

GUIA DE ESTUDIO VII DE CALCULO NUMERICO (230-3114)
METODOS DIRECTOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES
PROFESOR: EDGARD DECENA

7

Estudiaremos sistemas de ecuaciones de la forma :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

donde a_{ij} , b_j son constantes y x_j son las incógnitas. Se dice que el sistema tiene n ecuaciones con n incógnitas o simplemente que es de $n \times n$.

En la notación a_{ij} , i se refiere a la fila, y j se refiere a la columna donde está ubicado el elemento correspondiente.

MATRICES

El sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en forma matricial si definimos:

i) La *matriz de coeficientes*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ii) La *matriz de incógnitas*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

iii) La *matriz de términos independientes* o resultados:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema es equivalente a la ecuación matricial:

$$A X = B$$

donde el producto indicado es el producto de matrices.

OPERACIONES ELEMENTALES

Para una matriz A se definen tres operaciones elementales por renglones (o columnas); nos remitiremos a las operaciones por renglones. Cuando se efectúan las operaciones elementales se obtiene una matriz equivalente, y se utiliza el símbolo de equivalencia.

I.- Intercambiar dos renglones

Ejemplo: Si intercambiamos la fila 1 y 3:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 7 & -10 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

II.- Multiplicar una fila por una constante distinta de cero

Ejemplo: Si multiplicamos la fila 3 por 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \times 2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

III.- Sumar una fila a otra fila

Ejemplo: Si sumamos la fila 3 a la fila 2:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las operaciones II y III se combinan para sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

Ejemplo:

(i) Comenzamos con la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii) Multiplicamos la fila 1 por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times 2 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(iii) Sumamos la fila 1 a la fila 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(iv) Finalmente multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la fila 1 (lo cual anula el paso (ii)):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahorrando pasos podemos escribir simplemente:

$$\times 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Finalmente, las operaciones elementales se utilizan para “hacer ceros” debajo de algún elemento $a_{ij} \neq 0$.

Ejemplo: Hacer ceros debajo del elemento a_{11} en la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución. Vemos que para lograr el objetivo, podemos multiplicar la fila 1 por 2, y sumarlo a la fila 2. También podemos multiplicar el mismo renglón 1 por -3 , y sumárselo a la fila 3:

$$-3, 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & -9 & 14 \end{pmatrix}$$

El objetivo final es transformar una matriz A en una matriz escalonada .

Definición. Una matriz se llama escalonada si el primer elemento no cero en cada fila está más a la derecha que la fila anterior.

Ejemplos:

1) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

sí es escalonada.

2) La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es escalonada.

Obviamente el escalonamiento de una matriz se logra “haciendo ceros” debajo de los elementos adecuados.

Ejercicios:

1) Usando operaciones elementales, escalonar la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución. La notación se explica por sí sola:

$$\begin{aligned} 1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -2 \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times (-3), \quad \times \frac{1}{2} \\ & \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \times (-2) & \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Escalonar la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución. Procedemos como en el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} -7, \quad -4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \times (-2) & \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos ahora todas las herramientas para estudiar nuestros dos primeros métodos numéricos de solución a sistemas de ecuaciones lineales.

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Este método se aplica para resolver sistemas lineales de la forma:

$$A X = B$$

El método de eliminación Gaussiana (simple), consiste en escalonar la matriz aumentada del sistema:

$$(A:B)$$

para obtener un sistema equivalente :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

donde la notación a'_{ij} se usa simplemente para denotar que el elemento a_{ij} cambió. Se despejan las incógnitas comenzando con la última ecuación y hacia arriba. Por esta razón, muchas veces se dice que el método de eliminación Gaussiana consiste en la eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás.

Ejemplo:

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= -2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= 5 \end{aligned}$$

usando el método de eliminación Gaussiana (simple).

Solución. Escalonamos la matriz aumentada del sistema:

$$-7, -4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -11 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Y dividiendo el segundo renglón entre -3 , tenemos la matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema equivale a:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_2 + 2x_3 &= 2 \\x_3 &= 10\end{aligned}$$

De la última ecuación tenemos $x_3 = 10$; sustituimos este valor en la ecuación de arriba para obtener $x_2 = -18$; sustituimos estos valores en la ecuación de arriba para obtener $x_1 = 7$.

