

**GUIA DE ESTUDIO II DE CALCULO NUMERICO (230-3114)**  
**SOLUCION DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE**  
**PROFESOR: EDGARD DECENA**

2

**EL MÉTODO DE BISECCIÓN**

El método de bisección se fundamenta en el Teorema del Valor Intermedio el cual plantea que si  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$  si  $f(a) \cdot f(b) < 0$  entonces existe un número  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

El método de bisección sigue los siguientes pasos:

Sea  $f(x)$  una función continua,

i) Encontrar valores iniciales  $x_a$ ,  $x_b$  tales que  $f(x_a)$  y  $f(x_b)$  tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre  $x_a$  y  $x_b$ :

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

iii) Evaluar  $f(x_r)$ . Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

Caso 1:  $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$

En este caso, tenemos que  $f(x_a)$  y  $f(x_r)$  tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo  $[x_a, x_r]$ .

Caso 2:  $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$

En este caso, tenemos que  $f(x_a)$  y  $f(x_r)$  tienen el mismo signo, y de aquí que  $f(x_r)$  y  $f(x_b)$  tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo  $[x_r, x_b]$ .

Caso 3:  $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$

En este caso se tiene que  $f(x_r) = 0$  y por lo tanto ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s,$$

es decir,

$$\left| \frac{x_{actual} - x_{previa}}{x_{actual}} \times 100\% \right| < \epsilon_s$$

La codificación en pseudocódigo del algoritmo de bisección es el que sigue:

```

Linea 1:  Algoritmo Biseccion ( f(x), [a, b], Es, NI )
Linea 2:    Ea = 100      "Error aproximado relativo.
Linea 3:    I = 1         "Contador del número de iteraciones.
Linea 4:    M_Actual = 0  "Punto medio actual.
Linea 5:    M_Previa = 0 "Punto medio previo.

Linea 6:    Mientras ( I < NI ) Y ( Ea > Es )
Linea 7:      M_Previa = M_Actual
Linea 8:      M_Actual = ( a + b )/2

Linea 9:      Si f(M_Actual)*f(b) < 0 Entonces
Linea 10:        a = M_Actual
Linea 11:      Sino
Linea 12:        b = M_Actual
Linea 13:      Fin Si

Linea 14:      Si I > 1 Entonces
Linea 15:        Ea = Valor_Absoluto( (M_Actual -
Linea 16:          M_Previa)/M_Actual)*100
Linea 16:      Fin Si

Linea 17:      I = I + 1

Linea 18:    Fin Mientras

Linea 19:    Mostrar M_Actual
Linea 20:    Mostrar Ea
Linea 21:    Mostrar I

Linea 22:  Fin Algoritmo
    
```

### **Ejemplo 1**

Aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x} - \ln x$  por el método de bisección en el intervalo  $[1, 1.5]$  hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

#### ***Solución***

Para poder aplicar el método de bisección debemos constatar que  $f(1)$  y  $f(1.5)$  tengan signos opuestos.

En efecto, tenemos que

$$f(1) = e^{-1} - \ln 1 = e^{-1} > 0$$

mientras que

$$f(1.5) = e^{-1.5} - \ln(1.5) = -0.18233 < 0$$

Cabe mencionar que la función  $f(x)$  sí es continua en el intervalo  $[1, 1.5]$ . Así pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de bisección. Comenzamos:

i) Calculamos el punto medio (que es de hecho nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{n_1} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

ii) Evaluamos  $f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0636 > 0$

iii) Para identificar mejor en que nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$f(1)$	$f(1.25)$	$f(1.5)$
+	+	-
	↑	↑

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo  $[1.25, 1.5]$ .

En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo  $[1.25, 1.5]$ .

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r_1} = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que contamos ya con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_1} - x_{r_0}}{x_{r_1}} \times 100\% \right| = 9.09\%$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

Evalúamos  $f(1.375) = e^{-1.375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$ , y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
+	-	-

Así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo  $[1.25, 1.375]$ .

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_1} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

Y calculamos el nuevo error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_2} - x_{r_1}}{x_{r_2}} \times 100\% \right| = 4.76\%$$

El proceso debe seguirse hasta cumplir el objetivo.

