- Log In
-
- Sign Up
- CN

- 首页
  Home
- 实验室
  Laboratories
  - Data Computing
    - Computing Technology Lab
    - Data Analytics and Intelligence Lab
    - Database and Storage Lab
    - OS Lab
  - Robotics
    - Autonomous Driving Lab
  - Financial Technology
    - Financial Intelligence Lab
    - Blockchain Lab
    - Biometrics Lab
  - Machine Intelligence
    - Speech Lab
    - Vision Lab
    - Language Technology Lab
    - Decision Intelligence Lab
    - City Brain Lab
  - X Laboratory
    - Quantum Laboratory
    - XG Laboratory
    - XR Lab
- 合作生态
  Collaboration
  - Program
  - Joint Laboratory

DAMO
ALIBABA DAMO ACADEMY

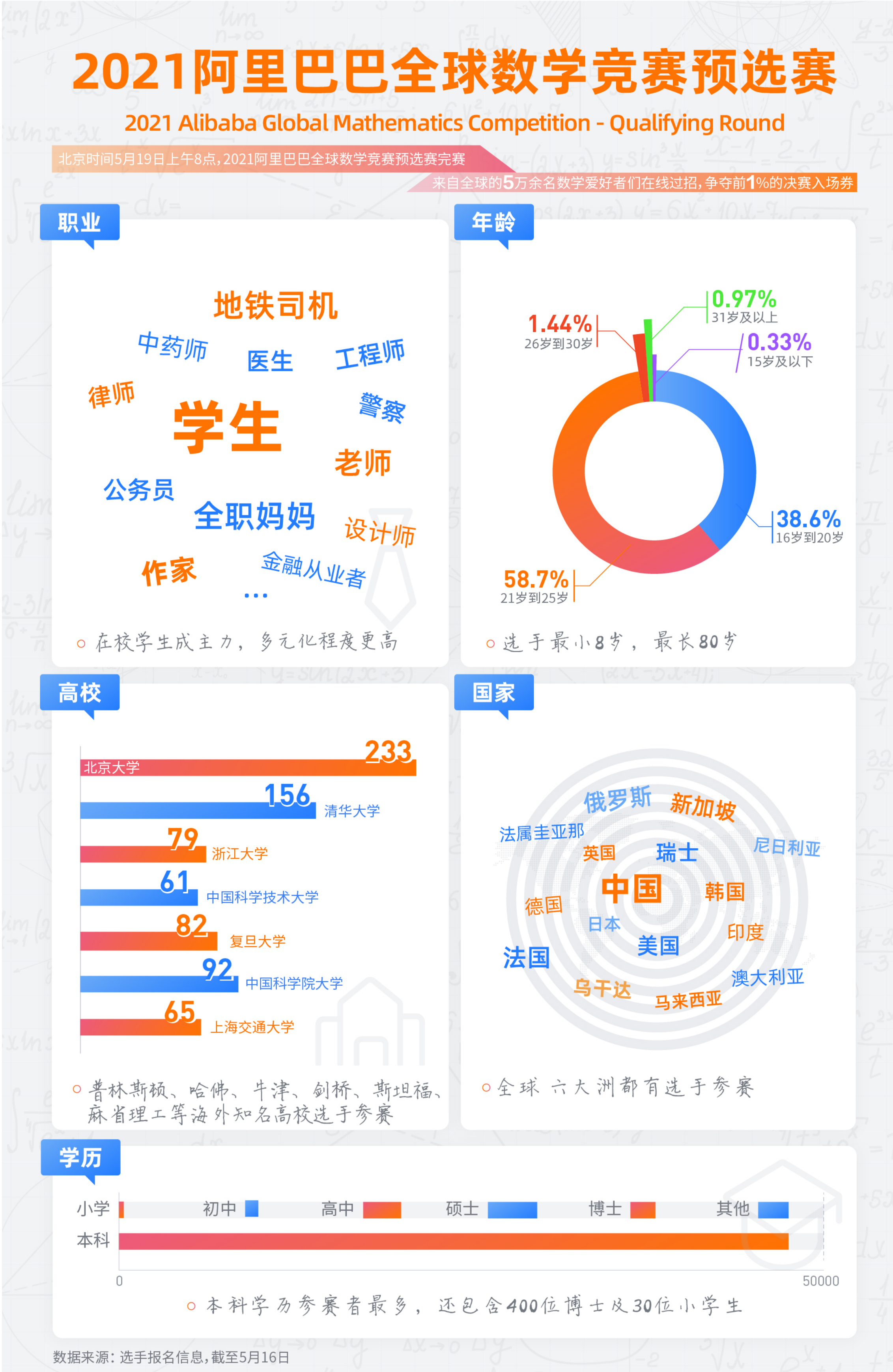
- 达摩项目
  DAMO Projects
  - DAMO Academy Young Fellow
  - Alibaba Global Mathematics Competition
- 学术论文
  Publications
- 关于我们
  About Us
  - Events
  - Careers