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 7 \\x_2 &= -18 \\x_3 &= 10\end{aligned}$$

2) Resolver:

$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -10 \\3x_1 + x_2 - 6x_3 &= 4\end{aligned}$$

usando eliminación Gaussiana (simple).

Solución. Escalonando la matriz aumentada del sistema:

$$3, 2 \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 1 & -10 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 10 & 0 & 40 \end{array} \right) -10 \quad \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -50 & -100 \end{array} \right)$$

Por lo tanto, el sistema equivale a:

$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\x_2 + 5x_3 &= 14 \\-50x_3 &= -100\end{aligned}$$

De la ecuación (3) obtenemos $x_3 = 2$; sustituimos arriba para obtener $x_2 = 4$; sustituimos arriba para obtener $x_1 = 4$.

Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 \\x_2 &= 4 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

El método de eliminación Gaussiana (simple) puede presentar un problema cuando uno de los elementos que se usan para hacer ceros, es cero.

Por ejemplo, supóngase que en algún paso del proceso de hacer ceros tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Es claro que el elemento $a_{22} = 0$ no puede usarse para hacer ceros!

Este problema se puede resolver fácilmente intercambiando los renglones 2 y 3. De hecho, el resultado que obtenemos es la matriz escalonada :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el problema puede presentarse también si el elemento aquel es *muy cercano a cero*.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema, usando eliminación Gaussiana (simple)

$$\begin{aligned}0.00005x_1 + 5x_2 &= 3.33335 \\x_1 + x_2 &= 1\end{aligned}$$

Solución. Usando eliminación Gaussiana (simple) obtenemos:

$$- \frac{1}{0.00005} \begin{pmatrix} 0.00005 & 5 & 3.33335 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.00005 & 5 & 3.33335 \\ 0 & -99999 & -66666 \end{pmatrix}$$

Que nos da el sistema equivalente:

$$\begin{aligned}0.00005x_1 + 5x_2 &= 3.33335 \\-99999x_2 &= -66666\end{aligned}$$

De donde, $x_2 = \frac{2}{3}$; sustituímos arriba y obtenemos:

$$x_1 = \frac{3.33335 - 5\left(\frac{2}{3}\right)}{0.00005}$$

El resultado cambia drásticamente de acuerdo al número de cifras significativas que se usen. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

# Cifras Significativas	x_2	x_1	(*) Error relativo porcentual
3	0.667	-33	10,000 %
4	0.0067	-3	1,000 %
5	0.00067	0	100 %
6	0.000067	.3	10 %
7	0.6666667	0.33	1 %

(*) Para calcular este error se tomó el valor verdadero de $x_1 = \frac{1}{3}$.

Ahora resolvemos el mismo sistema pero intercambiando los renglones 1 y 2

$$-0.00005 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.00005 & 5 & 3.33335 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4.99995 & 3.33333 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos da el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 4.99995x_2 &= 3.33333 \end{aligned}$$

De donde obtenemos $x_2 = \frac{2}{3}$; sustituyendo arriba nos da:

$$x_1 = 1 - \frac{2}{3}$$

Nuevamente tomamos distintas cifras significativas y resumimos los resultados en la siguiente tabla:

# Cifras Significativas	x_2	x_1	(*) Error Relativo Porcentual
-------------------------------	-------	-------	-------------------------------------

3	0.667	0.333	0.1 %
4	0.6667	0.3333	0.01 %
5	0.66667	0.33333	0.001 %
6	0.666667	0.333333	0.0001 %
7	0.6666667	0.3333333	0.00001 %

En este último caso, vemos que el error relativo porcentual no varía drásticamente como en la solución anterior.

Así, vemos que los elementos que son cercanos a cero, son elementos malos para hacer ceros. En general, para evitar este problema se elige como elemento para hacer ceros (el cual recibe el nombre de *elemento pivotal* o simplemente *pivote*) como el elemento mayor en valor absoluto de entre todos los candidatos.

A este procedimiento se le llama pivoteo parcial y aplicado a la eliminación Gaussiana, nos da el llamado método de eliminación Gaussiana con pivoteo (parcial).