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1.25	
1.375	9.09%
1.3125	4.76%
1.28125	2.43%
1.296875	1.20%
1.3046875	0.59%

Así, obtenemos como aproximación a la raíz  $x_{r_4} = 1.3046875$

**Ejemplo 2**

Aproximar la raíz de  $f(x) = \arctan x + x - 1$  por medio del algoritmo de bisección en el intervalo  $[0,1]$  hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución**

Para poder aplicar el método de bisección, es importante constatar que se cumplen las hipótesis requeridas.

Sabemos que  $f(x)$  es continua en el intervalo  $[0,1]$ , y verificamos que  $f(0)$  y  $f(1)$  tengan signos opuestos.

En efecto,

$$f(0) = \arctan 0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

Mientras que,

$$f(1) = \arctan 1 + 1 - 1 = 0.7853 > 0$$

Por lo tanto, sí podemos aplicar el método de bisección.

Calculamos el punto medio del intervalo  $[0,1]$ ,


$$x_{r_1} = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

Que es la primera aproximación a la raíz de  $f(x)$ .

Evaluamos  $f(0.5) = \arctan(0.5) + 0.5 - 1 = -0.0363 < 0$ .

Y hacemos nuestra tabla de signos,

$f(0)$	$f(0.5)$	$f(1)$
-	-	+



Puesto que  $f(0.5)$  y  $f(1)$  tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo  $[0.5,1]$ .

En este punto, solo contamos con una aproximación, a saber,  $x_{r_1} = 0.5$ , que es el primer punto medio calculado.

Repetimos el proceso, es decir, calculamos el punto medio ahora del intervalo  $[0.5, 1]$ ,

$$x_{r_2} = \frac{1 + 0.5}{2} = 0.75$$

Que es la nueva aproximación a la raíz de  $f(x)$ .

Aquí podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.75 - 0.5}{0.75} \times 100\% \right| = 33.33\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos  $f(0.75) = \arctan(0.75) + 0.75 - 1 = 0.3935 > 0$ .

Y hacemos la tabla de signos:

$f(0.5)$	$f(0.75)$	$f(1)$
-	+	+

Puesto que  $f(0.5)$  y  $f(0.75)$  tienen signos opuestos, entonces la raíz se localiza en el intervalo  $[0.5, 0.75]$ .

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_3} = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

Y el nuevo error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.625 - 0.75}{0.625} \times 100\% \right| = 20\%$$

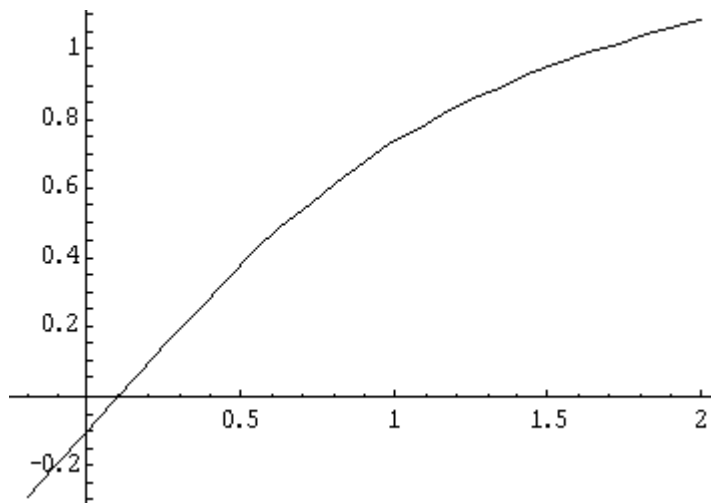
El proceso se debe continuar hasta que se logre el objetivo.

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0.5	
0.75	33.33%
0.625	20%
0.5625	11.11%
0.53125	5.88%
0.515625	3.03%
0.5234375	1.49%
0.51953125	0.75%

De lo cual, vemos que la aproximación buscada es  $x_{r_8} = 0.51953125$

El método de bisección por lo general es lento, y en casos como el de la siguiente gráfica, puede ser demasiado lento.