对下答案？5万人报名2021阿里全球数学竞赛预选赛，第一题仅2000多人选对

2021/05/21From机器之心

5 月 16 日 8 点，第三届阿里巴巴全球数学竞赛的预选赛正式开启。历经三天三夜，总共 5 万参赛者角逐 1% 的决赛入场券。「阿里巴巴全球数学竞赛」由阿里巴巴达摩院举办，以「发现数学之美、助力数学研究、激发数学学习热忱」为使命，不设报名门槛，面向全球的数学爱好者开放，迄今已举办了三届比赛。

今年，阿里巴巴全球数学竞赛的参赛选手更加多元化，5 万名选手中既有数学专业的大学生、博士生、老师，也有警察、地铁司机、全职妈妈、中药师等，选手的年龄最小 8 岁、最大 80 岁。包括 400 位博士生、30 位小学生报名参赛，其中就有《最强大脑》选手、「天才少年」陆畅。从地理位置上看，还有来自法国、波兰、韩国、新加坡、澳大利亚、美国、尼日利亚、圭亚那等国家和地区的数学爱好者在线答题，同场竞技。



此外，这届大赛的命题组由上届的 21 人强势扩容至 33 人，来自北京大学、浙江大学、中科院数学所、耶鲁大学、普林斯顿大学、加州理工学院等高校和研究机构。本届比赛分为预选赛和决赛：预选赛共 1 轮，满分 120 分，根据分数高低确定决赛入围名单。不管是预选赛还是决赛，都允许选手查阅纸质或者离线资料，以及使用编程软件答题。预选赛时间为 2021 年 5 月 16 日 8 点 - 5 月 19 日 8 点，共 72 小时。预选赛环节结束后，赛事主办方也第一时间公布了试题内容和参考答案。共六道试题，分为 8 小题，总分为 120 分。如果你想和全球的最强大脑比试一下，可以先来看看真题。

毕竟，世界上很多东西随时可能抛弃你，但数学不会，不会就是不会。

「看似简单，实则深刻」

第一题和「安全距离」有关，构成为单选题（4 分）和证明过程（6 分）。结合「居民接种疫苗」的热点，提问的是留观期内的安全距离，可以说相当贴合生活实际了。

1. 在一个虚拟的世界中，每个居民(设想为没有大小的几何点) 依次编号为 $1, 2, \cdots$. 为了抗击某种疫情，这些居民要接种某疫苗，并在注射后在现场留观一段时间。现在假设留观的场所是平面上的一个半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆周。为了安全，要求第 m 号居民和第 n 号居民之间的距离 $d_{m,n}$ 满足

$$(m+n)d_{m,n} \geq 1,$$

这里我们考虑的是圆周上的距离，也就是两点间劣弧的弧长。那么

(i) 下列选项( ) 符合实际情况。

A 这个留观室最多能容纳 8 个居民；

B 这个留观室能容纳的居民个数有大于 8 的上限；

C 这个留观室可以容纳任意多个居民。

(ii) 证明你的论断。

这道题目考察的是选手的级数求和知识和算法思维，单选题的正确答案是「C」。据了解，共有 2251 位选手选出了正确答案。（参考答案下附）

R1 答案. 选项C 符合实际情况.

R2 答案. 解法一. 我们可以按下述方式安排第 $1, 2, \ldots$ 号居民的位置. 首先, 任意安排第 1 号居民的位置。对 $n \geq 2$, 若第 $1, 2, \ldots, n-1$ 号居民的位置已经被安排好, 我们考虑第 n 号居民不能在哪些位置。

对于 $1 \leq m \leq n-1$, 由 $d_{m,n} \geq \frac{1}{m+n}$, 我们知道, 从第 m 号居民的位置开始, 沿顺、逆时针方向各走 $\frac{1}{m+n}$ 的距离, 所形成的长度为 $\frac{2}{m+n}$ 的圆弧内部是不可以安排第 n 号居民的. 而这些圆弧的总长度

$$\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{2n-1} < 2(\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n-1}{2n-2}) = 2\ln\frac{2n-1}{n} < 2\ln 2.$$

因此, 这些圆弧的并集的总长度不超过 $2\ln 2$, 而整个圆周长为 $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. 熟知 $\frac{\pi}{2} > 1.5 > 2\ln 2$, 故这些圆弧不能覆盖整个圆周, 因此第 n 号居民总可以选择一个合适的位置, 使得他与第 $1, 2, \ldots, n-1$ 号居民之间的距离均满足题目条件. 由数学归纳法可知，这个圆周可以容纳任意多个居民.

