

## GUÍA DE ESTUDIO I DE CALCULO NUMERICO (230-3114)

## PRELIMINARES MATEMATICOS

PROFESOR: EDGARD DECENA

1

## 1.1 REPASO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

En esta primera guía repasaremos algunos de los conceptos más importantes del cálculo que son esenciales en el estudio de los métodos numéricos. Además discutiremos el resultado más fundamental para aproximar funciones ó para hacer estimados de errores: el Teorema de Taylor. Veremos también otros resultados importantes como los Teoremas del Valor Medio para funciones e integrales y el Teorema del valor intermedio.

**Definición del límite de una función real.**

Sea  $f$  una función definida en un conjunto  $X$  de números reales, de tal forma que el conjunto  $X$  es el dominio de  $f$ . Si la función  $f$  tiende a  $L$  mientras  $x \in X$  tiende a  $x_0$  es porque para algún  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que se cumple  $|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ . Dicha relación expresa que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  tal como lo muestra la figura 1.

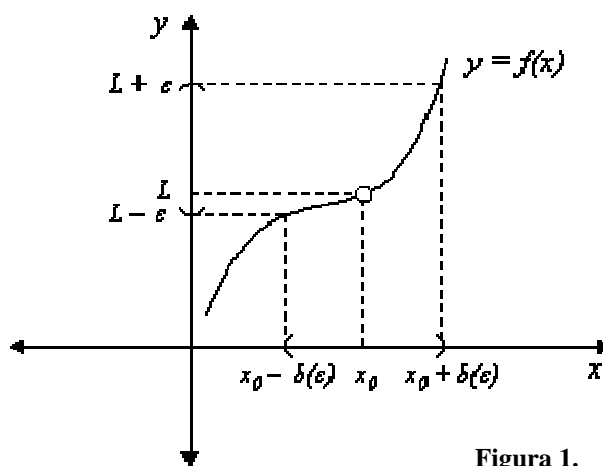


Figura 1.

**Definición de continuidad en un punto.**

Sea  $f$  una función definida en un conjunto  $X$  de números reales, de tal forma que el conjunto  $X$  es el dominio de  $f$ . Si se cumple que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  entonces se dice que  $f(x)$  es *continua* en  $x = x_0$ .

“Se supone que las funciones que consideramos cuando explicamos los métodos numéricos son continuas, ya que este es un requisito mínimo para un comportamiento predecible. Las funciones que no son continuas pueden omitir algunos puntos que son de interés, lo cual ocasiona problemas cuando tratamos de aproximar la solución de un problema...” [Burden y Faires (1998), p.3]

**Definición del límite de una sucesión.**

Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión infinita de números reales, se dice que el límite de la sucesión converge a  $x_0$  si dado algún  $\varepsilon > 0$  existe un entero positivo  $N(\varepsilon)$  tal que  $n > N(\varepsilon)$  implica que  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ . Dicha relación expresa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

**Definición de la derivabilidad en un punto.**

Sea  $f$  una función definida en un conjunto  $\mathbf{X}$  de números reales, de tal forma que el conjunto  $\mathbf{X}$  es el dominio de  $f$ . Si  $x_0 \in \mathbf{X}$ , y si el límite  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe, se dice entonces que  $f(x)$  es derivable en  $x = x_0$ . La derivada de  $f$  en  $x = x_0$  define la pendiente de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(x_0, f(x_0))$  tal y como lo muestra la figura 2.

