Capitolul 2

Şiruri şi serii de funcţii

Termenii generali ai şirurilor şi seriilor numerice sunt numere reale constante care, eventual, depind de anumiţi parametri, dar acestor parametri li se atribuie de fiecare dată valori constante, adică termenii generali nu sunt priviţi ca funcţii.

Şirurile şi seriile de funcţii sunt generalizări naturale ale şirurilor şi seriilor numerice, termenii generali depinzând de anumite variabile, deci limita unui astfel de şir de funcţii, precum şi suma seriei asociate vor fi considerate funcţii (în caz de convergenţă). În această situaţie, ne va interesa natura funcţională a termenului general, dar şi proprietăţile funcţionale ale funcţiei limită (în cazul şirurilor de funcţii) sau a celei sumă (pentru seriile de funcţii).

2.1 Şiruri de funcţii

2.1.1 Breviar teoretic

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Pentru fiecare număr natural $n \in \mathbb{N}$ considerăm o funcţie $f_n : D \to \mathbb{R}$, deci pentru orice $x \in D$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale. Astfel, putem defini o funcţie $f : \mathbb{N} \times D \to \mathbb{R}$, $f(n, x) = f_n(x)$ pe care o vom nota în continuare cu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(f_n)_{n\geq 0}$ şi care se numeşte *şir de funcţii* (pe mulţimea D).

La fel ca în cazul şirurilor numerice, termenul general f_n al unui şir de funcţii poate să fie definit doar pentru $n \geq n_0$, unde n_0 este un număr natural fixat, caz în care şirul de funcţii corespunzător se notează cu $(f_n)_{n\geq n_0}$. Pentru a nu complica notaţiile, un şir de funcţii va fi notat, în anumite situaţii, cu (f_n), de exemplu, dacă $n_0 \in \mathbb{N}$ poate fi dedus din contex sau dacă alegerea sa nu are relevanţă din punct de vedere teoretic.

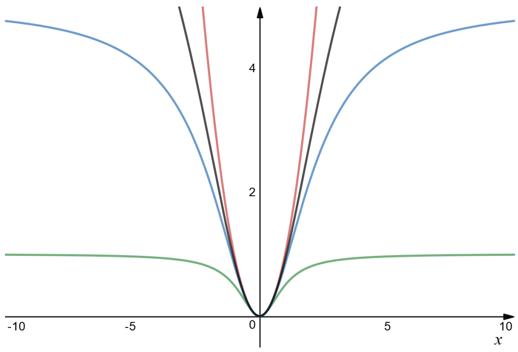

Figura 2.1: Graficele funcţiilor f_1 (verde), f_5 (albastru), f_{10} (negru), respectiv $f(x) = x^2$ (roşu) din Exemplul 2.1.1 pe intervalul $[-10, 10]$.

Există situaţii în care şirul $(f_n(x))$ nu este convergent pentru fiecare $x \in D$. De exemplu, funcţia

$$f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

se poate defini pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dar şirul $(f_n(x))$ este convergent doar pe intervalul $(-1, 1]$.

Pentru a nu complica prezentarea rezultatelor teoretice, vom presupune că şirul numeric $(f_n(x))$ este convergent pentru fiecare $x \in D$ (altfel, rolul mulţimii D va fi luat de orice submulţime nevidă D_0 a sa cu proprietatea că şirul $(f_n(x))$ este convergent pentru orice $x \in D_0$), caz în care se poate defini o funcţie

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

În această situaţie, spunem că şirul de funcţii (f_n) *converge simplu* sau *punctual* la funcţia f pe mulţimea D şi notăm $f_n \xrightarrow[D]{s} f$.

Exemplul 2.1.1 Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n + x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n + x^2} = x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

deci $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} f$, unde $f(x) = x^2$. De aici deducem că, pentru n suficient de mare, graficul funcţiei f_n se apropie de graficul funcţiei f (vezi Fig. 2.1).

$\diamondsuit$

Folosind definiţia convergenţei unui şir numeric, se obţine:

$f_n \xrightarrow[D]{s} f \iff$ pentru orice $x \in D$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ (n_0 depinde de x şi ε) astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Ne punem următoarea întrebare:

Dacă $f_n \xrightarrow[D]{s} f$ şi fiecare termen al şirului de funcţii (f_n) verifică o anumită proprietate funcţională (mărginire, existenţă a limitei într-un punct de acumulare al lui D, continuitate, derivabilitate, primitivabilitate, integrabilitate), rezultă atunci că şi funcţia limită f verifică această proprietate funcţională?

De exemplu, dacă (f_n) este un şir de funcţii continue pe D şi $f_n \xrightarrow[D]{s} f$, atunci nu rezultă neapărat că şi funcţia f este continuă pe D, după cum rezultă din exemplul următor:

Exemplul 2.1.2 Fie $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Este evident că

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Fiecare funcţie f_n este continuă pe $[0, 1]$, dar funcţia limită f nu este continuă în punctul $x_0 = 1$.