解法二. 我们以圆周的圆心为原点建立平面直角坐标系，并将第 $1, 2, 3, 4$ 号居民分别放在 $(\frac{1}{4}, 0), (-\frac{1}{4}, 0), (0, \frac{1}{4}), (0, -\frac{1}{4})$ 处, 即他们的辐角主值分别为 $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. 此时任意两名居民的距离不小于 $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} > \frac{1}{1+2}$, 故此时的 4 名居民满足题目条件.

我们使用数学归纳法证明下面命题: 对整数 $k > 2$, 可以将第 $1, 2, \ldots, 2^k$ 号居民安置于圆周上一个内接正 2^k 边形的各个顶点处, 使得它们互相之间(在圆周上的) 距离满足题目条件, 且编号为 $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ 号的居民在圆周上两两不相邻.

上述命题对 $k = 2$ 成立. 若其对 k 成立，即前 2^k 号居民的位置都已确定. 考虑他们将圆周分成的 2^k 段弧. 我们要将第 $2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}$ 号居民放置在这些弧的中点. 现在来证明可以适当放置使得涉及第 $2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}$ 号居民的距离均满足题目条件.

我们将第 $2^k+1, 2^k+2$ 号居民放置在与第 2^{k-1} 号居民相邻的位置(即与第 2^{k-1} 号居民的辐角差为 $\frac{2\pi}{2^{k+1}}$ 距离的位置); 将第 $2^k+3, 2^k+4$ 号居民放置在与第 $2^{k-1}-1$ 号居民相邻的位置; $\cdots$ 将第 $2^k+2a-1, 2^k+2a$ 号居民放置在与第 $2^{k-1}-a+1$ 号居民相邻的位置; $\cdots$ 将第 $2^{k+1}-1, 2^{k+1}$ 号居民放置在与第 1 号居民相邻的位置.

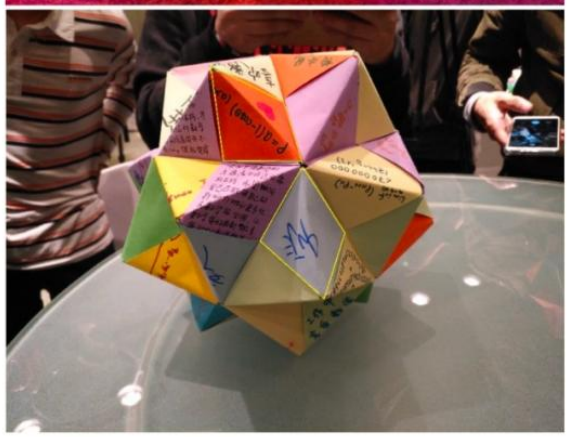
由于前 2^{k-1} 号居民在圆周上两两不相邻, 这样的放置是可行的. 现在考虑任意两名居民的距离(只需考虑至少一位居民是“新”的情形). 因为圆周被分成了 2^{k+1} 段, 每段弧长为 $\frac{2\pi}{2^{k+1}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2^{k+2}}$, 对于两位编号分别为 $m > 2^k$ 和 n 的居民, 若它们之间至少有两段弧, 则

$$d_{m,n} \geq \frac{\pi}{2^{k+1}} > \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{2(m+n)}{2^{k+1}} > \frac{1}{m+n};$$

若他们之间的距离恰为一段弧长，设 $n \in \{2^k+2a-1, 2^k+2a\}$, 则 $m > 2^{k-1}-a+1$, 因

第二题是「多面体问题」，取自第一届阿里数学竞赛时主办方负责人收到的礼物，两道小题分别为 4 分和 6 分。

2. 2019年第一届阿里巴巴数学竞赛的优胜者们在参加集训营的时候, 集体送给主办方负责人的礼物, 是一个有 60 个全等的三角形面的多面体。从图中我们可以看到, 这个多面体的表面是 60 个全等的空间四边形拼接而成的。



一个空间 n 边形是指由一个平面 n 边形沿若干条对角线做适当翻折(即在选定的对角线处形成适当的二面角) 后得到的空间图形。两个空间图形全等指的是它们可以通过 $\mathbb{R}^3$ 中的一个等距变换完全重合。一个多面体指的是一个空间有界区域, 其边界可以由有限多个平面多边形沿公共边拼接而成。

(i) 我们知道 $2021 = 43 \times 47$. 那么是否存在一个多面体, 它的表面可以由 43 个全等的空间 47 边形拼接而成?