Podemos resumir el pivoteo (parcial) como sigue:

- Para elegir el elemento pivote en la primera columna se escoge el elemento mayor (con valor absoluto) de toda la primera columna.
- Para elegir el elemento pivote en la segunda columna, se escoge el elemento mayor (con valor absoluto) de toda la segunda columna exceptuando el elemento a_{12} .
- Para la tercera columna se exceptúan los elementos a_{13} y a_{23} , etc.

En un diagrama matricial, tenemos que los elementos pivotes de cada columna se escogen de entre los siguientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1:

Usar eliminación Gaussiana con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -2x_2 & +0.5x_3 & = -5 \\ -2x_1 & +5x_2 & -1.5x_3 & = 0 \\ -0.2x_1 & +1.75x_2 & -x_3 & = 10 \end{array}$$

Solución. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Para escoger el primer elemento pivote en la columna 1, tomamos el elemento mayor con valor absoluto entre -1, -2 y -0.2, el cual obviamente es el -2; por lo tanto intercambiamos la fila 1 y 2 (éste es el *primer pivoteo* realizado):

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Y procedemos a hacer ceros debajo del pivote. Para ello, multiplicamos la fila 1 por $\frac{1}{-2}$ y se $\frac{-0.2}{2}$ lo sumamos a la fila 2. También, multiplicamos la fila 1 por $\frac{-0.2}{2}$ y lo sumamos a la fila 3. Esto nos da la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \end{pmatrix}$$

Olvidándonos de la fila 1 y de la columna 1, procedemos a escoger el pivote de la columna 2, pero únicamente entre 0.5 y 1.25, el cual obviamente resulta ser 1.25. Por lo tanto intercambiamos los renglones 2 y 3 (éste es el *segundo pivoteo* realizado):

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \end{pmatrix}$$

Y procedemos a hacer ceros debajo del elemento pivote. Para ello multiplicamos la fila 2 por $\frac{-0.5}{1.25}$ y lo sumamos a la fila 3 para obtener:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}$$

La cual es una matriz escalonada. El sistema equivalente es:

$$\begin{array}{rclcl}
 -2x_1 & +5x_2 & -1.5x_3 & = & 0 \\
 & 1.25x_2 & -0.85x_3 & = & 10 \\
 & & 0.09x_3 & = & -9
 \end{array}$$

Y con la sustitución hacia arriba, obtenemos la solución del sistema:

$$\begin{array}{l}
 x_2 = -60 \\
 x_1 = -75 \\
 x_3 = -100
 \end{array}$$

Ejemplo 2.

Usar eliminación Gaussiana con pivoteo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcl}
 0.4x_1 & -1.5x_2 & +0.75x_3 & = & -20 \\
 -0.5x_1 & -15x_2 & +10x_3 & = & -10 \\
 -10x_1 & -9x_2 & +2.5x_3 & = & 30
 \end{array}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0.4 & -1.5 & 0.75 & -20 \\ -0.5 & -15 & 10 & -10 \\ -10 & -9 & 2.5 & 30 \end{array} \right)$$

El elemento pivote en la columna 1 es el -10 , lo que nos obliga a intercambiar los renglones 1 y 3:

$$\left(\begin{array}{cccc} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ -0.5 & -15 & 10 & -10 \\ 0.4 & -1.5 & 0.75 & -20 \end{array} \right)$$

Haciendo ceros debajo del pivote, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ 0 & -14.55 & 9.875 & -11.5 \\ 0 & -1.86 & 0.85 & -18.8 \end{array} \right)$$

Ahora el elemento pivote en la columna 2 es el -14.55 , el cual está bien colocado, y no hay necesidad de intercambiar renglones. Procedemos a hacer ceros debajo del pivote, lo cual nos da la siguiente matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} -10 & -9 & 2.5 & 30 \\ 0 & -14.55 & 9.875 & -11.5 \\ 0 & 0 & -0.412371 & -17.3299 \end{pmatrix}$$

Escribiendo el sistema equivalente, y resolviendo con la sustitución hacia arriba, obtenemos la solución del sistema:

$$x_1 = -18.875$$

$$x_2 = 29.3125$$

$$x_3 = 42.0250$$

METODO DE GAUSS - JORDAN

Este método utiliza las mismas técnicas de eliminación Gaussiana (incluyendo el pivoteo), pero con el objetivo de finalizar con una matriz de la siguiente forma:

$(A:B)$



$(I_n:B)$

donde I_n es la *matriz identidad* de $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Para lograr esto, se usa la técnica del pivoteo con la única diferencia que el pivote se usa para hacer ceros hacia abajo y hacia arriba.