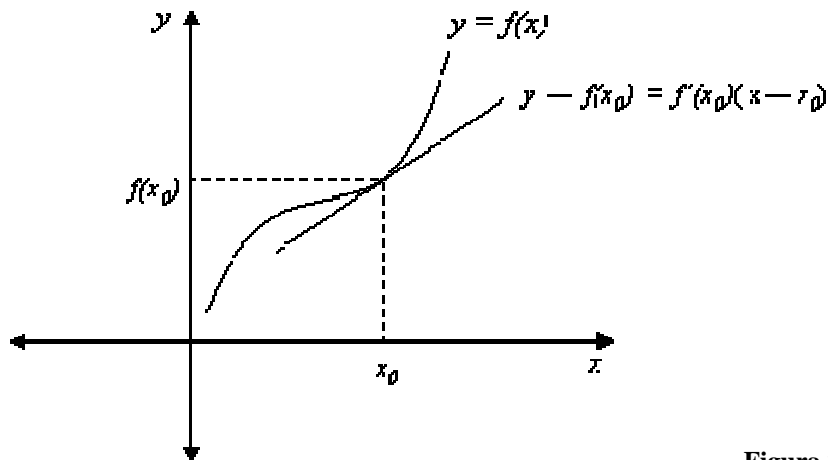


Figura 2.

**Teorema: Derivabilidad implica Continuidad.**

Si una función  $f(x)$  es derivable en  $x = x_0$  entonces  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$ .

**Teorema de Rolle.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , si  $f(a) = f(b)$  entonces existirá un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Gráficamente el Teorema de Rolle se ilustra en la figura 3 mediante dos casos.

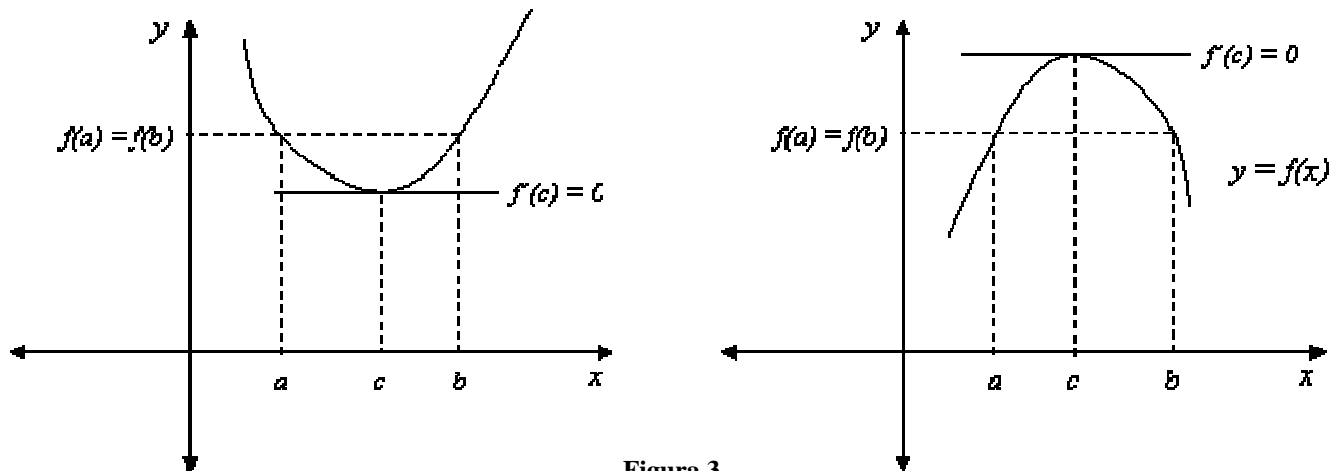


Figura 3.

**Teorema del Valor Medio.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existirá un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Gráficamente el Teorema del Valor Medio garantiza la existencia de una recta tangente a  $f(x)$ . Dicha recta tangente es paralela a toda recta secante a  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  tal y como lo ilustra en la figura 4.

