada $B[a; r]$ em R (Figura 2) é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$.

Se (x_0, y_0) for um ponto em R^2, então a bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ será o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2, tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Assim, a bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ em R^2 (Figura 3) consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela circunferência tendo seu centro em (x_0, y_0) e raio r. Uma bola aberta em R^2 é algumas vezes chamada de *disco*



bola fechada $B[(x_0, y_0); r]$ em R^2
FIGURA 4

aberto. A bola fechada ou disco fechado $B[(x_0, y_0); r]$ em R^2 (Figura 4) é o conjunto de todos os pontos na bola aberta $B((x_0, y_0); r)$ e sobre a circunferência, tendo seu centro em (x_0, y_0) e raio r.

Se (x_0, y_0, z_0) for um ponto em R^3, então a bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ será o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3, tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Portanto, a bola aberta em $B((x_0, y_0, z_0); r)$ em R^3 (Figura 5), consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela esfera, tendo seu centro em (x_0, y_0, z_0) e raio r. Analogamente, a bola fechada $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ em R^3 (Figura 6) consiste em todos os pontos na bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ e sobre a esfera tendo seu centro em (x_0, y_0, z_0) e raio r.

Estamos agora em condições de definir o *limite de uma função de n variáveis.*

16.2.4 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de n variáveis que está definida numa bola aberta $B(A; r)$, exceto possivelmente no próprio ponto A. Então, o **limite de $f(P)$ quando P tende a A é L**, e escrevemos

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \|P - A\| < \delta \text{ então } |f(P) - L| < \epsilon$$

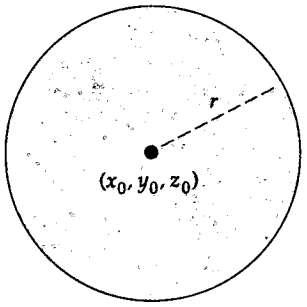


FIGURA 5

Se f for uma função de uma variável e se na definição acima $A = a$ em R e $P = x$, então a definição afirma que: se f for definida em algum intervalo aberto com centro em a, exceto possivelmente no próprio a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Assim sendo, a Definição 2.1.1 de limite de uma função de uma variável é um caso particular da Definição 16.2.4.

Vamos estabelecer agora a definição de limite de uma função de duas variáveis. Ela é o caso particular da Definição 16.2.4, onde A é o ponto (x_0, y_0) e P é o ponto (x, y).

16.2.5 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis que está definida em algum disco aberto $B(x_0, y_0); r)$, exceto possivelmente no próprio ponto (x_0, y_0). Então, o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é L**, e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

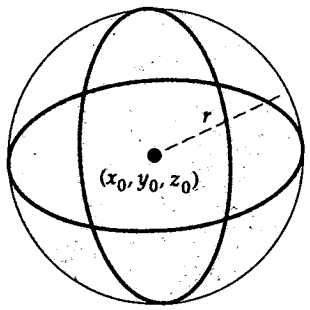


FIGURA 6

Em outros termos, a Definição 16.2.5 estabelece que os valores funcionais $f(x, y)$ tendem a um limite L quando o ponto (x, y) tende ao ponto (x_0, y_0), se o valor absoluto da diferença entre $f(x, y)$ e L puder se tornar arbitrariamente pequeno, tomando o ponto (x, y) suficientemente próximo de (x_0, y_0), mas não igual a (x_0, y_0). Na definição, nada há sobre o valor da função no ponto

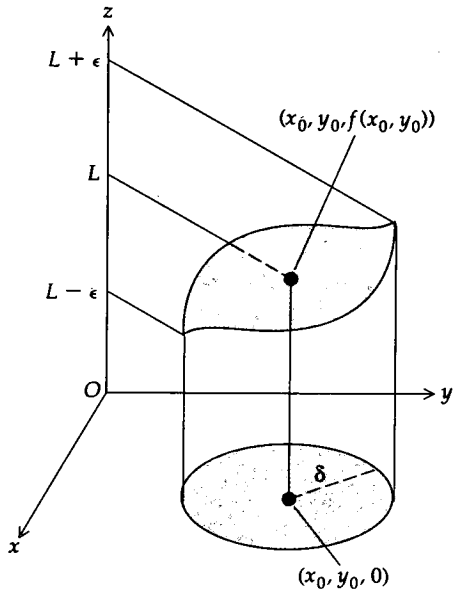


FIGURA 7

(x_0, y_0); isto é, não é necessário que a função esteja definida em (x_0, y_0) para existir $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.

Uma interpretação geométrica da Definição 16.2.5 está ilustrada na Figura 7. Nela é mostrada a parte da superfície definida por $z = f(x, y)$ que fica sobre o disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$). Vemos que $f(x, y)$ no eixo z ficará entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, enquanto o ponto (x, y) no plano xy estiver no disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$, ou seja, o valor de $f(x, y)$ no eixo z pode ser mantido entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$ desde que o ponto (x, y) no plano xy seja restrito ao disco aberto $B((x_0, y_0); \delta)$.*

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$$

O primeiro requisito da definição é que $2x + 3y$ deve estar definida em algum disco aberto tendo seu centro no ponto (1, 3), com exclusão, talvez, do próprio ponto (1, 3). Como $2x + 3y$ está definida para todos os pontos (x, y), qualquer disco aberto com seu centro em (1, 3) irá satisfazer esse requisito. Agora, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \text{ então } |(2x + 3y) - 11| < \epsilon \tag{1}$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |2x + 3y - 11| &= |2x - 2 + 3y - 9| \\ &\leqslant 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

Como

$$|x - 1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \quad \text{e} \quad |y - 3| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

segue que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \text{ então } 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é $5\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \\ \Rightarrow\ & |x - 1| < \delta \quad \text{e} \quad |y - 3| < \delta \\ \Rightarrow\ & 2|x - 1| + 3|y - 3| < 5\delta \\ \Rightarrow\ & |2(x - 1) + 3(y - 3)| < 5(\tfrac{1}{5}\epsilon) \\ \Rightarrow\ & |2x + 3y - 11| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$, a afirmativa (1) é verdadeira. Isto prova que $\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11$. ◀

EXEMPLO 1 Use a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + y) = 5$$

Solução Como $3x^2 + y$ está definida em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto tendo seu centro em (1, 2) irá satisfazer o primeiro requisito da Defi-

* **N. do T.**: A existência do limite da função $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) não depende da forma pela qual (x, y) aproxima-se de (x_0, y_0). Observe que existe uma infinidade de maneiras para (x, y) aproximar-se de (x_0, y_0).

nição 16.2.5. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \text{ então } |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |3x^2 + y - 5| &= |3x^2 - 3 + y - 2| \\ &\leqslant 3|x^2 - 1| + |y - 2| \end{aligned}$$

Assim,

$$|3x^2 + y - 5| \leqslant 3|x-1||x+1| + |y-2| \tag{3}$$

Como

$$|x-1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad \text{e} \quad |y-2| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

segue que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \text{ então } |x-1| < \delta \quad \text{e} \quad |y-2| < \delta$$

Observe que no segundo membro de (3), além das expressões $|x - 1|$ e $|y - 2|$, temos a expressão $|x + 1|$. Assim, para provar (2) queremos colocar uma restrição em δ que irá nos dar uma desigualdade envolvendo $|x + 1|$. Para isso escolhemos o raio do disco aberto requerido pela Definição 16.2.5 menos ou igual a 1. Então,

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant 1 \\ \Rightarrow \quad & |x-1| < 1 \\ \Rightarrow \quad & -1 < x - 1 < 1 \\ \Rightarrow \quad & 1 < x + 1 < 3 \\ \Rightarrow \quad & |x+1| < 3 \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} & |x-1| < \delta \quad \text{e} \quad |x+1| < 3 \quad \text{e} \quad |y-2| < \delta \\ \Rightarrow \quad & 3|x-1||x+1| + |y-2| < 3 \cdot \delta \cdot 3 + \delta \end{aligned}$$

Como nossa meta é ter $3|x - 1||x + 1| + |y - 2| < \epsilon$, devemos exigir $10\delta \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \frac{1}{10}\epsilon$. Isso significa que devemos colocar duas restrições em δ: $\delta \leqslant 1$ e $\delta \leqslant \frac{1}{10}\epsilon$. Para que ambas as restrições estejam satisfeitas, tomamos $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \min(1, \tfrac{1}{10}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & |x-1| < \tfrac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x-1| < 1 \quad \text{e} \quad |y-2| < \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & |x-1| < \tfrac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x+1| < 3 \quad \text{e} \quad |y-2| < \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & 3|x-1||x+1| + |y-2| < 3 \cdot \tfrac{1}{10}\epsilon \cdot 3 + \tfrac{1}{10}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & |3(x-1)(x+1) + y - 2| < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$, a afirmativa (2) é verdadeira. Isso prova que $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} (3x^2 + y) = 5$.

Os teoremas de limite da Secção 2.2 e suas demonstrações, com pequenas modificações, aplicam-se a funções de mais de uma variável. Por exemplo, correspondendo ao Teorema de Limite 1 da Secção 2.2, temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (mx + ny + d) = ma + nb + d$$

e a demonstração é uma generalização da que foi feita na Ilustração 1. Vamos usar os teoremas de limite sem enunciá-los novamente e sem prová-los.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando os teoremas de limite de somas e produtos,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2 \\ &= 1\end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 2.7.1 para funções de uma variável e trata do limite de uma função composta de duas variáveis.

16.2.6 TEOREMA Se g for uma função de duas variáveis, para a qual $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = b$ e se f for uma função de uma única variável contínua em b, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \circ g)(x, y) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)\right)$$

A demonstração desse teorema é semelhante à que foi feita para o Teorema 2.7.1 e será deixada como um exercício (veja o Exercício 31).

EXEMPLO 3 Use o Teorema 16.2.6 para encontrar $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy - 1)$.

Solução Seja g a função tal que $g(x, y) = xy - 1$, e seja f a função tal que $f(t) = \ln t$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy - 1) = 1$$

e como f é contínua em 1, do Teorema 16.2.6,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) &= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy-1)\right)\\ &= \ln 1\\ &= 0\end{aligned}$$

Vamos introduzir agora o conceito de *ponto de acumulação*, necessário ao prosseguimento da discussão de limite de funções de duas variáveis.

16.2.7 DEFINIÇÃO Dizemos que um ponto P_0 é um **ponto de acumulação** de um conjunto S de pontos em R^n se toda bola aberta $B(P_0; r)$ contiver uma infinidade de pontos de S.

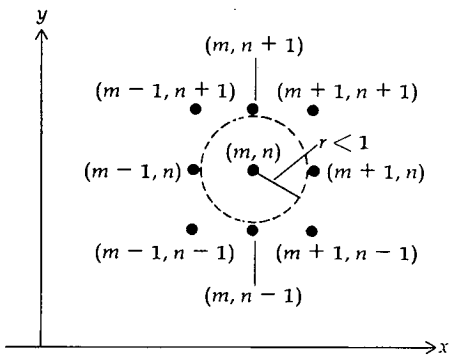


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se S for o conjunto de todos os pontos em R^2 no lado positivo do eixo x, a origem será um ponto de acumulação de S pois, não importando quão pequeno tomarmos o valor de r, todo disco aberto com centro na origem e raio r irá conter uma infinidade de pontos de S. Esse é um exemplo de um conjunto tendo um ponto de acumulação que não pertence ao conjunto. Qualquer ponto do conjunto S será também um ponto de acumulação de S. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se S for o conjunto de todos os pontos em R^2 para os quais as coordenadas cartesianas são inteiros positivos, então esse conjunto não terá pontos de acumulação. Isso pode ser visto se considerarmos os pontos (m, n), onde m e n são inteiros positivos. Então, um disco aberto tendo seu centro em (m, n) e raio menor do que 1 não contém nenhum outro ponto de S exceto (m, n); assim, a Definição 16.2.7 não será satisfeita (veja a Figura 8). ◀

Consideraremos agora o limite de uma função de duas variáveis quando um ponto (x, y) aproxima-se de um ponto (x_0, y_0), onde (x, y) está restrito a um determinado conjunto de pontos.

16.2.8 DEFINIÇÃO Seja f a função definida em um conjunto de pontos S em R^2, e seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação de S. Então, o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) em S é L**, o que escrevemos na forma

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (P \text{ em } S)}} f(x, y) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, por menor que seja, existir um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

e (x, y) está em S.

Em alguns casos, o limite na definição anterior vem a ser o limite de uma função de uma variável. Por exemplo, considere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Então, se S_1 for o conjunto de todos os pontos no lado positivo do eixo x,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x\to 0^+} f(x, 0)$$

Se S_2 for o conjunto de todos os pontos no lado negativo do eixo y,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) = \lim_{y\to 0^-} f(0, y)$$

Se S_3 for o conjunto de todos os pontos no eixo x,

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\(P\text{ em }S_3)}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, 0)$$

Se S_4 for o conjunto de todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$,

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\(P\text{ em }S_4)}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, x^2)$$

16.2.9 TEOREMA Suponha que a função f esteja definida para todos os pontos do disco aberto com centro em (x_0, y_0), exceto talvez o próprio (x_0, y_0) e

$$\lim_{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L$$

Então, se S for um conjunto qualquer em R^2 tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação,

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)\\(P\text{ em }S)}} f(x, y)$$

existe e tem sempre o valor L.

Prova Como $\lim_{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L$, então, pela Definição 16.2.5, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

O estabelecido acima será verdadeiro se, além disso, restringirmos (x, y) ao conjunto S, onde S é qualquer conjunto de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação. Logo, pela Definição 16.2.8,

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)\\(P\text{ em }S)}} f(x, y) = L$$

e L não depende do conjunto S através do qual (x, y) está tendendo a (x_0, y_0). Isso prova o teorema. ■

O teorema a seguir é uma conseqüência imediata do Teorema 16.2.9.

16.2.10 TEOREMA Se a função f tiver diferentes limites quando (x, y) tender a (x_0, y_0) através de dois conjuntos de pontos tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação, então $\lim_{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)} f(x, y)$ não existe.

Prova Sejam S_1 e S_2 dois conjuntos distintos de pontos em R^2, tendo (x_0, y_0) como um ponto de acumulação, e sejam

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)\\(P\text{ em }S_1)}} f(x, y) = L_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)\\(P\text{ em }S_2)}} f(x, y) = L_2$$

Suponha agora que $\lim_{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)} f(x, y)$ exista. Então, pelo Teorema 16.2.9, L_1 deve ser igual a L_2, mas, por hipótese, $L_1 \neq L_2$ e assim temos uma contradição. Logo, $\lim_{(x,\,y)\,\to\,(x_0,\,y_0)} f(x, y)$ não existe. ■

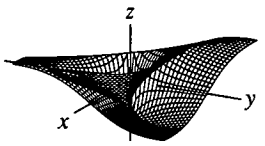


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ache $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos de R^2, exceto em (0, 0). A Figura 9 mostra um gráfico de f gerado por computador. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos do eixo x e S_2 o conjunto de todos os pontos da reta $y = x$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, 0) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2 + 0} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0,0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (0,0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y)$$

segue do Teorema 16.2.10 que $\lim\limits_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y)$ não existe.

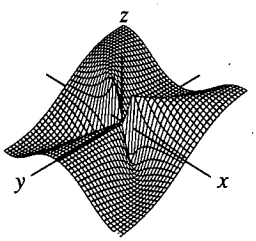


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Dada

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

ache $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos em R^2, exceto (0, 0). A Figura 10 mostra um gráfico de f gerado por computador. Seja S_1 o conjunto de todos os pontos sobre a reta que passa pela origem; isto é, para qualquer ponto (x, y) em S_1, $y = mx$. Seja S_2 o conjunto de todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, mx) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} f(x, x^2) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y)$$

segue que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe.

EXEMPLO 6 Dada

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

ache $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, se existir.

Solução A função f está definida em todos os pontos em R^2, exceto (0, 0). Seja S_1 o conjunto de todos os pontos sobre uma reta que passam pela origem; então, se (x, y) for um ponto em S_1, $y = mx$. Seja S_2 o conjunto de todos os pontos na parábola $y = x^2$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2(mx)}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{3mx}{1 + m^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0)\\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2(x^2)}{x^2 + (x^2)^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{3x^4}{x^2 + x^4} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 + x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainda que o mesmo limite, 0, seja obtido, se (x, y) tende a (0, 0) através de um conjunto de pontos sobre qualquer reta que passe pela origem, não podemos concluir que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ exista e seja zero, embora isso seja esperado. Vamos tentar, todavia, provar que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$. Qualquer disco aberto tendo seu centro na origem irá satisfazer o primeiro requisito da Definição 16.2.5. Se pudermos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon \tag{4}$$

então provamos que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Como $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ e $|y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| &= \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \\ &\leqslant \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Assim, uma escolha adequada é $3\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned}&0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \\ \Rightarrow\ &\frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} < 3\delta \\ \Rightarrow\ &\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < 3(\tfrac{1}{3}\epsilon) \\ \Rightarrow\ &\left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon\end{aligned}$$

Assim, se $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$, a afirmação (4) é verdadeira. Logo, provamos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = 0$$

EXERCÍCIOS 16.2

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{3x - 2y}{x + 4y}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3 + 2y}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y}{e^{2x} + e^{2y}}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^{4/3} - (y-1)^{4/3}}{(x-1)^{2/3} + (y-1)^{2/3}}$

Nos Exercícios de 9 a 16, estabeleça o limite, encontrando um $\delta > 0$ correspondente a qualquer $\epsilon > 0$, tal que a Definição 16.2.5 seja válida.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (3x - 4y) = 1$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (5x - 3y) = -2$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,3)} (3x - 2y) = -9$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (5x + 4y) = -6$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2 - y^2) = -1$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (x^2 + 2x - y) = 4$
16. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y) = -4$

Nos Exercícios de 17 a 22, prove que para a função f dada, $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ não existe.

17. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
18. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$
19. $f(x, y) = \dfrac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$
20. $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$
21. $f(x, y) = \dfrac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}$
22. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

Nos Exercícios de 23 a 26, prove que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ existe.

23. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$
24. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
26. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Nos Exercícios de 27 a 30, determine se o limite existe.

27. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$
28. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$
29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$
30. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$
31. Prove o Teorema 16.2.6.

Nos Exercícios de 32 a 35, mostre uma aplicação do Teorema 16.2.6 no cálculo do limite indicado.

32. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\ln 3,\,\ln 2)} e^{x-y}$
33. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \tan^{-1}\frac{y}{x}$
34. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,3)} [\![5x + \tfrac{1}{2}y^2]\!]$
35. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x - 4y}}$
36. (a) Dê uma definição similar à Definição 16.2.5 para o limite de uma função de três variáveis quando um ponto (x, y, z) tende ao ponto (x_0, y_0, z_0). (b) Dê uma definição similar à Definição 16.2.8 para o limite de uma função de três variáveis quando o ponto (x, y, z) tende ao ponto (x_0, y_0, z_0) por um conjunto específico de pontos S de R^3.
37. (a) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.9 para uma função f de três variáveis. (b) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.10 para uma função f de três variáveis.

Nos Exercícios de 38 a 41, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

38. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-2,1,4)} (4x^2 y - 3xyz^2 + 7y^2 z^3)$
39. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \frac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z}$
40. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,2,0)} \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2}{x^2 + z^2}$
41. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$

Nos Exercícios de 42 a 45, use as definições e teoremas dos Exercícios 36 e 37 para provar que $\displaystyle\lim_{(x,\,y,\,z)\to(0,\,0,\,0)} f(x, y, z)$ não existe.

42. $f(x, y, z) = \dfrac{x^3 + yz^2}{x^4 + y^2 + z^4}$
43. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
44. $f(x, y, z) = \dfrac{x^4 + yx^3 + z^2 x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$
45. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$

Nos Exercícios 46 e 47, use a definição do Exercício 36(a) para provar que $\displaystyle\lim_{(x,\,y,\,z)\to(0,\,0,\,0)} f(x, y, z)$ existe.

46. $f(x, y, z) = \dfrac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
47. $f(x, y, z) = \dfrac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

48. Suponha que f e g sejam funções de duas variáveis satisfazendo as seguintes condições:

(i) $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$; $g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ para algum n e todo t;

(ii) $g(1, 1) \neq 0$ e $g(1, 0) \neq 0$;

(iii) $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$.

Mostre que $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ não existe.

16.3 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos definir agora a continuidade de uma função de n variáveis em um ponto de R^n. Observe que a Definição 2.6.1 de continuidade de uma função de uma variável em um número a é um caso particular dessa definição.

16.3.1 DEFINIÇÃO Suponha que f seja uma função de n variáveis e A, um ponto de R^n. Então, dizemos que f será contínua em um ponto A se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(A)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{P \to A} f(P)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{P \to A} f(P) = f(A)$.

Se uma ou mais dessas condições não for satisfeita no ponto A, então f será **descontínua** em A.

Se f for uma função de duas variáveis, A for o ponto (x_0, y_0) e P o ponto (x, y), então a Definição 16.3.1 se converterá na seguinte:

16.3.2 DEFINIÇÃO Dizemos que a função f de duas variáveis x e y é **contínua** em um ponto (x_0, y_0) se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(x_0, y_0)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 1 Determine se f é contínua em (0, 0) se

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução Vamos verificar as três condições da Definição 16.3.2 no ponto (0, 0).

(i) $f(0, 0) = 0$. Logo, a condição (i) está satisfeita.

(ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Esse fato foi provado no Exemplo 6 da Secção 16.2.

(iii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

Logo, f é contínua em (0, 0).

EXEMPLO 2 Determine se f é contínua em (0, 0) se

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução Verificando as condições da Definição 16.3.2, temos o seguinte:

(i) $f(0, 0) = 0$; assim a condição (i) está satisfeita.
(ii) Quando $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. No Exemplo 4, Secção 16.2, mostramos que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} xy/(x^2 + y^2)$ não existe. Assim sendo, $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe. Logo, a condição (ii) não está satisfeita.

Portanto, f é descontínua em (0, 0).

Se uma função f de duas variáveis for descontínua em um ponto (x_0, y_0), mas $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ existir, então dizemos que f tem uma **descontinuidade removível** em (x_0, y_0), pois se f for redefinida em (x_0, y_0) de tal forma que

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

então a nova função será contínua em (x_0, y_0). Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de **descontinuidade essencial**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** (a) Se $g(x, y) = 3x^2y/(x^2 + y^2)$, então g é descontínua na origem, pois $g(0, 0)$ não está definido. Contudo, no Exemplo 6, Secção 16.2, mostramos que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} 3x^2y/(x^2 + y^2) = 0$. Logo, a descontinuidade é removível, pois $g(0, 0)$ pode ser definido como sendo 0. (Consulte o Exemplo 1.)
(b) Seja $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. Então h é descontínua na origem, pois $h(0, 0)$ não está definido. No Exemplo 4, Secção 16.2, mostramos que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} xy/(x^2 + y^2)$ não existe. Logo, a descontinuidade é essencial. (Consulte o Exemplo 2.) ◀

Os teoremas sobre continuidade para funções de uma única variável podem ser estendidos a funções de duas variáveis.

16.3.3 TEOREMA Se f e g forem duas funções contínuas em um ponto (x_0, y_0), então

(i) $f + g$ é contínua em (x_0, y_0);
(ii) $f - g$ é contínua em (x_0, y_0);
(iii) fg é contínua em (x_0, y_0);
(iv) f/g é contínua em (x_0, y_0), desde que $g(x_0, y_0) \neq 0$.

A demonstração desse teorema é análoga à do teorema (2.6.2) correspondente, para funções de uma variável e, portanto, será omitida.

16.3.4 TEOREMA Uma função polinomial de duas variáveis é contínua em todos os pontos em R^2.

Prova Toda função polinomial é a soma de produtos de funções definidas por $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$, onde c é um número real. Como f,

g e h são contínuas em todos os pontos em R^2, o teorema decorre de repetidas aplicações do Teorema 16.3.3, partes (i) e (iii). ■

16.3.5 TEOREMA Uma função racional de duas variáveis é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Prova Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais f e g que são contínuas em todos os pontos em R^2, pelo Teorema 16.3.4. Se (x_0, y_0) for um ponto qualquer do domínio de f/g, então $g(x_0, y_0) \neq 0$; assim sendo, pelo Teorema 16.3.3(iv), f/g é contínua nesse ponto. ■

EXEMPLO 3 Determine todos os pontos em que f é contínua se

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Solução A função f está definida em todos os pontos em R^2. Logo, a condição (i) da Definição 16.3.2 está satisfeita para todos os pontos (x_0, y_0).

Considere o ponto (x_0, y_0), se $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

Se $x_0^2 + y_0^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2 + y^2) \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Se $x_0^2 + y_0^2 > 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0 \\ &= 0 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Assim, f é contínua em todos os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

Para determinar a continuidade de f em todos os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + y_0^2 = 1$, vamos determinar se $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ existe e é igual a 1.

Seja S_1 o conjunto de todos os pontos (x, y), tais que $x^2 + y^2 \leqslant 1$, e seja S_2 o conjunto de todos os pontos (x, y), tais que $x^2 + y^2 > 1$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} (x^2 + y^2) \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y)$$

concluímos que $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existe. Logo, f é descontínua em todos os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Provamos que f é contínua em todos os pontos em R^2, exceto aqueles sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

16.3.6 DEFINIÇÃO A função f de n variáveis é **contínua em uma bola aberta** se ela for contínua em todos os pontos da bola aberta.

Como ilustração da definição anterior, a função do Exemplo 3 é contínua em todo disco aberto que não contenha pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

O teorema seguinte estabelece que uma função contínua de uma função contínua é contínua. É análogo ao Teorema 2.7.2 e sua prova é similar.

16.3.7 TEOREMA Suponha que f seja uma função de uma única variável e g, uma função de duas variáveis. Suponha, além disso, que g seja contínua em (x_0, y_0) e f seja contínua em $g(x_0, y_0)$. Então, a função composta $f \circ g$ é contínua em (x_0, y_0).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja

$$h(x, y) = \ln (xy - 1)$$

Se $g(x, y) = xy - 1$, g será contínua em todos os pontos em R^2. A função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, que é o conjunto de todos os números positivos. Assim, se f for a função definida por $f(t) = \ln t$, f será contínua para todo $t > 0$. Então, a função h é a função composta $f \circ g$ e, pelo Teorema 16.3.7, é contínua em todos os pontos (x, y) em R^2, para os quais $xy - 1 > 0$. ◀

EXEMPLO 4 Determine todos os pontos onde f é contínua se

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

Solução O domínio de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $x^2 + y^2 - 25 > 0$. Esses são os pontos na região exterior limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 25$. A função f é o quociente de funções g e h para as quais

$$g(x, y) = 1 \qquad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

A função g é uma função constante, sendo, portanto, contínua em toda parte. Segue, do Teorema 16.3.7, que h é contínua em todos os pontos em R^2 para os quais $x^2 + y^2 > 25$. Assim, pelo Teorema 16.3.3(iv), f é contínua em todos os pontos em seu domínio.

EXERCÍCIOS 16.3

Nos Exercícios de 1 a 24, determine todos os pontos em que a função é contínua.

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 1}$
2. $F(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$
3. $h(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$
4. $f(x, y) = \ln xy^2$
5. $f(x, y) = \dfrac{4x^2y + 3y^2}{2x - y}$
6. $g(x, y) = \dfrac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2}$
7. $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$
8. $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$
9. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
   (*Sugestão:* Veja o Exercício 25, Exercícios 16.2.)
10. $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
    (*Sugestão*: veja o Exemplo 5, Secção 16.2.)
11. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
12. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
13. $G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
14. $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
15. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$
16. $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$
17. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$
18. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$
19. $f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$

20. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$
21. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(x + y) + \ln(xy)$
22. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(xy)$
23. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x + y)}{x + y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{se } x + y = 0 \end{cases}$
24. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ x - y & \text{se } x = y \end{cases}$

Nos Exercícios de 25 a 31, a função é descontínua na origem, pois $f(0, 0)$ não existe. Determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina $f(0, 0)$, de tal forma que a nova função seja contínua em $(0, 0)$.

25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$
26. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
27. $f(x, y) = (x + y)\,\text{sen}\dfrac{x}{x^2 + y^2}$
28. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$
29. $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$
30. $f(x, y) = \dfrac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
31. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$
32. A função F é definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{se } x^2 - 3y^2 \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de F consiste em todos os pontos de R^2, exceto aqueles sobre a hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$.

33. A função G é definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{se } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{se } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

Mostre que a região de continuidade de G consiste em todos os pontos de R^2, exceto aqueles sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

34. (a) Dê uma definição de continuidade em um ponto para uma função de três variáveis, similar à Definição 16.3.2. (b) Enuncie teoremas para funções de três variáveis, similares aos Teoremas 16.3.3 e 16.3.7.

Nos Exercícios de 35 a 38, use as definições e teoremas do Exercício 34 para discutir a continuidade da função dada.

35. $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$
36. $f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$
37. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$
38. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

16.4 DERIVADAS PARCIAIS

A discussão sobre derivação de uma função de n variáveis com valores reais reduz-se ao caso unidimensional, se tratarmos uma função de n variáveis como uma função de uma variável de cada vez, mantendo fixas as demais variáveis. Isso nos leva ao conceito de *derivada parcial*. Vamos definir primeiro a derivada parcial de uma função de duas variáveis.

16.4.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis, x e y. A **derivada parcial de f em relação a x** é aquela função, denotada por D_1f, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y** é aquela função, denotada por D_2f, tal que seus valores funcionais em qualquer ponto (x, y) no domínio de f sejam dados por

$$D_2f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se o limite existir.

O processo de encontrar uma derivada parcial é chamado de **derivação parcial**.

D_1f é lido como "D sub 1 de f" (sub é abreviatura de subíndice), e isso denota a função que é a derivada parcial de f em relação à primeira variável.

$D_1f(x, y)$ é lido como "D sub 1 de f de x e y", e isso denota o valor funcional de D_1f no ponto (x, y). Outras notações para D_1f são f_1, f_x e $\frac{\partial f}{\partial x}$. Outras notações para $D_1f(x, y)$ são $f_1(x, y)$, $f_x(x, y)$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Da mesma forma, outras notações para D_2f são f_2, f_y e $\frac{\partial f}{\partial y}$, ou ainda, para $D_2f(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_y(x, y)$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Se $z = f(x, y)$, podemos escrever $\frac{\partial z}{\partial x}$ para $D_1f(x, y)$. Uma derivada parcial não pode ser considerada como uma razão entre ∂z e ∂x, pois nenhum desses símbolos têm significado separado. A notação $\frac{dy}{dx}$ pode representar o quociente de duas diferenciais quando y é uma função de uma única variável x, mas não há uma interpretação similar para $\frac{\partial z}{\partial x}$.

EXEMPLO 1 Aplique a Definição 16.4.1 para achar $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$ se $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$

Solução

$$\begin{aligned}
D_1f(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\,\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\,\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x - 2y) \\
&= 6x - 2y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2f(x, y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\,\Delta y + y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\
&= -2x + 2y
\end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) for um determinado ponto no domínio de f, então

$$\boxed{D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}} \tag{1}$$

se esse limite existir, e

$$\boxed{D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}} \tag{2}$$

se esse limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a fórmula (1) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
D_1 f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27 + 18\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\,\Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (18 + 3\,\Delta x + 4) \\
&= 22
\end{aligned}$$

◀

Fórmulas alternativas de (1) e (2) para $D_1 f(x_0, y_0)$ e $D_2 f(x_0, y_0)$ são dadas por

$$\boxed{D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}} \tag{3}$$

se o limite existir, e

$$\boxed{D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}} \tag{4}$$

se o limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos aplicar a fórmula (3) para encontrar $D_1 f(3, -2)$ para a função f do Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
D_1 f(3, -2) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} (3x + 13) \\
&= 22
\end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** No Exemplo 1 mostramos que

$$D_1 f(x, y) = 6x - 2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o que foi obtido nas Ilustrações 1 e 2. ◀

Comparando a Definição 16.4.1 com a definição de derivada ordinária (3.1.3), vemos que $D_1 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f quando f for considerada função de uma variável x (isto é, se y for mantido constante); e $D_2 f(x, y)$ é a derivada ordinária de f, se f for considerada como função de uma variável y (isto é, se x for mantido constante). Assim sendo, os resultados do Exemplo 1 podem ser obtidos mais facilmente, se aplicarmos os teoremas para derivação ordinária, com y considerado constante ao calcularmos $D_1 f(x, y)$ e com x considerado constante, ao calcularmos $D_2 f(x, y)$. O exemplo a seguir ilustrará isso.

EXEMPLO 2 Ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ se

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \operatorname{sen} xy^2$$

Solução Tratando f como uma função de x e mantendo y constante, temos

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos xy^2$$

Considerando f como uma função de y e mantendo x constante, temos

$$f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy + 2xy \cos xy^2$$

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que (a) $f_1(0, y) = -y$ para todo y e (b) $f_2(x, 0) = x$ para todo x.

Solução

(a) Se $y \neq 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{y^3}{y^2} \\ &= -y \end{aligned}$$

Se $y = 0$, de (3)

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f_1(0, y) = -y$ se $y \neq 0$ e $f_1(0, 0) = 0$, podemos concluir que $f_1(0, y) = -y$ para todo y.

(b) Se $x \neq 0$, de (4)

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^3}{x^2} \\ &= x \end{aligned}$$

Se $x = 0$, de (4)

$$\begin{aligned} f_2(0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f_2(x, 0) = x$ se $x \neq 0$ e $f_2(0, 0) = 0$, então $f_2(x, 0) = x$ para todo x.

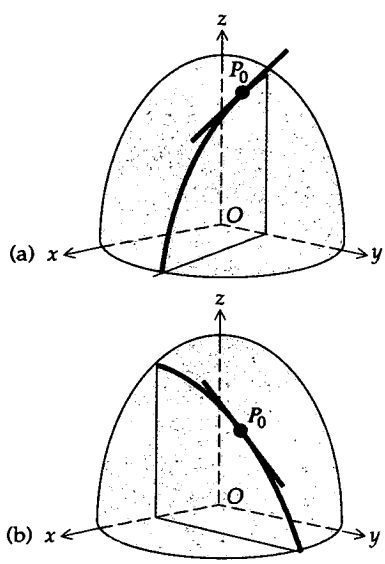


FIGURA 1

Interpretações geométricas das derivadas parciais de uma função de duas variáveis são similares àquelas dadas para funções de uma variável. O gráfico de uma função f de duas variáveis é uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$. Se y for mantida constante (digamos, $y = y_0$), então $z = f(x, y_0)$ será uma equação do traço dessa superfície no plano $y = y_0$. A curva pode ser representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y) \tag{5}$$

pois ela é a intersecção dessas duas superfícies.

Então, $D_1 f(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente à curva dada pelas equações (5) no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, no plano $y = y_0$. Analogamente, $D_2 f(x_0, y_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva cujas equações são

$$x = x_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

no ponto P_0, no plano $x = x_0$. A Figura 1(a) e (b) mostra partes das curvas e das retas tangentes.

EXEMPLO 4 Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

com o plano $y = 2$, no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

Solução A inclinação pedida é o valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(2, 2, \sqrt{3})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

Assim, em $(2, 2, \sqrt{3})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Como toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada. Se f for uma função de duas variáveis x e y, a derivada parcial de f em relação a x no ponto $P_0(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea, em P_0, de $f(x, y)$, por unidade de variação em x (apenas x varia, enquanto y é mantido fixo em y_0). Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em P_0 dará a taxa de variação instantânea, em P_0, de $f(x, y)$, por unidade de variação em y, com x fixado.

EXEMPLO 5 De acordo com a *lei dos gases ideais* para um gás confinado, se P newtons por metros quadrados for a pressão, V metros cúbicos for o volume e T graus for a temperatura, teremos a fórmula

$$PV = kT \tag{6}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de um gás em certo recipiente seja 100 m³ e que a temperatura seja 90° e $k = 8$. (a) Ache a taxa de variação de P por unidade de variação de T se V permanece fixo em 100 m³. (b) Use o resultado da parte (a) para aproximar a taxa de variação na pressão, se a temperatura for aumentada para 92°. (c) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em P se T permanece fixa em 90°. (d) Suponha que a temperatura seja mantida constante. Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no volume, necessária para produzir a mesma variação na pressão que foi obtida na parte (b).

Solução Substituindo $V = 100$, $T = 90$ e $k = 8$ na equação (6), obtemos $P = 7{,}2$.

(a) Resolvendo (6) para P com $k = 8$, obtemos

$$P = \frac{8T}{V}$$

A taxa de variação instantânea de P por variação unitária em T, se V permanece fixo, é $\frac{\partial P}{\partial T}$, e

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$$

Quando $T = 90$ e $V = 100$, $\frac{\partial}{\partial T} = 0{,}08$, que é a resposta pedida.

(b) Do resultado da parte (a), quando T for acrescido de 2° (e V permanecer fixo), o aumento aproximado em P será $2(0{,}08) = 0{,}16$. Concluímos, então, que se a temperatura for aumentada de 90° para 92°, o aumento na pressão será de aproximadamente 0,16 N/m².

(c) Resolvendo (6) para V quando $k = 8$, obtemos

$$V = \frac{8T}{P}$$

A taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P, se T permanece fixa, é $\frac{\partial V}{\partial P}$, e

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}$$

Quando $T = 90$ e $P = 7{,}2$,

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8(90)}{(7{,}2)^2}$$

$$= -\frac{125}{9}$$

que é a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P quando $T = 90$ e $P = 7{,}2$, se T permanecer fixa em 90°.

(d) Se P for acrescido de 0,16 e T for mantida fixa, então, do resultado da parte (c), a variação em V deve ser de $(0{,}16)(-\frac{125}{9}) = -\frac{20}{9}$. Logo, devemos diminuir o volume em $\frac{20}{9}$ m³, se a pressão for aumentada de 7,2 para 7,36 N/m².

Vamos estender o conceito de derivada parcial para funções de n variáveis.

16.4.2 DEFINIÇÃO Seja $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um ponto em R^n e seja f uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Então a derivada parcial de f em relação a x_k é a função, denotada por $D_k f$, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de f seja dado por

$$D_k f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

se esse limite existir.

Em particular, se f for uma função de três variáveis x, y e z, então as derivadas parciais de f serão dadas por

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

se esses limites existirem.

EXEMPLO 6 Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$, verificamos que

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

Solução Mantidos y e z constantes, obtemos

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

Mantidos x e z constantes, obtemos

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

Mantidos x e y constantes, obtemos

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16.4

Nos Exercícios de 1 a 6, aplique a Definição 16.4.1 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

1. $f(x, y) = 6x + 3y - 7$; $D_1f(x, y)$
2. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$; $D_1f(x, y)$
3. $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$; $D_2f(x, y)$
4. $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$; $D_2f(x, y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(x, y)$
6. $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y}$; $f_y(x, y)$

Nos Exercícios de 7 a 10, aplique a Definição 16.4.2 para encontrar as derivadas parciais indicadas.

7. $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$; $D_2f(x, y, z)$
8. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$; $D_1f(x, y, z)$
9. $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$; $f_r(x, y, z, r, t)$
10. $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2$; $f_v(r, s, t, u, v, w)$
11. Dada $f(x, y) = x^2 - 9y^2$, encontre $D_1f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (1); (b) aplicando a fórmula (3); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.
12. Para a função do Exercício 11, ache $D_2f(2, 1)$, (a) aplicando a fórmula (2); (b) aplicando a fórmula (4); (c) aplicando a Definição 16.4.1 e então substituindo x e y por 2 e 1, respectivamente.

Nos Exercícios de 13 a 24, ache a derivada parcial indicada, mantendo todas as variáveis constantes menos uma, e aplicando os teoremas para derivação ordinária.

13. $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$; $D_1f(x, y)$
14. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$; $D_2f(x, y)$
15. $f(\theta, \phi) = \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\phi$; $f_\phi(\theta, \phi)$
16. $f(r, \theta) = r^2 \cos \theta - 2r \operatorname{tg} \theta$; $f_\theta(r, \theta)$
17. $z = e^{y/x} \ln \dfrac{x^2}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
18. $r = e^{-\theta} \cos(\theta + \phi)$; $\dfrac{\partial r}{\partial \theta}$
19. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$
20. $u = \operatorname{tg}^{-1}(xyzw)$; $\dfrac{\partial u}{\partial w}$
21. $f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz)$; $f_3(x, y, z)$
22. $f(x, y, z) = e^{xy} \operatorname{senh} 2z - e^{xy} \cosh 2z$; $f_z(x, y, z)$
23. $f(x, y, z) = e^{xyz} + \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{3xy}{z^2}$; $f_y(x, y, z)$
24. $f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \operatorname{sen} \theta + 5e^r \cos \theta \operatorname{sen} \phi - 2 \cos \phi$; $f_2(r, \theta, \phi)$
25. If $f(r, \theta) = r \operatorname{tg} \theta - r^2 \operatorname{sen} \theta$, ache (a) $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $f_2(3, \pi)$.
26. If $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z)$, ache (a) $f_1(3, 0, 17)$; (b) $f_2(1, 0, 2)$; (c) $f_3(0, 0, 1)$.

Nos Exercícios 27 e 28, ache $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

27. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \ln \operatorname{sen} t \, dt$
28. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^{\cos t} \, dt$
29. Dada $u = \operatorname{sen} \dfrac{r}{t} + \ln \dfrac{t}{r}$. Verifique $t\dfrac{\partial u}{\partial t} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$.
30. Dada $w = x^2y + y^2z + z^2x$. Prove que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$$
31. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
Ache (a) $f_1(0, 0)$; (b) $f_2(0, 0)$.

32. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Ache (a) $f_1(0, y)$ se $y \neq 0$; (b) $f_1(0, 0)$.

33. Para a função do Exercício 32, ache (a) $f_2(x, 0)$ se $x \neq 0$; (b) $f_2(0, 0)$.

34. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

35. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $(2, 1, 5)$. Faça um esboço. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

36. Ache as equações da reta tangente à curva de intersecção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $y = 2$, no ponto $(1, 2, 2)$.

37. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é T graus e $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Se a distância for medida em centímetros, ache a taxa de variação da temperatura em relação à distância movida ao longo da placa nas direções dos eixos positivos x e y, respectivamente, no ponto $(3, 1)$.

38. Use a lei dos gases ideais para um gás confinado (veja o Exemplo 5) e mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

39. Se V for o valor atual de uma anuidade ordinária de pagamentos iguais de \$ 100,00 ao ano, por t anos, a uma taxa de juros de $100i\%$ ao ano, então

$$V = 100\left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right]$$

(a) Ache a taxa de variação de V por unidade de variação em i, se t permanecer fixo em 8. (b) Use o resultado de (a) para encontrar a variação aproximada no valor atual, se a taxa de juros mudar de 6 para 7% e o tempo permanecer fixo em 8 anos. (c) Ache a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em t, se i permanecer fixo em 0,06. (d) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada do valor atual, se o tempo for diminuído de 8 para 7 anos e taxa de juros estiver fixa em 6%.

40. Suponha que $10.000x$ da unidade monetária seja o inventário feito numa loja, y seja o número de balconistas na loja, P seja o lucro semanal da loja e

$$P = 3.000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

onde $15 \leqslant x \leqslant 25$ e $5 \leqslant y \leqslant 12$. No momento, o inventário é de \$ 180.000,00 e existem 8 balconistas. (a) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em x, se y permanece fixo em 8. (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o inventário mudar de \$ 180.000,00 para \$ 200.000,00 e o número de balconistas permanecer fixo em 8. (c) Ache a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em y, se x permanece fixo em 18. (d) Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal, se o número de balconistas for aumentado de 8 para 10 e o inventário permanecer fixo em \$ 180.000,00.

41. Se S for a área da superfície em metros quadrados do corpo de uma pessoa, então a fórmula que dá um valor aproximado para S será

$$S = 2W^{0,4}H^{0,7}$$

onde W kg e H m são o peso e a altura da pessoa. Se $W = 70$ kg e $H = 1,8$ m, ache $\dfrac{\partial S}{\partial W}$ e $\dfrac{\partial S}{\partial H}$ e interprete o resultado.

16.5 DIFERENCIABILIDADE E DIFERENCIAL TOTAL

Definiremos a *diferenciabilidade* de funções de mais de uma variável através de uma equação envolvendo o incremento de uma função. Para motivar essa definição obtemos primeiro uma representação para o incremento de uma função de uma única variável que é similar àquela que irá aparecer em nossa Definição 16.5.2 de diferenciabilidade. Discutimos o incremento de uma função de uma única variável na Secção 3.1 e lembremos que, naquela secção, se f for uma função derivável de x, e $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde Δx e Δy são incrementos de x e y e

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Quando $|\Delta x|$ for pequeno e $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difere de $f'(x)$ por um número pequeno que depende de Δx e será denotado por ϵ. Então,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \qquad \text{se } \Delta x \neq 0$$

onde ϵ é uma função de Δx. Dessa equação obtemos

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x$$

onde ϵ é uma função de Δx e $\epsilon \to 0$ se $\Delta x \to 0$.

Do exposto acima, segue que se a função f for derivável em x_0, o incremento de f em x_0, denotado por $\Delta f(x_0)$, será dado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad \text{onde} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$$

Para funções de duas ou mais variáveis, uma equação correspondente a esta é usada para definir a diferenciabilidade de uma função. Além disso, da definição, determinamos um critério para uma função ser diferenciável em um ponto. Os detalhes serão dados para uma função de duas variáveis e começaremos por definir o *incremento* de tal função.

16.5.1 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y, então o **incremento de f** no ponto (x_0, y_0), denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, é dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

A Figura 1 ilustra essa definição para uma função que é contínua no disco aberto contendo os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. A figura mostra parte da superfície $z = f(x, y)$. $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$, onde Q é o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0))$ e R é o ponto com as coordenadas $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$.

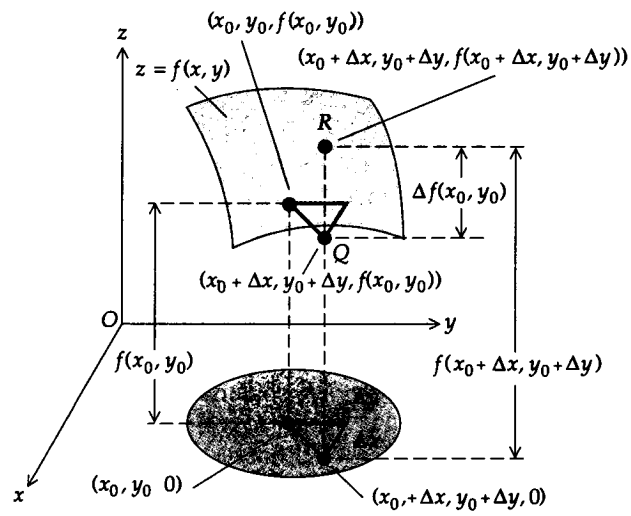


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para a função f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

encontramos o incremento de f num ponto (x_0, y_0) qualquer.

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2) \\
&= 3x_0 + 3\,\Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2\,\Delta x - 2x_0 y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y \\
&\qquad - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2 \\
&= 3\,\Delta x - y_0^2\,\Delta x - 2x_0 y_0\,\Delta y - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

◀

16.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y e o incremento de f em (x_0, y_0) puder ser escrito como

$$\Delta f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0)\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, tais que $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, então diremos que f é **diferenciável** em (x_0, y_0).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar a Definição 16.5.2 para provar que a função da Ilustração 1 é diferenciável em todos os pontos de R^2. Precisamos mostrar que para todos os pontos (x_0, y_0) em R^2 podemos encontrar um ϵ_1 e um ϵ_2, tais que

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y = \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

e $\epsilon_1 \to 0$, bem como $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Como $f(x, y) = 3x - xy^2$,

$$D_1 f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad \text{e} \quad D_2 f(x_0, y_0) = -2x_0 y_0$$

Com esses valores e o valor de $\Delta f(x_0, y_0)$ da Ilustração 1,

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x - D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\,\Delta x\,\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

O lado direito da igualdade acima pode ser escrito das seguintes formas:

$$[-2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2]\,\Delta x + (-x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

$$(-2y_0\,\Delta y)\,\Delta x + (-\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

$$[-(\Delta y)^2]\,\Delta x + (-2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y)\,\Delta y$$

$$0 \cdot \Delta x + [-2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y]\,\Delta y$$

Assim, há quatro pares possíveis de valores para ϵ_1 e ϵ_2:

$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y - (\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -x_0\,\Delta y$$

$$\epsilon_1 = -2y_0\,\Delta y \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -\Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$

$$\epsilon_1 = -(\Delta y)^2 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - x_0\,\Delta y$$

$$\epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = -2y_0\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y - x_0\,\Delta y$$

Para cada par

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0$$

Deve ser notado que é necessário encontrar apenas um par de valores para ϵ_1 e ϵ_2. ◀

16.5.3 TEOREMA Se uma função f de duas variáveis for diferenciável em um ponto, ela será contínua nesse ponto.

Prova Se f for diferenciável em um ponto (x_0, y_0), segue, da Definição 16.5.2, que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

onde $\epsilon_1 \to 0$, bem como $\epsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Logo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

Passando ao limite ambos os membros da igualdade acima quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, obtemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

Se expressarmos $x_0 + \Delta x = x$ e $y_0 + \Delta y = y$, então "$(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$" é equivalente a "$(x, y) \to (x_0, y_0)$". Assim, de (1),

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

o que prova a continuidade de f em (x_0, y_0). ■

O Teorema 16.5.3 estabelece que para uma função de duas variáveis, *diferenciabilidade implica continuidade*. Mas a mera existência de derivadas parciais $D_1 f$ e $D_2 f$ num ponto não implica diferenciabilidade naquele ponto. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

prove que $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, ambas $D_1 f(0, 0)$ e $D_2 f(0, 0)$ existem.

No Exemplo 4 da Secção 16.2 demonstramos que para essa função, $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe; logo, f não é contínua em $(0, 0)$. Como f não é contínua em $(0, 0)$, segue, do Teorema 16.5.3, que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

O teorema a seguir dá condições de garantir que uma função seja diferenciável em um ponto. É muito mais fácil do que aplicar a Definição 16.5.2. Sua prova aparece na Secção Suplementar 16.8.

16.5.4 TEOREMA Seja f uma função de duas variáveis x e y. Suponha que $D_1 f$ e $D_2 f$ existam em um disco aberto $B(P_0; r)$, onde P_0 é o ponto (x_0, y_0). Então, se $D_1 f$ e $D_2 f$ forem contínuas em P_0, f será diferenciável em P_0.

EXEMPLO 2 Use o Teorema 16.5.4 para provar que a função definida por

$$f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$$

é diferenciável em toda parte.

Solução Calculamos as derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 + 3y \qquad D_2 f(x, y) = 3x - 15y^2$$

Como $D_1 f$ e $D_2 f$ são contínuas em toda parte, segue do Teorema 16.5.4 que f é diferenciável em toda parte.

O argumento usado para a função polinomial f do Exemplo 2 pode ser aplicado a qualquer função polinomial. Assim sendo, toda função polinomial é diferenciável em toda parte.

Observe que as condições dadas no Teorema 16.5.4 são suficientes para provar a diferenciabilidade de uma função em um ponto. Mas elas não são condições necessárias. Isto é, uma função pode ser diferenciável em um ponto, mesmo que suas derivadas parciais não sejam contínuas neste ponto. Um exemplo de tal função aparece nos Exercícios de 42 até 45. Uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 16.5.4 será dita **continuamente diferenciável** no ponto P_0. Assim, a diferenciabilidade contínua em um ponto é uma condição suficiente, mas não necessária, para a diferenciabilidade no ponto.*

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

use o Teorema 16.5.4 para provar que f é diferenciável em (0, 0).

Solução Para encontrar $D_1 f$, consideremos dois casos: $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 0)$. Se $(x, y) = (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)$. A fim de encontrar $D_1 f(x, y)$, usamos o teorema para a derivada ordinária de um quociente e consideramos y como uma constante.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

* **N. do R.**: Observe que para uma função de *uma* variável a existência de derivada e a diferenciabilidade são equivalentes, o que *não* acontece para funções de várias variáveis. Por esse motivo, não é rigorosamente correto usar o termo "diferenciar" no lugar de "derivar" de forma geral, embora isso seja comum.

A função D_1f é, portanto, definida por

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Da mesma forma, obtemos a função D_2f, definida por

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ambas, D_1f e D_2f, existem em todo disco aberto, tendo seu centro na origem. Resta mostrar que D_1f e D_2f são contínuas em (0, 0).

Como $D_1f(0, 0) = 0$, D_1f será contínua em (0, 0) se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1f(x, y) = 0$$

Logo, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| < \epsilon \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| &= \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Assim, uma escolha adequada para δ é $2\delta = \epsilon$, isto é, $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$. Com esse δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \tfrac{1}{2}\epsilon \\ \Rightarrow \quad & 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2(\tfrac{1}{2}\epsilon) \\ \Rightarrow \quad & \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \quad & \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Mostramos, portanto, que (2) está satisfeita. Logo, D_1f é contínua em (0, 0). Da mesma forma, podemos mostrar que D_2f é contínua em (0, 0). Segue então, do Teorema 16.5.4, que f é diferenciável em (0, 0).

A equação na Definição 16.5.2 é

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \tag{3}$$

A expressão envolvendo os dois primeiros termos no segundo membro dessa equação é chamada de a *parte principal* de $\Delta f(x_0, y_0)$ ou a *diferencial total* de f em (x_0, y_0).

16.5.5 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y e f for diferenciável em (x, y) então a **diferencial total** de f será a função df tendo valores funcionais dados por

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1 f(x, y)\Delta x + D_2 f(x, y)\Delta y$$

Observe que df é uma função de quatro variáveis x, y, Δx e Δy. Se $z = f(x, y)$, por vezes escrevemos dz em lugar de $df(x, y, \Delta x, \Delta y)$, e então escrevemos

$$dz = D_1 f(x, y)\Delta x + D_2 f(x, y)\Delta y \tag{4}$$

Se, em particular, $f(x, y) = x$, então $z = x$, $D_1 f(x, y) = 1$ e $D_2 f(x, y) = 0$; assim de (4) temos $dz = \Delta x$. Como $z = x$, para essa função $dx = \Delta x$. De forma análoga, se tomarmos $f(x, y) = y$, então $z = y$, $D_1 f(x, y) = 0$ e $D_2 f(x, y) = 1$; assim (4) resulta em $dz = \Delta y$. Como $z = y$, então para essa função $dy = \Delta y$. Logo, definimos diferenciais das variáveis independentes como $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Então, (4) pode ser escrita como

$$dz = D_1 f(x, y)\, dx + D_2 f(x, y)\, dy \tag{5}$$

e no ponto (x_0, y_0),

$$dz = D_1 f(x_0, y_0)\, dx + D_2 f(x_0, y_0)\, dy \tag{6}$$

Em (3), seja $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$, $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Então,

$$\Delta z = D_1 f(x_0, y_0)\, dx + D_2 f(x_0, y_0)\, dy + \epsilon_1\, dx + \epsilon_2\, dy$$

Comparando essa equação e (6), observe que quando dx (isto é, Δx) e dy (isto é, Δy) estão próximos de zero, e por isto ϵ_1 e ϵ_2 estarão também próximos de zero, então dz será uma aproximação de Δz. Antes de dar um exemplo, vamos escrever (5) como a notação $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, em vez de $D_1 f(x, y)$ e $D_2 f(x, y)$, respectivamente:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \tag{7}$$

EXEMPLO 4 Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do metal a ser usado é de \$ 10 por centímetro cúbico, ache por diferenciais o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.

Solução A fórmula do volume de um cilindro circular reto, onde o volume é V cm^3, o raio é r cm, e a altura é h cm, é

$$V = \pi r^2 h$$

O volume exato de metal no recipiente é a diferença entre os volumes de dois cilindros circulares retos para os quais $r = 2{,}1$, $h = 6{,}2$ e $r = 2$, $h = 6$, respectivamente. ΔV daria o volume exato de metal, mas como somente um valor aproximado foi pedido, vamos calcular dV. De (7),

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial h}\, dh \\ &= 2\pi r h\, dr + \pi r^2\, dh \end{aligned}$$

Com $r = 2$, $h = 6$, $dr = 0{,}1$ e $dh = 0{,}2$, obtemos

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2)(6)(0{,}1) + \pi(2)^2(0{,}2) \\ &= 3{,}2\pi \end{aligned}$$

Assim, $\Delta V \approx 3{,}2\pi$ e então há aproximadamente $3{,}2\pi$ cm³ de metal no recipiente. Como o custo do metal é de \$ 10 por centímetro cúbico e $10 \cdot 3{,}2\pi = 32\pi$ e $32\pi \approx 100{,}53$, o custo aproximado do metal a ser usado na fabricação do recipiente é de \$ 100,53.

Os conceitos de diferenciabilidade e diferencial total serão aplicados a funções de n variáveis.

16.5.6 DEFINIÇÃO Se f for uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, xn$, e $\overline{P}$ for o ponto $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, então o **incremento de** f em $\overline{P}$ será dado por

$$\Delta f(\overline{P}) = f(\overline{x}_1 + \Delta x_1, \overline{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \overline{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{P})$$

16.5.7 DEFINIÇÃO Se f for uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e o incremento de f no ponto $\overline{P}$ for escrito como

$$\Delta f(\overline{P}) = D_1 f(\overline{P})\,\Delta x_1 + D_2 f(\overline{P})\,\Delta x_2 + \ldots + D_n f(\overline{P})\,\Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 + \epsilon_2 \Delta x_2 + \ldots + \epsilon_n \Delta x_n$$

onde $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0$, ..., $\epsilon_n \to 0$, quando

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \to (0, 0, \ldots, 0)$$

então, f será **diferenciável** em $\overline{P}$.

Analogamente ao Teorema 16.5.4, pode ser provado que condições suficientes para uma função f de n variáveis ser diferenciável num ponto $\overline{P}$ são que $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ existam todas numa bola aberta $B(\overline{P}; r)$ e que $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ sejam todas contínuas em $\overline{P}$. Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue que para funções de n variáveis a diferenciabilidade implica continuidade. No entanto, a existência de derivadas parciais $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ em um ponto não implica a diferenciabilidade da função no ponto.

16.5.8 DEFINIÇÃO Se f for uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e f for diferenciável em P, então a **diferencial total** de f será a função df tendo valores funcionais dados por

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = D_1 f(P)\,\Delta x_1 + D_2 f(P)\,\Delta x_2 + \ldots + D_n f(P)\,\Delta x_n$$

Sendo $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definindo $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$ e usando a notação $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ em vez de $D_i f(P)$, podemos escrever a igualdade da Definição 16.5.8 como

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n \tag{8}$$

EXEMPLO 5 As dimensões de uma caixa são medidas e obtemos 10 cm, 12 cm e 15 cm, e as medidas são corretas até 0,02 cm. Calcule aproximadamente o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa a partir das medidas dadas. Ache também o erro percentual aproximado.

Solução Seja V cm³ o volume da caixa cujas dimensões são x cm, y cm e z cm. Então,

$$V = xyz$$

O valor exato do erro é encontrado de ΔV; contudo, vamos usar dV como uma aproximação a ΔV. De (8), para três variáveis independentes,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Da informação dada $|\Delta x| \leqslant 0{,}02$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}02$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}02$. Para encontrar o erro máximo no volume, tomamos o erro máximo cometido na medida das três dimensões. Assim, tomando $dx = 0{,}02$, $dy = 0{,}02$, $dz = 0{,}02$ e $x = 10$, $y = 12$, $z = 15$, temos

$$dV = (12)(15)(0{,}02) + (10)(15)(0{,}02) + (10)(12)(0{,}02)$$
$$= 9$$

Logo, $\Delta V \approx 9$, então o máximo erro possível no cálculo do volume com as medidas dadas é de aproximadamente 9 cm³.

O erro relativo é encontrado ao dividirmos o erro pelo valor real. Logo, o erro relativo no cálculo do volume a partir das medidas dadas é $\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V}$. Como $\frac{dV}{V} = \frac{9}{1.800}$, $\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}005$. Assim sendo, o erro percentual aproximado é de 0,5%.

EXERCÍCIOS 16.5

1. Se $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, ache:
   (a) $\Delta f(1,4)$, o incremento de f em (1,4);
   (b) $\Delta f(1,4)$ quando $\Delta x = 0{,}03$ e $\Delta y = -0{,}02$;
   (c) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em (1,4);
   (d) $df(1, 4, 0{,}03, -0{,}02)$.
2. Se $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, ache:
   (a) $\Delta f(2, -1)$, o incremento de f em $(2, -1)$;
   (b) $\Delta f(2, -1)$ quando $\Delta x = -0{,}01$ e $\Delta y = 0{,}02$;
   (c) $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em $(2, -1)$;
   (d) $df(2, -1, -0{,}01, 0{,}02)$.
3. Se $g(x, y) = xye^{xy}$, ache:
   (a) $\Delta g(2, -4)$, o incremento de g em $(2, -4)$;
   (b) $\Delta g(2, -4)$ quando $\Delta x = -0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}2$;
   (c) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de g em $(2, -4)$;
   (d) $dg(2, -4, -0{,}1, 0{,}2)$.
4. Se $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$, ache:
   (a) $\Delta h(3,0)$, o incremento de h em (3, 0);
   (b) $\Delta h(3, 0)$ quando $\Delta x = 0{,}04$ e $\Delta y = 0{,}03$;
   (c) $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de h em (3, 0);
   (d) $dh(3, 0, 0{,}04, 0{,}03)$.
5. Se $F(x, y, z) = xy + \ln(y, z)$, ache:
   (a) $\Delta F(4, 1, 5)$, o incremento de F em (4, 1, 5);
   (b) $\Delta F(4, 1, 5)$ quando $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}04$ e $\Delta z = -0{,}03$;
   (c) $df(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de F em (4, 1, 5);
   (d) $dF(4, 1, 5, 0{,}02, 0{,}04, -0{,}03)$.
6. Se $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^2$, ache:
   (a) $\Delta G(-3, 0, 2)$, o incremento de G em $(-3, 0, 2)$;
   (b) $\Delta G(-3, 0, 2)$ quando $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$, $\Delta z = 0{,}01$;
   (c) $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de G em $(-3, 0, 2)$;
   (d) $dG(-3, 0, 2, 0{,}01, 0{,}03, -0{,}01)$.

Nos Exercícios de 7 a 14, ache a diferencial total dw.

7. $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$
8. $w = y \operatorname{tg} x^2 - 2xy$
9. $w = x \cos y - y \operatorname{sen} x$
10. $w = xe^{2y} + e^{-y}$
11. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
12. $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$
13. $w = x \operatorname{tg}^{-1} z - \dfrac{y^2}{z}$
14. $w = e^{yz} - \cos xz$

Nos Exercícios de 15 a 18, prove que f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, fazendo o seguinte: (a) ache $\Delta f(x_0, y_0)$ para a função dada; (b) ache um ϵ_1 e um ϵ_2, tais que a equação (3) seja satisfeita; (c) mostre que ϵ_1 e ϵ_2, encontrados em (b), tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

15. $f(x, y) = x^2y - 2xy$
16. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
17. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$
18. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

19. Dada $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 2 & \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq 1 \end{cases}$

Prove que $D_1f(1, 1)$ e $D_2f(1, 1)$ existem, mas f não é diferenciável em (1, 1).

20. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em (0, 0).

Nos Exercícios de 21 a 27, use o Teorema 16.5.4 para provar que a função dada é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

21. $g(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = \dfrac{3x - 4y}{x^2 + 8y}$

23. $f(x, y) = 3 \ln xy + 5 \operatorname{sen} x$

24. $g(x, y) = y \ln x - \dfrac{x}{y}$

25. $h(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + y) + \dfrac{1}{x - y}$

26. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y + e^{-2x} \cos y$

27. $f(x, y) = ye^{3x} - xe^{-3y}$

28. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Essa função é contínua em (0, 0) (veja o Exemplo 1, Secção 16.3). Prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas D_1f e D_2f não são contínuas em (0, 0).

29. Dada $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Prove que f é diferenciável em (0, 0), usando o Teorema 16.5.4.

Nos Exercícios de 30 a 32, prove que f é diferenciável em todos os pontos de R^3, das seguintes maneiras: (a) ache $\Delta f(x_0, y_0, z_0)$; (b) ache ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3, tais que a igualdade da Definição 16.5.7 seja satisfeita; (c) mostre que ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3, encontrados em (b), tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ tendem a (0, 0, 0).

30. $f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$

31. $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

32. $f(x, y, z) = 2x^2z - 3yz^2$

33. Dada $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

(a) Mostre que $D_1f(0, 0, 0)$, $D_2f(0, 0, 0)$ e $D_3f(0, 0, 0)$ existem; (b) usando o fato de que diferenciabilidade implica continuidade, prove que f não é diferenciável em (0, 0, 0).

34. Dada $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

Prove que f é diferenciável em (0, 0, 0).

35. Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter um comprimento interno de 8 m, uma largura interna de 5 m, uma altura de 4 m e uma espessura de 4 cm. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessário para construir o recipiente.

36. Use a diferencial total para encontrar aproximadamente o erro máximo no cálculo da área do triângulo retângulo a partir dos comprimentos dos catetos que medem 6 e 8 cm, respectivamente, com um erro possível de 0,1 cm para cada medida. Ache também o erro percentual aproximado.

37. Usando a diferencial total, ache o erro máximo aproximado no cálculo do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo a partir das medidas do Exercício 36. Ache também o erro percentual aproximado.

38. Se a lei dos gases ideiais (veja o Exemplo 5, Secção 16.4) for usada para encontrar P quando T e V são dados, mas há um erro de 0,3% na medida de T e um erro de 0,8% na medida de V, ache, aproximadamente, o erro percentual máximo em P.

39. A gravidade específica s de um objeto é dada pela fórmula

$$s = \frac{A}{A - W}$$

onde A é o número de quilogramas no peso do objeto no ar e W é o número de quilogramas no peso do objeto na água. Se o peso de um objeto no ar é de 20 quilogramas com um erro possível de 0,01 quilogramas e seu peso na água é de 12 quilogramas, com um erro possível de 0,02 quilogramas, ache, aproximadamente, o erro máximo possível no cálculo de s a partir dessas medidas. Ache também o erro máximo relativo possível.

40. Uma caixa de madeira é feita de tábuas que têm $\frac{2}{3}$ cm de espessura. O comprimento interno é de 0,6 m, a largura interna é de 0,3 m, a profundidade interna é de 0,4 m e a caixa não tem tampa. Use a diferencial total para encontrar a quantidade aproximada de madeira a ser usada na caixa.

41. Uma companhia foi contratada para fabricar 10.000 caixotes de madeira, fechados, tendo dimensões de 3 m, 4 m e 5 m. O custo da madeira a ser usada é de \$ 3 por metro quadrado. Se a máquina usada para cortar os pedaços de madeira tiver um erro possível de 0,5 cm em cada dimensão, ache, aproximadamente, usando a diferencial total, o erro máximo possível no custo estimado da madeira.

Nos Exercícios de 42 a 45, mostramos que uma função pode ser diferenciável em um ponto, mesmo que não seja continuamente diferenciável nele. Assim, as condições do Teorema 16.5.4 são suficientes, mas não necessárias, para a diferenciabilidade. A função f nesses exercícios é definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

42. Ache $\Delta f(0, 0)$.

43. Ache $D_1f(x, y)$ e $D_2f(x, y)$.

44. Prove que f é diferenciável em (0, 0), usando a Definição 16.5.2 e os resultados dos Exercícios 42 e 43.

45. Prove que D_1f e D_2f não são contínuas em (0, 0).

16.6 A REGRA DA CADEIA

Lembre-se de que com a notação de Leibniz, a regra da cadeia para uma função de uma única variável é a seguinte: se y for uma função de u e $\frac{dy}{du}$ existir, e u for uma função de x e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de x e $\frac{dy}{dx}$ existe, sendo dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vamos considerar a regra da cadeia para uma função de duas variáveis, onde cada uma delas também é função de duas variáveis.

16.6.1 TEOREMA
A Regra da Cadeia

Se u for uma função diferenciável de x e y, definida por $u = f(x, y)$, onde $x = F(r, s)$, $y = G(r, s)$ e $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}$ todas existirem, então u será uma função de r e s e

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Prova Vamos provar a regra da cadeia para $\frac{\partial u}{\partial r}$. A demonstração de $\frac{\partial u}{\partial s}$ é análoga.

Se s for mantido fixo e r variar por uma quantidade Δr, então x variará por uma quantidade Δx e y variará por uma quantidade Δy. Assim,

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \tag{1}$$

e

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s) \tag{2}$$

Como f é diferenciável,

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y)\,\Delta x + D_2 f(x, y)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y \tag{3}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y)$ aproxima-se de $(0, 0)$. Além disso, vamos exigir que $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$. Faremos essa exigência de tal forma que ϵ_1 e ϵ_2, sendo funções de Δx e Δy, serão contínuas em $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$.

Se em (3) substituirmos $\Delta f(x, y)$ por Δu, $D_1 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $D_2 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial y}$ e dividirmos ambos os membros por $\Delta r (\Delta r \neq 0)$, obteremos

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta r} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Tomando o limite de ambos os membros quando Δr tende a zero, obtemos

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_1\right) \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_2\right) \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} \tag{4}$$

Como u é uma função de x e y e ambas são funções de r e de s, u será uma função de r e de s. Como s é mantido fixo enquanto r varia por uma quantidade Δr.

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial r} \tag{5}$$

Também

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r} \tag{6}$$

Como $\dfrac{\partial x}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ existem, F e G são, cada uma, contínuas em relação à variável r. (*Nota*: A existência de derivadas parciais não implica continuidade em relação a todas as variáveis simultaneamente, como vimos na secção anterior, mas, da mesma forma que com funções de uma única variável, ela implica a continuidade da função em relação a cada variável separadamente.) Assim, de (1),

$$\lim_{\Delta r \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta r \to 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)]$$
$$= F(r, s) - F(r, s)$$
$$= 0$$

e de (2),

$$\lim_{\Delta r \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta r \to 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)]$$
$$= G(r, s) - G(r, s)$$
$$= 0$$

Assim, quando Δr tende a zero, ambos Δx e Δy tendem a zero. E como ambos ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero quando $(\Delta x, \Delta y)$ tende a $(0, 0)$, podemos concluir que

$$\lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta r \to 0} \epsilon_2 = 0 \tag{7}$$

Ainda é possível que para certos valores de Δr, $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0$. Como exigimos em tal caso que $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$, os limites em (7) ainda são zero. Substituindo (5), (6) e (7) em (4), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

como queríamos demonstrar. ■

EXEMPLO 1 Dada

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = re^s \qquad y = re^{-s}$$

encontre $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$.

Solução

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = e^s$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = re^s \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s} \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$$

Da regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{x}{x^2 + y^2}(e^s) + \frac{y}{x^2 + y^2}(e^{-s}) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x}{x^2 + y^2}(re^s) + \frac{y}{x^2 + y^2}(-re^{-s})$$

$$= \frac{xe^s + ye^{-s}}{x^2 + y^2} \qquad = \frac{r(xe^s - ye^{-s})}{x^2 + y^2}$$

Conforme mencionado antes, os símbolos $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ etc., não devem ser considerados como frações. Os símbolos ∂u, ∂x etc., não têm significado sozinhos. Para funções de uma variável, a regra da cadeia é facilmente lembrada, se considerarmos uma derivada ordinária como o quociente de duas diferenciais; porém, não há nenhuma interpretação similar para derivadas parciais.

Outra dificuldade da notação surge quando consideramos u como uma função de x e y e então, como uma função de r e s. Se $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ e $y = G(r, s)$, então $u = f(F(r, s), G(r, s))$. (É incorreto escrever $u = f(r, s)$ para denotar a função composta.)

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1,

$$u = f(x, y) \qquad x = F(r, s) \qquad y = G(r, s)$$
$$= \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad = re^s \qquad = re^{-s}$$

Assim,

$$u = f(F(r, s), G(r, s))$$
$$= \ln\sqrt{r^2e^{2s} + r^2e^{-2s}}$$

Observe que

$$f(r, s) = \ln\sqrt{r^2 + s^2}$$

Assim, $f(r, s) \neq u$. ◀

Se expressarmos $f(F(r, s), G(r, s)) = h(r, s)$, então as equações do Teorema 16.6.1 podem ser escritas respectivamente como

$$h_1(r, s) = f_1(x, y)F_1(r, s) + f_2(x, y)G_1(r, s)$$

$$h_2(r, s) = f_1(x, y)F_2(r, s) + f_2(x, y)G_2(r, s)$$

No enunciado do Teorema 16.6.1, as variáveis independentes são r e s, enquanto que u é a variável dependente. As variáveis x e y podem ser chamadas de variáveis intermediárias. Vamos estender a regra da cadeia a n variáveis intermediárias e m variáveis independentes.

16.6.2 TEOREMA
A Regra da Cadeia Generalizada

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função de m variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Suponha ainda que cada uma das derivadas parciais $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) exista. Então, u é uma função de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, e

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)$$

A demonstração é uma extensão da prova do Teorema 16.6.1.

Observe que na regra da cadeia generalizada há tantos termos no segundo membro de cada equação quantos forem as variáveis intermediárias.

EXEMPLO 2 Dada

$$u = xy + xz + yz \qquad x = r \qquad y = r\cos t \qquad z = r\,\text{sen}\,t$$

ache $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Solução Da regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \\
&= (y + z)(1) + (x + z)(\cos t) + (x + y)\,(\text{sen}\,t) \\
&= y + z + x\cos t + z\cos t + x\,\text{sen}\,t + y\,\text{sen}\,t \\
&= r\cos t + r\,\text{sen}\,t + r\cos t + (r\,\text{sen}\,t)(\cos t) + r\,\text{sen}\,t + (r\cos t)(\text{sen}\,t) \\
&= 2r\,(\cos t + \text{sen}\,t) + r(2\,\text{sen}\,t\cos t) \\
&= 2r\,(\cos t + \text{sen}\,t) + r\,\text{sen}\,2t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
&= (y + z)(0) + (x + z)(-r\,\text{sen}\,t) + (x + y)(r\cos t) \\
&= (r + r\,\text{sen}\,t)(-r\,\text{sen}\,t) + (r + r\cos t)(r\cos t) \\
&= -r^2\,\text{sen}\,t - r^2\,\text{sen}^2 t + r^2\cos t + r^2\cos^2 t \\
&= r^2(\cos t - \text{sen}\,t) + r^2(\cos^2 t - \text{sen}^2\,t) \\
&= r^2(\cos t - \text{sen}\,t) + r^2\cos 2t
\end{aligned}$$

Suponha agora que u seja uma função diferencial de duas variáveis x e y, ambas funções diferenciáveis de uma única variável t; e assim, em vez da deri-

vada parcial de u em relação a t temos a derivada ordinária de u em relação a t, que é dada por

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)} \tag{8}$$

Chamamos $\frac{du}{dt}$, dada por (8), de **derivada total** de u em relação a t. Se u for uma função diferenciável das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cada um dos x_i for uma função diferenciável de uma única variável t, então u será uma função de t e a derivada total de u em relação a t será dada por

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right)}$$

EXEMPLO 3 Dada

$$u = x^2 + 2xy + y^2 \qquad x = t\cos t \qquad y = t \operatorname{sen} t$$

ache $\frac{du}{dt}$ por dois métodos: (a) Usando a regra da cadeia; (b) expressando u em termos de t antes da diferenciação.

Solução

(a) Calculamos as derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - t \operatorname{sen} t \qquad \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t + t\cos t$$

Assim, de (8),

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= (2x + 2y)(\cos t - t \operatorname{sen} t) + (2x + 2y)(\operatorname{sen} t + t\cos t) \\
&= 2(x + y)(\cos t - t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t) \\
&= 2(t\cos t + t \operatorname{sen} t)(\cos t - t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t) \\
&= 2t(\cos^2 t - t \operatorname{sen} t\cos t + \operatorname{sen} t\cos t + t\cos^2 t + \operatorname{sen} t\cos t - \\
&\quad - t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t \operatorname{sen} t\cos t) \\
&= 2t[1 + 2 \operatorname{sen} t\cos t + t(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)] \\
&= 2t(1 + \operatorname{sen} 2t + t\cos 2t)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
u &= (t\cos t)^2 + 2(t\cos t)(t \operatorname{sen} t) + (t \operatorname{sen} t)^2 \\
&= t^2\cos^2 t + t^2(2 \operatorname{sen} t\cos t) + t^2 \operatorname{sen}^2 t \\
&= t^2 + t^2 \operatorname{sen} 2t
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{du}{dt} = 2t + 2t \operatorname{sen} t + 2t^2\cos 2t$$

EXEMPLO 4 Se f for uma função diferenciável e a e b forem constantes, prove que $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3)$ satisfaz a equação parcial

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solução Seja $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$. Queremos mostrar que $z(u)$ satisfaz a equação dada. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= f'(u)(bx) \qquad\qquad = f'(u)(-ay^2)$$

Logo,

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)]$$
$$= 0$$

como queríamos provar.

EXEMPLO 5 Use a lei do gás ideal (veja o Exemplo 5, Secção 16.4) com $k = 10$ para encontrar a taxa segundo a qual a temperatura está variando no instante em que o volume do gás é 120 m³ e o gás está sob uma pressão de 8 N/m² se o volume está aumentando a uma taxa de 2 m³/s e a pressão está decrescendo a uma taxa de 0,1 N/m² por segundo.

Solução Seja t s o tempo decorrido desde que o volume do gás começou a crescer, T graus a temperatura, P N/m² a pressão e V m³ o volume do gás medidos no instante t s. Da lei dos gases ideais,

$$T = \frac{PV}{10} = 0{,}1\,PV$$

No instante dado, $P = 8$, $V = 120$, $\frac{dP}{dt} = -0{,}1$ e $\frac{dV}{dt} = 2$. Da regra da cadeia,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt}$$
$$= 0{,}1V\frac{dP}{dt} + 0{,}1P\frac{dV}{dt}$$
$$= 0{,}1(120)(-0{,}1) + 0{,}1(8)(2)$$
$$= 0{,}4$$

Logo, a temperatura está aumentando a uma taxa de 0,4° por segundo, no instante dado.

EXERCÍCIOS 16.6

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a derivada parcial indicada por dois métodos: (a) usando a regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x e y antes da diferenciação.

1. $u = x^2 - y^2$; $x = 3r - s$; $y = r + 2s$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
2. $u = 3x - 4y^2$; $x = 5pq$; $y = 3p^2 - 2q$; $\dfrac{\partial u}{\partial p}$; $\dfrac{\partial u}{\partial q}$
3. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y$; $x = 2r - 3s$; $y = r + s$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
4. $u = x^2 + y^2$; $x = \cosh r \cos t$; $y = \operatorname{senh} r \operatorname{sen} t$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$
5. $u = e^{y/x}$; $x = 2r \cos t$; $y = 4r \operatorname{sen} t$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$
6. $V = \pi x^2 y$; $x = \cos z \operatorname{sen} t$; $y = z^2 e^t$; $\dfrac{\partial V}{\partial z}$; $\dfrac{\partial V}{\partial t}$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache a derivada parcial indicada, usando a regra da cadeia.

7. $u = x^2 + xy$; $x = r^2 + s^2$; $y = 3r - 2s$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
8. $u = xy + xz + yz$; $x = rs$; $y = r^2 - s^2$; $z = (r - s)^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
9. $u = \operatorname{sen}^{-1}(3x + y)$; $x = r^2 e^s$; $y = \operatorname{sen} rs$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
10. $u = \operatorname{sen}(xy)$; $x = 2ze^t$; $y = t^2 e^{-z}$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$
11. $u = \cosh \dfrac{y}{x}$; $x = 3r^2 s$; $y = 6se^r$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$
12. $u = xe^{-y}$; $x = \operatorname{tg}^{-1}(rst)$; $y = \ln(3rs + 5st)$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$
13. $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$; $y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$; $z = r \cos \phi$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial \phi}$; $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$
14. $u = x^2 yz$; $x = \dfrac{r}{s}$; $y = re^s$; $z = re^{-s}$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$

Nos Exercícios de 15 a 18, ache a derivada total $\dfrac{du}{dt}$ por dois métodos: (a) usando a regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x, y e z antes da diferenciação.

15. $u = ye^x + xe^y$; $x = \cos t$; $y = \operatorname{sen} t$
16. $u = \ln xy + y^2$; $x = e^t$; $y = e^{-t}$
17. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; $y = \cos t$; $z = \operatorname{sen} t$; $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
18. $u = \dfrac{t + e^x}{y - e^t}$; $x = 3 \operatorname{sen} t$; $y = \ln t$

Nos Exercícios de 19 a 22, ache a derivada total $\dfrac{du}{dt}$ usando a regra da cadeia; não expresse u como função de t antes da diferenciação.

19. $u = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $x = \ln t$; $y = e^t$
20. $u = xy + xz + yz$; $x = t \cos t$; $y = t \operatorname{sen} t$; $z = t$
21. $u = \dfrac{x + t}{y + t}$; $x = \ln t$; $y = \ln \dfrac{1}{t}$
22. $u = \ln(x^2 + y^2 + t^2)$; $x = t \operatorname{sen} t$; $y = \cos t$

Nos Exercícios de 23 a 26, suponha que a equação dada defina z como uma função de x e y. Derive implicitamente para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

23. $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$
24. $z = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} xz$
25. $ye^{xyz} \cos 3xz = 5$
26. $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

27. Se f for uma função diferenciável da variável u, seja $u = bx - ay$ e prove que $z = f(bx - ay)$ satisfaz a equação $a\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, onde a e b são constantes.
28. Se f for uma função diferenciável de duas variáveis u e v, seja $u = x - y$ e $v = y - x$; prove que $z = f(x - y, y - x)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.
29. Num dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é 10 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/min e o comprimento do outro cateto é 12 cm o qual está decrescendo a uma taxa de 2 cm/min. Ache a taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12 cm de comprimento, num dado instante.
30. A altura de um cone circular reto está aumentando a uma taxa de 40 cm/min e o raio decrescendo a uma taxa de 15 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 200 cm e o raio é 60 cm.
31. A altura de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 10 cm/min e o raio crescendo a uma taxa de 4 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que a altura é 50 cm e o raio é 16 cm.
32. Água está fluindo para dentro de um tanque com a forma de um cilindro circular reto, a uma taxa de $\frac{4}{5}\pi$ m³/min. O tanque está aumentando de tal forma que se mantenha cilíndrico, com o raio crescendo a uma taxa de 0,2 cm/min. Quão rápido está se elevando a superfície da água quando o raio for 2 m e o volume de água no tanque for 20π m³?
33. Uma quantidade de gás obedece à lei dos gases ideais (veja o Exemplo 5, Secção 16.4) com $k = 1{,}2$, e o gás encontra-se em um recipiente que está sendo aquecido a uma taxa de 3° por segundo. Se em um dado instante quando a temperatura

é 300°, a pressão é 6 N/m² e descreve a uma taxa de 0,1 N/m² por segundo, ache a taxa de variação do volume naquele instante.

34. Uma parede vertical faz um ângulo de medida $\frac{2}{3}\pi$ com o solo. Uma escada de 6 m está encostada na parede e sua ponta escorrega pela parede a uma taxa de 1 m/s. Quão rápido está variando a área do triângulo formado pela escada, a parede e o chão quando a escada faz com o chão um ângulo de $\frac{1}{6}\pi$ rad?

35. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$. Então, se $x = \cosh v \cos w$ e $y = \operatorname{senh} v \operatorname{sen} w$, expresse $\frac{\partial u}{\partial v}$ e $\frac{\partial u}{\partial w}$ em termos de $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$.

36. Suponha que f seja uma função diferenciável de x, y e z e $u = f(x, y, z)$. Então, se $x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ e $z = r \cos \phi$, expresse $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ em termos de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$.

37. Se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, então as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

são chamadas de equações de *Cauchy-Riemann*. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas se $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ e $v = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$.

38. Suponha que f e g sejam diferenciáveis de x e y, e $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann (veja o Exercício 37) estão satisfeitas e se $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, então

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

39. Se f for uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen} \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen} \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos \theta}{r}$$

16.7 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se f for uma função de duas variáveis, então em geral $D_1 f$ e $D_2 f$ também serão funções de duas variáveis. E se as derivadas parciais dessas funções existirem, elas serão chamadas de derivadas parciais segundas de f.* Em contraste, $D_1 f$ e $D_2 f$ são chamadas de derivadas parciais primeiras de f. Existem quatro derivadas parciais segundas de uma função de duas variáveis. Se f for uma função de duas variáveis x e y, as notações

$$D_2(D_1 f) \qquad D_{12} f \qquad f_{12} \qquad f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

todas denotarão a derivada segunda de f, obtida com o cálculo da derivada parcial primeira de f em relação a x e então derivando parcialmente o resultado em relação a y. Essa derivada parcial segunda é definida por

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \tag{1}$$

se esse limite existir. As notações

$$D_1(D_1 f) \qquad D_{11} f \qquad f_{11} \qquad f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

todas denotam a derivada parcial segunda de f, obtida ao derivarmos parcialmente duas vezes em relação a x. Temos a definição

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \tag{2}$$

* **N. do R.**: Também chamadas de derivadas de segunda ordem, assim como $D_1 f$ e $D_2 f$ são também chamadas de derivadas de primeira ordem.

se esse limite existir. As duas outras derivadas parciais segundas são definidas de forma análoga.

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \tag{3}$$

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \tag{4}$$

se esses limites existirem.

As definições de derivadas parciais de ordem superior são similares. Novamente, existem várias notações para uma derivada específica. Por exemplo,

$$D_{112}f \qquad f_{112} \qquad f_{xxy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial x} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}$$

todas representam a derivada parcial terceira de f, obtida ao derivarmos parcialmente duas vezes em relação a x e então, uma vez em relação a y. Na notação com subíndice, a ordem da diferenciação parcial é da esquerda para a direita, enquanto que na notação $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$, a ordem é da direita para a esquerda.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + \ln xy$$

Ache: (a) $D_{11}f(x, y)$; (b) $D_{12}f(x, y)$; (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$.

Solução

$$D_1 f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{xy}(y)$$

$$= e^x \operatorname{sen} y + \frac{1}{x}$$

(a) $D_{11}f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{x^2}$ (b) $D_{12}f(x, y) = e^x \cos y$

(c) Para encontrar $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, derivamos parcialmente duas vezes em relação a y e uma vez em relação a x. Temos, assim

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = -e^x \operatorname{sen} y$$

Derivadas parciais de ordem superior de uma função de n variáveis têm definições que são análogas às definições de derivadas parciais de ordem superior de uma função de duas variáveis. Se f for uma função de n variáveis, poderão existir n^2 derivadas parciais segundas de f em um determinado ponto. Isto é, para uma função de três variáveis, se todas as derivadas parciais de segunda ordem existirem, haverá nove delas: f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32} e f_{33}.

EXEMPLO 2 Ache $D_{132}f(x, y, z)$ se

$$f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy + 2z)$$

Solução

$$D_1 f(x, y, z) = y\cos(xy + 2z)$$
$$D_{13} f(x, y, z) = -2y\,\text{sen}(xy + 2z)$$
$$D_{132} f(x, y, z) = -2\,\text{sen}(xy + 2z) - 2xy\cos(xy + 2z)$$

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x, y) = x^3y - y\cosh xy$$

Ache: (a) $f_{xy}(x, y)$; (b) $f_{yx}(x, y)$.

Solução

(a) $f_x(x, y) = 3x^2y - y^2\,\text{senh}\,xy$

$f_{xy}(x, y) = 3x^2 - 2y\,\text{senh}\,xy - xy^2\cosh xy$

(b) $f_y(x, y) = x^3 - \cosh xy - xy\,\text{senh}\,xy$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= 3x^2 - y\,\text{senh}\,xy - y\,\text{senh}\,xy - xy^2\cosh xy \\ &= 3x^2 - 2y\,\text{senh}\,xy - xy^2\cosh xy \end{aligned}$$

Observe, dos resultados anteriores, que para as funções do Exemplo 3 as derivadas parciais mistas $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$, são iguais. Assim, para essa função específica, quando é efetuado o cálculo da derivada parcial segunda em relação a x e y, a ordem da derivação é irrelevante. Essa condição é válida para muitas funções. Mas, pelo exemplo a seguir, veremos que ela não é sempre verdadeira.

EXEMPLO 4 Ache $f_{12}(0, 0)$ e $f_{21}(0, 0)$ se

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução No Exemplo 3, Secção 16.4, mostramos que para essa função

$$f_1(0, y) = -y \quad \text{para todo } y \tag{5}$$

e

$$f_2(x, 0) = x \quad \text{para todo } x \tag{6}$$

Da fórmula (1)

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}$$

Mas de (5), $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ e $f_1(0, 0) = 0$, assim

$$\begin{aligned} f_{12}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

De (3),

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}$$

De (6), $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ e $f_2(0, 0) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f_{21}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para a função do Exemplo 4, as derivadas parciais mistas $f_{12}(x, y)$ e $f_{21}(x, y)$ não são iguais em (0, 0). Um conjunto de condições para que $f_{12}(x_0, y_0)$ e $f_{21}(x_0, y_0)$ sejam iguais é dado no Teorema 16.7.1, a seguir. A função do Exemplo 4 não satisfaz as hipóteses desse teorema, pois ambas, f_{12} e f_{21}, são descontínuas em (0, 0). Será deixado como exercício provar isso (veja o Exercício 24).

16.7.1 TEOREMA Suponha que f seja uma função de duas variáveis x e y, definida num disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} também sejam definidas em B. Além disso, suponha que f_{xy} e f_{yx} sejam contínuas em B. Então,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

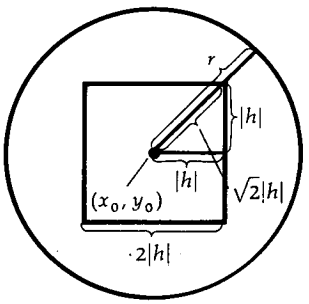


FIGURA 1

Prova Considere um quadrado tendo seu centro em (x_0, y_0), sendo o comprimento de seu lado igual a $2|h|$, tal que $0 < \sqrt{2}|h| < r$. Então, todos os pontos no interior do quadrado e sobre os lados do quadrado estão no disco aberto B (veja a Figura 1). Assim, os pontos $(x_0 + h, y_0 + h)$, $(x_0 + h, y_0)$ e $(x_0, y_0 + h)$ estão em B. Seja Δ definido por

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \tag{7}$$

Considere a função G definida por

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \tag{8}$$

Então,

$$G(x + h) = f(x + h, y_0 + h) - f(x + h, y_0)$$

Assim, (7) pode ser escrita como

$$\Delta = G(x_0 + h) - G(x_0) \tag{9}$$

De (8),

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \tag{10}$$

Agora, como $f_x(x, y_0 + h)$ e $f_x(x, y_0)$ estão definidas em B, $G'(x)$ existe se x estiver no intervalo fechado com extremidades em x_0 e $x_0 + h$. Logo, G é contínua se x estiver nesse intervalo fechado. Pelo teorema do valor médio (4.3.2), existe um número c_1 entre x_0 e $x_0 + h$, tal que

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1)$$

Substituindo essa relação em (9) obtemos

$$\Delta = hG'(c_1)$$

Dessa igualdade e substituindo x por c_1 em (10), temos

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \tag{11}$$

Agora, se g for a função definida por

$$g(y) = f_x(c_1, y) \tag{12}$$

podemos escrever (11) como

$$\Delta = h[g(y_0 + h) - g(y_0)] \tag{13}$$

De (12),

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y) \tag{14}$$

Como $f_{xy}(c_1, y)$ está definida em B, $g'(y)$ existe se y estiver no intervalo fechado com pontos extremos em y_0 e $y_0 + h$; logo, g é contínua se y estiver nesse intervalo fechado. Logo, pelo teorema do valor médio, existe um número d_1 entre y_0 e $y_0 + h$, tal que

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1)$$

Substituindo essa igualdade em (13) obtemos $\Delta = h^2 g'(d_1)$; assim, de (14) segue que

$$\Delta = h^2 f_{xy}(c_1, d_1) \tag{15}$$

para algum ponto (c_1, d_1) no disco aberto B. Definimos uma função ϕ por

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \tag{16}$$

e assim $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$, Logo, (7) pode ser escrita como

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \tag{17}$$

De (16),

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \tag{18}$$

Como, por hipótese, cada termo no segundo membro de (18) existe em B, ϕ' existe se y estiver no intervalo fechado, tendo y_0 e $y_0 + h$ como pontos extremos. Logo, ϕ é contínua nesse intervalo fechado. Assim, pelo teorema do valor médio, existe um número d_2 entre y_0 e $y_0 + h$, tal que

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2)$$

Dessa igualdade, de (17) e (18), segue que

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0, d_2)] \tag{19}$$

Definimos a função χ por

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \tag{20}$$

e escrevemos (19) como

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \tag{21}$$

De (20),

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \tag{22}$$

e pelo teorema do valor médio, existe um número c_2 entre x_0 e $x_0 + h$, tal que

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_2)$$

Dessa igualdade, de (21) e (22),

$$\Delta = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

Com essa expressão para Δ, e (15) obtemos

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

e como $h \neq 0$, podemos dividir por h^2, resultando

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \tag{23}$$

onde (c_1, d_1) e (c_2, d_2) estão em B.

