

## GUIA DE ESTUDIO V DE CALCULO NUMERICO (230-3114)

## INTEGRACION NUMERICA

PROFESOR: EDGARD DECENA

5

En los cursos de Cálculo Integral, nos enseñan como calcular una integral definida de una función continua mediante una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo:

**Teorema Fundamental del Cálculo**

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y sea  $F(x)$  una antiderivada de  $f(x)$ . Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

El problema en la práctica, se presenta cuando nos vemos imposibilitados de encontrar la antiderivada requerida, aún para integrales aparentemente sencillas como:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

la cual simplemente es imposible de resolver con el Teorema Fundamental del Cálculo.

En este capítulo estudiaremos diversos métodos numéricos que nos permitirán obtener aproximaciones bastante exactas a integrales como la mencionada anteriormente. Esencialmente, veremos dos tipos de integración numérica: las fórmulas de Newton-Cotes y el algoritmo de Romberg.

Las fórmulas de Newton-Cotes están conformadas por las bien conocidas reglas del trapecio y de Simpson (regla de un tercio y de tres octavos). El algoritmo de Romberg forma parte de un método conocido como método de extrapolación de Richardson.

Haciendo uso de algunos programas computacionales (por ejemplo, en *Mathematica*) es posible discernir sobre las cualidades y defectos de cada uno de los métodos mencionados arriba.

**FORMULAS DE INTEGRACION DE NEWTON-COTES**

Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de  $f(x)$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx$$

donde  $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  es un polinomio de interpolación de grado  $n$  para ciertos datos de  $f(x)$  que se escogen apropiadamente.

Es importante observar que estas fórmulas se pueden aplicar inclusive a una tabla de datos, ya que lo que se usa es un polinomio de interpolación, el cual puede ser calculado con la tabla.

Dentro de las fórmulas de Newton-Cotes, existen las formas *cerradas* y *abiertas*. En las formas cerradas se conocen los valores de  $f(a)$  y  $f(b)$ ; en caso contrario, se llaman formas abiertas.

Nosotros nos remitiremos a estudiar únicamente las formas cerradas, y por lo tanto, siempre suponemos que conocemos los valores  $f(a)$  y  $f(b)$ .

## REGLA DEL TRAPECIO

Corresponde al caso donde  $n = 1$ , es decir :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx$$

donde  $f_1(x)$  es un polinomio de interpolación (obviamente de grado 1) para los datos:

|     |        |        |
|-----|--------|--------|
| $x$ | $a$    | $b$    |
| $y$ | $f(a)$ | $f(b)$ |

Del capítulo anterior, sabemos que este polinomio de interpolación es:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Integrando este polinomio, tenemos que:

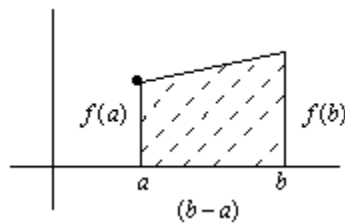
$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx &= f(a)x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[ \frac{(x - a)^2}{2} \right] \Bigg|_a^b \\ &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[ \frac{(b - a)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(a)(b-a) + (f(b) - f(a))\left(\frac{b-a}{2}\right) \\
 &= (b-a)\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{2}\right] \\
 &= (b-a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right]$$

Que es la conocida *Regla del Trapecio*. Este nombre se debe a la interpretación geométrica que le podemos dar a la fórmula. El polinomio de interpolación para una tabla que contiene dos datos, es una línea recta. La integral, corresponde al área bajo la línea recta en el intervalo  $[a, b]$ , que es precisamente el área del trapecio que se forma.