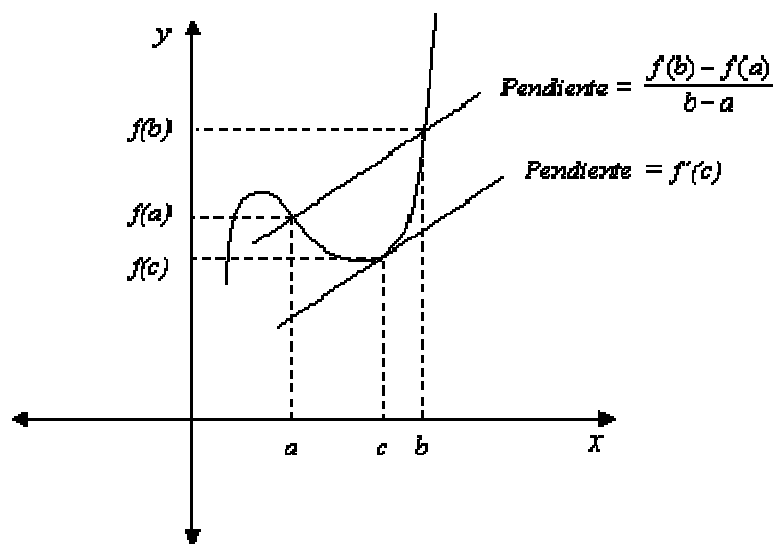


Figura 4.

**Teorema del Valor Extremo.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  entonces existirá un número  $c_1$  y  $c_2$  en  $[a, b]$  con  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ . Si además  $f(x)$  es derivable en  $(a, b)$  entonces  $c_1$  y  $c_2$  estarán en los extremos de  $[a, b]$  o  $f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0$  o donde  $f'(c_1) = \text{No definida}, f'(c_2) = \text{No definida}$ .

**La Integral de Riemann.**

Sea  $f(x)$  una función definida en  $[a, b]$ , si se hace una partición del intervalo  $[a, b]$  tal que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  entonces se define la Integral de Riemann como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

para todo  $c_i$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , y  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Si además  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces podemos elegir una partición de intervalos de igual longitud dado por:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Así, la Integral de Riemann queda definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

**Teorema del Valor Medio para Integrales.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

y el valor promedio de  $f(x)$  en  $[a, b]$  viene dado por:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

**Teorema de Rolle generalizado.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y  $n$  veces derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(x)$  es cero en  $n$  números distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces existirá un número  $c$  en  $(a, b)$  con  $f^{(n-1)}(c) = 0$ .

**Teorema del Valor Intermedio.**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  si  $f(a) \cdot f(b) < 0$  entonces existe un número  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

## 1.2 ARITMÉTICA DEL COMPUTADOR Y EL ERROR DE REDONDEO

El empleo de las computadoras en la ejecución de métodos numéricos presenta algunas dificultades. Las computadoras tienen un espacio finito de almacenamiento, por lo que números como  $\frac{2}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $7\frac{1}{3}$ ,  $\pi$ , etc. no se almacenan de forma exacta. Las computadoras emplean lo que se denomina *aritmética de punto flotante*. En este sistema, cualquier número  $x$  se presenta en la forma:

$$x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \times 10^n \quad (1)$$

donde  $d_1, d_2, d_3 \dots d_k$ , son enteros positivos de un solo dígito y  $n$  es un entero. A todo número escrito de esa manera se le llama *número de punto flotante*. En la ecuación (1) el número  $\pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k$  se llama *mantisa*, y  $n$  se llama *exponente*. Al número  $k$  se le llama *número de dígitos significativos* de la expresión.

Cada computadora tiene una capacidad distinta en cuanto al intervalo de números expresables en la forma de punto flotante. Los números en una computadora se representan en forma binaria, en vez de hacerlo en forma decimal. Por ejemplo, una computadora que utilice 28 dígitos binarios puede representar  $2^{28} = 268.435.546$  números distintos de ocho dígitos; en este caso el número de cifras significativas es  $k = 8$ .