Como c_1 e c_2 estão entre x_0 e $x_0 + h$, podemos escrever $c_1 = x_0 + \epsilon_1 h$, onde $0 < \epsilon_1 < 1$ e $c_2 = x_0 + \epsilon_2 h$, onde $0 < \epsilon_2 < 1$. Analogamente, como ambos, d_1 e d_2, estão entre y_0 e $y_0 + h$, podemos escrever $d_1 = y_0 + \epsilon_3 h$, onde $0 < \epsilon_3 < 1$ e $d_2 = y_0 + \epsilon_4 h$, onde $0 < \epsilon_4 < 1$. Fazendo essas substituições em (23), obtemos

$$f_{xy}(x_0 + \epsilon_1 h, y_0 + \epsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \epsilon_2 h, y_0 + \epsilon_4 h)$$

Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas em B, tomando o limite de ambos os membros dessa equação quando h tende a zero, teremos

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$ ■

EXEMPLO 5 Suponha $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ e $y = G(r, s)$ e admita que $f_{xy} = f_{yx}$. Prove, usando a regra da cadeia, que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s)$$

Solução Da regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f_x(x, y)F_r(r, s) + f_y(x, y)G_r(r, s)$$

Tomando novamente a derivada parcial em relação a r, usando a fórmula para a a derivada de um produto e a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = [f_{xx}(x, y)F_r(r, s) + f_{xy}(x, y)G_r(r, s)]F_r(r, s) + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + [f_{yx}(x, y)F_r(r, s) + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)]G_r(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s)$$

Multiplicando, combinando os termos e usando o fato de que $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ são iguais, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) + f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s)$$

como queríamos provar.

Como resultado do Teorema 16.7.1, se a função f de duas variáveis tiver derivadas parciais contínuas em algum disco aberto, então a ordem das derivações parciais poderá ser mudada sem afetar o resultado; isto é,

$$D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f$$

$$D_{1122}f = D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f$$

e assim por diante. Em particular, supondo que todas as derivadas parciais sejam contínuas em algum disco aberto, podemos provar que $D_{211}f = D_{112}f$, aplicando o Teorema 16.7.1 repetidamente. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned} D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\ &= D_2(D_{11}f) = D_{112}f \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16.7

Nos Exercícios de 1 a 10 (a) ache $D_{11}f(x, y)$; (b) ache $D_{22}f(x, y)$; (c) mostre que $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y)$.

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2}$
2. $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$
3. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$
4. $f(x, y) = e^{-x/y} + \ln \dfrac{y}{x}$
5. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{y}{x}$
6. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{3y}{x^2}$
7. $f(x, y) = 4x \operatorname{senh} y + 3y \cosh x$
8. $f(x, y) = x \cos y - ye^x$
9. $f(x, y) = e^x \cos y + \operatorname{tg}^{-1} x \cdot \ln y$
10. $f(x, y) = 3x \cosh y - y \operatorname{sen}^{-1} e^x$

Nos Exercícios de 11 a 18, ache as derivadas parciais indicadas

11. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$; (a) $f_{121}(x, y)$; (b) $f_{211}(x, y)$
12. $G(x, y) = 3x^3y^2 + 5x^2y^3 + 2x$; (a) $G_{yyx}(x, y)$; (b) $G_{yxy}(x, y)$
13. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$; (a) $f_{xz}(x, y, z)$; (b) $f_{yz}(x, y, z)$
14. $g(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$; (a) $g_{23}(x, y, z)$; (b) $g_{12}(x, y, z)$
15. $f(w, z) = w^2 \cos e^z$; (a) $f_{121}(w, z)$; (b) $f_{212}(w, z)$
16. $f(u, v) = \ln \cos(u - v)$; (a) $f_{uuv}(u, v)$; (b) $f_{vuv}(u, v)$
17. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$; (a) $g_{132}(r, s, t)$; (b) $g_{122}(r, s, t)$
18. $f(x, y, z) = \operatorname{tg}^{-1}(3xyz)$; (a) $f_{113}(x, y, z)$; (b) $f_{123}(x, y, z)$

Nos Exercícios de 19 a 22, mostre que $u(x, y)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ conhecida como equação de Laplace em R^2.

19. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
20. $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$
21. $u(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
22. $u(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$
23. A equação de Laplace em R^3 é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Mostre que $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisfaz essa equação para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

24. Para a função do Exemplo 4, mostre que f_{12} é descontínua em $(0, 0)$ e então as hipóteses do Teorema 16.7.1 não estão satisfeitas se $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Nos Exercícios de 25 a 27, ache $f_{12}(0, 0)$ e $f_{21}(0, 0)$, se existirem.

25. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
26. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
27. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{x}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$
28. Dado que $u = f(x, y)$, $x = F(t)$, e $y = G(t)$ e supondo que $f_{xy} = f_{yx}$, prove, usando a regra da cadeia, que

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} = f_{xx}(x, y)[F'(t)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F'(t)G'(t) + f_{yy}(x, y)[G'(t)]^2 \\ + f_x(x, y)F''(t) + f_y(x, y)G''(t) \end{aligned}$$

29. Dado que $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$, $y = G(r, s)$ e supondo que $f_{xy} = f_{yx}$ prove, usando a regra da cadeia, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial s} = f_{xx}(x, y)F_r(r, s)F_s(r, s) + f_{xy}(x, y)[F_s(r, s)G_r(r, s) + F_r(r, s)G_s(r, s)] \\ + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)G_s(r, s) + f_x(x, y)F_{sr}(r, s) + f_y(x, y)G_{sr}(r, s) \end{aligned}$$

30. Dada $u = e^y \cos x$, $x = 2t$, $y = t^2$, ache $\frac{d^2u}{dt^2}$ das seguintes maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de t; (b) usando a fórmula do Exercício 28; (c) usando a regra da cadeia.

31. Dada $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$, $y = re^{-s}$, ache $\frac{\partial u}{\partial r^2}$ de três formas: (a) expressando u em termos de r e de s; (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.

32. Para u, x e y dadas no Exercício 31, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}$ de três formas: (a) expressando primeiro u em termos de r e de s; (b) usando a fórmula do Exercício 29; (c) usando a regra da cadeia.

33. Dada $u = 9x^2 + 4y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ de três formas: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ, (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.

34. Para u, x e y dadas no Exercício 33, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ de três maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ; (b) usando a fórmula do Exemplo 5; (c) usando a regra da cadeia.

35. Para u, x e y dadas no Exercício 33, ache $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$ de três maneiras: (a) expressando primeiro u em termos de r e θ; (b) usando a fórmula do Exercício 29; (c) usando a regra da cadeia.

36. Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ e que f e g, bem como suas derivadas parciais primeira e segunda, sejam contínuas. Prove que se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (veja o Exercício 37 nos Exercícios 16.6), também satisfazem a equação de Laplace (veja os Exercícios de 19 a 22).

37. A equação diferencial parcial, unidimensional, da condução do calor, é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mostre que se f for uma função de x satisfazendo a equação $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ e g for uma função de t satisfazendo a equação $\frac{dg}{dt} + k^2\lambda g(t) = 0$, então a função $u = f(x)g(t)$ será solução da equação diferencial parcial, onde k e λ são constantes.

38. A equação diferencial parcial para uma corda vibrante é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Mostre que se f for uma função de x satisfazendo a equação $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ e g for uma função de t satisfazendo a equação $\frac{d^2 g}{dt^2} + a^2\lambda^2 g(t) = 0$, então $u = f(x)\, g(t)$ será a solução da equação diferencial parcial, onde a e λ são constantes.

39. Prove que se f e g forem duas funções arbitrárias de uma variável real tendo derivadas segundas contínuas e $u = f(x + at) + g(x - at)$, então u satisfaz a equação diferencial parcial da corda vibrante dada no Exercício 38. (*Sugestão:* seja $v = x + at$ e $w = x - at$; então u é uma função de v e w que, por sua vez, são funções de x e t.)

40. Prove que se f for uma função de duas variáveis e todas as derivadas parciais até a quarta ordem forem contínuas em algum disco aberto, então

$$D_{1122}f = D_{2121}f$$

16.8 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A DIFERENCIABILIDADE (*Suplementar*)

A demonstração do Teorema 16.5.4, que dá condições suficientes para que uma função de duas variáveis seja diferenciável em um ponto, foi adiada até esta secção. Primeiro, daremos um teorema necessário à sua demonstração. É o teorema do valor médio para uma função de uma única variável, aplicado a uma função de duas variáveis.

16.8.1 TEOREMA Seja f uma função de duas variáveis definida para todo x no intervalo fechado $[a, b]$ e todo y no intervalo fechado $[c, d]$.

(i) se $D_1 f(x, y_0)$ existir para algum y_0 em $[c, d]$ e para todo x em $[a, b]$, então haverá um número ξ_1 no intervalo aberto (a, b), tal que

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)D_1 f(\xi_1, y_0) \tag{1}$$

(ii) Se $D_2 f(x_0, y)$ existir para algum x_0 em $[a, b]$ e para todo y em $[c, d]$, então haverá um número ξ_2 no intervalo aberto (c, d), tal que

$$f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c)D_2 f(x_0, \xi_2) \tag{2}$$

Antes de provar esse teorema, vamos interpretá-lo geometricamente. Para a parte (i), consulte a Figura 1 que mostra parte da superfície $z = f(x, y)$ acima da região retangular no plano xy, limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$. O plano $y = y_0$ intercepta a superfície na curva representada pelas equações $y = y_0$ e $z = f(x, y)$. A inclinação da reta que passa pelos pontos $A(a, y_0, f(a, y_0))$ e $B(b, y_0, f(b, y_0))$ é $[f(b, y_0) - f(a, y_0)]/(b - a)$. O Teorema 16.8.1(i) estabelece que há algum ponto $(\xi_1, y_0, f(\xi_1, y_0))$ na curva entre os pontos A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante que passa pelos pontos A e B; isto é, existe algum número ξ_1 em (a, b), tal que

$$D_1 f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

e isso está ilustrado na figura, para a qual $D_1 f(\xi_1, y_0) < 0$.

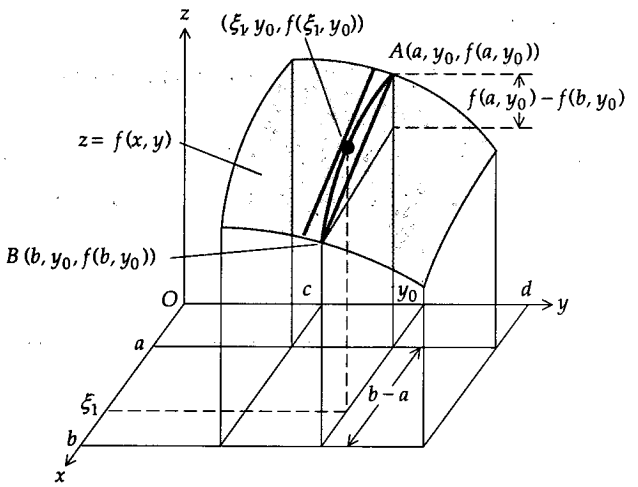


FIGURA 1

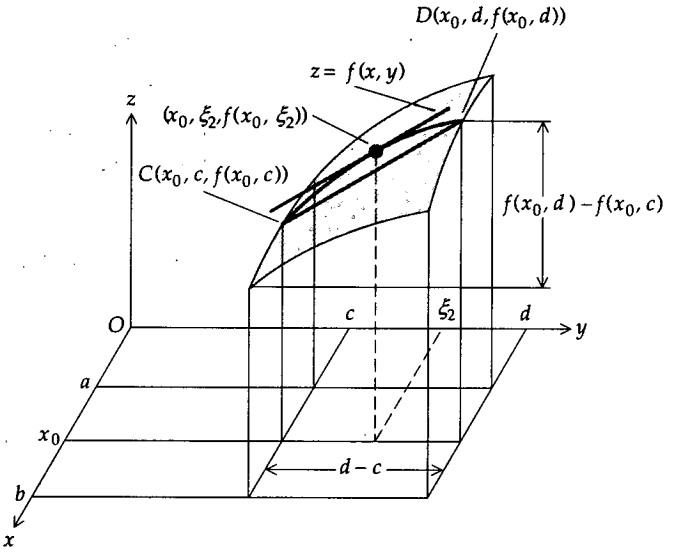


FIGURA 2

A Figura 2 ilustra a parte (ii) do Teorema 16.8.1. O plano $x = x_0$ intercepta a superfície $z = f(x, y)$ na curva representada pelas equações $x = x_0$ e $z = f(x, y)$. A inclinação da reta que passa pelos pontos $C(x_0, c, f(x_0, c))$ e $D(x_0, d, f(x_0, d))$ é $[f(x_0, d) - f(x_0, c)]/(d - c)$ e o Teorema 16.8.1(ii) estabelece que existe algum ponto $(x_0, \xi_2, f(x_0, \xi_2))$ na curva entre os pontos C e D, onde a reta tangente é paralela à reta secante por C e D; isto é, existe algum número ξ_2 em (c, d), tal que

$$D_2 f(x_0, \xi_2) = \frac{f(x_0, d) - f(x_0, c)}{d - c}$$

Prova do Teorema 16.8.1(i) Seja g a função de uma variável x definida por

$$g(x) = f(x, y_0)$$

Então,

$$g'(x) = D_1 f(x, y_0)$$

Como $D_1f(x, y_0)$ existe para todo x em $[a, b]$, segue que $g'(x)$ existe para todo x em $[a, b]$, e assim sendo g é contínua em $[a, b]$. Então, pelo teorema do valor médio (4.3.2) para derivadas ordinárias, existe um número ξ_1 em (a, b), tal que

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad D_1f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

de onde obtemos

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)D_1f(\xi_1, y_0)$$

A demonstração da parte (ii) é similar à da parte (i) e será deixada como exercício (veja o Exercício 17). ■

A equação (1) pode ser escrita na forma

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = hD_1f(\xi_1, y_0) \tag{3}$$

estando ξ_1 entre x_0 e $x_0 + h$, onde h é positivo ou negativo (veja o Exercício 1).

A equação (2) pode ser escrita na forma

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = kD_2f(x_0, \xi_2) \tag{4}$$

estando ξ_2 entre y_0 e $y_0 + k$, onde k é positivo ou negativo (veja o Exercício 2).

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x, y) = \frac{2xy}{3 + x}$$

ache um ξ_1 requerido pelo Teorema 16.8.1, se x está em $[2, 5]$ e $y = 4$.

Solução

$$D_1f(x, y) = \frac{6y}{(3 + x)^2}$$

Pelo Teorema 16.8.1(i) há um número ξ_1 no intervalo aberto $(2, 5)$, tal que

$$f(5, 4) - f(2, 4) = (5 - 2)D_1f(\xi_1, 4)$$

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{72}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$(3 + \xi_1)^2 = 40$$

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}$$

Mas como $2 < \xi_1 < 5$, tomamos somente o sinal $+$ e obtemos

$$\xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$$

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x, y) = 3xe^y - 2ye^x$$

ache um ξ_2 requerido pelo Teorema 16.8.1, se y está em [0, 4] e $x = 3$.

Solução

$$D_2f(x, y) = 3xe^y - 2e^x$$

Pelo Teorema 16.8.1(ii) há um número ξ_2 no intervalo aberto (0, 4), tal que

$$\begin{aligned} f(3, 4) - f(3, 0) &= (4 - 0)D_2f(3, \xi_2) \\ (9e^4 - 8e^3) - 9 &= 4(9e^{\xi_2} - 2e^3) \\ 9e^4 - 8e^3 - 9 &= 36e^{\xi_2} - 8e^3 \\ 36e^{\xi_2} &= 9e^4 - 9 \\ e^{\xi_2} &= \tfrac{1}{4}(e^4 - 1) \\ e^{\xi_2} &\approx 13{,}40 \\ \xi_2 &\approx \ln 13{,}40 \\ \xi_2 &\approx 2{,}60 \end{aligned}$$

A seguir teremos uma reformulação do Teorema 16.5.4, acompanhada de sua demonstração.

16.5.4 TEOREMA Seja f uma função de duas variáveis x e y. Suponha que D_1f e D_2f existam em um disco aberto $B(P_0; r)$, onde P_0 é o ponto (x_0, y_0). Então, se D_1f e D_2f forem contínuas em P_0, f será diferenciável em P_0.

Prova Escolha o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ de tal forma que ele esteja em $B(P_0; r)$. Então,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Somando e subtraindo $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] \quad (5)$$

Como D_1f e D_2f existem em $B(P_0; r)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em $B(P_0; r)$ segue de (4) que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) \quad (6)$$

onde ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$.

De (3)

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0)$$

onde ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$. Substituindo essa igualdade e (6) em (5), obtemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta y)D_2f(x_0 + \Delta x, \xi_2) + (\Delta x)D_1f(\xi_1, y_0) \quad (7)$$

Como $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em $B(P_0; r)$, ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ e $D_2 f$ é contínua em P_0, segue que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) = D_2 f(x_0, y_0) \tag{8}$$

e como ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ e $D_1 f$ é contínua em P_0,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} D_1 f(\xi_1, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \tag{9}$$

Se

$$\epsilon_1 = D_1 f(\xi_1, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \tag{10}$$

segue de (9) que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = 0 \tag{11}$$

e se

$$\epsilon_2 = D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) - D_2 f(x_0, y_0) \tag{12}$$

segue de (8)

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0 \tag{13}$$

Substituindo (10) e (12) em (7) obtemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta y[D_2 f(x_0, y_0) + \epsilon_2] + \Delta x[D_1 f(x_0, y_0) + \epsilon_1]$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)\,\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\,\Delta x + \epsilon_2\,\Delta y$$

Dessa igualdade, de (11) e (13), vemos que a Definição 16.5.2 está satisfeita; assim f é diferenciável em (x_0, y_0). ■

EXERCÍCIOS 16.8

1. Mostre que a equação (1) pode ser escrita na forma (3), onde ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + h$.
2. Mostre que a equação (2) pode ser escrita na forma (4), onde ξ_2 está entre y_0 e $y_0 + k$.

Nos Exercícios de 3 a 8, aplique o Teorema 16.8.1(i) para achar ξ_1.

3. $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$; x está em $[1, 3]$; $y = 4$
4. $f(x, y) = x^3 - y^2$; x está em $[2, 6]$; $y = 3$
5. $f(x, y) = \dfrac{4x}{x + y}$; x está em $[0, 4]$; $y = -6$
6. $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{2y + x}$; x está em $[-3, 3]$; $y = 5$
7. $f(x, y) = \cos x + y$; x está em $[-\pi, \pi]$; $y = 4$
8. $f(x, y) = \ln(x + y)$; x está em $[0, 2]$; $y = 1$

Nos Exercícios de 9 a 14, aplique o Teorema 16.8.1(ii) para encontrar um ξ_2.

9. A função do Exercício 3; y está em $[-2, 2]$; $x = 0$
10. A função do Exercício 4; y está em $[-3, -1]$; $x = 7$
11. A função do Exercício 5; y está em $[-2, 2]$; $x = 4$
12. A função do Exercício 6; y está em $[0, 4]$; $x = 2$
13. $f(x, y) = e^y \operatorname{tg} x$; y está em $[3, 5]$; $x = \frac{1}{4}\pi$
14. $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$; y está em $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$; $x = \frac{1}{3}\pi$

Nos Exercícios 15 e 16, use o Teorema 16.5.4 para provar que f é diferenciável em (0, 0).

15. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
16. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
17. Prove o Teorema 16.8.1(ii).

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16

Nos Exercícios de 1 a 4, determine o domínio da função f e faça um esboço, mostrando como uma região em R^3 o conjunto de pontos no domínio.

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$
2. $f(x, y) = \dfrac{6}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$
3. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$
4. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(5 - x^2 - y^2)$

Nos Exercícios 5 e 6, determine o domínio de f e descreva a região em R^3 que é o conjunto de pontos no domínio.

5. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{|y| - |z|}$
6. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

Nos Exercícios 7 e 8, determine o domínio de f e trace um esboço do gráfico de f.

7. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
8. $f(x, y) = 16x^2 - y^2$
9. A função de produção de um certo artigo é f, onde $f(x, y) = 4x^{1/2}y$, e x e y dão as quantidades de dois componentes. Faça um esboço do mapa de contorno para f, mostrando as curvas em 16, 8, 4 e 2.
10. A temperatura no ponto (x, y) de uma placa plana de metal é $t(x, y)$ graus e $t(x, y) = x^2 + 2y$. Faça o esboço das isotérmicas para t constante nos seguintes valores 0, 2, 4, 6 e 8.

Nos Exercícios de 11 a 24, ache as derivadas parciais indicadas.

11. $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4x - 2y$; (a) $D_1f(x, y)$; (b) $D_2f(x, y)$; (c) $D_{11}f(x, y)$; (d) $D_{22}f(x, y)$; (e) $D_{12}f(x, y)$; (f) $D_{21}f(x, y)$.
12. $f(x, y) = (4x^2 - 2y)^3$; (a) $f_1(x, y)$; (b) $f_2(x, y)$; (c) $f_{11}(x, y)$; (d) $f_{22}(x, y)$; (e) $f_{12}(x, y)$; (f) $f_{21}(x, y)$.
13. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{3y^2}$; (a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xy}(x, y)$; (d) $f_{yx}(x, y)$.
14. $f(r, s) = re^{2rs}$; (a) $D_rf(r, s)$; (b) $D_sf(r, s)$; (c) $D_{rs}f(r, s)$; (d) $D_{sr}f(r, s)$.
15. $g(s, t) = \operatorname{sen}(st^2) + te^s$; (a) $D_sg(s, t)$; (b) $D_tg(s, t)$; (c) $D_{st}g(s, t)$; (d) $D_{ts}g(s, t)$.
16. $h(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{x^3}{y^2}$; (a) $D_1h(x, y)$; (b) $D_2h(x, y)$; (c) $D_{11}h(x, y)$; (d) $D_{22}h(x, y)$.
17. $f(x, y) = e^{x/y} + \ln \dfrac{x}{y}$; (a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xx}(x, y)$; (d) $f_{yy}(x, y)$.
18. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; (a) $f_1(x, y)$; (b) $f_{11}(x, y)$; (c) $f_{12}(x, y)$; (d) $f_{121}(x, y)$.
19. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; (a) $D_1f(x, y, z)$; (b) $D_2f(x, y, z)$; (c) $D_3f(x, y, z)$.
20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 3yz - z^2}$; (a) $f_x(x, y, z)$; (b) $f_y(x, y, z)$; (c) $f_z(x, y, z)$.
21. $f(u, v, w) = \ln(u^2 + 4v^2 - 5w^2)$; (a) $f_{uwv}(u, v, w)$; (b) $f_{uvv}(u, v, w)$.
22. $f(r, s, t) = t^2e^{4rst}$; (a) $f_r(r, s, t)$; (b) $f_{rt}(r, s, t)$; (c) $f_{rts}(r, s, t)$.
23. $f(r, s, t) = \dfrac{\ln 4rs}{t^2}$; (a) $D_1f(r, s, t)$; (b) $D_{13}f(r, s, t)$; (c) $D_{131}f(r, s, t)$.
24. $f(u, v, w) = w \cos 2v + 3v \operatorname{sen} u - 2uv \operatorname{tg} w$; (a) $D_2f(u, v, w)$; (b) $D_1f(u, v, w)$; (c) $D_{131}f(u, v, w)$.
25. Se $w = x^2y - y^2x + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$, mostre que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
26. Se $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, mostre que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Nos Exercícios 27 e 28, ache $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ por dois métodos.

27. $u = y \ln(x^2 + y^2)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3t - 2s$
28. $u = e^{2x+y} \cos(2y - x)$, $x = 2s^2 - t^2$, $y = s^2 + 2t^2$
29. Se $u = 3x^2y + 2xy - 3yz - 2z^2$, $x = e^{3rs}$, $y = r^3s^2$ e $z = \ln 4$, ache $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ por dois métodos: (a) pela regra da cadeia; (b) fazendo as substituições de x, y e z antes de diferenciar.
30. Se $u = e^{x^2+y^2} - \dfrac{3x}{y} + 3z$, $x = \operatorname{sen}\theta$, $y = \cos\theta$ e $z = \operatorname{tg}\theta$, ache a derivada total $\dfrac{du}{d\theta}$ por dois métodos: (a) não expresse u em termos de θ antes da diferenciação; (b) expresse u em termos de θ antes da diferenciação.
31. Se $u = xy + x^2$, $x = 4 \cos t$ e $y = 3 \operatorname{sen} t$, ache o valor da derivada total $\dfrac{du}{dt}$ em $t = \frac{1}{4}\pi$ por dois métodos: (a) não expresse u em termos de t antes da diferenciação; (b) expresse u em termos de t antes da diferenciação.
32. Se $f(x, y) = x^2 + ye^x$, ache:
    (a) $\Delta f(0, 2)$, o incremento de f em (0,2);
    (b) $\Delta f(0, 2)$ quando $\Delta x = -0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}2$;
    (c) $df(0{,}2, \Delta x, \Delta y)$, a diferencial total de f em (0,2);
    (d) $df(0{,}2, -0{,}1, 0{,}2)$.
33. Se $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$, ache:
    (a) $\Delta f(-1, 3, 2)$, o incremento de f em $(-1, 3, 2)$;
    (b) $\Delta f(-1, 3, 2)$ quando $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}01$ e $\Delta z = -0{,}02$;
    (c) $df(-1, 3, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a diferencial total de f em $(-1, 3, 2)$;
    (d) $df(-1, 3, 2, 0{,}02, -0{,}01, -0{,}02)$.
34. Dada $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = \dfrac{2x}{3y}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$, ache:
    (a) $(h \circ g)(-3, 4)$; (b) $g(f(3), h(\frac{1}{4}))$; (c) $g(f(x), h(y))$;
    (d) $f((h \circ g)(x, y))$.

Nos Exercícios de 35 a 37, calcule os limites indicados, usando os teoremas de limite.

35. $\lim_{(x,y)\to(e,0)} \ln\left(\frac{x^2}{y+1}\right)$

36. $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \frac{xy^2 + e^x}{\cos x + \operatorname{sen} y}$

37. $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right)$

Nos Exercícios de 38 a 40, estabeleça o limite, encontrando um $\delta > 0$ correspondente a $\epsilon > 0$, de tal forma que a Definição 16.2.5 esteja satisfeita.

38. $\lim_{(x,y)\to(4,-1)} (4x - 5y) = 21$

39. $\lim_{(x,y)\to(2,-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$

40. $\lim_{(x,y)\to(3,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$

Nos Exercícios de 41 a 44, determine se o limite indicado existe.

41. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2}$

42. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$

43. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y}{(x^6 + y^2)^2}$

44. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 + 4x^2y}{x^2 + y^2}$

Nos Exercícios de 45 a 49, discuta a continuidade de f.

45. $f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$

46. $f(x, y) = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\pi x} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\pi y}$

47. $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y}$

48. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(*Sugestão*: veja o Exercício 42.)

49. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(*Sugestão*: veja o Exercício 41.)

50. Suponha que α seja a medida em radianos de um ângulo de um triângulo retângulo e que sen α seja determinado por a/c, onde a cm é o comprimento do lado oposto ao ângulo e c cm é o comprimento da hipotenusa. Se a medida de a for 3,52 e a de c for 7,14 e se houver um erro possível de 0,01 em cada medida, ache o erro possível no cálculo de sen α com essas medidas.

51. Um pintor cobra \$ 4 por metro quadrado, para pintar as quatro paredes e o forro de um quarto. Se as dimensões do forro forem 4 e 5 m, a altura medida for 3 m, e essas medidas forem corretas até 0,5 cm, ache aproximadamente, usando a diferencial total, o erro máximo na estimativa do custo do trabalho com essas medidas.

52. Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é 6 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/s; o comprimento de um outro lado é 10 cm e ele está decrescendo a uma taxa de 2 cm/s. Ache a taxa de variação da área do retângulo no instante dado.

53. O raio de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de 5 cm/min e a altura está crescendo a uma taxa de 12 cm/min. Ache a taxa de variação do volume no instante em que o raio é 20 cm e a altura é 40 cm.

54. Ache a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $25x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4 = 0$ com o plano $x = 4$, no ponto (4, 9, 10).

55. Use a lei do gás ideal (veja o Exemplo 5, Secção 16.4), com $k = 5$ para encontrar a taxa de variação da pressão no instante em que o volume do gás é 80 m^3 e a temperatura é 75°, se o volume está aumentando a uma taxa de 3 m^3/s e a temperatura está aumentando a uma taxa de 0,3° por minuto.

Nos Exercícios 56 e 57, prove que a função f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, mostrando que a Definição 16.6.2 está satisfeita.

56. $f(x, y) = 3xy^2 - 4x^2 + y^2$

57. $f(x, y) = \frac{2x + y}{y^2}$

58. Se $f(x, y)$ unidades são produzidas por x trabalhadores e y máquinas, então $D_xf(x, y)$ é chamada de *produtividade marginal do trabalho* e $D_yf(x, y)$ é chamada de *produtividade marginal da maquinaria*. Suponha que

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2$$

onde $5 \leqslant x \leqslant 30$ e $4 \leqslant y \leqslant 12$. (a) Ache o número de unidades produzidas em um dia, quando a força de trabalho diária consiste em 15 operários, e 8 máquinas são usadas. (b) Use a produtividade marginal do trabalho para determinar o número aproximado de unidades adicionais que podem ser produzidas em 1 dia, se a força de trabalho for aumentada de 15 para 16 e o número de máquinas permanecer fixo em 8. (c) Use a produtividade marginal da maquinaria para determinar o número aproximado de unidades adicionais que podem ser produzidas em 1 dia, se o número de máquinas passar de 8 para 9, enquanto que o número de operários permanece fixo em 15.

59. Ache (a) $f_2(x, 0)$ se $x \neq 0$ e (b) $f_2(0, 0)$ se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12x^2y - 3y^2}{x^2 + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

60. Comprove que $u(x, y) = (\operatorname{senh} x)(\operatorname{sen} y)$ satisfaz a equação de Laplace em R^2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

61. Se f for uma função diferenciável da variável u, seja $u = x^2 + y^2$ e prove que $z = xy + f(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

62. A equação de Laplace em coordenadas polares é

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Comprove que $u(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta$, onde n é uma constante, satisfaz essa equação.

63. Comprove que $u(x, y, z) = e^{3x + 4y} \operatorname{sen} 5z$ satisfaz a equação de Laplace em R^3:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

64. Comprove que $u(x, t) = A\cos(kat)\operatorname{sen}(kx)$, onde A e k são constantes arbitrárias, satisfaz a equação diferencial parcial da corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

65. Comprove que

$$u(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}e^{(-n^2\pi^2k^2/L^2)t}$$

satisfaz a equação diferencial parcial da condução de calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

66. Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. (*Sugestão*: veja o Exemplo 5, Secção 16.2 e o Exercício 10 nos Exercícios 16.3.)

67. Dada

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

68. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2} + y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que f é descontínua na origem.

69. Para a função do Exercício 68, prove que $D_1f(0, 0)$ e $D_2f(0, 0)$ existem.

70. Se f for uma função diferenciável de x e y e $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

DEZESSETE

Derivadas Direcionais, Gradientes e Aplicações das Derivadas Parciais

$$\vec{\nabla} f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

As derivadas parciais $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ medem as taxas de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ na direção dos eixos x e y, respectivamente. As *derivadas direcionais*, introduzidas na Secção 17.1, dão as taxas de variação dessas funções em qualquer direção. O *gradiente*, também introduzido na Secção 17.1, dá a direção e o sentido em que a função tem a sua maior taxa de variação. Esse conceito é aplicado na Secção 17.2, em nossa discussão sobre *planos tangentes* e *normais a superfícies*.

Assim como usamos as derivadas primeira e segunda para determinar as funções máxima e mínima de funções de uma única variável, mostramos na Secção 17.3 de que modo as derivadas parciais podem ser aplicadas para encontrarmos valores extremos de funções de duas variáveis. As aplicações nessa secção incluem o *método dos mínimos quadrados*. Na Secção 17.4 introduzimos os *mul-*

tiplicadores de Lagrange, que são usados para o cálculo de extremos de uma função sujeita a um vínculo.

Os gradientes aparecem novamente na Secção 17.5, onde mostramos como obter uma função a partir de seu gradiente. Esse procedimento é útil para determinar se uma expressão diferencial é *exata* e para resolver *equações diferenciais exatas*.

17.1 DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTES

Vamos generalizar a definição de uma derivada parcial, a fim de obter a taxa de variação de uma função em relação a qualquer direção e sentido. Isso nos leva ao conceito de *derivada direcional*.

Seja f uma função de duas variáveis x e y e seja $P(x, y)$ um ponto do plano xy. Suponhamos que $\mathbf{U}$ seja o vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo x um ângulo cuja medida em radianos é θ. Então,

$$\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

A Figura 1 mostra a representação de $\mathbf{U}$ com ponto inicial em $P(x, y)$.

17.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se $\mathbf{U}$ for o vetor unitário $\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, então a **derivada direcional** de f na direção de $\mathbf{U}$, denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, será dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}$$

se o limite existir.

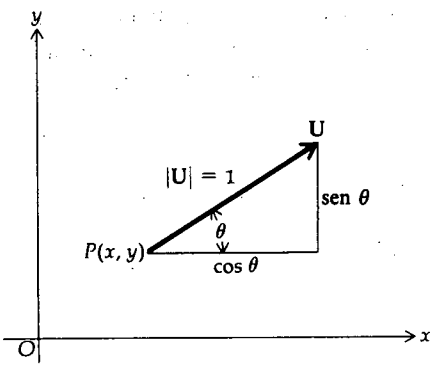


FIGURA 1

A derivada direcional dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y)$ em relação à direção e sentido do vetor unitário $\mathbf{U}$.* Isso está ilustrado na Figura 2. Uma equação da superfície S na figura é $z = f(x, y)$. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto na superfície, e os pontos $R(x_0, y_0, 0)$ e $Q(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h\operatorname{sen}\theta, 0)$ são pontos no plano xy. O plano que passa por R e Q, paralelo ao eixo z, faz um ângulo de θ rad com a direção positiva do eixo x. Esse plano intercepta a superfície S na curva C. A derivada direcional $D_{\mathbf{U}}f$, calculada em P_0, é a inclinação da reta tangente à curva C em P_0, no plano de R, Q e P_0.

Se $\mathbf{U} = \mathbf{i}$, então $\cos\theta = 1$ e $\operatorname{sen}\theta = 0$ e, da Definição 17.1.1,

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a x.

Se $\mathbf{U} = \mathbf{j}$, então $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$ e

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de f em relação a y.

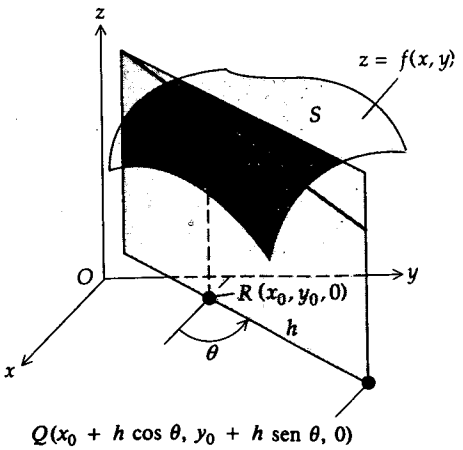


FIGURA 2

* **N. do R.:** Quando dizemos "derivada de f na direção de $\mathbf{U}$" fica subentendido que, não só a direção mas também o sentido está determinado por $\mathbf{U}$. Observe que $-\mathbf{U}$ tem a mesma direção de $\mathbf{U}$, mas a derivada direcional de f na direção de $-\mathbf{U}$ tem o sinal oposto da derivada de f na direção de $\mathbf{U}$.

Assim sendo, f_x e f_y são casos particulares da derivada direcional nas direções dos vetores unitários **i** e **j**, respectivamente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 17.1.1 para encontrar $D_{\mathbf{U}}f$, se

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

e **U** é o vetor unitário na direção $\frac{1}{6}\pi$. Então, $\mathbf{U} = \cos\frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$, isto é, $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Assim, da Definição 17.1.1,

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h)^2 - (y + \frac{1}{2}h)^2 + 4(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3\sqrt{3}x + \tfrac{9}{4}h - y - \tfrac{1}{4}h + 2\sqrt{3}) \\
&= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

◀

Seguimos agora para obter uma fórmula que nos possibilite calcular a derivada direcional de uma maneira mais rápida do que se usarmos a definição. Seja g a função de uma única variável t, com x, y e θ fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) \tag{1}$$

e seja $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$. Então, pela definição de derivada ordinária,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + (0 + h)\cos\theta, y + (0 + h)\operatorname{sen}\theta) - f(x + 0\cos\theta, y + 0\operatorname{sen}\theta)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}$$

Como o segundo membro acima é $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$,

$$g'(0) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) \tag{2}$$

Encontramos agora $g'(t)$, aplicando a regra da cadeia ao segundo membro de (1), o que dá

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial(x + t\cos\theta)}{\partial t} + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial(y + t\operatorname{sen}\theta)}{\partial t} \\
&= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Logo,

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

Dessa equação e de (2) obtemos o teorema a seguir.

17.1.2 TEOREMA Se f for uma função diferenciável de x e y e $\mathbf{U} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, então

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicamos a Definição 17.1.2 para calcular $D_{\mathbf{U}}f$ para a função f e o vetor unitário $\mathbf{U}$ da Ilustração 1:

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x \qquad \mathbf{U} = \cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\tfrac{1}{6}\pi + f_y(x, y)\operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi \\ &= (6x + 4)\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (-2y)\tfrac{1}{2} \\ &= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado da Ilustração 1. ◀

A derivada direcional pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores. Uma vez que

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta = (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]$$

segue do Teorema 17.1.2 que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \tag{3}$$

O segundo vetor do segundo membro de (3) é muito importante e é chamado de *gradiente* da função f. O símbolo usado para o gradiente de f e ∇f, onde ∇ é delta maiúsculo invertido e lê-se "del". Algumas vezes a abreviação *grad f* é usada.

17.1.3 DEFINIÇÃO Se f for uma função de duas variáveis x e y, e f_x e f_y existirem, então o **gradiente** de f, denotado por ∇f (leia "del f"), será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Da Definição 17.1.3, a equação (3) pode ser escrita como

$$\boxed{D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y)} \tag{4}$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida se multiplicarmos escalarmente o gradiente pelo vetor unitário na direção e sentido desejados.

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{9}y^2$$

ache o gradiente e f no ponto (4, 3). Ache também a taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em (4, 3).

Solução Como $f_x(x, y) = \frac{1}{8}\pi$ e $f_y(x, y) = \frac{2}{9}y$,

$$\nabla f(x, y) = \tfrac{1}{8}x\mathbf{i} + \tfrac{2}{9}y\mathbf{j} \qquad \nabla f(4, 3) = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j}$$

A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção $\frac{1}{4}\pi$ em (4, 3) é $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$, onde

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Encontramos $D_{\mathbf{U}}f(4, 3)$ multiplicando escalarmente $\nabla f(4, 3)$ por $\mathbf{U}$.

$$D_{\mathbf{U}}f(4, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{7}{6\sqrt{2}}$$

Se α for a medida em radianos do ângulo entre os dois vetores $\mathbf{U}$ e ∇f, então

$$\mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y) = \|\mathbf{U}\| \, \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha$$

Dessa equação e de (4), segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \|\mathbf{U}\| \, \|\nabla f(x, y)\| \cos \alpha \tag{5}$$

Vemos de (5) que $D_{\mathbf{U}}f$ será máxima quando $\cos \alpha = 1$, isto é, quando $\mathbf{U}$ estiver na direção e sentido de ∇f; e nesse caso $D_{\mathbf{U}}f = \|\nabla f\|$. Assim sendo, o gradiente de uma função está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação. Em particular, num mapa topográfico bidimensional de um terreno onde z unidades é a elevação num ponto (x, y) e $z = f(x, y)$, a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima serão dados por $\nabla f(x, y)$; isto é, o vetor $\nabla f(x, y)$ aponta para cima na direção e sentido mais íngremes. Isso explica a denominação *gradiente* (a inclinação é mais acentuada na direção do gradiente).

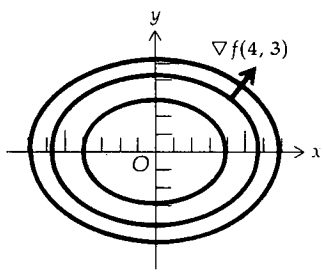


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3 há um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exemplo 1 em 1, 2 e 3. As curvas de nível são elipses. A figura também mostra a representação de $\nabla f(4, 3)$, tendo (4, 3) como ponto inicial. ◀

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$$

ache o valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto onde $x = 1$ e $y = -2$.

Solução Como $f_x(x, y) = 4x + 3$ e $f_y(x, y) = -2y - 1$,

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j} \qquad \nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Assim, o valor máximo de $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto $(1, -2)$ é

$$\|\nabla f(1, -2)\| = \sqrt{49 + 9}$$
$$= \sqrt{58}$$

EXEMPLO 3 A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa retangular situada no plano xy, é determinada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto (3, 4) na direção e sentido que fazem um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com o eixo x positivo. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima.

Solução

a) Queremos encontrar $D_{\mathbf{U}}T(x, y)$ onde

$$\mathbf{U} = \cos \tfrac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi\mathbf{j} = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j} \qquad \nabla T(x, y) = T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= (\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}y \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}T(3, 4) &= 3 + 4\sqrt{3} \\ &\approx 9{,}93 \end{aligned}$$

Então, em (3, 4) a temperatura está aumentando à taxa de aproximadamente 9,93 unidades por unidade de variação medido na direção e sentido de **U**.

b) $D_{\mathbf{U}}T(-3, 1)$ será um máximo quando **U** estiver na direção e sentido de $\nabla T(-3, 1)$. Como $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, a medida em radianos do ângulo que dá a direção e o sentido de $\nabla T(-3, 1)$ é θ, onde $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}$. Assim, $\theta = \pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$. Logo, a taxa de variação da temperatura no ponto $(-3, 1)$ é máxima quando tomada na direção e sentido que fazem um ângulo de $\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ rad com o eixo x positivo.

Vamos agora estender para uma função de três variáveis a definição de derivada direcional. No espaço tridimensional a direção e o sentido de um vetor são determinados pelos seus co-senos diretores. Se $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ forem os co-senos diretores do vetor unitário **U**, então $\mathbf{U} = \cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$.

17.1.4 DEFINIÇÃO

Suponha que f seja uma fração de três variáveis x, y e z. Se **U** for o vetor unitário $\cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$, então a **derivada direcional** de f na direção de **U**, denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, será dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

se este limite existir.

A derivada direcional de uma função de três variáveis dá a taxa de variação dos valores funcionais $f(x, y, z)$ em relação à distância no espaço tridimencional, medida na direção e sentido do vetor unitário **U**.

O teorema a seguir, que fornece um método de cálculo da derivada direcional de uma função de três variáveis é demonstrado de forma análoga ao Teorema 17.1.12.

17.1.5 TEOREMA

Se f for uma função diferenciável de x, y e z e

$$\mathbf{U} = \cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$$

então

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$$

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$$

ache a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido do vetor $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solução O vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

Assim, do Teorema 17.1.5

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \tfrac{2}{3}(6x + y) - \tfrac{2}{3}(x - 4y - z) - \tfrac{1}{3}(-y + 2z)$$

Logo, a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em $(1, -2, -1)$ na direção e sentido de $\mathbf{U}$, é dada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(1, -2, -1) &= \tfrac{2}{3}(4) - \tfrac{2}{3}(10) - \tfrac{1}{3}(0) \\ &= -4 \end{aligned}$$

17.1.6 DEFINIÇÃO Se f for uma função de três variáveis x, y e z e as derivadas parciais f_x, f_y e f_z existirem, então o **gradiente** de f, denotado por ∇f, será definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y\ z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue do Teorema 17.1.5 e da Definição 17.1.6 que se $\mathbf{U} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, então

$$\boxed{D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z)}$$

Também, a derivada direcional será um máximo quando $\mathbf{U}$ estiver na direção e sentido do gradiente e a derivada direcional máxima será o módulo do gradiente.

Aplicações do gradiente aparecem em Física, em problemas de condução do calor e eletricidade. Suponha que $w = f(x, y, z)$. A superfície de nível dessa função f para o valor constante k é dada por

$$f(x, y, z) = k \tag{6}$$

Se w for o número de graus da temperatura no ponto (x, y, z), então todos os pontos na superfície dada pela equação (6) terão a mesma temperatura e k graus, e a superfície será chamada de **superfície isotérmica**. Se w for o número de volts do potencial elétrico no ponto (x, y, z), então todos os pontos da superfície estarão no mesmo potencial e a superfície será chamada de **superfície eqüipotencial**. O vetor gradiente em um ponto dá a direção e o sentido de maior taxa de variação de w. Assim, se a superfície de nível da equação (6) for isotérmica, $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura em (x, y, z). Se (6) for a equação de uma superfície eqüipotencial, então $\nabla f(x, y, z)$ dará a direção e sentido da maior taxa de variação do potencial em (x, y, z).

EXEMPLO 5 Se $V(x, y, z)$ volts for o potencial elétrico num ponto (x, y, z) do espaço tridimensional e

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ache: (a) a taxa de variação de V no ponto $(2, 2, -1)$, na direção do vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (b) a direção e sentido em que se dá a maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

Solução

(a) Um vetor unitário na direção e sentido de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ é

$$\mathbf{U} = \tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$$

Queremos encontrar $D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla V(2, 2, -1)\\ &= (\tfrac{2}{7}\mathbf{i} - \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}) \cdot (-\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k})\\ &= -\tfrac{4}{189} + \tfrac{6}{189} + \tfrac{6}{189}\\ &= \tfrac{8}{189}\\ &\approx 0{,}042\end{aligned}$$

Assim sendo, em $(2, 2, -1)$ o potencial é crescente, a uma taxa de aproximadamente 0,042 volt por unidade de variação, na distância medida na direção e sentido de $\mathbf{U}$.

(b) $\nabla V(2, 2, -1) = -\tfrac{2}{27}\mathbf{i} - \tfrac{2}{27}\mathbf{j} + \tfrac{1}{27}\mathbf{k}$. Um vetor unitário na direção e sentido de $\nabla V(2, 2, -1)$ é

$$\begin{aligned}\frac{\nabla V(2, 2, -1)}{\|\nabla V(2, 2, -1)\|} &= \frac{-\frac{2}{27}\mathbf{i} - \frac{2}{27}\mathbf{j} + \frac{1}{27}\mathbf{k}}{\frac{3}{27}}\\ &= -\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{2}{3}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Os co-senos diretores desse vetor são $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, o que dá a direção e sentido da maior taxa de variação de V em $(2, 2, -1)$.

EXERCÍCIOS 17.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a derivada direcional da função dada na direção e sentido do vetor unitário **U** *dado, usando a Definição 17.1.1 ou a Definição 17.1.4, e então verifique seu resultado, aplicando o Teorema 17.1.2 ou o Teorema 17.1.5, conforme o caso.*

1. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}$
2. $g(x, y) = 3x^2 - 4y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$
3. $h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{j} + \cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{k}$
4. $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\mathbf{U} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$
5. $g(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$; $\mathbf{U} = -\frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$
6. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache o gradiente da função dada.

7. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$
8. $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
9. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
10. $f(x, y) = e^y \operatorname{tg} 2x$
11. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{x + z}$
12. $f(x, y, z) = 3z \ln(x + y)$
13. $g(x, y, z) = xe^{-2y} \sec z$
14. $g(x, y, z) = e^{2z}(\operatorname{sen} x - \cos y)$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache o valor da derivada direcional no ponto P_0 para a função dada na direção e sentido de **U**.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$
16. $g(x, y) = 3x^3y + 4y^2 - xy$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$
17. $g(x, y) = y^2 \operatorname{tg}^2 x$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (\frac{1}{3}\pi, 2)$
18. $f(x, y) = xe^{2y}$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; $P_0 = (2, 0)$
19. $h(x, y, z) = \cos(xy) + \operatorname{sen}(yz)$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 0, -3)$

20. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 3, 2)$

21. $f(x, y) = e^{-3x}\cos 3y$; $\mathbf{U} = \cos(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{j}$; $P_0 = (-\frac{1}{12}\pi, 0)$

22. $g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \operatorname{senh} 4z$;

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k};\ P_0 = (\tfrac{1}{2}\pi, 0, 0)$$

Nos Exercícios de 23 a 26, ache (a) o gradiente de f em P e (b) a taxa de variação dos valores funcionais na direção de **U** *em P.*

23. $f(x, y) = x^2 - 4y$; $P = (-2, 2)$; $\mathbf{U} = \cos\frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$
24. $f(x, y) = e^{2xy}$; $P = (2, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
25. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P = (-2, 1, 3)$; $\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$
26. $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P = (1, 1, 1)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{7}\sqrt{21}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\mathbf{k}$

27. Para um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 23, em 8, 4, 0, -4 e -8. Mostre também a representação de $\nabla f(-2, 2)$, tendo seu ponto inicial em $(-2, 2)$.

28. Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função do Exercício 24, em e^8, e^4, 1, e^{-4} e e^{-8}. Mostre também a representação de $\nabla f(2, 1)$, tendo seu ponto inicial em $(2, 1)$.

Nos Exercícios de 29 a 32, ache $D_{\mathbf{U}}f$ no ponto P dado, onde **U** *é o vetor unitário na direção e sentido $\overrightarrow{PQ}$. Também em P ache $D_{\mathbf{U}}f$, se* **U** *for um vetor unitário para o qual $D_{\mathbf{U}}f$ é um máximo.*

29. $f(x, y) = e^x \operatorname{tg}^{-1} y$; $P(0, 1)$, $Q(3, 5)$
30. $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x$; $P(1, 0)$, $Q(-3, 3)$
31. $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$; $P(3, 1, -2)$, $Q(10, 7, 4)$
32. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz$; $P(3, 1, -2)$, $Q(-6, 3, 4)$

33. Ache a direção e o sentido a partir do ponto $(1, 3)$ para a qual os valores de f não mudam, sendo $f(x, y) = e^{2y}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{3x}$.

34. A densidade é $\rho(x, y)$ kg/m² em todos os pontos de uma placa retangular no plano xy e

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

(a) Ache a taxa de variação da densidade no ponto $(3, 2)$, na direção e sentido do vetor unitário $\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor da maior taxa de variação de ρ em $(3, 2)$.

35. A temperatura é $T(x, y)$ graus em qualquer ponto de uma placa retangular situada no plano xy e $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $(3, -6)$ da placa. (b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima em $(3, -6)$.

36. A temperatura é $T(x, y, z)$ graus em qualquer ponto de um sólido no espaço tridimensional, e

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

A distância é medida em centímetros. (a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto $(3, -2, 2)$, na direção e sentido do vetor $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor máximo da taxa de variação de T em $(3, -2, 2)$.

37. O potencial elétrico é $V(x, y)$ volts em qualquer ponto do plano xy e $V(x, y) = e^{-2x}\cos 2y$. A distância é medida em metros. (a) Ache a taxa de variação do potencial no ponto $(0, \frac{1}{4}\pi)$, na direção do vetor unitário $\cos\frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção e sentido e o valor da taxa de variação máxima de V em $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

38. A equação da superfície de uma montanha é

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

onde a distância é medida em metros, o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. Uma alpinista está no ponto correspondente a $(-10, 5, 850)$. (a) Qual a direção onde a subida é mais íngreme? (b) Se a alpinista se move na direção leste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (c) Se a alpinista se move na direção sudoeste, ela está subindo ou descendo, e qual a sua taxa? (d) Em que direção ela estará sobre uma curva de nível?

17.2 PLANOS TANGENTES E NORMAIS A SUPERFÍCIES

Seja S a superfície tendo a equação

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

e suponha que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto de S. Então, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponha ainda que C seja uma curva em S que passa por P_0 e que um conjunto de equações paramétricas de C seja

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t) \tag{2}$$

onde o valor do parâmetro t no ponto P_0 é t_0. Uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como a curva C está na superfície S, substituindo (2) em (1), temos

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0 \tag{3}$$

Seja $G(t) = F(f(t), g(t), h(t))$. Se F_x, F_y e F_z forem contínuas e nem todas nulas em P_0, e se $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ e $h'(t_0)$ existirem, então a derivada total de F em relação a t em P_0 será dada por

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)h'(t_0)$$

O primeiro membro dessa igualdade pode ser escrito como

$$[F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}] \cdot [f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}]$$

Assim,

$$G'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\mathbf{R}(t_0)$$

Uma vez que $G'(t) = 0$ para todo t em consideração (devido a (3)), $G'(t_0) = 0$; então, segue do que já foi exposto que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t\mathbf{R}(t_0) = 0 \tag{4}$$

Da Secção 15.8 sabemos que $D_t\mathbf{R}(t_0)$ tem a mesma direção que um vetor tangente à curva C em P_0. Logo, de (4) podemos concluir que o gradiente de F em P_0 é ortogonal ao vetor tangente de qualquer curva C em S que passa pelo ponto P_0. Somos levados, então, à definição a seguir.

17.2.1 DEFINIÇÃO Um vetor que é ortogonal a todo vetor que seja tangente a alguma curva C da superfície S no ponto P_0, é chamado de **vetor normal** a S no ponto P_0.

Dessa definição e da discussão precedente temos o teorema a seguir.

17.2.2 TEOREMA Se uma equação de uma superfície S for dada por $F(x, y, z) = 0$ e F_x, F_y e F_z forem contínuas e nem todas nulas no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em S, então o vetor normal a S em P_0 será $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

O conceito de vetor normal é usado para definir o *plano tangente* a uma superfície em um ponto.

17.2.3 DEFINIÇÃO Se uma equação de uma superfície S for dada por $F(x, y, z) = 0$, então o **plano tangente** a S num ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ será o plano que passa por P_0 tendo $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como vetor normal.

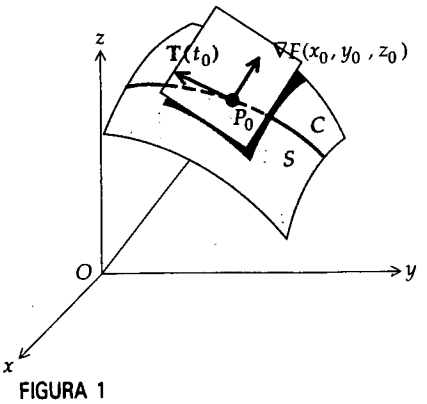


FIGURA 1

Uma equação do plano tangente da definição acima é

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{5}$$

Consulte a Figura 1 que mostra o plano tangente à superfície S em P_0 e a representação do vetor gradiente, tendo como ponto inicial P_0.

Uma equação vetorial do plano tangente dado por (5) é

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0 \tag{6}$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação do plano tangente ao parabolóide elíptico

$$4x^2 + y^2 - 16z = 0$$

no ponto (2, 4, 2).

Solução Seja $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$. Então,

$$\nabla F(x, y, z) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \qquad \nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

De (6), segue que uma equação do plano tangente é

$$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$$

$$2x + y - 2z - 4 = 0$$

17.2.4 DEFINIÇÃO A **reta normal** a uma superfície S no ponto P_0 de S é a reta que passa por P_0 e tem por números direcionais as componentes de qualquer vetor normal a S em P_0.

Se uma equação da superfície S for $F(x, y, z) = 0$, as equações simétricas da reta normal a S em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ serão

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}}$$

Essas equações simétricas seguem da Definição 17.2.4, pois os denominadores são as componentes de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ que é um vetor normal a S em P_0. A reta normal em um ponto de uma superfície é perpendicular ao seu plano tangente nesse ponto.

EXEMPLO 2 Ache as equações simétricas da reta normal à superfície do Exemplo 1 em (2, 4, 2).

Solução Como $\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, segue que as equações simétricas da reta normal pedida são

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

17.2.5 DEFINIÇÃO A **reta tangente** a uma curva C em um ponto P_0 é a reta que passa por P_0, tendo como números direcionais as componentes do vetor tangente unitário a C em P_0.

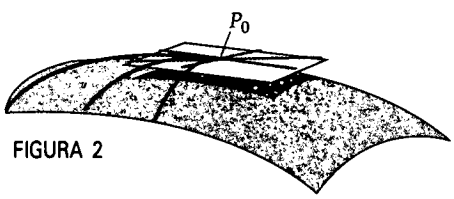


FIGURA 2

Das Definições 17.2.3 e 17.2.5, todas as retas tangentes no ponto P_0 às curvas sobre uma dada superfície estão no plano tangente à superfície em P_0. Veja na Figura 2 esboços de uma superfície e do plano tangente em P_0. Algumas curvas que passam por $\mathbf{P}_0$ e suas retas tangentes também estão esboçadas na figura.

Considere uma curva C que seja a intersecção de duas superfícies, tendo as equações

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y, x) = 0$$

respectivamente. Mostraremos como obter as equações da reta tangente a C no ponto P_0 (x_0, y_0, z_0). Como a reta tangente está em cada um dos planos tangentes às superfícies dadas em P_0, ela é a reta de intersecção dos planos tangentes. Seja $\mathbf{N}_1$ um vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ em P_0 e $\mathbf{N}_2$ um vetor normal à superfície $G(x, y, z) = 0$ em P_0. Então,

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

Ambos, $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, são ortogonais ao vetor tangente unitário a C em P_0; assim, se $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ não forem paralelos, segue do Teorema 15.5.10 que o vetor tangente unitário tem direção e sentido iguais aos de $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$. Logo, as componentes de $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ servem como um conjunto de números direcionais da reta tangente. Desse conjunto de números direcionais e das coordenadas de P_0 podemos obter a equação pedida da reta tangente. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 Ache as equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$$

no ponto $(3, -3, 2)$.

Solução Seja

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10$$

Então, $\nabla F(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 &= \nabla F(3, -3, 2) & \mathbf{N}_2 &= \nabla G(3, -3, 2) \\ &= 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k} & &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k} \\ &= 2(9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) & &= 2(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 &= 4(9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\ &= 4(30\mathbf{i} + 42\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) \\ &= 12(10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Portanto, um conjunto de números direcionais da reta tangente procurada é $[10, 14, -3]$. As equações simétricas da reta são, então,

$$\frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}$$

Se duas superfícies tiverem um plano tangente comum em um ponto, elas serão **tangentes** naquele ponto. Segue, da Definição 17.2.3, que duas superfícies S_1 e S_2, cujas equações são $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, respectivamente, são tangentes no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se, para alguma constante k

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = k\nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

EXERCÍCIOS 17.2

Nos Exercícios de 1 a 12, ache uma equação do plano tangente e as equações da reta normal à superfície no ponto indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $(2, -2, 3)$
2. $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$; $(1, -2, 3)$
3. $x^2 + y^2 - 3z = 2$; $(-2, -4, 6)$
4. $x^2 + y^2 - z^2 = 6$; $(3, -1, 2)$
5. $y = e^x \cos z$; $(1, e, 0)$
6. $z = e^{3x} \operatorname{sen} 3y$; $(0, \frac{1}{6}\pi, 1)$
7. $x^2 = 12y$; $(6, 3, 3)$
8. $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $(1, 1, 2)$
9. $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$; $(4, 1, 1)$
10. $zx^2 - xy^2 - yz^2 = 18$; $(0, -2, 3)$
11. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$; $(-8, 27, 1)$
12. $x^{1/2} + z^{1/2} = 8$; $(25, 2, 9)$

Nos Exercícios de 13 a 20, se as duas superfícies dadas interceptam-se numa curva, ache as equações da reta tangente à curva de intersecção no ponto dado; se as duas superfícies forem tangentes no ponto dado, prove isso.

13. $x^2 + y^2 - z = 8$, $x - y^2 + z^2 = -2$; $(2, -2, 0)$
14. $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(0, 1, 1)$
15. $y = x^2$, $y = 16 - z^2$; $(4, 16, 0)$

16. $x = 2 + \cos \pi yz$, $y = 1 + \operatorname{sen} \pi xz$; (3, 1, 2)
17. $y = e^x \operatorname{sen} 2\pi z + 2$, $z = y^2 - \ln(x + 1) - 3$; (0, 2, 1)
18. $x^2 - 3xy + y^2 = z$, $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$; (1, −2, 11)
19. $x^2 + z^2 + 4y = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$; (0, −1, 2)
20. $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $yz = 4$; (0, 2, 2)
21. Mostre que as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{e} \quad (x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$$

são tangentes no ponto $(a, 0, 0)$.

22. Mostre que as superfícies $xyz = 36$ e $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ são tangentes no ponto (3, 6, 2).
23. Duas superfícies são *perpendiculares* em um ponto P_0 de intersecção se os vetores normais às superfícies em P_0 forem ortogonais. Mostre que a superfície $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ é perpendicular a todo membro da família de superfície $x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$ no ponto (1, −1, 2).
24. Prove que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ passa pelo centro da esfera.

17.3 EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma aplicação importante da derivada de uma função de uma única variável consiste no estudo dos valores extremos de uma função que nos leva a uma variedade de problemas envolvendo máximos e mínimos. Isso foi discutido no Capítulo 4, onde provamos teoremas envolvendo as derivadas primeira e segunda, a partir dos quais os valores máximos e mínimos relativos de uma função foram determinados. Ao estender a teoria para funções de duas variáveis, você verá que ela é similar ao caso de uma variável; contudo, algumas complicações aparecem.

17.3.1 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis tem um **valor máximo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ para todo (x, y) em B.

17.3.2 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis tem um **valor mínimo relativo** no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ para todo (x, y) em B.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 1 está o gráfico da função f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$ onde $r \leqslant 5$. Da Definição 17.3.1, segue que f tem um valor máximo relativo de 5 no ponto onde $x = 0$ e $y = 0$.

Na Figura 2 aparece um esboço do gráfico da função g para a qual

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Seja B qualquer disco aberto $((0, 0); r)$. Então, da Definição 17.3.2, g tem um valor mínimo relativo de 0 na origem. ◀

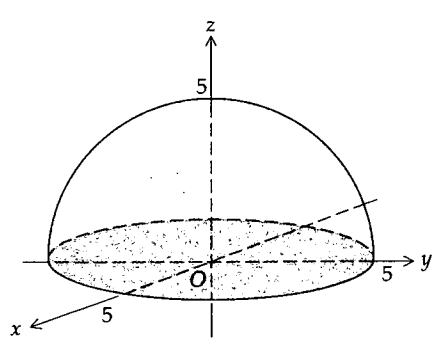


FIGURA 1

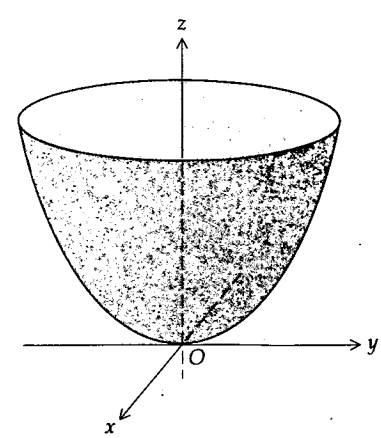


FIGURA 2

Análogo ao Teorema 4.1.3 para funções de uma variável, existe o seguinte teorema para funções de duas variáveis.

17.3.3 TEOREMA Seja $f(x, y)$ definida em todos os pontos de algum disco aberto $B(x_0, y_0); r)$ e tendo um extremo relativo em (x_0, y_0). Então, se existirem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, teremos

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

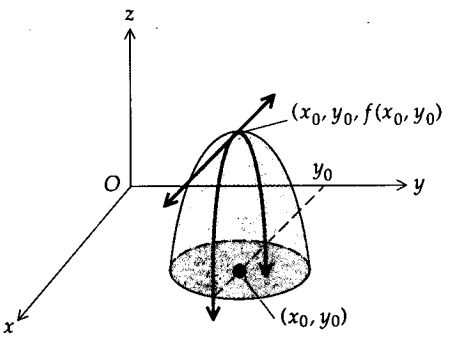


FIGURA 3

Antes de demonstrar o Teorema 17.3.3, vamos dar um argumento geométrico informal. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses e suponha que f tenha um valor máximo relativo em (x_0, y_0). Considere a curva de intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ (consulte a Figura 3). Essa curva é representada pelas equações

$$y = y_0 \quad \text{e} \quad z = f(x, y)$$

Como f tem um valor máximo relativo no ponto onde $x = x_0$, $y = y_0$, segue que essa curva tem uma reta tangente horizontal no plano $y = y_0$, em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A inclinação dessa reta tangente $f_x(x_0, y_0)$; assim $f_x(x_0, y_0) = 0$. De uma forma similar podemos considerar a curva de intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ e obter $f_y(x_0, y_0) = 0$. Uma discussão similar pode ser feita se f tiver um valor mínimo relativo em (x_0, y_0). A seguir está a demonstração formal.

Prova do Teorema 17.3.3 Vamos provar que se f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0) e se $f_x(x_0, y_0)$ existir, então $f_x(x_0, y_0) = 0$. Pela definição da derivada parcial,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Como f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0), pela Definição 17.3.1,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqslant 0$$

sempre que Δx for suficientemente pequeno, de tal forma que $(x_0 + \Delta x, y_0)$ esteja em B. Se Δx tender a zero pela direita, $\Delta x > 0$; logo,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$

Assim, pelo Teorema 2.10.3, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \leqslant 0$.

Analogamente, se Δx tender a zero pela esquerda, $\Delta x < 0$ e

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

Logo, pelo Teorema 2.10.4, se $f_x(x_0, y_0)$ existir, $f_x(x_0, y_0) \geqslant 0$. Concluímos, então, que, existindo $f_x(x_0, y_0)$, ambas as desigualdades, $f_x(x_0, y_0) \leqslant 0$ e $f_x(x_0, y_0) \geqslant 0$, devem ser válidas. Conseqüentemente, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

A demonstração de que $f_y(x_0, y_0) = 0$ se $f_y(x_0, y_0)$ existir e f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0), é análoga e será deixada como exercício (veja o Exercício 37). A demonstração do teorema quando $f(x_0, y_0)$ for um valor mínimo relativo também será deixada como exercício (veja o Exercício 38). ■

17.3.4 DEFINIÇÃO Um ponto (x_0, y_0) para o qual temos ambas as igualdades $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, é chamado de **ponto crítico**.

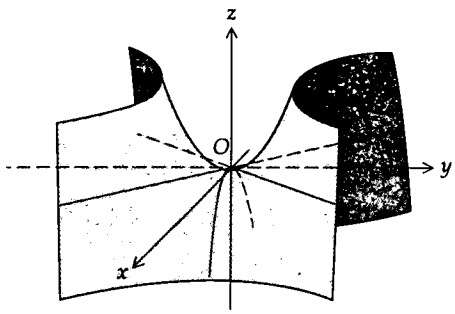


FIGURA 4

O Teorema 17.3.3 estabelece que uma condição necessária para que uma função de duas variáveis tenha um extremo relativo em um ponto, onde suas derivadas parciais primeiras existem, é que ele seja um ponto crítico. É possível, para uma função de duas variáveis, ter um extremo relativo em um ponto no qual as derivadas parciais não existem, mas não iremos considerar tal situação neste livro. Além disso, a anulação das derivadas parciais primeiras de uma função de duas variáveis não é uma condição suficiente para que a função tenha um extremo relativo no ponto. Isso ocorre na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Então,

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

Ambas, $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$, são nulas. Um esboço do gráfico de f aparece na Figura 4; os pontos próximos à origem dão ao gráfico uma forma de sela. É claro que f não satisfaz as Definições 17.3.1 ou 17.3.2 quando $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ◀

Na Ilustração 2, o ponto (0, 0) é chamado de *ponto de sela* da função f.

Há um teste da derivada segunda que dá condições que garantem a existência de extremos relativos para uma função em um ponto onde suas derivadas parciais são nulas. Contudo, algumas vezes é possível determinar os extremos de uma função pelas Definições 17.3.1 e 17.3.2, conforme está mostrado na ilustração a seguir.

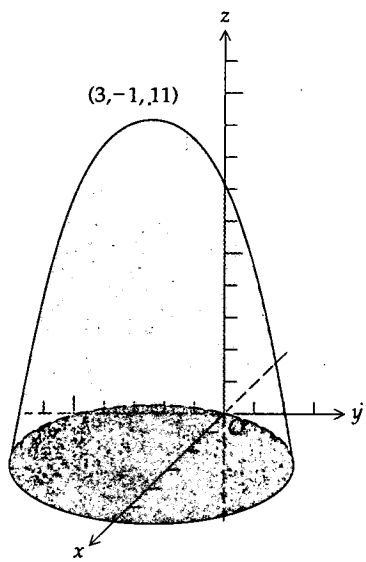


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f a função definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

Vamos determinar se f tem algum extremo relativo.

Como f e suas derivadas parciais existem em todo (x, y) em R^2, o Teorema 17.3.3 é aplicável. Derivados, obtemos

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Expressando $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ iguais a zero, obtemos $x = 3$ e $y = -1$. Veja a Figura 5 para um esboço do gráfico da equação

$$z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

É um parabolóide tendo um eixo vertical, com vértice em $(3, -1, 11)$ e abrindo para baixo. Podemos concluir que $f(x, y) \leqslant f(3, -1)$ para todo (x, y); logo, pela Definição 15.3.1, $f(3, -1) = 11$ é um valor máximo relativo da função. ◀

O teste básico para determinar máximos e mínimos para funções de duas variáveis é o teste da derivada segunda, dado no teorema a seguir.

17.3.5 TEOREMA
Teste da Derivada Segunda

Seja f uma função de duas variáveis, tal que f e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas em algum disco aberto $B((a, b); r)$. Suponhamos, além disso, que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$. Então,

(i) f tem um valor mínimo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \ (\text{ou } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tem um valor máximo relativo em (a, b) se

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \ (\text{ou } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ não é um extremo relativo se

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$$

(iv) Não podemos tirar conclusão nenhuma se

$$f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0.$$

Adiaremos a discussão da prova do teste da derivada segunda até o final desta secção, onde provaremos a parte (i).

EXEMPLO 1 Se

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

determine, caso haja, os extremos relativos de f.

Solução Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos primeiro as derivadas primeira e segunda de f.

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \qquad f_y(x, y) = 2y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \qquad f_{yy}(x, y) = 2 \qquad f_{xy}(x, y) = 0$$

Resolvendo $f_x(x, y) = 0$, obtemos $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Resolvendo agora $f_y(x, y) = 0$, obtemos $y = 1$. Logo, f_x e f_y são ambas nulas nos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$ e esses são os pontos críticos de f. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda a esses pontos estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	*Conclusão*
$(-\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo
$(0, 1)$	-2	2	0	-4	f não tem um extremo relativo
$(\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tem um valor mínimo relativo

No ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$, $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (i), f tem um valor mínimo relativo em $(-\frac{1}{2}, 1)$. Em $(0, 1)$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$; assim, do Teorema 17.3.5 (iii), f não tem extremo relativo em $(0, 1)$. Como $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em $(\frac{1}{2}, 1)$, f tem um valor mínimo relativo nesse ponto pelo Teorema 17.3.5(i).

Como $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$ e $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$, concluímos que f tem um valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$ em cada um dos pontos $(-\frac{1}{2}, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$.

Vamos discutir agora extremos absolutos de funções de duas variáveis.

17.3.6 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis terá um **valor máximo absoluto** em seu domínio D, no plano xy, se existir algum ponto (x_0, y_0) em D, tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D. Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor máximo absoluto de f em D.

17.3.7 DEFINIÇÃO A função f de duas variáveis terá um **valor mínimo absoluto** em seu domínio D, no plano xy, se existir algum ponto (x_0, y_0) em D, tal que $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D. Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor mínimo absoluto de f em D.

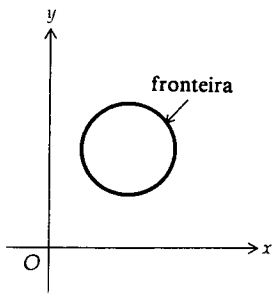


FIGURA 6

Para funções de uma única variável, tínhamos o teorema do valor extremo: Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$. Sabemos que um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um valor funcional extremo relativo ou um valor funcional na fronteira do intervalo. Temos uma situação correspondente para funções de duas variáveis. No enunciado do teorema do valor extremo para funções de duas variáveis, vamos nos referir a uma *região fechada*, no plano xy. Por **região fechada** entendemos aquela que inclui sua *fronteira*. Na ilustração a seguir damos algumas regiões fechadas e identificamos a fronteira de cada região.

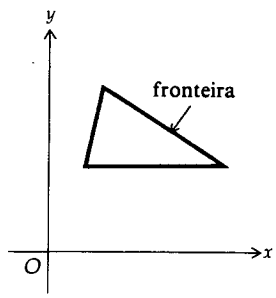


FIGURA 7

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Um disco fechado é uma região fechada. A fronteira é a circunferência do disco. Veja a Figura 6.

(b) Os lados de um triângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do triângulo. Veja a Figura 7.

(e) Os lados de um retângulo, juntamente com a região contida nele, constituem uma região fechada. A fronteira consiste nos lados do retângulo. Veja a Figura 8.* ◀

17.3.8 TEOREMA
Teorema do Valor Extremo para Funções de Duas Variáveis

Seja R uma região fechada no plano xy, e seja f uma função de duas variáveis contínua em R. Então, existe pelo menos um ponto em R onde f tem um valor máximo absoluto, e pelo menos um ponto em R onde f tem um valor mínimo absoluto.

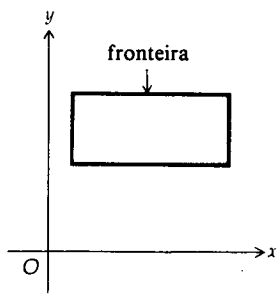


FIGURA 8

A demonstração desse teorema será omitida, pois foge ao contexto deste livro.

Se f for uma função satisfazendo o Teorema 17.3.8 e se ambas $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existirem em todos os pontos de R, então os extremos de f ocorrerão num ponto (x_0, y_0), onde $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, ou num ponto da fronteira de R.

EXEMPLO 2 Um fabricante que é um monopolista fabrica dois tipos de lâmpadas. De sua experiência, o fabricante determinou que se x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo forem feitas, cada uma delas poderá

* **N. do R.:** Um ponto P será da fronteira de R, denotada pelo símbolo ∂R, se satisfizer a seguinte propriedade: toda bola $B(P, r)$ centrada em P, com $r > 0$, contém pontos de R e de seu complemento. O ponto Q será interior a R, denotado por $\overset{\circ}{R}$, se satisfizer a seguinte propriedade: existe uma bola $B(Q, r)$ centrada em Q, com $r > 0$, totalmente contida em R. É claro então que $R = \overset{\circ}{R} \cup \partial R$ e $\partial R \cap \overset{\circ}{R} = \varnothing$.

ser vendida pelos valores $(100 - 2x)$ e $(125 - 3y)$, respectivamente.* O custo de fabricação de x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo é de $(12x + 11y + 4xy)$. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo, e qual é o lucro máximo?

Solução A renda obtida com a venda das lâmpadas do primeiro tipo é $x(100 - 2x)$, e com as lâmpadas do segundo tipo é $y(125 - 3y)$. Logo, se $f(x, y)$ for o lucro do fabricante,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(100 - 2x) + y(125 - 3y) - (12x + 11y + 4xy) \\ &= 88x + 114y - 2x^2 - 3y^2 - 4xy \end{aligned} \tag{1}$$

Como x e y representam o número de lâmpadas, exigimos que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ e permitiremos que x e y sejam quaisquer números reais não-negativos. Além disso, $(100 - 2x)$ é o preço de venda de lâmpadas do primeiro tipo. Assim, exigimos que $100 - 2x \geqslant 0$ ou, equivalentemente, $x \leqslant 50$. Analogamente, como $(125 - 3y)$ é o preço de venda de lâmpadas do segundo tipo, exigimos que $y \leqslant \frac{125}{3}$. Logo, o domínio de f é a região fechada, definida pelo conjunto

$$\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 50 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{125}{3}\}$$

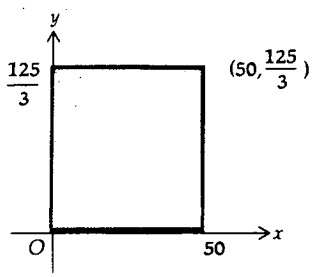


FIGURA 9

Essa região é retangular e aparece na Figura 9. A fronteira da região consiste nos lados do retângulo. Como f é uma função polinomial, então ela é contínua em toda parte. Logo, f é contínua em seu domínio; assim, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Os pontos críticos de f são encontrados, se determinarmos onde $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$.

$$f_x(x, y) = 88 - 4x - 4y \qquad f_y(x, y) = 114 - 6y - 4x$$

Expressando $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} x + y &= 22 \\ 2x + 3y &= 57 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $x = 9$ e $y = 13$. Para aplicar o teste da derivada segunda, calculamos as derivadas parciais segundas.

$$f_{xx}(x, y) = -4 \qquad f_{yy}(x, y) = -6 \qquad f_{xy}(x, y) = -4$$

No ponto (9, 13),

$$f_{xx}(9, 13) = -4 < 0$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(9, 13)f_{yy}(9, 13) - f_{xy}^2(9, 13) &= (-4)(-6) - (-4)^2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Segue, então, pelo Teorema 17.3.5(ii), que f terá um valor máximo relativo em (9, 13).

De (1),

$$f(x, y) = x(88 - 2x) + y(114 - 3y) - 4xy \tag{2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(9, 13) &= 9(70) + 13(75) - 468 \\ &= 1.137 \end{aligned}$$

* **N. do R.**: Considere uma unidade monetária básica que será denotada por \$. O valor numérico em qualquer outra moeda pode ser obtido multiplicando o original por um fator cambial determinado.

O valor máximo absoluto de f deve ocorrer em (9, 13) ou na fronteira do domínio de f. Vamos comparar $f(9, 13)$ com os valores funcionais na fronteira.

Para a parte da fronteira no eixo x com $x \in [0, 50]$, calculando os valores funcionais por (2), temos:

$$f(x, 0) = 88x - 2x^2$$

Seja

$$g(x) = 88x - 2x^2 \qquad x \in [0, 50]$$

Então,

$$g'(x) = 88 - 4x \quad \text{e} \quad g''(x) = -4$$

Como $g'(22) = 0$ e $g''(22) < 0$, g tem um valor máximo relativo de 968 em $x = 22$. Além disso, $g(0) = 0$ e $g(50) < 0$. Como $f(9, 13) = 1.137 > 968$, o valor máximo absoluto de f não ocorre no eixo x.

Para a parte da fronteira sobre o eixo y com $y \in [0, \frac{125}{3}]$, de (2),

$$f(0, y) = 114y - 3y^2$$

Seja

$$h(y) = 114y - 3y^2 \qquad y \in [0, \tfrac{125}{3}]$$

Então,

$$h'(y) = 114 - 6y \quad \text{e} \quad h''(y) = -6$$

Como $h'(19) = 0$ e $h''(19) < 0$, h tem um valor máximo relativo de 1.083 em $y = 19$. Além disso, $h(0) = 0$ e $h(\frac{125}{3}) < 0$. Como $f(9, 13) = 1.137 > 1.083$, o valor máximo absoluto de f não ocorre no eixo y.

Vamos considerar agora a parte da fronteira sobre a reta $x = 50$, com $y \in [0, \frac{125}{3}]$. De (2),

$$f(50, y) = y(114 - 3y) - 600 - 200y \qquad f(0, y) = y(114 - 3y)$$

Comparando essas duas equações,

$$f(50, y) < f(0, y)$$

Como $f(9, 13) > f(0, y)$ para todo y em $[0, \frac{125}{3}]$, então, da desigualdade acima,

$$f(9, 13) > f(50, y) \quad \text{para} \quad y \in [0, \tfrac{125}{3}]$$

Logo, o valor máximo absoluto de f não ocorre sobre a reta $x = 50$.

Finalmente, temos a parte da fronteira sobre a reta $y = \frac{125}{3}$, com $x \in [0, 50]$. De (2),

$$f(x, \tfrac{125}{3}) = x(88 - 2x) - \tfrac{1375}{3} - \tfrac{500}{3}x \qquad f(x, 0) = x(88 - 2x)$$

Dessas duas equações segue que $f(x, \frac{125}{3}) < f(x, 0)$. Portanto, como $f(9, 13) > f(x, 0)$, para todo x em $[0, 50]$, podemos concluir que ele também é maior do que $f(x, \frac{125}{3})$ para todo x em $[0, 50]$. Assim, o valor máximo absoluto não pode ocorrer sobre a reta $y = \frac{125}{3}$.

Logo, o valor máximo absoluto de f não está sobre a fronteira, mas sim no ponto (9, 13). Concluímos, então, que 9 lâmpadas do primeiro tipo e 13 lâmpadas do segundo tipo devem ser produzidas para o lucro máximo de \$ 1.137.

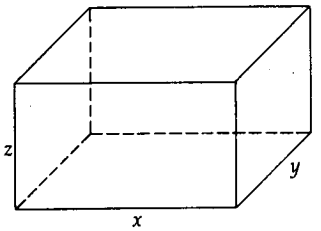


FIGURA 10

EXEMPLO 3 Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem a tampa e com um dado volume, sendo usada a menor quantidade de material possível em sua fabricação.

Solução Sejam x unidades o comprimento da base da caixa, y unidades a largura da base da caixa, z unidades a altura da caixa e S unidades a área da superfície da caixa. Sejam V unidades de volume o volume dado da caixa, onde V é uma constante. A Figura 10 mostra a caixa.

Cada uma das variáveis x, y e z está no intervalo $(0, +\infty)$. Temos as equações

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad \text{e} \quad V = xyz$$

Resolvendo a segunda equação para z em termos de x, y e da constante V, iremos obter $z = \dfrac{V}{xy}$ e substituindo esse valor na primeira equação, teremos

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \tag{3}$$

Derivando, obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{dy\,\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

Expressando $\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial S}{\partial y} = 0$, obtemos

$$x^2y - 2V = 0$$
$$xy^2 - 2V = 0$$

Resolvendo essas duas equações simultaneamente, obtemos $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Para esses valores de x e y,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial x}\right)^2 = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3}\cdot\frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1$$

$$= 2 > 0 \qquad\qquad = 3 > 0$$

Do Teorema 17.3.5(i), segue que S tem um valor mínimo relativo quando $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$. Convém lembrar que x e y estão no intervalo $(0, +\infty)$, e notar, da equação (3), que S é muito grande quando x e y estão próximos de zero ou são muito grandes. Assim sendo, concluímos que o valor mínimo relativo de S é um valor mínimo absoluto de S.

Como $z = V/(xy)$, então, quando $x = \sqrt[3]{2V}$ e $y = \sqrt[3]{2V}$,

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

Logo, a caixa deve ter uma base quadrada e uma altura que é a metade do comprimento do lado da base.

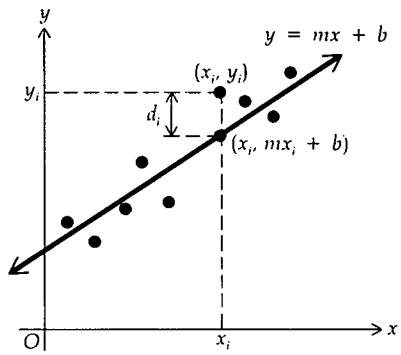


FIGURA 11

Uma aplicação de extremos de funções de duas variáveis envolve a obtenção da reta que *melhor se ajuste* a um conjunto de pontos dados. Por exemplo, suponha que queiramos encontrar um modelo matemático para alguns dados que são um conjunto de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Em particular, y_i poderia ser o lucro semanal de um fabricante, enquanto que x_i seria o número de unidades vendidas por semana, ou y_i poderia ser o total de vendas anuais, enquanto que x_i seria o número de anos decorridos desde o começo da empresa. O número de casos novos de uma doença epidêmica poderia ser y_i, enquanto que x_i seria o número de dias decorridos desde o aparecimento da epidemia. O modelo desejado é uma relação entre x e y que permita fazer futuras predições. Tal relação é proporcionada por uma reta que "se ajuste" aos dados.

Para chegar a uma definição adequada de tal reta, vamos indicar primeiro em que medida uma determinada reta ajusta-se a um conjunto de pontos, medindo as distâncias verticais entre os pontos e a reta. Por exemplo, na Figura 11 existem n pontos e a reta $y = mx + b$. O ponto (x_i, y_i) é o i-ésimo ponto e, correspondendo a ele, existe na reta o ponto $(x_i, mx_i + b)$. O **desvio** (ou **erro**) entre o i-ésimo ponto e a reta é definido como d_i, onde

$$d_i = y_i - (mx_i + b)$$

A soma dos quadrados dos desvios é

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

que nunca é negativa, sendo zero somente se cada um dos d_i for zero, quando todos os pontos estão sobre a reta. Tomaremos como a reta de melhor ajuste, aquela para a qual $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ é um mínimo absoluto. Essa reta é chamada de **reta de regressão** de y em x, e o processo de encontrá-la é chamado de **método dos mínimos quadrados**.

Agora vamos dar o procedimento para o uso do método dos mínimos quadrados, a fim de obter a reta de regressão $y = mx + b$ para um conjunto de n pontos dados. Como x_i e y_i são constantes e m e b são variáveis, $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ é uma função de m e b. Denotamos essa função por f, de modo que

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

Queremos encontrar os valores de m e de b que tornem $f(m, b)$ um mínimo absoluto. Vamos calcular primeiro as derivadas parciais $f_m(m, b)$ e $f_b(m, b)$.

$$\begin{aligned} f_m(m, b) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial m} [(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} (-x_i y_i + mx_i^2 + bx_i) \\ &= 2\left[-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i \right] \end{aligned}$$

$$f_b(m, b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial b}[(y_i - mx_i - b)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - mx_i - b)(-1)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} (-y_i + mx_i + b)$$

$$= 2\left[-\sum_{i=1}^{n} y_i + m\sum_{i=1}^{n} x_i + nb\right]$$

Expressando $f_m(m, b) = 0$ e $f_b(m, b) = 0$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{4}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Essas são duas equações simultâneas em m e b. Resolvendo a segunda equação para b teremos

$$b = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \tag{5}$$

Substituindo b por esse valor em (4), obtemos

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{6}$$

No Exercício 41 será pedido que você forneça os detalhes envolvidos na obtenção das equações (6), a partir de (4) e (5). No Exercício 42 será pedido que você use o teste da derivada segunda para mostrar que f tem um valor mínimo relativo para esses valores de m e de b, em (5) e (6). Você verá que há apenas um único extremo relativo para f. Também, m e b estão ambos no intervalo $[-\infty, +\infty)$ e $f(m, b)$ é grande quando o valor absoluto de m ou de b é grande. Assim, podemos concluir que o valor mínimo relativo de f é um valor mínimo absoluto.

Observe que aparecem nas fórmulas (5) e (6) quatro somatórios diferentes. Uma maneira de calculá-los é através de computadores ou calculadoras programáveis. Quando uma pequena quantidade de dados está envolvida, uma forma conveniente de calcular os somatórios é mostrada nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 4 Uma antigüidade rara foi comprada em 1970 por \$ 1.200. Seu valor era \$ 1.800 em 1975, \$ 2.500 em 1980 e \$ 3.100 em 1985. Se o valor da antigüidade seguir o mesmo padrão de valorização até 1995, estime o valor dela em 1995 pelo método dos mínimos quadrados.

Solução Para encontrar a reta de regressão $y = mx + b$, supomos que x seja o número de períodos de 5 anos desde 1970 e supomos que o valor da antigüidade será y, $5x$ anos depois de 1970. Assim, temos os pontos dados na Tabela 2.

Tabela 2

x	0	1	2	3
y	1.200	1.800	2.500	3.100

Tabela 3

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
0	1.200	0	0
1	1.800	1	1.800
2	2.500	4	5.000
3	3.100	9	9.300
$\sum$ 6	8.600	14	16.100

A Tabela 3 mostra o cálculo dos quatro somatórios que aparecem nas equações (5) e (6). Da tabela,

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 6 \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 8.600 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_iy_i = 16.100$$

Com esses valores e $n = 4$ obtemos, de (6) e (5),

$$m = \frac{4(16.100) - 6(8.600)}{4(14) - 6(6)} = 640 \qquad b = \tfrac{1}{4}[8.600 - 640(6)] = 1.190$$

Logo, a reta de regressão tem a equação

$$y = 640x + 1.190$$

Para o ano de 1995, $x = 5$. Para esse valor de x teremos

$$y = 640(5) + 1.190 = 4.390$$

Assim, em 1995 o valor estimado da antigüidade será de **$ 4.390.**

Tabela 4

x	1	2	3	4	5
y	20	24	30	35	42

EXEMPLO 5 Na Tabela 4, x dias decorreram desde o início do surto de uma determinada doença epidêmica e y é o número de novos casos da doença no x-ésimo dia. (a) Ache a reta de regressão para os pontos (x_i, y_i) dados. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de casos novos da doença no sexto dia.

Solução

Tabela 5

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	20	1	20
2	24	4	48
3	30	9	90
4	35	16	140
5	42	25	210
$\sum$ 15	151	55	508

(a) A reta procurada tem uma equação $y = mx + b$. Para determinar m e b, calculamos primeiro os somatórios das equações (5) e (6) usando a Tabela 5. Da tabela,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 15 \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 151 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_iy_i = 508$$

De (6) e (5) com esses valores e $n = 5$, obtemos

$$m = \frac{5(508) - (15)(151)}{5(55) - (15)(15)} = 5{,}5 \qquad b = \tfrac{1}{5}[151 - 5{,}5(15)] = 13{,}7$$

Logo, a equação da reta de regressão é

$$y = 5{,}5x + 13{,}7$$

(b) Na equação da reta de regressão, quando $x = 6$, então $y = 46{,}7$. Portanto, no sexto dia de epidemia 47 novos casos são estimados.

Concluiremos essa secção com a prova da primeira parte do teste da derivada segunda.

Prova do Teorema 17.3.5(i) Para simplificar a notação, vamos definir

$$\phi(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Dado que $\phi(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, queremos provar que $f(a, b)$ é um valor mínimo relativo da função. Como f_{xx}, f_{xy} e f_{yy} são contínuas em $B((a, b); r)$, segue que ϕ também contínua em B. Logo, existe um disco aberto $B'((a, b; r')$, onde $r' \leqslant r$, tal que $\phi(x, y) > 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$ para todo ponto (x, y) em B'. Sejam h e k constantes, não sendo ambas nulas, tais que o ponto $(a + h, b + k)$ estejam em b'. Então as duas equações

$$x = a + ht \quad \text{e} \quad y = b + kt \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

definem todos os pontos do segmento de reta de (a, b) a $(a + h, b + k)$ e todos esses pontos estão em B'. Seja F a função de uma variável definida por

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) \tag{7}$$

Pela fórmula de Taylor (fórmula (2), Secção 11.5),

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\xi)}{2!}t^2$$

onde ξ está entre 0 e t. Se $t = 1$ nessa equação, obtemos

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2}F''(\xi) \tag{8}$$

onde $0 < \xi < 1$. Como $F(0) = f(a, b)$ e $F(1) = f(a + h, b + k)$, segue de (8) que

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \tfrac{1}{2}F''(\xi) \tag{9}$$

onde $0 < \xi < 1$.

Para encontrar $F'(t)$ e $F''(t)$ de (7), usamos a regra da cadeia e obtemos

$$F'(t) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \tag{10}$$

e

$$F''(t) = h^2f_{xx} + hkf_{yx} + hkf_{xy} + k^2f_{yy}$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + ht, b + kt)$. Do Teorema 16.7.1, segue que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todo (x, y) em B'. Assim,

$$F''(t) = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy} \tag{11}$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + ht, b + kt)$. Substituindo 0 por t em (10) e ξ por t em (11), obtemos

$$\begin{aligned} F'(0) &= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$F''(\xi) = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}$$

onde cada derivada parcial segunda é calculada em $(a + h\xi, b + k\xi)$ e $0 < \xi < 1$. Substituindo esses valores de $F'(0)$ e $F''(\xi)$ em (9) obtemos

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \tfrac{1}{2}(h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}) \tag{12}$$

Os termos entre parênteses no segundo membro de (12) podem ser escritos como

$$h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy} = f_{xx}\left[h^2 + 2hk\frac{f_{xy}}{f_{xx}} + \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 - \left(k\frac{f_{xy}}{f_{xx}}\right)^2 + k^2\frac{f_{yy}}{f_{xx}}\right]$$

Assim, de (12),

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{f_{xx}}{2}\left[\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}k^2\right] \tag{13}$$

Como $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, calculada em $(a + h\xi, b + k\xi)$, é igual a

$$\phi(a + h\xi, b + k\xi) > 0$$

segue que a expressão entre colchetes no segundo membro de (13) é positiva. Além disso, como $f_{xx}(a + h\xi, b + k\xi)$, segue de (13) que $f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$. Assim provamos que

$$f(a + h, b + k) > f(a, b)$$

para todo ponto $(a + h, b + k) \neq (a, b)$ em B'. Logo, pela Definição 17.3.2, $f(a, b)$ é um valor mínimo relativo de f. ■

A demonstração da parte (ii) do Teorema 17.3.5 é similar e será proposta como exercício (veja o Exercício 39). A demonstração da parte (iii) será também deixada como exercício (veja o Exercício 40). A parte (iv) foi incluída para cobrir todos os casos possíveis.

