Continuidade de uma função

Professor Santos Alberto Enriquez-Remigio

20 de outubro de 2022

Contínua em um ponto do domínio: não salto nesse

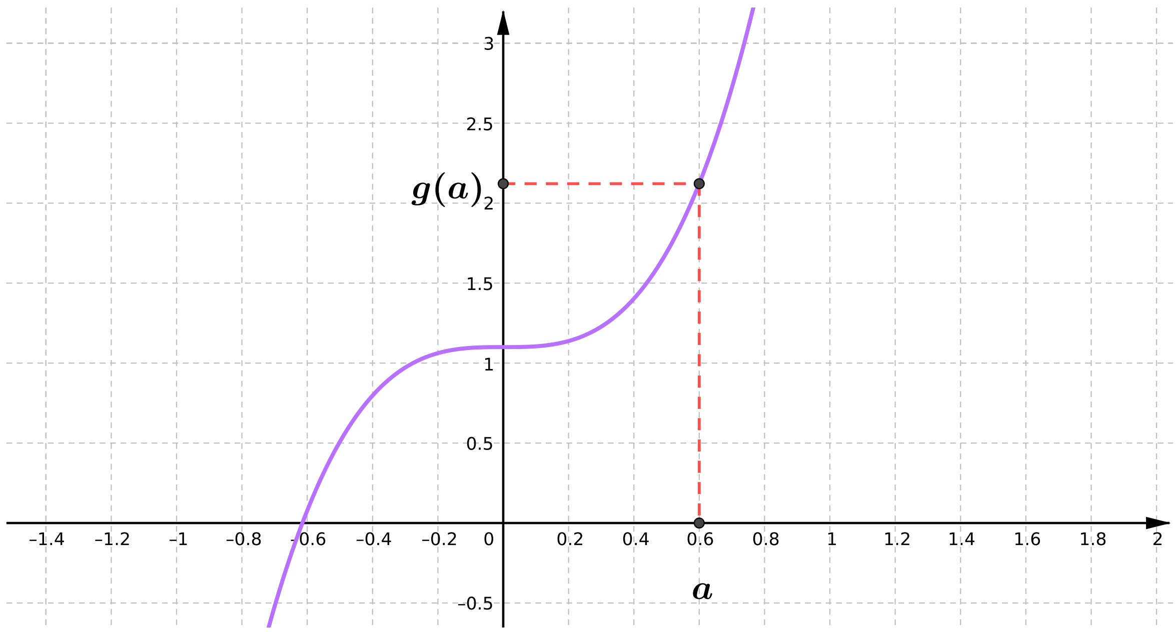


Figura 1: Função contínua em $x = a$.

Contínua em um ponto do domínio: não salto nesse

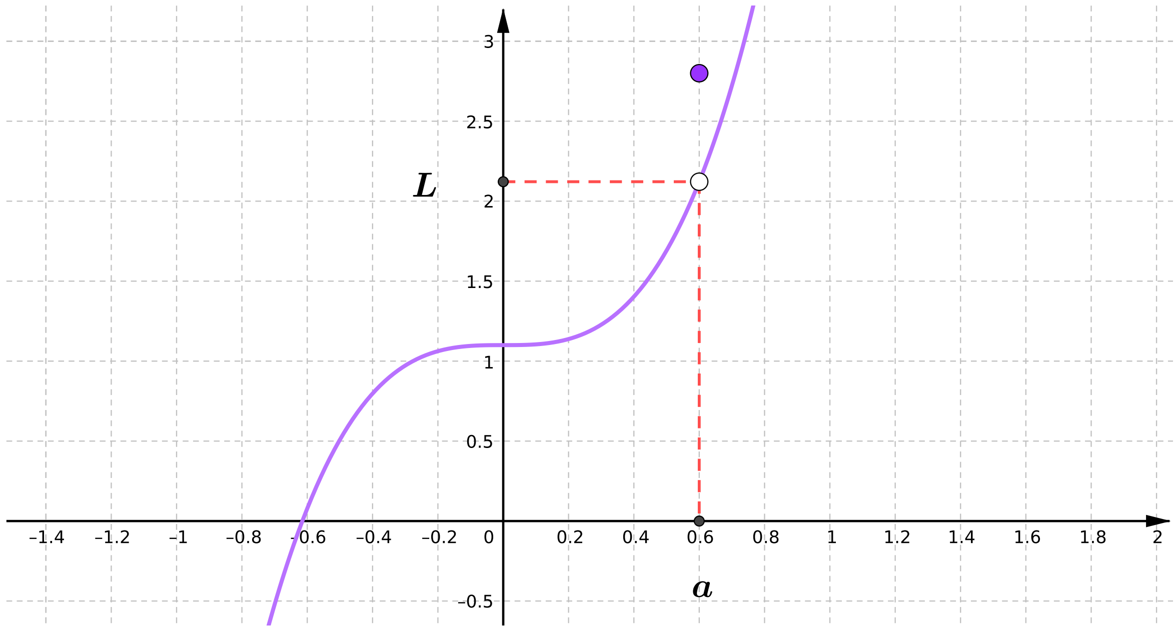


Figura 2: Função não contínua em $x = a$.