Ejemplo: Los siguientes números están expresados en punto flotante con cuatro cifras significativas.

a)  $\frac{1}{4} \rightarrow +0,2500 \times 10^0$

b)  $2378 \rightarrow +0,2375 \times 10^4$

c)  $-0,000816 \rightarrow -0,8160 \times 10^{-3}$

d)  $83,27 \rightarrow 0,8327 \times 10^2$

Si el número de dígitos significativos de las computadoras fuese ilimitado, no habría problema alguno. Sin embargo, cada vez que se introduce un número en la computadora los errores comienzan a acumularse. De esta forma, los *errores numéricos* se generan con el uso de aproximaciones computacionales al representar cantidades y/o operaciones. Esto da lugar a dos tipos de errores:

$$\text{Errores} \left\{ \begin{array}{l} \text{Truncamiento.} \\ \text{Redondeo.} \end{array} \right.$$

Los **errores de truncamiento**, resultan de representar aproximadamente un procedimiento matemático exacto. Todos los dígitos significativos después del  $k$ -ésimo simplemente se “cortan”. Por ejemplo, si se utiliza truncamiento,  $\frac{2}{3} = 0,666666\dots$  se almacena en un computador (si  $k = 8$ ) como  $\frac{2}{3} = 0,66666666 \times 10^0$ .

Los **errores de redondeo** resultan de representar aproximadamente números que son exactos. Si  $d_{k+1} \geq 5$  entonces se suma 1 a  $d_k$  y el número resultante se trunca. Por ejemplo, con redondeo (y  $k = 8$ )  $\frac{2}{3}$  se almacena como  $0,66666667 \times 10^0$ .

Es fácil dar un ejemplo de un proceso en el que el error de ajuste puede ser muy grande. Supóngase que se desea calcular  $f(x) = \frac{1}{x - 0,66666665}$ . Cuando  $x = \frac{2}{3}$ , si la computadora trunca, entonces  $x = 0,66666666$  y  $f(x) = 10 \times 10^7$ . si la computadora redondea entonces  $x = 0,66666667$  y  $f(x) = 5 \times 10^7$ . Como puede verse la diferencia es enorme. La respuesta correcta es  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\frac{2}{3} - 0,66666665} = 6 \cdot 10^7$ .

Cualquiera que sea el tipo de error puede afirmarse que:

$$\text{valor verdadero} = \text{valor aproximado} + \text{error}$$

**Definición.** Definimos el **error absoluto** como:

$$E_v = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

Esta definición de error tiene un pequeño defecto, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

Al medir la longitud de una varilla para construcción se obtiene el resultado aproximado de 19.999 cms. mientras que al medir la longitud de un clavo, se obtiene el resultado de 9 cms. Suponiendo que los valores verdaderos de la varilla y el clavo son de 20.000 cms. y 10 cms. respectivamente, calcular el error absoluto en ambos casos.

*Solución.* Tenemos los siguientes resultados:

Para el caso de la varilla, el error absoluto se calcula como:

$$E_v = 20,000 - 19,999 = 1cm$$

Para el caso del clavo, el error absoluto se calcula como:

$$E_v = 10 - 9 = 1cm$$

En ambos casos, el error absoluto es igual!, pero obviamente tiene mayor trascendencia el error en el caso del clavo que en el caso de la varilla, es decir, necesitamos comparar el error absoluto contra el valor verdadero y esto da lugar a la siguiente definición.

**Definición.** Definimos el **error relativo** como sigue:

$$E_r = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor verdadero}}$$

Esto es,

$$E_r = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}}$$

Y también se define el **error relativo porcentual**, como sigue:

$$\epsilon_v = E_r \times 100\%$$

Es decir,

$$\epsilon_v = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} \times 100\%$$

De hecho el error que más usamos es este último, ya que nos da una idea en tanto por ciento del error que se está cometiendo.

Por ejemplo, en el caso de la varilla el error relativo porcentual es:

$$\epsilon_v = \frac{1}{20,000} \times 100\% = 0.005\%$$

Mientras que en el caso del clavo, el error relativo porcentual es:

$$\epsilon_v = \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$$

Podemos observar, que el error relativo porcentual refleja mejor la gravedad o no gravedad del error que se está cometiendo. Es claro, que en el caso de la varilla no es trascendente ya que representa solamente un 0.005% con respecto al valor verdadero, mientras que en el caso del clavo, el error si es representativo ya que es del 10% del valor verdadero.