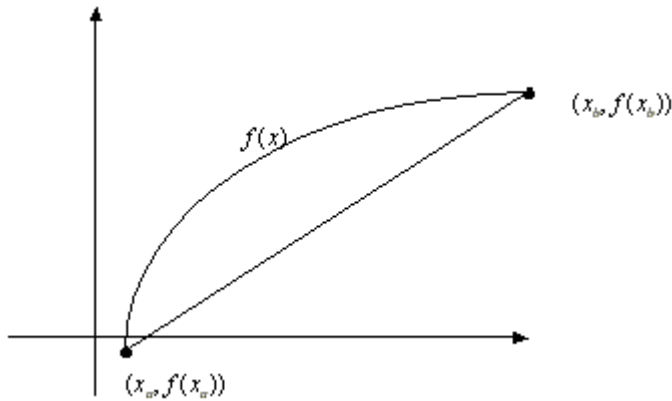
En un caso como éste, el proceso de bisección comienza a acercarse a la raíz de forma muy lenta, ya que el método solamente toma en cuenta que la raíz se encuentra dentro del intervalo, sin importar si se encuentra más cerca de alguno de los extremos del intervalo. Sería bueno implementar un método que tome en cuenta este detalle.

Esto da lugar al siguiente método de aproximación de raíces.

### EL MÉTODO DE LA REGLA FALSA

Como mencionamos anteriormente, sería bueno considerar si la raíz de una ecuación está localizada más cerca de alguno de los extremos del intervalo.

Consideremos nuevamente una gráfica como la anterior,



Donde hemos agregado la línea recta que une los puntos extremos de la gráfica en el intervalo  $[a, b]$ .

Es claro que si en lugar de considerar el punto medio del intervalo, tomamos el punto donde cruza al eje  $x$  esta recta, nos aproximaremos mucho más rápido a la raíz; ésta es en sí, la idea central del método de la regla falsa y ésta es realmente la única diferencia con el método de bisección, puesto que en todo lo demás los dos métodos son prácticamente idénticos.

Supongamos que tenemos una función  $f(x)$  que es continua en el intervalo  $[x_a, x_b]$  y además,  $f(x_a)$  y  $f(x_b)$  tienen signos opuestos.

Calculemos la ecuación de la línea recta que une los puntos  $(x_a, f(x_a))$ ,  $(x_b, f(x_b))$ . Sabemos que la pendiente de esta recta está dada por:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y - f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} (x - x_a)$$

Para obtener el cruce con el eje  $x$ , hacemos  $y = 0$ :

$$-f(x_a) = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} (x - x_a)$$

Multiplicando por  $x_b - x_a$  nos da:

$$-f(x_a)(x_b - x_a) = (f(x_b) - f(x_a))(x - x_a)$$

Finalmente, de aquí despejamos  $x$ :



$$x = x_2 - \left[ \frac{f(x_2)(x_b - x_2)}{f(x_b) - f(x_2)} \right]$$

Este punto es el que toma el papel de  $x_r$  en lugar del punto medio del método de bisección; de esta forma, **la línea 8 del pseudocódigo del algoritmo de bisección se intercambia por este nuevo  $x_r$** .

Así pues, el método de la regla falsa sigue los siguientes pasos:

Sea  $f(x)$  continua,

i) Encontrar valores iniciales  $x_a$ ,  $x_b$  tales que  $f(x_a)$  y  $f(x_b)$  tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$$

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual a:

$$x_r = x_2 - \left[ \frac{f(x_2)(x_b - x_2)}{f(x_b) - f(x_2)} \right]$$

iii) Evaluar  $f(x_r)$ . Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

Caso 1:  $f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$

En este caso, tenemos que  $f(x_a)$  y  $f(x_r)$  tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo  $[x_a, x_r]$ .

Caso 2:  $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$

En este caso, tenemos que  $f(x_a)$  y  $f(x_r)$  tienen el mismo signo, y de aquí que  $f(x_r)$  y  $f(x_b)$  tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo  $[x_r, x_b]$ .

