GUIA DE ESTUDIO III DE CALCULO NUMERICO (230-3114)

INTERPOLACIÓN Y APROXIMACION POLINOMICA

PROFESOR: EDGARD DECENA

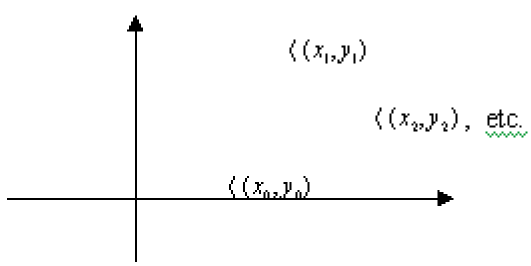
3

En esta guía estudiaremos el importantísimo tema de la interpolación de datos. Comencemos dando la definición general.

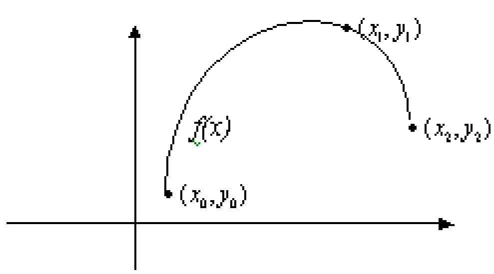
Definición. Dados $n+1$ puntos que corresponden a los datos:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

y los cuales se representan gráficamente como puntos en el plano cartesiano,



Si existe una función $f(x)$ definida en el intervalo $[x_0, x_n]$ (donde suponemos que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 0,1,2,\cdots,n$, entonces a $f(x)$ se le llama una función de interpolación de los datos, cuando es usada para aproximar valores dentro del intervalo $[x_0, x_n]$, y se le llama función de extrapolación de los datos, cuando está definida y es usada para aproximar valores fuera del intervalo.



Evidentemente pueden existir varios tipos de funciones que interpolen los mismos datos; por ejemplo, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones polinomiales, combinaciones de éstas, etc.

El tipo de interpolación que uno elige, depende generalmente de la naturaleza de los datos que se están manejando, así como de los valores intermedios que se están esperando.

Un tipo muy importante es la interpolación por funciones polinomiales. Puesto que evidentemente pueden existir una infinidad de funciones polinomiales de interpolación para una misma tabla de datos, se hace una petición extra para que el polinomio de interpolación, sea único.

Definición. Un polinomio de interpolación es una función polinomial que además de interpolar los datos, es el de menor grado posible.

Caso n=0

Tenemos los datos:

x	x_0
y	y_0

En este caso, tenemos que $f(x) = y_0$ (polinomio constante) es el polinomio de menor grado tal que $f(x_0) = y_0$, por lo tanto, es el polinomio de interpolación.

Caso n=1

Tenemos los datos:

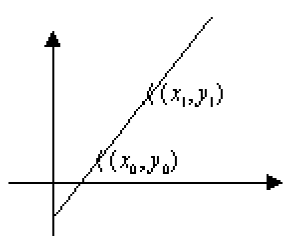
x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

En este caso, el polinomio de interpolación es la función lineal que une a los dos puntos dados. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

es el polinomio de interpolación.

La siguiente gráfica representa este caso:



Observación.

Vemos que en el polinomio de interpolación del caso n=1 se encuentra como primer término, y_0 , que es el polinomio de interpolación del caso n=0.

Continuemos:

Caso n=2

Tenemos los datos:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Para este caso, el polinomio de interpolación va a ser un polinomio de grado 2. Tomando en cuenta la observación anterior, intuímos que el polinomio de interpolación será como sigue:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad + \quad \textbf{término cuadrático}$$

Por lo tanto, planteamos el polinomio de interpolación como sigue:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Si asignamos $x = x_0$, se anulan los valores de b_1 y b_2 , quedándonos el resultado:

$$f(x_0) = b_0$$

Como se debe cumplir que $f(x_0) = y_0$, entonces:

$$y_0 = b_0$$

Si asignamos $x = x_1$, el valor de b_2 queda anulado, resultando lo siguiente:

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

Como se debe cumplir que $f(x_1) = y_1$ y ya sabemos que $y_0 = b_0$, entonces $y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$, de lo cual obtenemos el valor para b_1 :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$$

Asignando $x = x_2$, vamos a obtener :

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Como se debe cumplir que $f(x_2) = y_2$, y ya sabemos que $y_0 = b_0$ y $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$, sustituímos estos datos para después despejar el valor de b_2 :

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

De lo cual podemos hacer un despeje parcial para lograr la siguiente igualdad :

$$\frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0)$$

Ahora en el numerador del miembro izquierdo de la igualdad, le sumamos un cero $\left(-y_1 + y_1\right)$, de tal manera que no se altere la igualdad:

$$\frac{y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = b_2(x_2 - x_0)$$

A continuación, aplicamos un poco de álgebra para así obtener los siguientes resultados:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}\right) = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1}\left[\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - 1\right] = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{\cancel{x_2 - x_1}}\left[\frac{\cancel{x_2 - x_1} - \cancel{x_0} + \cancel{x_0}}{x_1 - x_0}\right] = b_2(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_2(x_2 - x_0)$$

Y finalmente despejando a b_2 vamos a obtener :

$$b_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Por lo tanto, el polinomio de interpolación para este caso es:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

Observación.

Vemos que efectivamente el polinomio de interpolación contiene al del caso anterior, más un término extra que es de un grado mayor, pero además vemos que cada uno de los coeficientes del polinomio de interpolación, se forman a base de cocientes de diferencias de cocientes de diferencias, etc. Esto da lugar a la definición de diferencias divididas finitas de Newton, como sigue:

DIFERENCIAS DIVIDIDAS FINITAS DE NEWTON

Las diferencias divididas finitas de Newton, se define de la siguiente manera:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$\vdots$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0}$$

A manera de ejemplo citemos el siguiente caso específico :

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

donde a su vez:

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$$

y

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_{01}}$$

Y donde a su vez:

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

etc.

Podemos ahora definir nuestro primer tipo de polinomio de interpolación.

POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Dados $n+1$ datos:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

- El polinomio de interpolación de Newton se define de la siguiente manera:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde :

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, \cdots, x_0]$$

Para calcular los coeficientes $b_0, b_1, \cdots, b_n$, es conveniente construir una tabla de diferencias divididas como la siguiente :

$$\begin{array}{lllll}
x_0 \to f(x_0) & \to f[x_1, x_0] & \to f[x_2, x_1, x_0] & \to f[x_3, x_2, x_1, x_0] & \to f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
x_1 \to f(x_1) & \to f[x_2, x_1] & \to f[x_3, x_2, x_1] & \to f[x_4, x_3, x_2, x_1] & \\
x_2 \to f(x_2) & \to f[x_3, x_2] & \to f[x_4, x_3, x_2] & & \\
x_3 \to f(x_3) & \to f[x_4, x_3] & & & \\
x_4 \to f(x_4) & & & &
\end{array}$$

Obsérvese que los coeficientes del polinomio de interpolación de Newton, se encuentran en la parte superior de la tabla de diferencias divididas.

<u>Ejemplo 1</u>**.** Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos :

x	-2	-1	2	3
y	4	6	9	3

Y utilizar la información de dicha tabla, para construir el polinomio de interpolación de Newton.

Solución.

Procedemos como sigue:

$$
\begin{array}{cc|c|c|c}
-2 & 4 & \frac{6-4}{-1-(-2)}=2 & \frac{1-2}{2-(-2)}=-0.25 & \frac{-1.75-(-0.25)}{3-(-2)}=-0.3 \\
-1 & 6 & \frac{9-6}{2-(-1)}=1 & \frac{-6-1}{3-(-1)}=-1.75 & \\
2 & 9 & \frac{3-9}{3-2}=-6 & & \\
3 & 3 & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto el polinomio de interpolación de Newton es :

$$f(x) = 4 + 2(x+2) - 0.25(x+2)(x+1) - 0.3(x+2)(x+1)(x-2)$$

Ejemplo 2. Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos :

x	-3	-2	0	4
y	5	8	4	2

Y usar la información en la tabla, para construir el polinomio de interpolación de Newton.