Finalmente, mencionaremos que un proceso de aproximación puede detenerse cuando el valor absoluto del error relativo porcentual es menor que una cierta cota, fijada de antemano.

Sin embargo, todavía tenemos un pequeño defecto en nuestro análisis del error. Los métodos numéricos se aplican en realidad, a problemas que no se pueden resolver analíticamente; por lo tanto, en una situación real, desconoceremos el valor verdadero de la solución al problema; luego entonces estaremos imposibilitados de calcular el error relativo porcentual.

La forma de resolver este problema es pensar que para obtener una cierta aproximación a un valor, tuvimos que haber obtenido una aproximación anterior al mismo valor. Una vez calculada la nueva aproximación procedemos a calcular otra aproximación al mismo valor y así sucesivamente. Si el método realmente converge a un resultado (que esperamos sea a la solución del problema), todas estas aproximaciones se estarán aproximando entre sí y al valor al cual convergen.

**Definición.** Definimos el *error aproximado porcentual*, como sigue:

$$\epsilon_a = \frac{\text{aprox. actual} - \text{aprox. previa}}{\text{aprox. actual}} \times 100\%$$

Como mencionamos anteriormente, el proceso se detiene cuando se ha logrado disminuir el valor absoluto del error aproximado porcentual hasta un cierto rango fijado de antemano. Esto es, cuando

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s$$

Se puede probar que si tomamos  $\epsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n} (\%)$  entonces podemos tener la seguridad de que la aproximación ó resultado tiene al menos  $n$  cifras significativas, es decir, posee al menos  $n$  dígitos confiables.

### Ejemplo.

Usar el siguiente resultado de series,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

para aproximar el numero irracional  $e$  hasta 4 cifras significativas.

*Solución.* Primero calculamos el valor de  $\epsilon_s$  como sigue:

$$\epsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n} (\%) = 0.5 \times 10^{2-4} = 0.005\%$$

En seguida, usamos la serie, agregando un término cada vez, para obtener nuevas aproximaciones hasta que se logre que  $|\epsilon_a| < 0.0005\%$ .

En el primer paso, tenemos simplemente un término:

$$e \approx \frac{1}{0!} = 1$$



En el segundo paso, tenemos la suma de dos términos:

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$$

Aquí, podemos calcular el primer error aproximado:

$$\epsilon_a = \frac{\text{actual} - \text{previa}}{\text{actual}} \times 100\% = \frac{2 - 1}{2} \times 100\% = 50\%$$

Seguimos agregando términos de la serie puesto que no se ha cumplido el objetivo:

Tenemos que,

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5$$

Y calculamos el error aproximado correspondiente:

$$\epsilon_a = \frac{2.5 - 2}{2.5} \times 100\% = 20\%$$

El proceso continua hasta lograr la meta. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

# términos	Aprox. al valor $e$	Error aproximado
1	1	
2	2	50%
3	2.5	20%
4	2.666666667	6.25%
5	2.708333333	1.54%
6	2.716666667	0.307%
7	2.718055556	0.051%
8	2.718253968	0.007%
9	2.718278770	0.0009%

Así pues, el resultado que se obtiene es:  $e \approx 2.718278770$ .

Que en realidad tiene 8 cifras significativas. La cota impuesta por  $\epsilon_n$ , nos asegura que tendremos al menos  $n$  cifras significativas; en este ejemplo, obtuvimos 4 cifras significativas más.

### 1.3 LA SERIE DE TAYLOR Y EL ERROR DE TRUNCAMIENTO

Un problema común es el de evaluar una función  $f(x)$  en un argumento  $x = a$  dado. Aunque esto parece un problema sencillo, la función  $f$  podría ser desconocida ó complicada para evaluar. Lo que buscamos pues es aproximar a  $f$  con un polinomio  $P$  que sea más "fácil" de evaluar que  $f$ . Los polinomios de Taylor son una forma de hacer esto aunque veremos otras alternativas más adelante.