EXERCÍCIOS 17.3

Nos Exercícios de 1 a 12, determine os extremos relativos de f, se existirem.

1. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$
2. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$
3. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$
4. $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$
5. $f(x, y) = e^{xy}$
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$
7. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$
8. $f(x, y) = \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$
9. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$
10. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi$
11. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y;\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$
12. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$
13. Ache três números positivos cuja soma é 24, de modo que o produto deles seja o maior possível.
14. Ache três números positivos cujo produto é 24 e sua soma é a menor possível.
15. Ache o ponto no plano $3x + 2y - z = 5$, que está mais próximo do ponto $(1, -2, 3)$, e determine a distância mínima.
16. Ache os pontos na superfície $y^2 - xz = 4$ que estão mais próximos da origem e determine a distância mínima.
17. Ache os pontos da curva de intersecção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ com o plano $x - 4y - z = 0$ que estão mais próximos da origem e determine a distância mínima.
18. Uma fábrica tem duas classificações para seus operários, A e B. Os operários da classe A recebem \$ 14 por jornada e os da classe B, \$ 13 por jornada. Para um certo lote de produção, está determinado que se x operários da classe A e y operários da classe B trabalharem, o custo do lote será de $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. Quantos operários de cada classe devem ser empregados, de tal forma que o custo do lote seja mínimo, se pelo menos três operários de cada classe são exigidos para a sua fabricação?
19. Uma injeção de x mg da droga A e y mg da droga B causa uma resposta de R unidades, e $R = x^2y^3(c - x - y)$, onde c é uma constante positiva. Que quantidade de cada droga causará a resposta máxima?
20. Suponha que t horas após a injeção de x mg de adrenalina a resposta seja R unidades, e $R = te^{-t}(c - x)x$, onde c é uma constante. Que valores de x e t irão causar a resposta máxima?
21. Ache o volume do maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsóide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$, se os lados forem paralelos aos eixos coordenados.
22. Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita a um custo de \$ 10 para o material. Se o material para a base custa \$ 0,15 por centímetro quadrado e o material dos lados custa \$ 0,30 por centímetro quadrado, ache as dimensões da caixa de maior volume que pode ser feita.
23. Uma caixa retangular fechada, para conter 16 cm^3, deve ser feita com três tipos de materiais. O custo do material da tampa e da base é de \$ 0,18 por cm^2, o custo do material das partes da frente e de trás é de \$ 0,16 por cm^2 e o custo do material para os outros dois lados é de \$ 0,12 por cm^2. Ache as dimensões da caixa, de modo que o custo do material seja um mínimo.
24. Suponha que T graus seja a temperatura em qualquer ponto (x, y, z) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $T = 100xy^2z$. Ache

os pontos da esfera onde a temperatura é máxima e também os pontos onde ela é menor. Ache a temperatura nesses pontos.

25. Suponha que a fabricação de um produto requer x horas por máquina e y horas por pessoa e o custo de produção seja dado por $f(x, y)$, onde

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$

Determine o número de máquinas-hora e pessoas-hora necessárias para que o custo seja mínimo.

26. Uma loja vende dois tipos de camisas que são similares, mas de diferentes fabricantes. O custo para a loja, do primeiro tipo, é \$ 40, enquanto que o segundo tipo custa \$ 50. Ficou determinado pela experiência que se os preços de venda forem x e y, então o número de peças vendidas a cada mês será $3.200 - 50x + 25y$ e $25x - 25y$, respectivamente. A que preço deverá ser vendido cada tipo de camisa, para que o lucro bruto seja máximo?

27. Uma pintura abstrata foi vendida pelo artista em 1915 por \$ 100. Dada a sua importância histórica, o seu valor tem crescido no decorrer dos anos. Esse valor era de \$ 4.600 em 1935, \$ 11.000 em 1955 e \$ 20.000 em 1975. Na hipótese de que a valorização da pintura seguirá o mesmo padrão até 1995, use o método dos mínimos quadrados para estimar o seu valor em 1995.

28. Nos EUA um carro modelo 1985 foi vendido como carro usado em 1986 por US\$ 6.800. Seu valor era de US\$ 6.200 em 1987, US\$ 5.700 em 1988 e US\$ 4.800 em 1990. Use o método dos mínimos quadrados para estimar qual era o seu valor em 1989.

29. Um filme vem sendo exibido no Cinema Um por 5 semanas e o público (aproximado para a centena mais próxima) presente em cada semana está registrado na tabela:

Semana	1	2	3	4	5
Público	5.000	4.500	4.100	3.900	3.500

Supondo que o público semanal continuará a declinar segundo o mesmo padrão, até atingir 1.500, (a) use a reta de regressão para os dados da tabela, a fim de determinar o público na sexta semana. (b) O filme irá para o Cinema Dois, menor, quando o público estiver abaixo de 2.250. Quantas semanas espera-se que dure a exibição no Cinema Um?

30. Cinco tipos de árvores tiveram sua seiva analisada para medir a quantidade de hormônio que causa a queda das folhas. Para as árvores da tabela a seguir, quando foram medidos x microgramas (μg) de hormônio, y folhas haviam caído.

	Carvalho	*Bordo*	*Bétula*	*Pinheiro*	*Alfarrobeira*
x	28	57	38	75	82
y	208	350	300	620	719

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de folhas que caem de uma árvore cuja quantidade de hormônio liberado foi de 100 μg.

31. Cinco corredores foram examinados para determinar a quantidade máxima de aspiração de oxigênio, que é uma medida usada para caracterizar a situação cardiovascular de uma pessoa. Os resultados estão na tabela a seguir, onde x é o número de segundos no melhor tempo feito em um kilômetro e y é o número de mililitros por minuto, por quilograma de peso corporal da aspiração máxima de oxigênio do corredor.

	Corredor A	*Corredor B*	*Corredor C*	*Corredor D*	*Corredor E*
x	300,5	350,6	407,3	326,2	512,8
y	350,2	325,8	375,6	418,5	400,2

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar a máxima aspiração de oxigênio de um corredor, cujo melhor tempo em um milha é de 340,4 s.

32. O número de pontos obtidos por um estudante no vestibular foi usado para predizer a média obtida no fim do primeiro ano de graduação. A tabela a seguir dá os dados para seis estudantes, onde x é o número de pontos no vestibular e y é a média.

	Estudante A	*Estudante B*	*Estudante C*	*Estudante D*	*Estudante E*	*Estudante F*
x	92	81	73	78	79	85
y	3,4	2,7	3,1	3,8	2,2	3,0

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar a média de um estudante que obteve 88 pontos no vestibular.

33. Um monopolista produz grampeadores e grampos cujas equações de demanda são $x = 10/(pq)$ e $y = 20/(pq)$, onde $1.000x$ grampeadores são demandados, se o preço for p por grampeador e $1.000y$ caixas de grampos são demandadas, se o preço por caixa for q. O custo de produção é \$ 2 para cada grampeador e \$ 1 para cada caixa de grampos. Determine o preço de cada produto, a fim de obter um lucro total máximo.

34. Se as equações de demanda no Exercício 33 forem $x = 11 - 2p - 2q$ e $y = 19 - 2p - 3q$, mostre que para ter o lucro total máximo, os grampeadores devem ser gratuitos e os grampos devem ser caros.

35. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa, a ser feita com uma dada quantidade de material, para que a caixa tenha o maior volume possível.

36. Prove que a caixa com volume máximo que pode ser colocada dentro de uma esfera tem a forma de um cubo.

37. Prove que $f_y(x_0, y_0) = 0$ se $f_y(x_0, y_0)$ existir e f tiver um valor máximo relativo em (x_0, y_0).

38. Prove o Teorema 17.3.3, quando $f(x_0, y_0)$ é um valor mínimo relativo.

39. Prove o Teorema 17.3.5(ii).

40. Prove o Teorema 17.3.5(iii).

41. Obtenha a equação (6) substituindo de (5) em (4).

42. Se $f(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$, use o teste da derivada segunda para provar que os valores de m e b em (5) e (6) dão um valor mínimo relativo de f. (*Sugestão*: mostre primeiro que $f_{mm}(m, b) > 0$. Para mostrar que $f_{mm}(m, b) \cdot f_{bb}(m, b) - f_{mb}{}^2(m, b) > 0$, você deve provar que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. Para provar isso, seja $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ e aplique as propriedades da notação de somatória à desigualdade $\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 > 0$.)

17.4 FUNÇÕES IMPLÍCITAS, DERIVAÇÃO

Dada uma equação do tipo $F(x, y) = 0$, curva de nível da função $z = F(x, y)$, ela pode definir qualquer uma das variáveis x e y como função da outra ou não. Esse tipo de equação pode aparecer, por exemplo, em algum experimento de laboratório onde dois ou mais parâmetros são observados e, em vez dos dados compilados darem origem a uma relação funcional entre eles, o melhor que se pode conseguir com os dados é uma relação do tipo $F(x, y) = 0$. Essa relação estabelece uma interdependência não explicitamente funcional entre os parâmetros x e y.

Uma equação do tipo $F(x, y) = 0$ pode corresponder a um gráfico de uma curva onde podemos identificar mais de uma função. Analogamente, uma equação do tipo $F(x, y, z) = 0$ pode ser o gráfico de uma superfície formada por diversas funções. Observe os gráficos das Secções 15.7 e 16.1. Em alguns casos as curvas de nível ($z = 0$) determinam gráficos de funções e em outros não.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. A condição de que $F(x, f(x)) = x^2 + [f(x)]^2 - 1 = 0$ para todo x no domínio de f está satisfeita por cada uma das seguintes escolhas para f.

$$(1)\ F(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$
$$(2)\ f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$
$$(3)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Observe que no caso (3) a função é descontínua no zero. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação $xy - 1 = 0$ define a função $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Consideremos a equação $x^2 - 2yx + x^2 - 1 = 0$. Dizemos que ela define implicitamente a função $y = x + 1$.

De fato, temos que

$$(x + 1)^2 - 2x(x + 1) + x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Observe que a equação dada também define a função $y = x - 1$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A equação $\ln y - x^2 = 0$ define a função $y = e^{x^2}$. De fato, temos que

$$\ln (e^{x^2}) - x^2 = x^2 - x^2 = 0$$

Poderíamos ter também as funções $x = \pm (\ln y)^{1/2}$ $1 \leqslant y$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Já a equação $[(\text{sen } y + 2)^2 x^2]^{1/2} = 0$ define a função $x = \text{sen } y + 2$ (ou $x = -\text{sen } y - 2$), mas não define y como função de x já que as senóides, curvas de nível de $z = [(\text{sen } y + 2)^2 - x^2]^{1/2}$, ($z = 0$) não são gráficos funcionais para x como variável independente. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Por fim, a equação $\cos x + \cos y = 0$ não define nem x como função de y nem vice-versa. Observe a Figura 10 à página 915.

Em geral, dizemos que a equação $F(x, y) = 0$ define *implicitamente* a função $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se

$$F(x, f(x)) = 0, \ a \leqslant x \leqslant b$$

Da mesma forma, a equação $F(x, y, z) = 0$ define *implicitamente* a função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, se

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \ (x, y) \in D$$

onde D é uma região do plano. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Dada a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dizemos que ela define implicitamente a função $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. De fato, temos que

$$x^2 + y^2 + [(1 - x^2 - y^2)^{1/2}]^2 = x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2 = 1$$ ◀

A discussão das condições sobre a função F para que ela defina implicitamente uma função é o Teorema da Função Implícita, o qual prova a existência de funções implícitas a partir daquelas condições, foge ao contexto deste livro.

No que segue, estaremos então admitindo tacitamente a existência da função implícita. Os próprios resultados obtidos darão conta de algumas restrições. Fica entendido que as fórmulas desenvolvidas só serão válidas para funções tais que a aplicação das fórmulas não conduza a um absurdo.

Poderemos estar interessados em calcular pontos extremos, planos tangentes, enfim, analisar o comportamento de funções cuja definição explícita não é possível ou é complicada. Torna-se importante, então, poder calcular suas derivadas parciais. Nesta secção desenvolvemos um método que nos permite encontrar as derivadas de funções definidas implicitamente, diretamente a partir da equação ou das equações que a definem. Consideremos, por exemplo, a equação

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

a qual define implicitamente a função $y = (1 - x^2)^{1/2}$. Temos que

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy \\ &= 2x\, dx + 2y\, dy = 0 \end{aligned}$$

onde igualamos a zero, pois $F(x, y) = 0$. Segue, então, que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{2y} \\ &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

que existe sempre se $y \neq 0$.

17.4.1 TEOREMA Dadas as funções $F = F(x, y)$ e $y = f(x)$ definidas e diferenciáveis, respectivamente, em $D \subset R^2$ e $a \leqslant x \leqslant b$. Seja f a função definida implicitamente por $F(x, y) = 0$, isto é, $F(x, f(x)) = 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Então,

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \ a \leqslant x \leqslant b$$

onde as derivadas do segundo membro devem ser calculadas nos pontos $(x, f(x))$ e supõe-se que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Prova Para todo $x \in [a, b]$, temos que

$$F(x, f(x)) = 0$$

Logo,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = 0$$

Segue, então, que se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

EXEMPLO 1 Dado que y é uma função implícita de x definida por $F(x, y) = x^3 + y \cos x = 0$, determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \\ &= -\frac{3x^2 - y \operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \frac{-3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0)\end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Suponha que $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Segue que $F(x, y) = y\, g(x) - f(x) = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y\, g'(x) - f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)\end{aligned}$$

que é a conhecida fórmula para derivar o quociente de duas funções. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** Convém observar que a fórmula para o cálculo de $\frac{dy}{dx}$ vale desde que exista $y = f(x)$ a partir de $F(x, y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 = 0$ só tem a solução $x = y = 0$, isto é, um ponto. Entretanto, empregando a fórmula, teremos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

que não faz sentido. ◀

EXEMPLO 2 Dada a curva $y\, e^x - x + \sqrt{3} - 1 = 0$, queremos determinar a equação da reta tangente à curva no ponto onde ela intercepta o eixo y.

Solução

Dado que a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) é

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0,\, y_0)} \cdot (x - x_0),$$

no nosso caso o ponto de tangência é $(0, 1 - \sqrt{3})$ e para determinarmos a equação procurada resta determinar $\frac{dy}{dx}$. Mas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{ye^x - 1}{e^x} = \frac{-ye^x + 1}{e^x}$$

No ponto $(0, 1 - \sqrt{3})$ o valor de $\frac{dy}{dx}$ é $\sqrt{3}$, assim sendo $(y - 1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}x$ é a equação procurada.

EXEMPLO 3 Queremos calcular $\frac{dy}{dx}$, sendo que $y = f(x)$ é definida implicitamente por $F(x, y) = (3x^2 + 2y^2)^2 = 0$.

Solução

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6x^2}{4y} = -\frac{3x^2}{2y}$$

pois, se $(3x^2 + 2y^2)^2 = 0$, então $(3x^2 + 2y^2) = 0$.

Podemos estender o teorema a seguir para funções de três variáveis.

17.4.2 TEOREMA Dadas as funções $F = F(x, y, z)$ e $z = f(x, y)$ definidas e diferenciáveis, respectivamente, em $D \subset R^3$ e $S \subset R^2$, seja f a função de (x, y) definida implicitamente por $F(x, y, z) = 0$, isto é, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ em S. Então,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

para todo $(x, y) \in S$. As derivadas do segundo membro são calculadas em $(x, y, f(x, y))$ e supõe-se que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Prova Para todo $(x, y) \in S$, temos que

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

Logo,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

Mas, estamos supondo que $z = f(x, y)$, então

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Substituindo dz em dF, teremos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0$$

Como x e y são variáveis independentes, ou seja, x não é função de y nem vice-versa, segue que $\frac{dx}{dy} = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$; portanto, da relação acima obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ podemos dividir ambas as igualdades por $\frac{\partial F}{\partial z}$, obtendo assim as fórmulas dadas no teorema. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 10** Se $z = f(x, y)$ for definida implicitamente por $F(x, y, z) = 0$ e se f for diferenciável, então

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \\ &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,dx - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 4 Calcule dy sendo $y = f(x)$ definida implicitamente por

$$F(x, y) = x^2y^2 - x\cos y - 1 = 0$$

Solução

$$\begin{aligned} dy &= \frac{df}{dx}\,dx \\ &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dx \\ &= -\frac{2xy^2 - \cos y}{2x^2y + x\,\text{sen}\,y}\,dx = \frac{-2xy^2 + \cos y}{2x^2y + x\,\text{sen}\,y}\,dx \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $z = f(x, y)$ definida implicitamente por

$$F(x, y, z) = x + y^3 - 3xz = 0$$

Solução Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3z \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -3x$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{x^2 - z}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{y^2}{x} \quad (x \neq 0)$$

Consideremos agora a seguinte situação: temos uma função $y = h(x)$ definida implicitamente pelo sistema de equações

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 0$$

Caso seja simples obter em cada uma delas z como função de x e y, isto é,

$$z = f(x, y) \quad \text{e} \quad z = g(x, y)$$

então, é claro que

$$H(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = 0$$

e de $H(x, y) = 0$ podemos tirar $y = h(x)$, bem como $z = l(x)$, pois $z = f(x, h(x)) = g(x, h(x)) = l(x)$. À equação $H(x, y) = 0$ podemos aplicar o método obtido anteriormente a fim de obter $\frac{dy}{dx}$.

Pode acontecer, entretanto, que explicitar z nas duas equações dadas seja uma tarefa por demais complicada. Podemos usar então o seguinte procedimento alternativo:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0$$

e

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial z}\,dz = 0$$

ou, alternativamente, já que estamos supondo a existência das funções $y = h(x)$ e $z = l(x)$ e que elas são deriváveis, o sistema pode ser escrito como

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

Considerando as igualdades anteriores como um sistema linear em $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ teremos, resolvendo por Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

As igualdades acima permitem calcular facilmente as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, mesmo sem conhecer a expressão explícita das funções $h(x)$ e $l(x)$.

EXEMPLO 6 Dado que

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

e

$$G(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 - 1 = 0$$

queremos calcular $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Solução Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = 12xz, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = -8xy \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = -4yz$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12xz}{-4yz} = -\frac{3x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-8xy}{-4yz} = \frac{2x}{z}$$

Consideremos agora um caso um pouco mais complicado. São dadas as equações

$$F(x, y, u, v) = 0 \text{ e } G(x, y, u, v) = 0$$

Vamos supor que elas definem u e v como funções implícitas de x e y. Tomando as diferenciais de F e G, teremos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$$

e

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv = 0$$

Como estamos supondo u e v funções de x e y, então

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{e} \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Substituindo du e dv em dF e dG, teremos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = 0$$

Mas x e y são as variáveis independentes e não existe nenhuma relação funcional entre elas, logo $\frac{dx}{dy} = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$, donde concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \qquad \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}$$

Supondo agora $\Delta \neq 0$, onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

podemos então determinar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$. Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

A transformação definida implicitamente no caso em discussão por $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ é uma transformação do plano no plano e corresponde a uma mudança de sistemas de coordenadas no plano: passagem das coordenadas x e y às coordenadas u e v desde que esta transformação seja bijetora, isto é, para cada (x, y) corresponde pela transformação um único (u, v) e vice-versa. Saber calcular as derivadas parciais de u e v numa tal transformação, como veremos no Capítulo 18, desempenha papel importante no cálculo de integrais duplas e triplas, quando são necessárias mudanças de variáveis nestas integrais.

EXERCÍCIOS 17.4

1. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = e^{xy} + \text{sen}(2x - 3y) = 0$.

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = x^2 \text{sen}(x + y) + y^2 \cos(x + y) = 0$.

3. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = \frac{\text{sen}\,(x + y)}{\cos\,(x - y)} = 0$.

4. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.

5. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos y + \cos^2 y = 0$.

6. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = x \,\text{sen}\, y + y \cos x = 0$.

7. Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo $F(x, y) = 1 + xy - \ln\,(e^{xy} + e^{-xy})$.

Nos Exercícios de 8 a 12, escreva a equação da reta tangente à curva $F(x, y) = 0$ no ponto P.

8. $F(x, y) = 2x^3 - y^2 - 2x^2y + 1$; $P = \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$.
9. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$; $P = (1, 2)$.
10. $F(x, y) = e^{xy} + \text{sen}(2x + y) + x + y - 1$; $P = (0, 0)$.
11. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$; $P = (1, 0)$.
12. $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $P = (x_0, y_0)$.

Nos Exercícios de 13 a 15, dadas as equações $F(x, y, u, v) = 0$ e $G(x, y, u, v) = 0$, determine a derivada indicada.

13. $F(x, y, u, v) = x + y^3 + u^3 + v^3$, $G(x, y, u, v) = x^3 - y - u^4 - v^4$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
14. $F(x, y, u, v) = x - u^2 + v^2$, $G(x, y, u, v) = y - uv$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
15. $F(x, y, u, v) = ue^v - xy + v$, $G(x, y, u, v) = ve^y - xv + u$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$.
16. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$, $G(x, y, z) = x^2y - y^2z + xz^2 - 1$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.
17. Dado que $x = r \cos \theta$ e $y = r \,\text{sen}\, \theta$, calcule $\frac{\partial r}{\partial x}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x}$.
18. Dê a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = ye^z + xz - x^2 - y^2 = 0$ que passa pelo ponto $P = (1, 1, 0)$.
19. Dê a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z + 1 = 0$ que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$.
20. Determine a equação do plano tangente à superfície $xy + yz + zx = 0$ no ponto $(1, 1, 1)$.
21. Vamos supor que a função $y = f(x)$ definida implicitamente por $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ seja contínua em $[-a, a]$. Determine os extremos de $f(x)$. $\left(\textit{Sugestão:}\ \text{resolva}\ \frac{dy}{dx} = 0.\right)$
22. Sabe-se que dadas $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, então
    (i) $d\mathbf{R} \cdot \text{grad}\, F = 0$ representa o plano tangente no ponto (x_i, y_i, z_i), onde $d\mathbf{R} = (x - x_i)\mathbf{i} + (y - y_i)\mathbf{j} + (z - z_i)\mathbf{k}$.
    (ii) $d\mathbf{R} \cdot (\text{grad}\, F \times \text{grad}\, G) = 0$ representa o plano normal à curva $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ no ponto (x_i, y_i, z_i).
    (iii) $d\mathbf{R} \cdot (\text{grad}\, F \times \text{grad}\, G) = 0$ representa a reta tangente à curva $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ no ponto (x_i, y_i, z_i).

    e $\text{grad}\, F \times \text{grad}\, G = \text{J}\left(\frac{F, G}{y, z}\right)\mathbf{i} + \text{J}\left(\frac{F, G}{z, x}\right)\mathbf{j} + \text{J}\left(\frac{F, G}{x, y}\right)\mathbf{k}$

    onde, por exemplo, $\text{J}\left(\frac{F, G}{y, z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$ *

    (a) Calcule a equação do plano tangente à curva $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2$ no ponto $(2, 2, 1)$.
    (b) Calcule o plano normal à curva $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2 = 0$ no ponto $(2, 2, 1)$.
    (c) Calcule a equação da reta tangente à curva $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2 = 0$ no ponto $(2, 2, 1)$.
23. Determine os pontos críticos de $z = f(x, y)$ definida implicitamente por $F(x, y, z) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - z^2 = 0$.

* **N. do E.:** Esta expressão é chamada de Jacobiano (J) e será definida na Secção 18.8.

17.5 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Na solução do Exemplo 3, da Secção 17.3, minimizamos a função com valores funcionais $xy + 2xz + 2yz$, sujeita à condição de que x, y e z satisfaçam a equação $xyz = V$. Compare isso com o Exemplo 1, da Secção 17.3, no qual encontramos os extremos relativos da função f para a qual $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Há, essencialmente, dois tipos diferentes de problemas, pois no primeiro caso temos uma condição adicional, chamada de *vínculo* (*condição lateral* ou *restrição*). Tal problema é chamado de *problema com extremos vinculados* (*condicionados* ou *com restrições*), enquanto que o do segundo tipo é um *problema com extremos livres*.

Para que o Exemplo 3, da Secção 17.3 fosse solucionado, foi necessário obter uma função de duas variáveis x e y através da substituição de z na primeira equação, pelo seu valor da segunda equação. Como nem sempre é possível resolver a equação do vínculo para uma das variáveis em termos das outras, há um outro procedimento que pode ser usado para encontrarmos os pontos críticos, no caso de um problema com extremos vinculados. Ele é atribuído a Joseph L. Lagrange (1736-1813), sendo conhecido como o método dos multiplicadores de Lagrange. Antes de discutir a teoria desse método vamos descrever em linhas gerais o procedimento e ilustrá-lo com um exemplo.

Suponha que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f das três variáveis x, y e z, sujeitos ao vínculo $g(x, y, z) = 0$. Introduzimos uma nova variável λ, chamada de **multiplicador de Lagrange** e formamos a função auxiliar F para a qual

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

O problema consiste, portanto, em encontrar os pontos críticos da função F de quatro variáveis x, y, z e λ. Os valores de x, y e z que dão os extremos relativos de f estão entre esses pontos críticos. Os pontos críticos de F são os valores de x, y, z e λ para os quais se anulam as quatro derivadas parciais primeiras de F:

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \qquad F_\lambda = 0$$

EXEMPLO 1 Resolva o Exemplo 3, da Secção 17.3, pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Solução As variáveis x, y e z e a constante V estão definidas na solução do Exemplo 3, da Secção 17.3. Seja

$$\begin{aligned} S &= f(x, y, z) \qquad \text{e} \qquad g(x, y, z) = xyz - V \\ &= xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Queremos minimizar a função f, sujeita ao vínculo

$$g(x, y, z) = 0$$

Formamos a função F, dada por

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ &= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V) \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos críticos de F calculamos as quatro derivadas parciais F_x, F_y, F_z e F_λ e igualamos a zero os seus valores funcionais.

$$F_x(x, y, z, \lambda)\colon\ y + 2z + \lambda yz = 0 \tag{1}$$

$$F_y(x, y, z, \lambda)\colon\ x + 2z + \lambda xz = 0 \tag{2}$$

$$F_z(x, y, z, \lambda)\colon\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \tag{3}$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda)\colon\ xyz - V = 0 \tag{4}$$

Subtraindo os membros correspondentes nas equações (1) e (2), obtemos

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

resultando nas duas equações

$$y = x \tag{5}$$

e, como $z \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{1}{z}$$

Substituindo λ por $-1/z$ em (2) obtemos $x + 2z - x = 0$, resultando $z = 0$, que é impossível pois z está no intervalo $(0, +\infty)$. Substituindo (5) em (3), temos

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0$$

$$x(4 + \lambda x) = 0$$

$$\lambda = -\frac{4}{x} \qquad (\text{pois } x \neq 0)$$

Se na equação (2), $\lambda = -4/x$, então

$$x + 2z - \frac{4}{x}(xz) = 0$$

$$x + 2z - 4z = 0$$

$$z = \frac{x}{2} \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4) obtemos $\frac{1}{2}x^3 - V = 0$, de onde $x = \sqrt[3]{2V}$. De (5) e (6) segue que $y = \sqrt[3]{2V}$ e $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Logo, $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$ é um ponto crítico da função F, e conforme foi mostrado no Exemplo 3, da Secção 17.3, f tem um valor mínimo absoluto nesse ponto.

Observe que a equação $F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$ é equivalente ao vínculo dado pela equação $V = xyz$.

A validade do método dos multiplicadores de Lagrange pode ser mostrada se considerarmos o problema geral de extremo vinculado. Suponha que queiramos encontrar os extremos relativos de uma função f de três variáveis x, y e z, sujeitos ao vínculo

$$g(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

Suponha que (7) possa ser resolvida para z, para obtermos

$$z = h(x, y)$$

onde h está definida em um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e $f(x, y, h(x, y))$ tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$. Suponha também que as derivadas parciais primeiras de f, g e h existam em B e $g_3(x, y, h(x, y)) \neq 0$ em B. Como f tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, as derivadas parciais primeiras de f se anulam nesse ponto. Calculamos essas derivadas parciais pela regra da cadeia,

$$\text{em } (x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \qquad f_1 + f_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad f_2 + f_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

Se em (7) derivarmos implicitamente em relação a x e depois em relação a y e considerarmos z como a função derivável h de x e y, então no ponto (x, y), no disco aberto B

$$g_1 + g_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad g_2 + g_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

ou, equivalentemente, pois $g_3 \neq 0$ no disco aberto B,

$$\text{em } (x, y) \text{ de } B \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_1}{g_3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{g_2}{g_3}$$

onde os valores funcionais de g_1, g_2 e g_3 estão em $(x, y, h(x, y))$. Se os valores $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ forem substituídos nas relações (8), então, no ponto $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$

$$f_1 + f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right) = 0 \quad \text{e} \quad f_2 + f_3\left(-\frac{g_2}{g_3}\right) = 0$$

Além disso,

$$f_3 - g_3\left(\frac{f_3}{g_3}\right) = 0$$

em qualquer ponto onde $g_3 \neq 0$. Assim, em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$,

$$f_1 + g_1\left(-\frac{f_3}{g_3}\right) = 0 \qquad f_2 + g_2\left(-\frac{f_3}{g_3}\right) = 0 \qquad f_3 + g_3\left(-\frac{f_3}{g_3}\right) = 0$$

Se $\lambda = -f_3/g_3$, então essas equações podem ser escritas como

$$f_1 + \lambda g_1 = 0 \qquad f_2 + \lambda g_2 = 0 \qquad f_3 + \lambda g_3 = 0 \tag{9}$$

Além disso, como f tem um extremo relativo em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ e esse extremo está sujeito ao vínculo $g(x, y, z) = 0$, então

$$g(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0 \tag{10}$$

Se

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \tag{11}$$

e se $z_0 = h(x_0, y_0)$, então (9) e (10) equivalem a

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \qquad F_\lambda = 0 \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \tag{12}$$

Logo, podemos concluir que um ponto (x_0, y_0, z_0) no qual a função f tem um extremo relativo está entre os pontos críticos da função F, definida por (11).

Observe que as equações (9) podem ser escritas na forma vetorial

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \quad \text{onde } \nabla g \neq 0$$

Essa equação vetorial juntamente com a equação $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, dá uma outra forma das equações (12).

EXEMPLO 2 Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre a origem e o plano $Ax + By + Cz = D$.

Solução Sejam w unidades a distância entre a origem e m ponto (x, y, z). no plano. Então,

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como w será um mínimo quando w^2 for um mínimo, formamos a função f para a qual

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Queremos encontrar o valor mínimo de f, sujeito ao vínculo

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

Com a hipótese de que existe tal valor mínimo, ele irá ocorrer em um ponto crítico da função F, tal que

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz - D)$$

Para encontrar os pontos críticos de F, calculamos as derivadas parciais de F, igualando-as a zero.

$$\begin{aligned}
&F_x(x, y, z, \lambda): && 2x + \lambda A = 0 \\
&F_y(x, y, z, \lambda): && 2y + \lambda B = 0 \\
&F_z(x, y, z, \lambda): && 2z + \lambda C = 0 \\
&F_\lambda(x, y, z, \lambda): && Ax + By + Cz - D = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Das três primeiras equações

$$x = -\tfrac{1}{2}\lambda A \qquad y = -\tfrac{1}{2}\lambda B \qquad z = -\tfrac{1}{2}\lambda C \tag{14}$$

Substituindo x, y, z por esses valores em (13), obtemos

$$-\tfrac{1}{2}\lambda(A^2 + B^2 + C^2) = D$$

$$-\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Substituímos $-\frac{1}{2}\lambda$ por esse valor nas equações (14) e obtemos

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2} \tag{15}$$

O ponto com essas coordenadas é o único ponto crítico de F. Logo, a distância mínima da origem ao plano é a distância da origem ao ponto (x_0, y_0, z_0), onde x_0, y_0 e z_0 são os valores de x, y e z dados nas equações (15). A distância mínima

é, então,

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{A^2D^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} + \frac{B^2D^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} + \frac{C^2D^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}}$$

$$= \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Quando diversos vínculos são impostos, o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser aplicado se usarmos diversos multiplicadores. Por exemplo, se desejamos encontrar pontos críticos da função com valores $f(x, y, z)$ sujeitos às duas condições laterais $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, encontramos os pontos críticos da função F das cinco variáveis x, y, z, λ e μ, para as quais

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

O exemplo a seguir ilustra o método.

EXEMPLO 3 Ache os extremos relativos da função f se

$$f(x, y, z) = xz + yz$$

e se o ponto (x, y, z) está na intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = 2$ e $yz = 2$.

Solução Formamos a função F tal que

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2)$$

Determinando as cinco derivadas parciais e igualando-as a zero, temos

$$F_x(x, y, z, \lambda, \mu): \quad z + 2\lambda x = 0 \tag{16}$$

$$F_y(x, y, z, \lambda, \mu): \quad z + \mu z = 0 \tag{17}$$

$$F_z(x, y, z, \lambda, \mu): \quad x + y + 2\lambda z + \mu y = 0 \tag{18}$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu): \quad x^2 + z^2 - 2 = 0 \tag{19}$$

$$F_\mu(x, y, z, \lambda, \mu): \quad yz - 2 = 0 \tag{20}$$

De (17) obtemos $\mu = -1$ e $z = 0$. Rejeitamos $z = 0$, pois isso contradiz (20). De (16) obtemos, se $x \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{z}{2x}$$

Substituindo esse valor de λ e $\mu = -1$ em (18), obtemos

$$x + y - \frac{z^2}{x} - y = 0$$

$$x^2 = z^2 \tag{21}$$

Substituindo (21) em (19), temos $2x^2 - 2 = 0$ ou $x^2 = 1$. Isso dá dois valores para x, ou seja, 1 e -1; e para cada um desses valores de x obtemos, de (21), os dois valores 1 e -1 para z. Obtendo os valores correspondentes para y, de

(20), temos quatro conjuntos de soluções para as cinco equações de (16) a (20). Essas soluções são

$$\begin{array}{lllll} x = 1 & y = 2 & z = 1 & \lambda = -\frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = 1 & y = -2 & z = -1 & \lambda = \frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = -1 & y = 2 & z = 1 & \lambda = \frac{1}{2} & \mu = -1 \\ x = -1 & y = -2 & z = -1 & \lambda = -\frac{1}{2} & \mu = -1 \end{array}$$

Do primeiro e do quarto conjuntos de soluções temos $f(x, y, z) = 3$, enquanto que o resultado do segundo e do terceiro conjuntos de soluções é $f(x, y, z) = 1$. Logo, f tem um valor funcional máximo relativo de 3 e um valor funcional mínimo relativo de 1.

EXERCÍCIOS 17.5

Nos Exercícios de 1 a 4, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos da função dada, sujeitos aos vínculos dados.

1. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ com vínculo $x^2 + y^2 - 4y = 0$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ com vínculo $x^2 + y^2 - 2y = 0$
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $3x - 2y + z - 4 = 0$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $y^2 - x^2 = 1$

Nos Exercícios de 5 a 8, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos relativos de f, sujeitos ao vínculo indicado. Ache também os pontos nos quais os extremos ocorrem. Suponha que os extremos relativos existam.

5. $f(x, y) = x^2 + y$ com vínculo $x^2 + y^2 = 9$
6. $f(x, y) = x^2y$ com vínculo $x^2 + 8y^2 = 24$
7. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$
8. $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nos Exercícios 9 e 10, ache um valor mínimo relativo de f, sujeito ao vínculo indicado. Suponha que um valor mínimo relativo exista.

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $xyz = 1$
10. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nos Exercícios 11 e 12, ache um valor máximo relativo de f, sujeito ao vínculo indicado. Suponha que um valor máximo relativo exista.

11. $f(x, y, z) = x + y + z$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
12. $f(x, y, z) = xyz$ com vínculo $2xy + 3xz + yz = 72$
13. Ache um valor mínimo relativo da função f para a qual $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ com o vínculo (a) $xyz = 1$; (b) $xy = 1$; (c) $x = 1$.
14. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre o ponto (1, 3, 0) e o plano $4x + 2y - z = 5$.
15. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância entre o ponto $(1, -1, -1)$ e o plano $x + 4y + 3z = 2$.
16. Ache a menor e a maior distância da origem a um ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.
17. Ache a menor e a maior distância da origem a um ponto do elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.
18. Se $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto do plano $x + y + z = 5$ no qual $f(x, y, z)$ é mínimo.
19. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional mínimo relativo de f, se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com dois vínculos, $x + 2y + 3z = 6$ e $x - y - z = -1$.
20. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional mínimo relativo de f, se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com dois vínculos, $x + y + 2z = 1$ e $3x - 2y + z = -4$.
21. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar um valor funcional máximo relativo de f, se $f(x, y, z) = xyz$ com dois vínculos, $x + y + z = 4$ e $x - y - z = 3$.
22. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um valor funcional máximo relativo de f, se $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ com dois vínculos, $x + y + z = 1$ e $x + y - z = 0$.

Nos Exercícios de 23 a 32, use o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver o exercício indicado nos Exercícios 17.3.

23. Exercício 13	24. Exercício 14	25. Exercício 15
26. Exercício 16	27. Exercício 17	28. Exercício 22
29. Exercício 23	30. Exercício 24	31. Exercício 35
32. Exercício 36		

33. Um disco circular é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se T graus for a temperatura em qualquer ponto do disco e $T = 2x^2 + y^2 - y$, ache o ponto mais quente e o mais frio do disco.
34. Uma companhia possui três fábricas produzindo o mesmo produto. Se as fábricas A, B e C produzem x, y e z unidades, respectivamente, seus custos de fabricação são $(3x^2 + 200)$, $(y^2 + 400)$ e $(2z^2 + 300)$. Se um pedido de 1.100 unidades deve ser entregue, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar como a produção deve ser distribuída entre as três fábricas, a fim de minimizar o custo total de fabricação.

17.6 OBTENÇÃO DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DE SEU GRADIENTE E DIFERENCIAL EXATA

No Capítulo 19, quando estudarmos campos vetoriais, desejaremos determinar se uma dada função com valores vetoriais é o gradiente de alguma função com valores reais f e, se for, queremos obter tal função f. Primeiro vamos considerar o problema de como obter f, se for conhecido o seu gradiente. Isto é, temos

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{1}$$

e queremos encontrar $f(x, y)$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponhamos que

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j} \tag{2}$$

Então, como a igualdade (1) deve ser satisfeita, segue que

$$f_x(x, y) = y^2 + 2x + 4 \tag{3}$$

$$f_y(x, y) = 2xy + 4y - 5 \tag{4}$$

Integrando ambos os membros de (3) em relação a x,

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y) \tag{5}$$

Observe que a "constante" de integração é uma função de y e independente de x, pois estamos integrando em relação a x. Agora, se derivarmos ambos os membros de (5) parcialmente em relação a y, iremos obter

$$f_y(x, y) = 2xy + g'(y) \tag{6}$$

As igualdades (4) e (6) dão duas expressões para $f_y(x, y)$. Logo,

$$2xy + 4y - 5 = 2xy + g'(y)$$

Assim sendo,

$$g'(y) = 4y - 5$$

$$g(y) = 2y^2 - 5y + C$$

Substituindo esse valor de $g(y)$ em (5), teremos

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Ache $f(x, y)$ se

$$\nabla f(x, y) = e^{y^2} \cos x\mathbf{i} + 2ye^{y^2} \operatorname{sen} x\mathbf{j}$$

Solução Como a igualdade (1) deve estar satisfeita,

$$f_x(x, y) = e^{y^2} \cos x \tag{7}$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{y^2} \operatorname{sen} x \tag{8}$$

Integrando ambos os membros de (8) em relação a y, obteremos

$$f(x, y) = e^{y^2} \operatorname{sen} x + g(x) \tag{9}$$

onde $g(x)$ é independente de y. Agora, derivamos parcialmente ambos os lados de (9) em relação a x, obtendo

$$f_x(x, y) = e^{y^2} \cos x + g'(x) \tag{10}$$

Igualando o segundo membro de (7) e o de (10),

$$e^{y^2} \cos x = e^{y^2} \cos x + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = C$$

Substituindo esse valor de $g(x)$ em (9), iremos obter

$$f(x, y) = e^{y^2} \operatorname{sen} x + C$$

Todos os vetores da forma $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ não são necessariamente gradientes, como mostra a ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos mostrar que não existe função f, tal que

$$\nabla f(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} \tag{11}$$

Suponha que exista tal função. Segue, então, que

$$f_x(x, y) = 3y \tag{12}$$

$$f_y(x, y) = -2x \tag{13}$$

Integrando ambos os membros de (12) em relação a x, iremos obter

$$f(x, y) = 3xy + g(y)$$

Derivamos parcialmente essa expressão em relação a y, obtendo

$$f_y(x, y) = 3x + g'(y)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (13), obteremos

$$3x + g'(y) = -2x$$

$$g'(y) = -5x$$

Se ambos os membros dessa relação forem derivados com relação a x, deve resultar

$$0 = -5$$

o que, naturalmente, é falso. Assim sendo, a hipótese de que $3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ é um gradiente leva a uma contradição. ◀

Vamos determinar agora uma condição que deve estar satisfeita, para que um vetor seja um gradiente.

Suponha que M_y e N_x sejam contínuas num disco aberto B em R^2. Se

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{14}$$

for um gradiente em B, então existirá uma função f, tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \tag{15}$$

$$f_y(x, y) = N(x, y) \tag{16}$$

para todo (x, y) em B. Como $M_y(x, y)$ existe em B, então, de (15),

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y) \tag{17}$$

Além disso, como $N_x(x, y)$ existe em B, segue de (16) que

$$N_x(x, y) = f_{yx}(x, y) \tag{18}$$

Uma vez que M_y e N_x são contínuas em B, seus equivalentes f_{xy} e f_{yx} também são contínuos em B. Assim, do Teorema 16.7.1, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ em todos os pontos de B. Logo, os primeiros membros de (17) e de (18) são iguais em todos os pontos de B. Provamos que se M_y e N_x forem contínuas em um disco aberto B de R^2, uma condição necessária para que o vetor (14) seja um gradiente em B é que

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{19}$$

A relação (19) também é uma condição suficiente para que o vetor (14) seja um gradiente em B. Se (19) estiver satisfeita, podemos mostrar como encontrar uma função f, tal que o vetor (14) seja um gradiente. Mas, a demonstração de que sempre que (19) estiver satisfeita, tal função existe, é material de um curso em Cálculo Avançado. O método para encontrar f é uma generalização do que foi usado na Ilustração 1, no Exemplo 1 e no Exemplo 2 adiante. Temos o teorema a seguir.

17.6.1 TEOREMA Suponhamos que M e N sejam funções de duas variáveis x e y, definidas num disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ em R^2, e que M_y e N_x sejam contínuas em B. Então, o vetor

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

será um gradiente em B se e somente se

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

para todos os pontos em B.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** (a) Vamos aplicar o Teorema 17.6.1 ao vetor no segundo membro de (2), na Ilustração 1. Seja

$$M(x, y) = y^2 + 2x + 4 \qquad N(x, y) = 2xy + 4y - 5$$

$$M_y(x, y) = 2y \qquad N_x(x, y) = 2y$$

Assim, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ e, portanto, o vetor é um gradiente.

(b) Se aplicarmos o Teorema 17.6.1 ao vetor no segundo membro de (1), na Ilustração 2, com $M(x, y) = 3y$ e $N(x, y) = -2x$, iremos obter

$$M_y(x, y) = 3 \qquad N_x(x, y) = -2$$

Logo, $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$; assim, o vetor não é um gradiente. ◀

EXEMPLO 2 Determine se o vetor

$$(e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$$

é um gradiente $\nabla f(x, y)$ e, se for, ache $f(x, y)$.

Solução Vamos aplicar o Teorema 17.6.1. Seja

$$M(x, y) = e^{-y} - 2x \qquad N(x, y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y$$

$$M_y(x, y) = -e^{-y} \qquad N_x(x, y) = -e^{-y}$$

Logo, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; assim, o vetor é um gradiente $\nabla f(x, y)$. Além disso,

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \tag{20}$$

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y \tag{21}$$

Integrando ambos os membros de (20) em relação a x, iremos obter

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + g(y) \tag{22}$$

onde $g(y)$ é independente de x. Agora derivamos parcialmente ambos os membros de (22) em relação a y, obtendo

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} + g'(y)$$

Igualando o lado direito da equação anterior e de (21), obtemos

$$-xe^{-y} + g'(y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y$$

$$g'(y) = -\operatorname{sen} y$$

$$g(y) = \cos y + C$$

Substituindo a expressão de $g(y)$ em (22), teremos

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y + C$$

Para determinarmos se uma dada função com valores vetoriais é o gradiente de alguma função com valores reais f, precisamos estabelecer se a expressão da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é a diferencial total de uma função f. Tal expressão é denominada *diferencial exata*.

17.6.2 DEFINIÇÃO A expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

será chamada de **exata** no disco aberto B em R^2, se existir um função f tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = N(x, y)$$

em todos os pontos (x, y) de B.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A expressão

$$xy^4\,dx + 2x^2y^3\,dy \tag{23}$$

é uma diferencial exata, pois se

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}x^2y^4$$

então $f_x(x, y) = xy^4$ e $f_y(x, y) = 2x^2y^3$. Observe que (23) é a diferencial total de f. ◀

O teorema a seguir, o qual fornece um teste para determinar se uma expressão é exata, decorre imediatamente da Definição 17.6.2 e do Teorema 17.6.1.

17.6.3 TEOREMA Suponhamos que M e N sejam funções de duas variáveis x e y, definidas em um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, em R^2, e que M_y e N_x sejam contínuas em B. Então, a expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

será exata em B se e somente se

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

em todos os pontos de B.

EXEMPLO 3 Determine se a expressão diferencial é exata:

(a) $(y \operatorname{sen} x - 3 \cos y)\, dx + (3x \operatorname{sen} y - \cos x)\, dy$
(b) $(3 + r \cos \theta)\, dr + r^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

Solução

(a) Seja

$$M(x, y) = y \operatorname{sen} x - 3 \cos y \qquad N(x, y) = 3x \operatorname{sen} y - \cos x$$

$$M_y(x, y) = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} y \qquad N_x(x, y) = 3 \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, temos então uma diferencial exata.

(b) Seja

$$M(r, \theta) = 3 + r \cos \theta \qquad N(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen} \theta$$

$$M_\theta(r, \theta) = -r \operatorname{sen} \theta \qquad N_r(r, \theta) = 2r \operatorname{sen} \theta$$

Como $M_\theta(r, \theta) \neq N_r(r, \theta)$, então a expressão diferencial não é exata.

Se $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ for uma diferencial exata, dizemos então que a equação diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

é uma **equação diferencial exata**. A solução geral da equação é dada por $f(x, y) = C$, onde $f_x(x, y) = M(x, y)$, $f_y(x, y) = N(x, y)$ e C é uma constante arbitrária.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Igualando a zero a expressão diferencial exata (23), temos a equação diferencial exata

$$xy^4\, dx + 2x^2y^3\, dy = 0$$

A solução geral dessa equação é

$$\tfrac{1}{2}x^2y^4 = \bar{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2y^4 = C$$

onde $C = 2\bar{C}$. ◀

EXEMPLO 4 Determine se a equação diferencial a seguir é exata. Em caso afirmativo, ache a sua solução geral.

$$(3x^2y + xy^2 + e^x)\,dx + (x^3 + x^2y + \cos y)\,dy = 0$$

Solução Seja

$$M(x, y) = 3x^2y + xy^2 + e^x \qquad N(x, y) = x^3 + x^2y + \cos y$$

$$M_y(x, y) = 3x^2 + 2xy \qquad N_x(x, y) = 3x^2 + 2xy$$

Logo, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; assim sendo, a equação diferencial é exata. Portanto, a solução geral é $f(x, y) = C$, onde

$$f_x(x, y) = 3x^2y + xy^2 + e^x \tag{24}$$

$$f_y(x, y) = x^3 + x^2y + \cos y \tag{25}$$

Integrando ambos os membros de (24) em relação a x, iremos obter

$$f(x, y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + e^x + g(y) \tag{26}$$

onde $g(y)$ é independente de x. Derivando parcialmente ambos os membros de (26) em relação a y teremos

$$f_y(x, y) = x^3 + x^2y + g'(y)$$

Igualando o segundo membro dessa igualdade e o de (25), teremos

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y + \cos y$$

$$g'(y) = \cos y$$

$$g(y) = \operatorname{sen} y + \bar{C}$$

Substituindo essa expressão em (26), teremos

$$f(x, y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + e^x + \operatorname{sen} y + \bar{C}$$

Logo, a solução geral é

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + e^x + \operatorname{sen} y + \bar{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3y + x^2y^2 + 2e^x + 2\operatorname{sen} y = C$$

onde $C = -2\bar{C}$.

O Teorema 17.6.1 pode ser estendido para funções de três variáveis.

17.6.4 TEOREMA Sejam M, N e R funções de três variáveis x, y e z, definidas numa bola aberta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ em R^3, sendo M_y, M_z, N_x, N_z, R_x e R_y contínuas em B. Então, o vetor $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ será um gradiente em B se e somente se $M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$, $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ e $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$.

A demonstração da parte "somente se" do Teorema 17.6.3 é análoga à demonstração da parte "somente se" do Teorema 17.5.1 e será deixada como exercício (veja o Exercício 35). A demonstração da parte "se" foge do contexto deste livro.

EXEMPLO 5 Determine se o seguinte vetor é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ e, se for, então ache $f(x, y, z)$:

$$(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

Solução Vamos aplicar o Teorema 17.5.4. Seja

$$M(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2yz \qquad N(x, y, z) = 2xz + 2y \qquad R(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$$

$$M_y(x, y, z) = 2z \qquad N_x(x, y, z) = 2z \qquad R_x(x, y, z) = e^x \cos z + 2y$$

$$M_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2y \qquad N_z(x, y, z) = 2x \qquad R_y(x, y, z) = 2x$$

Logo,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \qquad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \qquad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Assim sendo, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y\ z)$. Além disso,

$$f_x(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2yz \tag{27}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xz + 2y \tag{28}$$

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \tag{29}$$

Integrando ambos os membros de (27) em relação a x, teremos

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + g(y, z) \tag{30}$$

onde $g(y, z)$ é independente de x. Derivando parcialmente ambos os membros de (30) com relação a y, obteremos

$$f_y(x, y, z) = 2xz + g_y(y, z)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (28), resultará

$$2xz + g_y(y, z) = 2xz + 2y$$

$$g_y(y, z) = 2y$$

Agora, integrando ambos os membros da relação acima com respeito a y, teremos

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \tag{31}$$

onde h é independente de x e de y. Substituindo (31) em (30), obtemos

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + h(z) \tag{32}$$

Derivando parcialmente com relação a z ambos os membros de (32):

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + h'(z)$$

Igualando o segundo membro dessa equação e o de (29), temos

$$e^x \cos z + 2xy + h'(z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$$

$$h'(z) = 3z^2$$

$$h(z) = z^3 + C$$

Substituindo $z^3 + C$ para $h(z)$ em (32), obtemos

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + C$$

A seguir, temos uma extensão da Definição 17.6.2 para funções de três variáveis.

17.6.5 DEFINIÇÃO A expressão diferencial

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

será denominada **exata** em uma bola aberta B de R^3, se existir uma função f tal que

$$f_x(x, y, z) = M(x, y, z) \quad f_y(x, y, z) = N(x, y, z) \quad f_z(x, y, z) = R(x, y, z)$$

em todos os pontos (x, y, z) de B.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** A expressão

$$(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\, dx + (2xz + 2y)\, dy + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\, dz$$

é uma diferencial exata, pois é a diferencial total da função f encontrada no Exemplo 5. ◀

EXERCÍCIOS 17.6

Nos Exercícios de 1 a 12, determine se o vetor é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é o vetor dado.

1. $4x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
2. $y^2\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j}$
3. $(6x - 5y)\mathbf{i} - (5x - 6y^2)\mathbf{j}$
4. $(4y^2 + 6xy - 2)\mathbf{i} + (3x^2 + 8xy + 1)\mathbf{j}$
5. $(6x^2y^2 - 14xy + 3)\mathbf{i} + (4x^3y - 7x^2 - 8)\mathbf{j}$
6. $(2x + \ln y)\mathbf{i} + \left(y^2 + \dfrac{x}{y}\right)\mathbf{j}$
7. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{1 - 2x}{y^3}\right)\mathbf{j}$
8. $\left(\dfrac{2x - 1}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{x - x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$
9. $2x \sec 2y\mathbf{i} + 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y\mathbf{j}$
10. $(2xy - y \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x^2 + \cos x)\mathbf{j}$
11. $(2x \cos y - 1)\mathbf{i} - x^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j}$
12. $(ye^x + x)\mathbf{i} + (xe^y - y)\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 13 a 16, determine se a expressão é uma diferencial exata. Em caso afirmativo, determine a função para a qual a diferencial total é igual à expressão dada.

13. $(2xy + y^2 + 1)\, dx + (x^2 + 2xy + x)\, dy$
14. $3(2x^2 + 6xy)\, dx + 3(3x^2 + 8y)\, dy$
15. $(e^y - 2xy)\, dx + (xe^y - x^2)\, dy$
16. $(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} y)\, dx - x \sec^2 y\, dy$

Nos Exercícios de 17 a 24, determine se a equação diferencial é exata. Em caso afirmativo, ache a solução geral.

17. $(x + y)\, dx + (2y + x)\, dy = 0$
18. $3x - y + (x + 3y)\dfrac{dy}{dx} = 0$
19. $ye^x - 2x + e^x \dfrac{dy}{dx} = 0$
20. $\dfrac{y}{x - 1}\, dx + \left(\ln(2x - 2) + \dfrac{1}{y}\right) dy = 0$
21. $(xy^2 + 2y)\, dx + (2y^3 - x^2y + 2x)\, dy = 0$
22. $e^{2x}\left(\dfrac{dy}{dx} + 2y\right) = x^2$
23. $\left(\dfrac{x^2}{y^2} \cos \dfrac{x}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \cos \dfrac{x}{y} + \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} + \cos x$
24. $(2y \operatorname{cotg} x - 3x^2)\dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{cosec}^2 x + 6xy - 2$

Nos Exercícios de 25 a 30, determine se o vetor é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é o vetor dado.

25. $(2y - 5z)\mathbf{i} + (2x + 8z)\mathbf{j} - (5x - 8y)\mathbf{k}$
26. $4x^3\mathbf{i} + 9y^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
27. $e^y \operatorname{sen} z\mathbf{i} + xe^y \operatorname{sen} z\mathbf{j} + xe^y \cos z\mathbf{k}$
28. $(2xy + 7z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2 - 3z)\mathbf{j} + (21xz^2 - 4y)\mathbf{k}$
29. $e^x(e^z - \ln y)\mathbf{i} + (e^y \ln z - e^xy^{-1})\mathbf{j} + (e^{x+z} + e^yz^{-1})\mathbf{k}$
30. $\dfrac{1}{y + z}\mathbf{i} - \dfrac{x - z}{(y + z)^2}\mathbf{j} - \dfrac{x + y}{(y + z)^2}\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 31 a 34, determine se a expressão é uma diferencial exata. Em caso afirmativo, ache a função cuja diferencial total é igual à expressão dada.

31. $(4xy + 3yz - 2)\, dx + (2x^2 + 3xz - 5z^2)\, dy + (3xy - 10yz + 1)\, dz$
32. $e^z \cos x\, dx + z \operatorname{sen} y\, dy + (e^z \operatorname{sen} x - \cos y)dz$
33. $z \operatorname{tg} y\, dx + xz \sec^2 y\, dy + x \operatorname{tg} y\, dz$
34. $(2y + z)\, dx + (2x - 3z + 4yz)\, dy + (x - 3y + 2y^2)\, dz$
35. Prove a parte "somente se" do Teorema 17.5.4.
36. Prove que $\nabla f(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ se e somente se $f(x, y) = ax + by + c$ onde a, b e c são constantes.
37. Prove que uma equação diferencial cujas variáveis são distintas é exata.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17

Nos Exercícios de 1 a 5, ache os valores da derivada direcional num dado ponto P_0 para a função dada, na direção e sentido de **U**.

1. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $P_0 = (5, 10)$
2. $g(x, y) = \text{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$; $\mathbf{U} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $P_0 = (4, -4)$
3. $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$
4. $f(x, y) = x^2 - 2x^2y + \ln x$; $\mathbf{U} = \cos \pi\mathbf{i} + \text{sen}\, \pi\mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$
5. $f(x, y, z) = xy^2z - 3xyz + 2xz^2$; $\mathbf{U} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 1, 1)$

Nos Exercícios de 6 a 9, ache (a) o gradiente de f em P_0; (b) a taxa de variação dos valores da função na direção e sentido de **U** *em P_0.*

6. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\, \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$; $P_0 = (-3, 1)$
7. $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; $\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; $P_0 = (1, 1)$
8. $f(x, y, z) = yz - y^2 - xz$; $\mathbf{U} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k}$; $P_0 = (1, 2, 3)$
9. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 2xyz$; $\mathbf{U} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \dfrac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, -1, 0)$

Nos Exercícios de 10 a 13, determine se a função com valores vetoriais é um gradiente. Em caso afirmativo, ache uma função cujo gradiente é a função dada.

10. $(e^x \text{tg}\, y - \sec y)\mathbf{i} - \sec y(x \text{tg}\, y - e^x \sec y)\mathbf{j}$
11. $2xe^{x^2} \ln y\mathbf{i} + \dfrac{e^{x^2}}{y}\mathbf{j}$
12. $y(\cos x - z\, \text{sen}\, x)\mathbf{i} + z(\cos x + \text{sen}\, y)\mathbf{j} - (\cos y - y \cos x)\mathbf{k}$
13. $\left(\dfrac{-y}{(x+z)^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathbf{i} + \dfrac{1}{x+z}\mathbf{j} + \left(\dfrac{-y}{(x+z)^2} + \dfrac{2}{z^2}\right)\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 14 a 16, ache uma equação do plano tangente e as equações da reta normal à superfície dada no ponto indicado.

14. $3x^2 + 2xy - y^2 = 15$; $(2, 3, 4)$
15. $x^2 + 2y + z = 8$; $(2, 1, 2)$
16. $z = x^2 + 2xy$; $(1, 3, 7)$

17. Ache as equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies $x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ e $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$ no ponto $(1, -2, 11)$.
18. Ache as equações da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = 3x^2 + y^2 + 1$, com o plano $x = 2$, no ponto $(2, -1, 14)$.
19. Uma equação da superfície de uma montanha é $z = 900 - 3xy$, onde a distância é medida em metros, o eixo x aponta na direção oeste e o eixo y na direção sul. Um alpinista está no ponto correspondente a $(50, 4, 300)$. (a) Qual a direção de subida mais íngreme? (b) Quando se move na direção norte, o alpinista está descendo ou subindo? (c) Em que direção o alpinista estará numa curva de nível?
20. Se $f(x, y, z) = \text{senh}\,(x + z) \cosh y$, ache a taxa de variação de $f(x, y, z)$ em relação à distância em R^3, no ponto $P(1, 1, 0)$, na direção de $\overrightarrow{PQ}$, se Q for o ponto $(-1, 0, 2)$.

Nos Exercícios 21 e 22, determine os extremos relativos de f, quando existirem.

21. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
22. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 10x - 11y$

Nos Exercícios de 23 a 26, use o método dos multiplicadores de Lagrange para achar o(s) ponto(s) crítico(s) da função dada, sujeitos ao vínculo indicado. Determine se a função tem um valor máximo ou mínimo relativo nos pontos críticos.

23. $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$ com vínculo $x^2 - 2y^2 = 5$
24. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com vínculo $x^2 - y^2 = 1$
25. $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ com vínculo $z = 35 - x - y$
26. $f(x, y, z) = xz^2 + y^3$ com vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

27. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar a menor distância do ponto $(4, 1, 2)$ ao plano $x - y + 2z = 0$.
28. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto sobre a superfície $z = x^2 + y^2 + 2$ que está mais próximo da origem.

Nos Exercícios de 29 a 32, determine se a expressão é uma diferencial exata. Caso seja, determine a função para a qual a expressão dada é a diferencial total.

29. $(6x^2y + 5x)\,dx + (2x^3 + 3y)\,dy$
30. $\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\, dx - \cos x \cos y\, dy$
31. $e^x \text{tg}\, y\, dx + (e^x \sec^2 y - z\, \text{cosec}^2 y)\, dy + \text{cotg}\, y\, dz$
32. $\left(\dfrac{1}{x} - ze^{yz}\right) dx - xz^2e^{yz}\, dy - xe^{yz}(yz + 1)\, dz$

Nos Exercícios de 33 a 36, determine se a equação diferencial é exata. Se for, ache a solução geral.

33. $(3x^2y^2 + 2y^3)\,dx + (2x^3y + 6xy^2)\,dy = 0$
34. $(2xy + 3 - 2\,\text{sen}\, x)\,dx + (x^2 + 3x)\,dy = 0$
35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{-x} - \text{sen}\, x}{e^{-x} + 2y}$
36. $2y\, \text{sen}\, xy + (2x\, \text{sen}\, xy + y^3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

37. Ache três números cuja soma é 100 e cuja soma dos quadrados é mínima.
38. Um fabricante produz diariamente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B. Se $P(x, y)$ for o lucro diário das vendas dos produtos, e $P(x, y) = 33x + 66y + xy - x^2 - 3y^2$, quantas unidades de cada produto deverão ser produzidas para que o fabricante receba um lucro máximo?

39. Ache as dimensões de um paralelepípedo retangular de maior volume possível que possa ser inscrito em um elipsóide $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$. Suponha que as arestas sejam paralelas aos eixos coordenados.

40. A temperatura é T graus em qualquer ponto (x, y) da curva $4x^2 + 12y^2 = 1$, $T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$. Ache os pontos da curva onde a temperatura é máxima e onde é mínima. Ache também o valor da temperatura nesses pontos.

41. A temperatura em qualquer ponto (x, y) de uma placa circular aquecida é T graus,

$$T = \frac{44}{x^2 + y^2 + 9}$$

e a distância é medida em centímetros da origem ao centro da placa. (a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto (3, 2) na direção do vetor $\cos \frac{1}{6}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi\mathbf{j}$. (b) Ache a direção, o sentido e o módulo da maior taxa de variação de T no ponto (3, 2).

42. Um caixote retangular sem tampa tem uma superfície de 216 cm². Quais são as dimensões do caixote com o maior volume?

43. Para o caixote do Exercício 42, em vez da área da superfície ser 216 cm², a soma dos comprimentos das arestas é 216 cm. Quais são as dimensões do caixote com o maior volume?

44. Um fio de arame com L cm de comprimento é cortado em três pedaços. Um deles é encurvado na forma de uma circunferência, outro na forma de um quadrado e o terceiro na forma de um triângulo eqüilátero. Como deve ser cortado o fio para que (a) a área combinada das três figuras seja a menor possível e (b) a área combinada das três figuras seja a maior possível?

45. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa, para que seu volume seja máximo.

46. Ache a maior e a menor distância da origem até a curva de intersecção das superfícies $x^2 = 2yz$ e $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$.

47. A tabela seguinte dá os dados para cinco pacientes submetidos a uma determinada intervenção cirúrgica em um certo hospital, onde x anos é a idade do paciente e y dias é o intervalo de tempo em que o paciente permanece em recuperação no hopistal após a cirurgia.

	Paciente A	*Paciente B*	*Paciente C*	*Paciente D*	*Paciente E*
x	54	46	40	36	30
y	15	12	9	10	8

(a) Ache uma equação para a reta de regressão, para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão a fim de estimar o intervalo de tempo de internação para um paciente com 42 anos, submetido à cirurgia.

48. Na tabela a seguir são dados a pressão sistólica do sangue e os batimento cardíacos correspondentes de vários pacientes, onde x mm de mercúrio é a pressão sistólica do sangue e y é o número de batimentos cardíacos por minuto.

	Paciente A	*Paciente B*	*Paciente C*	*Paciente D*	*Paciente E*	*Paciente F*
x	110	117	133	146	115	127
y	70	74	80	65	60	77

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de batimentos cardíacos de um paciente com pressão sistólica de 85 mm de mercúrio.

49. Nos desertos a escassez de água é um fator que limita drasticamente a atividade das plantas. Na tabela a seguir, x é o número de milímetros de precipitação por ano para seis regiões diferentes e y é a quantidade em quilogramas por hectare do produto final da fotossíntese.

	Região A	*Região B*	*Região C*	*Região D*	*Região E*	*Região F*
x	100	200	400	500	600	650
y	1.000	1.900	3.200	4.400	5.800	6.400

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. (b) Use a reta de regressão para estimar esse produto final da fotossíntese numa região tendo uma precipitação anual de 300 mm.

50. Um cereal para o café de manhã teve sua venda testada em quatro cidades do mesmo tamanho, com diferentes preços; os resultados aparecem na tabela a seguir, onde x foi o preço por caixa e y 10^3 o número de caixas vendidas por semana.

	Cidade A	*Cidade B*	*Cidade C*	*Cidade D*
x	130	140	150	160
y	100	85	75	63

(a) Ache uma equação da reta de regressão para os dados da tabela. Use a reta de regressão na parte (a) como a curva de demanda para estimar as vendas semanais, se o preço por caixa for (b) \$ 1,20 e (c) \$ 1,70.

DEZOITO

Agora aplicaremos a integral definida de uma função de uma única variável a uma função de várias variáveis. Começaremos na Secção 18.1, definindo a *integral dupla* de duas variáveis em uma região retangular fechada em R^2. Então, aplicamos o conceito para considerar a integral dupla de uma função em uma região plana mais geral. Na Secção 18.2 mostramos como as *integrais iteradas* são usadas para avaliar as integrais duplas. Aplicamos as integrais duplas na Secção 18.2 para encontrar volumes de sólidos e na Secção 18.3, para calcular *massa*, *centro de massa* e *momentos de inércia*. Então, na Secção 18.4 demonstramos como as coordenadas polares podem ser usadas para avaliar certas integrais duplas. Outra aplicação de integrais duplas é feita para o cálculo de *áreas de superfícies*, as quais discutiremos na Secção 18.5.

Consideraremos as *integrais triplas* na Secção 18.6 definindo-as primeiro em um paralelepípedo retangular e então em uma região mais geral em R^3. Mostraremos na Secção 18.7 que quando uma região tem um eixo de simetria, as coordenadas cilíndricas são usadas para o cálculo de uma integral tripla e quando há simetria em relação a um ponto, são usadas as coordenadas esféricas.

O tratamento aqui é menos formal e mais intuitivo que nos capítulos anteriores, pois as provas da maioria dos teoremas deste capítulo pertencem a um curso de Cálculo Avançado.

18.1 A INTEGRAL DUPLA

Denominamos uma integral de uma função de uma única variável de **integral simples** para distingui-la de uma *integral múltipla*, que envolve uma função de várias variáveis. Na discussão de uma integral simples, exigimos que a função fosse definida em um intervalo fechado no conjunto R dos números reais. Para a *integral dupla* de uma função de duas variáveis, exigimos que a função seja definida numa região fechada em R^2. Uma região fechada é aquela que inclui sua fronteira. Neste capítulo, sempre que nos referirmos a uma região, ficará implícito que ela será fechada. O tipo mais simples de região fechada em R^2 é uma região retangular que passaremos a definir. Consideremos dois pontos distintos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, tais que $a_1 \leqslant b_1$ e $a_2 \leqslant b_2$. Esses dois pontos determinam um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados. Consulte a Figura 1.* Os dois pontos, juntamente com os pontos (b_1, a_2) e (a_1, b_2), são chamados de *vértices* do retângulo. Os segmentos de reta que unem vértices consecutivos são chamados de *lados* do retângulo. O conjunto de pontos interiores ao retângulo é chamado de *região retangular aberta* e o conjunto de todos os pontos no retângulo aberto, juntamente com os pontos sobre os lados do retângulo, constituem uma *região retangular fechada*.

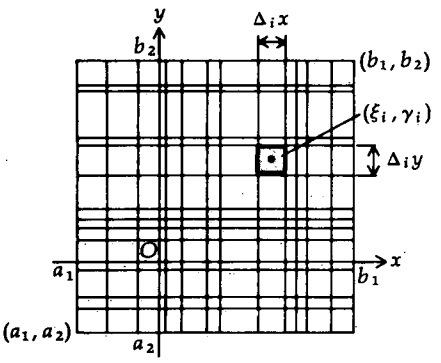


FIGURA 1

Vamos denotar por R a região retangular fechada da Figura 1, e seja f uma função definida em R. A região R pode ser considerada como uma **região de integração**. A primeira etapa é definir uma **partição**, Δ, de R. Traçamos linhas paralelas aos eixos coordenados e obtemos uma malha de sub-regiões retangulares que cobrem R. A **norma** dessa partição, denotada por $\|\Delta\|$, é determinada pelo comprimento da maior diagonal de uma sub-região retangular da partição. O comprimento da diagonal foi escolhido porque representa a maior distância entre dois pontos em uma sub-região retangular. Enumeramos então as sub-regiões de uma forma arbitrária e seja n o seu total. Denotamos a largura da i-ésima região por $\Delta_i x$ e sua altura por $\Delta_i y$ unidades de comprimento. Então, se $\Delta_i A$ unidades de área for a área da i-ésima sub-região retangular,

$$\Delta_i A = \Delta_i x \, \Delta_i y$$

Seja (ξ_i, γ_i) um ponto arbitrário da i-ésima sub-região e seja $f(\xi_i, \gamma_i)$ o valor funcional nele. Consideremos o produto $f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A$. Associado a cada uma das n sub-regiões existe tal produto e sua soma é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A \tag{1}$$

Existem muitas somas da forma (1), pois a norma da partição pode ser qualquer número positivo e cada ponto (ξ_i, γ_i) pode ser qualquer ponto na i-ésima sub-região. Se todas essas somas puderem se tornar arbitrariamente próximas

* **N. do R.:** O retângulo fechado também é freqüentemente caracterizado como o conjunto dos pares (x, y) que pertencem ao produto cartesiano dos intervalos fechados:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in R^2;\ a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y_2 \leqslant b_2\}$$

de um número L, ao tomarmos partições com normas suficientemente pequenas, então L será definido como o limite dessas somas quando a norma da partição de R tender a zero. Temos a definição a seguir.

18.1.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida numa região retangular fechada R. O número L será o **limite** das somas da forma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ se L satisfizer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ, para a qual $\|\Delta\| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i-ésimo retângulo $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A - L \right| < \epsilon$$

Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = L$$

Se existir um número L satisfazendo a Definição 18.1.1, podemos mostrar que ele é único. A demonstração é similar à prova do Teorema (2.1.2) a respeito da unicidade do limite de uma função.

18.1.2 DEFINIÇÃO Uma função f de duas variáveis será dita **integrável** numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da Definição 18.1.1 existir. Esse número L será chamado de **integral dupla** de f em R, e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R f(x, y)\,dA$$

Outros símbolos usados para a integral dupla de f em R são

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad \iint_R f(x, y)\,dy\,dx$$

O teorema a seguir, enunciado sem demonstração, dá uma condição suficiente para que uma função de duas variáveis seja integrável.

18.1.3 TEOREMA Se uma função de duas variáveis for contínua numa região retangular fechada R, então R será integrável em R.

O valor aproximado de uma integral dupla é encontrado no exemplo a seguir.

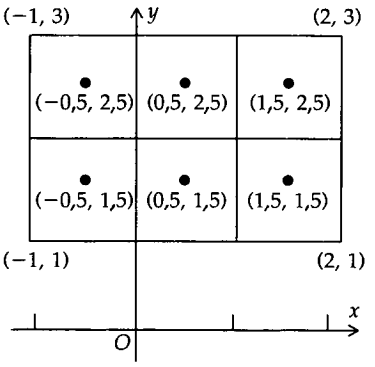


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2)\,dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(-1, 1)$ e $(2, 3)$. Tome uma partição de R formada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 2$ e seja (ξ_i, γ_i) o centro da i-ésima sub-região.

Solução Consulte a Figura 2 que mostra a região R dividida em seis sub-regiões, as quais são quadrados com lados de comprimento unitário. Para cada i, $\Delta_i A = 1$. Em cada uma das sub-regiões, o ponto (ξ_i, γ_i) será o centro do

quadrado. Com $f(x, y) = 3y - 2x^2$, uma aproximação da integral dupla será dada por

$$\begin{aligned}\iint_R (3y - 2x^2)\, dA &\approx f(-0{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1 + f(0{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1 + f(1{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1 \\ &\quad + f(1{,}5,\ 2{,}5) \cdot 1 + f(0{,}5,\ 2{,}5) \cdot 1 + f(-0{,}5,\ 2{,}5) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ &= 25\end{aligned}$$

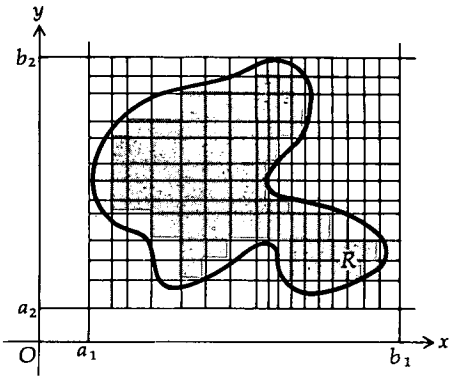


FIGURA 3

O valor exato da integral dupla do Exemplo 1 é 24, conforme será mostrado no Exemplo 1 da Secção 18.2.

Vamos considerar agora a integral dupla de uma função sobre uma região mais geral. Na Secção 6.3 a função suave foi definida como sendo aquela que tem derivada contínua e o seu gráfico é uma curva suave. Seja R uma região fechada cuja fronteira consiste em um número finito de arcos de curvas suaves, unidos para formar uma curva fechada. Como fizemos com uma região retangular, traçamos retas paralelas aos eixos coordenados que dão uma partição retangular da região R. Descartamos as sub-regiões contendo pontos que não estão em R e consideramos somente aquelas sub-regiões que estão totalmente em R (as quais estão sombreadas na Figura 3). Seja n o número dessas regiões sombreadas e vamos proceder de forma análoga àquela utilizada para regiões retangulares. As Definições 18.1.1 e 18.1.2 são aplicáveis quando a região R for do tipo mais geral descrito acima. Você pode, intuitivamente, imaginar que se a norma da partição tender a zero, n crescerá sem limitação e a área da região omitida (isto é, os retângulos descartados) tenderá a zero. Realmente, pode ser provado que se uma função for integrável em uma região R, o limite das somas aproximativas do tipo (1) será o mesmo, qualquer que seja a forma de se subdividir R, desde que cada sub-região tenha uma forma para a qual se possa atribuir uma área.

Da mesma forma que a integral de uma função de uma única variável é interpretada geometricamente em termos da área de uma região plana, a integral dupla pode ser interpretada geometricamente em termos do volume de um sólido tridimensional. Suponha que a função f seja contínua numa região fechada R em R^2. Além disso, para simplificar a discussão vamos supor que $f(x, y)$ seja não-negativa em R. O gráfico da equação $z = f(x, y)$ é uma superfície que está acima do plano xy, conforme mostra a Figura 4. A figura mostra uma sub-região retangular particular de R, tendo dimensões de medida $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$. A figura também mostra um sólido retangular tendo essa sub-região como base e $f(\xi_i, \gamma_i)$ como a medida da altura, onde (ξ_i, γ_i) é um ponto na i-ésima sub-região. O volume do sólido retangular é determinado por

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A \\ &= f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i x\, \Delta_i y\end{aligned}$$

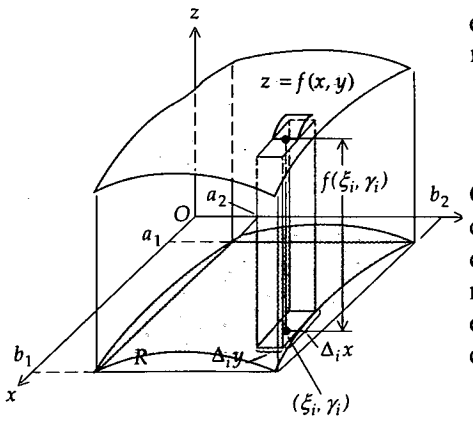


FIGURA 4

O número $\Delta_i V$ é a medida do volume do sólido retangular delgado que aparece na Figura 4; assim, a soma dada em (1) é a soma das medidas dos volumes de n de tais sólidos. Essa soma aproxima a medida do volume do sólido tridimensional mostrado na Figura 4. O sólido é limitado acima pelo gráfico de f e abaixo pela região R no plano xy. A soma em (1) também aproxima o número dado pela integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

Podemos provar que o volume do sólido tridimensional da Figura 4 é o valor da integral dupla. Esse fato está estabelecido no teorema a seguir, cuja demonstração formal não será dada.

18.1.4 TEOREMA Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R, no plano xy e $f(x, y) \geqslant 0$ para todo (x, y) em R. Se V for a medida do volume do sólido S tendo a região R como base e tendo uma altura cuja medida é $f(x, y)$ no ponto (x, y) em R, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A$$
$$= \iint_R f(x, y)\, dA$$

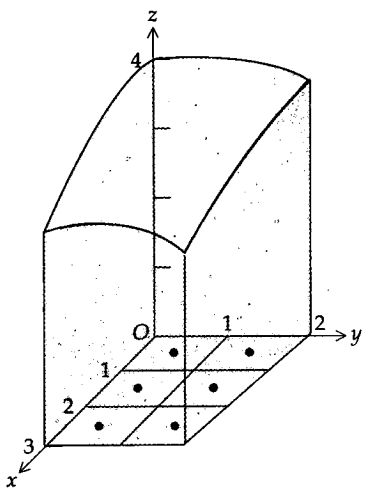


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Obtenha uma aproximação do volume do sólido limitado pela superfície

$$f(x, y) = 4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2$$

pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. Para encontrar um valor aproximado da integral dupla, vamos fazer uma partição da região no plano xy, traçando as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 1$ e tomar (ξ_i, γ_i) no centro da i-ésima sub-região.

Solução O sólido aparece na Figura 5. A região retangular R é o retângulo no plano xy limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = 3$ e $y = 2$. Do Teorema 18.1.4, se V unidades cúbicas for o volume do sólido, então,

$$V = \iint_R (4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2)\, dA$$

A Figura 5 mostra R dividido em seis sub-regiões que são quadrados, tendo lados de comprimento unitário. Logo, para cada i, $\Delta_i A = 1$. O ponto (ξ_i, γ_i) em cada sub-região é o centro do quadrado. Então, uma aproximação de V é dada pela aproximação da integral dupla. Logo,

$$V \approx f(0{,}5,\ 0{,}5) \cdot 1 + f(1{,}5,\ 0{,}5) \cdot 1 + f(2{,}5,\ 0{,}5) \cdot 1 + f(0{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1 + f(1{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1 + f(2{,}5,\ 1{,}5) \cdot 1$$

Usando uma calculadora para resolver os valores da função, obtemos

$$V \approx 3{,}957 + 3{,}734 + 3{,}290 + 3{,}832 + 3{,}609 + 3{,}165$$
$$\approx 21{,}59$$

Assim, o volume é aproximadamente 21,59 unidades de volume.

O valor exato do volume do Exemplo 2 da Secção 18.2 será de 21,5 unidades de volume.

Várias propriedades da integral dupla são análogas às propriedades da integral definida de uma função de uma única variável. As mais importantes serão dadas nos teoremas a seguir.

18.1.5 TEOREMA Se c for uma constante e a função f for integrável numa região fechada R, então cf será integrável em R e

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$$

18.1.6 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis numa região fechada R, então a função $f + g$ será integrável em R e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

O resultado do teorema 18.1.6 pode ser aplicado a qualquer número finito de funções integráveis. As demonstrações dos Teoremas 18.1.5 e 18.1.6 seguem diretamente da definição de integral dupla.

18.1.7 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis na região fechada R e, além disso, $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todo (x, y) em R, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geqslant \iint_R g(x, y)\, dA$$

O Teorema 18.1.7 é análogo ao Teorema 5.6.8 para integrais definidas de uma função de uma única variável. A demonstração é similar.

18.1.8 TEOREMA Seja a função f integrável numa região fechada R e suponha que m e M sejam dois números tais que $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em R. Então, se A for a medida da área da região R,

$$mA \leqslant \iint_R f(x, y)\, dA \leqslant MA$$

A demonstração do Teorema 18.1.8 é similar àquela do Teorema 5.6.9 e baseia-se no Teorema 18.1.7.

18.1.9 TEOREMA Suponha que a função f seja contínua numa região fechada R e que a região R seja composta de duas sub-regiões R_1 e R_2 que não têm pontos em comum, com exceção de pontos em partes de suas fronteiras. Então,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

A demonstração do Teorema 18.1.9 depende da definição de integral dupla e dos teoremas de limites.

EXERCÍCIOS 18.1

1. Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (3x - 2y + 1)\, dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(0, -2)$ e $(3, 0)$. Faça uma partição de R com as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = -1$ e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.

2. Ache um valor aproximado da integral dupla

$$\iint_R (y^2 - 4x)\, dA$$

onde R é a região retangular com vértices $(-1, 0)$ e $(1, 3)$. Faça uma partição de R com as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$ e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.

Nos Exercícios de 3 a 8, ache um valor aproximado da integral dupla, onde R é a região retangular com vértices P e Q, Δ é uma partição de R e (ξ_i, γ_i) é o centro de cada sub-região.

3. $\iint_R (x^2 + y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(4, 2)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

4. $\iint_R (2 - x - y)\, dA$; $P(0, 0)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$.
5. $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(-2, 0)$; $Q(4, 6)$; Δ: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$.
6. $\iint_R (xy + 3y^2)\, dA$; $P(0, -2)$; $Q(6, 4)$; Δ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$.
7. $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$.
8. $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\, dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$; Δ: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $y_1 = -2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 2$, $y_6 = 3$, $y_7 = 4$, $y_8 = 5$.

Nos Exercícios de 9 a 12, ache um valor aproximado da integral dupla dada, onde R é a região retangular tendo os vértices P e Q, Δ é uma partição de R e (ξ_i, y_i) é um ponto arbitrário em cada sub-região.

9. A integral dupla, P, Q e Δ são os mesmos do Exercício 3; $(\xi_1, \gamma_1) = (0{,}25, 0{,}5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (1{,}75, 0)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2{,}5, 0{,}25)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (4, 1)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0{,}75, 1{,}75)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (1{,}25, 1{,}5)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (2{,}5, 2)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (3, 1)$.
10. A integral dupla, P, Q e Δ são os mesmos do Exercício 4; $(\xi_1, \gamma_1) = (0{,}5, 1{,}5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (3, 1)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (5{,}5, 0{,}5)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (2, 2)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (2, 2)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (5, 3)$.
11. A integral dupla, P, Q e Δ são os mesmos do Exercício 5; $(\xi_1, \gamma_1) = (-0{,}5, 0{,}5)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (1, 1{,}5)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2{,}5, 2)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (-1{,}5, 3{,}5)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 3)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (4, 4)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (-1, 4{,}5)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (1, 4{,}5)$; $(\xi_9, \gamma_9) = (3, 4{,}5)$.
12. A integral dupla, P, Q e Δ são os mesmos do Exercício 5; $(\xi_1, \gamma_1) = (-2, 0)$; $(\xi_2, \gamma_2) = (0, 0)$; $(\xi_3, \gamma_3) = (2, 0)$; $(\xi_4, \gamma_4) = (-2, 2)$; $(\xi_5, \gamma_5) = (0, 2)$; $(\xi_6, \gamma_6) = (2, 2)$; $(\xi_7, \gamma_7) = (-2, 4)$; $(\xi_8, \gamma_8) = (0, 4)$; $(\xi_9, \gamma_9) = (2, 4)$.
13. Obtenha uma aproximação para o volume do sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, pelos planos $x = 3$, $y = 3$ e pelos três planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy com as retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ e $y = 2$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.
14. Calcule uma aproximação para o volume do sólido limitado pelos planos $x = 2x + y + 4$, $x = 2$, $y = 3$ e pelos três planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla faça uma partição da região no plano xy formado pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 2$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.
15. Obtenha uma aproximação para o volume do sólido limitado pela superfície $z = 10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$, pelos planos $x = 2$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. Para achar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy com as retas $x = 1$ e $y = 1$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.
16. Calcule uma aproximação para o volume do sólido limitado pela superfície $100\, z = 300 - 25x^2 - 4y^2$, pelos planos $x = -1$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 5$ e pelo plano xy. Para encontrar um valor aproximado da integral dupla, faça uma partição da região no plano xy formado pelas retas $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ e $y = 3$, e considere (ξ_i, γ_i) como o centro da i-ésima sub-região.

Nos Exercícios de 17 a 22, aplique o Teorema 18.1.8 para encontrar um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada.

17. $\iint_R (2x + 5y)\, dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$.
18. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
19. $\iint_R e^{xy}\, dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
20. $\iint_R (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) e $(0, \pi)$. (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 10, nos Exercícios 17.3.)
21. $\iint_R [\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y]\, dA$, onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) e $(0, \pi)$, (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 11, nos Exercícios 17.3.)
22. $\iint_R \dfrac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}\, dA$, onde R é uma região retangular com vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 8, nos Exercícios 17.3.)

18.2 CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS E INTEGRAIS ITERADAS

Para funções de uma única variável, o segundo teorema fundamental do cálculo provê um método para se calcular uma integral definida que consiste em encontrar uma antiderivada (ou integral indefinida) do integrando. Há um método correspondente para o cálculo de uma integral dupla que inclui executar sucessivas integrações simples. O desenvolvimento rigoroso desse método é dado num curso de Cálculo Avançado. Nossa discussão aqui será intuitiva, usando

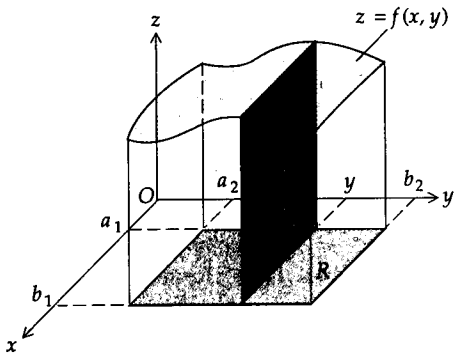


FIGURA 1

interpretações geométricas da integral dupla como a medida de um volume. Vamos desenvolver o método primeiro para integrais duplas numa região retangular.

Seja f uma função dada que é integrável numa região retangular fechada R, no plano xy, limitada pelas retas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ e $y = b_2$. Vamos supor que $f(x, y) \geqslant 0$ para todo (x, y) em R. Consulte a Figura 1, que mostra um esboço do gráfico da equação $z = f(x, y)$ quando (x, y) está em R. O número que representa o valor da integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

é a medida do volume do sólido entre a superfície e a região R. Esse número pode ser encontrado pelo método das secções planas paralelas, discutidas na Secção 6.1, como faremos agora.

Seja y um número em $[a_2, b_2]$. Considere o plano paralelo ao plano xz pelo ponto $(0, y, 0)$. Seja $A(y)$ a medida da área da região plana de intersecção desse plano com o sólido. A medida do volume do sólido é expressa por

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)\, dy$$

Como o volume do sólido também é determinado pela integral dupla

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\, dy \tag{1}$$

Assim, podemos encontrar o valor da integral dupla da função f em R, calculando a integral simples de $A(y)$. Precisamos encontrar agora $A(y)$ quando y for dado. Como $A(y)$ é a medida da área de uma região plana, podemos encontrá-la por integração. Na Figura 1, observe que a fronteira superior da região plana é o gráfico da equação $z = f(x, y)$, quando x está em $[a_1, b_1]$. Logo, $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$. Substituindo essa equação em (1) obtemos

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right] dy} \tag{2}$$

A integral à direita de (2) é chamada de **integral iterada**. Usualmente os colchetes são omitidos quando escrevemos uma integral iterada. Assim, (2) pode ser escrita como

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy} \tag{3}$$

Antes de calcular a "integral interna" em (3), lembre-se de que x é a variável de integração e y é considerada uma constante. Isto equivale a considerar y constante, tal como no cálculo da derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a x.

Ao considerarmos secções planas paralelas ao plano yz, obtemos uma integral iterada com a ordem de integração trocada; temos então

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\, dx} \tag{4}$$

Uma condição suficiente para que (3) e (4) sejam válidas é que a função seja contínua na região retangular R.

EXEMPLO 1 Calcule a integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2)\, dA$$

se R for a região que consiste em todos os pontos (x, y) para os quais $-1 \leqslant x \leqslant 2$ e $1 \leqslant y \leqslant 3$.

Solução Com $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 1$ e $b_2 = 3$, temos, de (3),

$$\begin{aligned}
\iint_R (3y - 2x^2)\, dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (3y - 2x^2)\, dx\, dy \\
&= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (3y - 2x^2)\, dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[3xy - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^2 dy \\
&= \int_1^3 (9y - 6)\, dy \\
&= \tfrac{9}{2}y^2 - 6y \Big]_1^3 \\
&= 24
\end{aligned}$$

No Exemplo 1 da Secção 18.1 encontramos 25 como um valor aproximado da integral dupla acima.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido limitado pela superfície

$$f(x, y) = 4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2$$

pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Solução A Figura 2 mostra o gráfico da equação $z = f(x, y)$ no primeiro octante e o sólido dado. Se V unidades for o volume do sólido, então, do Teorema 18.1.4,

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A \\
&= \iint_R f(x, y)\, dA \\
&= \int_0^3 \int_0^2 (4 - \tfrac{1}{9}x^2 - \tfrac{1}{16}y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^3 \left[4y - \tfrac{1}{9}x^2 y - \tfrac{1}{48}y^3 \right]_0^2 dx \\
&= \int_0^3 (\tfrac{47}{6} - \tfrac{2}{9}x^2)\, dx \\
&= \tfrac{47}{6}x - \tfrac{2}{27}x^3 \Big]_0^3 \\
&= 21.5
\end{aligned}$$

O volume é, portanto, 21,5 unidades.

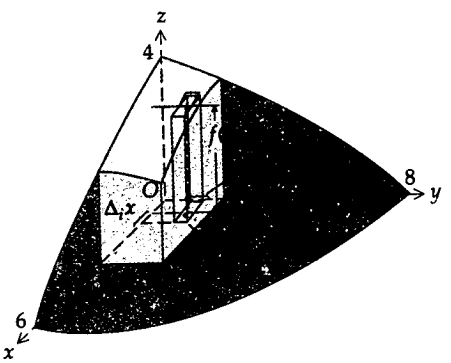


FIGURA 2

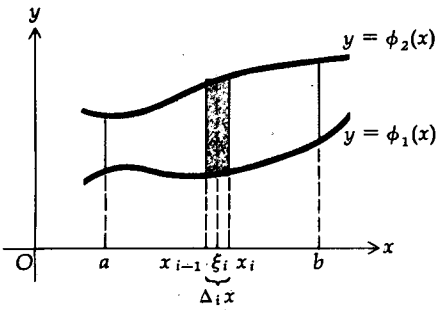


FIGURA 3

No Exemplo 2 da Secção 18.1 encontramos um valor aproximado de 21,59 para esse mesmo volume.

Suponha agora que R seja uma região no plano xy, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $a < b$ e pelas curvas $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$; além disso, $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para todo x, tal que $a \leqslant x \leqslant b$ (veja a Figura 3). Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$, definida por Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Consideremos a região R da Figura 3 divida em faixas verticais como $\Delta_i x$ unidades de largura. Uma das faixas é mostrada na figura. A intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e um plano $x = \xi_i$, onde $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ é uma curva. Um segmento dessa curva está sobre a i-ésima faixa vertical. A região abaixo desse segmento de curva e acima do plano xy aparece na Figura 4 e a medida da área dessa região é dada por

$$\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy$$

A medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela i-ésima faixa vertical é aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy\right] \Delta_i x$$

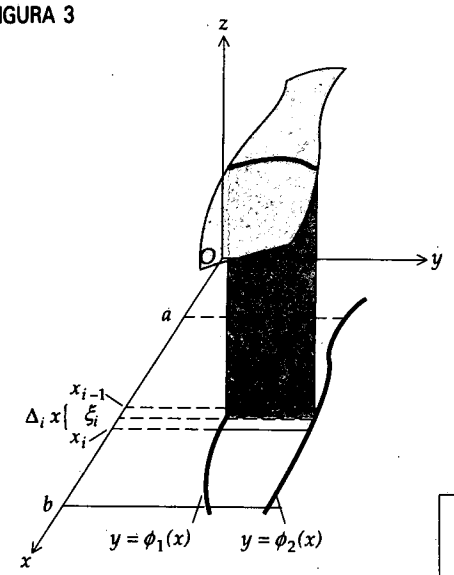


FIGURA 4

Quando a norma de Δ tende a zero, se tomarmos o limite da soma das medidas dos volumes para n faixas verticais de R, desde $x = a$ até $x = b$, obtemos a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R no plano xy. (Veja a Figura 5.) Essa é a integral dupla de f em R; ou seja

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)\, dy\right] \Delta_i x &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \iint_R f(x, y)\, dy\, dx \end{aligned}} \tag{5}$$

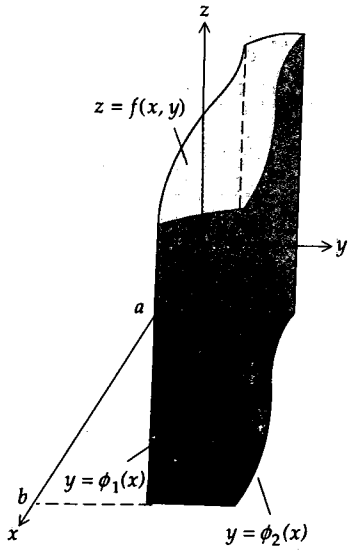


FIGURA 5

Condições suficientes para que (5) seja válida são que f seja contínua na região fechada R e que ϕ_1 e ϕ_2 sejam funções suaves.