### **Ejemplo 1:**

Utilizar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

### ***Solución.***

Usamos la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 a &= 0 \\
 b &= 1 \\
 f(x) &= e^{x^2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0)\left[\frac{f(0) + f(1)}{2}\right] = \frac{1+e}{2} = 1.85914$$

**Ejemplo 2.**

Usar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$$

**Solución.**

Igual que en el ejemplo anterior, sustituimos los datos de manera directa en la fórmula del trapecio. En este caso, tenemos los datos:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 4 \\ f(x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \approx (4-2) \left[ \frac{f(2)+f(4)}{2} \right] = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} = 17.3441$$

La regla del trapecio se puede ampliar si subdividimos el intervalo  $[a,b]$  en  $n$  subintervalos, todos de la misma longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  la partición que se forma al hacer dicha subdivisión. Usando propiedades de la integral tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Aplicando la regla del trapecio en cada una de las integrales, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (x_1 - x_0) \left[ \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right] + \dots + (x_n - x_{n-1}) \left[ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right]$$

Ahora bien, ya que todos los subintervalos tienen la misma longitud  $h$ , tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Sustituyendo el valor de  $h$  y usando la notación sigma, tenemos finalmente:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \right]$$

Esta es la regla del trapecio para  $n$  subintervalos. Obviamente, esperamos que entre más subintervalos usemos, mejor sea la aproximación a la integral.

**Ejemplo 1:**

Aplicar la regla del trapecio para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

si subdividimos en 5 intervalos.

**Solución.**

En este caso, identificamos  $n = 5$ , y la partición generada es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

Así, aplicando la fórmula tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx (1-0) \left[ \frac{f(0) + 2(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) + f(1)}{2(5)} \right] \\ &= \left[ \frac{1 + 2(e^{(0.2)^2} + e^{(0.4)^2} + e^{(0.6)^2} + e^{(0.8)^2}) + e}{10} \right] \\ &= 1.48065 \end{aligned}$$

Cabe mencionar que el valor verdadero de esta integral es de 1.4626...

Así, vemos que con 5 intervalos, la aproximación no es tan mala. Para hacer cálculos con más subintervalos, es conveniente elaborar un programa que aplique la fórmula con el número de subintervalos que uno desee. El lector debería hacer su propio programa y checar con 50, 500, 1000, 10000 y 20000 subintervalos, para observar el comportamiento de la aproximación.

## REGLA DE SIMPSON DE UN TERCIO

Suponemos que tenemos los datos:

|        |          |        |
|--------|----------|--------|
| $a$    | $x_m$    | $b$    |
| $f(a)$ | $f(x_m)$ | $f(b)$ |

donde  $x_m$  es el punto medio entre  $a$  y  $b$ .

En este caso se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

donde  $f_2(x)$  es el polinomio de interpolación para los datos en la tabla anterior. Usaremos el polinomio de Lagrange.

Así, tenemos que:

$$f_2(x) = f(a) \frac{(x-x_m)(x-b)}{(a-x_m)(a-b)} + f(x_m) \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + f(b) \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

Si denotamos  $h = \frac{b-a}{2} = x_m - a = b - x_m$ , entonces:

$$f_2(x) = f(a) \frac{(x-x_m)(x-b)}{(-h)(-2h)} + f(x_m) \frac{(x-a)(x-b)}{(h)(-h)} + f(b) \frac{(x-a)(x-x_m)}{(2h)(h)}$$

Simplificando términos:

$$f_2(x) = \frac{f(a)}{2h^2} (x-x_m)(x-b) - \frac{f(x_m)}{h^2} (x-a)(x-b) + \frac{f(b)}{2h^2} (x-a)(x-x_m)$$

Vemos que cada uno de los términos anteriores, es esencialmente de la misma forma, es decir, una constante por  $(x-\alpha)(x-\beta)$

Así, calculamos la siguiente integral por partes:

$$\int (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$u = x - \alpha \quad du = dx$$

Sea:

$$dv = (x-\beta)dx \quad v = \int (x-\beta)dx = \frac{(x-\beta)^2}{2}$$

por lo tanto,

$$\int (x-\alpha)(x-\beta)dx = (x-\alpha) \frac{(x-\beta)^2}{2} - \int \frac{(x-\beta)^2}{2} dx$$

$$= (x-a) \frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}$$

Usamos esta fórmula para calcular la integral de cada uno de los tres términos de  $f_2(x)$ .