Contínua em um ponto do domínio: não salto nesse

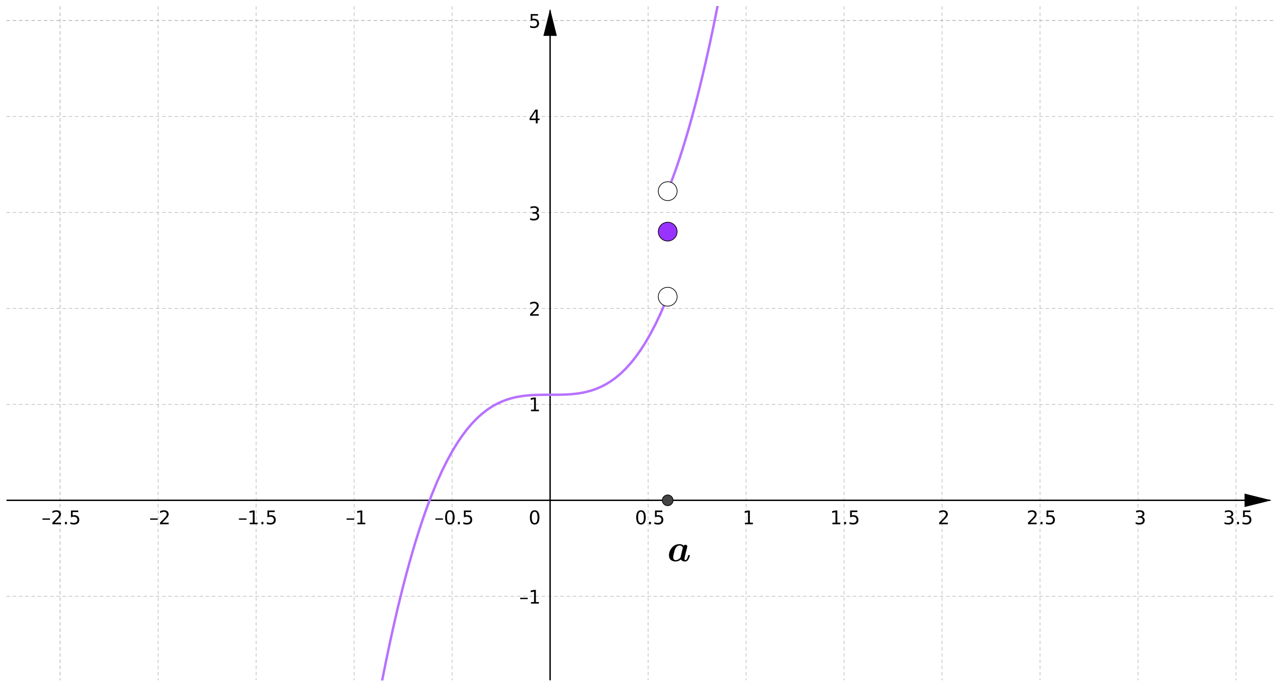


Figura 3: Função não contínua em $x = a$.

Definição 1 (Continuidade em um ponto).

Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(x)$ é definida em a;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A seguir, mostra-se a definição equivalente de continuidade usando a definição formal de limite.

Definição 2 (Usando δ e ϵ).

. Dizemos que f é contínua no ponto a de seu domínio se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ), tal que: $\forall\ x \in Domf$ com $|x - a| < \delta$ tem-se, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Observações

1. A definição de função contínua em $x = a$ é pontual, pois estuda-se o que acontece com a função quando x se aproxima de $a \in Dom\ f$;
2. A função pode ser descontínua em a, mas contínua em outro elemento de seu domínio.
3. O uso da primeira definição é mais prático.

Exemplo 3.

Prove que $f(x) = (3x + 1)$ é contínua em $a = 1$.