Ejemplo 1: Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -2x_2 & +0.5x_3 & = -5 \\ -2x_1 & +5x_2 & -1.5x_3 & = 0 \\ -0.2x_1 & +1.75x_2 & -x_3 & = 10 \end{array}$$

Solución. Comenzamos con la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Procedemos a hacer el primer pivoteo, y para ello, intercambiamos los renglones 1 y 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

y haciendo ceros debajo del pivote, obtenemos:

$$-\frac{0.2}{-2}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 1 & -2 & 0.5 & -5 \\ -0.2 & 1.75 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \end{pmatrix}$$

Ahora, para colocar adecuadamente el segundo pivote intercambiamos los renglones 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0.5 & -0.25 & -5 \end{pmatrix}$$

Para hacer ceros arriba del pivote 1.25, multiplicamos la fila 2 por $\frac{-5}{1.25}$ y se lo sumamos a la fila 1; para hacer ceros debajo del mismo pivote, multiplicamos al mismo renglón 2 por $\frac{-0.5}{1.25}$ y se lo sumamos a la fila 3. Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1.9 & -40 \\ 0 & 1.25 & -0.85 & 10 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a hacer ceros arriba del pivote 0.09. Para ello, multiplicamos la fila 3 por $\frac{0.85}{0.09}$ y se lo sumamos a la fila 2; igualmente multiplicamos la fila 3 por $\frac{-1.9}{0.09}$ y se lo sumamos a la fila 1. Todo esto nos da:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1.25 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 0.09 & -9 \end{pmatrix}$$

Finalmente para hacer los 1's (unos) en la diagonal principal, multiplicamos los renglones 1

, 2, y 3 por $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{1.25}$ y $\frac{1}{0.09}$, respectivamente. Obtenemos entonces la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -75 \\ 0 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \end{pmatrix}$$

La cual nos da la solución del sistema de ecuaciones:

$$x_1 = -75$$

$$x_2 = -60$$

$$x_3 = -100$$

Ejemplo 2. Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -0.4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ 0.5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Solución. Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -0.4 & 2 & -1 & 10 \\ 0.5 & -3 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Observamos que el primer elemento pivote está bien colocado y por lo tanto no hay necesidad de intercambiar renglones. Por lo tanto hacemos ceros debajo del pivote $a_{11}=1$; para ello, multiplicamos la fila 1 por 0.4 y se lo sumamos a la fila 2, y también multiplicamos el mismo renglón 1 por -0.5 y se lo sumamos a la fila 3. Esto nos da la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2.8 & 0.2 & 10.4 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \end{pmatrix}$$

Para elegir el segundo elemento pivote, debemos escoger el elemento mayor (con valor absoluto) entre $a_{22}=2.8$ y $a_{32}=-4$, el cual obviamente es éste último. Por lo tanto, debemos intercambiar la fila 2 y la fila 3. Tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 28 & 0.2 & 10.4 \end{pmatrix}$$

Procedemos a hacer ceros arriba y abajo de nuestro segundo elemento pivote; para ello, multiplicamos la fila 2 por 0.5 y lo sumamos a la fila 1, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{2.8}{4}$ y lo sumamos a la fila 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.75 & 8.25 \\ 0 & -4 & -0.5 & 14.5 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{pmatrix}$$

Nuestro tercer elemento pivote es $a_{33} = -0.15$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos la fila 3 por $-\frac{0.5}{0.15}$ y lo sumamos a la fila 2, y también multiplicamos el mismo renglón 3 por $\frac{2.75}{0.15}$ y lo sumamos a la fila 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & -4 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & -0.15 & 20.55 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos los 1's (unos) en la diagonal, multiplicando la fila 2 por $-\frac{1}{4}$ y la fila 3 por $-\frac{1}{0.15}$. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 385 \\ 0 & 1 & 0 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & -137 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 385 \\ x_2 &= 13.5 \\ x_3 &= -137 \end{aligned}$$

MATRIZ INVERSA

Una de las aplicaciones del método de Gauss-Jordan, es el cálculo de matrices inversas. Recordamos primero la definición de matriz inversa.