(ii) 请对你的判断给出逻辑的解释。

完成这道题目，不需要任何的其他背景知识，但相当考验选手的悟性，需要很强的空间想象力。

R3 答案. 可以.

R4 答案. 我们只需要举一个例子即可. 考虑一个标准的环面 $\mathbb{T}$, 其上的点可以由两个参数来表示:

$$\mathbb{T} = \{\theta, \varphi :\ 0 \le \theta, \varphi < 2\pi\}.$$

我们可以认为这个环面以 z-轴为对称轴: (θ, φ) 对应于空间中的 $((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)$.

对于 $1 \le k \le 43$, 我们考虑环面上的区域

$$D_k = \{\theta, \varphi :\ \frac{2(k-1)}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86} \le \theta \le \frac{2k}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86}\}.$$

直观地说, 把环面分成全等的 43 份之后, 每一份沿 $\{\varphi = 0\}$ 切开, 将切开处的一侧保持不动, 另一侧扭转一定角度.

现在, 把 $\{\varphi = 0\}$ 这个圆变形成一个正 43 边形, 各个顶点分别对应于 $\theta = \frac{2k}{43}\pi$. 这样 D_k 有四条"边"(其中两条位于 $\{\varphi = 0\}$ 上), 四个顶点(两个位于正 43 边形的顶点处, 两个位于边的中点处, 我们还要标记出这两个中点之间的正 43 边形的顶点). 记为

$$\begin{aligned} &C_{k,0} = (\frac{2(k-1)}{43}\pi, 0), C_{k,1} = (\frac{2k}{43}\pi, 0);\\ &D_{k,0} = (\frac{2k+1}{43}\pi, 2\pi), D_{k,1} = (\frac{2k+3}{43}\pi, 2\pi);\\ &E_k = (\frac{2k+2}{43}\pi, 2\pi). \end{aligned}$$

在 ∂D_k 的另一条边上取 21 个点, 例如

$$A_{k,i} = (\frac{2(k-1)}{43}\pi + 3\frac{\varphi}{86}\pi, \frac{i}{11}\pi), i = 1, \ldots, 21.$$

然后绕 z-轴旋转 $\frac{2}{43}\pi$ 后得到另 21 个点, 记为 $B_{k,i}, i = 1, \ldots, 21$.

连结线段 $C_{k,0}C_{k,1}, C_{k,0}A_{k,1}, C_{k,1}B_{k,1}, A_{k,i}A_{k,i+1}, B_{k,i}B_{k,i+1}, A_{k,i}B_{k,i}, A_{k,i}B_{k,i+1}$ $(i = 1, \ldots, 21)$, 以及 $A_{k,21}D_{k,0}, B_{k,21}D_{k,1}, A_{k,21}E_k, B_{k,21}E_k, D_{k,0}E_k$ 和 $E_kD_{k,1}$. 我们得到一个空间 47 边形. 这样我们就得到了 43 个全等的(上述构造与 k 无关) 空间 47 边形, 它们能够拼出一个多面体.

说明: 一个典型的错误是误认为这些空间多边形的顶点(边) 都是多面体的顶点(边), 从而根据"每条边都算两次" 和" 2021 是奇数" 得到"矛盾", 由此认为本题的解答是否定的.

还记得去年擀宽面、扭面圈的张师傅吗？在第三题中，张师傅又出现了，今年他来到了达摩院工作，除了做面这项本职工作，他有时候也和其他同事聊聊天。最近，张师傅听说软件工程师小李遇到了一个难题：

3. 去年，张师傅因为多旋圈面爆红，今年他来到了达摩院给扫地僧做面。某天，软件工程师小李跟张师傅吐槽工作。小李主要研究和设计算法用于调节各种产品的参数。这样的参数一般可以通过极小化 $\mathbb{R}^n$ 上的某个损失函数 f 求得。在小李最近的一个项目中，这个损失函数是另外一个课题组提供的；出于安全考虑和技术原因，该课题组难以向小李给出此函数的内部细节，而只能提供一个接口用于计算任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 处的函数值 $f(\mathbf{x})$。所以，小李必须仅基于函数值来极小化 f。而且，每次计算 f 的值都消耗不小的计算资源。好在该问题的维度 n 不是很高 (10 左右)。另外，提供函数的同事还告知小李不妨先假设 f 是光滑的。