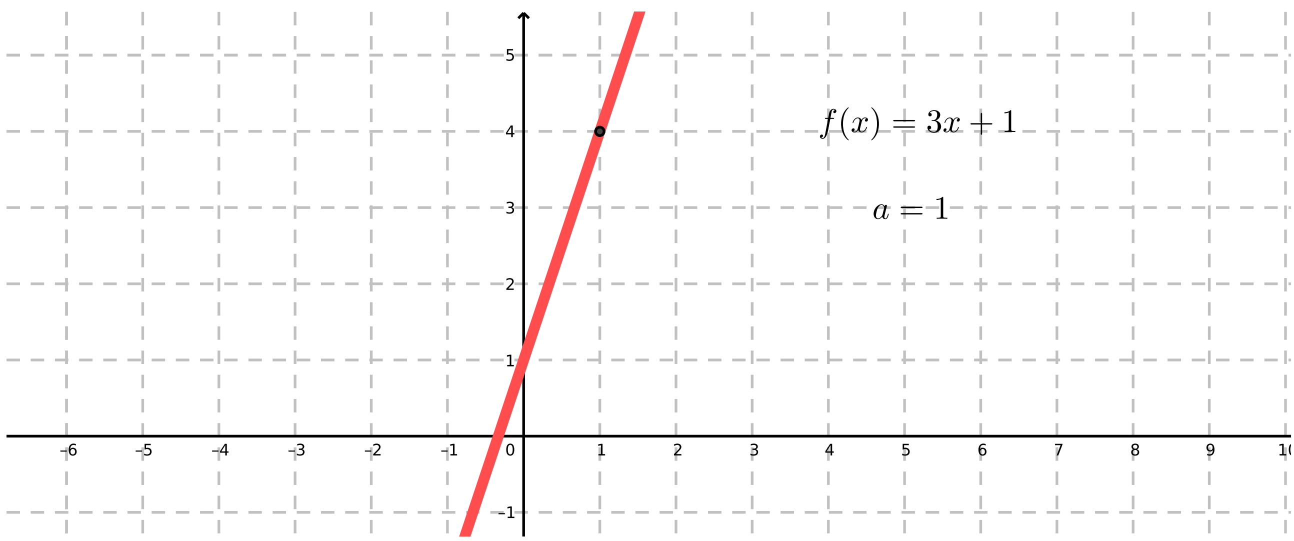
Solução:

(i) $a = 1 \in Dom\ f = \mathbb{R}$. Logo, f está definida em $a = 1$.

(ii) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x + 1) = 4$. Portanto, o $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.

(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1)$.

Portanto, f é contínua em $a = 1$.



Exemplo 4.

A função $f(x) = K$ (função constante) é contínua em todo $a \in \mathbb{R}$.

Solução: Temos que $Domf = \mathbb{R}$, e:

(i) f está definida em $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Existe $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = K = f(a)$

Portanto, f é contínua em todo $a \in \mathrm{Dom} f$.

Exemplo 5.

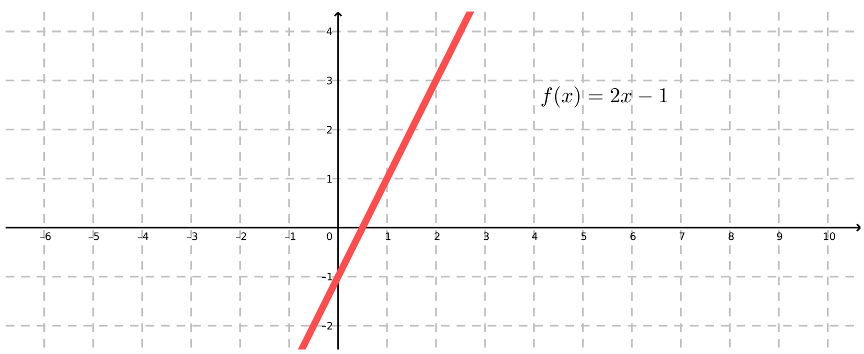
A função $f(x) = ax + b$, a e b constantes, é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. Seja $p \in \mathbb{R}$, então temos que $f(p) = ap + b$ e:

$$\lim_{x \to p} f(x) = ap + b = f(p)$$

Logo, f é contínua para todo $p \in \mathbb{R}$.

Na figura abaixo aparece a função $f(x) = 2x - 1$, veja que ela é contínua em qualquer valor x



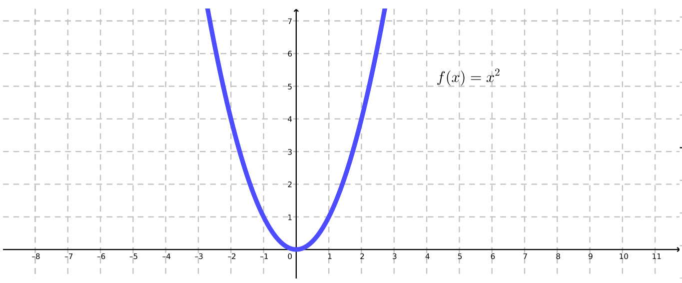
Exemplo 6.