Definición. Sea A una matriz de $n \times n$. La *matriz inversa* de A es una matriz B de $n \times n$ tal que:

$$A \cdot B = I_n$$

$$B \cdot A = I_n$$

Se escribe $B = A^{-1}$ para denotar la matriz inversa. Cuando la matriz inversa existe, es única, pero no siempre existe la matriz inversa.

Un resultado de álgebra lineal prueba que la matriz inversa A^{-1} existe si y solo si el determinante de A es distinto de cero. El método de Gauss-Jordan procede como sigue:

$$\begin{array}{c} (A : I_n) \\ \downarrow \\ (I_n : A^{-1}) \end{array}$$

Es decir, en una matriz comenzamos por escribir la matriz A , y a su derecha agregamos la matriz identidad I_n del mismo orden que la matriz A ; enseguida aplicamos el método de Gauss-Jordan para hacer los ceros y unos y obtener del lado izquierdo la matriz identidad I_n . Del lado derecho lo que obtendremos será la matriz inversa de A .

Ejemplo 1. Usar el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. En una matriz, colocamos la matriz A y a su derecha agregamos la matriz identidad I_2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El primer elemento pivote $a_{11} = 4$ está bien colocado y procedemos a hacer ceros debajo de este elemento. Para ello, multiplicamos la fila 1 por $-\frac{1}{4}$ y lo sumamos a la fila 2. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuestro segundo elemento pivote es $a_{22} = 0.25$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos la fila 2 por $-\frac{11}{0.25}$ y lo sumamos a la fila 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -44 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos los 1's en la diagonal principal. Para ello, multiplicamos la fila 1 por $\frac{1}{4}$ y la fila 2 por $\frac{1}{0.25}$. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, concluimos que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Usar el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -0.5 & 1.2 & -0.1 \\ -0.3125 & -0.625 & 3.125 \end{pmatrix}$$

Solución. En una matriz, colocamos la matriz A y a su derecha agregamos la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 \\ -0.3125 & -0.625 & 3.125 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el primer elemento pivote $a_{11} = 2$ está bien colocado y procedemos a hacer ceros debajo de este elemento. Para ello multiplicamos la fila 1 por $\frac{0.5}{2}$ y lo sumamos a la fila 2; también, multiplicamos el mismo renglón 1 por $\frac{0.3125}{2}$ y lo sumamos a la fila 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.15625 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para elegir el segundo elemento pivote, debemos escoger el elemento mayor (con valor absoluto) entre $a_{22} = 0.2$ y $a_{32} = -1.25$, el cual obviamente es éste último. Por lo tanto, debemos intercambiar la fila 2 y la fila 3. Tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.15625 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & -0.1 & 0.25 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos a hacer ceros arriba y abajo de nuestro segundo elemento pivote; para ello, multiplicamos la fila 2 por $-\frac{4}{1.25}$ y lo sumamos a la fila 1, y también multiplicamos el mismo renglón 2 por $\frac{0.2}{1.25}$ y lo sumamos a la fila 3. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 & 0.5 & 0 & -3.2 \\ 0 & -1.25 & 3.125 & 0.15625 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.275 & 1 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Nuestro tercer elemento pivote es $a_{33} = 0.4$. Para hacer ceros arriba de este elemento, multiplicamos la fila 3 por $-\frac{3.125}{0.4}$ y lo sumamos a la fila 2, y también multiplicamos el mismo renglón 3 por $\frac{10}{0.4}$ y lo sumamos a la fila 1. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 7.375 & 25 & 0.8 \\ 0 & -1.25 & 0 & -1.9921875 & -7.8125 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.275 & 1 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos los 1's en la diagonal principal. Para ello multiplicamos la fila 1, 2 y 3 por $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{1.25}$ y $\frac{1}{0.4}$, respectivamente. Esto nos da la matriz final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.6875 & 12.5 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 1.59375 & 6.25 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6875 & 2.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, concluimos que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.6875 & 12.5 & 0.4 \\ 1.59375 & 6.25 & 0.2 \\ 0.6875 & 2.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

METODO DE GAUSS-SEIDEL

El método de Gauss-Seidel, es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente. Comenzamos con nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