Polinomio de Taylor de grado uno: Suponga que conocemos  $f(a)$  y  $f'(a)$ . Queremos hallar un polinomio  $p_1(x)$  tal que  $p_1(a) = f(a)$ ,  $p_1'(a) = f'(a)$ . Sabemos que  $p_1(x) = a_1 + a_2x$  (¿por qué?) de modo que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2x = p_1(a) = f(a) \\ a_2 = p_1'(a) = f'(a) \end{cases}$$

de donde obtenemos que  $p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  lo que se conoce como el polinomio de Taylor de grado uno para  $f$  en  $x = a$ .

Polinomio de Taylor de grado dos: De igual forma, si conocemos  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $f''(a)$  podemos construir un polinomio de grado dos  $p_2(x)$  tal que  $p_2(a) = f(a)$ ,  $p_2'(a) = f'(a)$ ,  $p_2''(a) = f''(a)$ . Trabajando como arriba obtenemos que

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (1/2)(x-a)^2 f''(a)$$

lo que se conoce como el polinomio de Taylor de grado dos para  $f$  en  $x = a$ .

En general si  $f(a)$ ,  $f'(a)$ , ...,  $f^{(n)}(a)$  son conocidas, se puede demostrar que el polinomio de grado a lo más  $n$  que cumple con las condiciones  $p_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ ,  $0 \leq j \leq n$  esta dado por:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

lo que se conoce como el polinomio de Taylor de grado a lo más  $n$  para  $f$  en  $x=a$ . Recuerde aquí que  $j!$  denota el factorial de  $j$  y se define en forma recursiva por:

$$j! = \begin{cases} 1 & , \quad j = 0 \\ j(j-1)! & , \quad j > 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 1:** Considere la función  $f(x)=1/(1+x)$  y tomemos  $a=0$ . Entonces  $f'(x)=-(1+x)^{-2}$ ,  $f''(x)=2(1+x)^{-3}$ ,  $f^{(3)}(x)=-2(3)(1+x)^{-4}$ , de donde podemos concluir en forma inductiva que:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

Tenemos ahora que:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (x-0)^j = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j!}{j!} x^j = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

En particular:

$$p_1(x) = 1 - x, \quad p_2(x) = 1 - x + x^2$$

**Teorema:** Suponga que  $f \in C^{n+1}(\alpha, \beta)$  y sea  $a \in (\alpha, \beta)$ . Sea  $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$  el error de truncamiento al aproximar  $f$  con  $p_n$ . Entonces:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad x \in (\alpha, \beta)$$

donde  $c_x$  es un número entre  $a$  y  $x$ .

**Ejemplo 2:** Considere la función  $f(x)=e^{2x}$  y tomamos nuevamente  $a = 0$ . Aquí  $f^{(j)}(x)=2^j e^{2x}$  para toda  $j \geq 0$ . Así que:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j!} x^j = 1 + 2x + 2x^2 + \dots + \frac{2^n}{n!} x^n$$

El error de truncamiento está dado por:

$$R_n(x) = \frac{2^{n+1} e^{c_x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

donde  $c_x$  está entre cero y  $x$ . El caso especial  $x = 1/2$  nos provee de una fórmula para aproximar el número "e":

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Note que:

$$|R_n(\frac{1}{2})| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

donde usamos que como  $c$  esta entre cero y  $\frac{1}{2}$ , entonces  $e^c < e < 3$ .