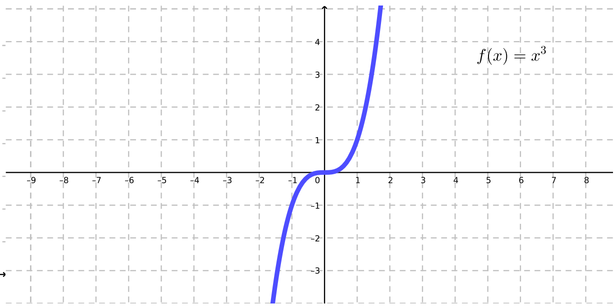
A função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução: Dom$f = \mathbb{R}$ e $\forall\ p \in$Dom$f = \mathbb{R}$, temos que $f(p) = p^n$ e:

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} x^n = p^n = f(p).$$

Logo, f é contínua para todo $p \in \mathbb{R}$.





Exemplo 7.

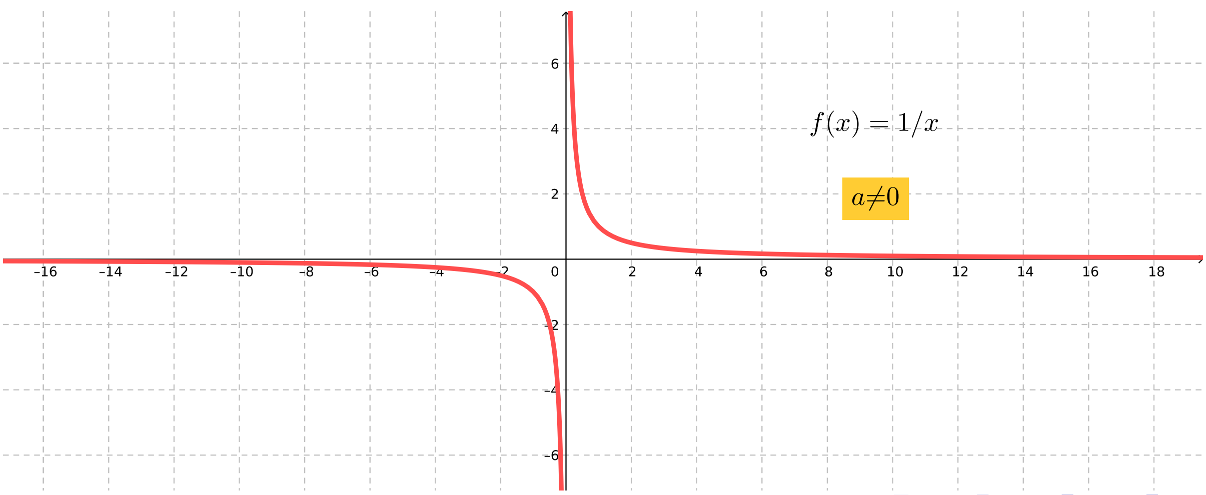
Prove que $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo $x = a \neq 0$.

Solução:

Seja $a \neq 0$, então existe $f(a) = \frac{1}{a}$. Também:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad = \quad f(a)$$

Logo, f é contínua em todo $a \neq 0$.



Exemplo 8.

Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (com $n \in \mathbb{N} - \{1\}$) é contínua para todo $x \in$Dom$f$.

Prova:

Se n é par, então Dom$f = [0, +\infty[$. Seja, $a \in$Dom$f$, então:

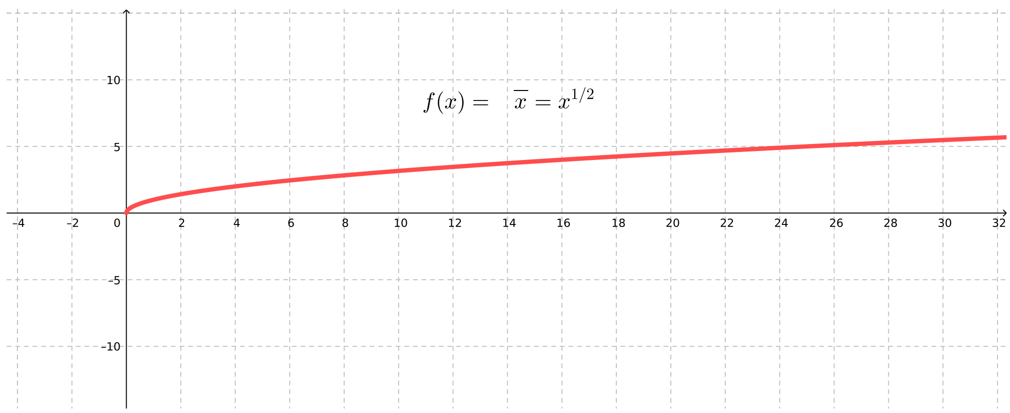
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} == \sqrt[n]{a} \quad = \quad f(a)$$