Caso 3:  $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$

En este caso se tiene que  $f(x_r) = 0$  y por lo tanto ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\epsilon_a| < \epsilon_s$$

**Ejemplo 1**

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x} - \ln x$ , comenzando en el intervalo  $[1, 2]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución**

Este es el mismo ejemplo 1 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que  $f(x)$  es continua en el intervalo dado y que toma signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Por lo tanto podemos aplicar el método de la regla falsa.

Calculamos la primera aproximación:

$$x_{r_1} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 2 - \frac{f(2)[1 - 2]}{f(1) - f(2)} = 1.397410482$$

Puesto que solamente tenemos una aproximación, debemos seguir con el proceso.

Así pues, evaluamos  $f(x_{r_1}) = e^{-1.397410482} - \ln(1.397410482) = -0.087384509 < 0$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(1)$	$f(1.397410482)$	$f(2)$
+	-	-
↑	↑	

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo  $[1, 1.397410482]$ .  
Con este nuevo intervalo, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = x_b - \frac{f(x_b)[x_a - x_b]}{f(x_a) - f(x_b)} = 1.397410482 - \frac{f(1.397410482)[1 - 1.397410482]}{f(1) - f(1.397410482)}$$

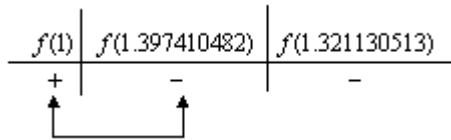
$$x_{r_2} = 1.321130513$$

En este momento, podemos calcular el primer error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.321130513 - 1.397410482}{1.321130513} \times 100\% \right| = 5.77\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo seguimos con el proceso.

Evaluamos  $f(x_{r_2}) = f(1.321130513) = -0.011654346 < 0$ , y hacemos la tabla de signos:



De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo  $[1.1.321130513]$ , con el cual, podemos calcular la nueva aproximación:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.321130513 - \frac{f(1.321130513) \cdot [1 - 1.321130513]}{f(1) - f(1.321130513)}$$

$$x_2 = 1.311269556$$

Y el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.311269556 - 1.321130513}{1.311269556} \times 100\% \right| = 0.75\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_2 = 1.311269556$$

Observe la rapidez con la cual converge el método de la regla falsa a la raíz, a diferencia de la lentitud del método de la bisección.

### **Ejemplo 2**

Usar el método de la regla falsa para aproximar la raíz de  $f(x) = \arctan x + x - 1$ , comenzando en el intervalo  $[0,1]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

#### ***Solución***

Este es el mismo ejemplo 2 del método de la bisección. Así pues, ya sabemos que se cumplen las hipótesis necesarias para poder aplicar el método, es decir, que  $f(x)$  sea continua en el intervalo dado y que  $f(x)$  tome signos opuestos en los extremos de dicho intervalo.

Calculamos pues, la primera aproximación:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_2 - x_0)}{f(x_2) - f(x_0)} = 1 - \frac{f(1) \cdot [0 - 1]}{f(0) - f(1)} = 0.5600991535$$

Como solamente tenemos una aproximación, debemos avanzar en el proceso.

Evaluamos  $f(x_1) = \arctan(0.5600991535) + 0.5600991535 = 0.070662953 > 0$

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5600991535)$	$f(1)$
-	+	+
↑	↑	

De lo cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo  $[0, 0.5600991535]$ .

Así pues, calculamos la nueva aproximación:

$$x_{r_2} = 0.5600991535 - \frac{f(0.5600991535) [0 - 0.5600991535]}{f(0) - f(0.5600991535)} = 0.5231330281$$

Y calculamos el error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5231330281 - 0.5600991535}{0.5231330281} \times 100\% \right| = 7.06\%$$

Puesto que no se cumple el objetivo, seguimos avanzando en el proceso.

Evaluamos  $f(x_{r_2}) = \arctan(0.5231330281) + 0.5231330281 - 1 = 0.00511533 > 0$ .