这个问题让张师傅想起了自己收藏的一台古董收音机。要在这台收音机上收听一个节目，你需要小心地来回拧一个调频旋钮，同时注意收音效果，直到达到最佳。在这过程中，没有人确切地知道旋钮的角度和收音效果之间的定量关系是什么。张师傅和小李意识到，极小化 f 不过就是调节一台有多个旋钮的机器: 想象 $\mathbf{x}$ 的每一个分量由一个旋钮控制，而 $f(\mathbf{x})$ 表示这台机器的某种性能，只要我们来回调整每个旋钮，同时监视 f 的值，应该就有希望找到最佳的 $\mathbf{x}$。受此启发，两人一起提出了极小化 f 的一个迭代算法，并命名为“自动前后调整算法” (Automated Forward/Backward Tuning，AFBT，算法 1)。在第 k 次迭代中，AFBT 通过前后调整 $\mathbf{x}_k$ 的单个分量得到 $2n$ 个点 $\{\mathbf{x}_k \pm t_k\mathbf{e}^i : i = 1, \dots, n\}$, 其中 t_k 为步长；然后，令 $\mathbf{y}_k$ 为这些点中函数值最小的一个，并检查 $\mathbf{y}_k$ 是否使 f 充分减小；若是，取 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}_k$，并将步长增倍；否则，令 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ 并将步长减半。在算法 1 中， $\mathbf{e}^i$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个坐标向量，它的第 i 个分量为 1, 其余皆为 0；$\mathbb{1}(\cdot)$ 为指示函数 —— 若 $f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k)$ 至少为 t_k 之平方，则 $\mathbb{1}[f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \geq t_k^2]$ 取值为 1，否则为 0。

算法 1 自动前后调整算法 (AFBT)

输入 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$。对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 执行以下循环。

1: $\mathbf{y}_k := \operatorname{argmin}\{f(\mathbf{y}) : \mathbf{y} = \mathbf{x}_k \pm t_k\mathbf{e}^i,\ i = 1, \dots, n\}$ # 计算损失函数。

2: $s_k := \mathbb{1}[f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}_k) \geq t_k^2]$ # 是否充分下降？ 是：$s_k = 1$； 否：$s_k = 0$。

3: $\mathbf{x}_{k+1} := (1 - s_k)\mathbf{x}_k + s_k\mathbf{y}_k$ # 更新迭代点。

4: $t_{k+1} := 2^{2s_k - 1}t_k$ # 更新步长。$s_k = 1$：步长增倍； $s_k = 0$：步长减半。

这道题是证明题（20 分），内容与优化有关，且在题目中给出了基本概念和结论，算是比较「友好」。可能在业界有过工作经历的选手会感到很熟悉。

除了上述题目外，本届大赛还考察了傅里叶变化、矩阵特征值、社交软件用户增长等数学内容。每一道题目，都在贯彻着主办方的目标：用基础的数学工具去解决复杂深刻的问题，也就是「看似简单，实则深刻」。完整版的赛题和答案目前已经在达摩院阿里巴巴全球数学竞赛官网公布，欢迎感兴趣的同学们查阅。

决赛 6 月底举行，8 小时分胜负

卷子都交了，预选赛成绩什么时候公布？主办方暂定 2021 年 6 月 15 日公布预选赛成绩，同时也将公布决赛入围名单。

此外还有大众最关心的决赛环节：6 月 26 日，第三届阿里巴巴全球数学竞赛的总决赛将在当天早上 8 点（北京时间）正式开启，当晚 24 点结束。在 16 个小时的窗口期，选手们可选择连续的 8 小时答题。决赛包含代数与数论、几何与拓扑、分析与方程、应用与计算数学、组合与概率五个赛道，各个方向命题范围会在 5 月中下旬公布。

决赛期间，进入决赛的选手需先从以上五个赛道中选择一个主赛道以及一个副赛道。选定赛道后，才可以进入答题界面，且选定的赛道不可改变。在主赛道下，选手可以提交全部 5 道题目的解答；在副赛道下，选手仅可提交至多 2 道题目的解答。

根据上一届比赛情况，5 万人报名参赛，最终 516 人入围决赛，73 人获奖。不知这届选手，表现如何?

Laboratories

- Data Computing
- Robotics
- Financial Technology
- Machine Intelligence
- X Laboratory

Collaboration

- Program
- Joint Laboratory

Careers

- Job Opportunities
- Visiting Scholar
- Postdoc
- Intern
- Ali Stories

Contact Us

- damo@alibaba-inc.com
- 969 West Wen Yi Road, Yu Hang District,
  Hangzhou 311121, China

- Alibaba (China) Co., Ltd
- Alibaba Technology

Scan QR code
关注**Ali Technology**Wechat Account