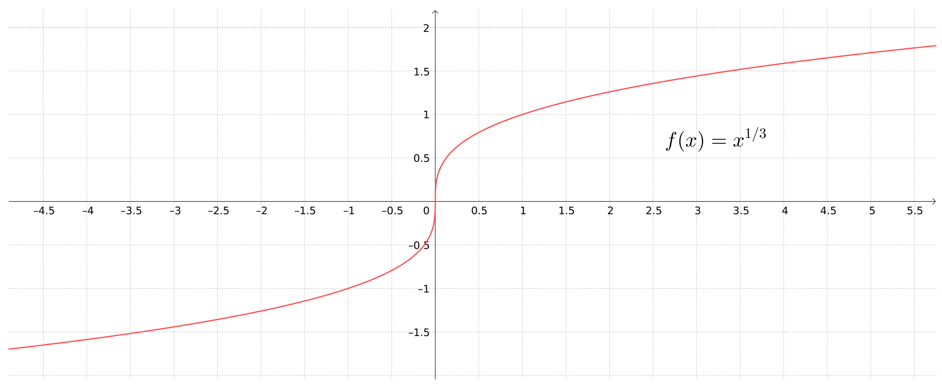
Logo, f é contínua em a.

Se n é ímpar, então Dom$f = \mathbb{R}$. Seja $a \in$Dom$f$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{a} \quad = \quad f(a)$$

Logo, f é contínua em a. Portanto, f é contínua em a.





Exemplo 9.

Seja $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

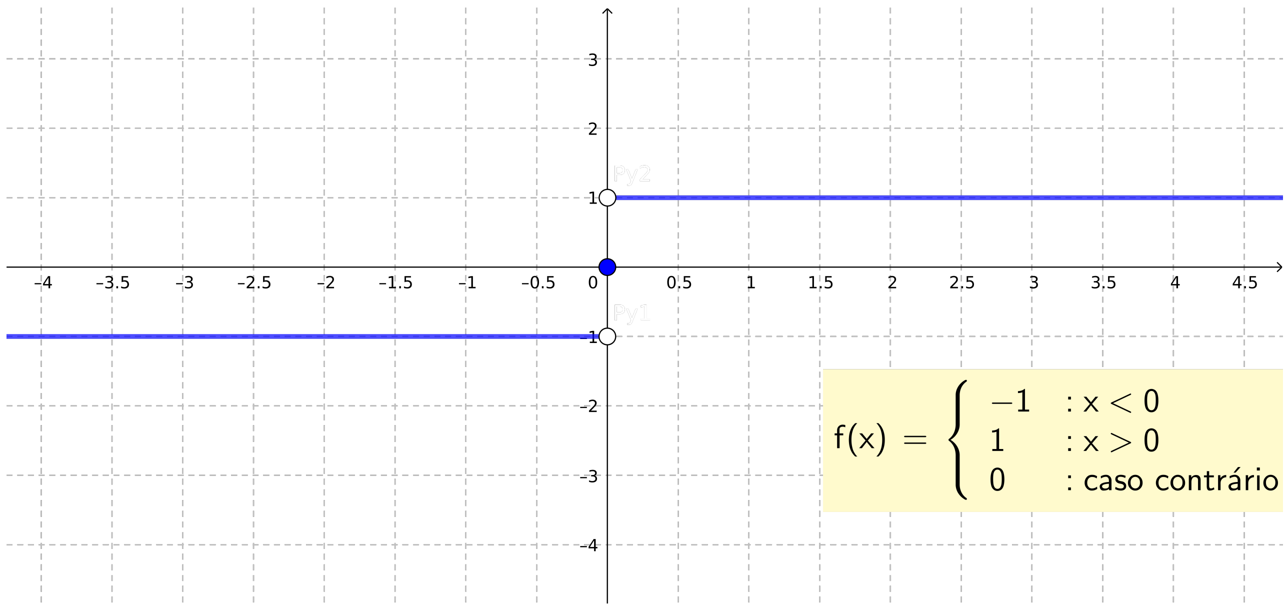
Mostre que f não é contínua em $a = 0$.
Solução:

1. $f(a) = f(0) = 0$, f está definida em $a = 0$;
2. $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Resposta: não!!! Pois:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(-1) &= -1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(1) &= 1 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Portanto, f não é contínua em $a = 0$.



