Seminar Analiză Matematică

LazR

Insert Date

Seminar 27.09.23

1. Arătați, folosind definiția, că:

$$x_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, n \in \mathbb{N}$$

Rezolvare:

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \; \forall \epsilon > 0, n \geq N(\epsilon) \in \mathbb{N} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

$$\text{Alegem } N(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1\right] - 1.$$

2. Pentru $x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{x_n} \frac{1}{2n+1} \Rightarrow$$

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3. Pentru $x_n = \sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

4. Pentru $x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e}.$$

5. Pentru $x_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}, n \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:
Utilizând limita calculată în exercițiul anterior, constatăm ușor că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1.$$

6. Pentru $x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}, p \in \mathbb{N}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:
Vom utiliza Lema lui Stolz-Cesaro.
Fie $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$ și $b_n = n^{p+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{\sum_{k=0}^{p} (n+1)^k n^{n-k}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k} = \frac{1}{p+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

7. Pentru $x_n = \frac{a^n}{n!}, a > 0$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

8. Pentru $x_n = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n}}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.
Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

9. Pentru $x_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$ (Șirul lui Traian Lalescu).
Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \frac{e^{ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)} - 1}{ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)} ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{e} ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{(n+1)}}}\right) = \frac{1}{e} ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}\right) = \frac{1}{e}.$$

Seminar 10.11.23

1. Studiați natura seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{ln(n)}\right)^{ln(n)}.$$

Rezolvare:
Metoda 1

$$ln(n)^{ln(n)} = e^{ln(n)ln(ln(n))} = n^{ln(ln(n))}, \text{iar}$$

$$n^{ln(ln(n))} \geq n^2 \text{ pentru } n \geq e^{e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ln(n)^{ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ pentru } n \geq e^{e^2} \text{ și cum } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ este o serie convergentă } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{ln(n)}\right)^{ln(n)} \quad \text{este o serie convergentă.}$$

Metoda 2
Vom folosi criteriul de condensare al lui Cauchy.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{ln(2^n)^{2^n}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{nln(2)}}{nln(2)^{nln(2)}} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{e}{nln(2)}\right)^{ln(2)}\right]^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\left(\frac{e}{nln(2)}\right)^{ln(2)}\right]^n} = \frac{2}{ln(2)^{ln(2)}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{ln(2)}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} \text{ este o serie convergentă } \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{ln(n)}\right)^{ln(n)} \quad \text{este o serie convergentă.}$$