EXEMPLO 3 Expresse, como uma integral dupla e depois como uma integral iterada, a medida do volume do sólido acima do plano xy, limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral iterada para encontrar o volume do sólido.

Solução O sólido é mostrado na Figura 6. Vamos encontrar o volume da parte do sólido que está no primeiro octante a qual, com base nas propriedades de simetria, é um quarto do volume pedido. A região R no plano xy está limitada pelos eixos x e y e pela elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Essa região está na Figura 7 que também mostra a i-ésima sub-região de uma partição retangular de R, onde (ξ_i, γ_i) é qualquer ponto dessa sub-região. Se V unidades de volume for o volume do sólido dado, então, pelo Teorema 18.1.4,

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 4\gamma_i^2)\, \Delta_i A \\ &= 4 \iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA \end{aligned}$$

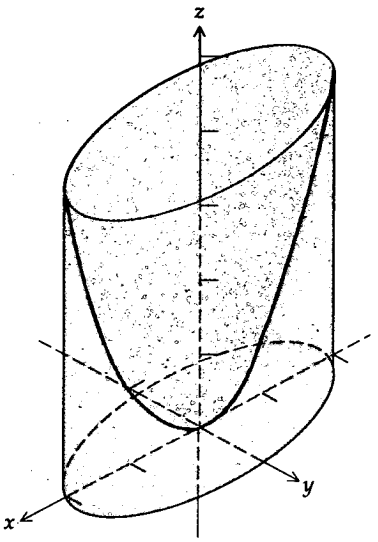


FIGURA 6

Para expressar V a medida do volume como uma integral iterada, dividimos a região R em n faixas verticais. A Figura 8 mostra a região R e a i-ésima faixa vertical tendo uma largura de $\Delta_i x$ unidades e um comprimento de $\frac{1}{2}\sqrt{4 - \xi_i^2}$ unidades, onde $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. De (5),

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{\sqrt{4-\xi_i^2}/2} (\xi_i^2 + 4y^2)\, dy \right] \Delta_i x \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}/2} dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{6}(4 - x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= \tfrac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2)\sqrt{4 - x^2}\, dx \\ &= -\tfrac{1}{3} x (4 - x^2)^{3/2} + 2x\sqrt{4 - x^2} + 8 \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{2} x \Big]_0^2 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Logo, o volume é de 4π unidades.

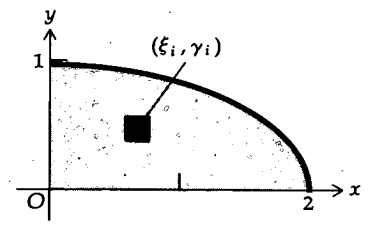


FIGURA 7

Suponha que a região R seja limitada pelas curvas $x = \lambda_1(y)$ e $x = \lambda_2(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$, com $c < d$, e que λ_1 e λ_2 sejam duas funções contínuas no intervalo fechado $[c, d]$ onde $\lambda_1(y) \leqslant \lambda_2(y)$ sempre que $c \leqslant y \leqslant d$. Considere uma partição Δ do intervalo $[c, d]$ e divida a região em faixas horizontais cujas medidas das larguras sejam $\Delta_i y$. Veja a Figura 9, mostrando a i-ésima faixa horizontal. A intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com um plano $y = \gamma_i$, onde $y_{i-1} \leqslant \gamma_i \leqslant y_i$ é uma curva, e um segmento dessa curva está sobre a i-ésima faixa horizontal. Então, como na obtenção de (5), a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela i-ésima faixa vertical é aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i)\, dx \right] \Delta_i y$$

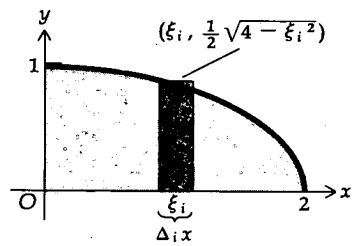


FIGURA 8

Tomando o limite, quando $\|\Delta\|$ tende a zero, da soma dessas medidas de volume para n faixas horizontais de R, desde $y = c$ até $y = d$, obtemos a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R no plano xy. Essa medida de volume é a integral dupla de f em R. Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i)\, dx \right] \Delta_i y &= \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \end{aligned}} \qquad (6)$$

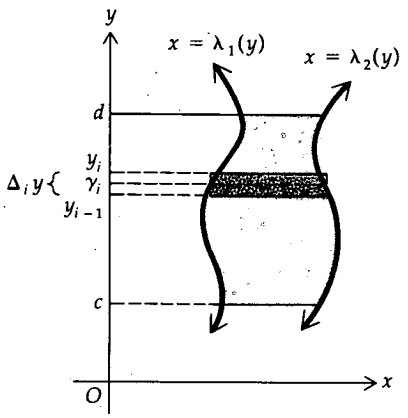


FIGURA 9

Condições suficientes para que (6) seja válida são que λ_1 e λ_2 sejam funções suaves e f seja contínua em R. Na aplicação de ambas (5) e (6), algumas vezes pode ser necessário subdividir uma região R em sub-regiões nas quais são verificadas essas condições suficientes.

EXEMPLO 4 Expresse o volume do sólido do Exemplo 3 por uma integral iterada na qual a ordem de integração é o reverso daquela do Exemplo 3. Calcule o volume.

Solução Novamente, vamos calcular o volume do sólido no primeiro octante e multiplicar por 4 o resultado. A Figura 10 mostra a região R no plano xy e a i-ésima faixa horizontal cuja largura mede $\Delta_i y$ e cujo comprimento tem uma medida de $2\sqrt{1 - \gamma_i^2}$. Então, por (6),

$$\begin{aligned}
V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{2\sqrt{1-\gamma_i^2}} (x^2 + 4\gamma_i^2)\, dx \right] \Delta_i y \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy \\
&= 4 \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 4y^2 x \right]_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= 4 \int_0^1 \left[\tfrac{8}{3}(1 - y^2)^{3/2} + 8y^2\sqrt{1 - y^2} \right] dy \\
&= \tfrac{32}{3} \int_0^1 (2y^2 + 1)\sqrt{1 - y^2}\, dy \\
&= -\tfrac{16}{3} y(1 - y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1 - y^2} + 8 \operatorname{sen}^{-1} y \Big]_0^1 \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

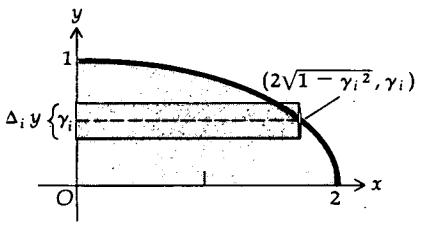


FIGURA 10

Logo, o volume é 4π unidades de volume, o que está de acordo com o resultado do Exemplo 3.

Das soluções dos Exemplos 3 e 4, vemos que a integral dupla $\iint_R (x^2 + 4y^2)\, dA$ pode ser calculada por qualquer uma das integrais iteradas.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2)\, dx\, dy$$

Se em (5) ou (6) $f(x, y) = 1$ para todo x e y, então a medida A da área de uma região R é expressa como uma integral dupla. Temos

$$\boxed{A = \iint_R dy\, dx \Leftrightarrow A = \iint_R dx\, dy} \tag{7}$$

EXEMPLO 5 Ache, por integração dupla, a área da região no plano xy, limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

Solução A região está na Figura 11. De (7),

$$\begin{aligned}
A &= \iint_R dy\, dx \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{4x - x^2} dy\, dx \\
&= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\, dx \\
&= 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 \Big]_0^2 \\
&= \tfrac{8}{3}
\end{aligned}$$

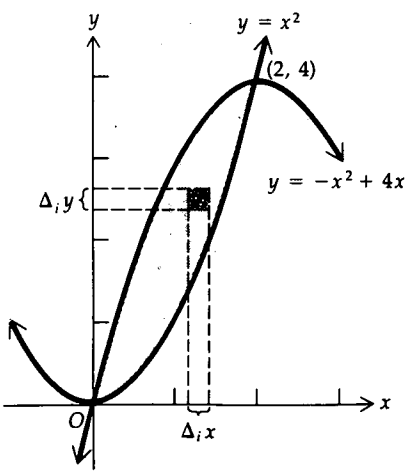


FIGURA 11

Logo, a área da região é $\frac{8}{3}$ unidades.

EXERCÍCIOS 18.2

Nos Exercícios de 1 a 10, calcule a integral iterada.

1. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3\, dy\, dx$
2. $\int_0^4 \int_0^y dx\, dy$
3. $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9 + y^2}\, dx\, dy$
4. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y}\, dy\, dx$
5. $\int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}}\, dx\, dy$
6. $\int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}}\, dy\, dx$
7. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y|\, dy\, dx$
8. $\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dy\, dx$
9. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^x \operatorname{sen}(4x - y)\, dy\, dx$
10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen} \frac{x}{y}\, dx\, dy$

Nos Exercícios de 11 a 18, ache o valor exato da integral dupla.

11. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 1, dos Exercícios 18.1.
12. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 2, dos Exercícios 18.1.
13. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 3, dos Exercícios 18.1.
14. A integral dupla é a mesma que a do Exercício 6, dos Exercícios 18.1.
15. $\iint_R \operatorname{sen} x\, dA$; R é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $x = \pi$.
16. $\iint_R \cos(x + y)\, dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$, $x = \pi$ e o eixo x.
17. $\iint_R x^2\sqrt{9 - y^2}\, dA$; R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.
18. $\iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$; R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 2$ e pela hipérbole $xy = 1$.
19. Ache o volume do sólido sob o plano $z = 4x$ e acima da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy. Faça um esboço do sólido.
20. Ache o volume do sólido limitado pelos planos $x = y + 2z + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $3y + z - 3 = 0$. Faça um esboço do sólido.
21. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$. Faça um esboço do sólido.
22. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - 3y^2$. Faça um esboço do sólido.
23. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies $x + z^2 = 1$, $x = y$ e $x = y^2$. Faça um esboço do sólido.
24. Ache, por integração dupla, o volume da parte do sólido limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está no primeiro octante. Faça um esboço do sólido.

Nos Exercícios de 25 a 28, use integrais duplas para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy. Faça um esboço da região.

25. $y = x^3$ e $y = x^2$
26. $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$
27. $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$
28. $x^2 + y^2 = 16$ e $y^2 = 6x$
29. Expresse como uma integral iterada a medida do volume do sólido limitado pelo elipsóide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
30. Use a integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela circunferência $x^2 + y^2 = 5$ e pelo eixo x por duas maneiras: (a) integrando primeiro em relação a x; (b) integrando primeiro em relação a y. Compare os dois métodos de solução.
31. Ache, por dois métodos, o volume do sólido abaixo do plano $3x + 8y + 6z = 24$ e acima da região no primeiro quadrante do plano xy, limitado pela parábola $y^2 = 2x$, pela reta $2x + 3y = 10$ e pelo eixo x: (a) integrando primeiro em relação a x; (b) integrando primeiro em relação a y. Compare os dois métodos de solução.
32. Dada a integral iterada $\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx$. (a) Faça um esboço do sólido cuja medida de volume é representada pela integral iterada dada; (b) calcule a integral iterada; (c) escreva a integral iterada que dá a medida de volume do mesmo sólido com a ordem de integração invertida.
33. Dada a integral iterada $\frac{2}{3} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2x + y)\, dy\, dx$. Siga as mesmas instruções que foram dadas no Exercício 32.
34. Use a integração dupla para encontrar o volume do sólido comum a dois cilindros circulares retos, com raio de r unidades e cujos eixos interceptam-se em ângulo reto. (Veja o Exercício 48, dos Exercícios 6.1.)

Nos Exercícios 35 e 36, a integral iterada não pode ser calculada exatamente em termos de funções elementares, na ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração e faça o cálculo.

35. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen} \pi y^3\, dy\, dx$
36. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$

18.3 CENTRO DE MASSA E MOMENTOS DE INÉRCIA

No Capítulo 6, usamos integrais simples para encontrar o centro de massa de uma lâmina homogênea. Usando integrais simples, podemos considerar somente lâminas com densidade de massa por unidade de área constante (exceto em casos especiais); contudo, com integrais duplas podemos calcular também o centro de massa de lâminas não-homogêneas.

Suponhamos que seja dada uma lâmina tendo a forma de uma região fechada R, no plano xy. Seja $\rho(x, y)$ a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em qualquer ponto (x, y) de R, onde ρ é contínua em R. Para encontrar a massa total da lâmina, iremos proceder da seguinte forma: seja Δ uma partição de R em n retângulos. Se (ξ_i, γ_i) for um ponto qualquer no i-ésimo retângulo, tendo uma área de medida $\Delta_i A$, então uma aproximação da medida da massa do i-ésimo retângulo é dada por $\rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$, e a medida da massa total da lâmina é aproximada por

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$$

Tomando o limite da soma acima, quando a norma de Δ tende a zero, expressamos a medida M da massa da lâmina por

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R \rho(x, y)\,dA \end{aligned}} \tag{1}$$

A medida do momento de massa do i-ésimo retângulo em relação ao eixo x é aproximada por $\gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$. A soma das medidas dos momentos de massa dos n retângulos em relação ao eixo x é, então, aproximada pela soma desses n termos. A medida M_x do momento de massa em relação ao eixo x da lâmina toda é dada por

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R y\rho(x, y)\,dA \end{aligned}}$$

Analogamente, a medida M_y do momento de massa em relação ao eixo y é dada por

$$\boxed{\begin{aligned} M_y &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \gamma_i)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R x\rho(x, y)\,dA \end{aligned}} \tag{2}$$

O centro de massa da lâmina é denotada por $(\bar{x}, \bar{y})$ e

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

EXEMPLO 1 Uma lâmina com a forma de um triângulo retângulo isósceles tem uma densidade de massa por unidade de área que varia como o quadrado da distância ao vértice do ângulo reto. Se a massa for medida em quilogramas, a distância em metros, ache a massa e o centro de massa da lâmina.

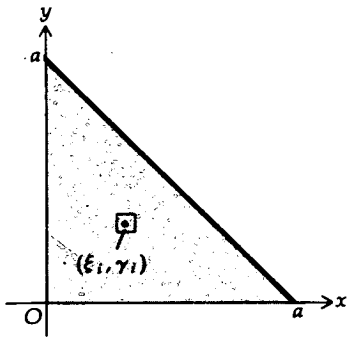


FIGURA 1

Solução Escolha os eixos coordenados de tal forma que o vértice do triângulo retângulo esteja na origem e os lados com a metros de comprimento estejam ao longo dos eixos coordenados (veja a Figura 1). Seja $\rho(x, y)$ o número de quilogramas por metro quadrado da densidade de massa por unidade de área da lâmina no ponto (x, y). Então, $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, onde k é uma constante. Logo, se M kg for a massa da lâmina, temos de (1) que

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A \\
&= k \iint_R (x^2 + y^2)\, dA \\
&= \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= k \int_0^a \left[yx^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \right]_0^{a-x} dx \\
&= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 - a^2x + 2ax^2 - \tfrac{4}{3}x^3)\, dx \\
&= k(\tfrac{1}{3}a^4 - \tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{2}{3}a^4 - \tfrac{1}{3}a^4) \\
&= \tfrac{1}{6}ka^4
\end{aligned}$$

Para achar o centro de massa, observe que devido à simetria ele deve estar sobre a reta $y = x$. Logo, se determinarmos $\bar{x}$, teremos também $\bar{y}$. De (2),

$$\begin{aligned}
M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\xi_i(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A \\
&= k \iint_R x(x^2 + y^2)\, dA \\
&= k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= k \int_0^a \left[x^3y + \tfrac{1}{3}xy^3 \right]_0^{a-x} dx \\
&= k \int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3x - a^2x^2 + 2ax^3 - \tfrac{4}{3}x^4)\, dx \\
&= k(\tfrac{1}{6}a^5 - \tfrac{1}{3}a^5 + \tfrac{1}{2}a^5 - \tfrac{4}{15}a^5) \\
&= \tfrac{1}{15}ka^5
\end{aligned}$$

Como $M\bar{x} = M_y$, então $M\bar{x} = \frac{1}{15}ka^5$; como $M = \frac{1}{6}ka^4$, obtemos $\bar{x} = \frac{2}{5}a$. Logo, o centro de massa está no ponto $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

18.3.1 DEFINIÇÃO

O **momento de inércia** de uma partícula cuja massa é m kg, em torno de um eixo, é definido como sendo mr^2 kg-m², onde r m é a distância entre a partícula e o eixo.

Se tivermos um sistema de n partículas, o momento de inércia do sistema será definido como a soma dos momentos de inércia de todas as partículas. Isto é, se a i-ésima partícula tiver uma massa de m_i kg e estiver a uma distância de r_i m do eixo, então I kg-m² será o momento de inércia do sistema, onde

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Estendendo o conceito de momento de inércia a uma distribuição contínua de massa no plano, tal como barras ou lâminas por um processo similar ao usado previamente, temos a definição a seguir.

18.3.2 DEFINIÇÃO Suponhamos que haja uma distribuição contínua de massa ocupando uma região R do plano xy, e suponhamos que a medida da densidade de área dessa distribuição no ponto (x, y) seja $\rho(x, y)$ kg-m², onde ρ é contínua em R. Então, o **momento de inércia I_x kg-m² em torno do eixo x** dessa distribuição de massa será determinado por

$$I_x = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA$$

Da mesma forma, a medida I_y **kg-m² do momento de inércia em torno do eixo y** é dada por

$$I_x = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA$$

e a medida I_0 **kg-m² do momento de inércia em torno da origem**, ou do eixo z, é dada por

$$I_0 = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \gamma_i^2) \rho(\xi_i, \gamma_i)\, \Delta_i A = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dA$$

O número I_0 é a medida do chamado **momento de inércia polar**.

EXEMPLO 2 Um fio retilíneo homogêneo tem uma densidade linear de massa constante de k kg-m. Ache o momento de inércia do fio em torno de um eixo perpendicular a ele, passando por uma extremidade.

Solução Vamos supor que o fio tenha um comprimento de a m e que se estenda ao longo do eixo x, desde a origem. Vamos encontrar o seu momento de inércia em torno do eixo y. Dividindo o fio em n segmentos, seja $\Delta_i x$ m o comprimento do i-ésimo segmento. A massa do i-ésimo segmento é, então, $k\, \Delta_i x$ kg. Suponha que a massa do i-ésimo segmento esteja concentrada num único ponto ξ_i, onde $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. O momento de inércia do i-ésimo segmento em torno do eixo y está entre $kx_{i-1}^2\, \Delta_i x$ kg-m² e $kx_i^2\, \Delta_i x$ kg-m² e é aproximado por $k\xi_i^2\, \Delta_i x$ kg-m², onde $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Se o momento de inércia do fio em torno do eixo y for I_y kg-m², então

$$I_y = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\xi_i^2\, \Delta_i x = \int_0^a kx^2\, dx = \tfrac{1}{3}ka^3$$

Logo, o momento de inércia é $\frac{1}{3}ka^3$ kg-m².

EXEMPLO 3 Uma lâmina retangular homogênea tem densidade de massa por unidade de área constante de k g-cm^2. Ache o momento de inércia da lâmina em torno de um vértice.

Solução Suponha que a lâmina seja limitada pelas retas $x = a$, $y = b$, o eixo x e o eixo y. Veja a Figura 2. Se I_0 g-cm^2 for o momento de inércia em torno da origem, então

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\,\Delta_i A \\ &= \iint_R k(x^2 + y^2)\,dA \\ &= k \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\,dx\,dy \\ &= k \int_0^b \left[\tfrac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_0^a dy \\ &= k \int_0^b (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2)\,dy \\ &= \tfrac{1}{3}kab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

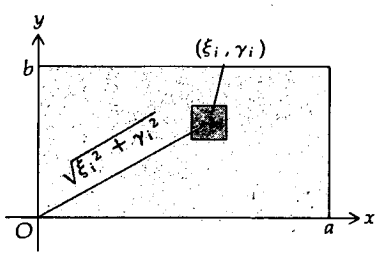


FIGURA 2

O momento de inércia é, então, $\frac{1}{3}kab(a^2 + b^2)$ g-cm^2.

É possível encontrar a distância com relação a qualquer eixo L, onde a massa da lâmina pode ser concentrada, sem afetar o momento de inércia da lâmina em torno de L. A medida dessa distância, denotada por r, é chamada de *raio de giração* da lâmina em torno de L. Isto é, se a massa M kg da lâmina for concentrada em um ponto distante r m de L, o momento de inércia da lâmina em torno de L será o mesmo que o de uma partícula de massa M kg a uma distância de r m de L; esse momento de inércia é Mr^2 kg-m^2. Assim, temos a definição a seguir.

18.3.3 DEFINIÇÃO Se I for a medida do momento de inércia em torno de um eixo L de uma distribuição de massa num plano e M for a medida da massa total da distribuição, então o **raio de giração** da distribuição em torno de L terá por medida r, onde

$$r^2 = \frac{I}{M}$$

EXEMPLO 4 Suponhamos que a lâmina tenha a forma de uma semicircunferência e que a medida da densidade de massa por unidade de área da lâmina em qualquer ponto seja proporcional à medida da distância do ponto ao diâmetro. Se a massa for medida em quilogramas e a distância em metros, ache o raio de giração da lâmina em torno do eixo x.

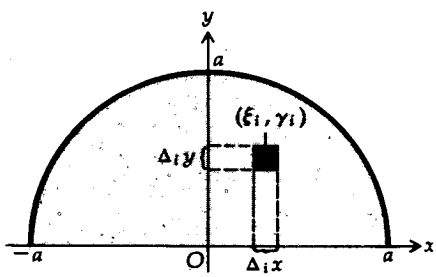


FIGURA 3

Solução Escolha os eixos x e y de tal forma que a semicircunferência seja a metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Veja a Figura 3. A densidade de massa por unidade de área da lâmina, no ponto (x, y) é, então, ky kg-m^2.

Assim, se M kg for a massa da lâmina, temos

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i \, \Delta_i A \\ &= \iint_R ky \, dA \\ &= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} ky \, dx \, dy \\ &= k \int_0^a \Big[yx \Big]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy \\ &= 2k \int_0^a y\sqrt{a^2-y^2} \, dy \\ &= -\tfrac{2}{3}k(a^2-y^2)^{3/2}\Big]_0^a \\ &= \tfrac{2}{3}ka^3 \end{aligned}$$

Se I_x kg-m² for o momento de inércia da lâmina em torno do eixo x, então

$$\begin{aligned} I_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 (k\gamma_i) \, \Delta_i A \\ &= \iint_R ky^3 \, dy \, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3 \, dy \, dx \\ &= k \int_{-a}^{a} \Big[\tfrac{1}{4}y^4 \Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \tfrac{1}{4}k \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) \, dx \\ &= \tfrac{1}{4}k(2a^5 - \tfrac{4}{3}a^5 + \tfrac{2}{5}a^5) \\ &= \tfrac{4}{15}ka^5 \end{aligned}$$

Assim sendo, se r m for o raio de giração

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\frac{4}{15}ka^5}{\frac{2}{3}ka^3} \\ &= \tfrac{2}{5}a^2 \end{aligned}$$

Logo, $r = \frac{1}{5}\sqrt{10}a$. O raio de giração é, portanto, $\frac{1}{5}\sqrt{10}a$ m.

EXERCÍCIOS 18.3

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a massa e o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

1. A lâmina na forma de uma região retangular, limitada pelas retas $x = 3$, $y = 2$ e pelos eixos coordenados. A densidade em qualquer ponto é xy^2 kg-m².
2. A lâmina na forma de uma região retangular, limitada pelas retas $x = 4$, $y = 5$ e pelos eixos coordenados. A densidade em qualquer ponto é $(x^2 + y)$ kg-m².
3. A lâmina na forma de uma região retangular cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta $x + 2y = 6$. A densidade em qualquer ponto é y^2 kg-m².
4. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $y = x^2$, pela reta $y = 1$ e pelo eixo y. A densidade em qualquer ponto é $(x + y)$ kg-m².
5. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $x^2 = 8y$, pela reta $y = 2$ e pelo eixo y. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância à reta $y = -1$.

6. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, pela reta $x = 1$ e pelos eixos coordenados. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo x.
7. A lâmina na forma da região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados. A densidade de massa por unidade de área varia como a soma das distâncias aos dois lados retos.
8. A lâmina na forma da região limitada pelo triângulo cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta $3x + 2y = 18$. A densidade de massa por unidade de área varia como o produto das distâncias aos eixos coordenados.
9. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo x, de $x = 0$ a $x = \pi$. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo x.
10. A lâmina na forma da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pela reta $y = x$. A densidade de massa por unidade de área varia como a distância ao eixo y.
11. A lâmina na forma da região do primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e pela reta $x + y = 2$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é xy kg-m^2.
12. A lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelas retas $x = 1$ e $y = 1$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é xy kg-m^2.

Nos Exercícios de 13 a 18, ache o momento de inércia da lâmina homogênea dada, em torno do eixo indicado, sendo k kg-m² a densidade de massa por unidade de área e a distância medida em metros.

13. A lâmina na forma da região limitada por $4y = 3x$, $x = 4$ e pelo eixo x; em torno do eixo x.
14. A lâmina do Exercício 13; em torno da reta $x = 4$.
15. A lâmina na forma da região limitada por uma circunferência de raio a unidades; em torno do seu centro.
16. A lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 4 - 4y$ e pelo eixo x em torno do eixo x.
17. A lâmina do Exercício 16; em torno da origem.
18. A lâmina na forma da região limitada por um triângulo com lados a, b e c m; em torno do lado com a m.

Nos Exercícios de 19 a 22, ache para a lâmina dada, cada um dos segmentos: (a) o momento de inércia em torno do eixo x; (b) o momento de inércia em torno do eixo y; (c) o raio de giração em torno do eixo x; (d) o momento polar de inércia.

19. A lâmina do Exercício 1.
20. A lâmina do Exercício 4.
21. A lâmina do Exercício 9.
22. A lâmina do Exercício 10.
23. Uma lâmina homogênea, com uma densidade k g-cm^2, na forma de um triângulo isósceles, tendo uma base de b cm e uma altura de h cm, é dada. Ache o raio de giração da lâmina em torno de seu eixo de simetria.
24. Uma lâmina homogênea com uma densidade k g-cm^2 e na forma da região limitada pela curva $x = \sqrt{y}$, pelo eixo x e pela reta $x = a$, onde $a > 0$, é dada. Ache o momento de inércia da lâmina em torno da reta $x = a$.
25. Uma lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e pelo eixo x, é dada. Ache o momento inércia da lâmina em torno da reta $y = 4$, se a densidade de massa por unidade de área variar como a distância à reta $y = 4$. A massa é medida em quilogramas e a distância, em metros.

18.4 A INTEGRAL DUPLA EM COORDENADAS POLARES

Agora mostraremos como a integral dupla de uma função sobre uma região fechada pode ser definida em coordenadas polares. Vamos começar pelo tipo mais simples de região. Seja R a região limitada pelos raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$. Então, seja Δ uma partição dessa região obtida, ao traçarmos raios pela origem e circunferências com centro na origem.* Isso aparece na Figura 1. Obtemos uma malha de sub-regiões a que chamaremos de retângulos "curvos". A norma $\|\Delta\|$ da partição é o comprimento da maior dentre as diagonais dos retângulos "curvos". Seja n o número de sub-regiões e $\Delta_i A$ a medida da área do i-ésimo retângulo "curvo". Como a área da i-ésima sub-região é a diferença entre as áreas de dois setores circulares,

$$\Delta_i A = \tfrac{1}{2}r_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$
$$= \tfrac{1}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Seja $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$, e $\Delta_i\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Então,

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Tomamos o ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ na i-ésima sub-região, onde $\theta_{i-1} \leqslant \bar{\theta}_i \leqslant \theta_i$ e formamamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\,\Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta$$

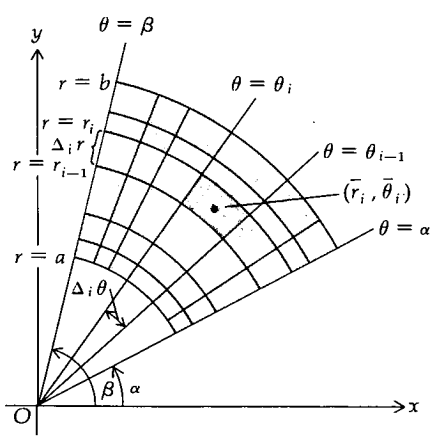


FIGURA 1

*N. do R.: A origem do sistema de coordenadas polares também é denominada *pólo*, em alguns casos.

Pode ser mostrado que se f for contínua na região R, então o limite dessa soma, quando $\|\Delta\|$ tende a zero, existirá e será a integral dupla de f em R. Podemos escrever então:

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{n=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta)\, dA \\ \Leftrightarrow \quad &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta) r\, dr\, d\theta \end{aligned}}$$

Observe que em coordenadas polares, $dA = r\, dr\, d\theta$.

Podemos mostrar que a integral dupla é igual a uma integral iterada, tendo uma dentre as duas formas possíveis:

$$\begin{aligned} \iint_R f(r, \theta)\, dA &= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r, \theta) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r, \theta) r\, d\theta\, dr \end{aligned}$$

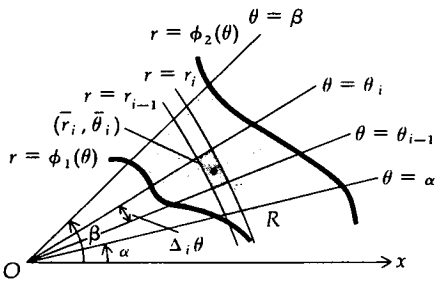


FIGURA 2

Podemos definir a integral dupla de uma função contínua f de duas variáveis em regiões fechadas de coordenadas polares planas de uma maneira diferente da que já foi feita. Por exemplo, considere a região R limitada pelas curvas $r = \phi_1(\theta)$ e $r = \phi_2(\theta)$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções suaves, e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Veja a Figura 2. Na figura, $\phi_1(\theta) \leqslant \phi_2(\theta)$ para todo θ no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Então, podemos mostrar que a integral dupla de f em R existe e é igual a uma integral iterada, e temos

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$$

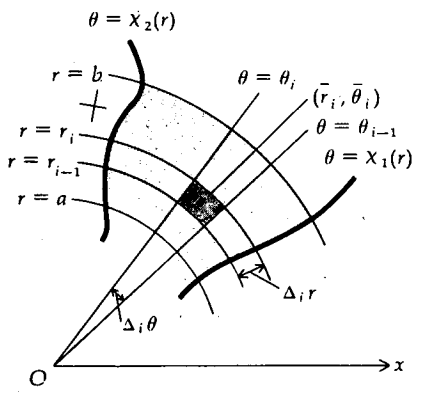


FIGURA 3

Se a região R for limitada pelas curvas $\theta = \chi_1(r)$ e $\theta = \chi_2(r)$, onde χ_1 e χ_2 são funções suaves, e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$, conforme mostra a Figura 3, onde $\chi_1(r) \leqslant \chi_2(r)$ para todo r no intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr$$

Podemos interpretar a integral dupla de uma função em uma região fechada no plano coordenado polar como a medida do volume de um sólido, usando coordenadas cilíndricas. A Figura 4 mostra um sólido tendo como base uma região R em coordenadas polares planas e limitada acima pela superfície $z = f(r, \theta)$, onde f é contínua em R e $f(r, \theta) \geqslant 0$ em R. Tome uma partição de R dando uma malha de n retângulos "curvos". Construa os n sólidos para os quais o i-ésimo deles tem por base o i-ésimo retângulo "curvo" e como medida de sua altura $f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$, onde $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ está na i-ésima sub-região. A Figura 4 mostra o i-ésimo sólido. A medida do volume do i-ésimo sólido é

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

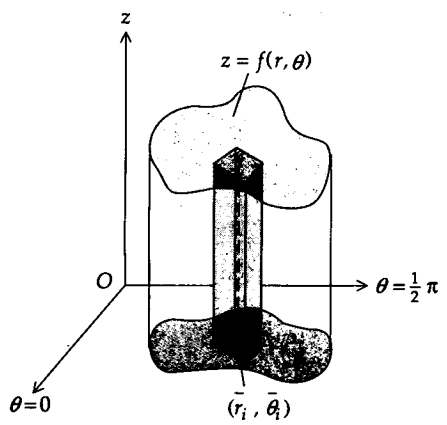


FIGURA 4

A soma das medidas dos volumes dos n sólidos é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$$

Se V for a medida do volume do sólido dado, então

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R f(r, \theta) r\, dr\, d\theta \end{aligned}} \qquad (1)$$

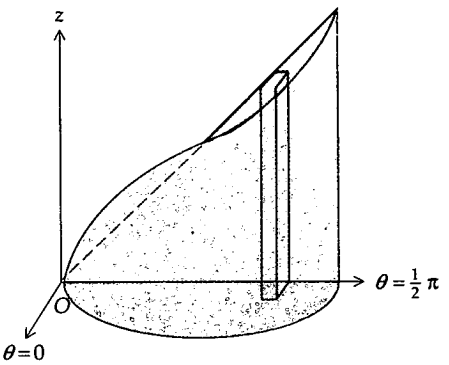


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Ache o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cone $z = r$ e pelo cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

Solução O sólido e o i-ésimo elemento aparecem na Figura 5. Usando (1) com $f(r, \theta) = r$, temos, onde V unidades é o volume do sólido dado,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \operatorname{sen} \theta} r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_0^{3 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta \\ &= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

O volume é, portanto, de 6 unidades de volume.

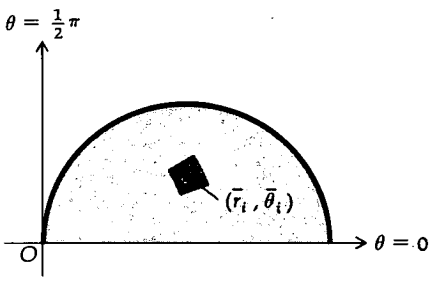


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Ache a massa da lâmina na forma da região interior à semicircunferência $r = a \cos \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ e cuja medida da densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é proporcional à medida de sua distância à origem. A massa é medida em quilogramas, enquanto que a distância é medida em metros.

Solução A Figura 6 mostra um esboço da lâmina e o i-ésimo retângulo "curvo". A densidade de massa por unidade de área no ponto (r, θ) é kr kg-m², onde k é uma constante. Se M kg for a massa da lâmina, então

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{r}_i)\bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^2 \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{3} k a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{3} k a^3 \left[\operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{2}{9} k a^3 \end{aligned}$$

Logo, a massa é $\frac{2}{9} k a^3$ kg.

EXEMPLO 3 Ache o centro de massa da lâmina do Exemplo 2.

Solução Sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as coordenadas cartesianas do centro de massa da lâmina onde, como de costume, o eixo x situa-se ao longo do eixo polar e o eixo

y, ao longo do eixo $\frac{1}{2}\pi$. Seja $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ a representação cartesiana do ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$. Então, se M_x kg-m for o momento de massa da lâmina em relação ao eixo x,

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Substituindo $\bar{y}_i$ por $\bar{r}_i \operatorname{sen} \bar{\theta}_i$, obtemos

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^{\,3} \operatorname{sen} \bar{\theta}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^3 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \\ &= -\tfrac{1}{20}ka^4 \cos^5 \theta \Big]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{20}ka^4 \end{aligned}$$

Se M_y kg-m for o momento de massa da lâmina em relação ao eixo y, então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Substituindo $\bar{x}_i$ por $\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i$, temos

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i^{\,3} \cos \bar{\theta}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}ka^4 \left[\operatorname{sen} \theta - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + \tfrac{1}{5} \operatorname{sen}^5 \theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{2}{15}ka^4 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \frac{\frac{2}{15}ka^4}{\frac{2}{9}ka^3} & &= \frac{\frac{1}{20}ka^4}{\frac{2}{9}ka^3} \\ &= \tfrac{3}{5}a & &= \tfrac{9}{40}a \end{aligned}$$

Assim, o centro de massa está no ponto $(\frac{3}{5}a, \frac{9}{40}a)$.

No exemplo a seguir, mostramos como a área de uma região no plano polar pode ser encontrada por integração dupla.

EXEMPLO 4 Ache, por integração dupla, a área da região compreendida por uma folha da rosácea $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

Solução A Figura 7 mostra a região e o i-ésimo retângulo "curvo". Se A unidades for a área da região, então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i A \\ &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{\operatorname{sen} 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3\theta \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{24} \operatorname{sen} 6\theta \Big]_0^{\pi/3} \\ &= \tfrac{1}{12}\pi \end{aligned}$$

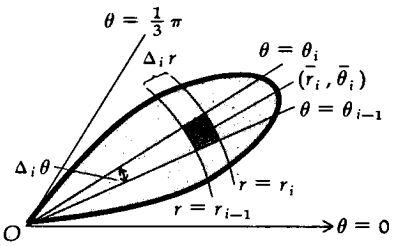


FIGURA 7

Logo, a área é de $\frac{1}{12}\pi$ unidades de área.

Algumas vezes é mais fácil calcular uma integral dupla usando coordenadas polares, em vez de coordenadas cartesianas. Tal situação é o que acontece no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule a integral dupla

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dA$$

onde a região R está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados.

Solução Como $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r \, dr \, d\theta$,

$$\begin{aligned} \iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dA &= \iint_R e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= -\tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[e^{-r^2} \right]_0^a d\theta \\ &= -\tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1) \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 18.4

Nos Exercícios de 1 a 6, use integrais duplas para encontrar a área da região dada.

1. A região dentro da cardióide $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$.
2. Uma folha da rosácea $r = a \cos 2\theta$.
3. A região dentro da cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$ e fora da circunferência $r = a$.
4. A região dentro da circunferência $r = 1$ e fora da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
5. A região dentro do grande laço da *limaçon* $r = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$ e fora do pequeno laço.
6. A região dentro da *limaçon* $r = 3 - \cos\theta$ e fora da circunferência $r = 5\cos\theta$.

Nos exercícios de 7 a 12, ache o volume do sólido dado.

7. O sólido limitado pelo elipsóide $z^2 + 9r^2 = 9$.
8. O sólido delimitado na esfera $z^2 + r^2 = 4$ pelo cilindro $r = 1$.
9. O sólido delimitado na esfera $z^2 + r^2 = 16$ pelo cilindro $r = 4\cos\theta$.
10. O sólido acima do plano polar, limitado pelo cone $z = 2r$ e pelo cilindro $r = 1 - \cos\theta$.
11. O sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - r^2$, pelo cilindro $r = 1$ e pelo plano polar.
12. O sólido acima do parabolóide $z = r^2$ e abaixo do plano $z = 2r\,\text{sen}\,\theta$.

Nos Exercícios de 13 a 19, ache o centro de massa da lâmina dada se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

13. Uma lâmina na forma da região do Exercício 1. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
14. Uma lâmina na forma da região do Exercício 2. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
15. Uma lâmina na forma da região interior à *limaçon* $r = 2 - \cos\theta$. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
16. Uma lâmina na forma da região limitada pela *limaçon* $r = 2 + \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ e pelo eixo polar. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $k\,\text{sen}\,\theta$ kg-m^2.
17. A lâmina do Exercício 16. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é $kr\,\text{sen}\,\theta$ kg-m^2.
18. Uma lâmina na forma da região do Exercício 6. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.
19. Uma lâmina na forma da região do Exercício 5. A densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem.

Nos Exercícios de 20 a 24, ache o momento de inércia da lâmina dada em torno do eixo ou ponto indicado, se a densidade de massa por unidade de área for a indicada. A massa é medida em quilogramas e a distância em metros.

20. Uma lâmina na forma da região limitada pela circunferência $r = \text{sen}\,\theta$, em torno do eixo $\frac{1}{2}\pi$. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é k kg-m^2.
21. A lâmina do Exercício 20, em torno do eixo polar. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é k kg-m^2.
22. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$, em torno da origem. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é k kg-m^2.
23. Uma lâmina na forma da região limitada pela cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$ e pela circunferência $r = 2a\cos\theta$, em torno da origem. A densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto é k kg-m^2.
24. Uma lâmina na forma da região encerrada pela lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$, em torno do eixo polar. A densidade de masa por unidade de área em qualquer ponto é k kg-m^2.
25. Uma lâmina homogênea na forma da região encerrada por um laço da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$. Ache o raio de giração da lâmina em torno de um eixo perpendicular ao plano polar na origem.
26. Uma lâmina na forma da região encerrada pela circunferência $r = 4$, a densidade de massa por unidade de área varia com a distância até a origem. Ache o raio de giração da lâmina em torno de um eixo perpendicular ao plano polar na origem.
27. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$, onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.
28. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados.

18.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

A integral dupla pode ser usada para determinar a área de parte da superfície $z = f(x, y)$ que está acima de uma região fechada R, no plano xy. Para mostrar isso precisamos primeiro definir o que entendemos pela medida dessa área e então obter uma fórmula para calculá-la. Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas em R e suponha que $f(x, y) > 0$ em R. Seja Δ uma parti-

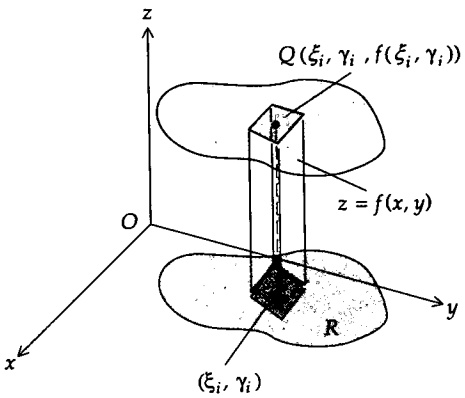


FIGURA 1

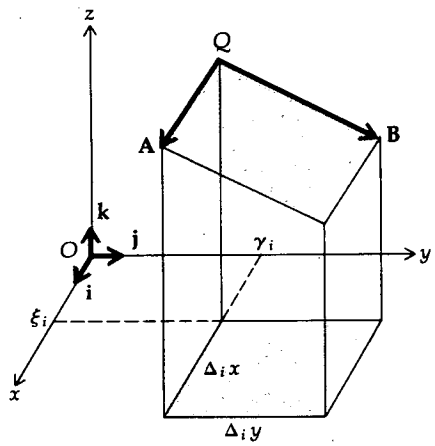


FIGURA 2

ção de R em n sub-regiões retangulares. O i-ésimo retângulo tem dimensões com medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i-ésimo retângulo, e no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ da superfície consideremos o plano tangente à superfície. Vamos projetar verticalmente para cima o i-ésimo retângulo sobre o plano tangente, e seja $\Delta_i\sigma$ a medida da área dessa projeção. A Figura 1 mostra a região R, a parte da superfície sobre R, a i-ésima sub-região retangular de R, e a projeção do i-ésimo retângulo sobre o plano tangente à superfície em Q. O número $\Delta_i\sigma$ é uma aproximação da medida da área da parte da superfície que está acima do i-ésimo retângulo. Como existem n de tais partes, a somatória

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma$$

é uma aproximação da medida σ da área da parte da superfície que está sobre R. Isso nos leva a definir σ da seguinte maneira:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma \tag{1}$$

Agora precisamos obter uma fórmula para calcular o limite na expressão (1). Para fazer isso, achamos uma fórmula para calcular $\Delta_i\sigma$ como a medida da área de um paralelogramo. Para simplificar os cálculos tome o ponto (ξ_i, γ_i) no i-ésimo retângulo, no vértice (x_{i-1}, y_{i-1}). Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ vetores tendo como representações os segmentos de reta orientados, com pontos iniciais em Q, e formando os dois lados adjacentes do paralelogramo cuja área tem medida $\Delta_i\sigma$. Veja a Figura 2. Então, $\Delta_i\sigma = \|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$. Como

$$\mathbf{A} = \Delta_i x\mathbf{i} + f_x(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i x\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \Delta_i y\mathbf{j} + f_y(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i y\mathbf{k}$$

segue que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i y \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta_i x\,\Delta_i y f_x(\xi_i, \gamma_i)\mathbf{i} - \Delta_i x\,\Delta_i y f_y(\xi_i, \gamma_i)\mathbf{j} + \Delta_i x\,\Delta_i y\mathbf{k}$$

Logo,

$$\Delta_i\sigma = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$$
$$= \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\,\Delta_i x\,\Delta_i y$$

Substituindo essa expressão em (1), obtemos

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\,\Delta_i x\,\Delta_i y$$

Esse limite é uma integral dupla que existe em R, em virtude da continuidade de f_x e f_y em R. Temos, então, o teorema a seguir.

18.5.1 TEOREMA Suponhamos que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R, no plano xy. Então, se σ for a medida da área da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R,

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\,dx\,dy$$

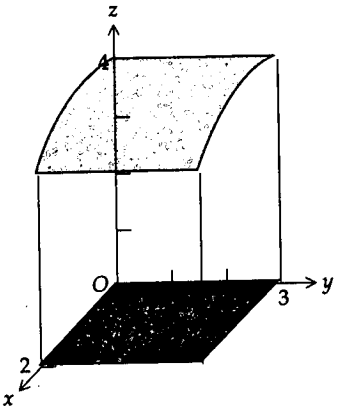


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Ache a área da superfície que é cortada do cilindro $x^2 + z^2 = 16$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$.

Solução A superfície dada está na Figura 3. A região R é o retângulo no primeiro quadrante do plano xy, limitado pelas retas $x = 2$ e $y = 3$. A superfície tem por equação $x^2 + z^2 = 16$. Resolvendo para z obtemos $z = \sqrt{16 - x^2}$. Assim, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. Logo, se σ for a medida da área da superfície, então, do Teorema 18.5.1,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx\, dy \\
&= 4 \int_0^3 \left[\operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{4}x\right]_0^2 dy \\
&= 4 \int_0^3 \tfrac{1}{6}\pi\, dy \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

A área da superfície é, portanto, 2π unidades.

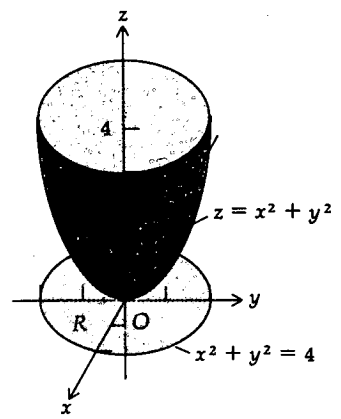


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Ache a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

Solução A Figura 4 mostra a superfície dada. Da equação do parabolóide vemos que $f(x, y) = x^2 + y^2$. A região fechada no plano xy, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$, é a região R. Se σ for a área da superfície em questão, então, do Teorema 18.5.1,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy \\
&= \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Como o integrando contém o termo $4(x^2 + y^2)$, o cálculo da integral dupla fica simplificado com o uso de coordenadas polares. Então, $x^2 + y^2 = r^2$. Como $dx\, dy = dA$, então $dx\, dy = r\, d\, r\, d\theta$. Além disso, os limites para r são de 0 a 2, enquanto que os limites para θ são de 0 a 2π. Logo,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \iint_R \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta \\
&= \tfrac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)
\end{aligned}$$

Assim, a área do parabolóide abaixo do plano dado é $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$.

EXEMPLO 3 Ache a área da parte superior da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solução O hemisfério está na Figura 5. Resolvendo a equação da esfera para z e igualando-o a $f(x, y)$ obtemos

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Como $f_x(x, y) = -x/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $f_y(x, y) = -y/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, f_x e f_y não estão definidos na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ que é a fronteira da região R no plano xy. Além disso, a integral dupla obtida do Teorema 18.5.1 é

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

que é uma integral imprópria, pois o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto da fronteira de R. Podemos superar essa situação considerando a região R' como sendo limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = b^2$, onde $b < a$, tomando, em seguida, o limite quando $b \to a^-$. Além disso, o cálculo fica simplicado se a integral dupla for calculada por uma integral iterada, usando coordenadas polares. Então, se σ for a área do hemisfério,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \lim_{b \to a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr \\
&= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^b \\
&= 2\pi a \lim_{b \to a^-} \left[-\sqrt{a^2 - b^2} + a\right] \\
&= 2\pi a^2
\end{aligned}$$

A área do hemisfério é, portanto, $2\pi a^2$ unidades.

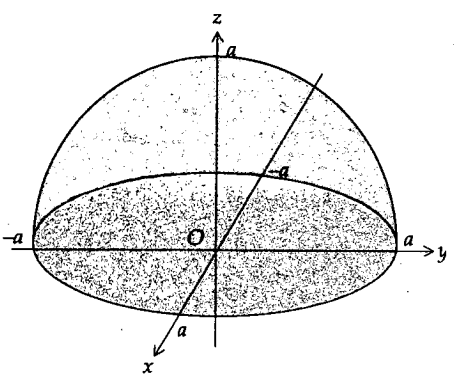


FIGURA 5

Considere agora a curva $y = F(x)$ com $a \leqslant x \leqslant b$, $F(x) > 0$ em $[a, b]$ e F' contínua em $[a, b]$. Se essa curva for girada em torno do eixo x, obtemos uma superfície de revolução. Da Secção 15.6, uma equação dessa superfície é

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \tag{2}$$

A Figura 6 mostra a superfície de revolução. Na figura, o plano xy é o plano do papel; contudo, ainda temos um sistema dextrogiro. Queremos obter uma fórmula para encontrar a medida da área dessa superfície de revolução, usando o Teorema 18.5.1. Das propriedades de simetria, a medida da área da superfície acima do plano xz e em frente ao plano xy é um quarto da medida da área de toda a superfície. Resolvendo (2) para z e desprezando a raiz quadrada negativa, pois $z \geqslant 0$, obtemos $f(x, y) = \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}$. A região R no plano xy é aquela limitada pelo eixo x, pela curva $y = F(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Calculando as derivadas parciais de f, obtemos

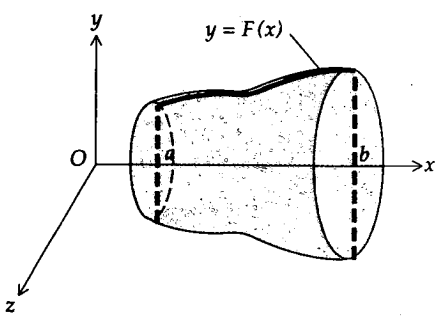


FIGURA 6

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \qquad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

Vemos que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ não existem em parte da fronteira de R (quando $y = -F(x)$ e quando $y = F(x)$). A integral dupla obtida do Teorema 18.5.1 é

$$\iint_R \sqrt{\frac{[F(x)]^2[F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1}\, dy\, dx = \iint_R \frac{F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

Essa integral dupla é imprópria, pois o integrando tem uma descontinuidade infinita em cada ponto da fronteira de R, onde $y = -F(x)$ e $y = F(x)$. Assim, calculamos a integral dupla por uma integral iterada para a qual o integrando interno é impróprio. Se σ for a área da superfície de revolução,

$$\sigma = 4\int_a^b \left[F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}\int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}\right] dx \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} &= \lim_{b \to F(x)^-} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \\ &= \lim_{b \to F(x)^-} \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{F(x)}\right]_0^b \\ &= \lim_{b \to F(x)^-} \operatorname{sen}^{-1} \frac{b}{F(x)} \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Logo, de (3),

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x)\sqrt{[F'(x)]^2 + 1}\, dx$$

Vamos estabelecer esse resultado como um teorema, onde F será substituída por f.

18.5.2 TEOREMA Suponha que a função f seja positiva em $[a, b]$ e f' seja contínua em $[a, b]$. Se σ for a medida da área da superfície de revolução obtida girando-se a curva $y = f(x)$, com $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x, então

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx$$

EXEMPLO 4 Ache a área do parabolóide de revolução gerado pela rotação da parte superior da parábola $y^2 = 4px$, com $0 \leqslant x \leqslant h$, em torno do eixo x.

Solução O parabolóide de revolução aparece na Figura 7. Resolvendo a equação da parábola em y ($y \geqslant 0$) obtemos $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. Assim, se σ unidades for a área da superfície, do Teorema 18.5.2, com $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$,

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2}\sqrt{\frac{p}{x} + 1}\, dx \\ &= 4\pi p^{1/2}\int_0^h \sqrt{p + x}\, dx \\ &= \tfrac{8}{3}\pi p^{1/2}(p + x)^{3/2}\Big]_0^h \\ &= \tfrac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p + h)^3} - p^2)\end{aligned}$$

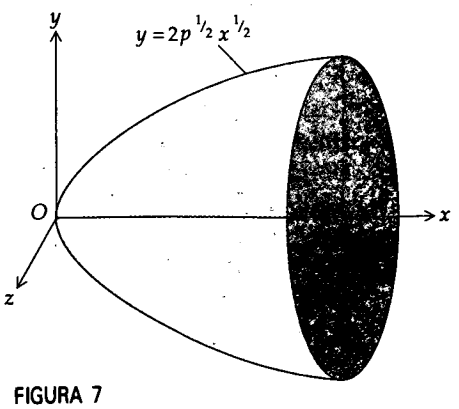


FIGURA 7

A área do parabolóide de revolução é, portanto, $\frac{8}{3}\pi(\sqrt{p(p+h)^3} - p^2)$ unidades.

EXERCÍCIOS 18.5

1. Ache a área da superfície delimitada no plano $2x + y + z = 4$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.
2. Ache a área da superfície delimitada no plano $z - 2x - y = 5$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$.
3. Ache a área da parte da superfície no plano $36x + 16y + 9z = 144$, delimitada pelos planos coordenados.
4. Ache a área da superfície que é delimitada no plano $z = ax + by$ pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, onde $a > 0$ e $b > 0$.
5. Ache a área da superfície no primeiro octante, delimitada no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ pelo plano $x = z$.
6. Ache a área da superfície que é delimitada no cilindro $x^2 + y^2 = 25$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 1$ e $z = 3$.
7. Seja R a região triangular no plano xy, com vértices em (0, 0, 0), (0, 4, 0) e (2, 4, 0). Ache a área da superfície da parte do gráfico de $z - 5x - y^2 = 2$ que está sobre R.
8. Ache a área da superfície no primeiro octante, delimitada no cone $x^2 + y^2 = z^2$ pelo plano $x + y = 4$.
9. Ache a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ que é delimitada por dentro do cone $y^2 + z^2 = x^2$.
10. Ache a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
11. Ache a área da parte da superfície esferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide de $x^2 + y^2 = 3z$.
12. Para a esfera e o parabolóide do Exercício 11, ache a área da parte da superfície do parabolóide que está dentro da esfera.
13. Ache a área da superfície da parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
14. Ache a área da superfície da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
15. Ache a área da superfície da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre o cilindro $y^2 = x$ e o plano $x - y = 2$.
16. Ache a área da superfície da parte do sólido $xy = az$ no primeiro octante que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
17. O segmento de reta da origem ao ponto (a, b) é girado em torno do eixo x. Ache a área da superfície do cone assim gerado.
18. Deduza a fórmula para a área da superfície de uma esfera obtida girando-se uma semicircunferência em torno de seu diâmetro.
19. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se o arco da catenária $y = a \cosh (x/a)$ de $x = 0$ até $x = a$, em torno do eixo y.
20. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se a catenária do Exercício 19 em torno do eixo x.
21. O laço da curva $18y^2 = x(6 - x)^2$ é girado em torno do eixo x. Ache a área da superfície de revolução assim gerada.
22. Ache a área da superfície de revolução obtida girando-se o arco da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ até $x = 2$ em torno do eixo y.
23. Ache a área da parte do plano $x = z$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 6$ e dentro do hiperbolóide $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$.
24. Ache a área da superfície delimitada do parabolóide hiperbólico $y^2 - x^2 = 6z$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 36$.
25. Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R do plano xy. Mostre que se σ for a medida da área da parte da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R, então

$$\sigma = \iint_R \|\nabla g(x, y, z)\| \, dx \, dy$$

onde $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

18.6 A INTEGRAL TRIPLA

A extensão da integral dupla para a tripla é análoga à extensão da integral simples para a dupla. O tipo mais simples de região em R^3 é um paralelepípedo retangular, limitado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ e $z = c_2$, com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ e $c_1 < c_2$. Seja f uma função de três variáveis e suponha que f seja contínua acima da região S. Uma partição de S é formada ao dividirmos S em caixas retangulares, através de planos paralelos aos planos coordenados. Denotamos tal partição por Δ e supomos que n seja o número de caixas. Seja $\Delta_i V$ a medida do volume da i-ésima caixa. Escolha um ponto arbitrário (ξ_i, γ_i, μ_i) na i-ésima caixa. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \, \Delta_i V \tag{1}$$

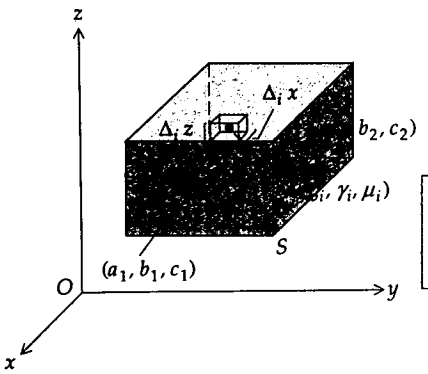


FIGURA 1

Consulte a Figura 1, que mostra o paralelepípedo junto com a i-ésima caixa. A *norma* $\|\Delta\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal das caixas. Se as somas da forma (1) tendem a um limite quando $\|\Delta\|$ tende a zero para qualquer escolha dos pontos (ξ_i, γ_i, μ_i), então chamamos esse limite de **integral tripla** de f em S e escrevemos

$$\boxed{\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV}$$

Uma condição suficiente para a existência da integral tripla de f em S é que f seja contínua em S.

Da mesma forma que uma integral dupla é igual a uma integral iterada duas vezes, a integral tripla é o mesmo que uma integral iterada três vezes. Quando S for o paralelepípedo descrito acima e f for contínua em S, então

$$\boxed{\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx}$$

EXEMPLO 1 Calcule a integral tripla

$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz\, dV$$

se S for o paralelepípedo retangular, limitado pelos planos $x = \pi$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $z = \frac{1}{3}\pi$ e pelos planos coordenados.

Solução

$$\begin{aligned}
\iiint_S xy \operatorname{sen} yz\, dV &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} xy \operatorname{sen} yz\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Big[-x \cos yz\Big]_0^{\pi/3} dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} x(1 - \cos \tfrac{1}{3}\pi y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi} x\left(y - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi y\right)\Bigg]_0^{\pi/2} dx \\
&= \int_0^{\pi} x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6}\right)\Bigg]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\pi^2 - 6 \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6}\right)
\end{aligned}$$

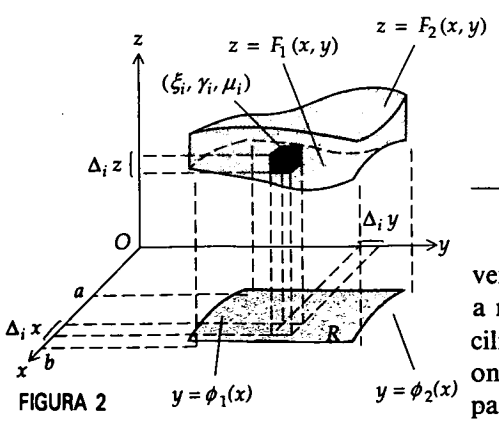


FIGURA 2

Vamos discutir agora a integral tripla de uma função contínua de três variáveis numa região em R^3 que não seja um paralelepípedo retangular. Seja S a região tridimensional fechada, limitada pelos planos $x = a$ e $x = b$, pelos cilindros $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$ e pelas superfícies $z = F_1(x, y)$ e $z = F_2(x, y)$, onde as funções ϕ_1, ϕ_2, F_1 e F_2 são suaves (isto é, têm derivadas ou derivadas parciais contínuas). Veja a Figura 2. Construa planos paralelos aos planos coor-

denados, formando, desse modo, um conjunto de paralelepípedos que cubram completamente S. Os paralelepípedos que estão inteiramente dentro de S ou sobre a fronteira de S formam uma **partição** Δ de S. Escolha algum sistema de numeração, de tal forma que eles fiquem enumerados de 1 até n. A norma $\|\Delta\|$ dessa partição de S é o comprimento da maior diagonal de qualquer paralelepípedo pertencente à partição. Seja $\Delta_i V$ a medida do volume do i-ésimo paralelepípedo. Seja f a função de três variáveis, contínua em S, e seja (ξ_i, γ_i, μ_i) um ponto arbitrário no i-ésimo paralelepípedo. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V$$

Se essa soma tiver um limite quando $\|\Delta\|$ tende a zero, e se esse limite for independente da escolha dos planos da partição e dos pontos arbitrários (ξ_i, γ_i, μ_i) em cada paralelepípedo, então esse limite será chamado de **integral tripla** de f em S e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV \tag{2}$$

Provamos em Cálculo Avançado que uma condição suficiente para a existência do limite em (2) é que f seja contínua em S. Além disso, sob as condições impostas às funções ϕ_1, ϕ_2, F_1 e F_2, segundo as quais elas devem ser suaves, podemos provar também que a integral tripla pode ser calculada pela integral iterada

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Da mesma forma que a integral dupla pode ser interpretada como a medida da área de uma região plana quando $f(x, y) = 1$ em R, a integral tripla pode ser interpretada como a medida do volume de uma região tridimensional. Se $F(x, y, z) = 1$ em S, então (2) torna-se

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV$$

e a integral tripla é a medida do volume da região S.

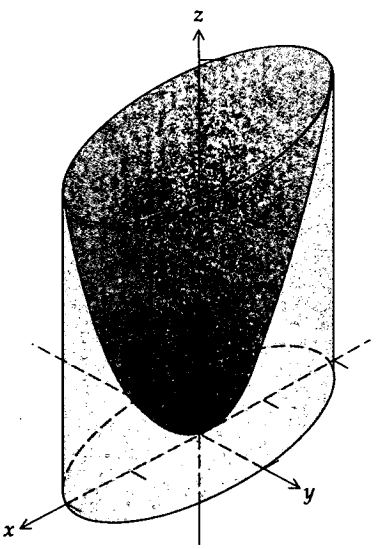


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache, por integração tripla, o volume do sólido do Exemplo 3, da Secção 18.2.

Solução O sólido está acima do plano xy, limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Ele aparece na Figura 3. Se V unidades for o volume do sólido, então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \end{aligned}$$

onde S é a região limitada pelo sólido. Os limites de z são de 0 (o valor de z no plano xy) até $x^2 + 4y^2$ (o valor de z no parabolóide elíptico). Os limites de y para um quarto do volume vão de 0 (valor de y no plano xz) até $\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

(o valor de y no cilindro). Os limites de x no primeiro octante vão de 0 até 2. Calculamos a integral tripla por uma integral iterada, obtendo

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{x^2+4y^2} dz\, dy\, dx \\ &= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \end{aligned}$$

Essa é a mesma integral iterada duas vezes, obtida no Exemplo 3, da Secção 18.2, e o restante da solução é o mesmo.

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy.

Solução O sólido aparece na Figura 4. Os limites de z na integral iterada são de 0 a $8 - x - y$ (o valor de z no plano). Os limites de y são obtidos da região de fronteira no plano xy que é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Assim, esses limites vão de $-\sqrt{25 - x^2}$ a $\sqrt{25 - x^2}$. Os limites de x vão de -5 a 5. Se V unidades for o volume pedido,

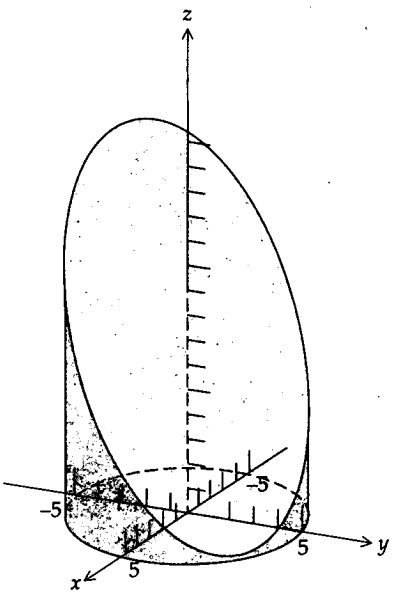


FIGURA 4

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \\ &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-5}^{5} \left[(8 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 2\int_{-5}^{5} (8 - x)\sqrt{25 - x^2}\, dx \\ &= 16\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx + \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}(-2x)\, dx \\ &= 16(\tfrac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \tfrac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{5}x) + \tfrac{2}{3}(25 - x^2)^{3/2}\Big]_{-5}^{5} \\ &= 200\pi \end{aligned}$$

O volume é, portanto, 200π unidades.

EXEMPLO 4 Ache a massa do sólido acima do plano xy, limitado pelo cone $9x^2 + z^2 = y^2$ e pelo plano $y = 9$, se a medida da densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto (x, y, z) do sólido for proporcional à medida da distância do ponto ao plano xy. A densidade de massa por unidade de volume é medida em quilogramas por metro cúbico.

Solução A Figura 5 mostra o sólido. Seja M kg a massa do sólido. A densidade em qualquer ponto (x, y, z) do sólido é kz kg-m^3, onde k é uma constante. Então, se (ξ_i, γ_i, μ_i) for um ponto qualquer no i-ésimo paralelepípedo

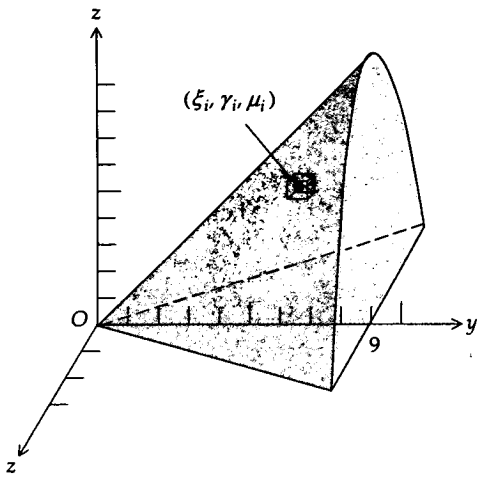


FIGURA 5

retangular da partição,

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\mu_i \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S kz \, dV \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2 - 9x^2}} z \, dz \, dx \, dy \\
&= 2k \int_0^9 \int_0^{y/3} \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{y^2 - 9x^2}} dx \, dy \\
&= k \int_0^9 \int_0^{y/3} (y^2 - 9x^2) \, dx \, dy \\
&= \tfrac{2}{9}k \int_0^9 y^3 \, dy \\
&= \tfrac{729}{2}k
\end{aligned}
$$

A massa é, portanto, $\frac{729}{2}$ k kg.

EXERCÍCIOS 18.6

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral iterada.

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x \, dz \, dy \, dx$
2. $\int_1^2 \int_0^x \int_1^{x+xy} xy \, dz \, dy \, dx$
3. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x + y + z) \, dz \, dy \, dx$
4. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z \, dx \, dz \, dy$
5. $\int_{-1}^0 \int_e^{2e} \int_0^{\pi/3} y \ln z \operatorname{tg} x \, dx \, dz \, dy$
6. $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z \, dz \, dx \, dy$
7. $\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z} \, dy \, dx \, dz$
8. $\int_0^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{z}{x^2 + z^2} \, dx \, dz \, dy$

Nos Exercícios de 9 a 18, calcule a integral tripla.

9. $\iiint_S y \, dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro formado pelos planos $12x + 20y + 15z = 60$ e pelos planos coordenados.
10. $\iiint_S (x^2 + z^2) \, dV$, se S for a mesma região do Exercício 9.
11. $\iiint_S z \, dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.
12. $\iiint_S yz \, dV$, se S for a mesma região do Exercício 11.
13. $\iiint_S xy \, dV$, se S for o paralelepípedo retangular no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$.
14. $\iiint_S x \, dV$, se S for o tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.
15. $\iiint_S dV$, se S for a região limitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$.
16. $\iiint_S y^2 \, dV$, se S for a região limitada pelos cilindros $x^2 + y = 1$ e $z^2 + y = 1$ e pelo plano $y = 0$.
17. $\iiint_S (xz + 3z) \, dV$, se S for a região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x + y = 3$, $z = 0$ e $y = 0$, acima do plano xy.
18. $\iiint_S xyz \, dV$, se S for a região limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios de 19 a 32, use a integração tripla.

19. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado abaixo pelo plano xy, acima pelo plano $z = y$ e lateralmente pelo cilindro $y^2 = x$ e pelo plano $x = 1$.
20. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 16$, pelo plano $x + y = 2$ e pelos três planos coordenados.
21. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + 2z = 4$ e pelos três planos coordenados.

22. Ache o volume do sólido limitado pelo cone elíptico $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ e pelo plano $z = 1$.
23. Ache o volume do sólido acima do parabolóide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ e abaixo do cilindro $x^2 + z = 4$.
24. Ache o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
25. Ache o volume do sólido delimitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Ache o volume do sólido limitado pelos cilindros $z = 5x^2$ e $z = 3 - x^2$, e pelos planos xz e $y + z = 4$.
27. Ache a massa do sólido homogêneo, limitado pelo cilindro $z = 4 - x^2$, pelo plano $y = 5$ e pelos planos coordenados, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for k kg/m^3.
28. Ache a massa do sólido encerrado pelo tetraedro formado pelo plano $100x + 25y + 16z = 400$ e pelos planos coordenados, se a densidade de massa por unidade de volume variar com a distância ao plano yz. A densidade de massa por unidade de volume é medida em quilogramas por metro cúbico.
29. Ache a massa do sólido limitado pelos cilindros $x = z^2$ e $y = x^2$ e pelos planos $z = 1$, $y = 0$ e $z = 0$. A densidade de massa por unidade de volume varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados e é medida em quilogramas por metro cúbico.
30. Ache a massa do sólido limitado pela superfície $z = 4 - 4x^2 - y^2$ e pelo plano xy. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto do sólido é $3z|x|$ kg-m^3.
31. Ache a massa do sólido limitado pela superfície $z = xy$ e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto do sólido é $3\sqrt{x^2 + y^2}$ kg-m^3.
32. Um sólido tem o formato de um cilindro circular reto, sendo r o raio da base e h a altura, ambos medidos em metros. Ache a massa do sólido, se a densidade de massa por unidade de volume varia com a distância a uma das bases. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.

18.7 A INTEGRAL TRIPLA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Se uma região S em R^3 tem um eixo de simetria, as integrais triplas em S são mais facilmente calculadas se usarmos coordenadas cilíndricas. Se houver simetria em relação a um ponto, é conveniente escolher o ponto como a origem e usar coordenadas esféricas. Nessa secção discutiremos a integral tripla nessas coordenadas e vamos aplicá-las a problemas físicos.

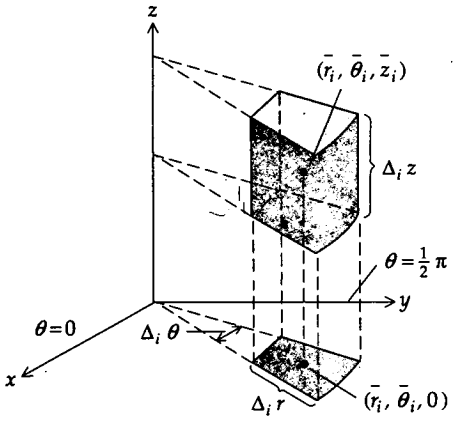


FIGURA 1

Para definir a integral tripla em coordenadas cilíndricas, construímos uma partição da região S através de planos que passem pelo eixo z, pelos planos perpendiculares ao eixo z e pelos cilíndricos circulares retos, tendo z como seu eixo. Uma sub-região típica é mostrada na Figura 1. Os elementos da partição construída estão inteiramente em S. Esse tipo de partição é chamado de **partição cilíndrica**. A medida do comprimento da maior "diagonal" de qualquer uma das sub-regiões é chamada de **norma** da partição. Seja n o número de sub-regiões da partição e $\Delta_i V$ a medida do volume da i-ésima sub-região. A medida da área da base é $\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta$, onde $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$. Assim, se $\Delta_i z$ for a medida da altura da i-ésima sub-região,

$$\Delta_i V = \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z$$

Seja f uma função de r, θ e z e suponhamos que f seja contínua em S. Vamos escolher um ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ na i-ésima sub-região, de tal forma que $\theta_{i-1} \leqslant \bar{\theta}_i \leqslant \theta_i$ e $z_{i-1} \leqslant \bar{z}_i \leqslant z_i$. Formamos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\, \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z \tag{1}$$

Quando a norma de Δ tende a zero, pode ser mostrado, sob condições convenientes em S, que o limite dessa soma existe. Esse limite é chamado de **integral tripla em coordenadas cilíndricas** da função f em S e escrevemos

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\, \Delta_i V = \iiint_S f(r, \theta, z)\, dV \\ \Leftrightarrow\ &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)\bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta\, \Delta_i z = \iiint_R f(r, \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz \end{aligned}}$$

Observe que em coordenadas cilíndricas, $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. Podemos calcular a integral tripla através de uma integral iterada. Por exemplo, suponhamos que a região S em R^3 seja limitada pelos planos $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com $\alpha < \beta$, pelos cilindros $r = \lambda_1(\theta)$ e $r = \lambda_2(\theta)$, onde λ_1 e λ_2 são suaves em $[\alpha, \beta]$ e $\lambda_1(\theta) \leqslant \lambda_2(\theta)$ para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, e pelas superfícies $z = F_1(r, \theta)$ e $z = F_2(r, \theta)$, onde F_1 e F_2 são funções de duas variáveis suaves numa região R do plano polar, limitada pelas curvas $r = \lambda_1(\theta)$, $r = \lambda_2(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Suponhamos também que $F_1(r, \theta) \leqslant F_2(r, \theta)$ para todo ponto (r, θ) em R. Então, a integral tripla pode ser calculada por uma integral iterada através da fórmula

$$\iiint_S f(r, \theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz = \int_\alpha^\beta \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r\,dz\,dr\,d\theta$$

Existem cinco outras integrais iteradas que podem ser usadas para calcular a integral tripla, pois há seis permutações possíveis das variáveis r, θ e z.

As integrais triplas em coordenadas cilíndricas são especialmente úteis no cálculo do momento de inércia de um sólido em relação ao eixo z, uma vez que a distância do eixo z a um ponto no sólido é determinada pela coordenada r.

EXEMPLO 1 Um sólido homogêneo, com a forma de um cilindro circular reto, tem um raio de 2 m e uma altura de 4 m. Ache o momento de inércia do sólido em relação ao eixo x.

Solução Vamos escolher os planos coordenados, de tal forma que o plano xy seja o plano da base do sólido e o eixo z seja o eixo do sólido. A Figura 2 mostra a parte do sólido no primeiro octante, bem como a i-ésima sub-região de uma partição cilíndrica. Usando coordenadas cilíndricas e tomando o ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ na i-ésima sub-região com k kg-m^3 como a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto, então se I_z kg-m^2 for o momento de inércia do sólido em relação ao eixo z,

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^2 k\,\Delta_i V \\ &= \iiint_S k r^2\,dV \end{aligned}$$

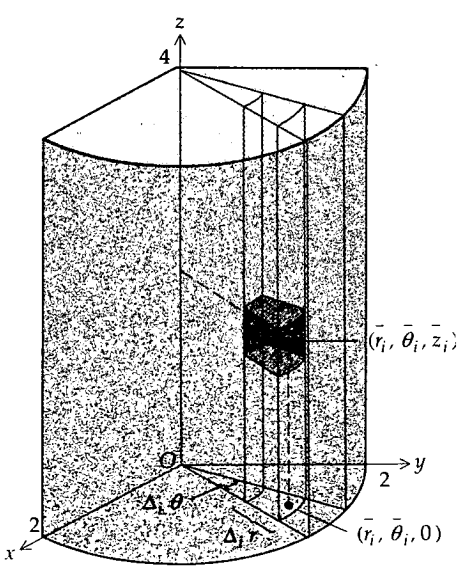


FIGURA 2

Existem seis formas diferentes possíveis de ordem de integração. A Figura 2 mostra a ordem $dz\,dr\,d\theta$. Usando-a, temos

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_S k r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 r^3\,dz\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Na primeira integração, as sub-regiões são somadas de $z = 0$ a $z = 4$ e transformam-se numa coluna. Na segunda integração, as colunas são somadas de $r = 0$ a $r = 2$ e transformam-se em uma porção do cilindro, com a forma de uma cunha. Na terceira integração, a porção em cunha é girada de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$; isso faz com que a cunha percorra toda a região tridimensional

no primeiro octante. Para obter o volume total, multiplicamos por 4. Efetuando a integração, obtemos

$$\begin{aligned} I_z &= 16k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

Logo, o momento de inércia é 32 $k\pi$ kg-m².

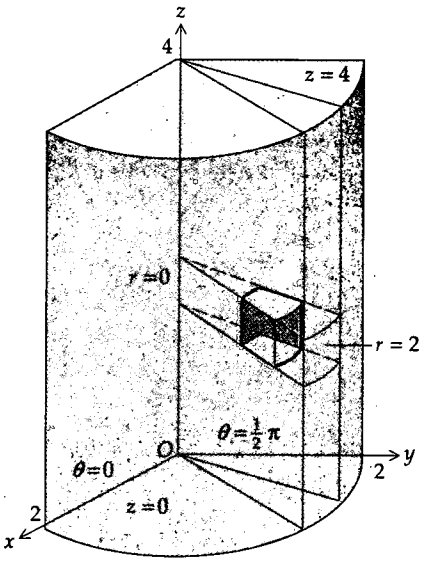


FIGURA 3

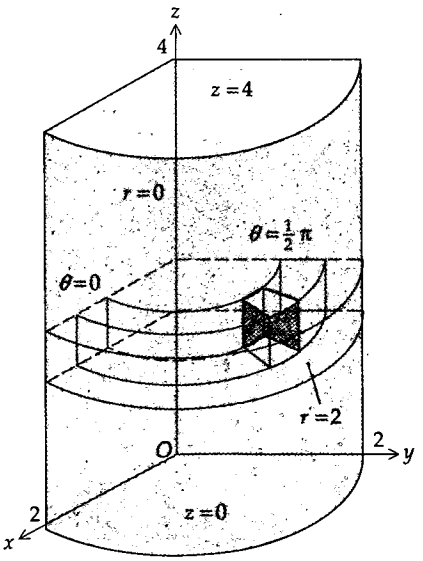


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Resolva o Exemplo 1, usando a ordem de integração (a) $dr\,dz\,d\theta$; (b) $d\theta\,dr\,dz$.

Solução

(a) A Figura 3 representa a ordem de integração $dr\,dz\,d\theta$. Ela mostra que as sub-regiões somadas de $r = 0$ até $r = 2$ dão um setor em forma de cunha. Então, somamos de $z = 0$ até $z = 4$ para obter uma porção em forma de cunha, sendo ela girada de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$ para cobrir o primeiro octante. Então,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^2 r^3 \, dr \, dz \, d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

(b) A Figura 4 representa a ordem $d\theta\,dr\,dz$. Ela mostra que as sub-regiões somadas de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{1}{2}\pi$ dão um anel interior ao cilindro. Esses anéis são somados de $r = 0$ a $r = 2$, resultando uma porção horizontal do cilindro. As porções horizontais são somadas de $z = 0$ a $z = 4$. Logo,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^3 \, d\theta \, dr \, dz \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Ache a massa de um hemisfério sólido com raio a m, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo do sólido e for medida em quilogramas por metro cúbico.

Solução Se escolhermos os planos coordenados de tal forma que a origem seja o centro da esfera e o eixo z seja o eixo do sólido, então uma equação da superfície hemisférica acima do plano xy será $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. A Figura 5 mostra essa superfície e o sólido, bem como a i-ésima sub-região de uma partição cilíndrica. Uma equação do hemisfério em coordenadas cilíndricas é $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Se $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ for um ponto na i-ésima sub-região, a densidade nesse ponto será $k\bar{r}_i$ kg-m³, onde k é uma constante; se M kg for a massa do sólido, então

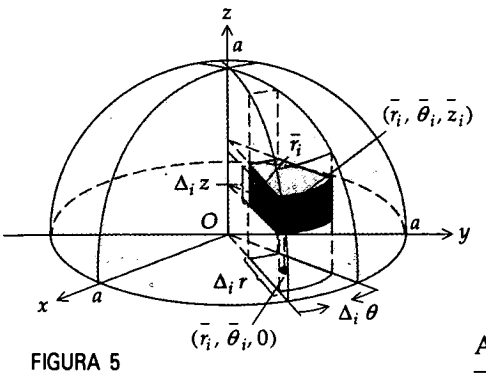


FIGURA 5

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{r}_i \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S kr \, dV \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{4} r (a^2 - r^2)^{3/2} + \tfrac{1}{8} a^2 r \sqrt{a^2 - r^2} + \tfrac{1}{8} a^4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\
&= \tfrac{1}{16} k a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{1}{8} k a^4 \pi^2
\end{aligned}
$$

A massa do hemisfério sólido é, portanto, $\frac{1}{8} ka^4 \pi^2$ kg.

EXEMPLO 4 Ache o centro de massa do sólido do Exemplo 3.

Solução Seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ a representação cartesiana do centro de massa. Dada a simetria, $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$. Precisamos calcular $\bar{z}$. Se M_{xy} kg-m for o momento de massa do sólido em relação ao plano xy, então

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i (k\bar{r}_i) \, \Delta_i V \\
&= \iiint_S kzr \, dV \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} zr^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{15} k a^5 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{2}{15} k a^5 \pi
\end{aligned}
$$

Como $M\bar{z} = M_{xy}$, temos que $\bar{z} = M_{xy}/M$; assim,

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{\frac{2}{15} k a^5 \pi}{\frac{1}{8} k a^4 \pi^2} \\
&= \frac{16}{15\pi} a
\end{aligned}
$$

O centro de massa está, portanto, sobre o eixo do sólido a uma distância de $\dfrac{16\,a}{15\pi}$ m do plano da base.

Vamos definir agora a integral tripla em coordenadas esféricas. Uma partição esférica da região tridimensional S é feita pelos planos contendo o eixo z, esferas com centro na origem e cones circulares com vértices na origem, e o ei-

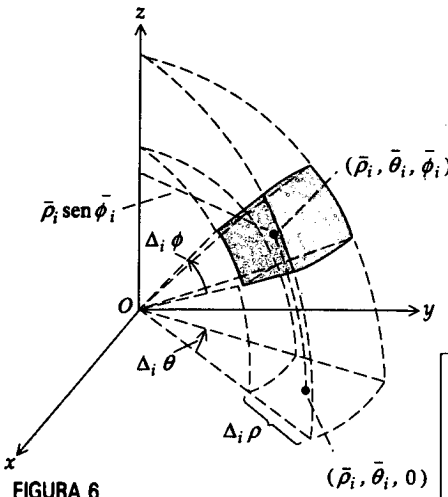


FIGURA 6

xo z como seu eixo. Uma sub-região típica dessa partição aparece na Figura 6. Se $\Delta_i V$ for a medida do volume da i-ésima sub-região e $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ for um ponto dela, podemos obter uma aproximação a $\Delta_i V$ considerando a região como se fosse em paralelepípedo retangular e, tomando o produto das medidas de suas três dimensões. Essas medidas são $\bar{\rho}_i \operatorname{sen} \bar{\phi}_i \Delta_i \theta$, $\bar{\rho}_i \Delta_i \phi$ e $\Delta_i \rho$. As Figuras 7 e 8 mostram como são obtidas as duas primeiras medidas, enquanto que a Figura 6 mostra a medida da dimensão $\Delta_i \rho$. Logo,

$$\Delta_i V = \bar{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \, \Delta_i \theta \, \Delta_i \phi$$

A integral tripla em coordenadas esféricas de uma função f em S é dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \, \Delta_i V = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) \, dV \\ \Leftrightarrow \quad &\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \bar{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \, \Delta_i \theta \Delta_i \phi = \iiint_R f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}}$$

Observe que em coordenadas esféricas, $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. As integrais triplas podem ser calculadas por uma integral iterada.

As coordenadas esféricas são especialmente úteis em alguns problemas envolvendo esferas, como nos exemplos a seguir.

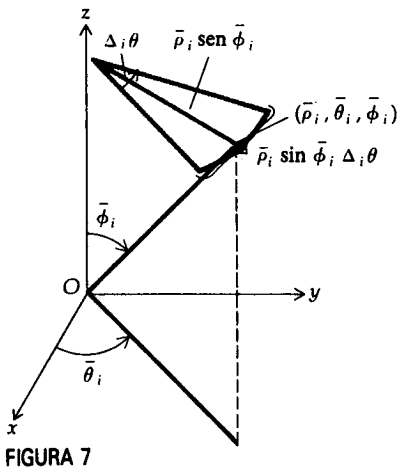


FIGURA 7

EXEMPLO 5 Ache a massa do hemisfério sólido do Exemplo 3, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao centro da base.

Solução Se $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ for um ponto na i-ésima sub-região de uma partição esférica, a densidade nesse ponto será $k\bar{\rho}_i$ kg-m^3, onde k é uma constante. Se M kg for a massa do sólido, então

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{\rho}_i \, \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\rho \, dV \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} \Big[-\cos \phi \Big]_0^{\pi/2} d\theta \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} a^4 k \pi \end{aligned}$$

Logo, a massa do hemisfério sólido é $\frac{1}{2} a^4 k \pi$ kg.

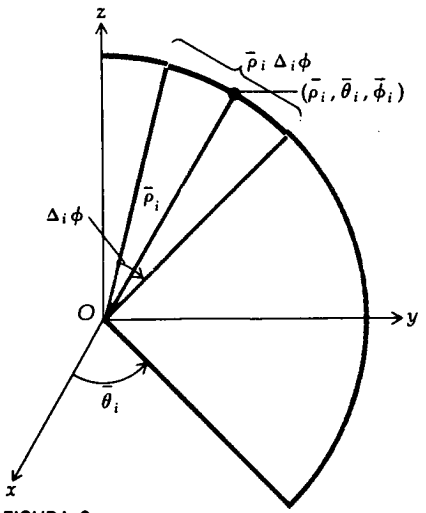


FIGURA 8

É interessante comparar a solução do Exemplo 5, que usa coordenadas esféricas, com a solução obtida com coordenadas cartesianas. Pelo último método, uma partição de S é feita se dividirmos S em caixas retangulares, através de planos paralelos

aos planos coordenados. Se (ξ_i, γ_i, μ_i) for um ponto qualquer da i-ésima sub-região e como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\sqrt{\xi_i^2 + \gamma_i^2 + \mu_i^2}\, \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV \\ &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

Os cálculos envolvidos nessa integração são, obviamente, muito mais complicados do que aqueles com coordenadas esféricas.

EXEMPLO 6 Um sólido homogêneo é limitado acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = \alpha$, onde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Ache o momento de inércia do sólido em torno do eixo z. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é k kg-m³.

Solução O sólido está na Figura 9. Vamos fazer uma partição esférica do sólido e seja $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ um ponto na i-ésima sub-região. A medida da distância do ponto $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ ao eixo z é $\bar{\rho}_i \operatorname{sen} \bar{\phi}_i$. Assim, se I_z kg-m² for o momento de inércia do sólido dado em torno do eixo z, então

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \operatorname{sen} \bar{\phi}_i)^2 k\, \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi\, dV \\ &= k \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \\ &= \tfrac{1}{5}ka^5 \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \phi\, d\theta\, d\phi \\ &= \tfrac{2}{5}ka^5\, \pi \int_0^\alpha \operatorname{sen}^3 \phi\, d\phi \\ &= \tfrac{2}{5}ka^5\pi \left[-\cos \phi + \tfrac{1}{3}\cos^3 \phi \right]_0^\alpha \\ &= \tfrac{2}{15}ka^5\pi(\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha + 2) \end{aligned}$$

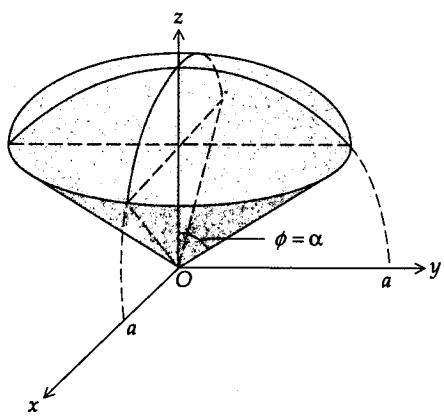


FIGURA 9

O momento de inércia do sólido em torno do eixo z é, portanto $\frac{2}{15}ka^5\pi(\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha + 2)$ kg-m².

EXERCÍCIOS 18.7

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule a integral iterada.

1. $\int_0^{\pi/4} \int_0^a \int_0^{r\cos\theta} r \sec^3 \theta\, dz\, dr\, d\theta$
2. $\int_0^{\pi/4} \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{2\cos\theta} \int_0^{r\operatorname{sen}\theta} r^2 \cos \theta\, dz\, dr\, d\theta$
3. $\int_0^{\pi} \int_2^4 \int_0^1 re^z\, dz\, dr\, d\theta$
4. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
5. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2a\cos\phi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi$
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\phi} \int_0^{a\operatorname{cosec}\theta} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$
7. Ache o volume do sólido encerrado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ usando (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

8. Se S for o sólido no primeiro octante, limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e pelos planos coordenados, calcule a integral tripla $\iiint_S xyz\, dV$ por três métodos: (a) usando coordenadas esféricas; (b) usando coordenadas retangulares; (c) usando coordenadas cilíndricas.

Nos Exercícios de 9 a 16, use coordenadas cilíndricas.

9. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelo plano $z = x$.
10. Ache o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 + z = 1$ e pelo plano xy.
11. Ache o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 + z = 12$ e pelo plano $z = 8$.
12. Ache o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 2z$ e pelo plano xy.
13. Ache a massa do sólido limitado por uma esfera de raio a m, se a densidade de massa por unidade de volume varia com o quadrado da distância ao centro. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.
14. Ache a massa do sólido no primeiro octante interno ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e sob a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. A densidade de massa por unidade de volume varia com a distância do plano xy, sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
15. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pelo cilindro $r = 5$, pelo cone $z = r$ e pelo plano xy. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é k g-cm^3.
16. Ache o momento de inércia do sólido limitado por um cilindro circular reto de h m de altura e a m de raio em relação ao eixo do cilindro. A densidade de massa por unidade de volume varia com a distância ao eixo do cilindro, sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
17. Ache a massa do sólido no Exercício 13, usando coordenadas esféricas.
18. Use coordenadas esféricas para encontrar o centro de massa do sólido limitado pelo hemisfério do Exemplo 5. A densidade de massa por unidade de volume é igual à do Exemplo 5.

Nos Exercícios de 19 a 22, use coordenadas esféricas.

19. Ache o volume do sólido interno à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e acima do cone $x^2 + y^2 = z^2$.
20. Ache o volume do sólido interno à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ e acima do parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
21. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo interno ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, abaixo do cone $x^2 + y^2 = z^2$ e acima do plano xy. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é k kg-m^3.
22. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. A densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto é k g-cm^3.

Nos Exercícios de 23 a 28, use o sistema de coordenadas que você julgar melhor para o problema.

23. Ache a massa de um hemisfério sólido de raio 2 m, se a densidade de massa por unidade de volume varia com a distância ao centro da base, sendo medida em quilogramas por metro cúbico.
24. Ache a massa do sólido homogêneo interior ao parabolóide $3x^2 + 3y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$, se a densidade de massa por unidade de volume constante for k kg-m^3.
25. Ache o momento de inércia em torno de um diâmetro do sólido entre duas esferas concêntricas, tendo raios a e $2a$ cm. A densidade de massa por unidade de volume varia com o inverso do quadrado da distância ao centro, sendo medida em gramas por centímetro cúbico.
26. Ache a massa do sólido do Exercício 25. A densidade de massa por unidade de volume é a mesma que a do Exercício 25.
27. Ache o centro de massa do sólido interior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$. A densidade de massa por unidade de volume constante é k kg-m^3.
28. Ache o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido homogêneo do Exercício 27.

Nos Exercícios de 29 a 32, calcule a integral iterada, usando coordenadas esféricas ou cilíndricas.

29. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx\, dz$
30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz\, dy\, dx$
31. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz\, dx\, dy$
32. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$

18.8 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Nesse parágrafo faremos um estudo geral do cálculo de integrais múltiplas através de mudanças de variáveis, generalizando o que já foi visto de mudanças para coordenadas polares, esféricas e cilíndricas.

Trataremos do seguinte problema: dada uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dxdy$ ou uma integral tripla $\iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz$ encontre uma transformação do plano no plano do tipo $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ou no espaço $u = u(x, y, z)$,

$v = v(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ que nos permita, trocando as variáveis iniciais pelas novas, calcular efetivamente as integrais dadas.