Observação

1. Em alguns problemas pedem-se para encontrar valores de alguns parâmetros que definem a função para que esta seja contínua em um ponto dado $x = a$. Nesse caso, a nossa função deve satisfazer as três condições nesse ponto, estas são:
   (i) $f(x)$ deve estar definida em a;
   (ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;
   (iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   Aplicando-se as três condições encontramos os valores dos parâmetros.
2. Em outros problemas pedem-se para provar que a função é contínua, sabendo que ela está relacionada com outra. Neste caso, devemos de alguma forma usar as características da outra função e propriedades adicionais para provar que a nossa primeira função é contínua.

Exemplo 10.

Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ L, & x = 2 \end{cases}$ em $a = 2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x}, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$ em $a = 0$.

Solução:

(a)

(i) $f(2) = L$

(ii) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (\frac{x^2-4}{x-2}) = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$

Como desejamos que f seja contínua em $a = 2$, então deve acontecer que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} f(x) &= f(2) \\ 4 &= L \end{aligned}$$

Logo, $L = 4$.

(b)

(i) $f(0) = L$

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 2} (\frac{x^2-x}{x}) = \lim_{x\to 2} (\frac{x(x-1)}{x}) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{x} = -1$

Como desejamos que f seja contínua em $a = 0$, então deve acontecer que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= f(0) \\ -1 &= L \end{aligned}$$

Logo, $L = -1$.

Definição 11 (Continuidade no domínio de uma função).

Dizemos que f é contínua no seu domínio, Dom$f$, se f é contínua para todo $a \in$Dom$f$.

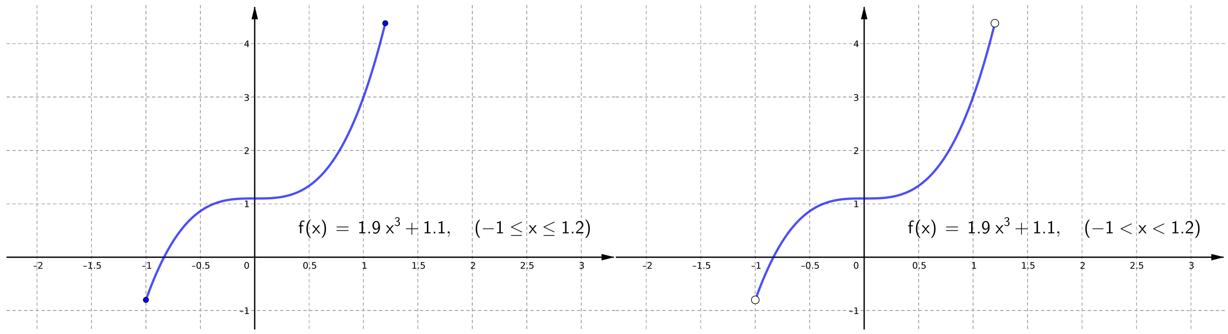


Figura 4: Duas funções contínuas em seus respectivos domínios.

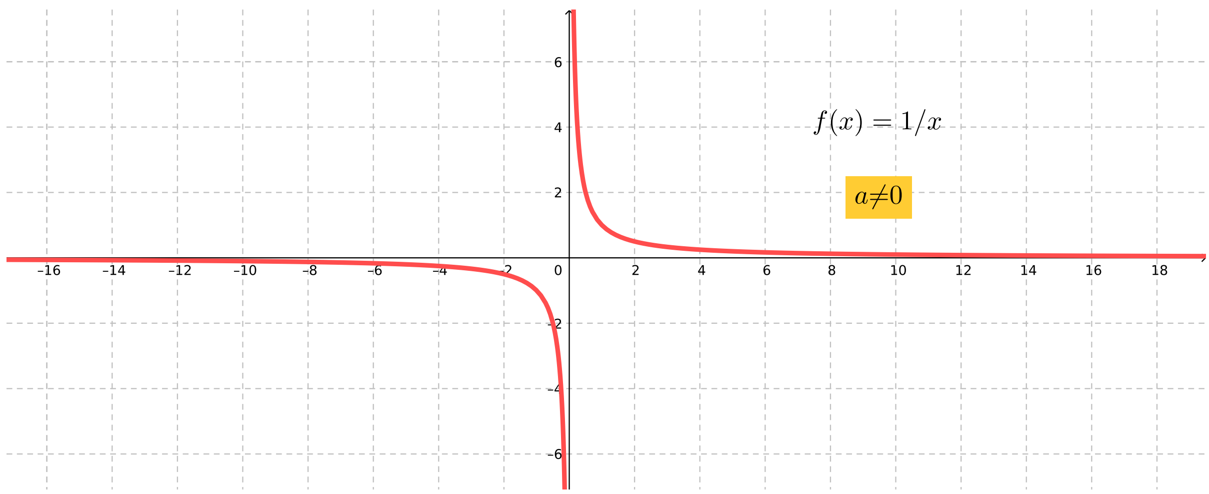


Figura 5: Função contínua em seu domínio $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