Y hacemos nuestra tabla de signos:

$f(0)$	$f(0.5231330281)$	$f(0.5600991535)$
-	+	+
↑	↑	

De los cual vemos que la raíz se localiza en el intervalo  $[0, 0.5231330281]$ , con el cual podemos calcular al siguiente aproximación:

$$x_{r_3} = 0.5231330281 - \frac{f(0.5231330281) \cdot [0 - 0.5231330281]}{f(0) - f(0.5231330281)} = 0.5204706484$$

Y el siguiente error aproximado:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5204706484 - 0.5231330281}{0.5204706484} \times 100\% \right| = 0.51\%$$

Como se ha cumplido el objetivo, concluimos que la aproximación buscada es:

$$x_{r_2} = 0.5204706484$$

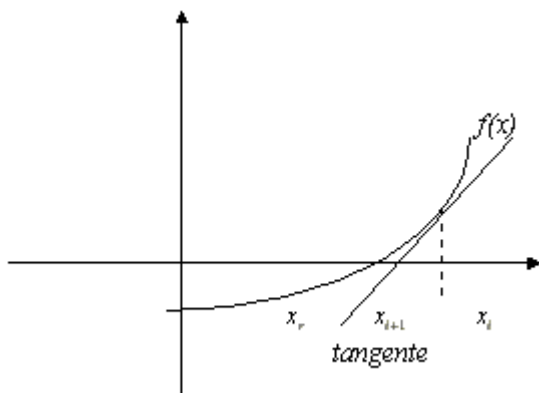
Nuevamente observamos el contraste entre la rapidez del método de la regla falsa contra la lentitud del método de la bisección.

Por supuesto que puede darse el caso en el que el método de la regla falsa encuentre la aproximación a la raíz de forma más lenta que el método de la bisección. Como ejercicio, el estudiante puede aplicar ambos métodos a la función  $f(x) = x^6 - 1$ , comenzando en el intervalo  $[0, 1.5]$ , donde notará que mientras que el método de bisección requiere de 8 aproximaciones para lograr que  $|\epsilon_a| < 1\%$ , el método de la regla falsa necesita hasta 16 aproximaciones.

### EL MÉTODO DE NEWTON — RAPHSON

Este método, el cual es un método iterativo, es uno de los más usados y efectivos. A diferencia de los métodos anteriores, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Supongamos que tenemos la aproximación  $x_i$  a la raíz  $x_r$  de  $f(x)$ ,



Trazamos la recta tangente a la curva en el punto  $(x_i, f(x_i))$ ; ésta cruza al eje  $x$  en un punto  $x_{i+1}$  que será nuestra siguiente aproximación a la raíz  $x_r$ .

Para calcular el punto  $x_{i+1}$ , calculamos primero la ecuación de la recta tangente. Sabemos que tiene pendiente

$$m = f'(x_i)$$

Y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Hacemos  $y = 0$  :

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Y despejamos  $x$  :

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \text{ si } f'(x_i) \neq 0$$

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde si converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

También observe que en el caso de que  $f'(x_i) = 0$ , el método no se puede aplicar. De hecho, vemos geoméricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje  $x$  en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso  $x_i$  mismo es una raíz de  $f(x)$  !

### **Ejemplo 1**

Usar el método de Newton-Raphson, para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x} - \ln x$ , comenzando con  $x_0 = 1$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

### ***Solución***

En este caso, tenemos que

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$$

De aquí tenemos que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$

Comenzamos con  $x_0 = 1$  y obtenemos:

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1.268941421$$

En este caso, el error aproximado es,

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\% \right| = 21.19\%$$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

De lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:

$$x_3 = 1.309799389$$

## **Ejemplo 2**

Usar el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de  $f(x) = \arctan x + x - 1$ , comenzando con  $x_0 = 0$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

### ***Solución***

En este caso, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1$$

La cual sustituimos en la fórmula de Newton-Raphson para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\arctan(x_i) + x_i - 1}{\frac{1}{1+x_i^2} + 1}$$

Comenzamos sustituyendo  $x_0 = 0$  para obtener:

$$x_1 = x_0 - \frac{\arctan(x_0) + x_0 - 1}{\frac{1}{1+x_0^2} + 1} = 0.5$$

En este caso tenemos un error aproximado de  $|\epsilon_a| = \left| \frac{0.5 - 0}{0.5} \times 100\% \right| = 100\%$

Continuamos con el proceso hasta lograr el objetivo. Resumimos los resultado en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0	
0.5	100%
0.5201957728	3.88%
0.5202689918	0.01%

De lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:

$$x_3 = 0.5202689918$$

### **Ejemplo 3**

Usar el método de Newton-Raphson para aproximar raíces cuadradas de números reales positivos.