De la ecuación 1 despejemos x_1 , de la ecuación 2 despejemos x_2 , ..., de la ecuación n despejemos x_n . Esto nos da el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 & = & \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{array}$$

Este último conjunto de ecuaciones son las que forman nuestras fórmulas iterativas. Para comenzar el proceso iterativo, le damos el valor de cero a las variables x_2, \dots, x_n ; esto nos dará un primer valor para x_1 . Más precisamente, tenemos que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Enseguida, sustituimos este valor de x_1 en la ecuación 2, y las variables x_3, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero. Esto nos da el siguiente valor para x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)}{a_{22}}$$

Estos últimos valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la ecuación 3, mientras que x_4, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero; y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Todo este paso, nos arrojará una lista de primeros valores para nuestras incógnitas, la cual conforma nuestro primer paso en el proceso iterativo. Digamos que tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 \\x_2 &= \alpha_2 \\\vdots \\x_n &= \alpha_n\end{aligned}$$

Volvemos a repetir el proceso, pero ahora sustituyendo estos últimos datos en vez de ceros como al inicio, obtendremos una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Digamos que ahora tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 \\x_2 &= \beta_2 \\\vdots \\x_n &= \beta_n\end{aligned}$$

En este momento, podemos calcular los errores aproximados relativos, respecto a cada una de las incógnitas. Así, tenemos la lista de errores como sigue:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a1}| &= \left| \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\% \right| \\|\epsilon_{a2}| &= \left| \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} \times 100\% \right| \\\vdots \\|\epsilon_{an}| &= \left| \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n} \times 100\% \right|\end{aligned}$$

El proceso se vuelve a repetir hasta que:

$$|\epsilon_{ai}| < \epsilon_s, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

donde ϵ_s es una cota suficiente prefijada.

Ejemplo 1

Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{aligned}3x_1 - 0.2x_2 - 0.5x_3 &= 8 \\0.1x_1 + 7x_2 + 0.4x_3 &= -19.5 \\0.4x_1 - 0.1x_2 + 10x_3 &= 72.4\end{aligned}$$

hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

Primero despejamos las incógnitas x_1 , x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{8+0.2x_2+0.5x_3}{3} \\x_2 &= \frac{-19.5-0.1x_1-0.4x_3}{7} \\x_3 &= \frac{724-0.4x_1+0.1x_2}{10}\end{aligned}$$

Estas últimas, son nuestro juego de fórmulas iterativas.

Comenzamos el proceso iterativo, sustituyendo los valores de $x_2 = x_3 = 0$ en la primera ecuación, para calcular el primer valor de x_1 :

$$x_1 = 2.66667$$

Ahora, sustituimos $x_1 = 2.66667$ y $x_3 = 0$ en la segunda ecuación, para obtener x_2 :

$$x_2 = -2.82381$$

Ahora sustituimos $x_1 = 2.66667$ y $x_2 = -2.82381$ en la tercera ecuación, para obtener x_3 :

$$x_3 = 7.1051$$

Así, tenemos nuestra primera aproximación a la solución del sistema:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2.66667 \\x_2 &= -2.82381 \\x_3 &= 7.1051\end{aligned}$$

Puesto que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, repetimos el proceso pero ahora con los últimos datos obtenidos para las incógnitas:

Sustituyendo $x_2 = -2.82381$ y $x_3 = 7.1051$ en la ecuación 1 obtenemos $x_1 = 3.6626$. Sustituyendo $x_1 = 3.6626$ y $x_3 = 7.1051$ en la ecuación 2 obtenemos $x_2 = -3.24404$; finalmente, sustituyendo $x_1 = 3.6626$ y $x_2 = -3.24404$ en la ecuación 3 obtenemos $x_3 = 7.06106$. Así, tenemos la segunda lista de valores de aproximación a la solución del sistema:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.6626 \\x_2 &= -3.24404 \\x_3 &= 7.06106\end{aligned}$$

Ahora si podemos calcular los errores absolutos para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{3.6626 - 2.66667}{3.6626} \times 100\% \right| = 27\% \\|\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{-3.24404 + 2.82381}{-3.24404} \times 100\% \right| = 12.9\% \\|\epsilon_{a,3}| &= \left| \frac{7.06106 - 7.1051}{7.06106} \times 100\% \right| = 0.6\%\end{aligned}$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, debemos repetir el mismo proceso con los últimos valores obtenidos de cada una de las incógnitas. Nótese que aunque el error aproximado $|\epsilon_{a,3}|$ ya cumple con ser menor al 1%, esto se debe de cumplir para los tres errores aproximados!