A demonstração rigorosa de todos os fatos envolvidos é mais avançada do que pretendemos nessa obra. Faremos a seguir uma descrição pormenorizada dos procedimentos usados, justificando, principalmente de forma geométrica, as fórmulas obtidas.

Observamos que ao mudarmos as variáveis ou seja, por exemplo, ao passarmos do plano descrito por coordenadas x e y ao plano descrito por coordenadas u e v, estaremos eventualmente modificando a forma da região R. Assim as coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ transformam um retângulo R no plano das coordenadas r e θ,

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

no círculo de raio 1 centrado na origem no plano xy.

Logo, numa mudança de variáveis a região de integração deverá também ser trocada de forma conveniente. Será necessário que a transformação leve de forma bijetiva uma região na outra.

18.8.1 DEFINIÇÃO Dada a transformação $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ onde u e v bem como suas derivadas parciais são funções contínuas de x e y, à expressão

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathrm{J}\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$$

chamaremos de Jacobiano de u e v em relação a x e y.

EXEMPLO 1 Calcular o Jacobiano da transformação

$$u = \cos x + \text{sen}\, y$$
$$v = -\,\text{sen}\, x + \cos y$$

Solução

$$\mathrm{J}\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} -\,\text{sen}\, x & \cos y \\ -\cos x & -\,\text{sen}\, y \end{vmatrix} = \cos(x - y)$$

EXEMPLO 2 Sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, calcule $\mathrm{J}\left(\dfrac{x, y}{r, \theta}\right)$.

Solução

$$\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\,r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = r$$

Pode-se definir de forma análoga o Jacobiano de transformações no espaço.

18.8.2 DEFINIÇÃO

Dada a transformação $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ onde u, v e w, bem como suas derivadas parciais, são funções contínuas de x, y e z, define-se o Jacobiano de u, v e w em relação a x, y e z como sendo

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 3 Dado que

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

queremos determinar $J\left(\dfrac{x, y, z}{\rho, \theta, \phi}\right)$.

Solução

$$J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, \phi}\right) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

EXEMPLO 4 Dado que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

queremos determinar o Jacobiano de x, y e z em relação a r, θ e z.

Solução

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, z}\right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

O Jacobiano tem uma aplicação muito importante no problema de mudança de variáveis em integrais múltiplas. Vimos em 18.4 que o elemento de área em coordenadas polares é $dA = r\,dr\,d\theta$ e em 18.7 que em coordenadas cilíndricas o elemento de volume é $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$, enquanto que $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ é o elemento de volume em coordenadas esféricas.

Por outro lado, no Exemplo 2 vimos que $J\left(\dfrac{x, y}{r, \theta}\right) = r$, no Exemplo 4 vimos que $J\left(\dfrac{x, y, z}{r, \theta, z}\right) = r$, enquanto que no Exemplo 3 vimos que $J\left(\dfrac{x, y, z}{\rho, \theta, \phi}\right) = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

Temos então que

$$dA \doteq J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) dr\, d\theta,\ dV = J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, z}\right) dr\, d\theta\, dz, \text{ enquanto que}$$

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, \phi}\right) \right| d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Em geral vale o seguinte teorema.

18.8.3 TEOREMA

Dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ no plano, tal que $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$, então

$$dA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\, dv$$

Se tivermos a transformação $x = x(u, v, w)$; $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ no espaço, tal que $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0$, então

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du\, dv\, dw$$

Prova O teorema generaliza o procedimento de substituição de variável na integração para os casos de integrais duplas e triplas. Recapitulando 9.4 e 9.7, se tivermos a integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

uma substituição da variável do tipo $x = g(t)$ nos leva a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t))\, g'(t)\, dt,$$

pois $dx = g'(t)\, dt$. O objetivo dessa substituição é tornar a integral facilmente calculável por antiderivação.

Vamos desenvolver um raciocínio geométrico a fim de justificar, intuitivamente, que o Jacobiano é um bom "índice corretor do elemento de área", ou seja, que valem as fórmulas

$$dx\, dy = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\, dv$$

ou

$$DA = \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| dA'$$

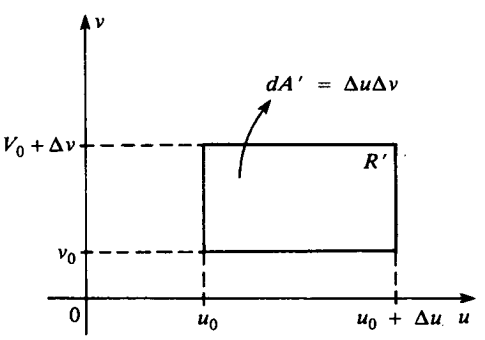


FIGURA 1

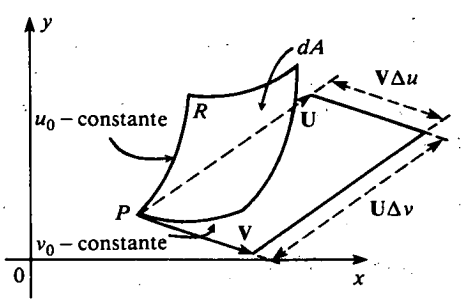


FIGURA 2

Consideremos o caso em que está dada a transformação

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v)$$

que leva o retângulo R' do plano uv na figura R do plano xy. Veja as Figuras 1 e 2.

As retas $u = u_0$ e $v = v_0$ do plano uv são levadas respectivamente nas curvas u_0-constante e v_0-constante do plano xy. Em outras palavras, essas curvas são os conjuntos de pontos $(x(u_0, v), y(u_0, v))$, $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \Delta v$ e $(x(u, v_0), y(u, v_0))$, $u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + \Delta u$, respectivamente u_0-constante e v_0-constante.

No ponto P de coordenadas $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ consideremos os vetores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ tangentes às curvas u_0-constante e v_0-constante. Vamos supor $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ unitários, isto é,

$$|\mathbf{U}| = |\mathbf{V}| = 1$$

A área dA de R será aproximada pelo paralelogramo cujos lados têm as direções de $\mathbf{U}$ e de $\mathbf{V}$ e com comprimentos $\|\mathbf{V} \cdot \Delta u\|$ e $\|\mathbf{U} \cdot \Delta v\|$. Se pensarmos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ como velocidades e Δu e Δt como intervalos de tempo, então $|\mathbf{U} \cdot \Delta u|$ e $|\mathbf{U} \cdot \Delta v|$ correspondem às distâncias percorridas em Δu e Δv. No limite, quando Δu e Δv tendem a zero, o elemento de área dA tende a coincidir com o referido paralelogramo. Mas (veja a Secção 15.5 e a interpretação geométrica após a Secção 15.5.8), a área do paralelogramo pode ser calculada pelo produto vetorial. Assim,

$$dA = \|\mathbf{V}\,\Delta u \cdot \mathbf{U}\,\Delta v\| = \|\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}\|\,\Delta u\,\Delta v$$

Mas

$$\mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

ou pensados como vetores no espaço

$$\mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

e, portanto

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\mathbf{k}$$

E, como $\|\mathbf{k}\| = 1$,

$$dA = \left|\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| \Delta u\,\Delta v$$

ou no limite

$$dA = \left|\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| du\,dv$$

Consideremos agora

$$\iint_R f(x, y)\,dA$$

onde $dA = dx\,dy$ e seja dada a transformação $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Temos então que

$$dA = \left|\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| du\,dv$$

e assim

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_{R'} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| du\,dv.$$

Da mesma forma, se tivermos

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dv,$$

onde $dV = dx\, dy\, dz$ e dada a transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, então

$$dV = \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du\, dv\, dw$$

e assim

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_{R'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \right| du\, dv\, dw$$

Observamos que nas integrais à esquerda a região R será descrita em termos das variáveis x, y, z, enquanto que à direita a região R' descrita em função de u, v e w deve ser tal que R' é levada bijetivamente sobre R pela transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. ■

Antes de passarmos aos exemplos, salientamos que mudanças de variável nas integrais duplas e triplas são utilizadas não apenas para passar de funções cujas primitivas não são imediatamente visíveis, como também para mudar de uma região R dada inicialmente, eventualmente difícil de descrever, para uma região R', preferivelmente retangular (nas integrais duplas) ou paralelepipédica (nas integrais triplas), as quais permitem calcular as integrais múltiplas como uma interação de integrais simples de uma só variável.

EXEMPLO 5 Calcule a área da região E interna à elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução Consideremos a transformação: $x = au$ e $y = bu$. Se substituirmos na equação da elipse teremos $u^2 + v^2 = 1$ que é a equação do círculo C com centro na origem e raio 1 no plano uv, cuja área é π. Como

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Logo,

$$\iint_E dx\, dy = \iint_C ab\, du\, dv = ab \iint_C du\, dv = ab \cdot \pi = \pi\, ab$$

EXEMPLO 6 Seja R o semicírculo de raio unitário e centro na origem.

Calcule $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$.

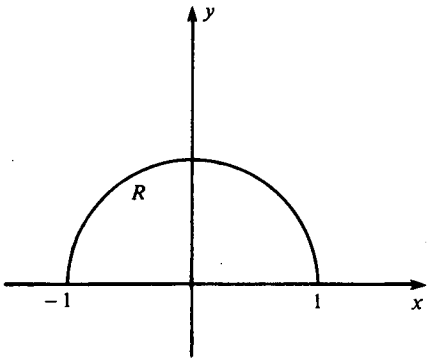


FIGURA 3

Solução Vamos fazer a transformação

$$x = r\cos\theta \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

lembrando que $J\left(\dfrac{x, y}{r, \theta}\right) = r$. Temos

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left[\int_0^r r^2\,dr\right]d\theta = \frac{\pi r^3}{3} = \frac{\pi}{3}[x^2 + y^2]^{3/2}$$

Observe que se fosse pedida a $\iint_R x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, então

$$\iint_R x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^r\left[\int_0^{\pi} r^3\cos\theta\,d\theta\right]dr = 0$$

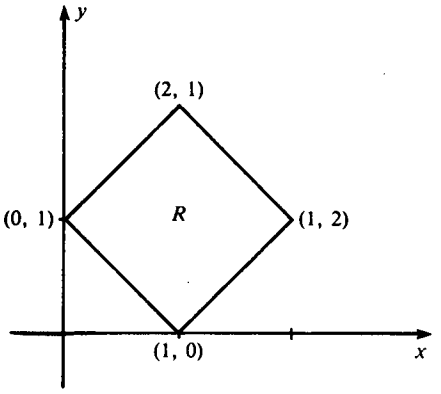


FIGURA 4

EXEMPLO 7 Seja R o paralelogramo de vértices (1, 0), (1, 2), (2, 1) e (0, 1). Mediante a transformação $u = x - y$, $v = x + y$, calcule a integral

$$\iint_R (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

Solução Temos $x = \dfrac{u + v}{2}$ e $y = \dfrac{v - u}{2}$, segue que

$J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right) = \dfrac{1}{2}$ e a região R' aparece na Figura 5.

Então, $\iint_R (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_1^3\left[\int_{-1}^1\left(1 - \dfrac{u^2 + v^2}{4}\right)du\right]dv = 0$

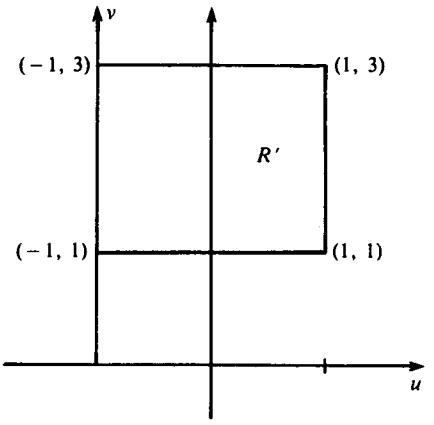


FIGURA 5

EXEMPLO 8 Sabendo que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ e que $u = u(t, w)$ e $v = v(t, w)$, queremos mostrar que

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\cdot J\left(\frac{u, v}{t, w}\right)$$

Solução Estamos supondo que os Jacobianos existam e que $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right) \neq 0$. Pela regra da cadeia, temos

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Mas

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial w}$$

e fórmulas análogas para $\frac{\partial y}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial w}$. Segue então que

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Por outro lado, dada duas matrizes quadradas A e B, então sabemos que

$$\det(A, B) = \det A \cdot \det B$$

Deste resultado segue que

$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{vmatrix} = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) J\left(\frac{u, v}{t, w}\right)$$

Além disso, se fizermos $x = t$ e $y = w$ teremos

$$J\left(\frac{x, y}{x, y}\right) \cdot J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = J\left(\frac{x, y}{x, y}\right) = 1$$

EXEMPLO 9 Seja R a região limitada pelas curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $xy = 1$ e $xy = 4$, do plano xy. Calcule a integral

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

mediante a transformação $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$.

Solução Temos

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$$

Como $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) \cdot J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 1$, temos

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{4(x^2 + y^2)}$$

Mas

$$u^2 = (x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \quad \text{e} \quad v^2 = 4x^2y^2$$

logo

$$v^2 - u^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = [v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}}$$

Então,

$$I = \iint_{R'} [v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4[v^2 - u^2]^{\frac{1}{2}}}\, du\, dv$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_2^8 \left[\int_1^4 du\right] dv = \frac{9}{2}$$

EXEMPLO 10 Dada a região R: $0 \leqslant x - y + 2z \leqslant 1$, $1 \leqslant x + y - 2z \leqslant 2$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$, calcule

$$I = \iiint_R \frac{x - y + 2z}{x + y - 2z}\, dx\, dy\, dz.$$

Solução Vamos fazer a transformação

$$u = x - y + 2z$$
$$v = x + y - 2z$$
$$w = z$$

Logo,

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(v - u) + 4w$$
$$z = w$$

e

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Observe ainda que pela transformação dada R será levado no paralelepípedo R': $0 \leqslant u \leqslant 1$, $1 \leqslant v \leqslant 2$ e $0 \leqslant w \leqslant 1$. Então,

$$I = \iiint_{R'} \frac{u}{v} \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)\right| du\, dv\, dw$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 dw \int_1^2 \frac{dv}{v} \int_0^1 u\, du$$

$$= \tfrac{1}{4} \ln 2$$

Observe ainda que

$$\iiint_{R'} \left| J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)\right| du\, dv\, dw = \frac{1}{2}$$

é o volume de R.

EXERCÍCIOS 18.8

1. Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ sendo R a região limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.
2. Seja R a região do plano uv limitada pelos eixos u e v e pela reta $u + v = 2$. Dada a tranformação $x = u + v$ e $y = u^2 - v$:
   a) Esboce a imagem R' de R pela transformação dada.
   b) Calcule
   $$I = \iint_{R'} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 + 4x + 4y}}$$
3. Seja R a parte da coroa circular compreendida entre $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante. Calcule
   $$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$
4. Calcule a integral
   $$I = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$
   onde R é dado pelas desigualdades
   $$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$$
   isto é, R é a parte da esfera de centro em (0, 0, 0), raio 1, no primeiro octante. (*Sugestão*: use a transformação $x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$ e $z = \rho \cos \theta$.)
5. Seja R um paralelogramo de vértices (0, 0), (2, 0), (3, 1) e (1, 1). Mediante a transformação $x = u + v$ e $y = v$, calcule a integral
   $$I = \iint_R (x, y)\, dx\, dy$$
6. Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leqslant 1$, mediante a transformação $x = 2u$, $y = 3v$ e $z = 3w$. Suponha conhecido o volume da esfera.
7. Calcule
   $$I = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
   sabendo que $f(x, y, z) = 3$ e R é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ e mediante a transformação para coordenadas esféricas.
8. Calcule
   $$I = \iiint_R x^2\, dx\, dy\, dz$$
   onde R é tal que $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, usando a transformação para coordenadas cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$.
9. Seja R a região do espaço dado por: $0 \leqslant x - y + z \leqslant 1$, $1 \leqslant x + y - z \leqslant 2$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$. Calcule
   $$I = \iiint_R \frac{e^{x - y + z}}{x + y - z}\, dx\, dy\, dz$$
   mediante a transformação $u = x - y + z$, $v = x + y - z$ e $w = z$.
10. Calcule o volume da região R dada no Exercício 9.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral iterada dada.

1. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy\, dx$
2. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy\, dx\, dy$
3. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r \cos^2 \theta\, dr\, d\theta$
4. $\int_0^{\pi} \int_0^{3(1 + \cos \theta)} r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta$
5. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z\, dx\, dy\, dz$
6. $\int_1^2 \int_3^x \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen} \phi \cos \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$
8. $\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} zre^{-r^2}\, dr\, d\theta\, dz$

Nos Exercícios de 9 a 12, calcule a integral múltipla.

9. $\iint_R xy\, dA$; R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e pelos eixos coordenados.
10. $\iint_R (x + y)\, dA$; R é a região limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x de $x = -\frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{1}{2}\pi$
11. $\iiint_S z^2\, dV$; S é a região limitada pelos cilindros $x^2 + z = 1$ e $y^2 + z = 1$ e pelo plano xy.
12. $\iiint_S y \cos(x + z)\, dV$; S é a região limitada pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $x + z = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$ e $z = 0$.
13. Calcule, por coordenadas polares, a integral dupla
    $$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA$$
    onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pelas duas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.
14. Calcule por coordenadas polares a integral iterada
    $$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Nos Exercícios 15 e 16, calcule a integral iterada, invertendo a ordem de integração.

15. $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2\, dy\, dx$
16. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} e^{\operatorname{sen} x}\, dx\, dy$

Nos Exercícios 17 e 18, use integral dupla para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy. Faça um esboço da região.

17. $y = x^2$ e $y = x^4$

18. $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$

Nos Exercícios 19 e 20, calcule a integral iterada, mudando para coordenadas esféricas ou cilíndricas.

19. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

20. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dz\, dy\, dx$

21. Use integração dupla para encontrar a área da região no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $x^2 = 4y$ e $x^2 = 8 - 4y$. Integre primeiro em relação a x.

22. Use integração dupla para encontrar a área da região no plano xy, limitada pelas parábolas $y = 9 - x^2$ e $y = x^2 + 1$. Integre primeiro em relação a x.

23. Use integração dupla para encontrar a área da região no Exercício 21, integrando primeiro em relação a y.

24. Use integração dupla para encontrar a área da região no Exercício 22, integrando primeiro em relação a y.

25. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido limitado pelos planos $x = y$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$ e $z = 1$. Integre primeiro em relação a x.

26. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido acima do plano xy, limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e pelo plano $z = 2y$. Integre primeiro em relação a x.

27. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido no Exercícios 25, integrando primeiro em relação a y.

28. Use integração dupla para encontrar o volume do sólido no Exercício 26, integrando primeiro com relação a y.

29. Ache o volume do sólido acima do plano xy, limitado pelas superfícies $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ e $x^2 = z - y$.

30. Ache a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x - y + 2 = 0$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for x^2y^2 kg-m^2.

31. Ache a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ no primeiro octante e entre os planos $x = z$ e $3x = z$.

32. Ache a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.

33. Use integração dupla para encontrar a área da região interior à circunferência $r = 1$ e à direita da parábola $r(1 + \cos\theta) = 1$.

34. Ache a massa da lâmina na forma da região exterior à *limaçon* $r = 3 - \cos\theta$ e exterior à circunferência $r = 5\cos\theta$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $2|\operatorname{sen}\theta|$ kg-m^2.

35. Ache o centro de massa da lâmina retangular limitada pelas retas $x = 3$ e $y = 2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for xy^2 kg-m^2.

36. Ache o centro de massa da lâmina na forma da região limitada pelas parábolas $x^2 = 4 + 4y$ e $x^2 = 4 - 8y$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for kx^2 kg-m^2.

37. Ache a massa da lâmina na forma da região limitada pelo eixo polar e pela curva $r = \cos 2\theta$, onde $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{4}\pi$. A densidade em qualquer ponto é $r\theta$ kg-m^2.

38. Ache o momento de inércia em torno do eixo x da lâmina na forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $k\sqrt{x^2 + y^2}$ kg-m^2.

39. Use coordenadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4ay$ e pelo plano $z = 0$.

40. Use coordenadas esféricas para encontrar a massa de uma esfera sólida de a m de raio, se a densidade de massa por unidade de volume em cada ponto for proporcional à distância do ponto ao centro da esfera. A densidade é medida em quilogramas por metro cúbico.

41. Use integração tripla para encontrar o volume do sólido limitado pelo plano $z = 1$ e pelo menor segmento da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ delimitado por esse plano.

42. Use integração tripla para encontrar o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo plano $y + z = 8$, pelo cilindro $y = 2x^2$ e pelos planos xy e yz.

43. Ache o momento de inércia em torno do eixo x, da lâmina na forma da região limitada pela curva $y = e^x$, pela reta $x = 2$ e pelos eixos coordenados, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for xy kg-m^2.

44. Ache o momento de inércia da lâmina do Exercício 43 em torno do eixo y.

45. Ache o momento de inércia em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ da lâmina homogênea na forma da região limitada pela curva $r^2 = 4\cos 2\theta$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for k kg-m^2.

46. Ache a massa da lâmina do Exercício 45.

47. Ache o momento polar de inércia e o raio de giração correspondente para a lâmina do Exercício 45.

48. Ache o momento de inércia em torno do eixo y, da lâmina na forma da região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e pela reta $x + y = 0$, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto for $(x + y)$ kg-m^2.

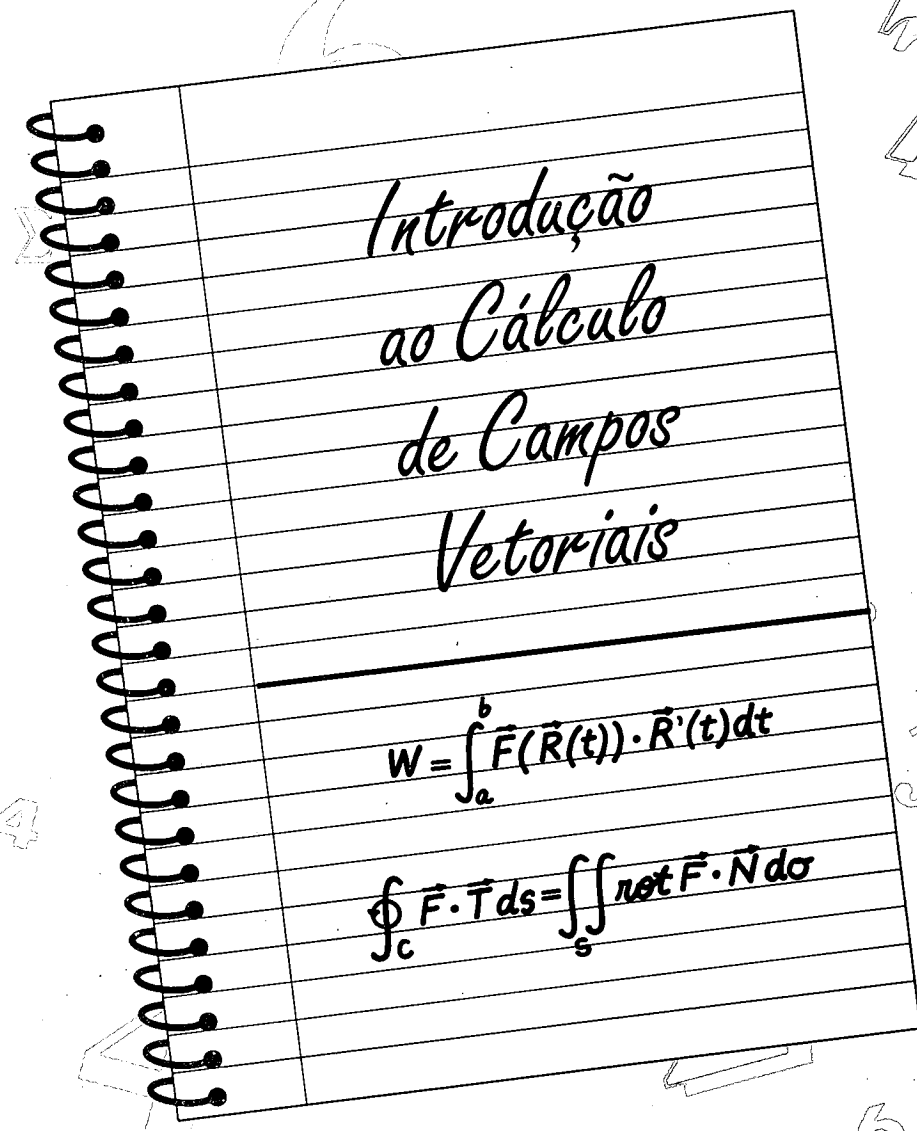
49. Ache a massa do sólido limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, se a densidade de massa por unidade de volume em qualquer ponto for $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kg-m^3.

50. Ache o momento de inércia em torno do eixo z do sólido do Exercício 49.

51. O sólido homogêneo limitado pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$ tem uma densidade de massa por unidade de volume de k kg-m^3 em qualquer ponto. Ache o momento de inércia do sólido em torno do eixo z.

52. Ache o centro de massa do sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 = z^2 - 6z = 0$ e pelo cone $x^2 + y^2 + z^2$ e acima do cone, se a densidade de massa por unidade de volume for kz kg-m^3 em qualquer ponto.

DEZENOVE



O tratamento do material neste capítulo é uma breve apresentação de tópicos desenvolvidos integralmente em Cálculo Avançado. Na Secção 19.1 discutiremos *campos vetoriais*, que são funções que associam vetores a pontos no espaço, e a *divergência* e o *rotacional* de um campo vetorial são introduzidos. As *integrais de linha* são definidas na Secção 19.2 e são aplicadas para determinarmos o trabalho realizado por um campo vetorial, ao mover uma partícula ao longo de uma curva. A seguir, integrais de linha independentes do caminho serão apresentadas na Secção 19.3, onde um teorema análogo do segundo teorema fundamental do Cálculo é introduzido para integrais de linha. Também na Secção 19.3, provamos a *lei de conservação da energia*, um conceito fundamental em Física.

Três teoremas importantes em Cálculo Vetorial têm os nomes dos seguintes matemáticos e cientistas: George Green, Karl Gauss e George Stokes. O *teorema de Green* sobre integrais de linha em curvas constitui o assunto a ser abordado na Secção 19.4. A Secção 19.5, sobre *integrais de superfícies*, é seguida da secção final, que apresenta o *teorema da divergência de Gauss* e o *teorema de Stokes*. Aplicações desses teoremas em Física, Química e Engenharia pertencem a cursos nesses campos. Incluímos aqui aplicações de integrais de superfícies para encontrar a massa de uma superfície e o fluxo de um campo de velocidade através de uma superfície.

19.1 CAMPOS VETORIAIS

Um *campo vetorial* associa um vetor a um ponto no espaço. Por exemplo, se **F** for uma função com valores vetoriais definida numa bola aberta B em R^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \tag{1}$$

então **F** associa a cada ponto (x, y, z) em B um vetor, sendo **F** chamada de **campo vetorial**. Esse campo vetorial tem como seu domínio um subconjunto de R^3 e como sua imagem um subconjunto de V_3. Se o domínio de um campo vetorial for um conjunto de pontos num plano e sua imagem for um conjunto de vetores em V_2, então o campo vetorial terá uma equação da forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Se, em vez de um vetor, um escalar estiver associado a cada ponto no espaço, teremos um **campo escalar**; assim, um campo escalar é uma função com valores reais. Um exemplo de campo escalar é obtido ao expressarmos a temperatura em um ponto como função das coordenadas do ponto.

Para um exemplo de campo vetorial, consideremos o fluxo de um fluido, tal como a água que escoa em um cano ou o sangue que flui por uma artéria. Suponha que o fluido consista em um número infinito de partículas e que a velocidade de uma partícula dependa somente de sua posição; assim sendo, a velocidade é independente do tempo e, por isso, o fluxo do fluido é chamado de *estacionário*. Em um ponto (x, y, z), a velocidade do fluido é dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$, definida por uma equação do tipo (1). Assim, **F** é um campo vetorial chamado de **campo de velocidade** do fluido. Os campos de velocidades podem descrever outros movimentos, tais como os dos ventos ou a rotação de uma roda. Os campos vetoriais que aparecem neste livro serão todos independentes do tempo; eles são chamados de **campos vetoriais estacionários**.

Não podemos mostrar em uma figura as representações de todos os vetores de um dado campo vetorial. Mas, traçando as representações de alguns dos vetores, podemos obter uma descrição visual do campo vetorial, conforme indicado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 (a) Mostre numa figura as representações, tendo ponto inicial em (x, y), dos vetores do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2. (b) Prove que cada representação é tangente a uma circunferência tendo seu centro na origem e um comprimento igual ao raio da circunferência.

Tabela 1

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 1)$	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(1, -1)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(-1, 1)$	$-\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(-1, -1)$	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(1, 2)$	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(1, -2)$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(-1, 2)$	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(-1, -2)$	$2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(2, 1)$	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$(2, -1)$	$\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$(-2, 1)$	$-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$(-2, -1)$	$\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$(2, 2)$	$-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$(2, -2)$	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$(-2, 2)$	$-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$(-2, -2)$	$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

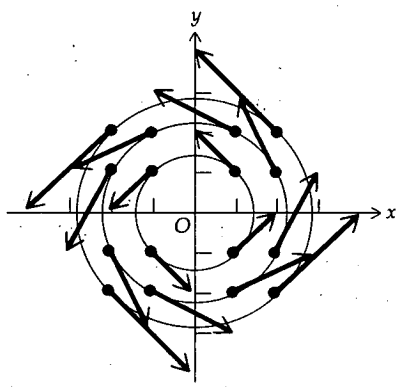


FIGURA 1

Solução

(a) A Tabela 1 indica os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ associados com os dezesseis pontos (x, y). As representações destes vetores aparecem na Figura 1.

(b) Seja

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

o vetor de posição cujo ponto final está em (x, y). Então,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{i}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{F}$ são ortogonais. Assim, a representação de $\mathbf{F}$ cujo ponto inicial está em (x, y) é tangente à circunferência com centro na origem e raio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\|\end{aligned}$$

o comprimento de cada representação é igual ao raio da circunferência.

O campo vetorial do Exemplo 1 é similar ao campo de velocidade determinado por uma roda girando na origem.

Um exemplo de um campo vetorial em V_3 decorre da lei do inverso dos quadrados de Newton da atração gravitacional. Essa lei estabelece que a medida da intensidade da força gravitacional entre duas partículas com massas M e m unidades, respectivamente, é

$$\frac{GMm}{d^2}$$

onde d unidades é a distância entre as partículas e G é uma constante gravitacional. Assim, se uma partícula com M unidades de massa estiver na origem e uma partícula com 1 unidade ($m = 1$) de massa estiver num ponto $P(x, y, z)$ e se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for a força gravitacional exercida pela partícula na origem sobre a partícula em P, temos

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{GM(1)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}$$

onde $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Para obter o vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ que representa a força, precisamos também da direção e sentido de $\mathbf{F}$. Como a direção é radial e o sentido aponta para a origem, podemos caracterizá-los pelo vetor unitário $-\frac{1}{\|\mathbf{R}\|}\mathbf{R}$. Como o módulo foi dado anteriormente, temos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{GM}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}\left(-\frac{\mathbf{R}(x, y, z)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|}\right)$$

Como, $\|\mathbf{R}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, obtemos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{2}$$

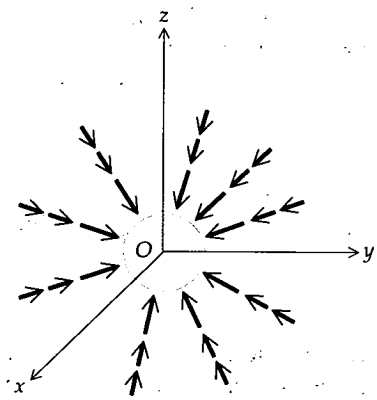


FIGURA 2

O campo vetorial definido por (2) é chamado de **campo de forças**. A Figura 2 mostra algumas representações dos vetores nesse campo de forças, onde o ob-

jeto na origem é uma esfera (a Terra, por exemplo) e $\|\mathbf{R}\|$ é maior do que o raio da esfera. Cada representação aponta para a origem. As representações de vetores próximos da origem são maiores do que aquelas em pontos longe da origem e os comprimentos são os mesmos em pontos situados a uma mesma distância da origem. Em virtude dessas propriedades, o campo de forças definido por (2) é chamado de *campo de forças central.*

O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Se ϕ for um campo escalar e $\mathbf{F}$ for o campo vetorial definido por $\mathbf{F} = \nabla\phi$, então $\mathbf{F}$ será chamado de **campo vetorial gradiente** e ϕ será denominado **função potencial** para $\mathbf{F}$. Um campo vetorial gradiente também é chamado de **campo vetorial conservativo.** A expressão *conservativo* ficará clara após a leitura da Secção 19.3.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Da Ilustração 1 da Secção 17.5, segue que, se

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

então

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

Assim, $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo e ϕ é uma função potencial de $\mathbf{F}$. ◀

A ilustração a seguir mostra que o campo de forças gravitacional definido por (2) é conservativo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 5 da Secção 17.1 mostramos que, se

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Assim, se

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla\phi(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Comparando essa equação e (2) observamos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$$

Portanto, $\mathbf{F}$ é conservativo e ϕ é uma função potencial de $\mathbf{F}$. ◀

Nas duas ilustrações acima é simples provar que o campo vetorial é conservativo, pois conhecemos uma função ϕ da qual $\mathbf{F}$ é o gradiente. Um problema mais difícil é decidir se um dado campo vetorial é conservativo e, se for, achar uma função potencial. Com essa finalidade aplicamos os Teoremas 17.5.1 e 17.5.4, conforme mostram os dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 2 Se **F** for um campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$$

prove que **F** é conservativo e ache uma função potencial para **F**.

Solução Seja

$$M(x, y) = \frac{1}{y} \qquad N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$M_y(x, y) = -\frac{1}{y^2} \qquad N_x(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, segue do Teorema 17.5.1 que **F** é um gradiente e, portanto, um campo vetorial conservativo. Uma função potencial ϕ satisfaz a equação

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

Logo,

$$\phi_x(x, y) = \frac{1}{y} \qquad \phi_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} \tag{3}$$

Integrando em relação a x ambos os membros da primeira das fórmulas (3) temos

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + g(y) \tag{4}$$

onde $g(y)$ é independente de x. Derivando parcialmente ambos os membros de (4) em relação a y, temos

$$\phi_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

Igualando os segundos membros dessa igualdade e a segunda das fórmulas (3), obtemos

$$-\frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = C$$

Com esse valor de $g(y)$ em (4) temos

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + C$$

que é a função potencial pedida.

EXEMPLO 3 Se **F** for o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$$

prove que **F** é conservativo e encontre uma função potencial para **F**.

Solução Para determinar se **P** é conservativo, aplicamos o Teorema 17.5:4 para nos certificarmos de que **F** é um gradiente. Seja

$$M(x, y, z) = z^2 + 1 \qquad N(x, y, z) = 2yz \qquad R(x, y, z) = 2xz + y^2$$

$$M_y(x, y, z) = 0 \qquad N_x(x, y, z) = 0 \qquad R_x(x, y, z) = 2z$$

$$M_z(x, y, z) = 2z \qquad N_z(x, y, z) = 2y \qquad R_y(x, y, z) = 2y$$

Logo,

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Assim, pelo Teorema 17.5.4, **F** é um gradiente e, portanto, um campo vetorial conservativo. Vamos encontrar agora uma função potencial ϕ tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$; portanto,

$$\phi_x(x, y, z) = z^2 + 1 \qquad \phi_y(x, y, z) = 2yz \qquad \phi_z(x, y, z) = 2xz + y^2 \tag{5}$$

Integrando em relação a x ambos os membros da primeira das relações (5) temos

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + g(y, z) \tag{6}$$

Derivando parcialmente com respeito a y ambos os membros de (6) obtemos

$$\phi_y(x, y, z) = g_y(y, z)$$

Igualando os segundos membros da relação anterior e a segunda das relações (5) temos

$$g_y(y, z) = 2yz$$

Agora, integrando com respeito a y ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$g(y, z) = y^2z + h(z)$$

Substituindo essa igualdade em (6) obtemos

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + h(z) \tag{7}$$

Derivando parcialmente com respeito a z ambos os membros de (7) obtemos

$$\phi_z(x, y, z) = 2xz + y^2 + h'(z)$$

Igualando agora os lados direitos dessa relação e da terceira das relações (5) temos

$$2xz + y^2 + h'(z) = 2xz + y^2$$

$$h'(z) = 0$$

$$h(z) = C$$

Substituindo C para $h(z)$ em (7) obteremos a função potencial desejada ϕ, na forma

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + C$$

Existem dois campos obtidos do campo vetorial **F** por meio de derivações parciais. Um deles é o campo vetorial denotado por rot **F** (diz-se *rotacional* de **F**) e o outro é o campo escalar denominado *divergente* de **F**. Antes de dar as suas definições, mostraremos como o símbolo ∇ é usado como um operador.

Recordemos que se f for uma função escalar de três variáveis x, y e z, então o gradiente de f será dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \tag{8}$$

Denotaremos agora o operador del em três dimensões por

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Assim, a operação ∇ sobre a função escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

o que está de acordo com (8).

19.1.1 DEFINIÇÃO Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial numa bola aberta B em R^3, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Então, o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é definido por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

se essas derivadas parciais existirem.

Uma regra mnemônica para calcular o rotacional de $\mathbf{F}$ é estender a notação do produto vetorial de dois vetores ao produto vetorial do operador ∇ com o campo vetorial $\mathbf{F}$ e escrever

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}$$

Recordemos que ao utilizarmos a notação de determinante para o produto vetorial, foi ressaltado que nem todos os elementos do determinante eram números reais, ao contrário do usual. No "determinante" acima, a primeira linha é formada de vetores, a segunda linha de operadores de derivação parcial, enquanto que a terceira linha é formada por funções escalares.

EXEMPLO 4 Ache o rot $\mathbf{F}$, se $\mathbf{F}$ for o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}$$

Solução

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{2x} & 3x^2yz & 2y^2z + x \end{vmatrix}$$

$$= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (6xyz - 0)\mathbf{k}$$

$$= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6xyz\mathbf{k}$$

19.1.2 DEFINIÇÃO Seja **F** um campo vetorial numa bola aberta B em R^3, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Então o **divergente** de **F**, denotado por div **F**, será definido por

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

se essas derivadas parciais existirem.

Vamos aplicar a notação do produto escalar de dois vetores ao "produto escalar" do operador ∇ com o campo vetorial **F** para calcular o divergente de **F**, escrevendo

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

EXEMPLO 5 Ache o div **F**, sendo **F** o campo vetorial do Exemplo 4.

Solução

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + x)\\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2\end{aligned}$$

A importância física do rot **F** e do div **F** no estudo do movimento dos fluidos será discutida nas Secções 19.4-19.6. Nesta secção estamos interessados em aprender como calculá-los e em provar algumas de suas propriedades. Duas dessas propriedades são dadas nos dois teoremas a seguir. Será pedido que você prove esses teoremas nos Exercícios 47 e 48.

19.1.3 TEOREMA Suponha que **F** seja um campo vetorial numa bola aberta B em R^3, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Se as derivadas parciais segundas de M, N e R forem contínuas em B, então

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$$

19.1.4 TEOREMA Se f for um campo escalar numa bola aberta B em R^3 e as derivadas parciais segundas de f forem contínuas em B, então

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

A expressão no Teorema 19.1.4 estabelece que o rotacional do gradiente de f é igual ao vetor nulo. Consideremos agora o divergente do gradiente de f, isto é, $\nabla \cdot (\nabla f)$, que também pode ser escrito como $\nabla \cdot \nabla f$ ou $\nabla^2 f$.

Por definição,

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A expressão à direita dessa igualdade é chamada de **laplaciano** de f. A seguinte equação obtida ao igualarmos a zero o laplaciano é chamada de **equação de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Uma função escalar que satisfaça a equação de Laplace é chamada de **harmônica**. Essas funções têm importantes aplicações em Física, no estudo da transferência de calor, radiação eletromagnética, acústica e outros.

Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial em algum disco aberto B em R^2, tal que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y,)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, então o rotacional de $\mathbf{F}$ e o divergente de $\mathbf{F}$ em duas dimensões serão definidos por

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad \text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}}$$

se essas derivadas parciais existirem. O laplaciano em duas dimensões é definido por

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

EXEMPLO 6 Se $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, ache (a) rot $\mathbf{F}(x, y)$ e (b) div $\mathbf{F}(x, y)$.

Solução Como $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, $M(x, y) = 3x^2y$ e $N(x, y) = -2xy^3$. Logo,

(a) $$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (-2y^3 - 3x^2)\mathbf{k}$$

(b) $$\text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 6xy - 6xy^2$$

EXERCÍCIOS 19.1

Nos Exercícios de 1 a 6, mostre numa figura as representações dos vetores do campo vetorial dado, tendo ponto inicial em (x, y), onde x é ± 1 ou ± 2 e y é ± 1 ou ± 2.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
6. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache um campo vetorial conservativo tendo a função potencial dada.

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$
8. $f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$
9. $f(x, y) = \text{tg}^{-1}\, x^2y$
10. $f(x, y) = ye^x - xe^y$
11. $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4y^3$
12. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

13. $f(x, y, z) = x^2ye^{-4z}$
14. $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(x^2 - y)$

Nos Exercícios de 15 a 20, determine se o campo vetorial dado é conservativo.

15. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (3 - 4xy)\mathbf{j}$
16. $\mathbf{F}(x, y) = (e^xe^y + 6e^{2x})\mathbf{i} + (e^xe^y - 2e^y)\mathbf{j}$
17. $\mathbf{F}(x, y) = y\cos(x + y)\mathbf{i} - x \operatorname{sen}(x + y)\mathbf{j}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 6yz)\mathbf{j} + (2xy + 3y^2 - 2z)\mathbf{k}$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\sec^2 x\mathbf{i} + (\operatorname{tg} x - z\sec^2 y)\mathbf{j} + x\sec z \operatorname{tg} z\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 21 a 32, prove que o campo vetorial dado é conservativo e ache uma função potencial.

21. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
22. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
23. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^x\cos y\mathbf{j}$
24. $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y \cosh x)\mathbf{i} + (\cos y \cosh x - \operatorname{sen} y \operatorname{senh} x)\mathbf{j}$
25. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j}$
26. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x)\mathbf{i} + (2x - 2ye^x)\mathbf{j}$
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - 3z)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k}$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\mathbf{i} + (xe^y - e^z)\mathbf{j} + (-ye^z + e^x)\mathbf{k}$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{tg} y + 2xy\sec z)\mathbf{i} + (x\sec^2 y + x^2\sec z)\mathbf{j} + \sec z(x^2y \operatorname{tg} z - \sec z)\mathbf{k}$
31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x\cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k}$.
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y^3 - 8xz^2)\mathbf{i} + (6xy^2 + 1)\mathbf{j} - (8x^2z + 3z^2)\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 33 a 42, ache rot **F** *e div* **F** *para o campo vetorial dado.*

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$
34. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} - \operatorname{sen} y\mathbf{j}$
35. $\mathbf{F}(x, y) = e^x\cos y\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$
36. $\mathbf{F}(x, y) = -\dfrac{y}{x}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x}\mathbf{j}$
37. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
38. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$
39. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos y\mathbf{i} + \cos z\mathbf{j} + \cos x\mathbf{k}$
40. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + xe^y\cos z\mathbf{j} - xe^y\cos z\mathbf{k}$
41. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
42. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Nos Exercícios de 43 a 46, prove que a função escalar dada é harmônica, mostrando que seu laplaciano é nulo.

43. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x + e^x\cos y$
44. $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$
45. $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$
46. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
47. Prove o Teorema 19.1.3.
48. Prove o Teorema 19.1.4.

19.2 INTEGRAIS DE LINHA

No Capítulo 5 o conceito de área foi usado para motivar a definição de integral definida. Para motivar a definição da integral de um campo vetorial vamos usar o conceito físico de trabalho.

Mostramos na Secção 14.2 que se uma força constante **F** move uma partícula ao longo de uma linha reta de um ponto A até um ponto B, então se **W** for a medida do trabalho realizado,

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \tag{1}$$

Suponha agora que o vetor que representa força não seja constante e, ao invés de ter o movimento ao longo de uma linha reta, ele seja descrito ao longo de uma curva. Suponha que a força exercida sobre a partícula no ponto (x, y), em algum disco aberto B em R^2, seja dada pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N são contínuas em B. Seja C a curva que está em B e tem a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Vamos exigir que as funções f e g tenham derivadas f' e g' contínuas em $[a, b]$. Queremos definir o trabalho realizado pelo campo de forças variável **F** ao mover a partícula ao longo de C, do ponto $(f(a), g(a))$ até $(f(b), g(b))$.

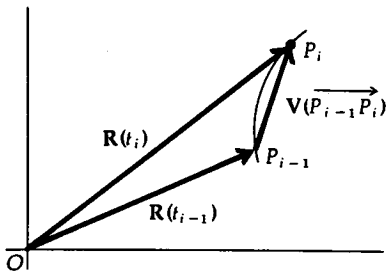


FIGURA 1

No ponto $(f(t), g(t))$ em C a força é

$$\mathbf{F}(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t))\mathbf{i} + N(f(t), g(t))\mathbf{j} \tag{2}$$

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

Seja P_i o ponto $(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ em C. Consulte a Figura 1. O vetor $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = \mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})$; logo,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = f(t_i)\mathbf{i} + g(t_i)\mathbf{j} - [f(t_{i-1})\mathbf{i} + g(t_{i-1})\mathbf{j}]$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f(t_i) - f(t_{i-1})]\mathbf{i} + [g(t_i) - g(t_{i-1})]\mathbf{j} \tag{3}$$

Como f' e g' são contínuas em $[a, b]$, segue do teorema do valor médio que existem números c_i e d_i no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i), de modo que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)(t_i - t_{i-1})$$

Expressando $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, e substituindo as duas relações acima em (3), obtemos

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}]\,\Delta_i t \tag{4}$$

Para cada i consideremos o vetor

$$\mathbf{F}_i = M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j} \tag{5}$$

Cada um dos vetores $\mathbf{F}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ é uma aproximação do vetor $\mathbf{F}(f(t), g(t))$, dado por (2), ao longo do arco c de P_{i-1} até P_i. Observe que mesmo sendo C_i e d_i, de modo geral, números diferentes no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i), os valores dos vetores $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ são próximos do vetor $\mathbf{F}_i$. Além disso, aproximamos o arco de C de P_{i-1} até P_i pelo segmento de reta $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$. Assim, aplicamos a fórmula (1) e obtemos uma aproximação para o trabalho realizado pelo vetor $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ ao mover a partícula ao longo do arco de C, de P_{i-1} a P_i. Denotando essa aproximação por $\Delta_i W$, temos, da fórmula (1) e das relações (4) e (5),

$$\Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}] \cdot [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}]\,\Delta_i t$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)]\,\Delta_i t + [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)]\,\Delta_i t$$

Uma aproximação da medida do trabalho realizado por $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ ao longo de C é $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i W$ ou, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)]\,\Delta_i t + \sum_{i=1}^{n} [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)]\,\Delta_i t$$

Cada uma dessas somas é uma soma de Riemann. O primeiro somatório é uma soma de Riemann para a função com valores $M(f(t), g(t))f'(t)$, e o segundo somatório é uma soma de Riemann para a função com valores $N(f(t), g(t))\,g'(t)$. Se n crescer sem limitação, essas duas somas aproximam-se da integral definida:

$$\int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]\,dt$$

Temos, portanto, a definição a seguir. Na definição, a notação $\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))$ é usada, em vez de $\mathbf{F}(f(t), g(t))$.

19.2.1 DEFINIÇÃO Seja C uma curva contida num disco aberto B em R^2, com equação vetorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, onde f' e g' são contínuas em $[a, b]$. Além disso, consideremos um campo de forças em B definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, onde M e N são contínuas em B. Então, se W for a medida do **trabalho** realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}$ ao mover uma partícula ao longo de C de $(f(a), g(a))$ até $(f(b), g(b))$, temos

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]\, dt \tag{6}$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial

$$W = \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))\rangle \cdot \langle f'(t), g'(t)\rangle\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \tag{7}$$

EXEMPLO 1 Suponha que uma partícula se move ao longo da parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(2, 4)$. Ache o trabalho total realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$. Suponha que os arcos sejam medidos em metros e a força em newtons.

Solução As equações paramétricas da parábola são

$$x = t \quad \text{e} \quad y = t^2 \qquad -1 \leqslant t \leqslant 2$$

Assim, uma equação vetorial da parábola é

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2)\\ &= \langle t^2 + t^4, 3t^4\rangle\end{aligned}$$

Se W J for o trabalho realizado, então, de (7),

$$\begin{aligned}W &= \int_{-1}^{2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \qquad (8)\\ &= \int_{-1}^{2} \langle t^2 + t^4, 3t^4\rangle \cdot \langle 1, 2t\rangle\, dt\\ &= \int_{-1}^{2} (t^2 + t^4 + 6t^5)\, dt\\ &= \left.\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6\right]_{-1}^{2}\\ &= \tfrac{8}{3} + \tfrac{32}{5} + 64 - (-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + 1)\\ &= \tfrac{363}{5}\end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\frac{363}{5}$ J.

As integrais nas fórmulas (6) e (7) são chamadas de *integrais de linha*. Para a integral de linha da fórmula (6), uma notação comumente usada, envolvendo a forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

Essa notação é sugerida pelo fato de que como as equações paramétricas de C são $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $dx = f'(t)dt$ e $dy = g'(t)dt$. Uma notação vetorial para a integral de linha da fórmula (7) é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Essa notação é sugerida ao considerarmos a equação vetorial de C que é $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, expressando $d\mathbf{R} = \mathbf{R}'(t)\,dt$. Então,

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\,dt$$

Temos, assim, a definição formal a seguir.

19.2.2 DEFINIÇÃO Seja C uma curva contida em um disco aberto B em R^2 e tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tal que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial em B definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N são contínuas em B. Então, a **integral de linha** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C é dada por

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)]dt$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de $\mathbf{F}$ sobre C é dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)dt$$

Ambas as notações na forma diferencial e na forma vetorial são usadas para integrais de linha. Conseqüentemente, usaremos as duas notações.*

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1, a integral na equação (8) que define W é uma integral de linha. Com a notação vetorial, essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}(t) = t_i + t^2\mathbf{j}$. Com a notação na forma diferencial essa integral de linha pode ser denotada por

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 3x^2y\,dy \tag{9}$$

◀

Se uma equação de C for da forma $y = F(x)$, então x poderá ser usado como um parâmetro, em lugar de t. Analogamente, se uma equação de C for da forma $x = G(y)$, então y poderá ser usado como um parâmetro de t.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 1 e na Ilustração 1, a equação de C é $y = x^2$, que é da forma $y = F(x)$. Logo, podemos usar x como um parâmetro, em vez

*N. do R.: Observe, todavia, que a notação $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ pressupõe que a curva C seja orientada.

de t. Assim, na integral (9) da Ilustração 1 podemos substituir y por x^2 e dy por $2x\,dx$, e obteremos

$$W = \int_{-1}^{2} (x^2 + x^4)\,dx + 3x^2x^2(2x\,dx)$$
$$= \int_{-1}^{2} (x^2 + x^4 + 6x^5)\,dx$$

Essa integral é a mesma que a terceira integral da solução do Exemplo 1, exceto que a variável é x, em vez de t. ◀

Se a curva C na definição de integral estiver no intervalo fechado $[a, b]$ sobre o eixo x, então $y = 0$ e $dy = 0$. Assim,

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_a^b M(x, 0)\,dx$$

Portanto, nesse caso, a integral de linha reduz-se a uma integral definida.

Na definição de integral de linha, se C tiver a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

exigimos que f' e g' sejam contínuas em $[a, b]$. Se, além dessa exigência de continuidade, $f'(t)$ e $g'(t)$ não forem ambas nulas em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então C será dita **suave** em $[a, b]$. Se um intervalo I puder ser dividido em um número finito de subintervalos nos quais C é suave, então C será dita **seccionalmente suave** em I.

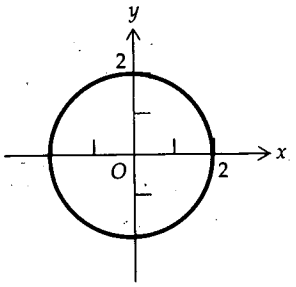


FIGURA 2

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** (a) A curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

é uma circunferência com centro na origem e raio 2. Veja a Figura 2. Para esta curva,

$$f(t) = 2\cos t \qquad g(t) = 2\,\text{sen}\,t$$
$$f'(t) = -2\,\text{sen}\,t \qquad g'(t) = 2\cos t$$

Como f' e g' são contínuas para todo t e $f'(t)$ e $g'(t)$ não são ambas nulas em qualquer ponto, a circunferência é uma curva suave.

(b) A curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = a(t - \text{sen}\,t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

é uma ciclóide. Essa curva foi estudada na Secção 14.3 e um esboço de seu gráfico no intervalo $[-2\pi a, 4\pi a]$ está na Figura 3. Para a ciclóide,

$$f(t) = a(t - \text{sen}\,t) \qquad g(t) = a(1 - \cos t)$$
$$f'(t) = a(1 - \cos t) \qquad g'(t) = a\,\text{sen}\,t$$

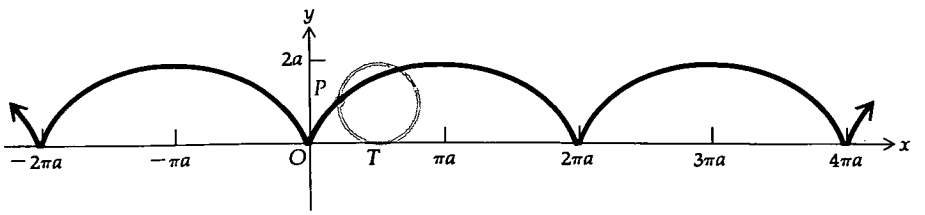


FIGURA 3

As funções f' e g' são contínuas para todo t, mas $f'(t)$ e $g'(t)$ são ambas nulas se $t = 2\pi n$, onde n é um inteiro qualquer. Logo, a ciclóide não é suave. Mas, a ciclóide é seccionalmente suave, pois é suave em cada subintervalo $[2\pi n, 2\pi(n + 1)]$, onde n é um inteiro qualquer. ◀

As Figuras 4 e 5 mostram duas outras curvas seccionalmente suaves. Podemos estender o conceito de uma integral de linha para incluir curvas que sejam seccionalmente suaves.

19.2.3 DEFINIÇÃO

Suponha que a curva C consista em arcos suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Então a **integral de linha** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C será definida por

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{C_i} M(x, y)dx + N(x, y)dy \right)$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre C será definida por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)dt \right)$$

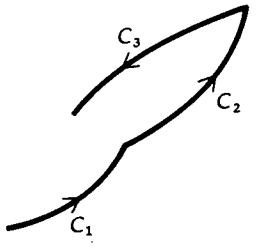


FIGURA 4

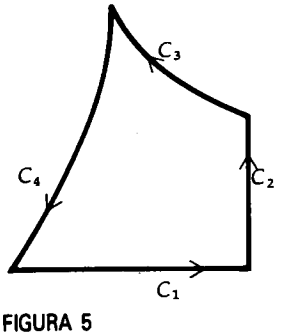


FIGURA 5

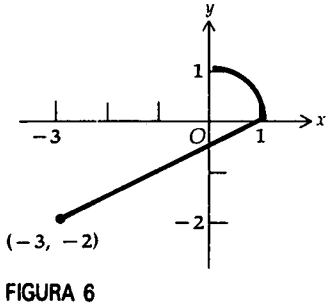


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Calcule a integral de linha

$$\int_C 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy$$

se a curva C consistir no segmento de reta de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ e no arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + x^2 = 1$ de $(1,0)$ a $(0,1)$, percorrido na direção anti-horária.

Solução A Figura 6 mostra a curva C composta dos arcos C_1 e C_2. O arco C_1 é o segmento de reta. Uma equação da reta que passe pelos pontos $(-3, -2)$ e $(1, 0)$ é $x - 2y = 1$. Logo, C_1 pode ser representado parametricamente por

$$x = 1 + 2t \qquad y = t \qquad -2 \leqslant t \leqslant 0$$

O arco C_2, que é o arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, pode ser representado parametricamente por

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

Aplicando a Definição 19.2.2 para cada um dos arcos C_1 e C_2, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy \\
&\quad = \int_{-2}^{0} 4(1 + 2t)t(2\,dt) + [2(1 + 2t)^2 - 3(1 + 2t)t]\,dt \\
&\quad = \int_{-2}^{0} (8t + 16t^2 + 2 + 8t + 8t^2 - 3t - 6t^2)\,dt \\
&\quad = \int_{-2}^{0} (18t^2 + 13t + 2)\,dt \\
&\quad = 6t^3 + \tfrac{13}{2}t^2 + 2t\Big]_{-2}^{0} \\
&\quad = -(-48 + 26 - 4) \\
&\quad = 26
\end{aligned}$$

e

$$\int_{C_2} 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy$$
$$= \int_0^{\pi/2} 4\cos t \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt) + [2\cos^2 t - 3\cos t \operatorname{sen} t](\cos t\,dt)$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-4\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\cos^3 t - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} [-4\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\cos t(1 - \operatorname{sen}^2 t) - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t]\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos t - 6\cos t \operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$
$$= 2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t\Big]_0^{\pi/2}$$
$$= 2 - 2 - 1$$
$$= -1$$

Logo, da Definição 19.2.3,

$$\int_C 4xy\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy = 26 + (-1)$$
$$= 25$$

Vamos estender agora o conceito de integral de linha para três dimensões.

19.2.4 DEFINIÇÃO Seja C uma curva contida numa bola aberta B em R^3 tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tal que f', g' e h' sejam contínuas em $[a, b]$. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial em B, definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

onde M, N e R são contínuas em B. Então, a **integral de linha** de $M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ sobre C será dada por

$$\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$
$$= \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)]\,dt$$

ou, equivalentemente, usando a notação vetorial, a **integral de linha** de $\mathbf{F}$ sobre C será dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t)\,dt$$

Podemos definir o trabalho realizado por um campo de forças sobre uma partícula em movimento ao longo de uma curva em R^3 como uma integral de linha, como foi feito na Definição 19.2.1 para uma curva em R^2. Essa definição será aplicada no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 Uma partícula percorre a cúbica retorcida

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Ache o trabalho total realizado, se o movimento foi causado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \operatorname{sen} \pi y^2\mathbf{k}$$

Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

Solução

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \qquad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \operatorname{sen} \pi y^2\rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2, t^3)\\ &= \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4\rangle\end{aligned}$$

Se W J for o trabalho realizado, então, da notação vetorial para a integral de linha, na Definição 19.2.4

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}\\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt\\ &= \int_0^1 \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4\rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2\rangle\, dt\\ &= \int_0^1 (e^t + 2t^2e^{t^3} + 3t^3 \operatorname{sen} \pi t^4)\, dt\\ &= e^t + \frac{2}{3}e^{t^3} - \frac{3}{4\pi}\cos \pi t^4\Big]_0^1\\ &= e + \frac{2}{3}e - \frac{3}{4\pi}\cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi}\cos 0\\ &= \frac{5}{3}e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é $\left[\frac{5}{3}(e - 1) + \frac{3}{2\pi}\right]$ J.

EXEMPLO 4 Calcule a integral de linha

$$\int_C 3x\, dx + 2xy\, dy + z\, dz$$

se a curva C for a hélice circular definida pelas equações paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Solução Da notação com forma diferencial para uma integral de linha na Definição 19.2.4

$$\begin{aligned}&\int_C 3x\, dx + 2xy\, dy + z\, dz\\ &\quad= \int_0^{2\pi} 3\cos t(-\operatorname{sen} t\, dt) + 2(\cos t)(\operatorname{sen} t)(\cos t\, dt) + t\, dt\\ &\quad= \int_0^{2\pi} (-3 \operatorname{sen} t \cos t + 2\cos^2 t \operatorname{sen} t + t)\, dt\\ &\quad= -\tfrac{3}{2}\operatorname{sen}^2 t - \tfrac{2}{3}\cos^3 t + \tfrac{1}{2}t^2\Big]_0^{2\pi}\\ &\quad= -\tfrac{3}{2}(0) - \tfrac{2}{3}(1) + \tfrac{1}{2}(4\pi^2) + \tfrac{3}{2}(0) + \tfrac{2}{3}(1) + \tfrac{1}{2}(0)\\ &\quad= 2\pi^2\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 19.2

Nos Exercícios de 1 a 22, calcule a integral de linha sobre a curva dada.

1. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.
4. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, do ponto (1, 1) ao ponto (4, −8).
5. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$; C: a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ do ponto (2, 0) no sentido anti-horário.
6. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$.
7. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y\operatorname{sen} x\mathbf{i} - \cos x\mathbf{j}$; C: o segmento de reta de $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\pi, 1)$.
8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y\mathbf{i} + (5x^2 - y)\mathbf{j}$; C: a curva $y = x^3 + 1$ de (1, 2) a (3, 28).
9. $\int_C (x^2 + xy)\,dx + (y^2 - xy)\,dy$; C: a reta $y = x$ da origem ao ponto (2, 2).
10. A integral de linha do Exercício 9; C: a parábola $x^2 = 2y$ da origem ao ponto (2, 2).
11. A integral de linha do Exercício 9; C: o eixo x da origem até (2, 0) e depois a reta $x = 2$ de (2, 0) a (2, 2).
12. $\int_C xy^2\,dx + (x + y)\,dy$; C: a reta $y = -x$ da origem ao ponto (1, −1).
13. A integral de linha do Exercício 12; C: a curva $y = -x^3$ da origem ao ponto (1, −1).
14. A integral de linha do Exercício 12; C: o eixo y da origem a (0, −1) e a seguir, a reta $y = -1$ de (0, −1) a (1, −1).
15. $\int_C 3xy\,dx + (4x^2 - 3y)\,dy$; C: a reta $y = 2x + 3$ de (0, 3) a (3, 9) e a seguir, a parábola $y = x^2$ de (3, 9) a (5, 25).
16. $\int_C (xy - z)\,dx + e^x\,dy + y\,dz$; C: o segmento de reta de (1, 0, 0) a (3, 4, 8).
17. $\int_C (x + y)\,dx + (y + z)\,dy + (x + z)\,dz$; C: o segmento de reta da origem ao ponto (1, 2, 4).
18. A integral de linha do Exercício 16; C: $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.
19. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C: a hélice circular $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
20. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (6y^2 - xz)\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}$; C: a cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
21. A integral de linha do Exercício 20; C: o segmento de reta da origem ao ponto (0, 0, 1); a seguir, o segmento de reta de (0, 0, 1) a (0, 1, 1) e depois o segmento de reta de (0, 1, 1) a (1, 1, 1).
22. A integral de linha do Exercício 20; C: o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1, 1).

Nos Exercícios de 23 a 36, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças dado sobre uma partícula que percorre o arco de curva C. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C: o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1).
24. O campo de forças do Exercício 23; C: o arco da parábola $y^2 = x$, da origem ao ponto (1, 1).
25. $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$; C: o segmento de reta do ponto (1, 1) a (2, 4).
26. O campo de forças do Exercício 25; C: o arco da parábola $y = x^2$, do ponto (1, 1) a (2, 4).
27. O campo de forças do Exercício 25; C: o segmento de reta de (1, 1) a (2, 2) e, a seguir, o segmento de reta de (2, 2) a (2, 4).
28. $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; C: o segmento de reta de $(a, 0)$ a $(0, a)$.
29. O campo de forças do Exercício 28; C: $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$.
30. O campo de forças do Exercício 28; C: o segmento de reta de $(a, 0)$ a (a, a) e depois o segmento de reta de (a, a) a $(0, a)$.
31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C: o segmento de reta da origem ao ponto (1, 1, 1).
32. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C: o segmento de reta da origem ao ponto (4, 0, 3).
33. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.
34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2y + z)\mathbf{k}$; C: o arco do Exercício 33.
35. O campo de forças do Exercício 34; C: o segmento de reta da origem ao ponto (1, 0, 0); a seguir, o segmento de reta de (1, 0, 0) a (1, 1, 0); daí o segmento de reta de (1, 1, 0) a (1, 1, 1).
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

19.3 INTEGRAIS DE LINHA INDEPENDENTES DO CAMINHO

Aprendemos na Secção 19.2 que o valor de uma integral de linha é determinado pelo integrando e pela curva C entre dois pontos P_1 e P_2. Mas, sob certas condições, o valor da integral de linha depende somente do integrando e dos pontos P_1

e P_2, e não do caminho de P_1 e P_2. Tal integral de linha é denominada **independente do caminho**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que o campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

mova uma partícula da origem ao ponto (1, 1). Vamos mostrar que o trabalho total realizado será o mesmo, se o caminho for ao longo (a) do segmento de reta da origem ao ponto (1, 1); (b) do segmento da parábola $y = x^2$ da origem a (1, 1) e (c) do segmento da curva $x = y^3$ da origem a (1, 1).

Se W for a medida do trabalho realizado, então

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4)\, dx + (2xy + 4y - 5)\, dy \tag{1}$$

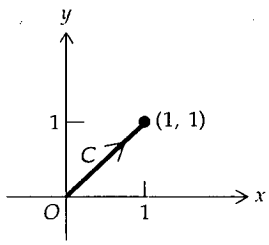


FIGURA 1

(a) Veja a Figura 1. Uma equação de C é $y = x$. Usamos x como parâmetro e expressamos $y = x$ e $dy = dx$ em (1). Então.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4)\, dx + (2x^2 + 4x - 5)\, dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1)\, dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x\Big]_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

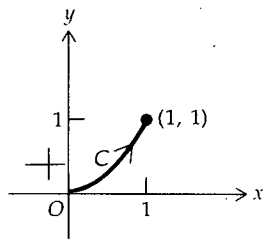


FIGURA 2

(b) Veja a Figura 2. Uma equação de C é $y = x^2$. Novamente, tomamos x como parâmetro e em (1), expressando $y = x^2$ e $dy = 2x\, dx$, temos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4)\, dx + (2x^3 + 4x^2 - 5)2x\, dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4)\, dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x\Big]_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

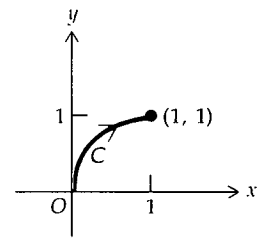


FIGURA 3

(c) Veja a figura 3. Uma equação de C é $x = y^3$. Tomamos y como parâmetro e em (1) expressamos $x = y^3$ e $dx = 3y^2 dy$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4)3y^2\, dy + (2y^4 + 4y - 5)\, dy \\ &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5)\, dy \\ &= y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y\Big]_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

◀

Na Ilustração 1 vimos que o valor da integral de linha é o mesmo em três caminhos diferentes, de (0, 0) a (1, 1). Na verdade, o valor da integral de linha é o mesmo sobre qualquer curva seccionalmente suave da origem a (1, 1); assim, essa integral de linha é independente do caminho. (Esse fato está provado na Ilustração 2.)

Vamos enunciar e demonstrar agora um teorema que, além de dar condições para que a integral de linha seja independente do caminho, também apresenta uma fórmula para encontrar o valor de tal integral de linha.

19.3.1 TEOREMA Seja C qualquer curva seccionalmente suave, contida num disco aberto B em R^2 do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2). Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial conservativo contínuo em B e ϕ for uma função potencial para $\mathbf{F}$, então a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho C e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

Prova Daremos a demonstração para C suave. Caso C seja apenas seccionalmente suave, consideraremos as partes separadamente, aplicando a demonstração seguinte a cada parte suave.

Sejam as equações paramétricas de C

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

Assim, a equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

Além disso, o ponto (x_1, y_1) é $(f(t_1), g(t_1))$ e o ponto (x_2, y_2) é $(f(t_2), g(t_2))$. Como ϕ é uma função potencial para $\mathbf{F}$, $\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ onde $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t))\rangle \cdot \langle f'(t), g'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} [M(f(t), g(t))f'(t)\, dt + N(f(t), g(t))g'(t)\, dt] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Observe que como $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = d\phi(x, y)$, então

$$M(f(t), g(t))f'(t)\, dt + N(f(t), g(t))g'(t)\, dt = d\phi(f(t), g(t))$$

Substituindo essa equação em (2) e aplicando então o segundo teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t_1}^{t_2} d\phi(f(t), g(t)) \\
&= \phi(f(t), g(t))\Big]_{t_1}^{t_2} \\
&= \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)) \\
&= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)
\end{aligned}$$

que é o que queríamos provar. ■

Lembre-se da Secção 17.5, onde mostramos que dizer que o campo vetorial $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo equivale a afirmar que a forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ é exata. Assim, concluímos, do Teorema 19.3.1, que a integral de linha $\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é independente do caminho C, se o integrando for uma diferencial exata.

Devido a semelhança do Teorema 19.3.1 com o segundo teorema fundamental do Cálculo, ele é chamado, às vezes, do **teorema fundamental para as integrais de linha.**

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar o Teorema 19.3.1 para calcular a integral de linha da Ilustração 1:

$$\int_C (y^2 + 2x + 4)\,dx + (2xy + 4y - 5)\,dy$$

Com notação vetorial essa integral de linha torna-se

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Na Ilustração 1 da Secção 19.1 mostramos que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo com a função potencial

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

Logo, do Teorema 19.3.1, a integral de linha é independente do caminho e C pode ser qualquer curva seccionalmente suave de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Além disso, do Teorema 19.3.1,

$$\begin{aligned}\int_C (y^2 + 2x + 4)\,dx + (2xy + 4y - 5)\,dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0)\\ &= 3 - 0\\ &= 3\end{aligned}$$

Esse resultado está de acordo com o obtido na Ilustração 1.

Observe que o integrando dessa integral de linha é uma diferencial exata, pois

$$d\phi(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\,dx + (2xy + 4y - 5)\,dy$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

se $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ e C for o arco no primeiro quadrante da circunferência

$$\mathbf{R}(t) = \pi \cos t\mathbf{i} + \pi \operatorname{sen} t\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

Solução No Exemplo 2 da Secção 17.5 mostramos que

$$\nabla(xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$$

Logo, **F** é um campo vetorial conservativo e aplicamos o Teorema 19.3.1 com $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$. O ponto onde $t = 0$ é $(\pi, 0)$ e o ponto onde $t = \frac{1}{2}\pi$ é $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0)\\ &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1)\\ &= \pi^2 - \pi - 2\end{aligned}$$

Se o valor de uma integral de linha for independente do caminho, não será necessário encontrar uma função potencial ϕ. Vamos ilustrar este procedimento no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Se $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$ e C for qualquer curva seccionalmente suave do ponto $(5, -1)$ ao ponto $(9, -3)$, mostre que o valor da integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

é independente do caminho e calcule-a.

Solução Mostramos, no Exemplo 2 da Secção 19.1, que **F** é um campo vetorial conservativo. Logo, a integral de linha é independente do caminho. Tomamos então, como caminho, o segmento de reta de $(5, -1)$ a $(9, -3)$. Uma equação da reta é $x + 2y = 3$. Expressando $y = -t$ e $x = 3 + 2t$, uma equação vetorial da reta é

$$\mathbf{R}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \qquad 1 \leqslant t \leqslant 3$$

Calculamos o valor da integral de linha aplicando a Definição 19.2.2.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt\\ &= \int_1^3 \mathbf{F}(3 + 2t, -t) \cdot \langle 2, -1\rangle\, dt\\ &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3 + 2t}{t^2}\right\rangle \cdot \langle 2, -1\rangle\, dt\\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3 + 2t}{t^2}\right) dt\\ &= \int_1^3 \frac{3}{t^2}\, dt\\ &= -\frac{3}{t}\Big]_1^3\\ &= 2\end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** No Exemplo 2 da Secção 19.1 obtivemos a seguinte função potencial para o campo vetorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$:

$$\phi(x, y) = \frac{x}{y} + K$$

onde K é uma constante arbitrária. Assim, se o Teorema 19.3.1 for usado para calcular a integral de linha do Exemplo 2, temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(9, -3) - \phi(5, -1)\\ &= \left(\frac{9}{-3} + K\right) - \left(\frac{5}{-1} + K\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado anterior. ◀

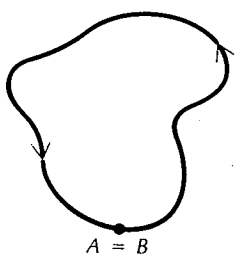


FIGURA 4

Observe, na Ilustração 3, que a constante arbitrária K não aparece, pois $K - K = 0$. Daqui para frente, quando aplicarmos o Teorema 19.3.1, omitiremos a constante arbitrária para a função potencial; o que significa escolher como função potencial aquela para a qual $K = 0$.

Se C for a curva definida pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

o ponto inicial $A(f(a), g(a))$ e o ponto $B(f(b), g(b))$ coincidem, então a curva C é dita **fechada**. A Figura 4 mostra uma curva fechada onde os pontos A e B coincidem. O seguinte teorema a respeito de integrais de linha de um campo vetorial conservativo sobre uma curva fechada seccionalmente suave decorre imediatamente do Teorema 19.3.1.

19.3.2 TEOREMA Se C for qualquer curva fechada seccionalmente suave, contida em um disco aberto B em R^2 e se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial conservativo em B, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

Prova Aplicamos o Teorema 19.3.1, e como C é fechada, o ponto (x_1, y_1) coincide com o ponto (x_2, y_2). Logo,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3 Uma partícula movimenta-se sobre a circunferência

$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Ache o trabalho total realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(4\ln 3y + \frac{1}{x}\right)\mathbf{i} + \frac{4x}{y}\mathbf{j}$$

Solução Seja

$$M(x, y) = 4\ln 3y + \frac{1}{x} \qquad N(x, y) = \frac{4x}{y}$$

$$M_y(x, y) = \frac{4}{y} \qquad N_x(x, y) = \frac{4}{y}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, **F** é conservativo. Além disso, C é uma curva fechada. Logo, se W for a medida do trabalho realizado, temos, do Teorema 19.3.2,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$
$$= 0$$

Vamos estender agora nossa discussão para funções de três variáveis. O enunciado e a demonstração do teorema a seguir são análogos aos do Teorema 19.3.1. A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 32).

19.3.3 TEOREMA Seja C qualquer curva seccionalmente suave contida em uma bola aberta B em R^3, do ponto (x_1, y_1, z_1) ao ponto (x_2, y_2, z_2). Se **F** for um campo vetorial conservativo em B e ϕ for uma função potencial para **F**, então a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho C, e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 5 da Secção 17.5 mostramos que o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$, e

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3$$

Assim, **F** é um campo vetorial conservativo. Logo, se C for uma curva seccionalmente suave de $(0, 0, 0)$ a $(1, -2, \pi)$, segue do Teorema 19.3.3 que a integral de linha

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

será independente do caminho e seu valor será

$$f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) = (e \operatorname{sen} \pi - 4\pi + 4 + \pi^3) - 0$$
$$= \pi^3 - 4\pi + 4$$ ◀

EXEMPLO 4 Mostre que a integral de linha

$$\int_C (4x + 2y - z)\, dx + (2x - 2y + z)\, dy + (-x + y + 2z)\, dz$$

é independente do caminho e calcule a integral, se C for qualquer curva seccionalmente suave, de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solução A integral de linha é independente do caminho se o integrando for uma diferencial exata. Seja

$M(x, y, z) = 4x + 2y - z$	$N(x, y, z) = 2x - 2y + z$	$R(x, y, z) = -x + y + 2z$
$M_y(x, y, z) = 2$	$N_x(x, y, z) = 2$	$R_x(x, y, z) = -1$
$M_z(x, y, z) = -1$	$N_z(x, y, z) = 1$	$R_y(x, y, z) = 1$

Como

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \qquad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \qquad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

o integrando é uma diferencial exata e a integral de linha é independente do caminho. Tomamos como caminho o segmento de reta de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$. Um conjunto de números direcionais dessa reta é $[5, -4, 1]$. Logo, as equações da reta são

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$$

As equações paramétricas do segmento de reta são

$$x = -5t - 1 \qquad y = 4t + 2 \qquad z = -t \qquad -1 \leqslant t \leqslant 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_C (4x + 2y - z)\,dx + (2x - 2y + z)\,dy + (-x + y + 2z)\,dz \\
&\quad = \int_{-1}^{0} [4(-5t - 1) + 2(4t + 2) - (-t)](-5\,dt) \\
&\qquad\qquad + \int_{-1}^{0} [2(-5t - 1) - 2(4t + 2) + (-t)](4\,dt) \\
&\qquad\qquad\quad + \int_{-1}^{0} [-(-5t - 1) + (4t + 2) + 2(-t)](-dt) \\
&\quad = \int_{-1}^{0} (-28t - 27)\,dt \\
&\quad = -14t^2 - 27t\Big]_{-1}^{0} \\
&\quad = -13
\end{aligned}$$

A integral de linha do Exemplo 4 pode ser calculada se acharmos uma função potencial para o campo vetorial conservativo $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ e aplicarmos o Teorema 19.3.3. Você deverá fazer isso no Exercício 31.

EXEMPLO 5 Suponha que $\mathbf{F}$ seja o campo de forças gravitacional exercido por uma partícula com M unidades de massa na origem sobre uma partícula com massa unitária no ponto $P(x, y, z)$. Então, da Secção 19.1,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Ache o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ sobre a partícula com massa unitária no movimento, ao longo de uma curva suave C de $(0, 3, 4)$ a $(2, 2, 1)$.

Solução Na Ilustração 2 da Secção 19.1 mostramos que $\mathbf{F}$ é conservativo e que uma função potencial para $\mathbf{F}$ é dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Se W for a medida do trabalho realizado sobre a partícula com massa unitária ao longo de C,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Do Teorema 19.3.3, a integral de linha é independente do caminho e

$$\begin{aligned} W &= \phi(2, 2, 1) - \phi(0, 3, 4) \\ &= \frac{GM}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} - \frac{GM}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{GM}{3} - \frac{GM}{5} \\ &= \tfrac{2}{15}GM \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora como os resultados dessa secção levam a conclusões importantes em Física. Se o movimento de uma partícula for causado por um campo de forças conservativo **F**, a **energia potencial** da partícula no ponto (x, y, z) será definida como sendo um campo escalar E, tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla E(x, y, z)$$

Isto é, $-E$ é uma função potencial de **F**. Usaremos a notação $E(P)$ para denotar a energia potencial da partícula no ponto P. Se W for a medida do trabalho realizado por **F** ao mover uma partícula ao longo de uma curva seccionalmente suave, C, do ponto A até o ponto B, então, do Teorema 19.3.3,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ W &= -E(x, y, z)\Big]_A^B \\ W &= -[E(B) - E(A)] \\ W &= E(A) - E(B) \end{aligned} \tag{3}$$

Assim, W é a diferença da energia potencial da partícula em A e B.

Suponha agora que a partícula esteja num ponto A, no tempo t_1 e em B no tempo t_2 e que a curva C tenha a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

Então, os vetores velocidade e aceleração em t são $\mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{A}(t)$, definidos por

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \qquad \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

A velocidade escalar da partícula em t é denotada por $v(t)$, onde $v(t) = \|\mathbf{V}(t)\|$. Então, outra fórmula para o cálculo de W é dada por

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\ W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t)\, dt \end{aligned} \tag{4}$$

A segunda lei do movimento de Newton estabelece que se a força **F** estiver agindo sobre uma partícula com m unidades de massa, então

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{A}(t) \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{V}'(t) \end{aligned}$$

Substituindo essa equação em (4), temos

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m[\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)]\, dt$$

Como $D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = 2\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t) = [v(t)]^2$, obtemos

$$W = \tfrac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)]\, dt$$

$$W = \tfrac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[v(t)]^2\, dt$$

$$W = \tfrac{1}{2}m[v(t)]^2\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$W = \tfrac{1}{2}m[v(t_2)]^2 - \tfrac{1}{2}m[v(t_1)]^2 \tag{5}$$

Em Física, a **energia cinética** de uma partícula é definida como sendo $\frac{1}{2}mv^2$. Logo, a equação (5) estabelece que o trabalho realizado quando uma partícula se movimenta ao longo de C, do ponto A ao ponto B, é igual à variação na energia cinética da partícula. Se usarmos a notação $K(P)$ para indicar a energia cinética de uma partícula no ponto P, a equação (5) poderá ser escrita como

$$W = K(B) - K(A)$$

Igualando os valores de W de (3) e da equação acima, temos

$$E(A) - E(B) = K(B) - K(A)$$
$$E(A) + K(A) = E(B) + K(B)$$

A igualdade acima estabelece que as somas das energias potencial e cinética nos pontos inicial A e final B são iguais. Como A e B podem ser quaisquer pontos sobre C, a soma das duas energias é constante ao longo de C; isto é, a energia total de uma partícula permanece inalterada durante o movimento. Esse fato é um dos grandes princípios da Física, chamado de **lei de conservação da energia**. É por essa razão que a expressão *conservativo* é usada para um campo de forças que é um gradiente.

EXERCÍCIOS 19.3

Nos Exercícios de 1 a 12, use os resultados do exercício indicado nos Exercícios 19.1 para provar que o valor da integral de linha dada é independente do caminho. Então calcule a integral de linha, aplicando o Teorema 19.3.1 ou o Teorema 19.3.3 e usando a função potencial encontrada no exercício indicado. Em cada exercício, C é uma curva qualquer seccionalmente suave, ligando o ponto A ao ponto B.

1. $\int_C y\, dx + x\, dy$; A é $(1, 4)$ e B é $(3, 2)$; Exercício 21.
2. $\int_C x\, dx + y\, dy$; A é $(-5, 2)$ e B é $(1, 3)$; Exercício 22.
3. $\int_C e^x \operatorname{sen} y\, dx + e^x \cos y\, dy$; A é $(0, 0)$ e B é $(2, \frac{1}{2}\pi)$; Exercício 23.
4. $\int_C (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y \cosh x)\, dx + (\cos y \cosh x - \operatorname{sen} y \operatorname{senh} x)\, dy$
   A é $(1, 0)$ e B é $(2, \pi)$; Exercício 24.
5. $\int_C (2xy^2 - y^3)\, dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\, dy$;
   A é $(-3, -1)$ e B é $(1, 2)$; Exercício 25.
6. $\int_C (3x^2 + 2y - y^2e^x)\, dx + (2x - 2ye^x)\, ay$;
   A é $(0, 2)$ e B é $(1, -3)$; Exercício 26.
7. $\int_C (x^2 - y)\, dx - (x - 3z)\, dy + (z + 3y)\, dz$;
   A é $(-3, 1, 2)$ e B é $(3, 0, 4)$; Exercício 27.
8. $\int_C yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$; A é $(0, -2, 5)$ e B é $(4, 1, -3)$; Exercício 28.
9. $\int_C (ze^x + e^y)\, dx + (xe^y - e^z)\, dy + (-ye^z + e^x)\, dz$;
   A é $(1, 0, 2)$ e B é $(0, 2, 1)$; Exercício 29.
10. $\int_C (\operatorname{tg} y + 2xy \sec z)\, dx + (x \sec^2 y + x^2 \sec z)\, dy + \sec z(x^2y \operatorname{tg} z - \sec z)\, dz$
    A é $(2, \frac{1}{4}\pi, 0)$ e B é $(3, \pi, \pi)$; Exercício 30.
11. $\int_C (2x \cos y - 3)\, dx - (x^2 \operatorname{sen} y + z^2)\, dy - (2yz - 2)\, dz$;
    A é $(-1, 0, 3)$ e B é $(1, \pi, 0)$; Exercício 31.

12. $\int_C (2y^3 - 8xz^2)\,dx + (6xy^2 + 1)\,dy - (8x^2z + 3z^2)\,dz$; A é $(2, 0, 0)$ e B é $(3, 2, 1)$; Exercício 32.

Nos Exercícios de 13 a 20, mostre que o valor da integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ *para os dados F e C é independente do caminho e calcule a integral.*

13. $\mathbf{F}(x, y) = 2(x - y)\mathbf{i} + 2(3y - x)\mathbf{j}$; C é o arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 9$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y.
14. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\mathbf{i} + (3x^2 - 4xy + 3y^2)\mathbf{j}$; C é o arco do primeiro quadrante da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, do ponto sobre o eixo x ao ponto sobre o eixo y.
15. $\mathbf{F}(x, y) = (4e^{2x} - 3e^xe^y)\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^xe^y)\mathbf{j}$; C é o arco da parábola $y^2 = 4x$, do vértice ao ponto de intersecção entre a parábola e a corda que passa pelo foco e é paralela à diretriz, no primeiro quadrante.
16. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$; C é o segmento de reta $3x + 4y = 12$, do ponto onde ela intercepta o eixo y ao ponto onde ela intercepta o eixo x.
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; C é o traço do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$, no plano xz, do eixo x positivo ao eixo z positivo.
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$; C é o traço da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, do plano yz, do eixo y positivo ao eixo z positivo.
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$; C é qualquer curva seccionalmente suave, do ponto $(\ln 2, 1, 1)$ ao ponto $(\ln 2, 2, 2)$.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} + \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{y} = \frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$; C é qualquer curva seccionalmente suave, do ponto $(1, 2, -1)$ ao ponto $(2, -4, -2)$.

Nos Exercícios de 21 a 30, mostre que o valor da integral de linha é independente do caminho e calcule o valor de qualquer maneira conveniente. Em cada exercício C é uma curva qualquer, seccionalmente suave, ligando o ponto A ao ponto B.

21. $\int_C (2y - x)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy$; A é $(0, -1)$ e B é $(1, 2)$.
22. $\int_C (\ln x + 2y)\,dx + (e^y + 2x)\,dy$; A é $(3, 1)$ e B é $(1, 3)$.
23. $\int_C \operatorname{tg} y\,dx + x + x \sec^2 y\,dy$; A é $(-2, 0)$ e B é $(4, \frac{1}{4}\pi)$.
24. $\int_C \operatorname{sen} y\,dx + (\operatorname{sen} y + x \cos y)\,dy$; A é $(-2, 0)$ e B é $(2, \frac{1}{6}\pi)$.
25. $\int_C \frac{2y}{(xy + 1)^2}\,dx + \frac{2x}{(xy + 1)^2}\,dy$; A é $(0, 2)$ e B é $(1, 0)$. A e $(1, 0, 0)$ e B é $(1, 2, 3)$.
27. $\int_C (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$; A é $(0, 0, 0)$ e B é $(1, 1, 1)$.
28. $\int_C (yz + x)\,dx + (xz + y)\,dy + (xy + z)\,dz$; A é $(0, 0, 0)$ e B é $(1, 1, 1)$.
29. $\int_C (e^x \operatorname{sen} y + yz)\,dx + (e^x \cos y + z \operatorname{sen} y + xz)\,dy + (xy - \cos y)\,dz$; A é $(2, 0, 1)$ e B é $(0, \pi, 3)$.
30. $\int_C (2x \ln yz - 5ye^x)\,dx - (5e^x - x^2y^{-1})\,dy + (x^2z^{-1} + 2z)\,dz$; A é $(2, 1, 1)$ e B é $(3, 1, e)$.
31. Calcule a integral de linha do Exemplo 4, achando uma função potencial para o campo vetorial conservativo
$$(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$$
e aplicando o Teorema 19.3.3.
32. Prove o Teorema 19.3.3.

Nos Exercícios de 33 a 36, ache o trabalho total realizado pelo campo de forças F ao deslocar uma partícula ao longo de um arco da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons. (Sugestão: primeiro mostre que **F** *é conservativo.)*

33. $\mathbf{F}(x, y) = 3(x + y)^2\mathbf{i} + 3(x + y)^2\mathbf{j}$; C: o arco da parábola $y = x^2$ do vértice ao ponto $(2, 4)$.
34. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 5y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 5x + 4xy)\mathbf{j}$; C é o quarto da circunferência $\mathbf{R}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$.
35. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k}$; C: o arco da cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ de $t = 1$ a $t = 2$.
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y^2z\mathbf{i} + 8xyz\mathbf{j} + 4(3z^3 + xy^2)\mathbf{k}$; C: o arco da hélice circular $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ de $t = 0$ a $t = \frac{1}{3}\pi$.
37. Se **F** for o campo de força definido por
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
ache o trabalho realizado por **F** ao mover uma partícula ao longo do segmento de reta do ponto $(3, 0, 0)$ a $(3, 0, 4)$. Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) usando uma função potencial para **F**; (b) não usando uma função potencial para **F**.

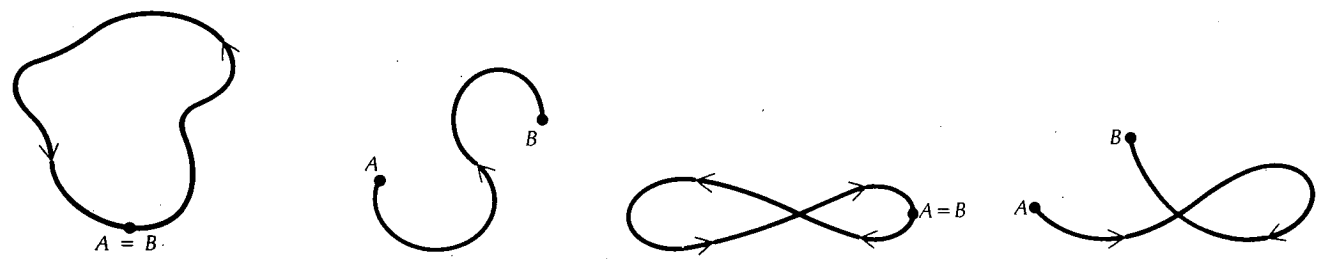
19.4 O TEOREMA DE GREEN

Há um teorema que expressa uma integral dupla sobre um região plana R em termos de uma integral de linha ao longo da fronteira de R, chamado Teorema de Green. Esse nome é uma homenagem ao matemático e físico inglês George Green (1793-1841), que introduziu o teorema em um trabalho escrito sobre aplicações de Matemática à Eletricidade e Magnetismo. Antes de enunciar o teorema é necessário revisar e introduzir alguns termos referentes a curvas planas.

A definição de curva *suave* está na Secção 19.2 e a de curva *fechada*, na Secção 19.3. Uma curva C é chamada de **simples**, caso não se intercepte. Isto é, se uma equação vetorial de C for

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

e se A for o ponto $(f(a), g(a))$ e B o ponto $(f(b), g(b))$, então C será **simples** entre A e B se $(f(t_1), g(t_1))$ não for o mesmo ponto que $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 e t_2, distintos, no intervalo aberto (a, b).



(a) Simples e fechada (b) Simples mas não fechada (c) Fechada mas não simples (d) Nem simples, nem fechada

FIGURA 1

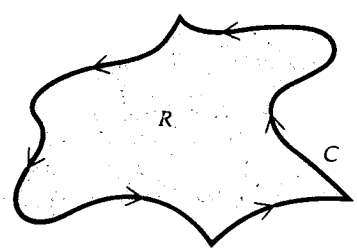


FIGURA 2

A circunferência e a elipse são exemplos de curvas fechadas simples e suaves. Na Figura 1(a)-(d) aparecem mais exemplos de curvas suaves que podem ou não ser simples e fechadas. Em (a) a curva é tanto simples como fechada; em (b) a curva é simples, mas não fechada; em (c) a curva é fechada, mas não simples e em (d) a curva nem é simples, nem fechada.

No enunciado do teorema de Green iremos nos referir a uma integral de linha ao longo de uma curva C, fechada, simples e seccionalmente suave que forma a fronteira de uma região R no plano e o sentido ao longo de C é anti-horário. Na Figura 2 é mostrada tal região R com a curva de fronteira C requerida. A integral de linha em torno de C no sentido anti-horário é denotada por $\oint_C$.

19.4.1 TEOREMA
Teorema de Green

Sejam M e N funções de duas variáveis x e y, de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto B em R^2. Se C for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em B, e se R for a região limitada por C, então

$$\oint_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

A demonstração do teorema de Green para todas as regiões limitadas por curvas que são fechadas, simples e seccionalmente suaves é matéria de um curso de Cálculo Avançado. Mas, provaremos o teorema para um tipo particular de região, onde cada reta horizontal ou vertical intercepta-a em no máximo dois pontos. A prova está a seguir.