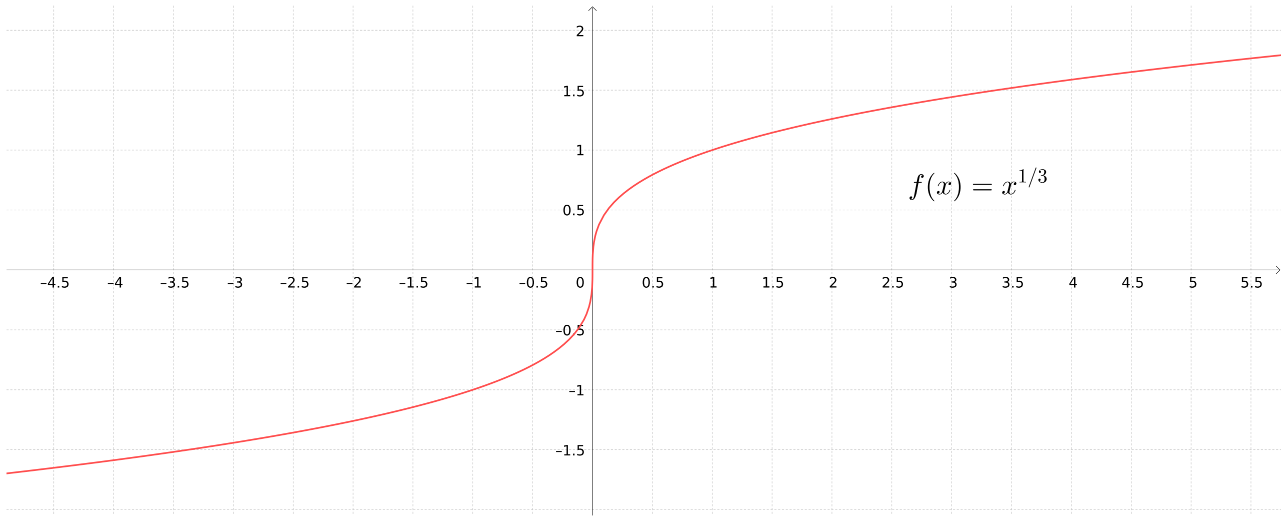


Figura 6: Função contínua em seu domínio $Dom\, f = \mathbb{R}$.

Resumindo: Exemplos de funções elementares contí

As seguintes funções elementares são contínuas em seus respectivos domínios:

1. $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes;
2. $f(x) = x^n$,onde $n \in \mathbb{N}$;
3. $f(x) = \sqrt{x}$;
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
5. $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde $n \in \mathbb{N}$ com $n > 3$;
6. $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. **Como saber se uma função é contínua em seu domínio?**
   - **Resposta:** Verificando-se a continuidade dela em cada ponto de seu domínio.
2. **Mas para provar que é contínua em um ponto do domínio, sempre devo aplicar a Definição 1?**
   - **Resposta:** Algumas vezes sim, mas em outras podem-se aplicar propriedades de funções contínuas?
3. **Como assim?**
   - **Resposta:** Você pode observar que a função dada é produto de operações entre outras funções contínuas simples e aplicar as seguintes propriedades:

Teorema 12 (Operações com funções contínuas).
Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então:

(i) $f + g$ *é contínua em* a;

(ii) $f - g$ *é contínua em* a;

(iii) fg *é contínua em* a;

(iv) $\frac{f}{g}$ *é contínua em* a*, desde que* $g(a) \neq 0$;