Por lo tanto repetimos el mismo proceso. Omitiendo los pasos intermedios, obtenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.62724 \\x_2 &= -3.24102 \\x_3 &= 7.06250\end{aligned}$$

Y en este caso tenemos los siguientes errores aproximados:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{a,1}| &= 0.09\% \\|\epsilon_{a,2}| &= 0.07\% \\|\epsilon_{a,3}| &= 0.001\%\end{aligned}$$

Vemos que ahora si se ha cumplido el objetivo para cada uno de los errores aproximados. Por lo tanto, concluimos que la solución aproximada es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3.62724 \\x_2 &= -3.24102 \\x_3 &= 7.06250\end{aligned}$$

Observación. Es lógico preguntarse si siempre el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema de ecuaciones y también es lógico esperar que la respuesta es NO.

Un resultado de Análisis Numérico nos da una condición suficiente para la convergencia del método.

Teorema. El método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema si se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz *diagonalmente dominante*, es decir, si se cumple la siguiente condición:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n$$

La condición de ser una matriz diagonalmente dominante simplemente significa que los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del mismo renglón. Nótese que en el ejemplo anterior, la matriz si es diagonalmente dominante y por lo tanto, el método de Gauss-Seidel si converge a la solución del sistema.

Sin embargo, la condición de la matriz diagonalmente dominante, solamente es una condición suficiente pero no necesaria, es decir, existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *sí* convergen a la solución y también existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *no* convergen a la solución.

Finalmente, obsérvese que aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, es posible a veces, lograr que si se cumpla con esta condición mediante un intercambio de renglones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{array}{rrcr} -5x_1 & +1.4x_2 & -2.7x_3 & = & 94.2 \\ 0.7x_1 & -2.5x_2 & +15x_3 & = & -6 \\ 3.3x_1 & -11x_2 & +4.4x_3 & = & -27.5 \end{array}$$

hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

En este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante (¿por qué?). Pero tambien vemos que si intercambiamos los renglones 2 y 3 entonces si es diagonalmente dominante. Así, primero hacemos el intercambio de renglones y nuestro sistema es:

$$\begin{array}{rrcr} -5x_1 & +1.4x_2 & -2.7x_3 & = & 94.2 \\ 3.3x_1 & -11x_2 & +4.4x_3 & = & -27.5 \\ 0.7x_1 & -2.5x_2 & +15x_3 & = & -6 \end{array}$$

Procedemos entonces, a despejar x_1, x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{94.2 - 1.4x_2 + 2.7x_3}{-5} \\ x_2 &= \frac{-27.5 - 3.3x_1 - 4.4x_3}{-11} \\ x_3 &= \frac{-6 - 0.7x_1 + 2.5x_2}{15} \end{aligned}$$

Comenzamos entonces el proceso iterativo sustituyendo los valores de $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 1 para obtener x_1 :

$$x_1 = -18.84$$

Ahora sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 2 para obtener x_2 :

$$x_2 = -3.152$$

Para terminar la primera iteración, sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_2 = -3.152$ en la ecuación 3 para obtener x_3 :

$$x_3 = -0.04613$$

Por lo tanto los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -18.84 \\ x_2 &= -3.152 \\ x_3 &= -0.04613 \end{aligned}$$

Puesto que solo tenemos la primera aproximación de la solución del sistema, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Sustituyendo $x_2 = -3.152$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 1, obtenemos $x_1 = -19.69765$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 2, obtenemos $x_2 = -3.42775$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_2 = -3.42775$ en la ecuación 3, obtenemos $x_3 = -0.05207$. Por lo tanto, nuestra segunda aproximación es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -19.69765 \\ x_2 &= -3.42775 \\ x_3 &= -0.05207 \end{aligned}$$

Y ahora si podemos calcular los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 |\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{-19.69765 + 18.84}{19.69765} \times 100\% \right| = 4.35\% \\
 |\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{-3.42775 + 3.152}{-3.42775} \times 100\% \right| = 8.04\% \\
 |\epsilon_{a,3}| &= \left| \frac{-0.05207 + 0.04613}{-0.05207} \times 100\% \right| = 11.4\%
 \end{aligned}$$