Prova Seja R a região do plano xy que pode ser definida por,

$$R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\} \tag{1}$$

no

$$R = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d, g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\} \tag{2}$$

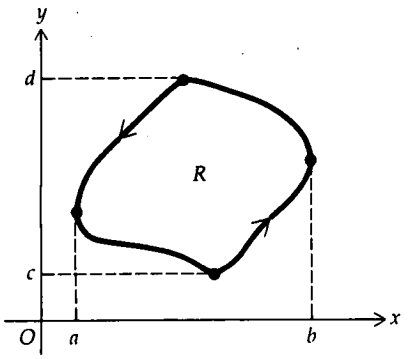


FIGURA 3

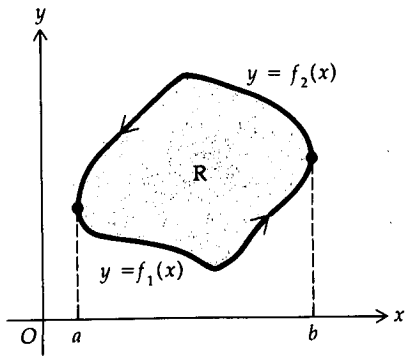


FIGURA 4

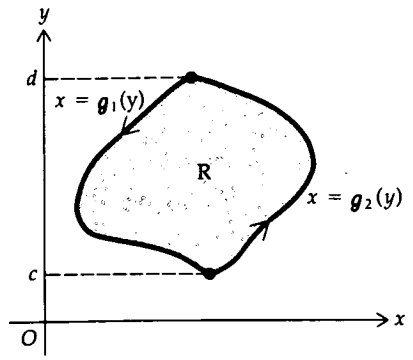


FIGURA 5

onde as funções f_1, f_2, g_1 e g_2 são suaves. A Figura 3 mostra tal região R, que deve ser considerada definida por (1) na Figura 4 e por (2) na Figura 5.

A prova consistirá em mostrar que

$$\oint_C M(x, y)\, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA \tag{3}$$

e

$$\oint_C N(x, y)\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dA \tag{4}$$

Para provar (3), tratamos R como a região definida por (1). Consulte a Figura 4. Seja C_1 o gráfico de $y = f_1(x)$ de $x = a$ a $x = b$; isto é, C_1 é a parte mais baixa da curva de fronteira orientada C, indo da esquerda para a direita. Seja C_2 o gráfico de $y = f_2(x)$ de $x = b$ a $x = a$; isto é, C_2 é a parte superior da curva de fronteira orientada C, que vai da direita para a esquerda. Consideremos a integral de linha $\oint_C M(x, y)\, dx$.

$$\begin{aligned}
\oint_C M(x, y)\, dx &= \int_{C_1} M(x, y)\, dx + \int_{C_2} M(x, y)\, dx \\
&= \int_a^b M(x, f_1(x))\, dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\, dx \\
&= \int_a^b M(x, f_1(x))\, dx - \int_a^b M(x, f_2(x))\, dx \\
&= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))]\, dx
\end{aligned} \tag{5}$$

Vamos considerar agora a integral dupla $\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA$, onde R é ainda tratada como sendo definida por (1). Então,

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy \right) dx \\
&= \int_a^b M(x, y)\Big]_{f_1(x)}^{f_2(x)}\, dx \\
&= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\, dx
\end{aligned} \tag{6}$$

Comparando (5) e (6), segue que a igualdade (3) é válida.

Para provar (4), R é considerada como uma região definida por (2), como na Figura 5. Os detalhes da demonstração serão deixados como exercício (veja o Exercício 43).

Somando os termos correspondentes das igualdades (3) e (4), obtemos o teoremas de Green para essa região R. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Usaremos o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2\, dx + 4xy\, dy$, onde C é a curva fechada que consiste no arco da pa-

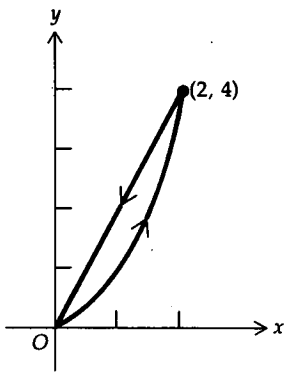


FIGURA 6

rábola $y = x^2$, da origem ao ponto (2, 4) e no segmento de reta de (2, 4) até a origem. A região R com a curva de fronteira orientada C está mostrada na Figura 6. Do teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 y^2\Big]_{x^2}^{2x} dx \\
&= \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx \\
&= \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{64}{15}
\end{aligned}$$

Para mostrar a vantagem de usar o teorema de Green, vamos calcular a mesma integral de linha pelo método da Secção 19.2. Se C_1 for o arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) até (2, 4) e C_2 for o segmento de reta de (2, 4) até (0, 0), então

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \oint_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy + \oint_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy$$

As equações paramétricas de C_1 são

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} y^2\,dx + 4xy\,dy &= \int_0^2 (t^2)^2\,dt + 4(t)(t^2)(2t\,dt) \\
&= \int_0^2 9t^4\,dt \\
&= \tfrac{9}{5}t^5\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{288}{5}
\end{aligned}$$

O arco C_2 pode ser representado parametricamente por

$$x = t \qquad y = 2t \qquad \text{de } t = 2 \text{ a } t = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_2} y^2\,dx + 4xy\,dy &= \int_2^0 (2t)^2\,dt + 4(t)(2t)(2\,dt) \\
&= \int_2^0 20t^2\,dt \\
&= \tfrac{20}{3}t^3\Big]_2^0 \\
&= -\tfrac{160}{3}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_C y^2\,dx + 4xy\,dy = \tfrac{288}{5} - \tfrac{160}{3}$$
$$= \tfrac{64}{15}$$

que está de acordo com o resultado obtido, usando o teorema de Green. ◀

EXEMPLO 1 Use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se o movimento for causado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons.

Solução Se W J for o trabalho realizado, então

$$W = \oint_C (\operatorname{sen} x - y)\,dx + (e^y - x^2)\,dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Do teorema de Green,

$$W = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x - y)\right] dA$$
$$= \iint_R (-2x + 1)\,dA$$

Usaremos coordenadas polares para calcular a integral dupla, com $x = r\cos\theta$ e $dA = r\,dr\,d\theta$. Então,

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r\cos\theta + 1)r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a (-2r^2\cos\theta + r)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^2}{2}\Big]_0^a\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}a^3\cos\theta + \frac{a^2}{2}\right)d\theta$$
$$= -\frac{2}{3}a^3\operatorname{sen}\theta + \frac{a^2}{2}\theta\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \pi a^2$$

Logo, o trabalho realizado foi de πa^2 J.

O teorema a seguir, que é uma conseqüência do teorema de Green, fornece um método útil para o cálculo da área de uma região limitada por uma curva seccionalmente suave, simples e fechada.

19.4.2 TEOREMA Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples e seccionalmente suave, e A unidades de área for a área de R, então

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Prova No enunciado do teorema de Green, seja $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Então,

$$\oint_C -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}y\right)\right] dA$$

$$= \iint_R \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) dA$$

$$= \iint_R dA$$

Como $\iint_R dA$ é a medida da área de R,

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = A$$ ■

EXEMPLO 2 Use o Teorema 19.4.2 para encontrar a área da região encerrada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução As equações paramétricas da elipse são

$$x = a\cos t \qquad y = b\,\text{sen}\,t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Então $dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$ e $dy = b\cos t\,dt$. Se C for a elipse e A unidades for a área da região encerrada por C, então, do Teorema 19.4.2,

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t\,dt) - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t\,dt)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt$$

$$= \pi ab$$

Logo, a área é πab unidades.

EXEMPLO 3 Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy$$

onde C é a elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solução Do teorema de Green,

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 3y)\right] dA$$

$$= \iint_R (4 + 3)\,dA$$

$$= 7 \iint_R dA$$

A integral dupla $\iint_R dA$ é a medida da área da região encerrada pela elipse. Do Exemplo 2, com $a = 3$ e $b = 2$, a medida da área da região encerrada pela elipse é 6π. Logo,

$$\oint_C (x^4 - 3y)\,dx + (2y^3 + 4x)\,dy = 42\pi$$

Há duas formas vetoriais do teorema de Green que iremos obter. Seja C uma curva fechada, simples e seccionalmente suave no plano xy. Vamos supor que uma equação vetorial de C seja

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

e $x = f(s)$, $y = g(s)$, onde s unidades são o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C ao ponto P em C. Então, se $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P, do Teorema 14.6.3 temos $\mathbf{T}(s) = D_s\,\mathbf{R}(s)$. Assim,

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{7}$$

O vetor $\mathbf{N}(s)$, definido por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \tag{8}$$

é o vetor normal unitário de C em P. Para verificar esse fato, observe que $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = 0$ e os módulos de $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são iguais. O vetor normal unitário, definido por (8), foi escolhido ao invés de seu negativo, de tal forma que quando o sentido de percurso ao longo de C for anti-horário, $\mathbf{N}(s)$ irá apontar para fora da região R, limitada por C e será chamado de **normal exterior unitário**. Veja a Figura 7. Seja

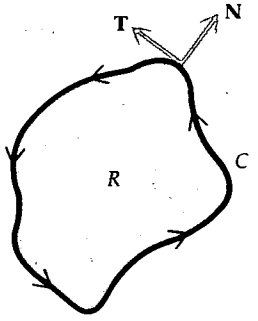


FIGURA 7

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N satisfazem as hipóteses do teorema de Green. Como

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\,ds = [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds$$

$$= M(x, y)\,dy - N(x, y)\,dx$$

então

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\,ds = \oint_C -N(x, y)\,dx + M(x, y)\,dy$$

Aplicando o teorema de Green à integral de linha à direita dessa relação teremos

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\, ds = \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N)\right] dA$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

Essa forma vetorial do teorema de Green será enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome é uma homenagem ao matemático e cientista alemão Karl Gauss (1777-1855).

19.4.3 TEOREMA
Teorema da Divergência de Gauss no Plano

Sejam as funções M e N, a curva C e a região R idênticas àquelas que foram definidas no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{N}(s)$ for o vetor normal exterior unitário de C em P, onde s unidades é o comprimento do arco medido no sentido anti-horário de um ponto particular P_0 em C até P, então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

EXEMPLO 4 Verifique o teorema da divergência de Gauss no plano se

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

e R for a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução A fronteira de R é a circunferência unitária que pode ser representada parametricamente por

$$x = \cos s \qquad y = \operatorname{sen} s \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi$$

onde s unidades é o comprimento de arco entre o ponto onde $s = 0$ ao ponto P em C. Então, uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi$$

De (8), o vetor normal exterior unitário é

$$\mathbf{N}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j}$$

Em um ponto $P(\cos s, \operatorname{sen} s)$ em C, $\mathbf{F}$ é $2 \operatorname{sen} s\, \mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}$. Logo,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}) \cdot (\cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j})\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s \cos s + 5 \operatorname{sen} s \cos s)\, ds$$

$$= 7 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s \cos s\, ds$$

$$= \tfrac{7}{2} \operatorname{sen}^2 s \Big]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

Como $M = 2y$, $\dfrac{\partial M}{\partial x} = 0$, e como $N = 5x$, $\dfrac{\partial N}{\partial y} = 0$. Assim,

$$\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$
$$= 0$$

Portanto, verificamos o teorema da divergência de Gauss no plano para **F** e R.

Observe, no Exemplo 4, que é mais fácil calcular $\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$ que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$.

Se **F** for um campo vetorial e div **F** = 0, então **F** será dito **corpo de divergência nula**. O campo vetorial no Exemplo 4 é de divergência nula. No estudo de Hidrodinâmica (movimento fluido), se o campo de velocidades de um fluido for de divergência nula, ele será chamado de **incompressível**. Na teoria de Eletricidade e Magnetismo, um campo vetorial de divergência nula é chamado de **solenoidal**.

Vamos usar agora o teorema da divergência de Gauss no plano, para dar uma interpretação física da divergência de um campo vetorial. Sejam as funções M e N, a região R e a curva C, conforme foram definidas no teorema de Green. Suponhamos que **F** seja um campo de velocidades de um fluido bidimensional (profundidade constante) e **F** seja definida por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Suponhamos que o fluido flua através de uma região R, tendo a curva C como fronteira, e que o sentido ao longo de C seja anti-horário. Vamos supor que o fluido tenha uma densidade constante em R e, por conveniência, seja unitária a medida da densidade. O fluxo do campo de velocidades **F** através de C é a taxa segundo a qual o fluido atravessa C na direção perpendicular a C*. Mostraremos como esse fluxo pode ser expresso como uma integral de linha.

Sejam s unidades o comprimento de arco da curva C, medido a partir de um ponto particular P_0, até o ponto P. Vamos dividir a curva C em n arcos e seja $\Delta_i s$ o comprimento do i-ésimo arco contendo o ponto $P_i(x_i, y_i)$, onde s_i é o comprimento de arco de C, de P_0 até P_i. Como **F** é contínua, uma aproximação da velocidade do fluido em cada ponto do i-ésimo arco é $\mathbf{F}(x_i, y_i)$. A quantidade de fluido que atravessa o arco por unidade de tempo é dada aproximadamente pela área de um paralelogramo, tendo um par de lados opostos de comprimento $\Delta_i s$ e uma altura de comprimento $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)$, onde $\mathbf{N}(s_i)$ é o vetor normal exterior unitário a C em $P_i(x_i, y_i)$. Veja a Figura 8. A medida da área do paralelogramo é $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\, \Delta_i s$. A quantidade total de fluido que atravessa C por unidade de tempo é, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)\, \Delta_i s$$

Tomando o limite dessa soma quando n cresce sem limitação e quando cada $\Delta_i s$ tende a zero, obtemos a integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s)\, ds$$

que é chamada de **fluxo** de **F** através de C.

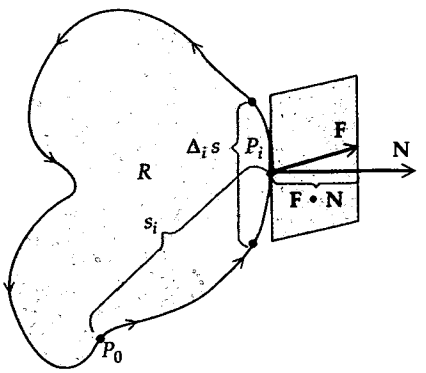


FIGURA 8

*N. do R.: A taxa refere-se ao tempo e o fluxo é a quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa C; positivo se de dentro para fora e negativo, em caso contrário.

Agora, seja $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ um ponto particular na região R. Consideremos uma circunferência tendo seu centro em $\overline{P}$ e tendo um pequeno raio δ, e vamos denotar essa circunferência por C_δ. Seja R_δ a região encerrada por C_δ. Então

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta = \oint_{C_\delta} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}\, ds$$

Aplicando o Teorema 19.4.3, temos

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta = \iint_{R_\delta} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

Se M_x e N_y forem contínuas em R_δ, então div $\mathbf{F}$ será contínua lá e para δ pequeno, div $\mathbf{F}$ em R_δ será aproximadamente div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})$. Assim,

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta \approx \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})\, dA$$

Como div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})$ é constante e $\iint_{R_\delta} dA$ é a área da circunferência de raio δ, temos

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C_\delta \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y})\, (\pi\delta^2) \tag{9}$$

Lembre-se de que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de C_δ é a quantidade total de fluido que atravessa C_δ por unidade de tempo. Logo, de (9), div $\mathbf{F}(x, y)$ pode ser interpretada como a medida aproximada da taxa de fluido por unidade de área, afastando-se do ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Se div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) > 0$, dizemos que o fluido tem uma **fonte** em $(\overline{x}, \overline{y})$. Se div $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) < 0$, dizemos que o fluido tem um **sumidouro** em $(\overline{x}, \overline{y})$. Se $\mathbf{F}$ for de divergência nula em todos os pontos de uma região, então não existem nem fontes, nem sumidouros na região. Conforme mencionado acima, em tais casos o fluido é incompressível.

A palavra *fluxo* normalmente significa escoamento; contudo, o termo *fluxo* é aplicado a campos vetoriais em geral, mesmo que nada tenham a ver com velocidade de um fluido. Assim, se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial

$$\boxed{\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds} \tag{10}$$

EXEMPLO 5 O campo de velocidades de um fluido é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) \equiv (5x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y)\mathbf{j}$$

Ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R, limitada por uma curva fechada, suave, C e cuja área seja 150 cm².

Solução A taxa de escoamento do fluido é dada pelo fluxo de $\mathbf{F}$ através de C. De (10) e do teorema da divergência de Gauss no plano,

$$\begin{aligned}
\text{fluxo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds \\
&= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(5x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y)\right] dA \\
&= \iint_R (5 - 3)\, dA \\
&= 2 \iint_R dA
\end{aligned}$$

Como a área de R é 150 cm², $\iint_R dA = 150$. Logo,

$$\text{fluxo} = 300$$

Portanto, a taxa de escoamento do fluido para fora da região é 300 cm² por unidade de tempo.

Para obter a segunda forma vetorial do teorema de Green, vamos considerar o produto escalar de $\mathbf{F}(x, y)$ pelo vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$, definido pela igualdade (7). Temos

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds = [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) ds$$

$$= M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

Assim,

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds = \oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{11}$$

O rotacional de $\mathbf{F}$ em duas dimensões foi definido na Secção 19.1 como

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Logo,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Assim sendo, dessa equação e de (11), a fórmula do teorema de Green pode ser escrita como

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Essa forma vetorial do teorema de Green está enunciada formalmente como o teorema a seguir, cujo nome foi dado em homenagem ao matemático e físico irlandês George Stokes (1819-1903).

19.4.4 TEOREMA
Teorema de Stokes no Plano

Sejam as funções M e N, a curva C e a região R definidas como no teorema de Green. Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{T}(s)$ for o vetor tangente unitário de C em P, onde s unidades é o comprimento de arco de C medido a partir de um ponto P_0 até P, então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

EXEMPLO 6 Verifique o teorema de Stokes no plano para $\mathbf{F}$ e R do Exemplo 4.

Solução Como no Exemplo 4, o campo vetorial $\mathbf{F}$ é definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

e uma equação vetorial de C é

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$,

$$\mathbf{T}(s) = -\operatorname{sen} s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}$$

Num ponto $P(\cos s, \operatorname{sen} s)$ em C, $\mathbf{F}$ é $2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}) \cdot (-\operatorname{sen} s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j})\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2 \operatorname{sen}^2 s + 5 \cos^2 s)\, ds \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2}\, ds + 5 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2}\, ds \\
&= -s + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2s + \tfrac{5}{2}s + \tfrac{5}{4} \operatorname{sen} 2s \Big]_0^{2\pi} \\
&= \tfrac{3}{2}s + \tfrac{7}{4} \operatorname{sen} 2s \Big]_0^{2\pi} \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Como $N = 5x$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 5$ e como $M = 2y$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_R (5 - 2)\, dA \\
&= 3 \iint_R dA \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Assim sendo, para esse $\mathbf{F}$ e esse R o teorema de Stockes no plano está verificado.

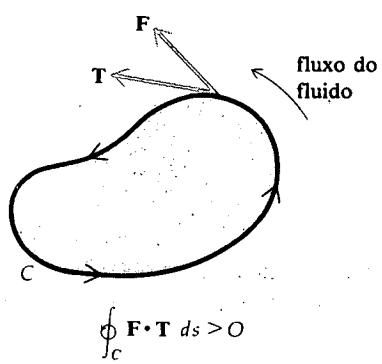


FIGURA 9

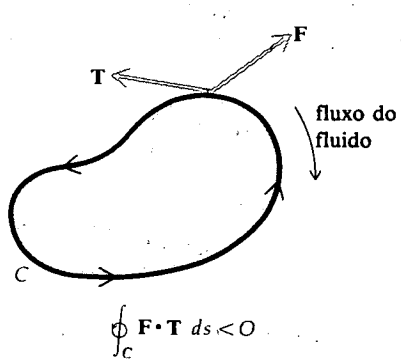


FIGURA 10

Se $\mathbf{F}$ for o campo de velocidades de um fluido, o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ será a componente tangencial de $\mathbf{F}$ e a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ será chamada de **circulação** de $\mathbf{F}$ em torno da curva fechada C. De uma forma intuitiva, podemos considerar a circulação como sendo a soma das componentes tangenciais de $\mathbf{F}$ em torno de C. Se o movimento em torno de C for no sentido anti-horário e $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$, então o fluido estará circulando no sentido anti-horário; veja a Figura 9. Se $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$, a circulação do fluido será no sentido horário veja a Figura 10.

Seja $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ um ponto dado na região R e seja C_δ a circunferência tendo seu centro em $\overline{P}$ com um pequeno raio δ. Se R_δ for a região encerrada por C_δ,

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_{R_\delta} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Se M_y e N_x forem contínuas em R_δ, então, rot $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ será contínua ali e para δ pequeno, rot $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ em R_δ será aproximadamente, rot $\mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$. Logo,

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \approx \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k} \iint_{R_\delta} dA$$

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \approx \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}(\pi\delta^2)$$

Assim, interpretamos a rot $\mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$ como a medida aproximada da taxa de circulação por unidade de área no sentido anti-horário, no ponto $\bar{P}$. Quando $\mathbf{F}$ e $\mathbf{T}$ forem vetores ortogonais, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ e, então, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Em tal caso, $\mathbf{F}$ será chamado de **irrotacional**. Essa terminologia é usada, mesmo que $\mathbf{F}$ não seja um campo de velocidades de um fluido.

EXERCÍCIOS 19.4

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule a integral de linha pelo teorema de Green. Verifique, então, o resultado pelo método da Secção 19.2.

1. $\oint_C 4y\, dx + 3x\, dy$, onde C é o quadrado com vértices em (0, 0), (1, 0) e (0, 1).
2. $\oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$, onde C é o quadrado do Exercício 1.
3. $\oint_C 2xy\, dx - x^2 y\, dy$, onde C é o triângulo com vértices em (0, 0), (1, 0) e (0, 1).
4. A integral de linha do Exercício 3, onde C é o triângulo com vértices em (0, 0), (1, 0) e (1, 1).
5. $\oint_C x^2y\, dx - y^2x\, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
6. $\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
7. A integral de linha do Exercício 5, onde C é a curva fechada que consiste no arco de $4y = x^3$ de (0, 0) a (2, 2) e no segmento de reta de (2, 2) a (0, 0).
8. A integral de linha do Exercício 6, onde C é a curva fechada do Exercício 7.

Nos Exercícios de 9 a 20, use o teorema de Green para calcular a integral de linha.

9. $\oint_C (x + y)\, dx + xy\, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x, pela reta $x = 2$ e pela curva $4y = x^3$.
10. $\oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x, pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^2$.
11. $\oint_C (-x^2 + x)\, dy$, onde C é a curva fechada, determinada pela reta $x - 2y = 0$ e pela parábola $x = 2y^2$.
12. $\oint_C (x^2 + y)\, dx$, onde C é a curva fechada, determinada pelo eixo x e pela parábola $y = 4 - x^2$.
13. $\oint_C \cos y\, dx + \cos x\, dy$, onde C é o retângulo com vértices em (0,0), $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ e $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
14. $\oint_C e^{x+y}\, dx + e^{x+y}\, dy$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$
15. $\oint_C (\text{sen}^4 x + e^{2x})\, dx + (\cos^3 y - e^y)\, dy$, onde C é a curva $x^4 + y^4 = 16$.
16. $\oint_C x \text{ sen } y\, dx - y \cos x\, dy$, onde C é o retângulo com vértices em (0, 0), $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ e $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
17. $\oint_C \frac{x^2y}{x^2 + 1}\, dx - \text{tg}^{-1} x\, dy$, onde C é a elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
18. $\oint_C e^y \cos x\, dx + e^y \text{ sen } x\, dy$, onde C é a curva $x^6 + y^4 = 10$.
19. $\oint_C (e^x - x^2y)\, dx + 3x^2y\, dy$, onde C é a curva fechada, determinada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
20. $\oint_C \text{tg } y\, dx - x \text{ tg}^2 y\, dy$ onde C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

Nos Exercícios de 21 a 26, use o Teorema 19.4.2 para calcular a área da região dada.

21. A região cuja fronteira é o quadrilátero com vértices em (0, 0), (4,0), (3, 2) e (1, 1).
22. A região cuja fronteira é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.
23. A região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
24. A região limitada pela parábola $y = 2x^2$ e pela reta $y = 8x$.
25. A região limitada pela hipociclóide, tendo equações paramétricas

    $x = a \cos^3 t \qquad y = a \text{ sen}^3 t \qquad a > 0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
26. A região limitada abaixo pelo eixo x e acima por um arco da ciclóide, tendo equações paramétricas

    $x = t - \text{sen } t \qquad y = 1 - \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

Nos Exercícios de 27 a 30, verifique o teorema da divergência de Gauss no plano e o teorema de Stokes no plano para $\mathbf{F}$ *e* $\mathbf{R}$ *dados.*

27. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
28. $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ e R é a região limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
30. $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Nos Exercícios de 31 a 34, use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y)$ *ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da curva C dada. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.*

31. C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$; $\mathbf{F}(x, y) = (3x + y)\mathbf{i} + (4x - 5y)\mathbf{j}$.
32. C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$; $\mathbf{F}(x, y) = (e^x + y^2)\mathbf{i} + (x^2y + \cos y)\mathbf{j}$.
33. C é o triângulo com vértices em (0, 0), (2, 0) e (0, 2); $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2} + y^2)\mathbf{i} + (e^{y^2} + x^2)\mathbf{j}$.
34. C consiste na parte superior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ e no intervalo $[-2, 2]$ no eixo x; $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a taxa de escoamento do fluido para fora de uma região R, limitada pelo arco de curva C dado, se $\mathbf{F}$ *for o campo de velocidades do fluido. Suponha que a velocidade seja medida em centímetros por segundo e a área de R seja medida em centímetros quadrados.*

35. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j}$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.
36. $\mathbf{F}(x, y) = (5y - y^2)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j}$; C é o triângulo retângulo com vértices em (1, 2), (4, 2) e (4, 6).
37. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
38. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Nos Exercícios de 39 a 42, $\mathbf{F}$ *é o campo de velocidades de um fluido em torno da curva fechada C, sendo o movimento na direção anti-horária. Use o teorema de Stokes no plano para calcular* $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ *e pelo resultado determine qual das afirmações se aplica: (i) a circulação do fluido é anti-horária; (ii) a circulação do fluido é horária; (iii)* $\mathbf{F}$ *é irrotacional.*

39. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$; C é o triângulo com vértices em (0, 0), (3, 0) e (3, 5).
40. $\mathbf{F}(x, y) = 8y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$; C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.
41. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen}^2 x\mathbf{i} + \cos^2 y\mathbf{j}$; C é a elipse $9x^2, y^2 = 9$.
42. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.
43. Prove que $\oint_C N(x, y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ se R for a região definida por $R = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d, g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\}$, onde g_1 e g_2 são suaves.

19.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES

Agora aplicaremos o conceito de uma integral de linha àquele de uma integral definida sobre a superfície. Começaremos considerando uma região fechada no plano xy. Nesta secção usaremos o símbolo D em vez de R, para denotar uma região no plano xy, a fim de evitar confusão com a função definida por $R(x, y, z)$ usada mais tarde na discussão. Suponha que S seja uma superfície sobre D e tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f e suas derivadas parciais são contínuas em D. Então, se σ for a medida da área da superfície S, temos, do Teorema 18.5.1,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy \tag{1}$$

Podemos generalizar a integral em (1), considerando uma função G de três variáveis x, y e z, onde G é contínua em S. Prosseguimos agora numa forma similar à discussão na Secção 18.5 que precede o enunciado do Teorema 18.5.1. Seja Δ uma partição da região D em n sub-regiões retangulares, onde o i-ésimo retângulo tem dimensões de medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i-ésimo retângulo, e no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ sobre a superfície S, consideremos o plano tangente à superfície. Projetando verticalmente para cima o i-ésimo retângulo sobre o plano tangente, seja $\Delta_i\sigma$ a medida da área dessa projeção. Veja a Figura 1. O número $\Delta_i\sigma$ é uma aproximação da medida da área da superfície que está acima do i-ésimo retângulo. Mostramos na Secção 18.5 que

$$\Delta_i\sigma = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\, \Delta_i A \tag{2}$$

Se formarmos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))\, \Delta_i\sigma$$

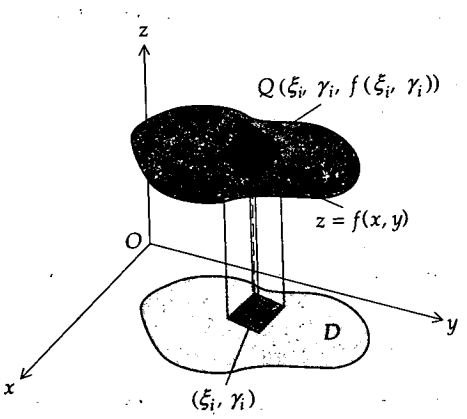


FIGURA 1

e tomarmos o limite dessa soma quando a norma da partição tende a zero, temos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))\, \Delta_i \sigma \tag{3}$$

Esse limite é chamado de **integral de superfície** de G sobre S, sendo denotado por

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma$$

Para obter uma fórmula para o cálculo dessa integral de superfície, substituímos (2) em (3), obtendo

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} G(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))\sqrt{f_x{}^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y{}^2(\xi_i, \gamma_i) + 1}\, \Delta_i A$$

Esse limite é uma integral dupla sobre a região D, no plano xy. Assim,

$$\boxed{\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(x, y, f(x, y))\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA} \tag{4}$$

Se $G(x, y, z) = 1$, então (4) torna-se

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{f_x{}^2(x, y) + f_y{}^2(x, y) + 1}\, dA$$

Comparando essa relação com (1), observamos que para essa G a integral de superfície de G sobre S dá a medida da área da superfície S.

Para a integral de superfície em (4), $z = f(x, y)$ é uma equação da superfície S, projetada sobre a região D no plano xy. Se uma equação da superfície S for da forma $y = g(x, z)$ e S for projetada sobre uma região D no plano xz, sendo g e suas derivadas parciais primeiras contínuas em D, então

$$\boxed{\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(x, g,(x, z), z)\sqrt{g_x^2(x, z) + g_z^2(x, z) + 1}\, dA} \tag{5}$$

Além disso, se uma equação da superfície S for da forma $x = h(y, z)$ e S for projetada sobre uma região D no plano yz, sendo h e suas derivadas parciais primeiras contínuas em D, então

$$\boxed{\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D G(h(y, z), y, z)\sqrt{h_y^2(y, z) + h_z^2(y, z) + 1}\, dA} \tag{6}$$

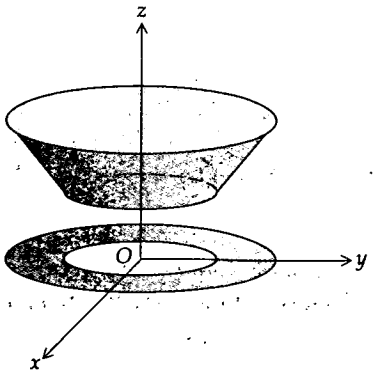


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície

$$\iint_S x^2 z^2\, d\sigma$$

onde S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

Solução A Figura 2 mostra a superfície S e a projeção de S sobre a região D do plano xy. A região D é limitada por dois círculos de raios 1 e 2, cujos

centros estão na origem. Resolvemos a equação de S em z, onde $z \geqslant 0$, e obtemos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo,

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De (4) com $G(x, y, z) = x^2z^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_S x^2z^2\, d\sigma &= \iint_D x^2(x^2 + y^2)\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA \\ &= \iint_D x^2(x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dA\end{aligned}$$

Calculamos a integral dupla usando coordenadas polares, onde $x = r\cos\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r\, dr\, d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S x^2z^2\, d\sigma &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2\cos^2\theta)r^2(r\, dr\, d\theta) \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \cos^2\theta r^5\, dr\, d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\theta\frac{r^6}{6}\right]_1^2 d\theta \\ &= \frac{21\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \frac{21\sqrt{2}}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{21\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Se a medida da densidade de massa por unidade de área no ponto (x, y, z) sobre uma superfície S for $\rho(x, y, z)$ e se M for a medida da massa total de S, então

$$\boxed{M = \iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma} \tag{7}$$

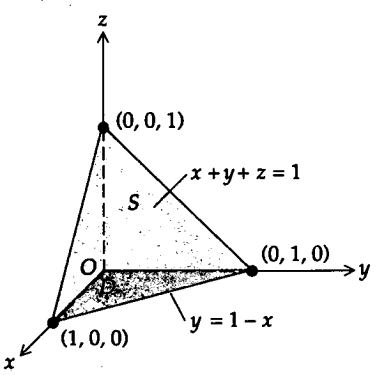


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache a massa da parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, se a densidade em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for kx^2 kg-m^2, onde k é uma constante.

Solução A Figura 3 mostra S, que é a superfície do plano dado no primeiro octante e a região D, que é a projeção de S sobre o plano xy. Resolvemos a equação do plano em z e obtemos $z = 1 - x - y$. Logo,

$$f(x, y) = 1 - x - y \qquad f_x(x, y) = -1 \qquad f_y(x, y) = -1$$

De (7), com $\rho(x, y, z) = kx^2$, se M kg for a massa da superfície,

$$\begin{aligned}
M &= \iint_S kx^2\, d\sigma \\
&= \iint_D kx^2 \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA \\
&= \iint_D kx^2 \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\, dA \\
&= \sqrt{3}k \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2\, dy\, dx \\
&= \sqrt{3}k \int_0^1 \left[x^2 y\right]_0^{1-x} dx \\
&= \sqrt{3}k \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx \\
&= \sqrt{3}k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{12}\sqrt{3}k
\end{aligned}$$

Assim, a massa é $\frac{1}{12}\sqrt{3}\,k$ kg.

Vamos apresentar agora uma aplicação das integrais de superfície ao escoamento de um fluido. Seja $\mathbf{F}$ o campo de velocidades de um fluido definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Além disso, vamos supor que o fluido escoe através de uma superfície S, tendo a equação $z = f(x, y)$, que está sobre uma região fechada D, no plano xy. Suponha que f e suas derivadas parciais primeiras sejam contínuas em D. Em cada ponto de S há dois vetores unitários normais a S. A normal unitária tendo uma componente $\mathbf{k}$ positiva é chamada de **normal unitária superior** e aquela com uma componente $\mathbf{k}$ negativa é chamada de **normal unitária inferior**.

Como na discussão que precedeu (2), tomamos uma partição de D em n subregiões retangulares. Escolhemos um ponto (ξ_i, γ_i) no i-ésimo retângulo. Projetamos verticalmente para cima o i-ésimo retângulo sobre o plano tangente a S no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i f(\xi_i, \gamma_i))$ e seja $\Delta_i\sigma$ dado por (2) uma aproximação da medida da área dessa projeção. Novamente nos referimos à Figura 1. Seja $\mathbf{N}_i$ a normal unitária superior a S no ponto Q e seja $\mathbf{F}_i$ o vetor velocidade do fluido em Q. A quantidade de fluido que atravessa a projeção por unidade de tempo é dada, aproximadamente, pelo volume do paralelepípedo, tendo uma base com $\Delta_i\sigma$ unidades de área e uma altura com $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i$ unidades de comprimento. Veja a Figura 4. A medida do volume do paralelepípedo é $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i\, \Delta_i\sigma$. A quantidade total de fluido que atravessa S por unidade de tempo é dada, aproximadamente, por

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i\, \Delta_i\sigma$$

Tomando o limite desse somatório quando n cresce sem limitação e cada $\Delta_i\sigma$ tende a zero, obtemos a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma \tag{8}$$

que é chamada de **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de S.

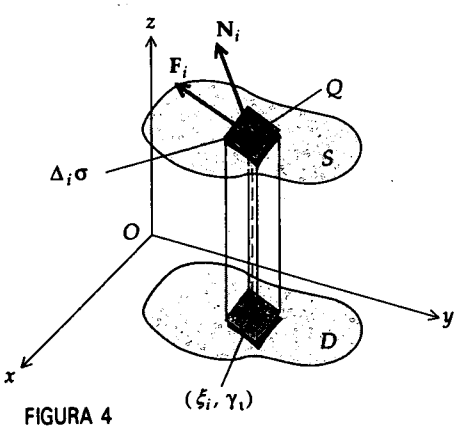


FIGURA 4

Para calcular a integral de superfície (8), escrevemos a equação de S na forma $g(x, y, z) = 0$, onde

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

Do Teorema 17.2.2, um vetor normal unitário à superfície definida por $g(x, y, z) = 0$ é

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$$

$$= \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}}$$

Assim,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_S (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}\right) d\sigma$$

$$= \iint_D \frac{-Mf_x - Nf_y + R}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} (\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1})\, dA$$

Logo, concluímos que

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R)\, dA} \tag{9}$$

onde $\mathbf{N}$ é uma normal unitária superior. Se $\mathbf{N}$ for uma normal unitária inferior (onde a componente de $\mathbf{k}$ é negativa)

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_D (Mf_x + Nf_y - R)\, dA} \tag{10}$$

Essa fórmula é provada de maneira similar àquela usada para provar (9).

EXEMPLO 3 O campo de velocidades de um fluido é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

e a superfície S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima da região D no plano xy, encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

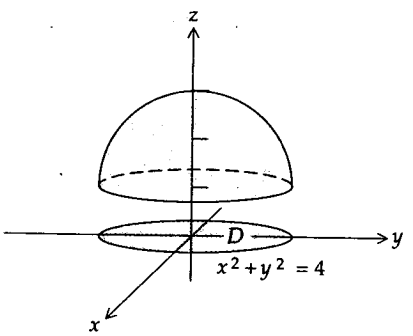


FIGURA 5

Solução A Figura 5 mostra a superfície S e a região D no plano xy. Resolvemos a equação da esfera em z, com $z > 0$, e obtemos $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Logo,

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad f_x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x = -\frac{x}{z} \qquad f_y = -\frac{y}{z}$$

Por definição de fluxo temos

$$\text{fluxo de } F \text{ através de } S = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

Do campo de velocidades dado, $M = y$, $N = -x$ e $R = 8$. Logo, de (9),

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } S = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R)\, dA$$
$$= \iint_D \left[-y\left(-\frac{x}{z}\right) - (-x)\left(-\frac{y}{z}\right) + 8\right] dA$$
$$= 8 \iint_D dA$$

Como D é a região encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $A = 4\pi$. Assim,

$$\text{fluxo de } \mathbf{F} \text{ através de } S = 8(4\pi) = 32\pi$$

Concluímos, então, que o fluxo através de S é de 32π unidades de volume do fluido por unidade de tempo.

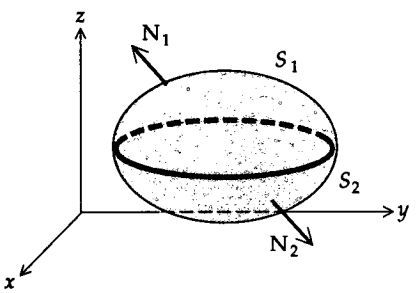


FIGURA 6

Suponhamos que S seja uma superfície fechada, como por exemplo, paralelepípedos retangulares, esferas e elipsóides. Quando usamos (8) para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de uma superfície fechada, escolhemos $\mathbf{N}$ como a **normal unitária exterior**, que é a normal que aponta para fora do sólido limitado pela superfície*. Em particular, se S for um elipsóide, conforme mostra a Figura 6, consideraremos como sendo formada por uma superfície superior S_1 e uma inferior S_2, como está indicado na figura. Em tal caso, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, d\sigma$$

Para a integral de superfície através de S_1, $\mathbf{N}_1$ é a normal unitária superior, e para a integral de superfície através S_2, $\mathbf{N}_2$ é a normal unitária inferior.

EXEMPLO 4 O campo de velocidades de um fluido é dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, se o comprimento for medido em centímetros e o tempo for medido em horas.

Solução A Figura 7 mostra a esfera e a região D no plano xy, que é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$. Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $M = 0$, $N = 0$ e $R = 5z$. O fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, d\sigma \tag{11}$$

onde S_1 é a metade superior da esfera e S_2 é a metade inferior. Para S_1, $\mathbf{N}_1$ é a normal unitária superior e uma equação de S_1 é $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Assim, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (9),

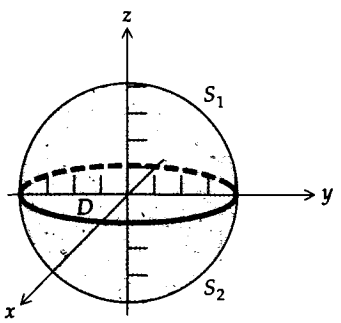


FIGURA 7

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\sigma = \iint_D [-Mf_x - Nf_y + R]\, dA$$
$$= \iint_D 5z\, dA$$
$$= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dA$$

N. do R.: Diz-se neste caso que a superfície fechada S é orientada positivamente.

$$= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{16 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^4 d\theta$$

$$= \frac{320}{3} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{640}{3}\pi$$

Para S_2, $\mathbf{N}_2$ é a normal unitária inferior e como equação de S_2 temos $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Portanto, $f(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (10),

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, d\sigma = \iint_D [Mf_x + Nf_y - R]\, dA$$

$$= \iint_D -5z\, dA$$

$$= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dA$$

Como no cálculo do fluxo de $\mathbf{F}$ através de S_1 obtemos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \tfrac{640}{3}\pi$$

Então, de (11),

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \tfrac{640}{3}\pi + \tfrac{640}{3}\pi$$

$$= \tfrac{1.280}{3}\pi$$

Logo, a taxa de escoamento do fluido através da esfera, isto é, o fluxo é de $\frac{1.280}{3}\pi$ cm³/h.

O conceito de fluxo não está limitado ao campo de velocidades de fluidos. Por exemplo, se $\mathbf{F}$ for um campo elétrico, então a integral de superfície (8) será um fluxo elétrico, e se $\mathbf{F}$ for um campo magnético, a integral de superfície será um fluxo magnético. A integral de superfície (8) também pode representar um fluxo de calor.

EXERCÍCIOS 19.5

Nos Exercícios de 1 a 14, calcule a integral de superfície. $\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma$ *para G e S dados.*

1. $G(x, y, z) = z$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy.
2. $G(x, y, z) = x$; S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.
3. $G(x, y, z) = x + 2y - z$; S é a parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante.
4. $G(x, y, z) = z$; S é a parte do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante.
5. $G(x, y, z) = xyz$; S é o mesmo que no Exercício 4.
6. $G(x, y, z) = x^2$; S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre o plano xy e o plano $z = 1$ no primeiro octante.
7. $G(x, y, z) = x$; S é a parte do cilindro $z = x^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$ e $y = 2$.
8. $G(x, y, z) = y$; S é a parte do cilindro $z = 4 - y^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelo plano $x = 3$.
9. $G(x, y, z) = z^2$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
10. $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
11. $G(x, y, z) = x + y$; S é a parte do plano $4x + 3y + 6z = 12$ no primeiro octante.
12. $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre o plano xy e o plano $z = 2$.

13. $G(x, y, z) = xyz$; S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre os planos $y = 1$ e $y = 3$.
14. $G(x, y, z) = x^2$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ acima do plano xy.

Nos Exercícios de 15 a 20, ache a massa da superfície S dada, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) na superfície é ρ(x, y, z) kg-m².

15. S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy; $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde k é uma constante.
16. S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primeiro octante; $\rho(x, y, z) = y + 2z$.
17. S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy; $\rho(x, y, z) = 1/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.
18. S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo do plano xy; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.
19. S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 2$ e $z = 3$; $\rho(x, y, z) = y^2z^2$.
20. S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ no primeiro octante; $\rho(x, y, z) = kz^2$, onde k é uma constante.

Nos Exercícios de 21 a 24, ache o fluxo de **F** *através da superfície S onde* **F**(x, y, z) *dá o campo de velocidades de um fluido.*

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ no primento octante.
22. $\mathbf{F}(x, y, z)$ é o mesmo que no Exercício 21; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, acima do plano xy.
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; S é aquela parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está acima da região no plano xy, encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy.
25. Suponha $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, e seja S o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$. Ache o fluxo de **F** através de S, calculando seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo.
26. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, e S for o cubo do Exercício 25, ache o fluxo de **F** através de S calculando seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo.

19.6 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS E TEOREMA DE STOKES

A discussão da Secção 19.4 dizia respeito ao tratamento do teorema de Green e de suas duas formas vetoriais, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stokes, ambos no plano. Essas idéias podem ser estendidas ao espaço tridimensional. Uma apresentação rigorosa desses tópicos é dada num curso de Cálculo Avançado; contudo, nesta secção vamos dar uma breve introdução intuitiva.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja $F(x, y)$ uma função contínua e com derivadas contínuas no plano. Do teorema de Green temos que

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_C F\, dy \text{ e } \iint_R \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = -\oint_C F\, dy$$

onde C é o contorno de R. Observe que se trata de uma generalização do segundo teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.2), isto é, se F for uma função definida e derivável em $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}\, dx = F(b) - F(a)$$

19.6.1 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS NO ESPAÇO

Sejam M, N e R funções das três variáveis x, y, e z tais que suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas numa bola aberta B em R^3. Seja S uma superfície seccionalmente suave contida em B e E a região de R^3 limitada por B. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y\, z)\mathbf{k}$ e $\mathbf{N} = \cos \mathbf{i} + \cos\beta\, \mathbf{j} + \cos\gamma\, \mathbf{k}$ for um vetor normal exterior unitário de S, então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Prova Em termos de suas componentes, a equação acima pode ser escrita como

$$\iiint_E \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

É suficiente então estabelecer as três equações:

$$\iiint_E \frac{\partial M}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S M \cos \alpha\, d\sigma$$

$$\iiint_E \frac{\partial N}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_S N \cos \alpha\, d\sigma$$

e

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R \cos \alpha\, d\sigma$$

e somar os resultados. Vamos começar pela última destas equações e prová-la em condições especiais.

Vamos supor que E é um conjunto de pontos (x, y, z) satisfazendo a uma relação do tipo $g(x, y) \leqslant z \leqslant f(x, y)$ para todo (x, y) em V, onde V é uma região conexa do plano xy. Vamos supor que as funções f e g são contínuas em V e satisfazem em V a relação $g(x, y) \leqslant f(x, y)$. Isto significa que V é a projeção de E no plano xy. Se conduzirmos por um ponto de V uma reta paralela ao eixo z ela interceptará E em dois pontos que são as extremidades de um segmento de reta que une a superfície $z = g(x, y)$ à superfície $z = f(x, y)$. A superfície S fica então dividida numa calota superior S_1, dada por $z = f(x, y)$, numa calota inferior S_2 dada por $z = g(x, y)$ e possivelmente de uma parte cilíndrica S_3 gerada por uma reta paralela ao eixo z percorrendo o contorno de V. A normal externa a S tem em S_1 uma componente z não-negativa, em S_2 uma componente z não-positiva e em S_3 a normal é paralela ao plano xy.

A idéia da demonstração é bem simples. Vamos expressar a integral tripla como uma integral dupla estendida a todo V. Mostraremos então que a integral dupla tem o mesmo valor que a integral de superfície do teorema.

Temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_V \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right] dx\, dy$$

Mas, a integral

$$\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz$$

pode ser calculada pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, Secção 5.8.2, resultando:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_V [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))]\, dx\, dy$$

Quanto à integral de superfície temos

$$\iint_S R \cos \gamma\, d\sigma = \iint_{S_1} R \cos \gamma\, d\sigma + \iint_{S_2} R \cos \gamma\, d\sigma + \iint_{S_3} R \cos \gamma\, d\sigma.$$

Mas em S_3 a normal é paralela ao plano xy; resulta pois que $\cos \gamma = 0$ e a integral sobre S_3 é nula.

Sejam

$$P(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

e

$$P(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g(x, y)\mathbf{k}$$

as representações de S_1 e S_2. Em S_1 a normal $\mathbf{N}$ tem a mesma direção que $\frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial P}{\partial y}$, assim podemos escrever

$$\iint_{S_1} R \cos \gamma \, d\sigma = \iint_{S_1} R \, dx \, dy = \iint_V R[x, y, f(x, y)] \, dx \, dy$$

Em S_2 a normal $\mathbf{N}$ tem a direção oposta à de $\frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial P}{\partial y}$, assim

$$\iint_{S_2} R \cos \gamma \, d\sigma = - \iint_{S_2} R \, dx \, dy = \iint_V R[x, y, g(x, y)] \, dx \, dy$$

Então,

$$\iint_S R \cos \gamma \, d\sigma = \iint_V \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\} \, dx \, dy$$

Segue então que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S R \cos \gamma \, d\sigma$$

A demonstração das duas primeiras fórmulas é análoga.

EXEMPLO 1 Use o teorema da divergência de Gauss para resolver o Exemplo 4 da Secção 19.5.

Solução $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Do teorema da divergência de Gauss, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial z}(5z)$; isto é, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 5$. Assim,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 5 \iiint_E dV$$

Como o volume de E é o da esfera de raio 4, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= 5[\tfrac{4}{3}\pi(4)^3] \\ &= \tfrac{1280}{3}\pi \end{aligned}$$

Comparando a solução do exemplo acima com aquela do Exemplo 4 na Secção 19.5, observamos como o teorema da divergência de Gauss pode simplificar o cálculo de uma integral de superfície.

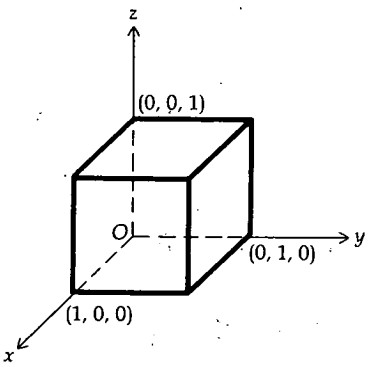


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, e S é cubo no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ e pelos planos coordenados, ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

Solução O cubo está na Figura 1. O fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

Para calcular essa integral de superfície diretamente, teríamos que calcular seis integrais de superfície, uma para cada face do cubo. Aplicando o teorema da divergência de Gauss com

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz)\\ &= 2xy + 2y + x\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2xy + 2y + x)\, dz\, dy\, dx\\ &= \int_0^1\int_0^1 (2xy + 2y + x)\, dy\, dx\\ &= \int_0^1 \Big[xy^2 + y^2 + xy\Big]_0^1 dx\\ &= \int_0^1 (2x + 1)\, dx\\ &= x^2 + x\Big]_0^1\\ &= 2\end{aligned}$$

Na Secção 19.4 vimos uma segunda forma vetorial do teorema de Green, conhecida como teorema de Stokes no plano (Teorema 19.4.4):

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

onde C é uma curva fechada simples, seccionalmente contínua em R^2 e D é a região limitada por C. Estenderemos agora esse teorema para o espaço tridimensional.

19.6.2 TEOREMA
Teorema de Stokes

Sejam M, N e R funções de três variáveis x, y z, tais que elas tenham derivadas parciais primeiras contínuas em uma bola aberta B em R^3. Seja S uma superfície seccionalmente suave contida em B e seja C uma curva fechada simples e seccionalmente suave que é a fronteira de S*. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, $\mathbf{N}$ for o vetor normal unitário para cima de S e $\mathbf{T}$ for o vetor tangente unitário de C, onde s unidades é o comprimento do arco medido desde um dado ponto P_0 sobre C até P, então

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

*N. do R.: A curva C também é denominada *bordo* de S e denotada por ∂S.

O teorema de Stokes estabelece que a integral de linha da componente tangencial de um campo vetorial **F** ao longo da fronteira orientada C de uma superfície S pode ser calculada através da integral de superfície da componente normal da rotação de **F** sobre S.

O Teorema 19.6.2 está restrito a superfícies para as quais **N** é uma normal dirigida para cima de S. Um enunciado completo do teorema de Stokes, envolvendo superfícies com uma orientação e para as quais a normal unitária **N** pode ser adequadamente definida, pode ser encontrado em textos de Cálculo Avançado, onde também pode ser encontrada a demonstração do teorema.

A Figura 2, mostra uma superfície S com uma curva de fronteira orientada C para a qual o Teorema 19.6.2 se aplica. Uma equação de S é da forma $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais primeiras contínuas na região D que é a projeção de S sobre o plano xy. A curva C é a projeção de C sobre o plano xy, e $\overline{C}$ e D estão definidas como no teorema de Green (Teorema 19.4.1). O sentido positivo ao longo de C é o mesmo que o sentido positivo ao longo de C, que é anti-horário. A Figura 2 também mostra as representações dos vetores **N** e **T**.

Uma outra forma da equação do Teorema de Stokes obtém-se ao escrever $d\mathbf{R}$ no lugar de $\mathbf{T}\,ds$ na integral de linha. Temos então

$$\boxed{\oint_C \cdot\, d\mathbf{R} = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma} \tag{1}$$

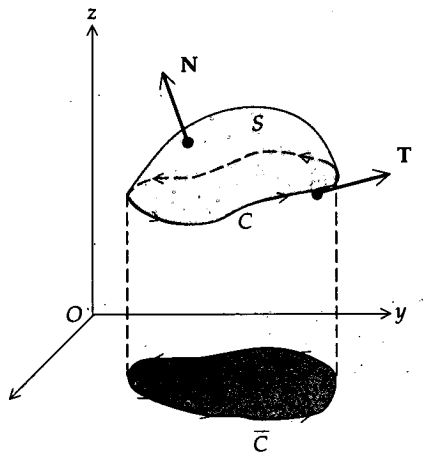


FIGURA 2

Prova Lembrando-se que $\mathbf{T}\,ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, segue que devemos provar

$$\oint_C M dx + N dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) dy dz + \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy$$

No teorema da divergência é suficiente estabelecer as três fórmulas a seguir

$$\oint_C M\, dx = \iint_S \frac{\partial M}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$\oint_C N\, dy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial N}{\partial z}\, dy\, dz$$

$$\oint_C R\, dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dz\, dx$$

e então somar os resultados.

Vamos nos limitar ao caso em que S pode ser representada por

$z = f(x, y)$ para (x, y) em D

onde D é a projeção de S sobre o plano xy (ver Figura 2). A curva C tem por projeção em xy a curva $\overline{C}$. Enquanto (x, y, z) percorre uma volta sobre C, no sentido indicado na Figura 2, o ponto $(x, y, 0)$ sua projeção no plano xy, percorre uma vez C, no sentido correspondente.

Pelo teorema de Green, temos

$$\oint_C M(x, y, z)\, dx = \int_{\overline{C}} M[x, y, f(x, y)]\, dx = -\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

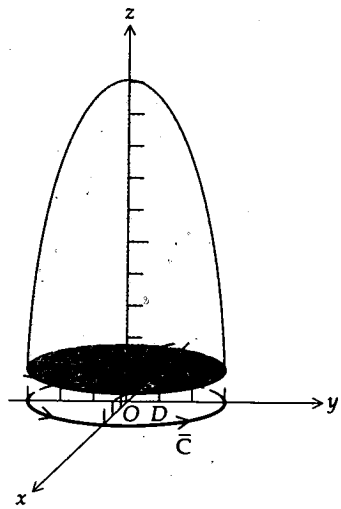


FIGURA 3

Por outro lado, da Secção 19.5 e das fórmulas (9) e (10), temos

$$\iint_S \frac{\partial M}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_D \left(-\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Segue então que

$$\oint_C M\, dx = \iint_S \frac{\partial M}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial M}{\partial v}\, dx\, dy$$

Do mesmo modo estabelecemos as fórmulas análogas para **N** e **R**.

Se trocarmos o sinal de **N**, ambos os membros da fórmula acima mudarão de sinal e ela continua válida. O caso geral pode ser tratado usando uma decomposição num número finito do que foi feito aqui, seguido por um processo com limites.

EXEMPLO 3 Seja o campo de forças **F** definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -4y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$$

e suponha que S seja a parte do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 1$. Verifique o teorema de Stokes para esse **F** e para S, calculando cada um dos seguintes:

(a) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ onde uma equação vetorial de C é $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

(b) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$;

(c) $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$.

Solução A Figura 3 mostra a superfície S e a região D, que é a projeção de S sobre o plano xy. A região D é limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$. A curva C, que é a fronteira de S, é a circunferência com centro em (0, 0, 1) e raio 3 no plano $z = 1$.

(a) Temos a seguinte equação vetorial de C:

$$\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \tag{2}$$

Assim,

$$\mathbf{R}'(t) = -3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-12 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9 \cos t\mathbf{k}) \cdot (-3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j})\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (36 \operatorname{sen}^2 t + 6 \cos t)\, dt \\
&= 36 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt + 6 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \\
&= 18t - 9 \operatorname{sen} 2t + 6 \operatorname{sen} t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 36\pi
\end{aligned}$$

(b) Para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, obtemos uma equação vetorial de C, tendo s como um parâmetro, onde s unidades é o comprimento de arco medido do ponto onde $t = 0$. Como $\dfrac{ds}{dt} = \|R'(t)\|$ temos de (3)

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{9\,\text{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}\\ &= 3\sqrt{\text{sen}^2\, t + \cos^2 t}\\ &= 3\end{aligned}$$

Portanto, $s = 3t + C$, e como $s = 0$ quando $t = 0$, $C = 0$. Assim,

$$s = 3t$$

De (2) com $t = \frac{1}{3}s$, obtemos

$$\mathbf{R}(s) = 3\cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,\tfrac{1}{3}s\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 6\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$, temos

$$\mathbf{T}(s) = -\text{sen}\,\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + \cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 6\pi$$

Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s))\cdot\mathbf{T}(s)\, ds\\ &= \int_0^{6\pi} (-12\,\text{sen}\,\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{k})\cdot(-\text{sen}\,\tfrac{1}{3}s\mathbf{i} + \cos\tfrac{1}{3}s\mathbf{j})\, ds\\ &= \int_0^{6\pi} (12\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{3}s + 2\cos\tfrac{1}{3}s)\, ds\\ &= 12\int_0^{6\pi} \frac{1-\cos\frac{2}{3}s}{2}\, ds + 2\int_0^{6\pi}\cos\tfrac{1}{3}s\, ds\\ &= 6s - 9\,\text{sen}\,\tfrac{2}{3}s + 6\,\text{sen}\,\tfrac{1}{3}s\Big]_0^{6\pi}\\ &= 36\pi\end{aligned}$$

(c) Primeiro calculamos rot $\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathbf{F} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -4y & 2z & 3x\end{vmatrix}\\ &= -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \iint_S (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\, d\sigma$$

Para calcular essa integral de superfície aplicamos (9) da Secção 19.5, pois $\mathbf{N}$ é uma normal unitária superior. O campo vetorial é $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; assim $M = -2$, $N = -3$ e $R = 4$. Como uma equação da superfície é $z = 10 - x^2 - y^2$,

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2 \qquad f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -2y$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= \iint_D [-(-2)(-2x) - (-3)(-2y) + 4]\, dA \\
&= \iint_D (-4x - 6y + 4)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (-4r\cos\theta - 6r\,\text{sen}\,\theta + 4)r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4}{3}r^3\cos\theta - 2r^3\,\text{sen}\,\theta + 2r^2\right]_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-36\cos\theta - 54\,\text{sen}\,\theta + 18)\, d\theta \\
&= -36\,\text{sen}\,\theta + 54\cos\theta + 18\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= 36\pi
\end{aligned}$$

Os resultados das partes (a), (b) e (c) são todos 36π. Verificamos, portanto, o teorema de Stokes para esse **F** e para S.

EXEMPLO 4 Use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ e C for a fronteira orientada da superfície que consiste na parte do cilindro $z = 4 - x^2$ no primeiro octante que é delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $y = 3$.

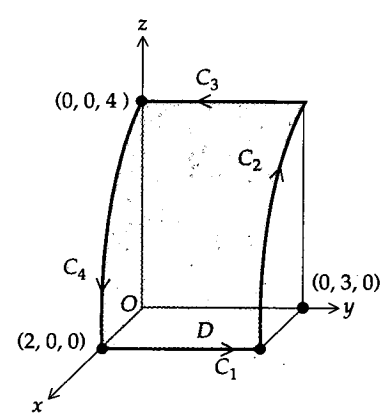


FIGURA 4

Solução A Figura 4 mostra a superfície S e a fronteira orientada C que é composta de quatro arcos C_1, C_2, C_3 e C_4. Do teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

Assim,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

Como **N** é um vetor unitário superior, calculamos o valor da integral de superfície aplicando (9) da Secção 19.5. Como o campo vetorial é $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, então $M = 2y$, $N = x$ e $R = y$. Uma equação de S é $z = 4 - x^2$. Logo,

$$f(x, y) = 4 - x^2 \qquad f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = 0$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \iint_D [-(2y)(-2x) - x(0) + y]\, dA \\
&= \iint_D (4xy + y)\, dA
\end{aligned}$$

A região D está encerrada pelo retângulo no plano xy, limitado pelos eixos x e y e pelas retas $x = 2$ e $y = 3$. Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_0^2\int_0^3 (4xy + y)\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 \left[2xy^2 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^3 dx\\ &= \int_0^2 (18x + \tfrac{9}{2})\,dx\\ &= 9x^2 + \tfrac{9}{2}x\Big]_0^2\\ &= 45\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 19.6

Nos Exercícios de 1 a 4, verifique o teorema da divergência de Gauss para **F** *e S.*

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{k}$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j}$; S é o cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.
4. $\mathbf{F}(x, y\ z) = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

Nos Exercícios de 5 a 8, para o **F** *e o S do exercício indicado nos Exercício 19.5, encontre o fluxo de* **F** *através de S pelo teorema da divergência de Gauss.*

5. Exercício 21
6. Exercício 22
7. Exercício 25
8. Exercício 26

Nos Exercícios de 9 a 16, use o teorema da divergência de Gauss para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$ *para* **F** *e S dados.*

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S é o cubo no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é o tetraedro com vértices na origem e os pontos (3, 0, 0,), (0, 1, 0) e (0, 0, 2).
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$, abaixo pelo plano xy e acima pelo plano $z = 4$.
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a superfície do Exercício 12.
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a superfície do Exercício 11.
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S é a fronteira da região encerrada entre os planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$; S é a fronteira da região fora da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios de 17 a 22, verifique o teorema de Stokes para F e S dados.

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do plano xy.
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abaixo do plano xy.
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; S é a superfície do Exercício 19.
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; S é a parte do plano $z = 1$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy.

Nos Exercícios de 23 a 28, use o teorema de Stokes para avaliar a integral de linha $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ *para* **F** *e C.*

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1).
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em (2, 0, 0), (0, 2, 0) e (0, 0, 1).
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy.
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C é o quadrado em vértices em (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0) e (2, 2, 0).
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + \operatorname{sen}^{-1} x)\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + \ln(z^2 + 4))\mathbf{k}$; C é o triângulo com vértices em (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 2).
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - e^x)\mathbf{i} + (x^3 + \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (y^2 - \operatorname{tg} z)\mathbf{k}$; C tem a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 19

Nos Exercícios 1 e 2, ache o campo vetorial conservativo tendo a função potencial f.

1. (a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$; (b) $f(x, y, z) = xe^y - yze^y$
2. (a) $f(x, y) = e^x \cos y + x \operatorname{sen} y$; (b) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

Nos Exercícios de 3 a 6, prove que o campo vetorial **F** *é conservativo e ache a função potencial.*

3. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y^2}{1 + 4x^2y^4}\mathbf{i} + \dfrac{4xy}{1 + 4x^2y^4}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x - 4y)\mathbf{i} + (z - 4x)\mathbf{j} + (y - 8z)\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \sec^2 x\mathbf{i} + 2ye^{3z}\mathbf{j} + (3y^2e^{3z} + 2z \operatorname{tg} x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = (y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)\mathbf{i} - (x \cos y + \cos x)\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 10, ache rot **F** *e div* **F** *para o campo vetorial dado.*

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{2x}{y}\mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{y}\mathbf{i} + \dfrac{y}{z}\mathbf{j} + \dfrac{z}{x}\mathbf{k}$

Nos Exercícios de 11 a 18, calcule a integral de linha sobre a curva C.

11. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 3y\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
12. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$; C: $\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ do ponto (8, 4) ao ponto (1, 1).
13. $\int_C (2x + 3y)\,dx + xy\,dy$; C: $\mathbf{R}(t) = 4 \operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi$.
14. $\int_C (2x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy$; C: $x^2 + y^2 = 9$.
15. $\int_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$; C: $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
16. $\int_C xe^y\,dx - xe^z\,dy + e^z\,dz$; C: $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
17. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy\mathbf{i} + (4y^2 - xz)\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$; C: a cúbica retorcida $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
18. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C: a hélice circular $\mathbf{R}(t)$ $2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Nos Exercícios de 19 a 26, prove que o valor da integral de linha dada é independente do caminho e calcule o valor da maneira mais conveniente. Em cada exercício, C é qualquer curva seccionalmente suave de A até o ponto B.

19. $\int_C 2xe^y\,dx + x^2e^y\,dy$; A é (1, 0) e B é (3, 2).
20. $\int_C \left(\dfrac{1}{y} - y\right) dx + \left(-\dfrac{x}{y^2} - x\right) dy$; A é (0, 1) e B é (6, 3).
21. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y - y \cos x)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$; A é $(0, \frac{1}{2}\pi)$ e B é $(\pi, 0)$.
22. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 - 2x + 3y^2)\mathbf{j}$; A é (2, −1) e B é (3, 2).
23. $\int_C 3y\,dx + (3x + 4y)dy + 2z\,dz$; A é (0, 1, −1) e B é (1, 2, 0).
24. $\int_C z \operatorname{sen} y\,dx + xz \cos y\,dy + x \operatorname{sen} y\,dz$; A é (0, 0, 0) e B é $(2, 3, \frac{1}{2}\pi)$.
25. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2z}{x^2}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{z^2}\right)\mathbf{k}$; A é (2, −1, 1) e B é (4, 2, −2)
26. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 4yz + 3xz)\mathbf{j} + (3xy - 2y^2)\mathbf{k}$; A é (0, 2, 1) e B é (1, −1, 4).

Nos Exercícios de 27 a 30, use o teorema de Green para calcular a integral de linha.

27. $\oint_C (3x + 2y)\,dx + (3x + y^2)\,dy$, onde C é a elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$.
28. $\oint_C \ln(y + 1)\,dx - \dfrac{xy}{y + 1}\,dy$, onde C é a curva fechada, determinada pela curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ e pelo intervalo [0, 4] nos eixos x e y.
29. $\oint_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$, onde C é qualquer curva fechada suave.
30. $\oint_C (x^2 - y^3)\,dx + (y^2 + x^3)\,dy$; onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Nos Exercícios 31 e 32, use o Teorema 19.4.2 para encontrar a área da região dada.

31. A região encerrada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$.
32. A região encerrada pelas duas parábolas $y = x^2$ e $x^2 = 18 - y$.

Nos Exercícios de 33 a 36, ache o trabalho total realizado quando um objeto é deslocado ao longo do arco C dado, sob ação do campo de forças dado. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x^2y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j}$; C: é o arco da parábola $y = 3x^2 + 2x + 4$ de (0, 4) a (1, 9).
34. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; C: o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de (2, 0) a (0, 2).

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C: o segmento de reta da origem ao ponto (4, 1, 2).
36. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$; C: $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $0 \leqslant t \leqslant 3$.

Nos Exercícios 37 e 38, verifique o teorema da divergência de Gauss no plano e o teorema de Stokes no plano para **F** *e R dados.*

37. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ e R é a região limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
38. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ e R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Nos Exercícios 39 e 40, use o teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado pelo campo de forças dado em virtude do deslocamento de um objeto no sentido anti-horário, uma volta em torno da curva C. Suponha que o arco seja medido em metros e a força em newtons.

39. C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$;
$\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + \cos x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j}$.
40. C é a elipse $9x^2 + y^2 = 9$;
$\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$.

Nos Exercícios 41 e 42, ache a taxa de escoamento do fluido para fora da região R limitada pela curva C dada, se **F** *for o campo de velocidades do fluido. Suponha que a velocidade seja medida em centímetros por segundo e a área de R seja medida em centímetros quadrados.*

41. $\mathbf{F}(x, y) = (4x - 3y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2)\mathbf{j}$; C é o triângulo retângulo com vértices em (0, 1), (0, 4) e (4, 4).
42. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 12x)\mathbf{i} + (4y - x^2)\mathbf{j}$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.
43. Ache o valor da integral de linha

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

se C for o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
44. Aplique o teorema de Green para calcular a área do quadrilátero com vértices nos pontos (0, 0), (3, 2), (1, 5) e (−2, 1).
45. Calcule a integral de superfície $\iint_S xy\,d\sigma$, onde S é a parte do plano $3x + 2y - z = 0$ no primeiro octante, abaixo do plano $z = 6$.
46. Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2\,d\sigma$, onde S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro octante, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = 1$.
47. Calcule a integral de superfície $\iint_S x\,d\sigma$, onde S é a parte do cilindro $z = 9 - x^2$ no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelo plano $y = 2$.
48. Calcule a integral de superfície $\iint_S xyz\,d\sigma$, onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 1$ e $x = 4$.
49. Ache a massa da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) da superfície for kz^2 kg-m^2, onde k é uma constante.
50. Ache a massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy, se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for $(4 - z)$ kg-m^2.
51. Um funil tem a forma da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$. Se a densidade de massa por unidade de área em qualquer ponto (x, y, z) sobre a superfície for $(10 - z)$ kg-m^2, ache a massa do funil.
52. Suponha que a superfície S seja a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima da região D no plano xy, encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se o campo de velocidades do fluido for dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, ache o fluxo de **F** através de S.
53. O campo de velocidades de um fluido é dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ e a superfície S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy. Ache o fluxo de **F** através de S.
54. Verifique o teorema da divergência de Gauss se $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2}z\mathbf{i}$ e S for a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Nos Exercícios 55 e 56, use o teorema da divergência de Gauss para avaliar a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ *para* **F** *e S.*

55. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$, abaixo pelo plano xy e acima pelo plano $z = 2$.
56. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S é a fronteira da região delimitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$.

Nos Exercícios 57 e 58, verifique o teorema de Stoken para **F** *e S.*

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S é a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy.
58. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ acima do plano xy.

Nos Exercícios 59 e 60, use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ *para* **F** *e C.*

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \ln(x^2 + 1))\mathbf{i} + (\cos y - x^2)\mathbf{j} + (3y^2 - e^z)\mathbf{k}$; C tem a equação vetorial $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, onde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
60. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy.

VINTE

Equações Diferenciais

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

O problema central das equações diferenciais, em sua forma mais simples, já foi estudado na Secção 5.1 em Antidiferenciação e nas Secções 5.8.1 e 5.8.2 nos Teoremas Fundamentais do Cálculo. Trata-se de determinar qual a função $f(t)$ cuja derivada $f'(t)$ é conhecida, ou seja, dado que

$$f'(t) = g(t)$$

então

$$f(t) = \int g(t) + c$$

A constante c é determinada através do conhecimento de algum valor particular da função $f(t)$. Por esta razão, a resolução de uma equação diferencial é chamada de integração.

---

* **N. do E.**: Este capítulo foi especialmente preparado para a edição brasileira.

As equações diferenciais têm uma importância muito grande nas aplicações de matemática. Sempre que indagarmos sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático, do qual sabemos algo sobre como varia no tempo, estaremos pretendendo resolver uma equação diferencial. Vamos dar alguns exemplos a seguir.

(a) Se $y(t)$ for a porcentagem de indivíduos numa dada população abertamente contra a política do governo e $(1 - y(t))$ a porcentagem dos que são a favor, é razoável supor que a variação desta porcentagem é simultaneamente proporcional aos dois tipos de atitude. Assim,

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t)) \qquad k > 0$$

(b) Uma das regras do capitalismo é que todo capital empregado deve render juros, ou seja, que a variação do capital $C(t)$ no tempo deve ser proporcional ao capital. Assim,

$$\frac{dC(t)}{dt} = kC(t) \qquad k > 0$$

onde o fato da derivada ser positiva caracteriza $C(t)$ como função crescente.

(c) Em geral, a variação da concentração $C(t)$ de determinada substância no sangue é proporcional à concentração inicial e tende a diminuir com o tempo. Assim,

$$\frac{dC(t)}{dt} = -kC(t) \qquad k > 0$$

onde o fato da derivada ser negativa caracteriza $C(t)$ como função decrescente.

Passaremos agora a estudar os conceitos básicos e a seguir os métodos de resolução das equações diferenciais.

20.1 CONCEITOS BÁSICOS

Uma equação do tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{1}$$

onde $y = y(t)$ é a função procurada, é chamada de equação diferencial de *ordem n*. Assim sendo, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta da função incógnita que aparece no problema. A função $y = \varphi(t)$ que transforma a equação (1) numa identidade é chamada *solução* da equação diferencial enquanto que o gráfico de $\varphi(t)$ é chamado de *curva integral*. A solução representada implicitamente por $\phi(t, y) = 0$ é chamada usualmente de uma **integral** de (1).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a equação $y'(t) - y(t) = 0$. Sabemos que, a menos de uma constante, a única função cuja derivada é ela mesma é a exponencial e^t. E de fato, $\frac{d}{dt}[e^t] - e^t = 0$. Convém observar que, sendo c uma constante qualquer, $\frac{d}{dt}[ce^t] - ce^t = 0$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A função $y(t) = e^{2t}$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0 \quad \text{pois} \quad 4e^{2t} - 5(2e^{2t}) + 6e^{2t} = 0$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A função $y(t) = \frac{t^2}{2}$ é uma solução da equação diferencial

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2t\frac{dy}{dt} + t^2 = 0 \quad \text{pois} \quad (t)^2 - 2t(t) + t^2 = 0$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A função $y(t) = e^{t^2}$ é uma solução de

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = 0 \quad \text{pois} \quad (2t\,e^{t^2}) - 2t(e^{t^2}) = 0$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos as equações diferenciais

$$y'(t) + 2t\,y(t) = 0 \tag{1}$$
$$tdy = (1 - y)\,dt \tag{2}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{3}$$

Elas são todas de primeira ordem, enquanto que $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ é de segunda ordem. ◀

EXEMPLO 1 Sabe-se que num movimento retilíneo uniformemente variado, como o próprio nome diz, a aceleração $a = \frac{dv}{dt}$ é constante. Supondo que o movimento parte do repouso e sabendo que $v = \frac{ds}{dt}$ determine $s(t)$.

Solução Como $\frac{dv}{dt} = a$, então

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a\,dt + c_1 \\ &= at + c_1 \qquad \text{sendo } t \geqslant 0 \text{ e } c_1 \text{ constante} \end{aligned}$$

Na expressão de $v(t)$, fazendo $t = 0$ obtemos $v(0) = c_1$ e, como o movimento começa do repouso, segue que $c_1 = 0$ e portanto $v(t) = at$. Assim,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = at$$

então

$$\begin{aligned} s(t) &= \int at\,dt + c_2 \\ &= \frac{1}{2}at^2 + c_2 \qquad \text{sendo } t \geqslant 0 \text{ e } c_2 \text{ constante} \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$ na expressão de $s(t)$, teremos $s(0) = c_2$ e então

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + s(0).$$

20.1.1 DEFINIÇÃO Uma função $y(t)$ definida implicitamente pela equação $\phi(t, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, que contém n constantes arbitrárias e é solução da equação diferencial (1), é chamada de **solução geral** da equação na região onde (1) é dada. Atribuindo valores às constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, obtemos uma **solução particular** de (1).

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Retomando o Exemplo 1, temos que $v(t) = at + c_1$ e $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_2$ são soluções gerais das equações diferenciais

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = at$$

Pudemos eliminar c_1 na expressão de $v(t)$, pois sabíamos que $v(0) = 0$, e então $v(t) = at$ é uma solução particular da equação. No caso da solução geral $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_2$, c_2 só poderá ser determinado no caso de conhecermos algum valor particular da função $s(t)$. Digamos que $s(0) = 0$ então $c_2 = 0$, e $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ é uma solução particular da equação. ◀

O valor da função que permite eliminar a constante é chamado de *condição*. As condições são classificadas conforme o ponto em que são dadas, assim se a equação diferencial estiver definida para $t \in [a, b]$ e a condição for dada em a teremos uma **condição inicial**. Caso a condição seja dada num ponto $t \neq a$, ela é chamada de **condição de contorno**. O número de condições necessárias para a completa eliminação das constantes é igual à ordem da equação.

Retomando o Exemplo 1, caso sejam dados $v(0)$ e $s(0)$, temos condições iniciais. Sendo $a < 0$, poderíamos considerar $s(t_1)$ como sendo o espaço percorrido até a parada do móvel, teríamos então um problema de contorno.

O *grau* de uma equação refere-se ao expoente da derivada de maior ordem que aparece na equação.

Consideremos as equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} + e^t y = 0$

(b) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$

(a) e (c) são do primeiro grau, enquanto que (b) é do segundo grau.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7*** O processo de difusão de moléculas através da membrana de uma célula é bastante complicado. Existe uma aproximação simplificada da realidade baseada na Lei de Fick: "o fluxo através de uma membrana é proporcional à área da membrana e à diferença de concentração entre os meios separados por ela, se esta diferença de concentração for pequena."

Suponhamos que uma célula de volume constante V esteja mergulhada em um meio líquido homogêneo de concentração C_e. O processo de difusão garante que existe um fluxo de moléculas através da membrana da célula em ambas as direções, até que a concentração da solução em seu interior $C = C(t)$ seja igual a C_e. (Veja a Figura 1)

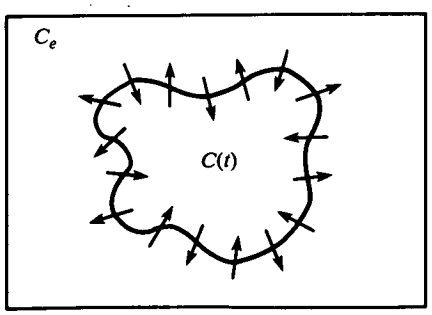


FIGURA 1

Seja $m = m(t)$ a massa da solução no interior da célula, então pela definição de concentração,

$$m(t) = V \cdot C(t)$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 45.

O fluxo pode ser representado por $\frac{dm}{dt}$ (taxa de variação da massa). Assim, a lei de Fick é expressa matematicamente por:

$$\frac{dm}{dt} = k\,A(C_e - C)$$

Como

$$\frac{dm}{dt} = V \cdot \frac{dC}{dt}$$

temos

$$\frac{dC}{dt} = \frac{kA}{V}(C_e - C)$$

onde A é a área da membrana (suposta constante) e k é a constante de permeabilidade, determinada para cada solução, estrutura e espessura da membrana.

Se $C_e > C(t)$ em cada instante t, o fluxo de moléculas será maior no sentido de fora para dentro da célula e, portanto, entram mais moléculas do que saem. Isto implica que $C = C(t)$ é crescente, isto é, $\frac{dC}{dt} > 0$. O contrário ocorre quando $C_e < C(t)$.

Desta forma, podemos considerar $k > 0$ em ambos os casos.

A solução geral da equação é dada por

$$C(t) = K\,e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e$$

onde K é a constante de integração. ◀

20.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Dada uma equação diferencial de primeira ordem,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

a situação mais simples que pode ocorrer em termos da função f é quando f não depende de y. Temos então

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{1}$$

Segue então que

$$y(t) = \int g(t)\,dt + c$$

pelo segundo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.2. É usual chamar $\int g(t)\,dt$ de *primitiva* da função y. A função y dada desta forma é a solução geral da equação (1). Observe ainda que se u for uma outra solução de (1) então como $\frac{du}{dt} = g(t)$ segue que $u(t) = \int g(t)\,dt + c_1$ e podemos obter $u(t)$ a partir de $y(t)$ bastando fazer $c_1 = c$.

20.2.1 DEFINIÇÃO

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

onde $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ é chamada de **linear de primeira ordem.**

Os dados do problema são as funções $a(t)$ e $b(t)$. É natural esperarmos que $a(t)$ e $b(t)$ compareçam em integrais no processo de resolução da equação. Assim sendo, vamos exigir que elas sejam funções contínuas de t.

O problema que se coloca agora é, dada uma equação diferencial linear de 1ª ordem, como determinar uma solução geral para ela. Para tanto vamos desenvolver três métodos de solução.

1º Método de Solução Vamos supor que $y(t) = u(t)v(t)$ onde as funções u e v são também desconhecidas. Substituindo na equação linear de primeira ordem, teremos

$$\frac{du}{dt} v + u \frac{dv}{dt} + a(t)\, u \cdot v = b(t)$$

logo,

$$v \left[\frac{du}{dt} + a(t)\, u \right] + u \frac{dv}{dt} = b(t)$$

Se escolhermos a função u de forma que ela satisfaça a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t)\, u = 0$$

então,

$$u \frac{dv}{dt} = b(t)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b(t)}{u(t)}$$

Mas a equação acima tem um segundo membro que só depende de t e assim, é do tipo anterior. Então,

$$v(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)}\, dt + c_1$$

e a solução da equação dada sendo $y(t) = u(t)\, v(t)$ dará

$$y(t) = u(t) \left(\int \frac{b(t)}{u(t)}\, dt + c_1 \right)$$

Resta-nos então o problema de resolver a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t)\, u = 0$$

chamada de *equação homogênea* associada à equação linear de primeira ordem dada que, por isto, é chamada de equação *não-homogênea* ou *completa*.

Podemos reescrever a equação homogênea como

$$\frac{\frac{du}{dt}}{u} = -a(t)$$

Mas sabemos que

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = \frac{\frac{du}{dt}}{u}$$

onde por $\ln |u(t)|$ entende-se o logaritmo natural de $|u(t)|$. Segue então que

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = -a(t)$$

Mas esta equação tem um segundo membro que só depende de t sendo portanto do tipo anterior onde f só dependia de t.
Assim sendo,

$$\ln |u(t)| = -\int a(t)\, dt + c_3$$

e

$$|u(t)| = \exp\left(-\int a(t)\, dt + c_3\right)$$

$$= (\exp c_3)\left[\exp\left(-\int a(t)\, dt\right)\right]$$

Chamando c_2 à exponencial de c_3 e usando o fato de que a função exponencial é sempre positiva, temos

$$c_2 = \left|u(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\, dt\right)\right| = |g(t)|$$

onde definimos a função $g(t)$ como sendo $u(t) \cdot \exp\left(\int a(t)\, dt\right)$. Fica assim estabelecido que a função g tem módulo constante. Por outro lado, a função g é o produto da função u, que é derivável pois é solução da equação diferencial homogênea por uma função exponencial. Segue, então, que a função g é contínua. Vamos supor por absurdo que a função g não seja constante. Existiriam então dois valores de t, t_1 e t_2, tais que $g(t_1) = -c_2$ e $g(t_2) = c_2$. Como g é contínua, segue que deve assumir todos os valores entre $-c_2$ e c_2 existindo portanto um valor de t, digamos t^*, tal que $g(t^*) = 0$. Mas isto não é possível, pois $|g(t)| = c_2$. Assim sendo podemos concluir que $g(t) = c_2$, e

$$u(t) = c_2 \cdot \exp\left(-\int a(t)\, dt\right)$$

Logo,

$$y(t) = c_2 \exp\left(-\int a(t)\, dt\right)\left(\int \frac{b(t)}{u(t)}\, dt + c_1\right)$$

$$= \exp\left(-\int a(t)\, dt\right) \cdot \int \frac{b(t)}{u(t)}\, dt + c \exp\left(-\int a(t)\, dt\right)$$

onde $c = c_1 c_2$. Não aparece constante no primeiro termo pois a expressão de u envolve a constante c_2.

Vamos definir a função $w(t)$ como sendo

$$w(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)}\, dt$$

Segue então que

$$y(t) = u(t)\, w(t) + u(t)$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,[u(t)\, w(t)] &= \frac{du(t)}{dt} \cdot w(t) + u(t)\, \frac{dw(t)}{dt} \\ &= -a(t)\, u(t)\, w(t) + b(t)\end{aligned}$$

Logo, a função $u \cdot w$ é uma solução particular da equação linear. Além disso, podemos ver que a solução geral da equação linear é a soma da solução geral da equação homogênea com uma solução particular da equação não-homogênea. Este resultado é caraterístico das equações lineares em geral.

EXEMPLO 1 Determine pelo 1º método a solução geral da equação diferencial

$$y'(t) = 2t\, y(t) + t$$

Solução Consideremos em primeiro lugar a equação homogênea

$$\frac{du(t)}{dt} = 2t\, u(t)$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}u(t) &= c_1 \exp\left(\int 2t\, dt\right) \\ &= c_1 \exp\,(t^2)\end{aligned}$$

Pelo 1º método, temos

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{te^{-t^2}}{c_1}$$

logo,

$$v(t) = \frac{1}{c_1} \int te^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2c_1} \int d(e^{-t^2}) = -\frac{e^{-t^2}}{2c_1} + c_2$$

então,

$$\begin{aligned}y(t) &= u(t)\, v(t) \\ &= c_1\, e^{t^2}\left(\frac{-e^{-t^2}}{2c_1} + c_2\right) \\ &= -\frac{1}{2} + c\, e^{t^2}\end{aligned}$$

onde $c = c_1 c_2$.

2º Método de Solução Vamos considerar a função

$$h(t) = y(t) \exp\left(\int a(t)\, dt\right)$$

Então,

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \exp\left(\int a(t)\,dt\right) + a(t)\,y(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)$$

$$= \exp\left(\int a(t)\,dt\right)\left[\frac{dy(t)}{dt} + a(t)\,y(t)\right]$$

$$= \exp\left(\int a(t)\,dt\right) b(t)$$

Usamos o fato de que

$$\frac{d}{dt}\left[\exp F(t)\right] = \frac{dF}{dt} \cdot \exp F(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}\left[\int a(t)\,dt\right] = a(t)$$

Segue então que

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)\right] = b(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)$$

Mas a equação diferencial acima é linear e com um segundo membro função somente de t, já resolvida anteriormente. Então,

$$y(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right) = \int b(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)dt + c$$

Resolvendo em relação a y teremos a solução geral da equação linear.

Observe que o fator $\exp\left(\int a(t)\,dt\right)$ é chamado de **fator integrante**, pois se multiplicarmos ambos os membros da equação diferencial por ele é possível então integrá-la.

EXEMPLO 2 Determine pelo 2º método a solução geral da equação diferencial

$$y'(t) = 2t\,y(t) + t$$

Solução O fator integrante é $\exp(-t^2)$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo fator integrante,

$$e^{-t^2}\left(\frac{dy}{dt} - 2ty\right) = te^{-t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[y\,e^{-t^2}\right] = te^{-t^2}$$

$$ye^{-t^2} = \int te^{-t^2}\,dt + c$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{2} + c$$

e

$$y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

EXEMPLO 3 Dê a solução geral da equação diferencial

$$e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}y = t$$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{dy}{dt} + y = te^{t}$$

A equação homogênea associada é

$$\frac{du}{dt} + u = 0$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 \exp\left(-\int dt\right) \\ &= c_1 e^{-t} \end{aligned}$$

Pelo primeiro método segue que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{te^{2t}}{c_1}$$

então,

$$v(t) = \frac{1}{c_1}\int te^{2t}\,dt + c_2$$

Integrando por partes

$$\int te^{2t}\,dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}$$

como

$$y(t) = u(t)\,v(t)$$

temos

$$y(t) = e^{t}\left(\frac{2t-1}{4}\right) + ce^{-t}$$

onde $c = c_1c_2$.

Pelo 2º método, temos o fator integrante

$$\exp\left(\int dt\right) = e^{t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada pelo fator integrante, teremos:

$$e^{t}\frac{dy}{dt} + e^{t}y = te^{2t}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}(y\,e^{t}) = te^{2t}$$

e

$$ye^t = \int te^{2t}\,dt + c$$

mas

$$\int te^{2t}\,dt = e^{2t}\left(\frac{2t-1}{4}\right)$$

logo,

$$y(t) = e^t\left(\frac{2t-1}{4}\right) + ce^{-t}$$

Conforme já foi observado, a solução geral de uma equação linear pode ser encontrada somando à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa.

Vejamos um método para obter uma solução particular que, acoplado com qualquer método que dê a solução geral da equação homogênea nos permita encontrar a solução geral da equação linear.

3º Método de Solução Resolva a equação diferencial $y'(t) = -y(t) + t^3$. Em primeiro lugar, consideremos a equação homogênea

$$\frac{du}{dt} = -u$$

cuja solução é $u(t) = c_1\,e^{-t}$.

Consideremos agora

$$w(t) = \gamma\,(t)\,e^{-t}$$

onde tomamos a solução da equação homogênea e em vez de uma constante consideramos uma função de t, a qual devemos determinar. Substituindo $w(t)$ na equação dada, teremos

$$\gamma'(t)\,e^{-t} - \gamma(t)\,e^{-t} = -\gamma(t)\,e^{-t} + t^3$$

Segue então que

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = t^3e^t$$

e portanto

$$\gamma(t) = \int t^3e^t dt$$

Integrando por partes, teremos

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= t^3e^t - 3\int t^2e^t dt\\ &= t^3e^t - 3t^2e^t + 6\int te^t dt\\ &= t^3e^t - 3t^2e^t + 6te^t - 6e^t + c_2\end{aligned}$$

A solução geral $y(t)$ da equação dada é tal que

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + w(t) \\ &= c_1e^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6 + c_2e^{-t} \\ &= ce^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \end{aligned}$$

onde fizemos $c = c_1 + c_2$.

Este método de encontrar uma solução particular da equação completa é chamado de **método da variação das constantes**.

EXERCÍCIOS 20.2

Ache a solução geral das equações diferenciais dadas.

1. $ty'(t) - 2y(t) = -t$
2. $ty'(t) - 3y(t) = -2nt$
3. $ty'(t) - y(t) = (t - 1)e^t$
4. $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x - \operatorname{sen} x$
5. $ty''(t) + 2y'(t) = 0$ (*Sugestão*: faça $y'(t) = u(t)$)
6. $y' - y\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = e^t\left(1 - \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)$
7. $y' + \dfrac{1}{t}y = \dfrac{1+t}{t} \cdot e^t$
8. $y' + y \operatorname{tg} t = e^{-t}(\operatorname{tg} t - 1)$
9. $ty' - y = t\cos t - \operatorname{sen} t$
10. $y'(t) = \operatorname{tg} t \cdot y + \cos t$

20.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Quando tratamos das equações lineares homogêneas tínhamos a seguinte situação:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a(t)\,y(t)$$

Consideremos agora um caso um pouco mais complicado onde, em vez de y temos uma função de y, ou seja

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

Podemos reescrever esta equação como

$$f(y) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = g(t)$$

20.3.1 TEOREMA Seja F uma função tal que $\dfrac{dF}{dt} = f(y)\dfrac{dy}{dt}$. Segue, então, que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\int g(t)\,dt$$

pois, pelo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.1,

$$\frac{d}{dt}\int g(t)\,dt = g(t) = f(y)\frac{dy}{dt}$$

Logo,

$$F(y(t)) = \int g(t)\,dt + c$$

que define implicitamente a solução geral $y(t)$ da equação dada.

Convém observar ainda que se $\frac{dF}{dt} = f(y)\frac{dy}{dt}$, então

$$dF = f(y)\,dy$$

e portanto

$$F = \int f(y)\,dy$$

EXEMPLO 1 Encontre a solução geral de $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$y^2\frac{dy}{dt} = t^2$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^3(t)}{3}\right) = t^2$$

Logo,

$$y^3(t) = t^3 + c \qquad c \text{ sendo uma constante arbitrária}$$

e

$$y(t) = (t^3 + c)^{\frac{1}{3}}$$

EXEMPLO 2 Determine a solução geral de

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 + y^2(t)$$

Solução A equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{1}{1 + y^2(t)}\frac{dy(t)}{dt} = 1$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}[\text{arc tg } y(t)] = 1$$

Logo,

$$\text{arc tg } y(t) = t + c$$

e

$$y(t) = \text{tg}(t + c)$$

EXEMPLO 3 Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{t-y}$$

Solução A equação pode ser reescrita como

$$e^y \frac{dy}{dt} = e^t$$

mas

$$e^y \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[e^{y(t)}]$$

então,

$$\frac{d}{dt}[e^{y(t)}] = e^t$$

Logo,

$$e^{y(t)} = e^t + c \quad \text{e} \quad y(t) = \ln(e^t + c)$$

EXEMPLO 4 Calcule a solução geral da equação diferencial

$$(1 - x)\,dy - y^2\,dx = 0$$

Solução Podemos reescrever a equação como

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x}$$

mas

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-y^{-1})$$

Logo,

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dx}{1 - x} = -\ln c(1 - x)$$

Temos então

$$y \ln c(1 - x) = 1$$

EXEMPLO 5 Calcule a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + y^2}{1 + t^2}$$

Solução Podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{1}{1 + y^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$$

como

$$\frac{1}{1 + y^2}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[\text{arc tg } y], \text{ segue que}$$

$$\text{arc tg } y = \text{arc tg } t + c_1$$

Donde

$$y = \text{tg}\,[\text{arc tg}\, t + c_1]$$

mas

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

Logo,

$$y = \frac{t + \text{tg}\, c_1}{1 - t \cdot \text{tg}\, c_1} = \frac{t + c}{1 - ct}$$

onde $c = \text{tg}\, c_1$.

Vejamos um exemplo de aplicação das equações diferenciais com variáveis separáveis.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1 Crescimento Específico ou Lei da Alometria***

Nem todas as partes do corpo de um indivíduo têm em cada instante um desenvolvimento proporcional. A cabeça de uma criança cresce mais lentamente que seu corpo. O rápido crescimento dos pés de um adolescente, comparado com o resto de seu corpo, causa muitas vezes alguns transtornos. A *Alometria* estuda estes diferentes padrões de crescimento.

O *tamanho* de um órgão pode ser a medida do seu volume, peso, comprimento ou área lateral.

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os tamanhos de órgãos ou partes do corpo distintos de um mesmo indivíduo, num instante t.