#### 1.4 ALGORITMOS, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

Tal y como lo define Burden y Faires (1998) “Un algoritmo es un procedimiento que describe de manera inequívoca una serie finita de pasos a seguirse en un orden determinado. Su finalidad es implantar un procedimiento para resolver un problema o aproximar una posible solución.” [p.30]

Como lo muestra la figura 5, todo algoritmo numérico puede estructurarse de la siguiente manera:

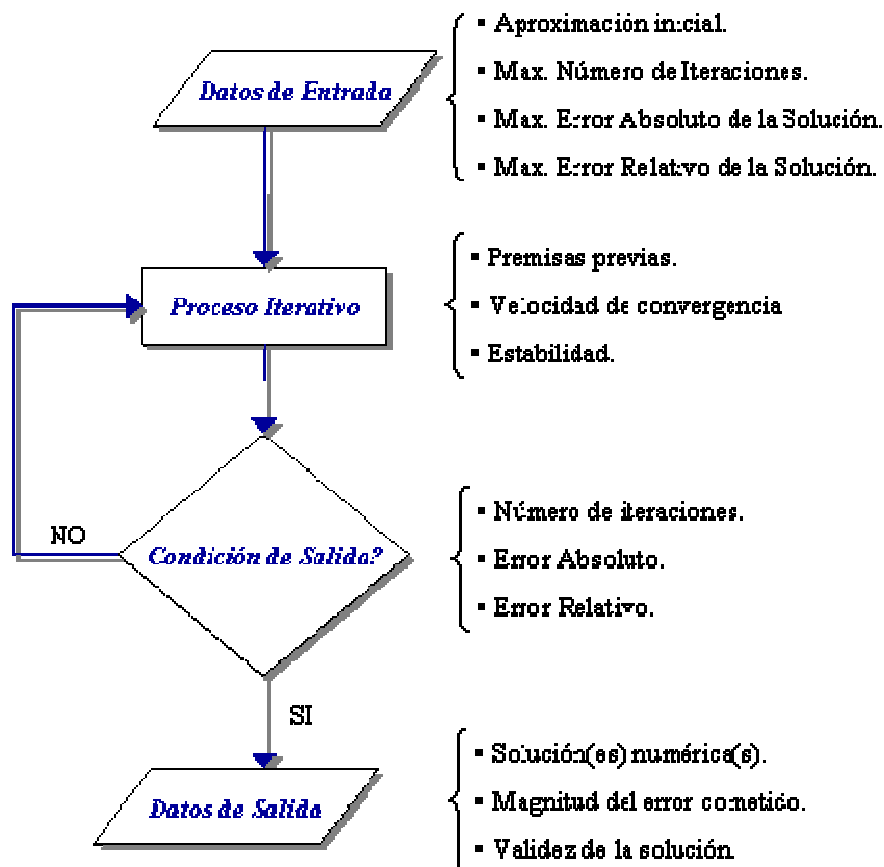


Figura 5.

**Datos de entrada:** algunos algoritmos numéricos requieren de una aproximación inicial de la solución a fin de generar una sucesión de convergencia. Es necesario proveer al algoritmo de algún criterio de parada como el máximo error absoluto de la solución, el máximo error relativo de la solución y/o el número de iteraciones. Como lo hemos visto, el error relativo es la medida más adecuada para cuantificar la brecha

entre una aproximación y el valor real. El error relativo y el máximo número de iteraciones son usadas conjuntamente como criterio de parada de todo algoritmo numérico.

**Proceso Iterativo:** todo proceso iterativo de análisis numérico tiene premisas previas que deben cumplirse y validarse para garantizar la convergencia. Por ejemplo, la mayoría de las funciones que se emplean en el cálculo numérico se suponen continuas (véase continuidad). Así mismo, la bondad de un algoritmo numérico puede determinarse por dos medidas fundamentales: la *velocidad de convergencia* y la *estabilidad* (cuantificación del error numérico).

**Condición de Salida:** ya sea mediante el número de iteraciones, el error absoluto, el error relativo o el no cumplimiento de las premisas del proceso iterativo; debe explicitarse la(s) condición(es) de salida del algoritmo a fin de evitar bucles infinitos y/o desbordamiento de la memoria.

**Datos de Salida:** los datos de salida son la(s) solución(es) del algoritmo numérico, en donde se tratará de cuantificar en lo posible la magnitud del error cometido y certificar la validez de la(s) solución(es) obtenida(s).

Dos cuestiones son de vital importancia a la hora de medir la bondad de un método numérico: la *velocidad de convergencia* y la *estabilidad*.