#### ***Solución***

Sea  $R > 0$ . Queremos calcular  $x$  tal que  $x = \sqrt{R}$ ; elevando al cuadrado  $x^2 = R$ , o bien:

$$x^2 - R = 0$$

Esto nos sugiere definir la función  $f(x) = x^2 - R$  de donde  $f'(x) = 2x$ . Al sustituir estos datos en la fórmula de Newton-Raphson nos da:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - R}{2x_i}$$

La cual simplificada nos da:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left[ x_i + \frac{R}{x_i} \right]$$

Esta fórmula era conocida por los antiguos griegos (Herón).

Para fijar un ejemplo de su uso, pongamos  $R = 26$  y apliquemos la fórmula obtenida, comenzando con  $x_0 = 5$ . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:



Aprox. a la raíz	Error aprox.
5	
5.1	1.96%
5.099019608	0.019%
5.099019514	0.0000018%

De lo cual concluimos que  $\sqrt{26} \approx 5.099019514$ , la cual es correcta en todos sus dígitos!

La misma idea puede aplicarse para crear algoritmos que aproximen raíces  $n$ -ésimas de números reales positivos.

Los métodos abiertos, y particularmente el método de Newton-Raphson, no siempre convergen. Puede demostrarse matemáticamente que en el caso del método de Newton-Raphson una condición necesaria y suficiente de convergencia es que:

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Observe que cuando el método de Newton-Raphson converge a la raíz, lo hace de una forma muy rápida y de hecho, observamos que el error aproximado disminuye a pasos agigantados en cada paso del proceso. Aunque no es nuestro objetivo establecer formalmente las cotas para los errores en cada uno de los métodos que hemos estudiado, cabe mencionar que si existen estas cotas que miden con mayor precisión la rapidez ó lentitud del método en estudio.

### EL MÉTODO DE LA SECANTE

Este método se basa en la fórmula de Newton-Raphson, pero evita el cálculo de la derivada usando la siguiente aproximación:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Sustituyendo en la fórmula de Newton-Raphson, obtenemos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \approx x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}}$$

$$x_{i+1} \approx x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Que es la fórmula del método de la secante. Nótese que para poder calcular el valor de  $x_{i+1}$ , necesitamos conocer los dos valores anteriores  $x_i$  y  $x_{i-1}$ .

Obsérvese también, el gran parecido con la fórmula del método de la regla falsa. La diferencia entre una y otra es que mientras el método de la regla falsa trabaja sobre intervalos cerrados, el método de la secante es un proceso iterativo y por lo mismo, encuentra la aproximación casi con la misma rapidez que el método de Newton-Raphson. Claro, corre el mismo riesgo de éste último de no converger a la raíz, mientras que el método de la regla falsa va a la segura.

### **Ejemplo 1**

Usar el método de la secante para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x^2} - x$ , comenzando con  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

### **Solución**

Tenemos que  $f(x_0) = 1$  y  $f(x_1) = -0.632120558$ , que sustituimos en la fórmula de la secante para calcular la aproximación  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \left[ \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \right] = 0.612699837$$

Con un error aproximado de:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 100\% \right| = 63.2\%$$

Como todavía no se logra el objetivo, continuamos con el proceso. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0	
1	100%
0.612699837	63.2%
0.653442133	6.23%
0.652917265	0.08%

De lo cual concluimos que la aproximación a la raíz es:

$$x_4 = 0.652917265$$

### **Ejemplo 2**

Usar el método de la secante para aproximar la raíz de  $f(x) = \arctan x - 2x + 1$ , comenzando con  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 1$ , y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución**

Tenemos los valores  $f(x_0) = 1$  y  $f(x_1) = -0.214601836$ , que sustituimos en la fórmula de la secante para obtener la aproximación  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \left[ \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \right] = 0.823315073$$

