

GUÍA DE ESTUDIO VI DE CALCULO NUMERICO (230-3114)

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PROFESOR: EDGARD DECENA

6

ECUACIONES DIFERENCIALES

En esta guía de estudio haremos un breve estudio de los métodos numéricos básicos que se usan para aproximar soluciones de algunas ecuaciones diferenciales.

Recordamos rápidamente, que una ecuación diferencial (ordinaria) es aquella que involucra una variable independiente, una variable dependiente y la derivada (ó derivadas) de esta última. En una ecuación diferencial, la incógnita es la variable dependiente y se espera encontrarla como función de la variable independiente, de tal forma que si se sustituye dicha variable dependiente, así como las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, la igualdad que resulta es verdadera.

De cursos anteriores de ecuaciones diferenciales, sabemos que en general, existen una infinidad de funciones (curvas) que resuelven una misma ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación:

$$y' = y$$

tiene como solución general:

$$y = c e^x$$

donde c es una constante arbitraria que puede ser cualquier número real (y de aquí la infinidad de curvas solución que mencionamos arriba).

En este curso, estudiaremos solamente ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ es una función de dos variables.

Cuando se desea que la curva solución pase por algún punto específico, digamos $y(x_0) = y_0$, entonces se dice que se trata de una ecuación diferencial con una condición inicial dada. Así, estudiaremos ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Obviamente, la importancia de los métodos numéricos radica en la aparición de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse por métodos tradicionales, y de ahí la necesidad de implementar algún método de aproximación.

Veremos tres métodos numéricos:

- El método de Euler.
- El método de Euler mejorado.
- El método de Runge-Kutta de orden 4.

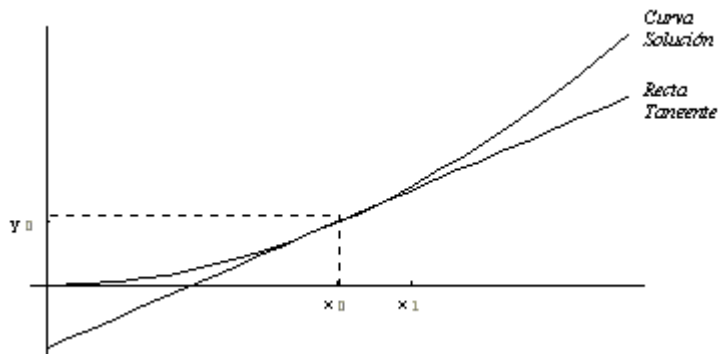
En todos estos métodos se busca aproximar el valor $y(x_1)$ donde x_1 es un valor cercano a x_0 (el de la condición inicial dada).

Comencemos con el primer método que como siempre, no es el más exacto, pero si el más sencillo y simple de explicar, así como el que marca la pauta para desarrollar los otros métodos.

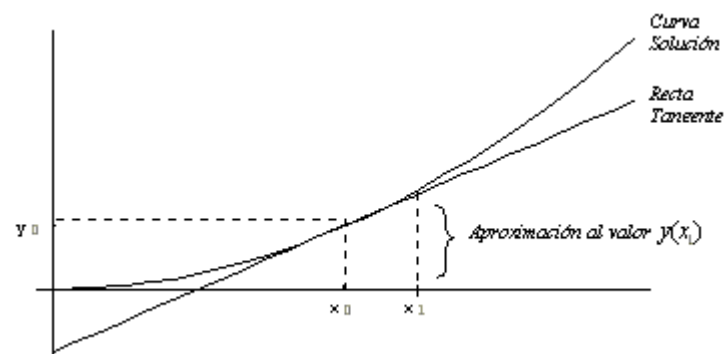
MÉTODO DE EULER

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0) . De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y' \big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0 , y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

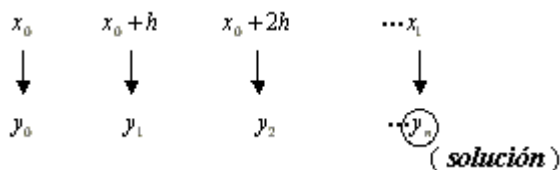
$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\frac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:



Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1) , y por lo tanto, si sustituímos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h .

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

Solución Analítica.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln |y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Solución Numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la fórmula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + h &= 0.1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) &= 1 + 0.1[2(0)(1)] &= 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 &= x_1 + h &= 0.2 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) &= 1 + 0.1[2(0.1)(1)] &= 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

N	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_r| = \left| \frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\% \right| = 5.42\%$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + h &= 1.1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) &= 2 + 0.1[1^2 + 0.5(2)^2] &= 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$

MÉTODO DE EULER MEJORADO

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

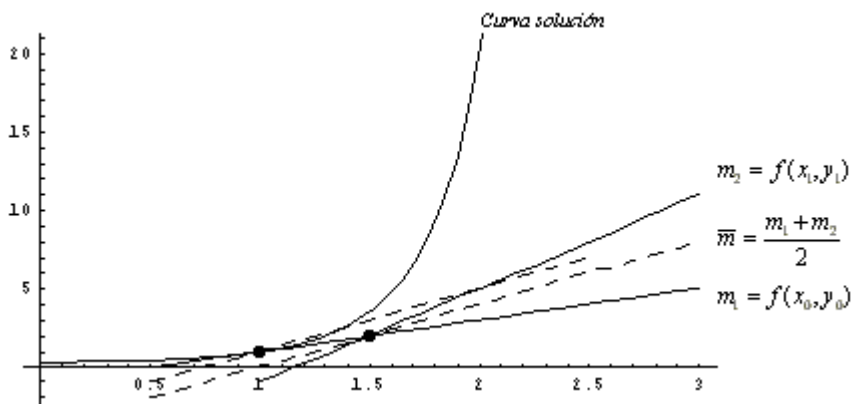
La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \right]$$

donde

$$y_{n+1}^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:



En la gráfica, vemos que la pendiente promedio \bar{m} corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1) , donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Solución

Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de

Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n .

Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= 2xy \end{cases}$$

En nuestra primera iteración tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \\ y_1 = y_0 + h \left(\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2} \right) = 1.01 \end{cases}$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^* .

Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ y_2^* = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.0302 \\ y_2 = y_1 + h \left(\frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)}{2} \right) = 1.040704 \end{cases}$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (Euler 1) y el de y_2^* . El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

Concluimos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.05\%$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%!

Veamos un segundo ejemplo.

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar $y(1.3)$ si tenemos :

$$y' = x - y + 5$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Tenemos los siguientes datos:

$$h = 0.1$$

$$f(x, y) = x - y + 5$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 2$$

En una primera iteración, tenemos lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + h = 1.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2.4 \\ y_1 = 2 + 0.1 \left(\frac{4 + (1.1 - 2.4 + 5)}{2} \right) = 2.385 \end{array} \right.$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.385
2	1.2	2.742925
3	1.3	3.07635

Concluimos entonces que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.07635$$

Finalmente, veamos el tercero y último método que estudiaremos en este curso. Por simplicidad del curso, no veremos la justificación formal de estas últimas fórmulas.

MÉTODO DE RUNGE – KUTTA

Sin entrar en mucho detalle, mencionamos solamente que el método de Runge-Kutta cambia la dirección en el sentido de que no sigue la misma línea de los métodos de Euler. De hecho está basado en una aplicación de los polinomios de Taylor.

Comentamos sin embargo, que el método de Runge-Kutta si contiene como casos especiales los de Euler.

Las fórmulas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

donde

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Se conocen como las reglas o *fórmulas de Runge-Kutta de orden cuatro* para la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Ejemplo 1

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$ dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Solución

Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores. Segundo, procedemos con los mismos datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= 2xy \end{cases}$$

Para poder calcular el valor de y_1 , debemos calcular primero los valores de k_1 , k_2 , k_3 y k_4 . Tenemos entonces que:

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.1[2(0.05)(1)] = 0.01$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.1[2(0.05)(1.005)] = 0.01005$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.01005) + 0.020201] = 1.01005$$

Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.1[2(0.15)(1.02010)] = 0.03060$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.1[2(0.15)(1.02535)] = 0.03076$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2(0.2)(1.04081)] = 0.04163$$

$$\therefore y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.04081$$

El proceso debe repetirse hasta obtener y_3 . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

Concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:

$$y(0.5) \approx 1.28403$$

Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

$$|e_r| = \left| \frac{1.28402 - 1.28403}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.0007\%$$

Con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación!

Ejemplo 2

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$ dada la ecuación diferencial:

$$y' = x + y$$

$$y(2) = 4$$

Solución

Igual que siempre, tomamos $h = 0.1$ y llegaremos a la aproximación en dos pasos. Con esta aclaración, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ y_0 &= 4 \\ h &= 0.1 \\ f(x, y) &= x + y \end{cases}$$

Primera Iteración:

$$x_1 = x_0 + h = 2.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.1[2 + 4] = 0.6$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.05 + 4.3] = 0.635$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.05 + 4.3175] = 0.63675$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2.1 + 4.63675] = 0.673675$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 4.6362$$

Segunda Iteración:

$$x_2 = x_1 + h = 2.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2.1 + 4.6362] = 0.67362$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2.15 + 4.97301] = 0.7123$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2.15 + 4.99235] = 0.71424$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2.2 + 5.35044] = 0.75504$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 5.34982$$

Concluimos entonces que el valor buscado es:

$$y(2.2) \approx 5.34982$$

EJERCICIOS

1. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(2) &= 0.5 \end{aligned}$$

Usa el método de Euler para aproximar $y(2.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(2.3) \approx 1.16647$.

2. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= \ln(x + y) \\ y(1) &= 1.5 \end{aligned}$$

Usa el método de Euler para aproximar $y(1.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(1.3) \approx 1.79679$.

3. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= 2x + y - 3 \\ y(2) &= 1 \end{aligned}$$

Usa el método de Euler mejorado para aproximar $y(2.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(2.3) \approx 1.79693$

4. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 + y} \\ y(3) &= 2.5 \end{aligned}$$

Usa el método de Euler mejorado para aproximar $y(3.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(3.3) \approx 2.52417$

5. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= \ln x + \frac{1}{y} \\ y(4) &= 5 \end{aligned}$$

Usa el método de Runge-Kutta para aproximar $y(4.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(4.3) \approx 5.48415$

6. Dada la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ y(3) &= 10 \end{aligned}$$

Usa el método de Runge-Kutta para aproximar $y(3.3)$ tomando $h = 0.1$ en cada paso del proceso iterativo.

Solución: $y(3.3) \approx 11.5158$