Integração por partes

10 de janeiro de 2023

Observação

A seguinte relação é verdadeira:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,$$

onde c é uma constante.

Exemplos 1.

As seguintes expressões são verdadeiras:

1. $\int \frac{d(x^2+1)}{dx} dx = x^2 + 1 + c$
2. $\int (u(x) + v(x))' dx = u(x) + v(x) + c$
3. $\int \frac{d[sen(x^2-x^3]}{dx} dx = sen(x^2 - x^3) + c.$

Observação

Sabemos que:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Daí:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

ou

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x)$$

Então:

$$u(x)v'(x)dx = \left[(u(x)v(x))' - v(x)u'(x)\right] dx$$

Logo, temos que:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int \left[(u(x)v(x))' - v(x)u'(x)\right] dx$$

Aplicando propriedade de integral indefinida da soma, resulta que:

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{du} = \int (u(x)v(x))'dx - \int v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{dv}$$

ou

$$\int u(x)dv = uv - \int vdu$$

Integração por partes

Baseia-se na relação acima, isto é:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int f(x)dx}_{\text{Integral complicada}} &= \int m(x)n(x)\,dx = \int u(x)dv \\ &= uv - \underbrace{\int vdu}_{\text{Integral simples}} \end{aligned}$$

Isto é:

$$\int f(x)dx = \int u(x)dv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Integração por partes: passos

Suponhamos que deseja-se calcular a seguinte integral:

$$\int f(x)dx,$$

e que o integrando $f(x)$ possa ser expressado como produto de duas funções $m(x)$ e $n(x)$ ($f(x) = m(x)n(x)$), onde a $\int n(x)\,dx$ seja fácil de calcular.
Então, os passos para o cálculo da integral

$$\int f(x)\,dx = \int m(x)n(x)\,dx,$$

são:

- P1: Faça

$$u = m(x) \quad e \quad dv = n(x)dx$$

O uso da fórmula (1) precisa das expressões de v e du. Logo, o passo seguinte é:

- P2: Calcule

$$\begin{aligned} du &= m'(x)dx \\ &e \\ v &= \int n(x)dx \end{aligned}$$

- P3: Determine $\int f(x)dx$ usando a seguinte relação:

$$\int f(x)\,dx = uv - \int v\,du$$

Observações

- A fórmula só é aplicável se $\int n(x)\,dx$ é fácil de se calcular.
- Verifique a resposta derivando a expressão obtida.

Exemplos

Calcular :

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int x \ln x \, dx$
3. $\int t \, e^{4t} \, dt$
4. $\int x \ln(3x) \, dx$
5. $\int x^2 \ln x \, dx$

Resolução dos exercícios

Exercícios

Utilizando o método de integração por partes calcule:

1) $\int t\, e^{2t}\, dt$

2) $\int \ln(x^2+1)\, dx$

3) $\int x^2 e^x\, dx$

4) $\int \ln(1-x^2)\, dx$

5) $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$

Resolução dos exercícios