Con un error aproximado de:

$$|e_2| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 100\% \right| = 21.46\%$$

Como todavía no se logra el objetivo, continuamos con el proceso. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0	
1	100%
0.823315073	21.4%
0.852330280	3.40%
0.853169121	0.09%

De lo cual concluimos que la aproximación a la raíz es:

$$x_4 = 0.853169121$$

**EL MÉTODO DE ITERACIÓN DEL PUNTO FIJO**

Este método se aplica para resolver ecuaciones de la forma

$$x = g(x)$$

Si la ecuación es  $f(x) = 0$ , entonces puede despejarse  $x$  ó bien sumar  $x$  en ambos lados de la ecuación para ponerla en la forma adecuada.

**Ejemplos:**

1) La ecuación  $\cos x - x = 0$  se puede transformar en  $\cos x = x$ .

2) La ecuación  $\tan x - e^{-x} = 0$  se puede transformar en  $x + \tan x - e^{-x} = x$ .

Dada la aproximación  $x_i$ , la siguiente iteración se calcula con la fórmula:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Supongamos que la raíz verdadera es  $x_r$ , es decir,

$$x_r = g(x_r)$$

Restando las últimas ecuaciones obtenemos:

$$x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i)$$

Por el Teorema del Valor Medio para derivadas, sabemos que si  $g(x)$  es continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$  entonces existe  $\xi \in (a, b)$  tal que  $g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ .

En nuestro caso, existe  $\xi$  en el intervalo determinado por  $x_i$  y  $x_r$  tal que:

$$g'(\xi) = \frac{g(x_r) - g(x_i)}{x_r - x_i}$$

De aquí tenemos que:

$$g(x_r) - g(x_i) = g'(\xi) \cdot (x_r - x_i)$$

O bien,

$$x_r - x_{i+1} = g'(\xi) \cdot (x_r - x_i)$$

Tomando valor absoluto en ambos lados,

$$|x_r - x_{i+1}| = |g'(\xi)| \cdot |x_r - x_i|$$

Observe que el término  $|x_r - x_{i+1}|$  es precisamente el error absoluto en la  $(i + 1)$ -ésima iteración, mientras que el término  $|x_r - x_i|$  corresponde al error absoluto en la  $i$ -ésima iteración.

Por lo tanto, solamente si  $|g'(\xi)| < 1$ , entonces se disminuirá el error en la siguiente iteración. En caso contrario, el error irá en aumento.

En resumen, el método de iteración del punto fijo converge a la raíz si  $|g'(x)| < 1$  para  $x$  en un intervalo  $[a, b]$  que contiene a la raíz y donde  $g(x)$  es continua y diferenciable, pero diverge si  $|g'(x)| > 1$  en dicho intervalo.

Analicemos nuestros ejemplos anteriores:

- En el ejemplo 1,  $g(x) = \cos x$  y claramente se cumple la condición de que  $|g'(x)| < 1$ . Por lo tanto el método sí converge a la raíz.
- En el ejemplo 2,  $g(x) = x + \tan x - e^{-x}$  y en este caso,  $|g'(x)| = |1 + \sec^2 x + e^{-x}| > 1$ . Por lo tanto, el método no converge a la raíz.

Para aclarar el uso de la fórmula veamos dos ejemplos:

### **Ejemplo 1**

Usar el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de  $f(x) = \cos x - x$ , comenzando con  $x_0 = 0$  y hasta que  $|\epsilon_n| < 1\%$ .

#### ***Solución***

Como ya aclaramos anteriormente, el método sí converge a la raíz.

Aplicando la fórmula iterativa tenemos,

$$x_1 = g(x_0) = \cos 0 = 1$$

Con un error aproximado de 100%

Aplicando nuevamente la fórmula iterativa tenemos,

$$x_2 = g(x_1) = \cos 1 = 0.540302305$$

Y un error aproximado de 85.08%.

Intuimos que el error aproximado se irá reduciendo muy lentamente. En efecto, se necesitan hasta 13 iteraciones para lograr reducir el error aproximado menor al 1%. El resultado final que se obtiene es:

$$x_{13} = 0.7414250866$$

Con un error aproximado igual al 0.78%.