Puesto que no se ha cumplido el objetivo, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Resumimos los resultados como sigue:

Tercera iteración:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -19.77165 \Rightarrow |\epsilon_{a,1}| = 0.3\% \\
 x_2 &= -3.45232 \Rightarrow |\epsilon_{a,2}| = 0.7\% \\
 x_3 &= -0.05271 \Rightarrow |\epsilon_{a,3}| = 1.2\%
 \end{aligned}$$

Cuarta iteración:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -19.77819 \Rightarrow |\epsilon_{a,1}| = 0.03\% \\
 x_2 &= -3.45454 \Rightarrow |\epsilon_{a,2}| = 0.06\% \\
 x_3 &= -0.05277 \Rightarrow |\epsilon_{a,3}| = 0.1\%
 \end{aligned}$$

Así, el objetivo se ha logrado hasta la cuarta iteración y tenemos que los valores aproximados de la solución del sistema son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -19.77819 \\
 x_2 &= -3.45454 \\
 x_3 &= -0.05277
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

NOTA: En todos los ejercicios, redondea tus resultados a cinco decimales.

1. Usa el método de Gauss con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 5x_1 - 8x_2 + x_3 &= -71 \\
 -2x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 134 \\
 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -58
 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } x_1 = -1.00023, \quad x_2 = 6.99985, \quad x_3 = -10.00005$$

2. Usa el método de Gauss con pivoteo para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & -x_2 & & +6x_4 = 2.3 \\ 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & -5x_4 = 6.9 \\ -5x_1 & +x_2 & -3x_3 & = -16.8 \\ & 10x_2 & -4x_3 & +7x_4 = -36 \end{array}$$

Solución: $x_1 = 2,$ $x_2 = -2.3,$ $x_3 = 1.5,$ $x_4 = -1$

3. Usa el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -0.9x_2 & +3x_3 & = -3.61 \\ -0.5x_1 & +0.1x_2 & -x_3 & = 2.035 \\ x_1 & -6.35x_2 & -0.45x_3 & = 15.401 \end{array}$$

Solución: $x_1 = 2.94994,$ $x_2 = -1.70002,$ $x_3 = -3.67996$

4. Usa el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rrcr} 0.7x_1 & +2.7x_2 & -6x_3 & +0.7x_4 = 1.6487 \\ 2x_1 & -0.8x_2 & +3x_3 & -x_4 = -2.342 \\ -x_1 & -1.5x_2 & +1.4x_3 & +3x_4 = -4.189 \\ & 7x_2 & -1.56x_3 & +5x_4 = 15.792 \end{array}$$

Solución: $x_1 = -1.567,$ $x_2 = 3,$ $x_3 = 0.8,$ $x_4 = -0.792$

5. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices usando el método de Gauss-Jordan:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & -3.2 & 5.7 \\ 0 & -6.9 & 1 & 4 \\ -1.1 & 2 & -2.5 & 6 \\ 0.5 & 4.1 & -0.7 & -0.4 \end{pmatrix}$$

Soluciones:

$$\text{i) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & -0.16667 \\ -0.25 & 0.25 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.23415 & 0.28973 & -0.37103 & 0.66859 \\ -0.09998 & 0.08496 & 0.06211 & 0.35659 \\ -0.37307 & 0.55763 & 0.0438 & 0.9171 \\ -0.07919 & 0.25715 & 0.09619 & 0.38584 \end{pmatrix}$$

6. Usa el método de Gauss-Seidel hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$ para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.5x_2 + 0.6x_3 &= 5.24 \\ 0.3x_1 - 4x_2 - x_3 &= -0.387 \\ -0.7x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 14.803 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } x_1 = 1.20991, \quad x_2 = -0.40016, \quad x_3 = 2.35004$$

7. Usa el método de Gauss-Seidel hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$ para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 0.2x_2 + x_3 &= 1.5 \\ 0.1x_1 + 3x_2 - 0.5x_3 &= -2.7 \\ -0.3x_1 + x_2 - 7x_3 &= 9.5 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } x_1 = 0.5629, \quad x_2 = -1.17681, \quad x_3 = -1.54938$$