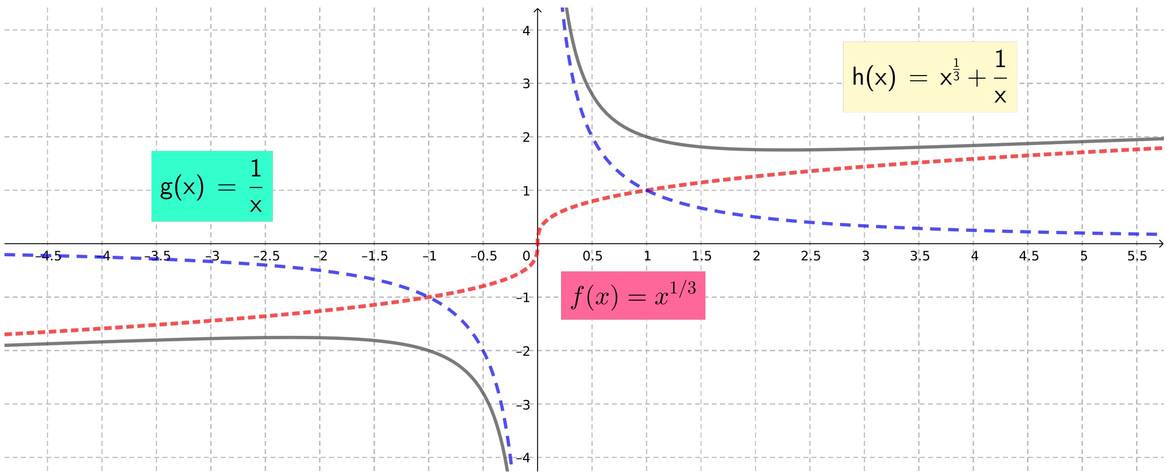


Figura 7: Função $h(x) = f(x) + g(x)$ contínua em $Dom\, h = \mathbb{R} - \{0\}$.

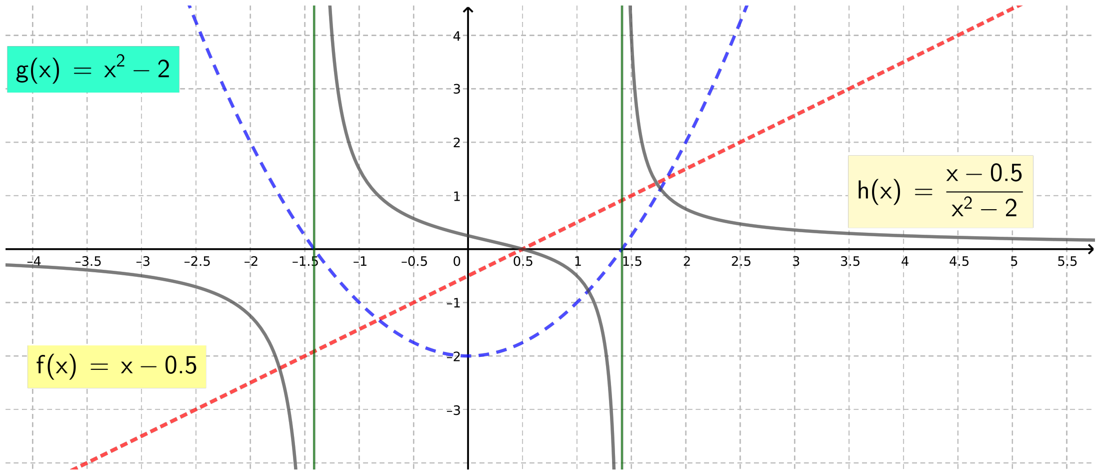


Figura 8: Função contínua $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, contínua em:
Dom $h = \mathbb{R} - \{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$.

Teorema 13.

Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *funções contínuas em* $x = a$*, então:*

1. $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ *é contínua em a;*
2. $(f_1 * f_2 * \cdots * f_n)$ *é contínua em a;*

Lembrando: Uma função racional é da forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde P e Q são dois polinômios. $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0\}$.

Teorema 14.

Temos que:

(i) *Uma função polinomial é contínua para todo número real;*
(ii) *Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.*

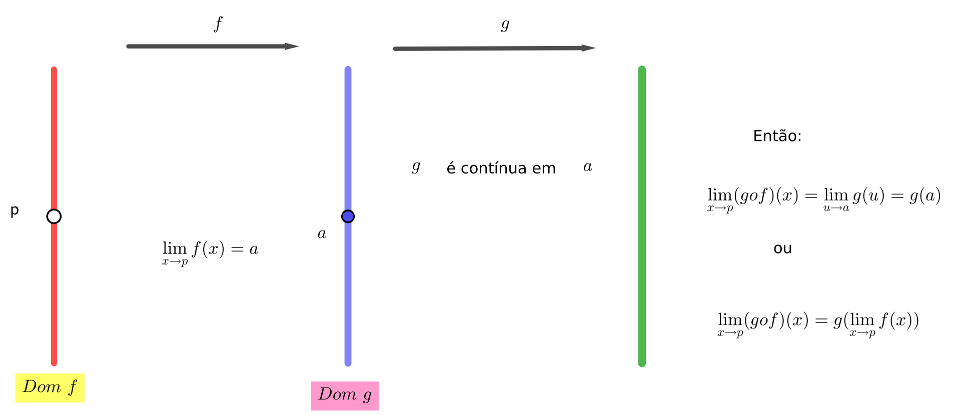
Teorema 15.

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então:

$$\lim_{x\to p}(g\circ f)(x) = \lim_{u\to a} g(u) = g(a)$$

ou

$$\lim_{x\to p}(g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to p} f(x))$$



Teorema 16.

Se f é contínua em p e g é contínua em $f(p)$, então a função composta $g\circ f$ é contínua no ponto p.