**La velocidad de convergencia** mide qué tan rápido se aproxima la sucesión de aproximaciones de un algoritmo numérico a la solución verdadera. Así, si la solución de un problema es  $x$  y el método numérico que se este empleando da valores  $x_n$  que se aproximan sucesivamente, entonces el método converge si, en teoría,  $x_n$  se aproxima a  $x$  conforme aumenta el valor de  $n$ . Esta de definición puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera: Sea  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión convergente a cero y  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión convergente a  $\alpha$  si existe una constante  $K > 0$  tal que:

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n| \quad \text{para el valor más alto de } n,$$

entonces diremos que  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\alpha$  con una **rapidez de convergencia**  $O(\beta_n)$ . (Esta expresión de lee “O de  $\beta_n$ ”). Esta situación se indica escribiendo  $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ ; lo cual quiere decir que “ $\alpha_n$  tiende a  $\alpha$  tan rápido como  $\beta_n$  tiende a cero.” Normalmente se toma  $\beta_n = \frac{1}{n^p}$  para algún número  $p > 0$ , de modo

$$\text{que } \alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

**La estabilidad** mide la *sensibilidad* del método a pequeños cambios en los datos iniciales. Un algoritmo se dice que es *estable* si para pequeños cambios en los datos iniciales genera cambios igualmente pequeños en sus resultados. Contrariamente, un algoritmo se dice que es *inestable* si dado pequeños cambios en los datos iniciales genera cambios sustanciales en sus soluciones.

Es de suponer que el grado de estabilidad de un algoritmo se relaciona directamente con la magnitud del error numérico.

Supongamos que  $E_n$  representa la magnitud de un error cometido después de  $n$  operaciones subsecuentes. Si  $E_n \approx CnE_0$ , donde  $C$  es una constante independiente de  $n$ , se dice que el crecimiento del error es **lineal**. Si  $E_n \approx C^n E_0$ , para alguna  $C > 1$ , el crecimiento del error será **exponencial**. El crecimiento lineal del error es generalmente inevitable y cuando  $C$  y  $E_0$  son pequeños los resultados son aceptables. Un algoritmo será estable si tiene un crecimiento lineal del error. Asimismo, Un algoritmo será inestable si tiene un crecimiento exponencial del error.

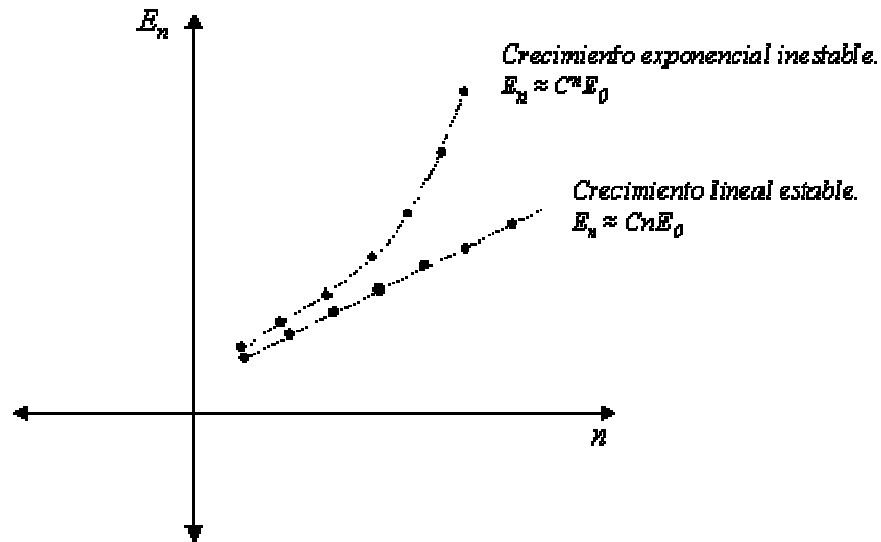


Figura 6.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1.