Dizer que uma parte cresce mais rapidamente que a outra é o mesmo que colocar

$$\frac{dx}{dt} > \frac{dy}{dt}$$

Uma maneira melhor para se poder relacionar diferentes crescimentos é através do crescimento específico ou relativo de cada órgão, definido por $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$. Assim, se o crescimento absoluto for exponencial, seu crescimento específico será constante (verifique!).

A Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, "os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais". O modelo matemático é, pois,

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

com $x > 0$ e $y > 0$ e k constante (taxa de crescimento relativo).

Nesta equação x e y são variáveis equivalentes. Usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = k\frac{x}{y} \left(\text{de maneira análoga vale } \frac{dy}{dx} = k'\left|\frac{y}{x}\right.\right) \tag{2}$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 57-58.

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\ln x = k \ln y + \ln c, \; c > 0 \tag{3}$$

ou

$$x = cy^k \; (x > 0 \text{ e } y > 0) \tag{4}$$

Na prática é comum usar a equação (3); tomamos

$$X = \ln x \text{ e } Y = \ln y, \text{ e então, } X = kY + c$$

e, assim, num gráfico log-log os tamanhos se correlacionam na equação de uma reta!

O mesmo mecanismo da Lei da Alometria, isto é, a proporcionalidade entre crescimentos específicos, é usado no estudo do metabolismo, das diferenças raciais etc. Um exemplo de aplicação da Equação (4) foi dado por Bertalanffy (1973) relacionando o peso $W(t)$ e o comprimento $\ell(t)$ de peixes

$$W(t) = W_\infty \left(\frac{\ell(t)}{\ell_\infty}\right)^3$$ ◀

EXERCÍCIOS 20.3

Resolva as equações diferenciais

1. $dx + \left(\dfrac{y-1}{x^2}\right)^3 dy = 0$
2. $x^2(y-1)\,dx + y(x+1)^2\,dy = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{(x+1)(y+2)}$
4. $(1+x^2)\,dy - xy\,dx = 0$
5. $y'(t) = \dfrac{1-y^2}{t^2-1}$
6. $y'(t) = \dfrac{3}{t(1+y^2)}$
7. $y'(t) = \dfrac{1-y^2}{ty}$
8. $xy(1+x^2)\,dy - (1+y^2)\,dx = 0$
9. $(2+y)\,dt + (t-3)\,dy = 0$
10. $t(t+3)\,dy = y(2t+3)\,dt$
11. $d\rho + \rho\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta = 0$
12. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\,dx + \cos^2 x \operatorname{cotg} y\,dy = 0$
13. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1-e^x)\sec^2 y\,dy = 0$
14. $(1+e^x)\,y\,y' = e^x$, sendo $y(0) = 1$
15. $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$, sendo $y(0) = 1$

20.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS

A palavra homogêneo é usada para qualificar algo que tenha uma estrutura ou composição uniforme. Em Matemática, significa que os símbolos considerados têm o mesmo grau matemático, ou dimensão, nos símbolos considerados.

20.4.1 DEFINIÇÃO Uma expressão em t e y é chamada de **homogênea de grau n** se, substituindo t por λt e y por λy, obtivermos λ^n vezes a expressão anterior. Isto é,

$$A(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n A(t, y)$$

O termo homogêneo refere-se ao fato das variáveis t e y comparecerem com o mesmo grau.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A expressão $t^2 + ty + y^2$ é homogênea de grau 2, pois

$$(\lambda t)^2 + (\lambda t)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 (t^2 + ty + y^2)$$

A expressão $[x^2 + y^2]^{1/2} + x \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ é homogênea de grau 1, pois

$$[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2]^{1/2} + \lambda x \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda \left\{[x^2 + y^2]^{1/2} + x \operatorname{sen} \frac{x}{y}\right\}$$ ◀

20.4.2 DEFINIÇÃO A equação diferencial

$$A(t, y)\, dt + B(t, y)\, dy = 0$$

é chamada *homogênea* quando $A(t, y)$ e $B(t, y)$ forem **homogêneas de mesmo grau.**

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação diferencial

$$(x^2 + xy)\, dx + 2y^2\, dy = 0$$

é homogênea, pois $(x^2 + xy)$ e $2y^2$ são homogêneas de grau 2. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Consideremos a equação diferencial linear

$$y'(t) + a(t)\, y(t) = 0$$

Ela pode ser reescrita como

$$a(t)\, dt + \frac{1}{y}\, dy = 0$$

Para que fosse homogênea, deveríamos ter $a(t)$ e $\frac{1}{y}$ como homogêneas de mesmo grau, o que nem sempre acontece. No caso de $a(t) = \frac{1}{t}$, por exemplo, ela seria homogênea, pois $\frac{1}{t}$ e $\frac{1}{y}$ são homogêneas de grau -1.

Vamos explicar em que sentido está sendo usado o termo homogênea para a equação $y'(t) + a(t)\, y(t) = 0$.

Consideremos um sistema linear

$$Ax = b$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, b e x são vetores em $\boldsymbol{R}^n$. O sistema $Ax = 0$ é chamado de homogêneo pois as coordenadas de $b = 0$ são homogêneas, todas iguais a zero, apresentando assim uma composição uniforme.

A equação $y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ pode ser escrita como

$$[D + a(t)\, 1]\, y(t) = b(t)$$

onde devemos entender que

$$\begin{aligned}[D + a(t)\, 1]\, y(t) &= Dy(t) + a(t)\, y(t) \\ &= \frac{dy}{dt} + a(t)\, y(t)\end{aligned}$$

Por analogia com sistemas lineares, a equação

$$[D + a(t)\, 1]\, y(t) = 0$$

é chamada de homogênea.

Dada a equação

$$A(t, y)\, dt + B(t, y)\, dy = 0$$

onde A e B são homogêneas de grau n, considerando a transformação $y = tx$, a equação dada tornar-se-á uma equação com variáveis separáveis. De fato, como A e B são homogêneas de grau n,

$$A(t, y)\, dt + B(t, y)\, dy = t^n \left\{A\left(1, \frac{y}{t}\right) dt + B\left(1, \frac{y}{t}\right) dy\right\} = 0$$

Assim,

$$A\left(1, \frac{y}{t}\right) dt + B\left(1, \frac{y}{t}\right) dy = 0$$

Tomando

$$y = tx \quad \text{então} \quad dy = tdx + xdt \quad \text{e}$$

$$A(1, x)\, dt + B(1, x)[tdx + xdt] = 0$$

Logo,

$$[A(1, x) + xB(1, x)]\, dt + tB(1, x)\, dx = 0$$

E, portanto,

$$\frac{1}{t}\, dt + \frac{B(1, x)}{A(1, x) + xB(1, x)}\, dx = 0$$

com variáveis separadas. ◀

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial

$$2ty\, dt - (t^2 - y^2)\, dy = 0$$

Solução As expressões $2ty$ e $-(t^2 - y^2)$ são homogêneas de grau 2. Usando a transformação $y = tx$, $dy = tdx + xdt$ resulta

$$t^2\{(1 + x^2)\, dt - 2x\, [tdx + xdt]\} = 0$$

Logo,

$$(1 + x^2 - 2x^2)\, dt - 2tx\, dx = 0$$

e

$$\frac{1}{t}\, dt - \frac{2x}{1 - x^2}\, dx = 0$$

Integrando, teremos

$$\ln t + \ln(1 - x^2) = \ln c_1$$

ou

$$\ln t\left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right) = \ln c_1$$

Assim sendo,

$$t - \frac{y^2}{t} = c \text{ ou } t^2 - y^2 = ct$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4 Espelho Parabólico***

Os raios luminosos provenientes de uma fonte luminosa puntual incidem em um refletor espelhado, de modo que todos os raios refletidos saem paralelos. O problema é determinar a forma do refletor que tenha esta propriedade.

Consideremos a origem de um sistema cartesiano o ponto de onde partem os raios luminosos e o eixo das abscissas, disposto na mesma direção do feixe refletido.

Seja $P(x, y)$ o ponto de incidência sobre o refletor de um raio luminoso.

A Figura 1 representa uma secção do refletor pelo plano xy que contém o eixo das abscissas e o ponto $P(x, y)$.

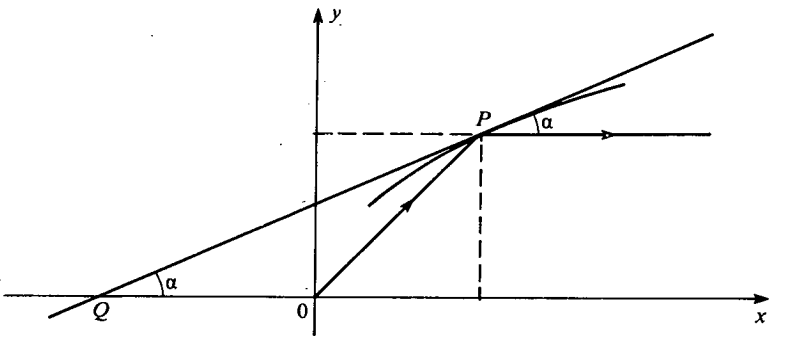


FIGURA 1 Espelho parabólico

Estamos supondo o refletor com uma superfície suave. Assim, podemos considerar a reta tangente no ponto P à curva, determinada pela intersecção do plano xy com o refletor. Seja Q a intersecção desta reta com o eixo x.

O triângulo PQO é isósceles porque o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão; então $\overline{QO} = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1}$$

Como tg α é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto $P(x, y)$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

que é uma equação homogênea, sugerindo a mudança da variável $z = \frac{y}{x}$.

No entanto, se racionalizarmos o denominador da equação, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad (y \neq 0) \tag{3}$$

ou

$$ydy + xdx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \tag{4}$$

que pode ser escrita ainda por

$$\frac{ydy + xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx \quad \text{ou} \quad d(\sqrt{x^2 + y^2}) = dx$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA, Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 98-99.

Logo,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c \quad \text{ou} \quad y^2 = 2cx + c^2 \quad (c \text{ constante})$$

que é uma família de parábolas com o foco na origem (fonte de luz). Se cada corte do espelho for uma parábola, a superfície procurada será um parabolóide de revolução. ◀

EXERCÍCIOS 20.4

Resolva as equações diferenciais dadas.

1. $2(4y + 5t)\,dt + (5y + 7t)\,dy = 0$
2. $[2t\,y(t) + 3y^2(t)]\,y'(t) + (y^2(t) + 2t^2) = 0$
3. $2t\dfrac{dy}{dt} + (t + 4y) = 0$
4. $\dfrac{dy}{dt} + 2\left[\dfrac{1 - y^2}{1 - 4t^2}\right]^{1/2} = 0$
5. $4\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{y} = 0$, sendo $y(4) = 2$
6. $y\,dt = t\,dy - [t^2 + y^2]^{1/2}\,dt$
7. Uma curva passa pelo ponto $x = 2$, $y = 1$ e tem por coeficiente angular $-\left(\dfrac{x + y}{x}\right)$ em cada ponto. Determine a a equação da curva.
8. Uma curva passa pelo ponto $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$ e tem por coeficiente angular $\dfrac{y + [x^2 + y^2]^{1/2}}{x}$ em cada ponto. Determine a equação da curva.
9. Resolva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}$ mediante a substituição $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ onde α e β são encontrados resolvendo $-\alpha + 2\beta = 5$ e $2\alpha - 2\beta = -4$.
10. Prove que $(t + y)^{a+b}(t - y)^{a-b} = c$ é a solução de $(at - by)\,dy + (bt - ay)\,dy = 0$.

20.5 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Trata-se de uma equação diferencial do tipo

$$y'(t) = P(t)\,y(t) + Q(t)\,y^m(t) \qquad \text{onde } m \neq 0 \text{ e } m \neq 1$$

Para resolvê-la façamos a substituição

$$y(t) = x^k(t)$$

onde k deve ser determinado. Teremos então

$$y'(t) = k \cdot x^{k-1}(t) \cdot x'(t)$$

e a equação dada se transforma em

$$k\,x^{k-1}(t)\,x'(t) = P(t)\,x^k(t) + Q(t)\,x^{km}(t)$$

então,

$$x'(t) = \frac{1}{k}P(t)\,x(t) + \frac{1}{k}Q(t)\,x^{mk-k+1}$$

Vamos escolher k de tal forma que

$$mk - k + 1 = 0$$

ou

$$k = \frac{-1}{m - 1}$$

e então a equação dada se transforma numa equação linear.

EXEMPLO 1 Resolva a equação diferencial

$$t\frac{dy}{dt} + y + t^2y^2 = 0$$

Solução Podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}y - t^2y^2$$

Fazendo $y = x^{-1}$ pois $k = \dfrac{-1}{2-1} = -1$, então

$$y' = -x^{-2}x'$$

e então a equação dada se transforma em

$$-x^{-2}x' = -\frac{1}{t}x^{-1} - t\,x^{-2} \qquad \text{ou seja} \qquad x' = \frac{1}{t}x + t$$

que é uma equação linear. A equação homogênea é

$$x' - \frac{1}{t}x = 0 \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}[\ln x] = \frac{1}{t}$$

Assim,

$$\ln x = \ln c_2t \quad \text{e} \quad x = c_2t$$

Tomando na equação completa $x = uv$, então

$$x' = u'v + uv' \qquad \text{e} \qquad u'v + uv' - \frac{1}{t}uv = t$$

Logo,

$$\left(u' - \frac{1}{t}u\right)v + uv' = t$$

Tomando u como solução da equação homogênea, teremos

$$v' = \frac{t}{c_2t} = \frac{1}{c_2}$$

portanto

$$v(t) = \frac{1}{c_2}t + c_1$$

e

$$x(t) = u(t)\,v(t) = c_2t\left[\frac{1}{c_2}t + c_1\right] = t^2 + ct$$

Como $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$, temos

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + ct}$$

EXEMPLO 2 Resolva

$$y' - \frac{3}{x} y = y^5$$

Solução Dividindo ambos os membros da equação por y^5, obtemos

$$y^{-5}y' - \frac{3}{x} y^{-4} = 1$$

Seja $v = y^{-4}$, portanto $v' = -4y^{-5}y'$ e $y^{-5} y' = -\frac{v'}{4}$

Então, temos

$$-\frac{1}{4} v' - \frac{3}{x} v = 1 \quad \text{ou} \quad v' + \frac{12}{x} v = -4$$

Multiplicando ambos os membros pelo fator integrante x^{12}, e como

$$\frac{d}{dx} (vx^{12}) = v'x^{12} + 12vx^{11}$$

temos

$$d(vx^{12}) = -4x^{12}\, dx$$

Integrando, obtemos

$$vx^{12} = -\frac{4x^{13}}{13} + c \quad \text{ou} \quad y^{-4} = -\frac{4}{13} x + cx^{-12}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1 Crescimento de peixes (von Bertalanffy)***

A pesca sempre foi um elemento importante para a sobrevivência de muitas raças. Com o desenvolvimento de materiais sofisticados e muitas vezes predatórios, o estoque de peixes diminuiu muito, até mesmo causando o perigo de extinção de algumas espécies. Atualmente existem leis internacionais que definem a maneira como a pesca deve ser efetuada, impondo controle sobre o tamanho das redes, tamanho das malhas e períodos de aprisionamento. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para se medir o efeito de tais controles e estabelecer em que condições o peixe pode ser capturado. O peso $p(t)$ de cada espécie é dado pela equação de von Bertalanffy (obtida experimentalmente):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \tag{1}$$

a qual estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional à área de sua superfície (α é a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal). β é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

A equação (1) é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$, isto é

$$\frac{dp}{dt} + \beta p = \alpha p^{2/3}$$

* BASSANEZI, R. & FERREIRA, Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 79-82.

Fazendo a substituição $z = p^{1-2/3} = p^{1/3}$, vem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} (\alpha p^{-2/3} - \beta p) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} z$$

ou seja

$$\frac{dz}{dt} + \frac{\beta}{3} z = \frac{\alpha}{3} \qquad \text{(equação linear)}$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/3} \qquad \text{(verifique!)}$$

Portanto

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha} e^{-\beta t/3}\right)^3$$

Quando $t = 0$, o valor de p é insignificante. Usamos $p(0) \cong 0$ e obtemos

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha}\right)^3 = 0, \text{ e então } 1 + \frac{C\beta}{\alpha} = 0 \text{ ou } \boxed{C = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

Assim, $p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 (1 - e^{-\beta t/3})^3$.

Quando t cresce, p tende a $P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Tomando $k = \frac{\beta}{3}$, temos

$$p(t) = P_\infty (1 - e^{-kt})^3$$

que fornece o peso do peixe em cada instante t.

A equação (2) é chamada *equação de von Bertalanffy* para o aumento de peso do peixe. Um estudo desta equação nos fornece algumas informações interessantes:

derivando (2) em relação a t, obtemos

$$\frac{dp}{dt} = 3k\, P_\infty (1 - e^{-kt})^2 e^{-kt}$$

derivando mais uma vez,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 3k^2 P_\infty e^{-kt} (1 - e^{-kt})(3\, e^{-kt} - 1)$$

Agora, $\frac{dp}{dt} = 0$ quanto $t = 0$ ou quando $t \to +\infty$ e $\frac{d^2p}{dt} = 0$ se $t = 0$, ou $t \to +\infty$, ou $t = \frac{\ln 3}{k}$.

Ainda, se $p \neq 0$ então $\frac{dp}{dt} > 0$, ou seja, o peso é sempre crescente, tendo um valor limite P_∞. Matematicamente P_∞ é "atingido" quando $t \to +\infty$, mas na realidade este "tempo infinito" é de aproximadamente 10 anos! Esta contradição pode ser minorada se, por exemplo, estabelecermos que 99% do peso limite de um peixe é atingido depois de 10 anos.

Por outro lado, $t^* = \frac{\ln 3}{k}$ é um ponto de inflexão da curva obtida de (2) e $p(t^*) = P_\infty (1 - e^{-\ln 3})^3 = 0{,}296\ P_\infty$. O valor $t^* = \frac{\ln 3}{k}$ é o instante de maior variação de peso do peixe, pois $\frac{dp}{dt}$ atinge seu valor máximo em $t = t^*$ (veja a Figura 2).

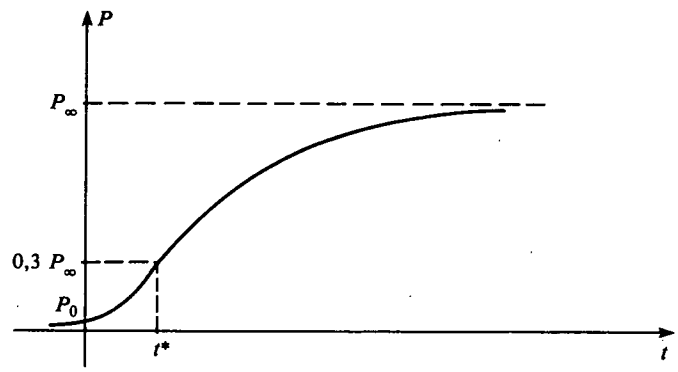


FIGURA 2 Curva de von Bertalanffy para crescimento em peso de peixes

Do princípio da Alometria (veja a Ilustração 1 da Secção 20.3) sabemos que o crescimento do organismo é proporcional à superfície do corpo: então, podemos escrever a equação (1) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p \tag{3}$$

sendo S a superfície fisiológica do organismo.

Para expressarmos S e p em termos do comprimento linear ℓ do organismo, assumimos que este cresce isometricamente e tem uma constante específica gravitacional. Assim,

$$S = a\ell^2 \text{ e } p = b\ell^3 \quad (a \text{ e } b \text{ constantes})$$

Portanto,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(b\ell^3) = 3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt}$$

Estes valores, substituidos na equação (3) nos dão

$$3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt} = \alpha a\ell^2 - \beta b\ell^3$$

ou seja

$$\frac{d\ell}{dt} = \lambda - k\ell, \text{ onde } \lambda = \frac{a}{3b} \text{ e } k = \frac{\beta}{3} \tag{4}$$

A equação (4) é autônoma e sua solução é dada por

$$\ell(t) = \frac{\lambda}{k} - C\,e^{-kt}$$

Usando a condição inicial $\ell(0) \cong 0$, obtemos $C = \frac{\lambda}{k}$.

Por outro lado, o comprimento limite ℓ_∞ é dado quando $t \to \infty$, isto é, $\ell_\infty = \dfrac{\lambda}{k}$. Desta forma, obtemos a expressão

$$\ell(t) = \ell_\infty (1 - e^{-kt})$$

denominada equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe. ◀

EXERCÍCIOS 20.5

Dê a solução geral das equações diferenciais.

1. $2t \dfrac{dy}{dt} + 2y = ty^3$
2. $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{t} = 2y^2$
3. $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{t} = y^3$
4. $xy' - y = y^2$
5. $yy' + y^2 \operatorname{tg} t = \cos^2 t$
6. $y'(t) = \dfrac{4}{t} y + t\sqrt{y}$
7. $y^2\, dx - (2xy + 3)\, dy = 0$
8. $2xy \dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$
9. $y dx + \left(x - \dfrac{1}{2} x^3 y\right) dy = 0$
10. $3x\, dy = y(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^2 \operatorname{sen} x)\, dx$

20.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

Até agora sabemos resolver as equações diferenciais autônomas tipo $\dfrac{dy}{dt} = g(t)$, as lineares $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\, y = b(t)$ e as separáveis $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{g(t)}{f(y)}$.

Em geral somos capazes de resolver equações do tipo

$$\frac{d}{dt} F(t, y) = 0$$

pois se a derivada de F em relação a t for nula segue que $F(t, y) = c$, c constante, e esta equação define y como uma função implícita de t.

Como reconhecer que uma dada equação

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é a derivada em relação a t de alguma função $F(t, y)$?

Observe que

$$\frac{d}{dt} F(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

pela regra da cadeia. Assim sendo, a equação dada é da forma $\dfrac{d}{dt} F(t, y)$ se e somente se

$$M(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Enunciaremos a seguir um teorema que fornece uma condução necessária e suficiente para $M(t, y) + N(t, y)\, dy$ ser a derivada em relação à t de uma função $F(t, y)$. A demonstração foge ao contexto deste livro e pode ser encontrada em qualquer texto de Cálculo Avançado.

20.6.1 TEOREMA Se $M(t, y)$ e $N(t, y)$ forem funções contínuas e com derivadas parciais contínuas em relação a t e a y no retângulo dado por $a < t < b$ e $\alpha < y < \beta$, então a condição necessária e suficiente para que

$$M(t, y) = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

é que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ no retângulo.}$$

EXEMPLO 1 Verifique se a equação diferencial

$$1 + (1 + ty)\, e^{ty} + (1 + t^2 e^{ty}) \frac{dy}{dt} = 0$$

satisfaz as condições do teorema.

Solução Temos $M(t, y) = 1 + (1 + ty)\, e^{ty}$ e $N(t, y) = 1 + t^2\, e^{ty}$, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = t\, e^{ty} + t(1 + ty)\, e^{ty} = 2te^{ty} + t^2 y\, e^{ty}$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2t\, e^{ty} + yt^2\, e^{ty}$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Vejamos como proceder para determinar $F(t, y)$.

1º método De $\dfrac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$ temos

$$F(t, y) = \int M(t, y)\, dt + h(y)$$

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y)\, dt + \frac{d}{dy} h(y)$$

Então,

$$\frac{dh(y)}{dy} = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y)\, dt$$

que determina $h(y)$.

2º método De $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$, temos

$$F(t, y) = \int N(t, y)\, dy + k(t)$$

onde k é uma função arbitrária de t. Como $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$, então

$$M(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} \int N(t, y)\, dy + \frac{d}{dt} k(t)$$

e $k(t)$ fica determinado pela equação

$$\frac{dk(t)}{dt} = M(t, y) - \frac{\partial}{\partial t} \int N(t, y)\, dy$$

3º método De $\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$, temos

$$F(t, y) = \int M(t, y)\, dt + h(y) \quad \text{e} \quad F(t, y) = \int N(t, y)\, dt + k(t)$$

Determinamos então $h(y)$ e $k(t)$ por inspeção.

EXEMPLO 2 Determine a solução geral de

$$1 + (1 + ty)\, e^{ty} + (1 + t^2 e^{ty}) \frac{dy}{dx} = 0$$

Solução Como

$M(t, y) = 1 + (1 + ty)\, e^{ty}$, então

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \int [1 + (1 + ty)\, e^{ty}]\, dt + h(y) \\ &= \int dt + \frac{1}{y} \int e^{ty}\, d(ty) + \frac{1}{y} \int ty\, e^{ty}\, d(ty) \\ &= t + \frac{1}{y} e^{ty} + \frac{1}{y} [ty\, e^{ty} - e^{ty}] + h(y) \end{aligned}$$

Resolvemos a integral $\int ty\, e^{ty}\, d(ty)$ por partes.

Então,

$$F(t, y) = t + \frac{1}{y} e^{ty} + te^{ty} - \frac{1}{y} e^{ty} = t + te^{ty}$$

Para determinar $h(y)$, como $\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y)$ segue que

$$\begin{aligned} N(t, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y)\, dt + \frac{dh(y)}{dy} \\ &= t^2 y\, e^{ty} + \frac{dh(y)}{dy} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{dh(y)}{dy} = (1 + t^2 e^{ty}) - t^2 e^{ty} = 1 \text{ e portanto}$$

$$F(t, y) = t + t\, e^{ty} + y = c \text{ é a solução.}$$

EXEMPLO 3 Determine a solução geral da equação diferencial

$$3y + e^t + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$$

Solução Temos $M(t, y) = 3y + e^t$ e $N(t, y) = 3t + \cos y$. Então,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \text{ e também } \frac{\partial N}{\partial t} = 3.$$

Seja então $F(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y), \qquad \text{logo} \qquad F(t, y) = \int M(t, y)\, dt + h(y)$$

ou seja

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \int (3y + e^t)\, dt + h(y) \\ &= 3ty + e^t + h(y) \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) = 3t + \cos y = 3t + \frac{dh}{dy}(y)$$

Portanto

$$\frac{dh(y)}{dy} = \cos y$$

donde a solução é

$$h(y) = \text{sen } y \text{ e } F(t, y) = 3ty + e^t + \text{sen } y = c$$

EXERCÍCIOS 20.6

Resolva as equações diferenciais.

1. $(y - t^2)dt - (y^2 - t)dy = 0$
2. $(4x^2y^3 - 2y)dx + (4x^3y^2 - 2x)dy = 0$
3. $(\cos\theta + \theta\cos\varphi)d\varphi + (\text{sen}\,\varphi - \varphi\,\text{sen}\,\theta)d\theta = 0$
4. $(3t + 1)dy + (3t^2 + 3y)dt = 0$
5. $(4t^3 + y^2 e^{ty^2})dt = -(2ty\, e^{ty^2} - 3y^2)dy$
6. $(\frac{y^2}{2} - 2y\, e^t) + (ty - 2e^t)\frac{dy}{dt} = 0$
7. $2ty^3 + 3t^2y^2\frac{dy}{dt} = 0$
8. $3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} = 0$
9. $3ty + y^2 + (\frac{3t^2}{2} + 2ty)\frac{dy}{dt} = 0$
10. $(8ty^2 + 3t^2y)dt + (12y^2 + 8t^2y + t^3)dy = 0$
11. $\frac{y^2e^x}{2} + 2ye^{2x} + (ye^x + e^{2x})\frac{dy}{dx} = 0$
12. $3x^2y + 2x\cos y + (x^3 - y - x^2\,\text{sen}\,y)\frac{dy}{dx} = 0$
13. Resolva pelo 2º método
$$2x + x^4 e^x e^y + 4x^3 e^x e^y + (x^4 e^x e^y + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$
14. Determine qual a função $F(x, y)$ tal que
$$dF = (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy$$

20.7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

As equações diferenciais de segunda ordem são equações do tipo

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Por exemplo,

$$y''(t) = t \cos y(t) + [y(t)]^2$$

é uma equação de segunda ordem. Por solução da equação entendemos uma função que satisfaça a equação. Assim, por exemplo, a função $y(t) = e^{2t}$ é uma solução da equação diferencial $y''(t) = 4y(t)$ pois $y'(t) = 2e^{2t}$ e $y''(t) = 4e^{2t}$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a equação diferencial

$$y''(t) = 0,$$

Vamos supor que $t \in [a, b]$. Aplicando-se duas vezes o segundo teorema fundamental do cálculo, Secção 5.8.2, temos

$$y(t) = c_1 t + c_2$$

Vemos que neste caso a solução geral depende de duas constantes arbitrárias. Freqüentemente é necessário resolver a equação de segunda ordem sujeita a duas condições. No caso de serem dadas as condições $y(a)$ e $y'(a)$, teremos um problema de valor inicial. Caso tenhamos uma condição em a e outra em b, teremos um problema de contorno.

É um problema bastante difícil resolver uma equação diferencial qualquer de segunda ordem. Mesmo o caso linear, isto é, a equação

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t)$$

escapa ao contexto deste livro. Assim, poderemos estudar tão somente o caso

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

isto é, uma equação linear a coeficientes constantes. ◀

Existe uma propriedade que é característica das equações lineares que daremos a seguir.

20.7.1 TEOREMA Se as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

então a função

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, é também solução da equação.

Prova Como as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então

$$ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0$$

e

$$ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0$$

Multiplicando a primeira equação por c_1, a segunda por c_2 e somando, obtemos

$$a[c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)] + b[c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)] + c[c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] = 0$$

ou seja

$$aY''(t) + bY'(t) + cY(t) = 0$$

Vejamos agora em que condições podemos considerar a solução $Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ como sendo a solução geral da equação homogênea, isto é, se $Y^*(t)$ for uma outra solução da equação homogênea, então podemos escolher c_1 e c_2 de tal forma que $Y(t) = Y^*(t)$. Vamos dar um teorema cuja demonstração foge ao contexto deste livro.

20.7.2 TEOREMA Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

no intervalo $\alpha < t < \beta$, com

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

diferente de zero neste intervalo, então a função

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

é a solução geral da equação homogênea.

20.7.3 DEFINIÇÃO A expressão $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ ou

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

é chamada de **wronskiano** das funções y_1 e y_2 e é indicado por

$$W(t) = W[y_1, y_2](t)$$

20.7.4 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS Passemos agora a estudar um método de resolução para a equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Se encontrarmos duas soluções cujo wronskiano seja diferente de zero, teremos então a solução geral. Observando a equação, vemos que os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ devem ter soma nula. Para que isto ocorra, as funções $y''(t)$, $y'(t)$ e $y(t)$ devem ter o mesmo "aspecto", ou seja, não podemos pensar que $y(t)$ seja, por exemplo, um polinômio, pois neste caso os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ seriam polinômios com graus diferentes cuja soma seria não-nula. No entanto, a tentativa $y(t) = e^{\lambda t}$, λ sendo um parâmetro a ser determinado, é válida, pois tornaria o primeiro membro da equação uma combinação linear da função exponencial $e^{\lambda t}$. Substituindo na equação homogênea $y(t)$ por $e^{\lambda t}$, teremos

$$a\lambda^2e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$$

Como a função exponencial é diferente de zero, $e^{\lambda t}$ é solução da equação homogênea se e somente se λ for uma solução da equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

chamada de *equação característica* da equação dada. As raízes desta equação são

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Conforme $(b^2 - 4ac)$ seja positivo, nulo ou negativo teremos, respectivamente, duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou um par de números complexos conjugados.

1º caso Seja $b^2 - 4ac > 0$. Temos então duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 e portanto duas soluções $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ tais que

$$W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Como $W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}] \neq 0$ segue que a solução geral é dada por

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

2º caso Seja $b^2 - 4ac = 0$. Teremos então uma única raiz dupla λ_1 e portanto só uma solução $e^{\lambda_1 t} = y_1(t)$.
Consideremos

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot v(t)$$

Substituindo y_2 na equação homogênea reescrita na forma

$$y''(t) + \frac{b}{a} y'(t) + \frac{c}{a} y(t) = 0$$

como

$$y_2'(t) = y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t)$$

e

$$y_2''(t) = y_1''(t)v(t) + 2y_1'(t)v'(t) + y_1(t)v''(t)$$

teremos

$$\begin{aligned} &v(t)y_1''(t) + 2v'(t)y_1'(t) + y_1(t)v''(t) + \frac{b}{a}[y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t)] + \frac{c}{a} y_1(t)v(t) = \\ &= y_1(t)v''(t) + [2y_1'(t) + \frac{b}{a} y_1(t)]v'(t) + [y_1''(t) + \frac{b}{a} y_1'(t) + \frac{c}{a} y_1(t)]v(t) \\ &= y_1(t)v''(t) + [2y_1'(t) + \frac{b}{a} y_1(t)]v'(t) \end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ é solução da equação. Segue que $y_2(t)$ é solução da equação dada se $v(t)$ for solução da equação diferencial

$$y_1 v''(t) + [2y_1' + \frac{b}{a} y_1]v'(t) = 0$$

Vamos fazer agora $v'(t) = u(t)$ e portanto $v''(t) = u'(t)$. Lembrando que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, então

$$e^{\lambda_1 t} u'(t) + [2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{b}{a} e^{\lambda_1 t}]\, u(t) = 0$$

que é uma equação linear em $u(t)$ e de primeira ordem. Observe que, do fato de conhecermos uma solução $y_1(t)$ conseguimos reduzir a ordem da equação diferencial. Por esta razão, este método é chamado de *método da redução da ordem*. Retomando a última equação, dividida por $e^{\lambda_1 t}$, teremos

$$u'(t) + \left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)u = 0$$

Segue então que

$$u(t) = ke^{-\left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

Como queremos somente uma solução, vamos fazer $k = 1$, logo

$$u(t) = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}$$

Integrando e fazendo a constante de integração igual a zero, teremos

$$v(t) = \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}\,dt$$

Portanto,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}\,dt$$

Observe que $W[y_1(t), y_2(t)]$ é diferente de zero, pois se fosse nulo, y_2 seria um múltiplo de y_1 o que acarretaria $v(t)$ constante, pois $v(t) = \dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$, mas então $\dfrac{dv}{dt} = 0$, porém

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} = e^{-\left(2\lambda_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

que é certamente diferente de zero.

3º caso Se $b^2 - 4ac < 0$ então teremos as raízes complexas

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Se, como anteriormente, $Y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$, $Y(t)$ seria complexo e precisaríamos de duas soluções reais. Isto pode ser contornado da seguinte forma: seja $y(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução da equação homogênea com valores complexos. Então,

$$a[u''(t) + iv''(t)] + b[u'(t) + iv'(t)] + c[u(t) + iv(t)] = 0$$

ou seja

$$[au''(t) + bu'(t) + cu(t)] + i[av''(t) + bv'(t) + cv(t)] = 0$$

Isto significa que o número complexo do primeiro membro da equação é nulo. Mas se um número complexo é zero, são nulas suas partes real e imaginária, conseqüentemente

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

e

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0$$

Assim sendo, cada solução complexa da equação homogênea dá origem a duas soluções reais. Consideremos então a solução complexa $e^{\lambda_1 t}$. Vamos definir

$$\theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Então,

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\left(-\frac{b}{2a} + i\theta\right)t} = e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot e^{i\theta t}$$
$$= e^{-\frac{b}{2a}t}[\cos\theta t + i \operatorname{sen}\theta t]$$
$$= e^{-\frac{b}{2a}t}\cos\theta t + i\, e^{-\frac{b}{2a}t}\operatorname{sen}\theta t$$

E, portanto temos as soluções reais:

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}\cos\theta t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}\operatorname{sen}\theta t$$

Vamos definir $\varphi = -\dfrac{b}{2a}$ e calcular $W[e^{\varphi t}\cos\theta t, e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t]$

$$W[e^{\varphi t}\cos\theta t, e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t] =$$
$$= \begin{bmatrix} e^{\varphi t}\cos\theta t & e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t \\ \varphi e^{\varphi t}\cos\theta t - \theta e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t & \varphi e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t + \theta e^{\varphi t}\cos\theta t \end{bmatrix}$$

Então,

$$W[e^{\varphi t}\cos\theta t, e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t] =$$
$$= \varphi e^{2\varphi t}\cos\theta t\operatorname{sen}\theta t + \theta e^{2\varphi t}\cos^2\theta t - \varphi e^{2\varphi t}\cos\theta t\operatorname{sen}\theta t + \theta e^{2\varphi t}\operatorname{sen}^2\theta t$$
$$= \theta e^{2\varphi t}(\cos^2\theta t + \operatorname{sen}^2\theta t)$$
$$= \theta e^{2\varphi t}$$

Lembrando que $\theta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} > 0$ e que a exponencial não se anula, segue que $W[e^{\varphi t}\cos\theta t, e^{\varphi t}\operatorname{sen}\theta t] \neq 0$
Assim sendo, a solução geral neste caso é

$$Y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}}\cos\theta t + c_2 e^{-\frac{b}{2a}}\operatorname{sen}\theta t.$$

Podemos pensar que a solução complexa $e^{\lambda_2 t}$ dará origem a mais duas soluções reais, entretanto

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot e^{-i\theta t}$$
$$= e^{-\frac{b}{2a}t}[\cos(-\theta t) + i \operatorname{sen}(-\theta t)]$$
$$= e^{-\frac{b}{2a}t}\cos\theta t - i\, e^{-\frac{b}{2a}}\operatorname{sen}\theta t$$

ou seja $e^{-\frac{b}{2a}t}\cos\theta t = y_1(t)$ e $-e^{-\frac{b}{2a}}\operatorname{sen}\theta t = -y_2(t)$, portanto temos novamente as mesmas soluções.

EXEMPLO 1 Dada a equação diferencial

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

determine duas soluções y_1 e y_2 tais que $W[y_1(t), y_2(z)] \neq 0$.

Solução Seja $y(t) = e^{\lambda t}$, então

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

é a equação característica cujas soluções são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Então,

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t}$$

são soluções da equação dada.
Além disso,

$$W[y_1(t), y_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 3e^{t} \neq 0$$

Segue que

$$Y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

é a solução geral da equação dada.

EXEMPLO 2 Dada a equação diferencial

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

determine duas soluções y_1 e y_2 tais que $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$.

Solução A equação característica é

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

que tem $\lambda = 2$ como raiz dupla. Assim sendo, $y_1(t) = e^{2t}$ é uma solução. Por outro lado,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}\, dt = e^{2t} \int \frac{e^{4t}}{e^{4t}}\, dt = te^{2t}$$

Observe que

$$W[y_1(t), y_2(t)] = e^{4t} \neq 0$$

Segue que a solução geral da equação dada é

$$V(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t}.$$

EXEMPLO 3 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

Solução Ao tentarmos a solução $y(t) = e^{\lambda t}$, teremos a equação característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Segue que $e^{(-2+3i)t}$ é uma solução a valores complexos da equação dada. Mas,

$$\begin{aligned} e^{(-2+3i)t} &= e^{-2t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \\ &= e^{-2t} \cos 3t + i\, e^{-2t} \operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

Segue que as partes real e imaginária desta solução são soluções reais da equação dada, assim

$$y_1(t) = e^{-2t} \cos 3t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$$

são soluções da equação dada e além disso

$$W[y_1(t), y_2(t)] = 3e^{-4t} \neq 0$$

Logo,

$$Y(t) = c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$$

é a solução geral.

EXERCÍCIOS 20.7

Resolva as equações diferenciais:

1. $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$
2. $y''(t) - \frac{5}{6} y'(t) + \frac{1}{6} y(t) = 0$
3. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{1}{4} y = 0$
4. $\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 5y(t) = 0$
5. $y''(t) - 10 y'(t) + 25 y(t) = 0$
6. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 10 y(t) = 0$
7. $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$
8. $y''(t) - y'(t) + y(t) = 0$
9. $\frac{d^2y}{dt^2} + 25y(t) = 0$
10. $[(y''(t) - 4y(t)][y''(t) + 9 y(t)] = 0$

20.8 EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS

Vamos considerar agora a equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes e não-homogênea ou completa:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Conforme já observado, em decorrência da linearidade, para obter a solução desta equação basta somar à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa. Como já estabelecemos como obter a solução geral da equação homogênea resta-nos o problema de determinar uma solução particular da equação completa. A exemplo do que já foi feito para as equações lineares de primeira ordem, aqui também temos o método da *variação das constantes*. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções da equação homogênea com $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$. Então,

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

é a solução geral da equação homogênea. Procuramos então uma solução particular da equação completa da forma

$$\varphi(t) = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ &= [u_1y_1' + u_2y_2'] + [u_1'y_1 + u_2'y_2] \end{aligned}$$

Enquanto que

$$\varphi''(t) = [u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''] + [u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2']$$

Podemos ver que

$$[u_1'y_1 + u_2'y_2] = 0$$

então não teremos na expressão de φ'' as derivadas segundas de u_1 e u_2. Vamos modificar um pouco a equação dada escrevendo-a na forma

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = h(t)$$

onde $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{c}{a}$ e $h(t) = \dfrac{1}{a}\, g(t)$

Substituindo $\varphi(t)$ nesta equação e impondo as condições acima de que $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$, teremos

$$\begin{aligned}&[u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''] + \alpha[u_1y_1' + u_2y_2'] + \beta[u_1y_1 + u_2y_2] = \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1\,[y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1] + u_2[y_2'' + \alpha y_2' + \beta y_2] \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2'\end{aligned}$$

pois y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea. Assim sendo, $\varphi(t) = u_1y_1 + u_2y_2$ será solução da equação completa se tivermos:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

e

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = h(t)$$

Multiplicando a primeira equação acima por y_2', a segunda por y_2 e subtraindo uma da outra, teremos

$$[y_1y_2' - y_1'y_2]\, u_1' = -hy_2$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação por y_1', a segunda por y_1 e subtraindo uma da outra, teremos

$$[y_1y_2' - y_1'y_2]u_2' = hy_1$$

segue então que

$$u_1' = \frac{by_1}{y_1y_2' - y_1'y_2} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{-hy_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$

Podemos então obter u_1 e u_2 por integração.

EXEMPLO 1 Ache a solução geral de

$$y''(t) - y(t) = t^2$$

Solução A solução geral da equação homogênea é

$$Y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

uma vez que a equação característica $\lambda^2 - 1 = 0$ tem por raízes ± 1. Seja então

$$\varphi(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t}$$

e portanto

$$\varphi'(t) = [u_1e^t - u_2e^{-t}] + [u_1'e^t + u_2'e^{-t}]$$

Impondo a primeira condição, isto é,

$$u_1'e^t + u_2'e^{-t} = 0 \tag{1}$$

e derivando outra vez, teremos

$$\varphi''(t) = u_1e^t + u_2e^{-t} + u_1'e^t - u_2'e^{-t}$$

substituindo $\varphi(t)$ e $\varphi''(t)$ na equação dada teremos

$$u_1'e^t - u_2'e^{-t} = t^2 \tag{2}$$

As equações (1) e (2) formam um sistema linear em u_1' e u_2'. Então,

$$u_1' = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

Integrando, teremos

$$u_1(t) = -(1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t}$$

Substituindo a expressão de u_1 em (1), obtemos

$$u_2' = -\frac{1}{2}t^2e^t$$

que integrada fornece o valor de u_2, ou seja

$$u_2(t) = -(1 - t + \frac{1}{2}t^2)e^t$$

A solução geral é então

$$y(t) = Y(t) + \varphi(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - 2 - t^2$$

20.8.1 MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

As integrações que aparecem no método da variação das constantes, podem ser bastante complicadas. Dependendo da função $g(t)$ que aparece no segundo membro da equação é possível encontrar mais facilmente uma solução particular da equação completa.

1º caso Suponhamos $g(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1t + a_0$. Uma solução particular $\varphi(t)$ deve ser tal que

$$a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t)$$

seja um polinômio de grau n. Uma tentativa óbvia é fazer de $\varphi(t)$ um polinômio desconhecido de grau n, isto é,

$$\varphi(t) = \alpha_nt^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1t + \alpha_0$$

Então,

$$\varphi'(t) = n\alpha_nt^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1}t^{n-2} + \ldots + \alpha_1$$

e

$$\varphi''(t) = n(n-1)\alpha_nt^{n-2} + \ldots + 3 \cdot 2\alpha_3t + 2\alpha_2$$

Substituindo na equação dada e obrigando o polinômio do primeiro membro a ser idêntico ao do segundo membro, teremos

$$c\alpha_n = a_n,\ c\alpha_{n-1} + nb\alpha_n = a_{n-1}, \ldots, c\alpha_0 + b\alpha_1 + 2a\alpha_2 = a_0$$

Observe que a primeira equação dá o valor α_n que é $\frac{a_n}{c}$, $c \neq 0$, a segunda equação dará o valor de α_{n-1} que é $\frac{a_{n-1} - nb\alpha_n}{c}$ e assim, sucessivamente, iremos determinar $\alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1$ e α_0. Logo, caso $c \neq 0$, podemos determinar a solução particular φ.

No caso em que $c = 0$ e $\varphi(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$, $a\varphi''(t) + b\varphi'(t)$ é um polinômio de grau $(n - 1)$ enquanto $g(t)$ é de grau n, temos, então, um problema. Se considerarmos, no entanto, $\varphi(t)$ de grau $(n + 1)$, tudo se acerta. Seja então

$$\varphi(t) = t[\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0]$$

Não é necessário considerar o termo constante em $\varphi(t)$, pois, $y(t) = k$, k constante, é solução da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) = 0$$

Como a solução da equação completa será calculada somando-se à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa, ou seja,

$$y(t) = Y(t) + \varphi(t)$$

podemos imaginar $y(t) = k$ subtraída de $\varphi(t)$ e acrescentada a $Y(t)$.
Os coeficientes $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ são determinados a partir da equação

$$a\varphi''(t) + b\varphi'(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

pois

$$\varphi'(t) = \alpha_0 + 2\alpha_1 t + \ldots + n\alpha_{n-1}\, t^{n-1} + (n + 1)\, \alpha_n t^n$$

e

$$\varphi''(t) = 2\alpha_1 + 3 \cdot 2\, \alpha_2\, t + \ldots + (n + 1)n\alpha_n\, t^{n-1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} (n + 1)\, b\alpha_n &= a_n \\ (n + 1)\, na\alpha_n + nb\alpha_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ 2a\alpha_1 + b\alpha_0 &= a_0 \end{aligned}$$

e se $b \neq 0$ a solução é única.

O caso em que $b = c = 0$ pode ser facilmente resolvido por integrações, uma vez que temos

$$y''(t) = \frac{1}{a}\,[a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0]$$

Integrando duas vezes, teremos

$$\varphi(t) = \frac{1}{a}\left[\frac{a_n t^{n+2}}{(n + 2)(n + 1)} + \ldots + \frac{a_1 t^3}{3 \cdot 2} + \frac{a_0 t^2}{2 \cdot 1}\right]$$

2º caso Seja agora

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0)e^{\alpha t}$$

Queremos eliminar $e^{\alpha t}$ do segundo membro para recairmos no caso anterior. Consideremos então a substituição $y(t) = e^{\alpha t}u(t)$.

Segue que

$$y'(t) = (\alpha u(t) + u'(t))e^{\alpha t}$$

e

$$y''(t) = (u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2 u(t))e^{\alpha t}$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$$

Se $u(t)$ for solução desta equação, $y(t) = e^{\alpha t}u(t)$ será solução da equação dada e vice-versa.

Como recaímos no 1º caso, existem três situações a serem analisadas:

(i) O caso em que $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$, isto é, $e^{\alpha t}$ não é solução da equação homogênea. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0)e^{\alpha t}$ é uma solução particular da equação completa;

(ii) o caso em que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, mas $2a\alpha + b \neq 0$. Isto acarreta que $e^{\alpha t}$ é solução da equação homogênea, mas $te^{\alpha t}$ não é. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0)te^{\alpha t}$ é uma solução particular da equação completa;

(iii) o caso em que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ e $2a\alpha + b = 0$. Isto significa que α é uma raiz dupla da equação característica e portanto $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea. Então, $\varphi(t) = (\alpha_n t^n + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0)t^2 e^{\alpha t}$ é uma solução particular da equação completa.

3º caso Vamos supor que

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \cos wt$$

ou

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \operatorname{sen} wt$$

Para recairmos no 2º caso vamos precisar do teorema a seguir.

20.8.2 TEOREMA Se $y(t) = u(t) + iv(t)$ for uma solução a valores complexos da equação, com coeficientes reais

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t) + ih(t)$$

então

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = g(t)$$

e

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = h(t)$$

Prova Basta substituir $y(t) = u(t) + iv(t)$ na equação dada e igualar as partes reais e imaginárias do primeiro e do segundo membro.

Se $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ for uma solução particular de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0)e^{iwt}$$

a parte real do segundo membro é $(a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0) \cos wt$ e $(a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0) \operatorname{sen} wt$ é a parte imaginária. Segue então do Teorema 20.8.2 que

$$u(t) = Re[\varphi(t)] \quad \text{e} \quad v(t) = Im[\varphi(t)]$$

são soluções particulares, respectivamente, de

$$ay'' + by' + cy = (a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0) \cos wt$$

e

$$ay'' + by' + cy = (a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0) \operatorname{sen} wt$$

EXEMPLO 2 Determine uma solução particular de

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$$

Solução Seja

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

Substituindo na equação dada, teremos

$$\alpha_2 t^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)t + (\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2) = t^2$$

Logo,

$$\alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

e portanto

$$\alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = -2 \qquad \alpha_0 = 0$$

e

$$\varphi(t) = 2t + t^2$$

é a solução particular.

EXEMPLO 3 Determine uma solução particular de

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (1 + t + t^2 + t^3)e^{2t}$$

Solução Seja $y = ue^{2t}$, então,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 1 + t + t^2 + t^3$$

e

$$u(t) = \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^5}{4 \cdot 5}$$

Segue que

$$\varphi(t) = e^{2t}\left[\frac{t^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{t^5}{4 \cdot 5}\right]$$

EXEMPLO 4 Determine uma solução particular de

$$y''(t) + 4y(t) = \cos 2t$$

Solução Consideremos a equação a valores complexos

$$y''(t) + 4y(t) = e^{2it}$$

cuja equação característica $\lambda^2 + 4 = 0$ tem por raízes $\lambda = \pm 2i$ e, assim sendo, $\Psi(t) = \alpha_0 t e^{2it}$ é a solução a ser tentada. Como

$$\Psi'(t) = \alpha_0(1 + 2it)e^{2it} \quad \text{e} \quad \Psi''(t) = \alpha_0(4i - 4t)e^{2it}$$

então

$$\Psi''(t) + 4\Psi(t) = 4i\alpha_0 e^{2it}$$

Donde concluímos que $\alpha_0 = \dfrac{-i}{4}$ e

$$\Psi(t) = -\frac{it}{4}e^{2it} = -\frac{it}{4}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) = \frac{t}{4}\operatorname{sen} 2t - i\frac{t}{4}\cos 2t$$

Assim sendo,

$$\varphi(t) = Re\{\Psi(t)\} = \frac{t}{4} \text{ sen } 2t$$

é uma solução particular da equação dada.

EXEMPLO 5 Determine uma solução particular de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos t + 3 \text{ sen } t$$

Solução Vamos tentar a solução $\varphi(t) = a \cos t + b \text{ sen } t$, então

$$\Psi'(b) = -a \text{ sen } t + b \cos t \quad \text{e} \quad \varphi''(t) = -a \cos t - b \text{ sen } t$$

Logo,

$$-a\cos t - b\,\text{sen}\, t + 3a\,\text{sen}\, t - 3b\cos t + 2a\cos t - 2b\,\text{sen}\, t = \cos t + 3\,\text{sen}\, t$$

resultando da identificação que

$$a - 3b = 1 \quad \text{e} \quad 3a + b = 3$$

e assim $a = 1$ e $b = 0$, portanto

$$\varphi(t) = \cos t$$

é uma solução particular da equação dada.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1 Vibrações Mecânicas de Pequena Amplitude***

Estudaremos aqui o movimento de partículas representadas por pontos no espaço, que também podem ser corpos rígidos representados pelos seus centros de massa.

O movimento de uma partícula no espaço será representado por uma função $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ que nos dá o vetor posição para cada instante.

A velocidade desta partícula é dada por $v = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right)$ que, como sabemos da geometria analítica, é um vetor tangente à trajetória. A aceleração da partícula é o vetor $\mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$.

A força também é uma entidade representada por um vetor, e o efeito de várias forças $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ sobre esta partícula pode ser representado como o efeito de uma só força $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n$ obtida da soma vetorial; $\mathbf{F}$ é chamada de resultante das forças.

A segunda Lei de Newton estabelece então que o movimento $\mathbf{x}(t)$ da partícula m (m talvez variável com o tempo) deve satisfazer a equação

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F} \tag{1}$$

onde $\mathbf{F}$ é a resultante de todas as forças aplicadas sobre a partícula no mesmo instante.

Esta lei é uma condição a ser cumprida entre o movimento $\mathbf{x}(t)$ da partícula de massa m e a força $\mathbf{F}$ que atua sobre ela.

* BASSANEZI, R., FERREIRA Jr, W. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo, HARBRA, 1988. p. 114-118.

Se pudermos prever a força **F** que atuará sobre a partícula, dada sua posição **x** no espaço, sua velocidade **v**, e o instante observado t, a segunda Lei de Newton será então uma equação diferencial para o movimento. Isto é, se considerarmos **F** como função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, então, com a interpretação acima, o movimento da partícula deve satisfazer a equação vetorial (componente a componente)

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] \tag{2}$$

que é uma equação diferencial ordinária para a função incógnita $\mathbf{x}(t)$.

Do ponto de vista físico é claro que esta equação não caracteriza um determinado movimento, mas impõe uma condição sobre os possíveis movimentos. Para caracterizar um movimento é necessário que se especifique o ponto de partida $\mathbf{x}_0$ e sua velocidade inicial $\mathbf{v}_0$.

Estas condições todas podem ser reunidas em um problema matemático

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \tag{3}$$

que é o chamado problema de Cauchy para a equação diferencial.

As dificuldades na resolução destes problemas dependem inteiramente do tipo de função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que aparece na equação. No caso geral, este problema é extremamente difícil.

Para obtermos um modelo interessante, mas ainda matematicamente tratável, devemos nos restringir a situações físicas de interesse, em que a função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ é relativamente simples.

O problema físico de vibrações mecânicas em torno de uma posição de equilíbrio é de grande importância nas aplicações em Engenharia e na Física, e também como um protótipo de equações diferenciais ordinárias, onde vários conceitos de idéias matemáticas são desenvolvidos e apreciados.

O oscilador harmônico, que estudaremos mais abaixo, talvez seja o modelo de comparação mais utilizado em Física pela sua relativa simplicidade e pela quantidade de conceitos importantes que apresenta. O desenvolvimento inicial da Física Atômica, por exemplo, baseou-se em grande parte no modelo mecânico e na linguagem do escilador harmônico.

Vamos analisar o comportamento de uma partícula de massa m, constante, restrita ao movimento sobre a reta, e sob a ação de três tipos de forças:

1. Uma força elástica que tende a resultar a sua posição de equilíbrio em $x = 0$. Esta força será uma função do deslocamento $f(x)$, tal que $f(0) = 0$ e $xf(x) < 0$, se $x \neq 0$, isto é, não há força sem deslocamento e se houver um deslocamento x, a força atuará sempre no sentido oposto a ele.

2. Forças de atrito, que poderão ser de duas formas:

a. Força constante contrária ao movimento, causada por atrito de contacto (Lei de Coulomb), como, por exemplo, devido à restrição que a partícula tem para se movimentar em uma reta.
Neste caso, $F_a = -s(v)F_0$, com $s(0) = 0$, $s(v) = 1$ se $v > 0$, $s(v) = -1$ se $v < 0$ e F_0 constante positiva.

b. Força provocada pela resistência ao movimento imerso em um meio viscoso e que para velocidades baixas pode ser considerada como aproximadamente igual a $F_b = -cv$, $c > 0$.

3. Uma força externa conhecida $\varphi(t)$, exercida sobre a partícula e dependente apenas do tempo (veja a Figura 1).

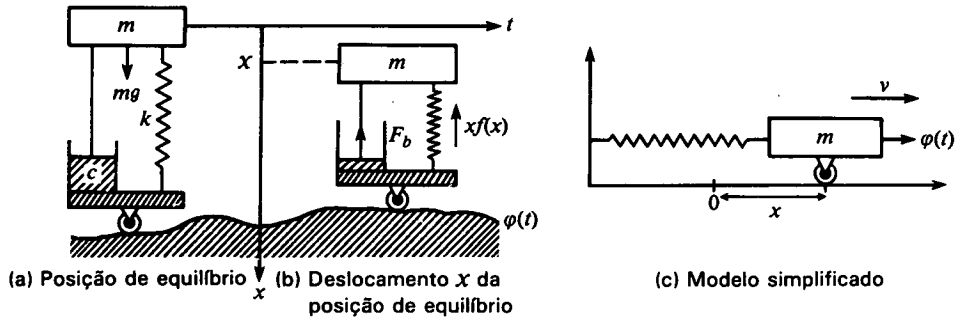


FIGURA 1 Oscilador harmônico amortecido

A segunda Lei de Newton nos fornece então uma condição entre o movimento $x(t)$ e a força resultante sobre esta partícula dada pela seguinte equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - c\frac{dx}{dt} + \varphi(t) - s\left(\frac{dx}{dt}\right)F_0 \tag{4}$$

Esta não é uma equação simples. No caso de uma função geral $f(x)$, para torná-la mais tratável do ponto de vista matemático faremos uma última hipótese: a vibração é de pequena amplitude e a partícula não se afasta muito da origem durante seu movimento. Com base nisto, faremos uma aproximação para a função $f(x)$ (suposta diferenciável) em torno da origem:

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x = f'(0)x$$

ou, como é tradicional escrever,

$$f(x) \cong -kx \qquad \text{onde} \qquad k = -f'(0)$$

Do ponto de vista do gráfico de $f(x)$, estamos aproximando a curva em torno da origem pela sua reta tangente. No caso de ser uma mola a causadora da força de restauração, o gráfico de f com o deslocamento tem em geral o aspecto da Figura 2. A hipótese da aproximação vale, então, para vibrações de amplitude menor do que x_M. Se considerarmos aproximações de $f(x)$ até a terceira ordem do desenvolvimento de Taylor, teremos

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

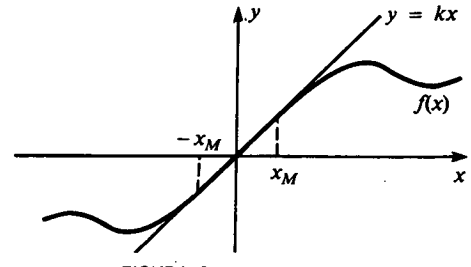


FIGURA 2 Força elástica

Observe que pela simetria do gráfico devemos ter $f''(0) = 0$. Sem o atrito, a equação (4) toma então a forma $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \varphi(t)$, denominada equações de Duffing, que *não* é linear.

O *oscilador harmônico clássico* considera apenas a força de atrito viscosa, e não a de contacto, de onde vem a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = \varphi(t) \tag{5}$$

onde a operação efetuada sobre a função $x(t)$

$$\mathbf{L}x(t) = \left(m\frac{d^2}{dt^2} + c\frac{d}{dt} + k\right)x(t)$$

é linear. (Observe que a inclusão da força de atrito por contato torna a equação *não*-linear.)

Outro problema físico clássico que pode ser estudado aproximadamente pela equação do oscilador harmônico (isto é, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes!) é o *movimento de um pêndulo*, constituído de uma massa m suspensa por um fio inextensível sem massa e flexível. A partícula de massa m está restrita a se movimentar sobre um círculo (veja a Figura 3).

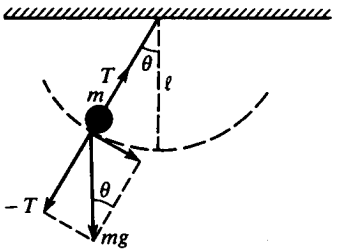


FIGURA 3 Pêndulo

A segunda Lei de Newton aplicada à componente tangencial ao movimento nos dá

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\theta) = -mg \operatorname{sen}\theta - c\frac{\ell\theta}{dt} + \varphi(t)$$

ou seja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta - c\frac{d\theta}{dt} + \varphi(t) \tag{6}$$

Esta equação é não-linear em θ, pois $\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$ é uma operação não-linear sobre a função $\theta(t)$ e faz o papel da força restauradora.

Entretanto, se considerarmos que a vibração do pêndulo é de pequena amplitude, próxima do ponto de equilíbrio, então θ é pequeno comparado com 1 e portanto, se $\theta \cong \theta$.

Sob esta hipótese, a equação linearizada do movimento do pêndulo fica sendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta + c\frac{d\theta}{dt} = \varphi(t) \tag{7}$$

e do pêndulo livre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \tag{8}$$

que são equações correspondentes à do oscilador harmônico. ◀

EXERCÍCIOS 20.8

Resolva as equações diferenciais.

1. $y'' - 3y' + 2y = te^{-2t}$
2. $y''' - 5y'' - 8y' - 4y = e^{3x}$
   (*Sugestão*: $(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda - 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$)
3. $y'' + 4y = 8t$
4. $y'' + 9y = 3\cos 3t$
5. $y'' - 3y' - 4y = 1 - 2t$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 48te^t$
7. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 4x + 5e^{2x} + 20\cos x$
8. $y'' - 3y' + 2y = 2e^t$
9. $y'' - y' - 6y = 6x^3 + 26\operatorname{sen} 2x$
10. $y'' - 2y' - 3y + 8e^{-x} + 3x = 0$

20.9 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR SÉRIES

Consideremos agora uma equação diferencial homogênea a coeficientes variáveis

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

onde $a(t) \neq 0$ para $\alpha < t < \beta$. Vimos o caso em que $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ eram constantes. Vamos supor agora $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ polinômios. É razoável procurar então uma solução que seja um polinômio. Para determinar esta solução polinomial $y(t)$ com coeficientes desconhecidos, podemos igualar a zero a soma dos coeficientes das mesmas potências de t. Além disso, pode-se provar que se duas soluções y_1 e y_2 da equação acima forem tais que $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$, então toda solução da equação pode ser escrita na forma $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, e assim o problema se reduz a encontrar duas soluções.

EXEMPLO 1 Resolva $(1 + t)^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0$

Solução Como não sabemos qual deve ser o grau da solução polinomial vamos por

$$y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n + \ldots$$

Então,

$$3ty'(t) = 3a_1t + 3 \cdot 2\, a_2t^2 + \ldots + 3na_nt^n + \ldots$$

e

$$y''(t) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3t + 4 \cdot 3a_4t^2 + \ldots + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}t^n + \ldots$$
$$t^2y''(t) = 2a_2t^2 + \ldots + n(n - 1)a_nt^n + \ldots$$

Somando os coeficientes das mesmas potências de t:

$$[a_0 + 2a_2] + [a_1 + 3a_1 + 3 \cdot 2a_3]\, t + [a_2 + 3 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 3a_4 + 2a_2]\, t^2 + \ldots$$
$$+ [a_n + 3_na_n + (n + 2)(n + 1)\, a_{n+2} + n(n - 1)\, a_n]\, t^n + \ldots$$

Igualando a zero os coeficientes, teremos

$$(1 + 3n + n^2 - n)\, a_n + (n + 2)(n + 1)\, a_{n+2} = 0$$

ou

$$a_{n+2} = -\frac{1 + 2n + n^2}{(n + 1)(n + 2)}\, a_n = -\frac{n + 1}{n + 2}\, a_n \tag{1}$$

20.9.1 DEFINIÇÃO A equação que expressa a_{n+2} em termos de a_n é chamada **fórmula de recorrência** ou uma **equação de diferenças**.

Vemos que ao determinar a_2 podemos determinar a_4 e assim sucessivamente. Da mesma forma, a_1 determina a_3 o qual por sua vez determina a_5 e assim por diante. Uma vez que sejam dados os valores de a_0 e a_1 todos os coeficientes ficam determinados de modo único. Observando que $a_0 = y(0)$ enquanto que $a_1 = y^1(0)$, vemos que a_0 e a_1 decorrem das condições iniciais do problema. Como buscamos duas soluções, vamos considerar a título de exemplo dois conjuntos de valores para a_0 e a_1, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, para (1).

No primeiro caso todos os coeficientes ímpares $a_1, a_3, a_5, \ldots$ são nulos, pois a_1 é nulo. Quanto aos coeficientes pares temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2},\ a_4 = -\frac{3a_2}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},\ a_6 = -\frac{5}{6}\, a_4 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

e

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2_{n-1})}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2_n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2_{n-1})}{2^n\, n!}$$

Então,

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2_{n-1})}{2^n\, n!} t^{2n}$$

No segundo caso, como $a_0 = 0$, todos os coeficientes pares são nulos enquanto que para os coeficientes ímpares teremos

$$a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = -\frac{2}{3}, a_5 = -\frac{4}{5} a_3 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, a_7 = -\frac{6}{7} a_5 = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

e

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots 2_n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots (2_{n+1})} = (-1)^n \frac{2^n\, n!}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$$

Logo,

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n\, n!}{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n+1)}$$

Convém observar que y_1 e y_2 são dados como séries de potências cujas propriedades foram estudadas no Capítulo 13.

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $y'(t) = y(t)$.

Solução Trata-se de uma equação linear homogênea cuja solução é $y(t) = y(0)\, e^t$. Vamos resolvê-la agora usando séries. Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

No intervalo de convergência da série, veja a Secção 13.2, podemos derivá-la termo a termo, logo

$$y^1(t) = a_1 + 2a_2 t + \ldots + na_n\, t^{n-1} + \ldots$$

Substituindo na equação y e y' e igualando os coeficientes da mesma potência de t, iremos ter

$$na_n = a_{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Temos de novo uma fórmula de recorrência ou equação de diferenças. A situação é um pouco mais simples que a do Exemplo 1, pois, dado a_0 determinamos a_1 que por sua vez determina a_2 e assim sucessivamente. Então, basta o conhecimento de a_0 para determinarmos de modo único todos os coeficientes e $a_0 = y(0)$.

Da fórmula de recorrência temos

$$a_1 = \frac{1}{1} a_0 = \frac{1}{1!} a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} a_0 = \frac{1}{2!} a_0$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \ldots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}\right) a_0 = \frac{1}{n!} a_0$$

Segue então que

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!} t^n + \ldots\right) a_0$$

Por outro lado, pela fórmula de Maclaurin, Secção 13.4, temos

$$e^t = 1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t_2 + \ldots + \frac{1}{n!} t^n + \ldots$$

Portanto,

$y(t) = e^t\, y(0)$ conforme era esperado.

EXEMPLO 3 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) - 2t\, y^1(t) - 2y(t) = 0$$

Solução Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a^2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

então

$$-2y(t) = -2a_0 - 2a_1 t - \ldots - 2a_n t^n - \ldots$$
$$-2ty^1(t) = -2a_1 t - \ldots - 2na_n t^n - \ldots$$

e

$$y''(t) = 2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2a_3 t + \ldots + (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, t^n + \ldots$$

Assim,

$$[-2a_0 + 2 \cdot 1a_2] + [-2a_1 - 2a_1 + 3 \cdot 2a_3]\, t + [-2a_2 - 2 \cdot 2a_2 + 4 \cdot 3a_4]\, t^2 + \ldots$$
$$+ [-2a_n - 2na_n + (n+2)(n+1)\, a_{n+2}]\, t^n + \ldots$$

Igualando a zero os coeficientes, temos

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = 2(n+1)\, a_n$$

ou

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Temos então uma fórmula de recorrência ou equação de diferenças. Da fórmula de recorrência vemos que a_0 determina a_2 que por sua vez determina a_4 e assim sucessivamente. Analogamente, a_1 determina a_3 que por sua vez determina a_5 e assim por diante. Todos os coeficientes ficam determinados de modo único se forem dados os valores de a_0 e a_1, isto é, se forem dados $y(0)$ e $y'(0)$.

EXEMPLO 4 Resolva a equação diferencial

$$y''(t) - y(t) = t^2$$

Solução Vamos supor que $y(t)$ seja a soma de uma série de potências

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

No intervalo de convergência desta série podemos derivá-la termo a termo e a série assim obtida tem por soma $y'(t)$, logo

$$y'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots$$

Assim,

$$y'(t) - y(t) - t^2 = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)\, t + (3a_3 - a_{2-1})\, t^2 + (4a_4 - a_3)\, t^3 + \dots$$
$$+ (n a_n - a_{n-1})\, t^{n-1} + \dots$$

A fim de que a série do segundo membro seja nula numa vizinhança de $t = 0$, é necessário e suficiente que todos os coeficientes sejam nulos, assim

$$a_1 - a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = a_0 = y(0)$$

$$2a_2 - a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_0$$

$$2a_3 - a_2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0 + \frac{1}{3}$$

$$4a_4 - a_3 = 0 \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{1}{4} a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0 + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$n a_n - a_{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots n} a_0 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots n} = \frac{1}{n!}(a_0 + 2) \; n \geqslant 4$$

A fórmula para a_n pode ser provada por indução, pois, se

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}(a_0 + 2)$$

Como $a_n = \dfrac{1}{n} a_{n-1}$, segue que

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)!}(a_0 + 2) = \frac{1}{n!}(a_0 + 2)$$

Então,

$$y(t) = a_0 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} a_0\right) t^3 + \sum_{n=4}^{\infty} (a_0 + 2) \frac{t^n}{n!}$$

Portanto,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + 2) \frac{t^n}{n!} - (a_0 + 2) - (a_0 + 2)t - (a_0 + 2) \frac{t^2}{2} -$$
$$- (a_0 + 2) \frac{t^3}{6} + a_0 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} a_0\right) t^3$$
$$= (a_0 + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - t^2 - 2t - 2$$

Por outro lado, numa vizinhança de $t = 0$ temos

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

logo

$$y(t) = (a_0 + 2)\, e^t - t^2 - 2t - 2$$

mas $y'(t) - y(t) = t^2$ é uma equação diferencial linear de primeira ordem cuja equação homogênea associada é

$$y'(t) - y(t) = 0$$

e tem por solução geral

$$Y(t) = ke^t$$

A fim de obter uma solução particular da equação completa vamos tentar

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c$$

pois o segundo membro é um polinômo do segundo grau.
Então, como $\varphi'(t) = 2at + b$,

$$(2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2$$

Identificando os coeficientes das potências iguais de t, temos

$$a = -1,\ b = -2 \text{ e } c = -2$$

Assim,

$$\varphi(t) = -t^2 - 2t - 2 \quad \text{e} \quad y(t) = ke^t - t^2 - 2t - 2$$

Para $t = 0$, $y(0) = a_0 = k - 2$, de onde tiramos que

$$k = a_0 + 2$$

e assim, como anteriormente

$$g(t) = (a_0 + 2)\, e^t - t^2 - 2t - 2$$

EXERCÍCIOS 20.9

1. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'(t) - y(t) = t^2 - 2t + 1$, sendo $y(1) = 2$.
2. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'(t) + \frac{1}{1-t}y(t) = \frac{2t}{1-t}$, sujeita a condição $y(0) = 0$.
3. Resolva, por séries, $y''(t) + ty'(t) + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.
4. Resolva, por séries, a equação diferencial $xy'' + x^3y' - 3y = 0$ sendo que $y(1) = 0$ e $y'(1) = 2$.
5. Resolva, por séries, a equação diferencial $(x - 1)\, y''' + y'' + (x - 1)\, y' + y = 0$ sendo $y(0) = y''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$
6. Resolva, por séries, a equação diferencial $(2x - 1)\, y'' - 3y' = 0$.
7. Resolva, por séries, a equação diferencial $2y''' + xy'' + 2y' + xy = 0$ sendo $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = -1$.
8. Resolva, por séries, a equação diferencial $t^2y'' + 3ty' - 3y = 0$
9. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'' + \frac{3t}{1 + t^2}y' + \frac{1}{1 + t^2}y = 0$ sendo $y(0) = 1$ e $y'(0)$.
10. Resolva, por séries, a equação diferencial $y'' + t^2y' + 2ty = 0$, sendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Apêndice

A.1 USO DE UMA TABELA DE INTEGRAIS

Apresentamos várias técnicas de integração e vimos como elas são úteis para a avaliação de muitas integrais. No entanto, há ocasiões em que esses procedimentos não são suficientes ou levam a uma integração complicada. Em tais casos, você pode desejar usar uma *tabela de integrais*. Tabelas bastante completas aparecem em textos de Matemática, e tabelas menores são encontradas na maioria dos textos de Cálculo. Deve-se ter o cuidado de não se confiar totalmente nas tabelas, ao calcular integrais. É essencial que se tenha o domínio das técnicas de integração, como foi mencionado no Capítulo 9, pois pode ser necessário empregar algumas das técnicas para expressar o integrando numa forma que seja encontrada em uma tabela.

Uma tabela breve de integrais aparece no final deste livro. As fórmulas usadas nos exemplos e exercícios desta secção aparecem nessa tabela. Observe que na tabela há legendas indicando a forma do integrando. A primeira legenda é *Algumas Formas Elementares* e as cinco fórmulas incluídas constam daquelas dadas na introdução ao Capítulo 9. A segunda legenda é *Formas Racionais Contendo $a + bu$*. O primeiro exemplo utiliza uma dessas fórmulas.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3}$$

Solução A fórmula 10 na tabela de integrais é

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu}\right] + C$$

Usando essa fórmula com $u = x$, $a = 4$ e $b = -1$, temos

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3} = \frac{1}{(-1)^2}\left[\frac{4}{2(4-x)^2} - \frac{1}{4-x}\right] + C$$

$$= \frac{2}{(4-x)^2} - \frac{1}{4-x} + C$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{6-2x^2}$$

Solução A fórmula 25 na tabela é

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C \tag{1}$$

Observe que essa fórmula pode ser usada se o coeficiente de x^2 na integral for 1, em vez de 2. Assim, escrevemos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{3 - x^2}$$

Para a integral à direita aplicamos (1) com $u = x$ e $a = \sqrt{3}$ e nós temos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)}$$

A integral no segundo membro é da forma

$$\int \frac{du}{u(a + bu)}$$

onde $u = x$, $a = 1$ e $b = 2$. A fórmula 11 na tabela é

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

Usando essa fórmula,temos

$$\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \ln \left| \frac{x}{1 + 2x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{2x + 1} \right| + C$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Solução A fórmula 27 na tabela é

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C \tag{2}$$

Podemos aplicar essa fórmula à integral dada se obtivermos uma expressão da forma $u^2 \pm a^2$, completando o quadrado sob o sinal radical. Para completar o quadrado de $x^2 + 2x$ acrescentamos 1 e, portanto, também subtraímos 1. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}}$$

A integral é da forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

onde $u = x + 1$ e $a = 2$. Logo, de (2),

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}} &= \ln\left|(x + 1) + \sqrt{(x + 1)^2 - 4}\right| + C \\ &= \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{4x^2 + 1}\, dx$$

Solução A fórmula 29 na tabela, com o sinal mais, é

$$\int u^2\sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 + a^2)\sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C \qquad (3)$$

Podemos aplicar essa fórmula escrevendo a integral do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{4x^2 + 1}\, dx &= \int x^2 \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}\, dx \\ &= 2\int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx \end{aligned}$$

De (3) com $u = x$ e $a = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} 2\int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx &= 2\left[\frac{x}{8}\left(2x^2 + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{16}}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right|\right] + C \\ &= \frac{x}{16}(8x^2 + 1)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{64}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right| + C \end{aligned}$$

Das fórmulas 16, 19, 21, 73, 77, 86 e 98, entre outras, expressamos uma integral em termos de uma integral mais simples da mesma forma. Tais fórmulas são chamadas **fórmulas de redução**. O exemplo a seguir mostra como elas são aplicadas.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \sec^5 x\, dx$$

Solução A fórmula 77 é

$$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du \qquad (4)$$

Aplicamos essa fórmula com $u = x$ e $n = 5$ e temos

$$\int \sec^5 x\, dx = \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4} \int \sec^3 x\, dx$$

Agora aplicamos (4) à integral no segundo termo com $n = 3$ e obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\, dx &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2} \int \sec x\, dx\right) \\ &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

Como a integral no Exemplo 6 é uma potência ímpar da secante, ela pode ser calculada com o uso de integração por partes, conforme foi explicado na Seção 9.3. De fato, essa integral aparece como Exercício 12 nos Exercícios 9.3.

EXERCÍCIOS A.1

Nos Exercícios de 1 a 36, use a tabela de integrais para calcular a integral. Nos Exercícios de 1 a 4, o integrando é uma forma racional $a + bu$. Use uma das fórmulas de 6 a 13.

1. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{2 + 3x}$
2. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(5 - 2x)^3}$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{(6 - x)^2}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(7 + 3x)}$

Nos Exercícios de 5 a 8, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a \pm bu}$. Use uma das fórmulas de 14 a 23.

5. $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$
6. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 + 2x}\, dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + 2x}}{x}\, dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 2x}}$

Nos Exercícios 9 e 10, o integrando é uma forma contendo $a^2 + u^2$. Use uma das fórmulas de 24 a 26.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - x^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 25}$

Nos Exercícios de 11 a 14, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. Use uma das fórmulas de 27 a 38.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$
12. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 + 1}\, dx$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x}\, dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 1)^2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

Nos Exercícios 15 e 16, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$. Use uma das fórmulas de 39 a 48.

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\, dx$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - 9x^2}}$

Nos Exercícios 17 e 18, o integrando é uma forma contendo $2au - u^2$. Use uma das fórmulas de 49 a 58.

17. $\displaystyle\int x\sqrt{4x - x^2}\, dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Nos Exercícios de 19 a 24, o integrando é uma forma contendo funções trigonométricas. Use uma das fórmulas de 59 a 88.

19. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$
20. $\displaystyle\int \cos^8 x\, dx$
21. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^7 x\, dx$
22. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$
23. $\displaystyle\int t^4 \cos t\, dt$
24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$

Nos Exercícios 25 e 26, o integrando é uma forma contendo uma função trigonométrica inversa. Use uma das fórmulas de 89 a 94.

25. $\displaystyle\int \sec^{-1} 3x\, dx$
26. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} 4t\, dt$

Nos Exercícios de 27 a 34, o integrando é uma forma contendo uma função exponencial ou logarítmica. Use uma das fórmulas de 95 a 106.

27. $\int x^4 e^x \, dx$
28. $\int x^3 2^x \, dx$
29. $\int x^2 e^{4x} \, dx$
30. $\int x^2 \ln x \, dx$
31. $\int x^3 \ln (3x) \, dx$
32. $\int 5x^2 e^{-2x} \, dx$
33. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 5x \, dx$
34. $\int e^{3t} \cos 4t \, dt$

Nos Exercícios 35 e 36, o integrando é uma forma contendo uma função hiperbólica. Use uma das fórmulas de 107 a 124.

35. $\int 3y \operatorname{senh} 5y \, dy$
36. $\int e^x \operatorname{sech} e^x \, dx$

Nos Exercícios de 37 a 52, use a tabela de integrais para calcular a integral definida.

37. $\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x)^2}$
38. $\int_0^3 \frac{x \, dx}{(1+x)^2}$
39. $\int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2+16}}$
40. $\int_0^2 \frac{dx}{(9+4x^2)^{3/2}}$
41. $\int_1^2 x^4 \ln x \, dx$
42. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$
43. $\int_3^4 \sqrt{x^2+2x-15} \, dx$
44. $\int_3^5 x^2 \sqrt{x^2-9} \, dx$
45. $\int_1^2 \sqrt{4w-w^2} \, dw$
46. $\int_0^{\pi/3} \sec^5 x \, dx$
47. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 5t \, dt$
48. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 \theta \, d\theta$
49. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x \cos^3 2x \, dx$
50. $\int_4^5 w^2 \sqrt{w^2-16} \, dw$
51. $\int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$
52. $\int_0^{\pi/6} e^{2t} \operatorname{sen} 3t \, dt$

A.2 TRANSFORMAÇÕES FUNCIONAIS E OPERADORES

Em primeiro lugar veremos os conceitos básicos para o estudo das transformações funcionais e operadores. Em seguida, as funções geradoras e equações de diferenças, e enfim os métodos operacionais.

A.2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Será interessante comparar a definição que daremos a seguir com a que foi dada para função na Secção 1.4.1.

Sejam x e y dois espaços vetoriais reais (veja a Secção 14.1.9) e seja Ω um conjunto contido em x.

A.2.1.1 Definição

Se um elemento $y = T(x) \in Y$ está associado com cada $x \in \Omega$ dizemos que uma *transformação* ou aplicação T está definida em Ω e que ela leva Ω em Y. O conjunto Ω é chamado de **domínio de definição** da aplicação T enquanto que o conjunto dos elementos $y = T(x)$ em Y é chamado de **domínio dos valores** da transformação T.

Caso tenhamos por domínio de valores um conjunto de números, a transformação é chamada de **funcional**.

Caso $X = Y$, a transformação é então chamada de **operador**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Sejam $X = R^3$ e $Y = R^2$. A cada vetor $(x_1, x_2) \in R^2$ podemos considerar o vetor (x_1, x_2, x_3) em R^3, onde x_3 é qualquer. Temos então uma aplicação P de R^3 em R^2 tal que

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

A aplicação P é chamada de *projeção* de R^3 em R^2. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja $X = R^2$ e $Y = R$. Dado um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ em R^2 podemos associar a ele o número $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Temos então uma aplicação N tal que

$$N(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

A aplicação N é um funcional. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja X o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis num intervalo $[a, b]$, que costuma ser notado por $C^\infty[a, b]$. Em $X = C^\infty[a, b]$, podemos considerar duas aplicações:

$$Df = \frac{df}{dt} \quad \text{e} \quad Tf = \int f(t)dt$$

As aplicações D e T são de $C^\infty[a, b]$ em si mesmo, isto é, são operadores. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja X o espaço vetorial R^2 das duplas reais. Dado $x = (x_1, x_2)$ consideremos o vetor

$$y = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta,\ x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta)$$

obtido girando x de um ângulo θ no sentido anti-horário. A aplicação

$$R(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta,\ x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta)$$

é um operador em R^2 chamado de *rotação*.
Da mesma forma, se a for um vetor fixo em R^2 podemos considerar

$$T(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + a$$

que também é um operador em R^2 chamado de *translação*. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos o conjunto s das seqüências reais, que consideraremos aqui como funções definidas no conjunto dos números naturais 0, 1, 2, 3, ... e com valores reais.
Dadas duas seqüências em s, $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$, vamos definir

$$x + y = \{x_n + y_n\}$$

e

$$\alpha x = \{\alpha x_n\} \quad \alpha \text{ sendo um número real}$$

O conjunto s com estas definições é um espaço vetorial. Dada a seqüência $\{x_n\} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = x$ consideremos a seqüência $\Delta x = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_n, \ldots)$. Como Δx é também seqüência em s, Δ é um operador em s. ◀

Passaremos agora a uma categoria muito especial de transformações: as *transformações lineares*.

A.2.1.2 Definição

Sejam X e Y espaços vetoriais reais e T uma transformação de $\Omega \subset X$ em Y.

(i) Se $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $\lambda \in R$, então T é chamada de **homogênea**;
(ii) Se $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $x, y \in X$, então T é chamada de **aditiva**.

As transformações aditivas e homogêneas são chamadas de **lineares**.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** A transformação P da Ilustração 1 é linear, pois

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda(x_1, x_2) = \lambda\, P(x_1, x_2, x_3)$$

e

$$\begin{aligned} P(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= P(x_1, x_2, x_3) + P(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** As aplicações dos Exemplos 3, 4 e 5 são todas lineares, exceto a translação, pois

$$T(x + y) \neq T(x) + T(y)$$

pois

$$T(x + y) = a + (x + y)$$

e

$$T(x) + T(y) = 2a + (x + y)$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Consideremos em R^2 os pontos x e y e seja $\lambda x + (1 - \lambda) y$ a equação da reta que passa por x e y (para $\lambda = 0$ teremos y e para $\lambda = 1$ teremos x).
Como a rotação é linear, segue que

$$R[\lambda x + (1 - \lambda)y] = \lambda R(x) + (1 - \lambda) R(y)$$

ou seja o operador R leva a reta $\lambda x + (1 - \lambda)y$ na reta $\lambda R(x) + (1 - \lambda) R(y)$, daí o termo linear.
Entretanto, o funcional da Ilustração 2 não é linear, pois

$$N(x + y) = [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^{1/2}$$
$$\neq$$
$$[x_1^2 + x_2^2]^{1/2} + [y_1^2 + y_2^2]^{1/2} = N(x) + N(y)$$ ◀

A.2.2 FUNÇÕES GERADORAS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Na Secção 20.8 vimos que existe um análogo de equações diferenciais para seqüências, isto é, equações do tipo

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) \qquad n = k, k + 1, \ldots$$

onde a incógnita é uma seqüência $\{x_n\}$. Dentre os métodos de resolução de equações de diferenças vamos considerar o chamado método da **função geradora**.

A.2.2.1 Definição

Dada a seqüência $\{x_n\}$ consideremos a função $F(s)$ dada pela soma da série de potências:

$$F(s) = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots + x_n s^n + \ldots$$

A função $F(s)$ é chamada de **função geradora da seqüência** $\{x_n\}$.

Consideremos agora a aplicação T que a cada seqüência em s faz corresponder sua função geradora $F(s)$. A aplicação T é linear, pois se $F(s)$ e $G(s)$ forem as funções geradoras das seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, então $\alpha F(s) + \beta G(s)$ é a função geradora da seqüência $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ uma vez que

$$\alpha F(s) = \alpha x_0 + \alpha x_1 s + \ldots + \alpha x_n s^n + \ldots$$

e

$$\beta G(s) = \beta y_0 + \beta y_1 s + \ldots + \beta y_n s^n + \ldots$$

e, somando membro a membro, teremos

$$\alpha F(s) + \beta G(s) = (\alpha x_0 + \beta y_0) + (\alpha x_1 + \beta y_1)s + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) + \ldots$$

A.2.3 MÉTODOS OPERACIONAIS

Além do significado já dado, o termo operador pode ainda ser usado para denotar uma correspondência entre dois conjuntos de funções.

A.2.3.1 Operador Diferencial

Consideremos a operação de derivação $\frac{d^k y}{dt^k}$, onde $y(t)$ é uma função suficientemente diferenciável. Podemos indicar essa operação por $D^k y$ e o operador D^k é chamado **operador diferencial**. Existem definições e propriedades que permitem trabalhar com D^k
Por exemplo:

1. $D^0 y = 1 \cdot y$
2. $D^k(ay_1 + by_2) = aD^k y_1 + bD^k y_2$
3. Se $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, podemos considerar

$$\begin{aligned} P(D)y &= [a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n D^n]y \\ &= a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^{(n)} \end{aligned}$$

Vejamos como utilizar essa noção de operador diferencial praticamente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a equação diferencial

$$y(t) - y'(t) = 2t + 3$$

Podemos reescrevê-la como

$$(1 - D)y = 2t + 3$$

Então,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{1 - D}(2t + 3) \\ &= (1 + D + D^2 + \ldots + D^n + \ldots)(2t + 3) \\ &= 2t + 3 + 2 \\ &= 2t + 5 \end{aligned}$$

Observe que se substituirmos $y(t) = 2t + 5$ no primeiro membro da equação dada, teremos

$$y(t) - y'(t) = (2t + 5) - (2) = 2t + 3$$

ou seja, $y(t)$ é uma solução particular da equação dada. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Dada a equação diferencial

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t$$

Podemos reescrevê-la como

$$(1 - D)(2 - D)y = 2t$$

e

$$y = \frac{1}{(1 - D)(2 - D)}(2t)$$

Por frações parciais,

$$\frac{1}{(1 - D)(2 - D)} = \frac{1}{1 - D} - \frac{1}{2 - D} = \frac{1}{1 - D} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{D}{2}}$$

E assim,

$$\frac{1}{1-D}(2t) = (1 + D + D^2 + \ldots + D^n)(2t) = 2t + 2$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{D}{2}}(2t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \ldots\right)(2t) = t + \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-D)(2-D)}(2t) = t + \frac{3}{2}$$

e como pode-se verificar facilmente, $y(t)$ é uma solução particular da equação dada. ◀

A.2.3.2 Operadores de Diferenças

Dado o conjunto s das seqüências reais podemos definir os operadores de diferença:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ Ex_n = x_{n+1},\ \nabla x_n = x_n - x_{n-1} \text{ e}$$
$$\delta x_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2}$$

Vemos da definição que $\Delta = (E - 1)$. Podemos então operar formalmente com $(E - 1)$ como se fossem quantidades algébricas, assim, por exemplo

$$\begin{aligned}\Delta^n &= (E-1)^n \\ &= \binom{n}{0}E^n - \binom{n}{1}E^{n-1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\end{aligned} \tag{1}$$

$$f(E) = f(1 + \Delta) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\Delta + \frac{f''(1)}{2!}\Delta^2 + \ldots \tag{2}$$

A.2.3.3 Operadores $\nabla, \nabla\cdot, \nabla_x$

Consideremos agora o operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{k}$$

cujas regras de funcionamento foram dadas na Secção 19.1. Se f for um campo escalar e F um campo vetorial dado por $F = M\vec{i} + N\vec{j} + R\vec{k}$ então

$$\text{(i) } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

é uma aplicação dos campos escalares diferenciáveis nos campos vetoriais.

$$\text{(ii) } \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

é uma aplicação dos campos vetoriais diferenciáveis nos campos escalares e

$$\text{(iii) } \nabla_x F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

é uma aplicação dos campos vetoriais diferenciáveis nos campos vetoriais.

Nos itens A.2.3.1, A.2.3.2 e A.2.3.3 caberia uma discussão sobre os conjuntos, domínio e imagem dos vários operadores que foi omitida por escapar ao escopo desse livro.

Fórmulas

O ALFABETO GREGO

α	alfa	ι	iota	ρ	rô
β	beta	k	kapa	σ	sigma
γ	gama	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mi	υ	ipsilon
ε	epsilon	ν	ni	ϕ	fi
ζ	zeta	ξ	csi	χ	qui
η	eta	o	ômicron	ψ	psi
θ	teta	π	pi	ω	ômega

FÓRMULAS DE GEOMETRIA

Os seguintes símbolos são usados para a medida:

r: raio h: altura b: base a: base C: circunferência A: área s: área da superfície
B: área da base V: volume

Círculo: $A = \pi r^2$; C: $2\pi r$

Triângulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Retângulo e paralelogramo: $A = bh$

Trapézio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular reto: $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi rh$

Cone circular reto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (com bases paralelas): $V = Bh$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3}Bh$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRIA

As Oito Identidades Trigonométricas Fundamentais

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$ $\quad \cos x \sec x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $\quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Identidades Sobre Soma e Diferença

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$ $\quad \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\quad \cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{tg}(u + v) = \dfrac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$ $\quad \operatorname{tg}(u - v) = \dfrac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$

Identidades Sobre Medidas Múltiplas

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$ $\quad \cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$ $\quad \cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

$\operatorname{tg} 2u = \dfrac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$ $\quad \cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$ $\quad \operatorname{tg}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{2}$ $\quad \cos^2 \frac{1}{2}t = \dfrac{1 + \cos t}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$ $\quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

Identidades para o Produto, Soma e Diferença de Senos e Co-senos

$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$ $\quad \cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$ $\quad \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$ $\quad \operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

$\cos s + \cos t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$ $\quad \cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

Algumas Fórmulas de Redução

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$	$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$	$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$	$\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

Lei dos Senos e dos Co-senos

a, b e c representam as medidas dos lados de um triângulo: α, β e γ representam as medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a, b, e c, respectivamente.