### **Ejemplo 2**

Usar el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de  $f(x) = x^2 - 5x - e^x$ , comenzando con  $x_0 = 0$  y hasta que  $|\epsilon_n| < 1\%$ .

#### ***Solución***

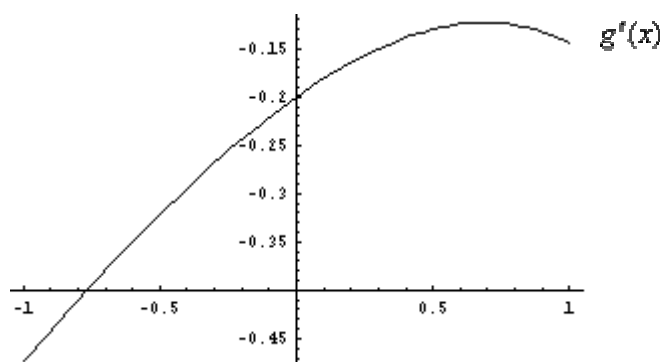
Si despejamos la  $x$  del término lineal, vemos que la ecuación equivale a

$$\frac{x^2 - e^x}{5} = x$$

de donde,

$$g(x) = \frac{x^2 - e^x}{5}$$

En este caso, tenemos que  $g'(x) = \frac{2x - e^x}{5}$ . Un vistazo a la gráfica,



nos convence que  $|g'(x)| < 1$ , para  $x \in [-1, 1]$ , lo que es suficiente para deducir que el método sí converge a la raíz buscada.

Aplicando la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_1 = g(x_0) = -0.2$$

Con un error aproximado del 100%.

Aplicando nuevamente la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_2 = g(x_1) = -0.1557461506$$

Con un error aproximado igual al 28.41%.

En este ejemplo, el método solo necesita de 5 iteraciones para reducir el error menor al 1%. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
0	
-0.2	100%
-0.1557461506	28.41%
-0.1663039075	6.34%
-0.163826372	1.51%
-0.164410064	0.35%

De donde vemos que la aproximación buscada es:

$$x_5 = -0.164410064$$

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

**NOTA:** Usa todos los dígitos en tu calculadora para que la aproximación sea lo más exacta posible.

1. Usa el método de bisección para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x^2} - 2x + 1$  comenzando en el intervalo  $[0.75, 1]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.8046875$ .

2. Usa el método de bisección para aproximar la raíz de  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \tan x$  comenzando en el intervalo  $[0.5, 1]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.9453125$ .

3. Usa el método de la regla falsa para aproximar la raíz de  $f(x) = 4 - x^2 - x^3$  comenzando en el intervalo  $[1, 2]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 1.310240113$ .

4. Usa el método de la regla falsa para aproximar la raíz de  $f(x) = \ln x + x^2 - 4$  comenzando en el intervalo  $[1, 2]$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 1.841068663$ .

5. Usa el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de  $f(x) = 1 - x^2 - \arctan x$  comenzando con  $x_0 = 0.5$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.650561444$ .

6. Usa el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de  $f(x) = \cos x - x$ , comenzando con  $x_0 = 1$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.739085133$ .

7. Usa el método de la secante para aproximar la raíz de  $f(x) = \arcsin x - e^{-2x}$  comenzando con  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.419118641$ .

8. Usa el método de la secante para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x} - x$  comenzando con  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.567170358$ .

9. Usa el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de  $f(x) = \sin x + x - 1$  comenzando con  $x_0 = 0.52$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 0.513272518$ .

10. Usa el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de  $f(x) = \ln x + 2x - 4$  comenzando con  $x_0 = 1.5$  y hasta que  $|\epsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**  $x_r = 1.725168086$ .

11. Usa el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3$  comenzando con  $x_0 = 1$  y con una exactitud de  $10^{-2}$ .

**Solución:**  $x_6 = 1.94332$ .

12. Demuestre que  $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$  tiene un único punto fijo en  $[0, 2\pi]$ . Use la iteración de punto fijo y  $x_0 = \pi$

**Solución:**  $x_3 = 3.626996$  |