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{f(a)}{2h^2} \int_a^b (x-x_m)(x-b) dx - \frac{f(x_m)}{h^2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx + \frac{f(b)}{2h^2} \int_a^b (x-a)(x-x_m) dx$$

$$I_1 = \int_a^b (x-x_m)(x-b) dx = (x-x_m) \left[ \frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6} \right]_a^b$$

$$= -(a-x_m) \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6} = -(-h) \frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{6}$$

$$= 2h^3 - \frac{4}{3}h^3$$

$$= \frac{2}{3}h^3$$

$$I_2 = \int_a^b (x-a)(x-b) dx = (x-a) \left[ \frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6} \right]_a^b = \frac{(a-b)^3}{6} = \frac{(-2h)^3}{6} = -\frac{4}{3}h^3$$

$$I_3 = \int_a^b (x-a)(x-x_m) dx = (x-a) \left[ \frac{(x-x_m)^2}{2} - \frac{(x-x_m)^3}{6} \right]_a^b$$

$$= (b-a) \frac{(b-x_m)^2}{2} - \frac{(b-x_m)^3}{6} + \frac{(a-x_m)^3}{6}$$

$$= (2h) \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{(-h)^3}{6} = h^3 - \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h^3$$

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{f(a)}{2h^2} \left( \frac{2}{3}h^3 \right) - \frac{f(x_m)}{h^2} \left( -\frac{4}{3}h^3 \right) + \frac{f(b)}{2h^2} \left( \frac{2}{3}h^3 \right)$$

$$= f(a) \frac{h}{3} + f(x_m) \frac{4}{3}h + f(b) \frac{h}{3}$$

$$= \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_m) + f(b)]$$

Debido al factor  $\frac{1}{3}h$  se le conoce como la *regla de Simpson de un tercio*.

En la práctica, sustituimos el valor de  $h = \frac{b-a}{2}$  para obtener nuestra fórmula final:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{f(a) + 4f(x_m) + f(b)}{6} \right]$$

**Ejemplo 1.**

Usar la regla de Simpson de 1/3 para aproximar la siguiente integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

**Solución.**

Aplicamos la fórmula directamente, con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ x_m &= 0.5 \\ f(x) &= e^{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx (1-0) \left[ \frac{f(0) + 4f(0.5) + f(1)}{6} \right] = \frac{1 + 4e^{(0.5)^2} + e}{6} = 1.4757$$

**Ejemplo 2.**

Usar la regla de Simpson de 1/3, para aproximar la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$$

**Solución.**

Igual que en el ejercicio anterior, sustituimos datos adecuadamente:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx \approx (4-2) \left[ \frac{f(2) + 4f(3) + f(4)}{6} \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{e^2}{2} + 4 \frac{e^3}{3} + \frac{e^4}{4} \right] = 14.7082$$

Al igual que con la regla del trapecio, podemos extender la regla de Simpson de 1/3, si subdividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de la misma longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  la partición que se forma al hacer la subdivisión, y denotemos por  $x_M, \in [x_{i-1}, x_i]$  el punto medio en cada subintervalo.

Aplicamos primero propiedades básicas de la integral definida:



$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Ahora, aplicamos la regla de Simpson de 1/3, en cada una de las integrales de arriba:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (x_1 - x_0) \left[ \frac{f(x_0) + 4f(x_{M_1}) + f(x_1)}{6} \right] + \dots + (x_n - x_{n-1}) \left[ \frac{f(x_{n-1}) + 4f(x_{M_n}) + f(x_n)}{6} \right]$$

Sustituimos  $h = \frac{b-a}{n}$  y usamos la notación sigma:

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[ \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{M_i}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{6n} \right]$$

### Ejemplo 1.

Aproximar la siguiente integral, aplicando la regla de Simpson de  $\frac{1}{3}$  y subdividiendo en 5 intervalos.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

### ***Solución.***

En este caso, tenemos que  $n = 5$ , y la partición que se genera es:

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

Además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$$

Por lo tanto, sustituimos los datos en la fórmula para obtener:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx (1-0) \left[ \frac{f(0) + 4[f(0.1) + f(0.3) + \dots + f(0.9)] + 2[f(0.2) + f(0.4) + \dots + f(0.8)] + f(1)}{6(5)} \right] \\ &= \frac{1}{30} \left[ 1 + 4[e^{(0.1)^2} + e^{(0.3)^2} + \dots + e^{(0.9)^2}] + 2[e^{(0.2)^2} + e^{(0.4)^2} + e^{(0.6)^2} + e^{(0.8)^2}] + e \right] = 1.4626 \end{aligned}$$

Nótese que esta aproximación ya es exacta hasta el cuarto decimal!

**Ejemplo 2.**

Aproximar la siguiente integral, utilizando la regla de Simpson de  $\frac{1}{3}$  y subdividiendo en 4 intervalos.

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$$

**Solución.**

En este caso, tenemos que  $n = 4$ , y la partición que se genera es:

$$P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

Además, los puntos medios de cada subintervalo son:

$$P_M = \{2.25, 2.75, 3.25, 3.75\}$$

Sustituyendo todos estos datos en la fórmula obtenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{e^x}{x} dx &\approx (4-2) \left[ \frac{f(2) + 4[f(2.25) + f(2.75) + f(3.25) + f(3.75)] + 2[f(2.5) + f(3) + f(3.5)] + f(4)}{6(4)} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[ \frac{e^2}{2} + 4 \left[ \frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^{2.75}}{2.75} + \frac{e^{3.25}}{3.25} + \frac{e^{3.75}}{3.75} \right] + 2 \left[ \frac{e^{2.5}}{2.5} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^{3.5}}{3.5} \right] + \frac{e^4}{4} \right] = 14.6767 \end{aligned}$$

**REGLA DE SIMPSON DE TRES OCTAVOS**

Este caso corresponde a  $n = 3$ , es decir,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_3(x) dx$$

donde  $f_3(x)$  es un polinomio de interpolación para los siguientes datos:

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    |
| $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Y donde  $a = x_0$ ,  $b = x_3$  y  $x_1, x_2$  son los puntos que dividen en tres partes iguales al intervalo  $[a, b]$ .

Igual que en el caso anterior, se usa el polinomio de interpolación de Lagrange, y usando el método de integración por partes se llega a la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

donde  $h = \frac{(b-a)}{3}$ . Debido al factor  $\frac{3}{8}h$  es que se le dió el nombre de *Regla de Simpson de 3/8*. En la práctica, se sustituye el valor de  $h$  para obtener:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[ \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8} \right]$$

### **Ejemplo 1.**

Aproximar la siguiente integral, usando la regla de Simpson de  $\frac{3}{8}$ :

$$\int_1^4 e^x \ln x dx$$

### **Solución.**

En este caso, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 4 \\ f(x) &= e^x \ln x \end{aligned}$$

Los cuales sustituimos en la fórmula, para obtener:

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^x \ln x dx &\approx (4-1) \left[ \frac{f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4)}{8} \right] \\ &= \frac{3}{8} [e \ln 1 + 3e^2 \ln 2 + 3e^3 \ln 3 + e^4 \ln 4] = 58.9698 \end{aligned}$$

Al igual que en los dos casos anteriores, la regla de Simpson de 3/8, se puede extender si subdividimos el intervalo  $[a,b]$  en  $n$  intervalos de la misma longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sea  $x_0, x_1, \dots, x_n$  la partición determinada de esta forma. Cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  lo dividimos en tres partes iguales, y sean  $y_i$  y  $z_i$  los puntos determinados así:

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ x_{i-1} & & y_i & & z_i & & x_i \end{array}$$

Aplicando la regla de  $\frac{3}{8}$  en cada uno de los intervalos tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx h \left[ \frac{f(x_0) + 3f(y_1) + 3f(z_1) + f(x_1)}{8} \right] + h \left[ \frac{f(x_1) + 3f(y_2) + 3f(z_2) + f(x_2)}{8} \right] + \dots \\ &\quad \dots + h \left[ \frac{f(x_{n-1}) + 3f(y_n) + 3f(z_n) + f(x_n)}{8} \right] \\ &= \frac{h}{8} \left[ f(x_0) + 3 \left( \sum_{i=1}^n [f(y_i) + f(z_i)] \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \\ &= \frac{b-a}{8n} \left[ f(x_0) + 3 \left( \sum_{i=1}^n [f(y_i) + f(z_i)] \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

Esta última, es la regla de Simpson de 3/8 para  $n$  subintervalos todos de la misma longitud.