Solución. Procedemos como sigue:

$$
\begin{array}{cc|c|c|c}
-3 & 5 & \frac{8-5}{-2-(-3)}=3 & \frac{-2-3}{0-(-3)}=-1.66667 & \frac{0.25-(-1.66667)}{4-(-3)}=-0.20238 \\
-2 & 8 & \frac{4-8}{0-(-2)}=-2 & \frac{-0.5-(-2)}{4-(-2)}=0.25 & \\
0 & 4 & \frac{2-4}{4-0}=-0.5 & & \\
4 & 2 & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto el polinomio de interpolación de Newton nos queda :

$$f(x) = 5 + 3(x+3) - 1.66667(x+3)(x+2) - 0.20238(x+3)(x+2)(x)$$

Antes de ver el siguiente tipo de polinomio de interpolación, veamos como el imponer la restricción del grado mínimo, implica la unicidad del polinomio de interpolación.

TEOREMA .

Si $x_0, x_1, \cdots, x_n$ son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios $y_0, y_1, \cdots, y_n$ existe un polinomio único $f_n(x)$, de a lo más grado n, y tal que:

$f_n(x_i) = y_i$ para toda $i = 0,1,2,\cdots,n$

DEMOSTRACIÓN.

En realidad, no probaremos formalmente la existencia de un polinomio de interpolación, aunque informalmente aceptamos que dada cualquier tabla de datos, el polinomio de Newton siempre existe.

Probemos la unicidad del polinomio de interpolación.

Supongamos que $g_n(x)$ es otro polinomio de interpolación de a lo más grado n,

Sea $h_n(x) = f_n(x) - g_n(x)$

$$\therefore h_n(x_i) = f_n(x_i) - g_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad \textbf{\textit{para todo}} \quad i = 0,1,2\cdots,n$$

Por lo tanto, $h_n(x)$ tiene $n+1$ raíces distintas, y es un polinomio de grado a lo más n, esto solamente es posible si $h_n(x) = 0$ **.**

$\therefore f_n(x) = g_n(x)$

Que es lo que queríamos probar.

Sin embargo, aunque el polinomio de interpolación es único, pueden existir diversas formas de encontrarlo. Una, es mediante el polinomio de Newton, otra mediante el polinomio de Lagrange.

POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Nuevamente tenemos los datos :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

El *polinomio de interpolación de Lagrange* se plantea como sigue:

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

Donde los polinomios $l_i(x)$ se llaman los polinomios de Lagrange, correspondientes a la tabla de datos.

Como se debe satisfacer que $P(x_0) = y_0$, esto se cumple si $l_0(x_0) = 1$ y $l_i(x_0) = 0$ para toda $i \neq 0$.

Como se debe satisfacer que $P(x_1) = y_1$, esto se cumple si $l_1(x_1) = 1$ y $l_i(x_1) = 0$ para toda $i \neq 1$.

Y así sucesivamente, veremos finalmente que la condición $P_n(x_n) = y_n$ se cumple si $l_n(x_n) = 1$ y $l_i(x_n) = 0$ para toda $i \neq n$.