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

TABELA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a \, D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$
10. $D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u \, D_x u$
11. $D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u \, D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \text{ tg } u \, D_x u$
13. $D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u \, D_x u$
14. $D_x(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\text{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\text{cotg}^{-1} u) = \frac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\text{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\text{senh } u) = \cosh u \, D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \text{senh } u \, D_x u$
22. $D_x(\text{tgh } u) = \text{sech}^2 u \, D_x u$
23. $D_x(\text{cotgh } u) = -\text{cosech}^2 u \, D_x u$
24. $D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u \, D_x u$
25. $D_x(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotg } u \, D_x u$

TABELA DE INTEGRAIS

Algumas Formas Elementares

1. $\int du = u + C$
2. $\int a \, du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1} + C \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas Racionais Contendo $a + bu$

6. $\int \frac{u \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}[a + bu - a \ln|a + bu|] + C$
7. $\int \frac{u^2 \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2 \ln|a+bu|\right] + C$
8. $\int \frac{u \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu|\right] + C$
9. $\int \frac{u^2 \, du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu|\right] + C$
10. $\int \frac{u \, du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu}\right] + C$
11. $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$
12. $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$
13. $\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

Formas Contendo $\sqrt{a + bu}$

14. $\int u\sqrt{a + bu} \, du = \frac{2}{15b^3}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$
15. $\int u^2\sqrt{a + bu} \, du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a + bu)^{3/2} + C$
16. $\int u^n\sqrt{a+bu} \, du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2an}{b(2n + 3)} \int u^{n-1}\sqrt{a+bu} \, du$
17. $\int \frac{u \, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$
18. $\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a + bu} + C$
19. $\int \frac{u^n \, du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2an}{b(2n + 1)} \int \frac{u^{n-1} \, du}{\sqrt{a + bu}}$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C & \text{se } a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}} + C & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

21. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

23. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$$

Formas Contendo $a^2 \pm u^2$

24. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

25. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\operatorname{cotg}^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

26. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{cotg}^{-1}\dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases}$$

Formas Contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Nas fórmulas de 27 a 38, podemos substituir

$\ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$ por $\operatorname{senh}^{-1}\dfrac{u}{a}$

$\ln|u + \sqrt{u^2-a^2}|$ por $\cosh^{-1}\dfrac{u}{a}$

$\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right|$ por $\operatorname{senh}^{-1}\dfrac{a}{u}$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

28. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

29. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

30. $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

31. $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

32. $$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

33. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

34. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

35. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

38. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas Contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$

39. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

40. $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

41. $$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C = \sqrt{a^2-u^2} - a\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$$

43. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

47. $\displaystyle\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

48. $\displaystyle\frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas Contendo $2au - u^2$

49. $\displaystyle\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

50. $\displaystyle\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2}$

$\displaystyle + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u} = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

53. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C$

56. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}} + C$

58. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}} + C$

Formas Contendo Funções Trigonométricas

59. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

60. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

61. $\displaystyle\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$

62. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

63. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C = \ln|\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u)| + C$

64. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C = \ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u| + C$

65. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

66. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

67. $\displaystyle\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

68. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$

69. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

70. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

71. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u + C$

72. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

73. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du$

76. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} u\operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} u\,du$

79. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\,du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

80. $\displaystyle\int \cos mu \cos nu\,du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

81. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \cos nu\,du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

82. $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^2 \operatorname{sen} u \, du = 2u \operatorname{sen} u + (2 - u^2) \cos u + C$

85. $\int u^2 \cos u \, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \operatorname{sen} u + C$

86. $\int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$

87. $\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$

88. $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \, du = -\dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u \, du$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u \, du$

Formas Contendo Funções Trigonométricas Inversas

89. $\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

90. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$

91. $\int \operatorname{tg}^{-1} u \, du = u \operatorname{tg}^{-1} u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

92. $\int \operatorname{cotg}^{-1} u \, du = u \operatorname{cotg}^{-1} u + \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

93. $\int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$
$= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C$

94. $\int \operatorname{cosec}^{-1} u \, du = u \operatorname{cosec}^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$
$= u \operatorname{cosec}^{-1} u + \cosh^{-1} u + C$

Formas Contendo Funções Exponenciais e Logarítmicas

95. $\int e^u \, du = e^u + C$

96. $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

97. $\int u e^u \, du = e^u(u - 1) + C$

98. $\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du$

99. $\int u^n a^u \, du = \dfrac{u^n a^u}{\ln a} - \dfrac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C$

100. $\int \dfrac{e^u \, du}{u^n} = -\dfrac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1} \int \dfrac{e^u \, du}{u^{n-1}}$

101. $\int \dfrac{a^u \, du}{u^n} = -\dfrac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{\ln a}{n-1} \int \dfrac{a^u \, du}{u^{n-1}}$

102. $\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$

103. $\int u^n \ln u \, du = \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$

104. $\int \dfrac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + C$

105. $\int e^{au} \operatorname{sen} nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C$

106. $\int e^{au} \cos nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C$

Formas Contendo Funções Hiperbólicas

107. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

108. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

109. $\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln|\cosh u| + C$

110. $\int \operatorname{cotgh} u \, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

111. $\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

112. $\int \operatorname{cosech} u \, du = \ln|\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2}u| + C$

113. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

114. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

115. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

116. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

117. $\int \operatorname{senh}^2 u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \tfrac{1}{2}u + C$

118. $\int \cosh^2 u \, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \tfrac{1}{2}u + C$

119. $\int \operatorname{tgh}^2 u \, du = u - \operatorname{tgh} u + C$

120. $\int \operatorname{cotgh}^2 u \, du = u - \operatorname{cotgh} u + C$

121. $\int u \operatorname{senh} u \, du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C$

122. $\int u \cosh u \, du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C$

123. $\int e^{au} \operatorname{senh} nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu) + C$

124. $\int e^{au} \cosh nu \, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu) + C$

Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

EXERCÍCIOS 12.1 (Página 693)

1. $\frac{1}{2}$ **3.** divergente **5.** -2 **7.** 0 **9.** 1 **11.** divergente **13.** divergente **15.** $e^{1/3}$ **17.** 1 **19.** 0
21. escolher $N = 1 + \frac{3}{\epsilon}$ **23.** escolher $N = \frac{6}{\epsilon} - \frac{3}{2}$ **25.** escolher $N = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2 - 5\epsilon}{\epsilon}}$

EXERCÍCIOS 12.2 (Página 699)

1. crescente **3.** decrescente **5.** não-monotônico **7.** não-monotônico **9.** decrescente
11. crescente depois dos dois primeiros termos **13.** crescente **15.** decrescente **19.** não-limitada **31.** $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

EXERCÍCIOS 12.3 (Página 708)

1. $s_n = \frac{n}{2n + 1}$; $\frac{1}{2}$ **3.** $s_n = \frac{5n}{3n + 1}$; $\frac{5}{3}$ **5.** $s_n = -\ln(n + 1)$; divergente **7.** $s_n = \frac{5}{2}(1 - \frac{1}{5^n})$; $\frac{5}{2}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n - 2)(3n + 1)}$; $\frac{2}{3}$ **11.** $\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$; 0 **13.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n + 1}{2n - 1}\right)$; divergente **15.** divergente **17.** 2 **19.** divergente
21. 1 **23.** $\frac{1}{e - 1}$ **25.** divergente **27.** $\frac{3}{11}$ **29.** $\frac{137}{111}$ **31.** 8 m **33.** $\frac{3.100}{9}$ m **35.** 1.000

EXERCÍCIOS 12.4 (Página 713)

1. divergente **3.** divergente **5.** 3 **7.** $\frac{10}{3}$ **9.** $\frac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$ **11.** divergente **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** divergente **17.** divergente **19.** 2
21. divergente **23.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + 1}$ são ambos divergentes; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ é convergente

EXERCÍCIOS 12.5 (Página 722)

1. convergente **3.** convergente **5.** divergente **7.** convergente **9.** divergente **11.** convergente **13.** divergente
15. convergente **17.** divergente **19.** convergente **21.** divergente **23.** convergente **25.** convergente

EXERCÍCIOS 12.6 (Página 726)

1. divergente **3.** convergente **5.** convergente **7.** convergente **9.** divergente **11.** convergente **13.** convergente
15. convergente **17.** convergente **19.** convergente **21.** divergente **27.** $0{,}7032 < \sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} < 0{,}7134$

EXERCÍCIOS 12.7 (Página 730)

1. convergente **3.** convergente **5.** convergente **7.** convergente **9.** convergente **11.** divergente **13.** convergente **15.** $|R_4| < \frac{1}{5}$ **17.** $|R_4| < \frac{1}{81}$ **19.** $|R_4| < \frac{1}{25}$ **21.** $|R_4| < \frac{1}{6 \ln 6}$ **23.** 0,333 **25.** 0,632 **27.** 0,113 **29.** 0,406

EXERCÍCIOS 12.8 (Página 738)

1. absolutamente convergente **3.** absolutamente convergente **5.** absolutamente convergente **7.** divergente **9.** absolutamente convergente **11.** absolutamente convergente **13.** absolutamente convergente **15.** absolutamente convergente **17.** absolutamente convergente **19.** divergente **25.** (b) convergente

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12 (Página 740)

1. $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, 2; 3$ **3.** $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{15}{17}; 1$ **5.** 1, 3, 1, 3; não tem limite **7.** $4, \frac{81}{16}, \frac{4096}{729}, \frac{390{,}625}{65.536}; e^2$ **9.** $\frac{3}{16}, \frac{15}{64}, \frac{63}{256}, \frac{255}{1024}; s_n = \frac{4^n - 1}{4^{n+1}}; \frac{1}{4}$ **11.** convergente, 3 **13.** divergente **15.** convergente, $4 + 2\sqrt{3}$ **17.** convergente, $\frac{1}{6}$ **19.** $\frac{649}{729}$ **21.** convergente **23.** divergente **25.** convergente **27.** divergente **29.** convergente **31.** divergente **33.** divergente **35.** convergente **37.** convergente **39.** absolutamente convergente **41.** condicionalmente convergente **43.** divergente **45.** absolutamente convergente **47.** absolutamente convergente **49.** $\frac{437}{330}$ **51.** 90 cm

EXERCÍCIOS 13.1 (Página 750)

1. $[-1, 1)$ **3.** $[-1, 1]$ **5.** $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ **7.** $(-3, 3)$ **9.** $(-\infty, +\infty)$ **11.** $(-5, -1)$ **13.** $(-9, 9]$ **15.** $(0, 2]$ **17.** $\left(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right)$ **19.** $[-1, 1]$ **21.** $(-4, 6)$ **23.** $[4, 6)$ **25.** $[-1, 1]$ **27.** $(-e, e)$ **29.** $+\infty$

EXERCÍCIOS 13.2 (Página 759)

1. (a) $R = 1$; $[-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$; $R = 1$; (c) $[-1, 1)$ **3.** (a) $R = 1$; $[-1, 1)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{nx^{n-1}}$; $R = 1$; (c) $(-1, 1)$

5. (a) $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$; $R = +\infty$; (c) $(-\infty, +\infty)$

7. (a) $R = \frac{1}{3}$; $(0, \frac{2}{3})$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3n(n+1)(3x-1)^n$; $R = \frac{1}{3}$; (c) $(0, \frac{2}{3})$ **9.** (a) $R = 3$; $[-2, 4)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}$; $R = 3$; (c) $(-2, 4)$

11. $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ **13.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(n+1)x^n$ **15.** (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ se $|x| < \frac{1}{2}$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^{n-1}$ se $|x| < \frac{1}{2}$

17. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ **19.** 0,60653 **21.** (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **23.** 2 **25.** (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$,

27. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

EXERCÍCIOS 13.3 (Página 766)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$; $R = +\infty$ **3.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - 2^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}$; $R = 4$ **5.** 1,718 **7.** 0,693 **9.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n!)}$; $R = +\infty$

11. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$; $+\infty$ **13.** 1,318 **15.** 1,057 **17.** 0,485 **19.** 0,747 **21.** 0,041 **23.** 0,450 **25.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

27. 0,2450 **29.** 0,221 **31.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ **37.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $R = +\infty$

EXERCÍCIOS 13.4 (Página 775)

7. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$ **9.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$; $R = 2$

11. $2 + \frac{1}{4}(x-4) + 2\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)(x-4)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot 4^n}$; $R = 4$

13. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3 + \frac{1}{48}(x - \frac{1}{3}\pi)^4 - \ldots$; $R = +\infty$ **15.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}$

17. (a) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$; (b) $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4$; (c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6$ **19.** 0,5299 **21.** 1,97435 **23.** −0,2231

25. 2,7182818 **27.** 0,0415 **29.** 0,0048 **31.** 0,2398 **33.** $a_4 = 3$; $a_3 = -5$; $a_2 = 2$; $a_1 = -1$; $a_0 = 6$

EXERCÍCIOS 13.5 (Página 780)

1. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n$; $R = 1$ **3.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^n}{8^n n!}$; $R = 4$

5. $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4}{3^n n!} x^{3n}$; $R = 1$ **7.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{4n}}{18^n n!}$; $R = \sqrt{3}$

9. $x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{n+2}}{2^n n!}$; $R = 1$ **11.** 4,899 **13.** 5,010 **15.** 0,198

17. $x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$; $R = 1$ **19.** (a) $1 + \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-5)}{4^n n!} x^n$;

(b) $1 + \frac{1}{4}x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-5)}{4^n n!} x^{2n}$; (c) 0,510 **21.** 0,335 **23.** 2,0271 **25.** 0,4970

27. 0,5082 **29.** $\frac{1}{p+1}x^{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^{2n+p+1}}{2^n n!(2n+p+1)}$; $R = 1$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13 (Página 780)

1. $[-1, 1)$ **3.** $[-3, 3]$ **5.** $x = 3$ **7.** $(-7, 5)$ **9.** $(-1, 3]$ **11.** $(-1, 1)$ **13.** (a) $R = 1$, $[-1, 1]$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-1}$, $R = 1$; (c) $(-1, 1)$ **15.** (a) $R = +\infty$, $(-\infty, +\infty)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}$, $R = +\infty$; (c) $(-\infty, +\infty)$

17. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{4n+4}(2n+1)}$; $R = 4$ **19.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$; $R = +\infty$ **21.** 0,161 **23.** 0,493 **25.** 0,1974 **27.** 5,0658

29. 0,9986 **31.** 1,6094 **33.** 0,0124 **35.** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$; $(-\infty, +\infty)$ **37.** $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3^{2n}-1)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $(-\infty, +\infty)$

39. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **41.** $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(x+1)^n}{n}$

EXERCÍCIOS 14.1 (Página 793)

1. (b) 5 **3.** (b) $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4e^2}$ **5.** (a) $\frac{7}{4}\pi$; (c) tg$^-$ 0,4 $\approx$ 0,38 **7.** $\langle 2, -3\rangle$ **9.** $\langle 5, 6\rangle$ **11.** $(-4, 3)$ **13.** $(12, -5)$
15. (a) $\langle -1, 9\rangle$; (b) $\langle 1, -5\rangle$ **17.** (a) $\langle -9, -4\rangle$; (b) $\langle 4, -e\rangle$ **19.** (a) $\langle 6, 1\rangle$; (b) $\sqrt{74}$; (c) $\sqrt{1.061}$
21. (a) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$; (b) $-24\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; (c) $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; (d) $2\sqrt{10}$ **23.** (a) $\sqrt{13} + \sqrt{17}$; (b) $-14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$; (c) $7\sqrt{13}$; (d) $5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$
25. (a) $-28\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; (b) $2\sqrt{205}$ **27.** $\frac{11}{\sqrt{137}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{137}}\mathbf{j}$ **29.** (a) $5(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j})$, $\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; (b) $2\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\mathbf{j})$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$
31. (a) $8(\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\mathbf{j})$, $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; (b) $16(\cos\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\pi\mathbf{j})$, $-\mathbf{i}$ **33.** $h = 2$, $k = 3$ **37.** (a) 135 N; (b) 17°
39. 29,0° **41.** 346,1°; (b) 388,3 km/h **43.** (a) 28,1°; (b) 1,7 mi/h; (c) 0,53 mi **51.** (a) $\langle 1, -2\rangle$; (b) $\langle 1, -2\rangle$

EXERCÍCIOS 14.2 (Página 800)

1. 10 **3.** -1 **11.** $\frac{1}{10}\sqrt{2}$ **13.** $-\frac{16}{65}$ **15.** 10, $-\frac{2}{5}$ **17.** (a) 0; (b) não tem k **19.** $\frac{-240 + \sqrt{85.683}}{407}$
21. $-\frac{4}{17}\sqrt{17}\mathbf{i} + \frac{1}{17}\sqrt{17}\mathbf{j}$; $\frac{4}{17}\sqrt{17}\mathbf{i} - \frac{1}{17}\sqrt{17}\mathbf{j}$ **23.** $\pm\frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$ **25.** (a) $-\frac{80}{\sqrt{85}}$; (b) $\frac{-112}{17}\mathbf{i} + \frac{96}{17}\mathbf{j}$ **27.** $\frac{29}{50}\sqrt{50}$
29. (a) 24 J; (b) $24\sqrt{3}$ J **31.** $(18 - 9\sqrt{3})$ J $\approx$ 2,4 J

EXERCÍCIOS 14.3 (Página 807)

1. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$ **3.** $[-1, 1]$ **5.** todos os números reais que não estejam em $(-4, 3)$ **7.** $\frac{4}{3}t$; $\frac{4}{9}$
9. $\frac{1 + \ln t}{te^t(2 + t)}$; $\frac{(2 + t) - (1 + \ln t)(2 + 4t + t^2)}{t^3e^{2t}(2 + t)^3}$ **11.** $-\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t - \frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3 t$ **13.** $(y - 1)^2 = x$ **15.** $25x^2 - 9y = 225$
17. $x^2 - y^2 = 1$, $x \geqslant 1$ **19.** $9x^2 + 16y^2 = 144$ **21.** $5\sqrt{3}x + 2y = 20$ **23.** $y = 1$; $x = -1$
27. $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ **31.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **35.** $3\pi a^2$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 14.4 (Página 814)

1. $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **3.** $2\mathbf{i}$ **5.** $\mathbf{i}$ **7.** $\mathbf{R}'(t) = 2e^{2t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j}$ **9.** $R'(t) = (1 + t^2)^{-1}\mathbf{i} + 2^t \ln 2\mathbf{j}$;
$\mathbf{R}''(t) = -2t(1 + t^2)^{-2}\mathbf{i} + 2^t(\ln 2)^2\mathbf{j}$ **11.** $\mathbf{R}'(t) = -2t(t^2 + 4)^{-2}\mathbf{i} - \frac{5}{2}(1 - 5t)^{-1/2}\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = (6t^2 - 8)(t^2 + 4)^{-3}\mathbf{i} - \frac{25}{4}(1 - 5t)^{-3/2}\mathbf{j}$
13. $\mathbf{R}'(t) = 10\cos 2t\mathbf{i} - 4\sec 4t \operatorname{tg} 4t\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = -20\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + (16\sec 4t - 32\sec^3 4t)\mathbf{j}$ **15.** $(2t - 3)(2t^2 - 6t + 5)^{-1/2}$
21. $20t$ **23.** $8e^{4t}\ 8e^{-4t}$ **29.** $\ln|\sec t|\mathbf{i} - \ln|t|\mathbf{j} + \mathbf{C}$ **31.** $\frac{1}{3}e^{3t}\mathbf{i} + \ln|t - 1|\mathbf{j} + \mathbf{C}$ **33.** $(t\ln t - t)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \mathbf{C}$
35. $\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \pi)\mathbf{i} + (t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \pi)\mathbf{j}$ **37.** $x^2 + y^2 = 1$; 0 **39.** 0

EXERCÍCIOS 14.5 (Página 820)

1. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$ **3.** $2\sqrt{10} + \sqrt{2}\ln(2 + \sqrt{5})$ **5.** $\frac{2}{27}[(40)^{3/2} - (13)^{3/2}]$ **7.** 120 **9.** $\sqrt{2}(e - 1)$
11. $\ln(1 + \sqrt{2})$ **13.** $6a$ **15.** 8π **17.** $a[\ln\cosh 2 + \ln\cosh 1]$ **19.** 5π **21.** $2\pi a$ **23.** 12 **25.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^8 - 1)$
27. $\frac{1}{2}a(\theta_1 - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2}{3}\theta_1)$ **29.** 200 m

EXERCÍCIOS 14.6 (Página 824)

1. $\mathbf{T}(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$ **3.** $\mathbf{T}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{i} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{j}$;
$\mathbf{N}(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{i} + \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{j}$ **5.** $\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ **7.** $\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen} kt\mathbf{i} + \cos kt\mathbf{j}$;

$\mathbf{N}(t) = -\cos kt\mathbf{i} - \operatorname{sen} kt\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{T}(t) = -(1 + \operatorname{cotg}^4 t)^{-1/2}\mathbf{i} + (1 + \operatorname{tg}^4 t)^{-1/2}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \dfrac{-\cos^2 t}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t}}\mathbf{i} - \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t}}\mathbf{j}$

11. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\mathbf{i} + \dfrac{e^t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \dfrac{e^t(1 - t)}{|t - 1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\mathbf{i} + \dfrac{2t(t - 1)}{|t - 1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\mathbf{j}$ **13.** $\mathbf{T}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}$;

$\mathbf{N}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ **15.** $\mathbf{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$ **19.** $x = 2 + \cos s$, $y = 3 + \operatorname{sen} s$

21. $x = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4]$, $y = \frac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}$ **23.** $x = a\left(\dfrac{3a - 2s}{3a}\right)^{3/2}$, $y = a\left(\dfrac{2s}{3a}\right)^{3/2}$ **25.** $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$
27. $\frac{27}{185}\sqrt{37}$

EXERCÍCIOS 14.7 (Página 831)

1. $\frac{1}{8}\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ **3.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ **5.** $\dfrac{\sqrt{2}|1 - t^2|^3}{(1 + 6t^2 + t^4)^{3/2}}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **7.** $\frac{1}{2}$; 2 **9.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ **11.** $\frac{4}{49}\sqrt{7}$; $\frac{7}{4}\sqrt{7}$

13. $\frac{2}{289}\sqrt{17}$; $\frac{17}{2}\sqrt{17}$ **15.** $\dfrac{(2 - x^2)^{3/2}}{|x|}$ **17.** $\frac{1}{576}(16x^2 + 81y^2)^{3/2}$ **19.** $\dfrac{2(x + y)^{3/2}}{a^{1/2}}$ **21.** $4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}t$ **25.** (3, 9)

27. $(-3, -1)$ **29.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$ **31.** $\frac{23}{98}\sqrt{7}$; $\frac{14}{23}\sqrt{7}$ **33.** $\frac{1}{16a}$; $16|a|$ **37.** 2; $\frac{1}{2}$; $(0, -\frac{1}{2})$

39. $\left(3x + 2p, -\dfrac{y^3}{4p^2}\right)$ **41.** $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \dfrac{b^2 - a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t\right)$

EXERCÍCIOS 14.8 (Página 837)

1. (a) $2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$; (b) $2\mathbf{i}$; (c) $\sqrt{37}$; (d) 2 **3.** (a) $-10 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 6 \cos 2t\mathbf{j}$; (b) $-20 \cos 2t\mathbf{i} - 12 \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$; (c) 10; (d) 12
5. (a) $\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}$; (b) $\sec^2 t\mathbf{j}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) 2 **7.** (a) $\cos t\mathbf{i} + \sec^2 t\mathbf{j}$; (b) $-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\sec^2 t \operatorname{tg} t\mathbf{j}$; (c) $\frac{1}{6}\sqrt{91}$; (d) $\frac{1}{18}\sqrt{849}$
9. (a) $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; (b) $2\mathbf{j}$; (c) $2\sqrt{10}$; (d) 2 **11.** (a) $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; (b) $2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$; (c) $2\sqrt{17}$; (d) $2\sqrt{65}$ **13.** (a) $3\mathbf{j}$; (b) $-4\mathbf{i}$; (c) 3; (d) 4

15. (a) $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$; (b) $-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$; (c) 2; (d) 2 **17.** $\dfrac{2t - 3}{t - 1}\mathbf{i} + \dfrac{4 - 2t - t^2}{2}\mathbf{j}$ **19.** $(e^{-t} + 3t - 1)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{5}{2})\mathbf{j}$

21. (a) $\dfrac{390.625}{2}$ cm; (b) $\dfrac{390.625}{8}$ cm; (c) $1.250\sqrt{2}\mathbf{i} - 1.250\sqrt{2}\mathbf{j}$ **23.** $(25 + \sqrt{631})$ s; $(20.000\sqrt{3} + 800\sqrt{1.893})$ cm **25.** 283 m/s
27. 40°8′ **29.** 29 m

EXERCÍCIOS 14.9 (Página 842)

1. $\mathbf{V}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}$; $A_T(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$; $A_N(t) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}}$ **3.** $\mathbf{V}(t) = t \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$;
$\mathbf{A}(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + t \cos t)\mathbf{j}$; $A_T(t) = 1$; $A_N(t) = t$ **5.** $\mathbf{V}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A_T(0) = 0$; $A_N(0) = \sqrt{2}$

7. $\mathbf{V}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\mathbf{j}$; $A_T(\frac{1}{4}\pi) = 0$; $A_N(\frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{2}$ **9.** $\|\mathbf{V}(t)\| = t\sqrt{4 + 9t^2}$; $A_T(t) = \dfrac{4 + 18t^2}{\sqrt{4 + 9t^2}}$;

$A_N(t) = \dfrac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}$; $K(t) = \dfrac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}$ **11.** $\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}$; $\mathbf{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$;

$\mathbf{N}(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{1 + t^2}$; $A_T(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$; $A_N(t) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + t^2}}$; $K(t) = \dfrac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$; $\mathbf{V}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$;

$\mathbf{T}(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(2) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(2)\| = 2\sqrt{5}$; $A_T(2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $A_N(2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $K(2) = \frac{1}{10\sqrt{5}}$

13. $\mathbf{V}(t) = -15 \operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + 15 \cos 3t\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = -45 \cos 3t\mathbf{i} - 45 \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$; $\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = -\cos 3t\mathbf{i} - \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$;
$\|\mathbf{V}(t)\| = 15$; $A_T(t) = 0$; $A_N(t) = 45$; $K(t) = \frac{1}{5}$; $\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi) = -15\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi) = 45\mathbf{i}$; $\mathbf{T}(\frac{1}{3}\pi) = -\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\frac{1}{3}\pi) = \mathbf{i}$; $\|\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi)\| = 15$

15. $\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$; $\mathbf{T}(t) = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{i} + \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}}\mathbf{j}$;

$\|\mathbf{V}(t)\| = \dfrac{\sqrt{e^4+1}}{e^t}$; $A_T(t) = \dfrac{e^{4t}-1}{e^t\sqrt{e^{4t}+1}}$; $A_N(t) = \dfrac{2e^t}{\sqrt{e^{4t}+1}}$; $K(t) = \dfrac{2e^{3t}}{(e^{4t}+1)^{3/2}}$; $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$;

$\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(0)\| = \sqrt{2}$; $A_T(0) = 0$; $A_N(0) = \sqrt{2}$; $K(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **17.** (a) $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; (b) $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; (c) $8\mathbf{j}$; (d) $\frac{64}{65}\sqrt{65}$; (e) $\frac{8}{65}\sqrt{65}$

19. $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; se tiver velocidade escalar constante, $\mathbf{V} = \frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\mathbf{A} = \frac{k^2}{16}\mathbf{i} - \frac{k^2}{16}\mathbf{j}$; $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$;
$A_T = 0$; $A_N = \frac{k^2\sqrt{2}}{16}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14 (Página 842)

1. $-25\mathbf{i} + 36\mathbf{j}$ **3.** $\sqrt{4.594}$ **5.** $15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$ **7.** 92 **9.** $\dfrac{9}{\sqrt{106}}\mathbf{i} - \dfrac{5}{\sqrt{106}}\mathbf{j}$ **11.** $h = -\frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$ **13.** $-\frac{19}{5}\sqrt{2}$
15. $-\frac{19}{25}\mathbf{i} - \frac{133}{25}\mathbf{j}$ **17.** $-\frac{19}{26}\sqrt{13}$ **19.** (a) 104,4 N; (b) 35,5° **21.** −89,30 J

23. (a) todos números reais em $[0, +\infty)$ exceto 1; (b) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; (c) $\dfrac{-1}{(t+1)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2t^{1/2} - t - 1}{2t^{1/2}(t-1)^2}\mathbf{j}$ **25.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6t}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{108t^3}$

27. $x = 12$; $y = 16$; $y = -16$ **29.** $-\dfrac{4(t^{12} + t^{10}) + 144(t^2 - 1)^3}{t^9(t^2 - 1)^3}$ **31.** $\frac{3}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{4}\ln(6 + \sqrt{37})$ **37.** $|at|$ **39.** $\frac{2}{75}$; $\frac{75}{2}$
41. (a) $9y = 12x - x^2$; (b) $\mathbf{V}(t) = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$ $\mathbf{A}(t) = -2\mathbf{j}$; (c) $\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{A}(1) = -2\mathbf{j}$

43. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{3a}\sec^4 t \operatorname{cosec} t$ **45.** $\mathbf{T}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{e^t + e^{-t}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(t) = \dfrac{2}{e^t + e^{-1}}\mathbf{i} - \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\mathbf{j}$

47. $x = 2(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 34$; $y = \frac{1}{3}[(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 16]^{3/2}$ **49.** $h = \dfrac{1}{2g}(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2$ **55.** $\mathbf{V}(t) = 2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 2\cosh 2t\mathbf{j}$;

$\mathbf{A}(t) = 4\cosh 2t\mathbf{i} + 4 \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(t)\| = 2\sqrt{\cosh 4t}$; $A_T(t) = \dfrac{4 \operatorname{senh} 4t}{\sqrt{\cosh 4t}}$; $A_N(t) = \dfrac{4}{\sqrt{\cosh 4t}}$ **57.** $A_T \dfrac{4t - 8}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$;

$A_N = \dfrac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$

EXERCÍCIOS 15.1 (Página 851)

1. (b) (7, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (7, 0, 3), (7, 0, 0); (c) $\sqrt{62}$ **3.** (b) (2, 1, 2), (−1, 3, 2), (−1, 1, 5), (2, 3, 2), (−1, 3, 5), (2, 1, 5); (c) $\sqrt{22}$ **5.** (b) (3, −1, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 5), (1, −1, 5), (3, −1, 5); (c) $3\sqrt{5}$ **7.** (a) 3; (b) $(2, 5, \frac{5}{2})$ **9.** (a) $\frac{13}{2}$; (b) $(\frac{5}{4}, -1, 2)$
11. (a) $7\sqrt{2}$; (b) $(-1, \frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ **13.** $(\pm 4\sqrt{6}, 4, 2)$ **17.** (a) $|\overline{AB}| = 9\sqrt{2}$; $|\overline{AC}| = 2\sqrt{62}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{62}$; (b) ponto médio de AB: $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$; ponto médio de AC: (−1, 2, 5); ponto médio de BC: $(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2})$. **21.** esfera com centro em (4, −2, −1) e $r = 5$
23. o ponto (0, 0, 3) **25.** o conjunto vazio **27.** $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 9$

EXERCÍCIOS 15.2 (Página 859)

1. (a) $\langle 21, -13, -2\rangle$; (b) $\langle -25, -26, 5\rangle$; (c) $7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$; (d) $\sqrt{1.326}$
3. (a) $\langle -19, -16, -1\rangle$; (b) $\langle -6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91}\rangle$ **5.** $a = 0$, $b = 0$ **7.** $\frac{4}{\sqrt{89}}$; $\frac{3}{\sqrt{89}}$; $\frac{8}{\sqrt{89}}$ **9.** $-\frac{6}{\sqrt{86}}$; $\frac{1}{\sqrt{86}}$; $\frac{7}{\sqrt{86}}$
11. $(\frac{13}{3}, 0, -\frac{4}{3})$ **13.** $(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, -6)$ **15.** (a) $7(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k})$; (b) $\sqrt{14}\,(-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k})$
17. (a) $\langle \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\rangle$; (b) $\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$ **21.** (a) −44; (b) −468; (c) −31; (d) $\langle -84, 198, 124\rangle$
23. (a) $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (b) −3; (c) $\langle 2, 1, -2\rangle$ **25.** (a) $-\frac{13}{9}\sqrt{6}$; (b) $\langle -\frac{26}{27}, -\frac{91}{27}, \frac{13}{27}\rangle$ **29.** $\frac{1}{11}\sqrt{4.422}$ **33.** $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ unidades quad.

35. $-\frac{43}{30}\sqrt{6}$ **37.** 25 J **39.** $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ J **41.** $\frac{2}{5}$ **45.** $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ **49.** $r = 5$, $s = 9$, $t = -12$

EXERCÍCIOS 15.3 (Página 867)

1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ **3.** $y - z + 3 = 0$ **5.** $x - 3y - 4z - 3 = 0$ **7.** $3x + 2y + 6z = 23$
9. $\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$; $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$ **11.** $\langle \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13}\rangle$; $\langle -\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}$ **13.** $\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}\rangle$; $\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}}\rangle$
15. $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ **17.** $2x - y - z + 1 = 0$ **19.** $4y - 3z - 1 = 0$ e $z = 1$ **21.** 67,6° **23.** 69,2°
25. $\frac{16}{15}\sqrt{6}$ **27.** $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS 15.4 (Página 872)

1. $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = 1$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3}, z = 1$ **3.** $x = 13t, y = -12t, z = -8t$; $\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$

5. $x = 2t - 2, y = -16t; z = 13t + 3$; $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$ **7.** $x = 4 + t, y = -5 + 3t, z = 20 - 6t$; $\frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$

9. $\frac{x - \frac{1}{7}}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z - \frac{10}{7}}{13}$ **13.** $8x - y - 66 = 0$; $13x - 5z - 102 = 0$; $13y - 40z + 42 = 0$ **15.** $4x + y + 3 = 0$; $3x - z + 4 = 0$; $3y + 4z - 7 = 0$ **17.** $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ **19.** $4x + 7y - 3z + 7 = 0$ **21.** $4x + 2y - 3z + 5 = 0$ **23.** $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$

25. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$ **27.** $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ **31.** $x = x_0, y = y_0$

EXERCÍCIOS 15.5 (Página 882)

1. $\langle 7, 13, -11\rangle$ **3.** -490 **11.** $\langle 9, -1, -23\rangle$ **15.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **17.** $\sqrt{89}$ unidades quad. **19.** $9\sqrt{29}$ unidades quad.
21. $5x - 2y + 7z = 0$ **23.** $x + 2y + z - 2 = 0$ **25.** $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ **27.** $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ **29.** 20 unidades cúb. **31.** $\frac{38}{3\sqrt{78}}$

EXERCÍCIOS 15.6 (Página 887)

13. $x^2 + z^2 = 4y$ **15.** $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ **17.** $y^2 = 9x^2 + 9z^2$ **19.** $y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 x$ **21.** $x^2 + z^2 = 16$; eixo x
23. $x^2 - z^2 = 4$; eixo z **25.** $z = \sqrt{|y|}$; eixo y **27.** $y^2 = 9x^2$; eixo y

EXERCÍCIOS 15.7 (Página 894)

1. hiperbolóide elíptico de uma folha **3.** parabolóide hiperbólico **5.** cilindro hiperbólico **7.** elipsóide
9. hiperbolóide elíptico de uma folha **11.** cone elíptico **13.** parabolóide elíptico **15.** parabolóide hiperbólico
17. hiperbolóide elíptico de duas folhas **19.** (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$ **21.** vértice: $(1, -\frac{1}{3}, 0)$; foco: $(1, 0, 0)$ **25.** 8π unidades cúb.
27. $\frac{abh^2}{2c}\pi$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 15.8 (Página 900)

1. $\frac{1}{\sqrt{4t^2 + 5}}(\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ **3.** $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{3}\sqrt{3}[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]$

5. $\frac{1}{\sqrt{4t^2 + 29}}[2(\cos t - t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2(\operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{k}]$ **7.** $\sqrt{21} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\ln(4 + \sqrt{21})$ **9.** $\sqrt{3}(e^3 - 1)$ **11.** 13

15. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + te^t\mathbf{k}$ **17.** $-\frac{3}{5}$ **19.** $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{14}\sqrt{14}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\sqrt{14}\mathbf{j} + \frac{3}{14}\sqrt{14}\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(1) = -\frac{11}{266}\sqrt{266}\mathbf{i} - \frac{4}{133}\sqrt{266}\mathbf{j} + \frac{9}{266}\sqrt{266}\mathbf{k}$;
$\mathbf{B}(1) = \frac{\sqrt{19}}{19}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $K(1) = \frac{1}{98}\sqrt{266}$ **21.** $\mathbf{T}(-1) = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$; $\mathbf{N}(-1) = \frac{2}{15}\sqrt{5}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\sqrt{5}\mathbf{j} - \frac{4}{15}\sqrt{5}\mathbf{k}$;

$\mathbf{B}(-1) = -\frac{2}{5}\sqrt{5}\mathbf{i} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\mathbf{k}$; $\mathbf{K}(-1) = \frac{2}{27}\sqrt{5}$ **23.** $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$; $\mathbf{N}(0) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$; $\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{6}\sqrt{6}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$; $K(0) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$
25. $\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = a\mathbf{i} + \mathbf{k}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -a\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi\| = \sqrt{a^2 + 1}$ **27.** $\mathbf{V}(1) = 2e^2\mathbf{i} - 2e^{-2}\mathbf{j} + 3e^2\mathbf{k}$;
$\mathbf{A}(1) = 4e^2\mathbf{i} + 4e^{-2}\mathbf{j} + 8e^2\mathbf{k}$; $\|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{13e^4 + 4e^{-4}}$ **31.** 2

EXERCÍCIOS 15.9 (Página 904)

1. (a) (0, 3, 5); (b) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\sqrt{3}, -4)$; (c) (cos 1, sen 1, 1) **3.** (a) $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; (b) $(0, 2\sqrt{3}, 2)$; (c) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3})$
5. (a) $(2, \frac{2}{3}\pi, -2\sqrt{3})$; (b) $(0, \frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2})$; (c) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \sqrt{6})$ **7.** elipsóide; $r^2 + 4z^2 = 16$ **9.** parabolóide elíptico; $r^2 = 3z$
11. cone elíptico; $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$ **13.** esfera; $\rho = 9 \cos \phi$ **15.** cilindro direito; $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$
17. esfera; $\rho = 8 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ **19.** (a) cilindro circular reto; $x^2 + y^2 = 16$: (b) plano através do eixo z; $y = x$ **21.** $x^2 - y^2 = z^3$
23. (a) esfera; $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; (b) plano através do eixo z; $x = y$; (c) metade de um cone com vértice na origem; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
25. cilindro circular reto; $x^2 + y^2 = 36$ **27.** $x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$ **31.** (b) $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15 (Página 905)

1. um ponto no eixo x em R, uma reta paralela ao eixo y em R^2, um plano paralelo ao plano yz em R^3 **3.** o eixo x
5. circunferência no plano xz com centro na origem e raio 2. **7.** o plano é perpendicular ao plano xy interceptando-o na reta $y = x$
9. o parabolóide de revolução gerado pela rotação $y^2 = 9z$ em torno do eixo z. **11.** o cone circular reto gerado pela rotação de $y = x$ em torno do eixo x. **13.** $\mathbf{i} + 26\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ **15.** -3 **17.** $7\sqrt{1.270}$ **19.** $-\frac{1}{3}\sqrt{21}$ **21.** $\frac{1}{9}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ **23.** $\langle 60, -49, 80\rangle$ **25.** 16 **27.** 295
29. $(-3, \sqrt{167}, 1)$, $(-3, -\sqrt{167}, 1)$ **31.** $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 17$ **33.** $z^2 = e^{4y}$ ou $x^2 = e^{4y}$; o eixo y **35.** 3
37. (a) $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{78}}$, $\cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{78}}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{78}}$; (b) $-\frac{7}{\sqrt{78}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{78}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{78}}\mathbf{k}$ **39.** (a) $-\frac{4}{5}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{28}{25}\mathbf{i} + \frac{4}{25}\mathbf{j} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$
41. $x - 6y - 10z + 23 = 0$ **43.** $\frac{47}{10}\sqrt{2}$ **45.** 3 **47.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **49.** $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$, $x = 4t$, $y = -3t$, $z = t$ **53.** $\frac{54}{25}\pi$ unidades quad.
55. 24 unidades cúb. **57.** $\frac{25}{4}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$ **59.** $\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{A}(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j}$; $\|\mathbf{V}(\frac{1}{2}\pi)\| = \frac{1}{2}\sqrt{8} + \pi^2$
61. $\mathbf{T}(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{k}$; $\mathbf{B}(\frac{1}{2}\pi) = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ **63.** $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \pi, \frac{3}{2})$
65. (a) $z = r^2(1 + \operatorname{sen} 2\theta) + 1$; (b) $r^2(25 \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) = 100$

EXERCÍCIOS 16.1 (Página 916)

1. (a) $-\frac{1}{7}$; (b) 5; (c) $\dfrac{x + y}{x - y + 2}$; (d) 0 **3.** (a) 1; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$; (d) $4x + 4y + 8$ **5.** $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 1\}$
7. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ **9.** $\{(x, y) | x^2 - y^2 \geqslant 1\}$ **11.** $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geqslant 1\}$ **13.** $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ **15.** $\{(x, y) | y \neq \pm x\}$
17. $\{(x, y) | -1 \leqslant x - y \leqslant 1\}$ **19.** $\{(x, y) | xy > 1\}$ **21.** $\{(x, y, z) | x - y - z \neq 0\}$ **23.** $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 + z^2 \leqslant 16\}$
25. $\{(x, y, z) | |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1\}$ **27.** $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 < 4\}$ **29.** $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 16\}$ **31.** R^2 **33.** R^2 **35.** R^2
37. circunferências de raios $\sqrt{16 - k^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ **39.** circunferências de raios $\sqrt{16 - k}$, $k = 16, 12, 7, 0, -9, -20$
41. hipérboles $x^2 - y^2 = k$, $k = 16, 9, 4, 9, -4, -9, -16$ **43.** circunferências de raios $\sqrt{2k}$, $k = 8, 6, 4, 2, 0$
45. $h(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; domínio: $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ **47.** (a) 2; (b) 6; (c) $\sqrt{x - y^2}$; (d) $|x - y|$; (e) $|x - y|$

EXERCÍCIOS 16.2 (Página 926)

1. 0 **3.** -4 **5.** 2 **7.** 0 **9.** $\delta = \frac{1}{7}\epsilon$ **11.** $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ **13.** $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$ **15.** $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$ **23.** 0 **25.** 0
27. o limite existe e é 0; pegue $\delta = \sqrt{\epsilon}$ **29.** não existe limite **33.** $\frac{1}{4}\pi$ **35.** $\frac{1}{2}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** 3 **47.** 0; pegue $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$

EXERCÍCIOS 16.3 (Página 930)

1. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja na reta $y = 1$
3. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja no eixo y
5. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não esteja na reta $y = 2x$
7. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que seja interna à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ **9.** contínua em todos os pontos R^2

11. contínua em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ em R^2 **13.** contínua em todos os pontos R^2
15. todos os pontos (x, y) em R^2 que seja interior à circunferência $x^2 + y^2 = 16$
17. todos os pontos (x, y) em R^2 que seja exterior à elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ **19.** todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $|xy| \geqslant 1$
21. todos os pontos (x, y) em R^2 no primeiro e quarto quadrante para os quais $|x + y| < 1$ **23.** todos os pontos em R^2 **25.** essencial
27. removível; $f(0, 0) = 0$ **29.** essencial **31.** removível; $f(0, 0) = 0$
35. contínua em todos os pontos (x, y, z) em R^3 que seja exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **37.** contínua em todos os pontos em R^3

EXERCÍCIOS 16.4 (Página 938)

1. 6 **3.** $3x - 2y$ **5.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **7.** $x^2 - 6xy + 2z$ **9.** $xy + yt + zt$ **11.** 4 **13.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15. $-2 \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 2\phi$ **17.** $\dfrac{e^{y/x}}{xy}\left(y \ln \dfrac{y^2}{y} - x\right)$ **19.** $\dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ **21.** $4xy + \dfrac{1}{z}$ **23.** $xze^{xyz} + \dfrac{3xz^2}{z^4 + 9x^2y^2}$

25. (a) -1; (b) 12 **27.** $-\ln \operatorname{sen} x$; $\ln \operatorname{sen} y$ **31.** (a) 1; (b) 1 **33.** (a) -2; (b) 0 **35.** 4 **37.** $-4°/\text{cm}$; $-8°/\text{cm}$

39. (a) $\dfrac{100}{i^2}\left[\dfrac{9i + 1}{(1 + i)^9} - 1\right]$; (b) $\dfrac{1}{0{,}0036}\left[\dfrac{1{,}54}{(1{,}06)^9} - 1\right] \approx -24{,}4$; (c) $\dfrac{5.000 \ln 1{,}06}{3(1{,}06)^t}$; (d) $-\dfrac{5.000 \ln 1{,}06}{3(1{,}06)^8} \approx -61$

41. 0,0943 m^2/kg; 6,42 m^2/m

EXERCÍCIOS 16.5 (Página 947)

1. (a) $3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y$; (b) 0,5411; (c) $14\Delta x - 6\Delta y$; (d) 0,54
3. (a) $(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)e^{(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)} + 8e^{-8}$; (b) $-0{,}0026$; (c) $28e^{-8}\,\Delta x - 14e^{-8}\,\Delta y$; (d) $-0{,}0019$
5. (a) $\Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(1 + \Delta y) + \ln(5 + \Delta z) - \ln 5$; (b) 0,2141; (c) $\Delta x + 5\Delta y + \frac{1}{5}\,\Delta z$; (d) 0,214

7. $(12x^2 - y^2)\,dx + (3 - 2xy)\,dy$ **9.** $(\cos y - y \cos x)\,dx + (-x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)\,dy$ **11.** $\dfrac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$

13. $\operatorname{tg}^{-1} z\,dx - \dfrac{2y}{z}\,dy + \left(\dfrac{x}{1 + z^2} + \dfrac{y^2}{z^2}\right)dz$

15. (a) $2(x_0y_0 - y_0)\,\Delta x + (x_0^2 - 2x_0)\,\Delta y + (y_0\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y)\,\Delta x + 2(x_0\,\Delta x - \Delta x)\,\Delta y$; (b) $\epsilon_1 = y_0\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y$; $\epsilon_2 = 2(x_0\,\Delta x - \Delta x)$
17. (a) $\dfrac{2x_0y_0\,\Delta x + y_0(\Delta x)^2 - x_0^2\,\Delta y}{y_0^2 + y_0\,\Delta y}$; (b) $\epsilon_1 = \dfrac{y_0^2\,\Delta x - 2x_0y_0\,\Delta y}{y_0^3 + y_0^2\,\Delta y}$; $\epsilon_2 = \dfrac{x_0^2\,\Delta y}{y_0^3 + y_0^2\,\Delta y}$
31. (a) $(y_0 - z_0)\,\Delta x + x_0\,\Delta y + (2z_0 - x_0)\,\Delta z - (\Delta z)(\Delta x) + (\Delta x)(\Delta y) + (\Delta z)(\Delta z)$; (b) $\epsilon_1 = -\Delta z$, $\epsilon_2 = \Delta x$, $\epsilon_3 = \Delta z$ **35.** 7,36 m^3
37. 0,14 cm; 1,4% **39.** $\frac{13}{1.600}$; 0,325% **41.** \$7.200

43. $D_1f(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } xy = (0, 0) \end{cases}$

$D_2f(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

EXERCÍCIOS 16.6 (Página 955)

1. $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; (a) $6x - 2y$; (b) $16r - 10s$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$; (a) $-2x - 4y$; (b) $-10r - 6s$ **3.** $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; (a) $13x - 2y + 5$; (b) $24r - 41s + 5$;

$\dfrac{\partial u}{\partial s}$; (a) $-17x - 7y - 10$; (b) $-41r + 44s - 10$ **5.** $\dfrac{\partial u}{\partial r}$; (a) $\dfrac{2e^{y/x}}{x^2}(2x \operatorname{sen} t - y \cos t)$; (b) 0; $\dfrac{\partial u}{\partial t}$; (a) $\dfrac{2re^{y/x}}{x^2}(y \operatorname{sen} t + 2x \cos t)$;

(b) $2e^{2 \operatorname{tg} t} \sec^2 t$ **7.** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 2r(2x + y) + 3x$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 2s(2x + y) - 2x$ **9.** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{6re^s + s \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{3r^2e^s + r \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$

11. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6s}{x^2}\operatorname{senh}\frac{y}{x}(xe^r - ry)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3}{x^2}\operatorname{senh}\frac{y}{x}(2xe^r - yr^2) = 0$

13. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2x \operatorname{sen}\phi\cos\theta + 2y\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 2z\cos\phi$; $\frac{\partial u}{\partial \phi} = 2xr\cos\phi\cos\theta + 2yr\cos\phi\operatorname{sen}\theta - 2zr\operatorname{sen}\phi$;
$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2xr\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 2yr\operatorname{sen}\phi\cos\theta$ **15.** (a) $e^x(\cos t - y\operatorname{sen} t) + e^y(x\cos t - \operatorname{sen} t)$;
(b) $e^{\cos t}(\cos t - \operatorname{sen}^2 t) + e^{\operatorname{sen} t}(\cos^2 t - \operatorname{sen} t)$ **17.** (a) $\frac{x\sec^2 t - y\operatorname{sen} t + z\cos t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (b) $\operatorname{tg} t\sec t$ **19.** $\frac{txe^t - y}{t(x^2+y^2)}$

21. $\frac{x + y + 2t + ty - tx}{t(y+t)^2}$ **23.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y - 6x - 4z}{2z + 4x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x - 2y}{2z + 4x}$ **25.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz + 1}{3xy\operatorname{tg} 3xz - xy^2}$

29. decrescente a taxa de $\frac{8}{61}$ rad/min **31.** crescente à taxa de 3.840π cm^3/min **33.** crescente à taxa de 1,6 L/min

35. $\frac{\partial u}{\partial v} = \cos w\operatorname{senh} v\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen} w\cosh v\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial w} = -\operatorname{sen} w\cosh v\frac{\partial u}{\partial x} + \cos w\operatorname{senh} v\frac{\partial u}{\partial y}$

EXERCÍCIOS 16.7 (Página 962)

1. (a) $\frac{2}{y} - \frac{6y}{x^4}$; (b) $\frac{2x^2}{y_3}$ **3.** (a) $4e^{2x}\operatorname{sen} y$; (b) $-e^{2x}\operatorname{sen} y$ **5.** (a) $2\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}$; (b) $2\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$

7. (a) $3y\cosh x$; (b) $4x\operatorname{senh} y$ **9.** (a) $e^x\cos y - \frac{2x\ln y}{(1+x^2)^2}$; (b) $-e^x\cos y - \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{y^2}$ **11.** (a) $12x + 20y$; (b) $12x + 20y$

13. (a) 0; (b) e^y **15.** (a) $-2e^z\operatorname{sen} e^z$; (b) $-2we^z(\operatorname{sen} e^z + e^z\cos e^z)$ **17.** (a) $\frac{-320rst}{(r^2+4s^2-5t^2)^3}$; (b) $\frac{16r(5t^2+12s^2-r^2)}{(r^2+4s^2-5t^2)^3}$

25. não existe nem um nem outro **27.** $f_{12}(0, 0) = -1$; $f_{21}(0, 0) = 1$ **31.** $6se^{r-s}(2 + r) - 8e^{-2s}$ **33.** $10\cos^2\theta + 8$ **35.** $-10r\operatorname{sen} 2\theta$

EXERCÍCIOS 16.8 (Página 967)

3. $\xi_1 = 2$ **5.** $\xi_1 = 6 - 2\sqrt{3}$ **7.** 0 **9.** 0 **11.** $\xi_2 = 2\sqrt{3} - 4$ **13.** $\xi_2 = 3 + \ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16 (Página 968)

1. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \geqslant 16\}$ **3.** $\{(x, y) \mid y > x^2\}$ **5.** $\{(x, y, z) \mid y \neq \pm z\}$; o conjunto de todos os pontos em R^3 exceto aqueles sobre o plano $y = \pm z$ **7.** $\{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leqslant 36\}$; a parte superior do elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$ **9.** $y = \frac{k}{4x^{1/2}}$, $k = 16, 8, 4, 2$

11. (a) $4xy - 3y^2 + 4$; (b) $2x^2 - 6xy - 2$; (c) $4y$; (d) $-6x$; (e) $4x - 6y$; (f) $4x - 6y$ **13.** (a) $\frac{2x}{3y^2}$; (b) $\frac{y - 2x^2}{3y^3}$; (c) $-\frac{4x}{3y^3}$; (d) $-\frac{4x}{3y^3}$

15. (a) $t^2\cos st^2 + te^s$; (b) $2st\cos st^2 + e^s$; (c) $2t(\cos st^2 - st^2\operatorname{sen} st^2) + e^s$; (d) $2t(\cos st^2 - st^2\operatorname{sen} st^2) + e^s$ **17.** (a) $\frac{1}{y}e^{x/y} + \frac{1}{x}$;
(b) $-\frac{x}{y^2}e^{x/y} - \frac{1}{y}$; (c) $\frac{1}{y^2}e^{x/y} - \frac{1}{x^2}$; (d) $\frac{2x}{y^3}e^{x/y} + \frac{x^2}{y^4}e^{x/y} + \frac{1}{y^2}$ **19.** (a) $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$; (b) $\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$; (c) $\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

21. (a) $\frac{-320uvw}{(u^2+4v^2-5w^2)^3}$; (b) $\frac{16u(12v^2+5w^2-u^2)}{(u^2+4v^2-5w^2)^3}$ **23.** (a) $\frac{1}{rt^2}$; (b) $\frac{-2}{rt^3}$; (c) $\frac{2}{r^2t^3}$ **27.** (a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{6y(x+y)}{x^2+y^2} + 3\ln(x^2+y^2)$;
$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{4y(x-y)}{x^2+y^2} - 2\ln(x^2+y^2)$; (b) $\frac{\partial u}{\partial t} = (3t - 2s)\frac{18t}{4s^2+9t^2} + 3\ln(8s^2+18t^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = (3t - 2s)\frac{8s}{4s^2+9t^2} - 2\ln(8s^2+18t^2)$
29. (a) $18xyse^{3rs} + 6yse^{3rs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$; (b) $[9(1 + 2rs)e^{6rs} + 6(1 + rs)e^{3rs} - 9\ln 4]r^2s^2$

31. (a) $3x\cos t - 4(y + 2x)\operatorname{sen} t$; (b) $12\cos 2t - 16\operatorname{sen} 2t$; $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=\pi/4} = -16$

33. (a) $3(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)^2 - 5(-1 + \Delta x)(2 + \Delta z)^2 - 2(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)(2 + \Delta z) - 5$; (b) $-0{,}48$; (c) $-5\Delta x - 14\Delta y + 26\Delta z$; (d) $-0{,}48$ **35.** 2 **37.** $\frac{1}{6}\pi$ **39.** $\delta = \min(1, \frac{1}{35}\epsilon)$ **41.** existe limite e é 0; pegue $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$ **43.** não existe limite
45. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não estejam nas retas $x = \pm 2y$
47. contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 exceto $(x, y) = (2n + 1, 2m + 1)$, onde n e m são quaisquer inteiros
49. contínua em todos os pontos em R^2 **51.** 39 centavos **53.** -3.200π cm^3/min **55.** decrescente à taxa de $-0{,}158$ N/m^2/min.
59. (a) 12; (b) -3

EXERCÍCIOS 17.1 (Página 978)

1. $2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ **3.** $3x + \sqrt{2}y + 4z$ **5.** $\dfrac{17}{13(x - y)^2}$ **7.** $(8x - 3y)\mathbf{i} + (2y - 3x)\mathbf{j}$ **9.** $\dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

11. $\dfrac{y + z}{(x + z)^2}\mathbf{i} - \dfrac{1}{x + z}\mathbf{j} - \dfrac{x - y}{(x + z)^2}\mathbf{k}$ **13.** $e^{-2y}\sec z(\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x \operatorname{tg} z\mathbf{k})$ **15.** 6 **17.** -42 **19.** -2

21. $-3e^{\pi/4}\cos\frac{1}{12}\pi$ **23.** (a) $\langle -4, -4\rangle$; (b) $-2 - 2\sqrt{3}$ **25.** (a) $\langle -12, 2, 14\rangle$; (b) $\frac{6}{7}$ **29.** $\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 4}$ **31.** $-\frac{29}{11}$; $\sqrt{21}$

33. $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{3}{3\pi + 1}$ e $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{3}{3\pi + 1} - \pi$ **35.** (a) $6\sqrt{2}°$/m; (b) direção do vetor $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

37. (a) -1; (b) direção do vetor $-\mathbf{j}$ e magnitude 2

EXERCÍCIOS 17.2 (Página 982)

1. $2x - 2y + 3z = 17$; $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y + 2}{-2} = \dfrac{z - 3}{3}$ **3.** $4x + 8y + 3z + 22 = 0$; $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y + 4}{8} = \dfrac{z - 6}{3}$ **5.** $ex - y = 0$;

$\dfrac{x - 1}{-e} = \dfrac{y - e}{1}$, $z = 0$ **7.** $x - y - 3 = 0$; $\dfrac{x - 6}{1} = \dfrac{y - 3}{-1}$, $z = 3$ **9.** $x + 2y + 2z - 8 = 0$; $\dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{2}$

11. $3x - 2y - 6z + 84 = 0$; $\dfrac{x + 8}{-3} = \dfrac{y - 27}{2} = \dfrac{z - 1}{6}$ **13.** $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 2}{-1} = \dfrac{z}{20}$ **15.** $x = 4$, $y = 16$

17. $\dfrac{x}{1 - 8\pi} = \dfrac{y - 2}{-2\pi} = \dfrac{z - 1}{-1}$ **19.** as superfícies são tangentes

---

EXERCÍCIOS 17.3 (Página 995)

1. $f(4, -\frac{1}{2}) = -\frac{133}{4}$, mín. rel. **3.** $f(-\frac{1}{4}, 16) = -12$, máx. rel. **5.** não tem extremo relativo **7.** não tem extremo relativo
9. $f(1, 1) = -5$, mín. rel.; $f(-1, -3) = 31$, máx. rel. **11.** $f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, máx. rel; $f(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, mín. rel. **13.** 8, 8, 8

15. $(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14})$; $\frac{9}{14}\sqrt{14}$ **17.** $(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}})$ e $(0, -\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})$; 1 **19.** $\frac{1}{3}c$ mg de droga A e $\frac{1}{2}c$ mg de droga B **21.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ unidades cúb.
23. comprimento da base é $2\frac{2}{3}$cm; largura da base é 2 cm; espessura 3 cm **25.** 3 máquinas-hora e 9 pessoas-hora **27.** \$25,400
29. (a) 3.120; (b) 9 **31.** (a) $y = 0{,}1560x + 314{,}9$; (b) 368,0 mililitros por minuto por kilograma **33.** esse não é o lucro total máximo
35. $1{:}w{:}h = 1{:}1{:}\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 17.4 (Página 1005)

1. $\dfrac{dy}{dy} = -\dfrac{ye^{xy} + 2\cos(2x - 3y)}{xe^{xy} - 3\cos(2x - 3y)}$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos 2y}{\cos 2x}$ **5.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x\,(2 \operatorname{sen} x + \cos y)}{\operatorname{sen} y\,(\operatorname{sen} x + 2\cos y)}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\dfrac{y}{x}$ **9.** $x - 1 = 0$ **11.** $y = x - 1$ **13.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{9x^2v^2 - 4v^3}{12(u^2v^3 + v^2u^3)}$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{ye^y - xy - uve^v - v}{e^{y+v} - xe^v - ue^v - 1}$ **17.** $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ e $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}$ **19.** $x + y + z - 3 = 0$

21. Em $x = 0$ temos os extremos $y = \pm b$. **23.** $x = 3$ e $y = -1$.

EXERCÍCIOS 17.5 (Página 1011)

1. (0, 0) e (0, 4) **3.** $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ **5.** $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. rel.; $f(0, 3) = 3$, mín. rel.; $f(0, -3) = -3$, mín. rel.
7. $f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$, mín. rel.;
$f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.
9. 3 **11.** $3\sqrt{3}$ **13.** (a) 12; (b) 4; (c) 1 **15.** $\frac{4}{13}\sqrt{26}$ **17.** 2,6 **19.** $\frac{37}{13}$ **21.** $\frac{7}{32}$ **23.** mais quente em $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$; mais frio em $(0, \frac{1}{2})$

EXERCÍCIOS 17.6 (Página 1019)

1. $f(x, y) = 2x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$ **3.** $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 2y^3 + C$ **5.** $f(x, y) = 2x^3y^2 - 7x^2y + 3x - 8y + C$
7. $f(x, y) = \dfrac{2x^2 - 2y^2 - x}{2xy^2} + C$ **9.** $f(x, y) = x^2 \sec 2y + C$ **11.** $f(x, y) = x^2 \cos y - x + C$ **13.** não é uma diferencial exata
15. $f(x, y) = xe^y - x^2y + C$ **17.** $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + xy = C$ **19.** $ye^x - x^2 = C$ **21.** não é exata **23.** $x \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} + \operatorname{sen} x = C$
25. $f(x, y, z) = 2xy - 5xz + 8yz + C$ **27.** $f(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen} z + C$ **29.** $f(x, y, z) = e^{x+z} + e^y \ln z - e^x \ln y + C$
31. $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xyz - 5yz^2 - 2x + z + C$ **33.** $f(x, y, z) = xz \operatorname{tg} y + C$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17 (Página 1020)

1. 14 **3.** $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ **5.** $-\frac{8}{3}$ **7.** (a) $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; (b) $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$ **9.** (a) $12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; (b) $\frac{13}{7}\sqrt{14}$ **11.** $f(x, y) = e^{x^2} \ln y + C$
13. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + z} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{z} + C$ **15.** $4x + 2y + z - 12 = 0$; $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 2}{1}$ **17.** $\dfrac{x - 1}{17} = \dfrac{y + 2}{20} = \dfrac{z - 11}{-4}$
19. (a) a direção do vetor $-12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}$; (b) subindo;
(c) a direção de um ou outro dos vetores: $\dfrac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ ou $-\dfrac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ **21.** $f(-1, -1) = 1$, máx. rel. **23.** $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$, mín. rel.
25. $f(9, 11, 15) = -362$, máx. rel. **27.** $\frac{7}{6}\sqrt{6}$ **29.** $f(x, y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$ **31.** $f(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y + z \operatorname{cotg} y + C$
33. $x^3y^2 + 2xy^3 = C$ **35.** $ye^{-x} + y^2 - \cos x = C$ **37.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ **39.** $2\sqrt{3}$ por $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$
41. (a) $-\dfrac{3\sqrt{3} + 2}{11}$ graus por cm; (b) $\frac{2}{11}\sqrt{13}$ graus por cm na direção do vetor $-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ **43.** 18 cm por 18 cm por 18 cm
45. base quadrada e uma profundidade que é a metade do comprimento de um lado da base. **47.** (a) $81x - 284y - 270 = 0$; (b) 11 dias
49. (a) $y = 9{,}628x - 1488{,}2$; (b) 2.740 kilogramas por hectare

EXERCÍCIOS 18.1 (Página 1027)

1. 45 **3.** 50 **5.** 1.368 **7.** 704 **9.** 50,75 **11.** 1.376 **13.** 68,6 **15.** 38,2 **17.** [0,24] **19.** $[1, e]$ **21.** $[0, \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi^2]$

EXERCÍCIOS 18.2 (Página 1034)

1. 42 **3.** $\frac{98}{3}$ **5.** $-\frac{49}{5}$ **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{1}{3}$ **11.** 45 **13.** $\frac{152}{3}$ **15.** $\frac{3}{2}\pi$ **17.** $\frac{864}{5}$ **19.** $\frac{512}{3}$ unidades cúb. **21.** $\frac{16}{3}$ unidades cúb.
23. $\dfrac{15\pi - 32}{120}$ unidades cúb. **25.** $\frac{1}{12}$ unidades quad. **27.** 72 unidades quad. **29.** $c \displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy\, dx$
31. $\frac{337}{30}$ unidades cúb. **33.** (b) $\frac{2}{3}a^3$; (c) $\frac{2}{3}\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2x + y)\, dx\, dy$ **35.** 0

EXERCÍCIOS 18.3 (Página 1039)

1. 12 kg; $(2, \frac{3}{2})$ **3.** $\frac{27}{2}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$ **5.** $\frac{176}{15}k$ kg; $(\frac{35}{22}, \frac{102}{77})$ **7.** $\frac{2}{3}ka^3$ kg; $(\frac{3}{32}a(2 + \pi), \frac{3}{32}a(2 + \pi))$ **9.** $\frac{1}{4}k\pi$ kg; $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$
11. $\frac{4}{3}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ **13.** $9k$ kg-m^2 **15.** $\frac{1}{2}\pi ka^4$ kg-m^2 **17.** $\frac{96}{35}k$ kg-m^2 **19.** (a) $\frac{144}{5}$ kg-m^2; (b) 54 kg-m^2; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ m; (d) $\frac{414}{5}$ kg-m^2
21. (a) $\frac{3}{32}\pi k$ kg-m^2; (b) $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2 - 3)k$ kg-m^2; (c) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ m; (d) $(\frac{1}{12}\pi^3 - \frac{1}{32}\pi)k$ kg-m^2 **23.** $\frac{1}{12}b\sqrt{6}$ cm **25.** $\frac{19.904}{315}k$ kg-m^2

EXERCÍCIOS 18.4 (Página 1045)

1. 6π unidades quad. 3. $\frac{1}{4}a^2(8 + \pi)$ unidades quad. 5. $(4\pi + 12\sqrt{3})$ unidades quad.. 7. 4π unidades cúb. 9. $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$ unidades cúb. 11. $\frac{7}{2}\pi$ unidades cúb. 13. $\frac{40}{3}\pi k$ kg; $(0, \frac{21}{10})$ 15. $\frac{22}{3}k\pi$ kg; $(-\frac{57}{44}, 0)$ 17. $\frac{20}{3}k$ kg; $(\frac{23}{25}, \frac{531}{1.280}\pi)$ 19. $\frac{8}{9}(27\sqrt{3} - 14\pi)k$ kg; $\left(0, \frac{3}{10}, \frac{297\sqrt{3} - 160\pi}{27\sqrt{3} - 14\pi}\right)$ 21. $\frac{5}{64}k\pi$ kg-m^2 23. $\frac{11}{16}k\pi a^4$ kg-m^2 25. $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ m 27. $\pi e(e^8 - 1)$

EXERCÍCIOS 18.5 (Página 1050)

1. $\sqrt{6}$ unidades quad. 3. $2\sqrt{1.633}$ unidades quad. 5. 9 unidades quad. 7. $\frac{1}{12}(135\sqrt{10} - 13\sqrt{26})$ unidades quad. 9. 8π unidades quad. 11. 12π unidades quad. 13. 32 unidades quad. 15. $9\sqrt{2}$ unidades quad. 17. $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$ unidades quad. 19. $2\pi a^2(1 - e^{-1})$ unidades quad. 21. 12π unidades quad. 23. $\frac{72}{5}[2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})]$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 18.6 (Página 1054)

1. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{7}{8}$ 5. $-e(\ln 2)^2$ 7. $\frac{1}{2}\pi - 1$ 9. $\frac{15}{2}$ 11. $\frac{1}{24}$ 13. 36 15. $\frac{243}{2}\pi$ 17. $\frac{648}{5}$ 19. $\frac{1}{4}$ unidades cúb. 21. $\frac{3}{2}\pi$ unidades cúb. 23. 4π unidades cúb. 25. $\frac{4}{3}\pi abc$ unidades cúb. 27. $\frac{80}{3}k$ kg 29. $\frac{1}{28}k$ kg 31. $\frac{2}{5}(2\sqrt{2} - 1)$ kg

EXERCÍCIOS 18.7 (Página 1060)

1. $\frac{1}{3}a^3$ 3. $6\pi(e - 1)$ 5. πa^3 7. $\frac{4}{3}\pi a^3$ 9. $\frac{1}{3}$ 11. 8π 13. $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg 15. $1.250\pi k$ g-cm^2 17. $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg 19. 8π 21. $\frac{512}{75}k$ kg-m^2 23. $8k\pi$ kg 25. $\frac{56}{9}\pi a^3 k$ g-cm^2 27. $(0, 0, \frac{1}{2})$ 29. 18π 31. $\frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2} - 1)$

EXERCÍCIOS 18.8 (Página 1070)

1. $\frac{14\pi}{3}$ 3. $\frac{15\pi}{8}$ 5. 4 7. 2π 9. $(e - 1)\ln 2$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18 (Página 1070)

1. $\frac{1}{40}$ 3. $\frac{1}{8}\pi$ 5. $\frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{3}{8}$ 7. $\frac{3}{4}\pi$ 9. $\frac{1}{8}$ 11. $\frac{1}{3}$ 13. $\frac{1}{2}\pi\ln 2$ 15. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ 17. $\frac{4}{15}$ unidades quad. 19. 9π 21. $\frac{8}{3}$ unidades quad. 23. $\frac{8}{3}$ unidades quad. 25. $\frac{1}{2}$ unidades cúb. 27. $\frac{1}{2}$ unidades cúb. 29. $\frac{1.104}{35}$ unidades cúb. 31. 18 unidades quad. 33. $(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$ unidades quad. 35. $(2, \frac{3}{2})$ 37. $\frac{1}{108}(3\pi - 7)$ kg 39. $6\pi a^4$ unidades cúb. 41. $\frac{5}{3}\pi$ unidades cúb. 43. $\frac{1}{64}(7e^8 + 1)$ kg-m^2 45. $k(\pi + \frac{8}{3})$ kg-m^2 47. $2k\pi$ kg-m^2; $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ m 49. $65k\pi$ kg 51. $\frac{32}{5}k\pi$ kg-m^2

EXERCÍCIOS 19.1 (Página 1080)

7. $6x\mathbf{i} + 6y^2\mathbf{j}$ 9. $\frac{2xy}{1 + x^4y^2}\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + x^4y^2}\mathbf{j}$ 11. $(6x^2 - 6xy + y^2)\mathbf{i} + (-3x^2 + 2xy - 12y^2)\mathbf{j}$ 13. $2xye^{-4z}\mathbf{i} + x^2e^{-4z}\mathbf{j} - 4x^2y\,e^{-4z}\mathbf{k}$ 15. conservativo 17. não-conservativo 19. conservativo 21. $\phi(x, y) = xy + C$ 23. $\phi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + C$ 25. $\phi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + C$ 27. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}z^2 - xy + 3yz + C$ 29. $\phi(x, y, z) = ze^x + xe^y - ye^z + C$ 31. $\phi(x, y, z) = x^2\cos y - yz^2 - 3x + 2z + C$ 33. 0; 5 35. $2e^x \operatorname{sen} y\mathbf{k}$; $2e^x\cos y$ 37. 0; $2x + 2y + 2z$ 39. $\operatorname{sen} z\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + \operatorname{sen} y\mathbf{k}$; 0 41. $\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\mathbf{k}$; $\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + 2z$

EXERCÍCIOS 19.2 (Página 1089)

1. 1 3. $\pi - \frac{8}{3}$ 5. 8π 7. 1 9. $\frac{16}{3}$ 11. $\frac{4}{3}$ 13. $-\frac{5}{12}$ 15. $\frac{1.477}{2}$ 17. $\frac{35}{2}$ 19. $\pi(a^2 + 2a)$ 21. 8 23. $\frac{4}{3}$ J 25. $20\frac{3}{4}$ J 27. $27\frac{3}{4}$ J 29. $(\frac{1}{16}\pi a^4 + a^2)$ J 31. 3 J 33. $(e^2 + e^4 + e^8 - 3)$ J 35. $2\frac{1}{2}$ J

EXERCÍCIOS 19.3 (Página 1098)

1. 2 **3.** e^2 **5.** -4 **7.** 15 **9.** $-4e$ **11.** -14 **13.** 18 **15.** $2e^2 - 3e^3 + e^4$ **17.** $\frac{3}{4}$ **19.** 11 **21.** $\frac{13}{2}$ **23.** 4 **25.** 0 **27.** 3 **29.** 4 **31.** -13 **33.** 216 J **35.** 32,766 J **37.** $\frac{2}{15}k$ J

EXERCÍCIOS 19.4 (Página 1111)

1. -1 **3.** $-\frac{5}{12}$ **5.** $-\frac{1}{2}\pi$ **7.** $-\frac{32}{15}$ **9.** $-\frac{3}{7}$ **11.** $\frac{1}{5}$ **13.** $\frac{1}{24}(5 - 4\sqrt{2})\pi$ **15.** 0 **17.** -10π **19.** $\frac{41}{70}$ **21.** $\frac{9}{2}$ unidades quad. **23.** $\frac{1}{3}$ unidades quad. **25.** $\frac{3}{8}\pi a^2$ unidades quad. **31.** 24π J **33.** 0 **35.** 16π cm^2/s **37.** $\frac{3}{2}\pi$ cm^2/s **39.** 15; (*i*) **41.** 0; (*iii*)

EXERCÍCIOS 19.5 (Página 1118)

1. 8π **3.** $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ **5.** $\frac{9}{5}\sqrt{14}$ **7.** $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ **9.** $\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$ **11.** $\frac{7}{3}\sqrt{61}$ **13.** 0 **15.** $16k\pi$ kg **17.** 9π kg **19.** $\frac{665}{6}\sqrt{2}\pi$ kg **21.** 18 **23.** 45π **25.** $\frac{7}{2}$

EXERCÍCIOS 19.6 (Página 1127)

1. $\frac{8}{3}\pi$ **3.** 1 **5.** 18 **7.** $\frac{7}{2}$ **9.** 27 **11.** 32π **13.** 144π **15.** $\frac{11}{12}$ **17.** 0 **19.** π **21.** 54π **23.** -1 **25.** 8π **27.** -2

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 19 (Página 1128)

1. (a) $(4xy + 3y^3)\mathbf{i} + (2x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}$; (b) $e^y\mathbf{i} + (xe^y - ze^y - yze^y)\mathbf{j} - ye^y\mathbf{k}$ **3.** $\phi(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} 2xy^2 + C$ **5.** $\phi(x, y, z) = z^2 \operatorname{tg} x + y^2e^{3z} + C$ **7.** $x(e^{xy} - e^{xz})\mathbf{i} + y(e^{yz} - e^{xy})\mathbf{j} + z(e^{xz} - e^{yz})\mathbf{k}$; 0 **9.** $\frac{1 - 2y}{y^2}\mathbf{k}$; $\frac{2x}{y^2}$ **11.** $-\frac{4}{3}$ **13.** $\frac{44}{3} - 3\pi$ **15.** $\frac{27}{10}$ **17.** $\frac{19}{4}$ **19.** $9e^2 - 1$ **21.** π **23.** 13 **25.** 4 **27.** 12π **29.** 0 **31.** $\frac{9}{2}$ unidades quad. **33.** $\frac{1.568}{15}$ J **35.** $\frac{23}{6}$ J **39.** 0 **41.** 54 cm^2/s **43.** $\frac{1}{2}\pi$ **45.** $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ **47.** $\frac{1}{6}(37\sqrt{37} - 1)$ **49.** $\frac{8}{3}k\pi$ kg **51.** $108\sqrt{2}\pi$ kg **53.** 56π **55.** 160π **59.** 0

EXERCÍCIOS 20.2 (Página 1141)

1. $y = ct^2 + 1$ **3.** $y = ct + e^t$ **5.** $y = \frac{1}{c_1t} + \frac{c_2t}{2}$ **7.** $y = c \operatorname{sen} t + e^t$ **9.** $y = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + c_1)\frac{1}{\cos t}$

EXERCÍCIOS 20.3 (Página 1145)

1. $4x^3 + 3(y - 1)^4 = c$ **3.** $\frac{x + 1}{y^2} = ce^y$ **5.** $\left[\frac{1 + y}{1 - y}\right]^{1/2} = c\left[\frac{1 - t}{1 + t}\right]^{1/2}$ **7.** $t^2 - t^2y^2 = k$ **9.** $(3 - t)(2 + y) = c$ **11.** $\rho = c \cdot \cos\theta$ **13.** $\operatorname{tg} y = c(1 - e^x)^3$ **15.** $1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$

EXERCÍCIOS 20.4 (Página 1149)

1. $(t + y)^2(2t + y)^3 = c$ **3.** $t^3 + 6t^2y = c$ **5.** $x^2 + 4y^2 = 32$ **7.** $x^2 + 2xy = 8$ **9.** $(x + y - 1)^3 = c(x - y + 3)$

EXERCÍCIOS 20.5 (Página 1154)

1. $ct^2y^2 + ty^2 - 1 = 0$ **3.** $ct^2y^2 + 2ty^2 - 1 = 0$ **5.** $y^2 = (2t + c)\cos^2 t$ **7.** $x = cy^2$ **9.** $x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$

EXERCÍCIOS 20.6 (Página 1157)

1. $ty - \frac{t^3}{3} - \frac{y^3}{3} = c$ 3. $\varphi \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\varphi = c$ 5. $e^{ty^2} + t^4 - y^3 = c$ 7. $t^2y^3 = c$ 9. $\frac{3t^2y}{2} + ty^2 = c$ 11. $\frac{y^2e^x}{2} + ye^{2x} = c$
13. $x^4e^xe^y + x^2 + y^2 = c$

EXERCÍCIOS 20.7 (Página 1164)

1. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$ 3. $y = c_1e^{\frac{1}{2}t} + c_2te^{\frac{1}{2}t}$ 5. $y = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}$ 7. $y = c_1e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t + c_2e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t$ 9. $y = c_1\cos\sqrt{5}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$

EXERCÍCIOS 20.8 (Página 1173)

1. $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + (\frac{1}{3} - \frac{5}{9}t)\,e^{-2t}$ 3. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + 2t$ 5. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + (\frac{1}{2}t - \frac{5}{8})$
7. $y = (c_1 + x)\,e^{2x} + (c_2 - 4x)\operatorname{sen} x + (c_3 - 2x)\cos x - 1 - 2x$ 9. $y = c_1e^{3x} + c_2\,e^{-2x} - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{13}{36} - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$

EXERCÍCIOS 20.9 (Página 1178)

1. $y = 2e^{(t-1)} - (t-1)^2 - 2(t-1)$ 3. $y = e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,t^{2n+1}}{3, 5, \ldots, (2n+1)}$ 5. $y = \operatorname{sen} x$ 7. $y = \cos x$

9. $y = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1,3, \ldots (2_j - 1)}{2^j\,j!}\,t^{2j}$

EXERCÍCIOS A.1 (Página A.4)

1. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\ln|2 + 3x| + C$ 3. $x + \frac{36}{6 - x} + 12\ln|6 - x| + C$ 5. $\frac{1}{30}(3x - 1)(1 + 2x)^{3/2} + C$
7. $2\sqrt{1 + 2x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\sqrt{1 + 2x} + 1}\right| + C$ 9. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| + C$ 11. $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x}| + C$
13. $\sqrt{9x^2 + 4} - 2\ln\left|\frac{2 + \sqrt{9x^2 + 4}}{3x}\right| + C$ 15. $\sqrt{9 - 4x^2} - 3\ln\left|\frac{3 + \sqrt{9 - 4x^2}}{2x}\right| + C$
17. $\frac{1}{3}(x^2 - x - 6)\sqrt{4x - x^2} + 4\cos^{-1}\left(\frac{2 - x}{2}\right) + C$ 19. $-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$
21. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x\operatorname{cotg} x - \frac{5}{24}\operatorname{cosec}^3 x\operatorname{cotg} x - \frac{5}{16}\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x + \frac{5}{16}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$
23. $t^4\operatorname{sen} t + 4t^3\cos t - 12t^2\operatorname{sen} t - 24t\cos t + 24\operatorname{sen} t + C$ 25. $x\sec^{-1} 3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + C$
27. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$ 29. $\frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$ 31. $\frac{1}{16}x^4(4\ln 3x - 1) + C$
33. $\frac{e^{2x}}{29}(2\operatorname{sen} 5x - 5\cos 5x) + C$ 35. $\frac{3}{5}y\cosh 5y - \frac{3}{25}\operatorname{senh} 5y + C$ 37. $\frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$ 39. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$
41. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$ 43. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ 45. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 47. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ 49. 0 51. $\frac{1}{8}(e^2 + 3)$

Índice Remissivo

Alfabeto grego, F-1
Alometria, lei da, 1144
Ângulo, de direção de um vetor, 785, 853
  entre dois planos, 865
  entre dois vetores, 796, 858
Ângulos de direção, 786, 853
Arco, comprimento de, 815-821
  como um parâmetro, 821
  de uma curva em R^2, 815-821
  de uma curva em R^3, 895
  em coordenadas polares, 820
Área de uma superfície, 1045-1050
Arquimedes, XV
Axioma do completamento, 698

Barrow, Isaac, XV
Bernoulli, Jakob, XV
Bernoulli, Johann, XV
Bola aberta, 918
  continuidade de uma função em, 930
Bola fechada, 918
Bolzano, Bernhard, XV

Campo(s), escalar, 1073
  forças, 1074
  velocidade, 1073
  vetorial, 1073-1081
    conservativo, 1075
    definição de, 1073
    gradiente, 1075
    solenoidal, 1107
Cauchy, Augustin L., XV
Centro, de curvatura, 833
  de massa, 1035
  de uma esfera, 851
Ciclóide, 806
Cilíndro, 884
  como uma superfície, 884
  determinante de, 884
  diretriz de, 884
  elíptico, 885
  geratriz de, 884
  hiperbólico, 885
  parabólico, 885
Circunferência, de curvatura, 829
  osculadora, 829
Co-senos diretores, 854
Completamento, axioma do, 698
Componente normal do vetor aceleração, 840
Componente tangencial do vetor aceleração, 840
Componente tangencial do vetor velocidade, 839
Componentes de um vetor, 785, 799, 853, 859
Comprimento de arco, de uma curva, 815-821, 898
  como um parâmetro, 824
Condição, de contorno, 1133
  inicial, 1133
Cone, circular reto, 888
  elíptico, 893
Continuidade
  de funções de mais de uma variável, 928-932
  de uma função em uma bola aberta, 930
  de uma função vetorial, 809
Convergência, intervalo de, 749
  raio de, 749
Coordenadas
  cartesianas retangulares tridimensionais, 847
  cilíndricas, 902
    e integrais triplas, 1055
  esféricas, 902
    e integrais triplas, 1059
Cúbica retorcida, 896
Curso, 789
Curva, comprimento do arco de, 815-821, 898
  de contorno de uma função, 913
  de nível de uma função, 913
  de produto constante, 914
  em R^3, 898
  eqüipotencial, 913
  integral, 1131
  fechada, 1094
  geratriz de uma superfície de revolução, 886
  seccionalmente suave, 1085
  simples, 1100
  suave, 1085
Curvatura, 825-833, 899
  centro de, 833
  circunferência de,829
  definição de, 827
  raio de, 829
  vetor, 827, 899

Dedekind, Richard, XV
Del ∇, 975
Derivação. *Veja também* Derivadas.
  de séries de potências, 751-761
  parcial, 932
Derivada(s).
  das funções vetoriais, 809
  direcional, 977
  parciais, 932-940
  parciais de ordem superior, 957-964
  total, 954
Descartes, René, XV
Descontinuidade, essencial, 929
  removível, 929
Desvio, 992
Determinante de um cilindro, 884
Diferença de vetores, 789, 855
Diferenciabilidade, e continuidade, 944
  de funções vetoriais, 811
Diferencial, de ordem n, 1131
  exata, 1015, 1019, 1154
  homogênea, de grau n, 1145
    de mesmo grau, 1146
  linear de primeira ordem, 1135
  total de uma função, 946, 947
Dimensão do espaço vetorial real, 792
Direção de um vetor, 785, 853
Diretriz de um cilindro, 884
Distância, de um ponto a um plano, 867
  de um ponto a uma reta, 860
  entre dois pontos, 850
Domínio de uma função, 909

Eixo de uma superfície de revolução, 886
Elementos de uma seqüência, 687

Elipsóide, 888
de revolução, 887
Energia cinética, 1098
Ênupla ordenada, 909
Epiciclóide, 845
Equação de Laplace, 963, 1080
Equação de von Bertalanffy, 1152
Equações, características, 1159
de diferenças, 1174
de um plano, 862
de uma esfera, 851
de uma reta em R^3, 869-873
paramétricas, 869
simétricas, 869
gráfico de, 850
homogêneas, 1159
lineares, 863
não-homogêneas, 1164
paramétricas, 802, 896
vetorial, 802, 896
Equações cartesianas, 896
de um plano, 862
em um espaço tridimensional, 896
Equações de Cauchy-Riemann, 957
Equações diferenciais. *Veja também* Diferencial.
exata, 1016
parcial, 964
Esfera, 851, 889
centro de, 851
equação de, forma centro-raio de, 851
forma geral de, 851
raio de, 851
Esferóide, 889
Espaço numérico, n-dimensional, 909
tridimensional (R^3), 847
Espaço vetorial real, 792
base de, 792, 861
dimensão de, 792
Espelho parabólico, 1148
Euler, Leonhard, XV
Extremos, absolutos, 988
absolutos de funções de duas variáveis, 984-997
livres, 1006
relativos, 984
teste da derivada segunda para, 987

Fator integrante, 1138
Fermat, Pierre de, XV
Fluido incompressível, 1107
Fluxo de um campo vetorial, 1107, 1115
Fonte de um fluido, 1108
Forma centro-raio da equação de uma esfera, 851
Fórmulas geométricas, F-1
Fórmulas trigonométricas, F-2
Fórmula de recorrência, 1174
Função, composta, 911
de mais de uma variável, 909-918
continuidade, 928-932
limites, 918-928
de n variáveis, 909
definição, 909
diferenciável, 942, 947
descontínua, 928
domínio, 909
geradora, A-7
harmônica, 1080
imagem, 909
integrável, 1024
polinomial, 912
potencial, 1075
Funções de Bessel, 782
Funções vetoriais, 895
cálculo, 809-815
continuidade, 809
derivada, 810
diferenciabilidade, 811
gráfico, 803
implícitas, derivação, 998-1005
integral indefinida, 813
limite, 809, 896

Gases ideais, lei dos, 937
Gauss, Karl F., 1106
Geometria, diferencial, 825
fórmulas, F-1
Geratriz de um cilindro, 884
Gradiente de uma função, 975, 978
Gráfico de uma função, 912, 914
Grau, de uma equação, 1133
de uma função polinomial, 912
Green, George, 1099

Hélice, 896
circular, 896
Hiperbolóide de revolução, 888
Hiperbolóide elíptico, de duas folhas, 890
de uma folha, 889
Hipociclóide, 808

Identidade aditiva, para vetores, 791
Imagem de uma função, 909
Incremento
de uma função de duas variáveis, 941
de uma função de n variáveis, 947
Inércia, momento de, 1036, 1037
polar, 1037
Integração. *Veja também* Integrais.
de séries de potências, 761-768
região de, 1023
múltipla, 1022-1061
Integrais. *Veja também* Integração.
dupla, 1023-1028
avaliação, 1028-1034
definição, 1024
em coordenadas polares, 1040-1045
elíptica, 844
iterada, 1029
múltipla, 1023
tripla, 1050-1055
definição, 1052
em coordenadas cilíndricas, 1055
em coordenadas esféricas, 1059
Intercepto, de um plano, 864
Intervalo
de convergência de séries de potências, 749
Isotermas, 913

Jacobiano, 1062

Lagrange, Joseph, XV, 1006
Laplaciano, 1080
Lei da conservação da energia, 1098
Lei de Fick, 1133
Lei do gás ideal, 937
Lei do paralelogramo, 788
Leibniz, Gottfried Wilhelm, XV, 728
Leis associativas para vetores, 791
Leis de comutação para vetores, 791, 796, 852
Leis distributivas para vetores, 791, 796, 875
Limitante inferior de uma seqüência, 697
Limitante inferior máximo de uma seqüência, 697
Limitante superior de uma seqüência, 696
Limite(s)
de funções de mais de uma variável, 918-928
de uma função vetorial, 809, 896
de uma seqüência, 690

Magnitude de um vetor, 785, 853
Mapa de contorno, 913
Massa, centro de, 1035
momento de, 1035
Método da variação das constantes, 1141
Método da redução da ordem, 1160
Método dos coeficientes a determinar, 1166
Momento, de inércia, 1035, 1037
polar, 1037
de massa, 1035
Movimento, curvilíneo, 833
em um plano, 833-839
Multiplicação de vetores, 795-802, 857, 874-884
por escalar, 790, 856
produto escalar, 795-802, 857
produto vetorial, 874, 884
Multiplicadores de Lagrange, 1006-1011

Newton, Sir Isaac, XV
Norma de partição, 1023, 1051
Números diretores, 869

Octantes, 847
Operador diferencial, A-8
Oposto, existência para vetores, 791
Oposto de um vetor, 788, 855
Origem, 847

Par ordenado, 785, 909
Parabolóide, de revolução, 888
elíptico, 892
hiperbólico, 892
Partição, cilíndrica, 1055
de uma região, 1023, 1050
norma de, 1023, 1051

Plano tangente, 981
Planos, 862-868
ângulo entre, 865
definição, 862
equação, 862
paralelos, 866
perpendiculares, 866
projeção, 873
tangente, 981
traços, 864
Ponto, crítico, 986
de acumulação, 923
em um espaço numérico tridimensional, 847
em um espaço numérico, n-dimensional, 909
final, 784
inicial, 784
médio de um segmento de reta, 850
de sela, 986
Primitiva de uma função, 1134
Produto de vetores, 795-802, 857, 874-884
Projeção escalar de vetores, 798, 859
Projétil, movimento de, 835-839

Quádrica central, 891

R^3, curvas em, 895-902
gráfico de uma equação em, 850
retas em, 869-873
Raio, de convergência de uma série
de potências, 749
de curvatura, 829
de giração, 1038
de uma esfera, 851
Região de integração, 1023
Região fechada, 988
Regra da cadeia generalizada, 953
Representação de posição de um vetor, 785, 853
Representação de um vetor, 785
Resto em séries infinitas, 730
Reta(s)
de regressão, 992
equações em R^3, 869-873
tangente, 982
Revolução,
elipsóide de, 888
hiperbolóide de, 888
parabolóide de, 888
superfície de, 886

Segmento de reta, ponto médio de, 850
Segundo teorema fundamental do Cálculo
convergente, 692
crescente, 695
de somas parciais, 702
decrescente, 695
definição, 688
divergente, 692
elementos de, 688
estritamente crescente, 695
estritamente decrescente, 695
finita, 688
infinita, 688
limitada, 697
limitante inferior máximo, 697
limitante inferior, 696
limitante superior mínimo, 697
limitante superior, 696
limite de, 690
monótona, 695
Séries infinitas, absolutamente convergentes, 732
alternadas, 727-732
binomiais, 777-781
com termos constantes, 701-710
convergentes, 704
convergentes condicionalmente, 732
de potência, 743-782
definição, 744
derivação, 751-761
integração, 761-768
intervalo de convergência, 749
raio de convergência, 749
de Taylor, 768-777
de termos positivos, 714-723
definição, 702
divergentes, 704
geométricas, 708
harmônica, 707
hiper-harmônica, 722
p, 722
resto em, 730
soma de, 704
somas parciais de, 702
termos de, 702
teste da comparação com limite, 717
teste da integral, 724-727
teste da raiz, 737
teste da razão, 734
teste de comparação, 716
teste de séries alternadas, 728
Sistema de coordenadas, dextrogiro, 847
sinistrogiro, 847
Solução de uma equação diferencial, 1131
geral, 1132
particular, 1132
Soma, de séries infinitas, 704
de vetores, 787, 854
parcial, de séries infinitas, 702
seqüência de, 702
Stokes, George, 1109
Superfície, 850, 884
área de, 1045-1050
de nível de uma função, 914
de revolução, 886
eqüipotencial, 978
isotérmica, 978
quádrica, 889-895
central, 891

Tabela de integrais, F-3
Teorema da divergência de Gauss, 1119
no plano, 1106
Teorema de existência, 699
Teorema de Green, 1099-1112
Teorema de Stokes, 1122
no plano, 1109
para funções de duas variáveis, 988
Termos constantes, séries infinitas, 701-710
Termos de séries infinitas, 702
Teste(s)
para funções de duas variáveis, 987
da razão, 734
de comparação com limite, 717
de comparação, 716
de séries alternadas, 728
Trabalho, 800, 1083
Transformação, A-5
Tratriz, 809
Triedro móvel, 899
Trigonometria, fórmulas, F-2
Tripla ordenada, 847

Valor máximo de uma função, 984-997
absoluto de funções de duas variáveis, 988
relativo de funções de duas variáveis, 984
Valor mínimo de uma função, 984-997
absoluto de funções de duas variáveis, 988
relativo de funções de duas variáveis, 984
Variáveis, dependentes, 910
independentes, 910
Velocidade escalar no ar, 789
Velocidade escalar inicial, 836
Velocidade instantânea, 833
Velocidade escalar no solo, 789
Vetor(es), 784, 853
aceleração, 834, 900
componente normal de, 840
componente tangencial de, 840
análise, 784
ângulos de direção, 785, 853
ângulos entre, 796, 858
binormal, 899
binormal unitário, 899
campos, 1073-1081
co-senos diretores, 854
componentes de, 785, 799, 853
curvatura, 827, 899
de deslocamento, 800
diferença de, 789, 855
direção de, 785, 853
equação, 802, 896
existência de identidade aditiva para, 791
existência de identidade para a multiplicação por escalar, 791
existência do oposto para, 791
gradiente, 975, 978
independentes, 795, 861
lei associativa para, 791
lei comutativa para, 791, 796
lei distributiva para, 791, 796, 876
magnitude de, 785, 853
multiplicação por escalar, 790, 856
no espaço tridimensional, 853-862
no espaço, 792

base do vetor real, 792, 861
dimensão do vetor real, 792
no plano, 784-795
normal unitário, 821, 899
oposto de, 788, 855
ortogonais, 797, 858
paralelos, 797, 858
perpendiculares, 797
posição, 803, 900
produto escalar de, 795-802, 857
produto escalar triplo de, 876
produto vetorial de, 874-884
produto vetorial triplo de, 877
projeção escalar de, 798, 859
projeção, 799, 859
raio, 803
representação posicional, 785
resultante de, 788
soma de, 787, 854
tangente unitário, 821, 897
unitário, 792
velocidade, 833, 900
zero, 785, 853
Vibrações mecânicas, 1170

Wallis, John, XV
Weierstrass, Karl, XV
Wronskiano, 1159

ISBN 85-294-0206-5
9788529402062