### **Ejemplo 2.**

Aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^4 e^x \ln x dx$$

aplicando la regla de Simpson de 3/8, y subdividiendo en 3 intervalos.

### **Solución.**

Identificamos  $n = 3$  y la partición correspondiente:

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$

Al considerar los puntos que dividen en tres partes iguales a cada subintervalo, tenemos los siguientes datos:

$$1 < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < 2 < \frac{7}{3} < \frac{8}{3} < 3 < \frac{10}{3} < \frac{11}{3} < 4$$

Sustituyendo todos los datos en la fórmula, obtenemos:

$$\int_1^4 e^x \ln x dx \approx \frac{4-1}{8(3)} \left[ f(1) + 3 \left[ f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{11}{3}\right) \right] + 2 \left[ f(2) + f(3) \right] + f(4) \right]$$

$$= 57.96878$$

De acuerdo a los ejemplos vistos, resulta evidente que la regla de Simpson de 3/8, es más exacta que la de 1/3 y a su vez, ésta es más exacta que la regla del trapecio. En realidad, pueden establecerse cotas para los errores que se cometen en cada uno de estos métodos.

Puesto que no es nuestra intención justificar formalmente cada uno de los teoremas, los siguientes resultados se mencionan para completar la información, pero omitimos las demostraciones correspondientes.

| REGLA                 | F O R M U L A  | E R R O R                        | D O N D E . . .                             |
|-----------------------|--|----------------------------------|---|
| Trapecio              | $(b-a) \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$                         | $-\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$     | $h = b - a$<br>$\xi \in [a, b]$             |
| Simpson $\frac{1}{3}$ | $(b-a) \left[ \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \right]$           | $-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$ | $h = \frac{b-a}{2}$<br>$\xi \in [x_0, x_2]$ |
| Simpson $\frac{3}{8}$ | $(b-a) \left[ \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8} \right]$ | $-\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$ | $h = \frac{b-a}{3}$<br>$\xi \in [x_0, x_3]$ |

## EJERCICIOS

1. Usar la regla del trapecio para aproximar,

$$\int_0^6 \frac{\cos x}{x+1} dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 6 intervalos.

**Soluciones:** i) 3.4115                      ii) 0.36907

2. Usar la regla de Simpson 1/3 para aproximar,

$$\int_0^4 \sqrt[3]{xe^x} dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 4 intervalos.

**Soluciones:** i) 82.60511                      ii) 76.94497

3. Usar la regla de Simpson 3/8 para aproximar,

$$\int_2^4 (\ln x)^3 dx$$

i) Dividiendo en un solo intervalo.

ii) Dividiendo en 4 intervalos.

**Soluciones:** i) 2.76591                      ii) 2.76501

4. Integrar las siguientes tablas de datos:

i)

|        |    |    |   |     |     |    |     |
|--------|----|----|---|-----|-----|----|-----|
| $x$    | -4 | -1 | 0 | 1   | 1.5 | 2  | 2.5 |
| $f(x)$ | -8 | -3 | 1 | 2.5 | -5  | -1 | 6   |

ii)

|        |     |     |     |      |     |      |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|
| $x$    | -3  | -2  | -1  | 0    | 0.5 | 1    | 1.5 | 3   | 4.5 |
| $f(x)$ | 4.1 | 2.5 | 0.3 | -0.4 | -1  | -3.6 | 0   | 2.3 | 5.9 |

**Soluciones:** i) -17.11458                      ii) 9.425