Esto nos sugiere como plantear los polinomios de Lagrange. Para ser más claros, analicemos detenidamente el polinomio $l_0(x)$. De acuerdo al análisis anterior vemos que deben cumplirse las siguientes condiciones para $l_0(x)$:

$$l_0(x_0) = 1 \quad \text{y} \quad l_0(x_j) = 0, \quad \text{para toda} \quad j \neq 0$$

Por lo tanto, planteamos $l_0(x)$ como sigue:

$$l_o(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Con esto se cumple la segunda condición sobre $l_0(x)$. La constante c se determinará para hacer que se cumpla la primera condición:

$$l_0(x_0) = 1 \Rightarrow 1 = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

Por lo tanto el polinomio $l_0(x)$ queda definido como:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

Análogamente se puede deducir que:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \quad , \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 1

Calcular el polinomio de Lagrange usando los siguientes datos:

x	1	3	5	7
y	-2	1	2	-3

Solución. Tenemos que:

$$f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l\ (x) + y_3 l_3(x)$$
$$f(x) = -2l_0(x) + l_1(x) + 2l_2(x) - 3l_3(x)$$

donde:

$$l_0(x) = \frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(-2)(-4)(-6)} = \frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{-48}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{16}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(4)(2)(-2)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{-16}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(6)(4)(2)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{48}$$

Sustituyendo arriba, el polinomio de Lagrange queda definido como sigue:

$$f(x) = \left[\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{24}\right] + \left[\frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{16}\right] - \left[\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{8}\right] - \left[\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{16}\right]$$

Ejemplo 2.

Calcular el polinomio de Lagrange usando los siguientes datos:

x	-2	0	2	4
y	1	-1	3	-2

Solución. Tenemos que:

$$f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l\ (x) + y_3 l_3(x)$$
$$f(x) = l_0(x) - l_1(x) + 3l_2(x) - 2l_3(x)$$

donde:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-2)(-4)(-6)} = \frac{x(x-2)(x-4)}{-48}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(2)(-2)(-4)} = \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{16}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(4)(2)(-2)} = \frac{x(x+2)(x-4)}{-16}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(6)(4)(2)} = \frac{x(x+2)(x-2)}{48}$$

Sustituyendo arriba, el polinomio de Lagrange queda como sigue:

$$f(x) = \left[\frac{x(x-2)(x-4)}{-48}\right] - \left[\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{16}\right] + 3\left[\frac{x(x+2)(x-4)}{-16}\right] - \left[\frac{x(x+2)(x-2)}{24}\right]$$

En la guía de integración numérica, usaremos nuevamente a los polinomios de Lagrange.

EJERCICIOS

<u>NOTA</u>: CUANDO SEA NECESARIO, REDONDEA A CINCO DECIMALES.

1. **1.** Calcule el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos:

i)

x	2	-2	1	4
y	0.5	-3	2.4	7.8

ii)

x	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
y	-3	0	-6	9	-12

Soluciones:

$i)\ f(x) = 0.5 + 0.875(x-2) - 0.925(x-2)(x+2) + 0.4625(x-2)(x+2)(x-1)$

$$ii)\ f(x) = -3 + 10(x-0.3) - 50(x-0.3)(x-0.6) + 185.18519(x-0.3)(x-0.6)(x-0.9) - 447.53088(x-0.3)(x-0.6)(x-0.9)(x-1.2)$$

2. Calcule el polinomio de Lagrange para los siguientes datos:

i)

x	1	-2	3	-5
y	1.56	3.54	-2.57	-8.9

ii)

x	-1.5	-0.5	1	-2	-4
y	9	-2	5	33	0

Soluciones:

$$i)\ p(x) = 1.56\left[\frac{(x+2)(x-3)(x+5)}{-36}\right] + 3.54\left[\frac{(x-1)(x-3)(x+5)}{45}\right] - 2.57\left[\frac{(x-1)(x+2)(x+5)}{80}\right] - 8.9\left[\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{-144}\right]$$

$$ii)\ p(x) = 9\left[\frac{(x+0.5)(x-1)(x+2)(x+4)}{3.125}\right] - 2\left[\frac{(x+1.5)(x-1)(x+2)(x+4)}{-7.875}\right] + 5\left[\frac{(x+1.5)(x+0.5)(x+2)(x+4)}{56.25}\right] + 33\left[\frac{(x+1.5)(x+0.5)(x-1)(x+4)}{-4.5}\right]$$