$\diamondsuit$

Exemplul precedent ne arată că este nevoie de un concept de convergenţă mai tare decât convergenţa punctuală, concept care să transfere, eventual în anumite condiţii, unele proprietăţi funcţionale ale termenilor unui şir de funcţii la limita sa. Astfel, se defineşte conceptul de **convergenţă uniformă**:

Definiţia 2.1.1 Spunem că un şir de funcţii (f_n) *converge uniform* la o funcţie f pe D şi notăm $f_n \xrightarrow[D]{u} f$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi orice } x \in D. \tag{2.1}$$

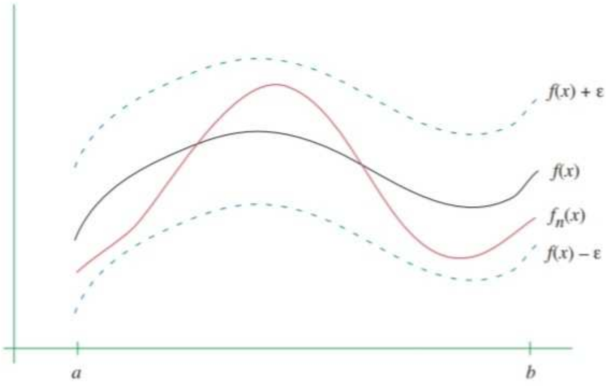

Figura 2.2: Interpretarea geometrică a convergenţei uniforme.

Interpretarea geometrică a convergenţei uniforme: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ graficul funcţiei f_n este cuprins între graficele funcţiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ (vezi Fig. 2.2).

Diferenţa dintre convergenţa simplă (punctuală) şi convergenţa uniformă este aceea că numărul n_0 dat de definiţia convergenţei uniforme depinde **doar** de ε, nu şi de x, ceea ce este permis în cazul convergenţei punctuale. Cu alte cuvinte, în cazul convergenţei punctuale, viteza de convergenţă a şirului $(f_n(x))$ depinde de x, iar în cazul convergenţei uniforme este practic aceeaşi pentru orice $x \in D$.

Remarca 2.1.1 Folosind notaţia

$$\|g\|_D = \sup_{x \in D} |g(x)|, \tag{2.2}$$

unde $g : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie oarecare definită pe D, relaţia (2.1) este echivalentă cu

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Remarca 2.1.2 Se observă că o funcţie $g : D \to \mathbb{R}$ este mărginită pe D dacă şi numai dacă $\|g\|_D < \infty$. Mai mult, se poate arăta că relaţia (2.2) defineşte o normă pe spaţiul vectorial $\mathcal{M}(D)$ al funcţiilor mărginte $g : D \to \mathbb{R}$, numită *norma supremum* sau *norma uniformă*.

În continuare vom stabili care este legătura dintre convergenţa punctuală (simplă) şi convergenţa uniformă.

Propoziţia 2.1.1 *Dacă* $f_n \xrightarrow[D]{u} f$, *atunci* $f_n \xrightarrow[D]{s} f$.

Rezultatul precedent ne arată, de fapt, că în practică este suficient să studiem convergenţa uniformă a unui şir de funcţii (f_n) doar pe submulţimi nevide ale mulţimii punctelor $x \in D$ pentru care şirul numeric $(f_n(x))$ este convergent, pe orice altă submulţime a lui D şirul de funcţii nefiind uniform convergent. Cu toate acestea, anumite criterii studiază direct convergenţa uniformă, fără a mai fi nevoie să determinăm, în prealabil, mulţimea punctelor de convergenţă punctuală.

Reciproca Propoziţiei 2.1.1 este, în general falsă, după cum deducem din exemplul următor:

Exemplul 2.1.3 Fie

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Şirul de funcţii (f_n) converge simplu la funcţia $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, adică $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathrm{s}} 0$, dar $f_n \overset{\mathrm{u}}{\underset{\mathbb{R}}{\not\rightarrow}} 0$.

Soluţie. Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci

$$|f_n(x) - 0| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

deci $f_n(x) \to 0$, pentru orice $x \neq 0$. Pe de altă parte, $f_n(0) = 0$. Rezultă astfel că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathrm{s}} f$, unde $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Arătăm acum că $f_n \overset{\mathrm{u}}{\underset{\mathbb{R}}{\not\rightarrow}} f$. Negând Definiţia 2.1.1, trebuie să demonstrăm că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $m = m(n) \geq n$ şi $x_n \in \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$|f_m(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Fie $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, considerând $m = n+1$ şi $x_n = \frac{1}{n+1}$, avem

$$|f_m(x_n) - 0| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0,$$

adică ceea ce trebuia să arătăm.

□

Există situaţii când cele două concepte de convergenţă coincid, după cum rezultă din teorema următoare:

Teorema 2.1.1 (Teorema lui Dini) *Fie $D \subset \mathbb{R}$ o* **mulţime compactă**, *adică o mulţime mărginită şi închisă, şi $f_n, f : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*
Dacă:

- $f_n \xrightarrow[D]{s} f$,
- *(f_n) este un şir de funcţii monoton, adică*

  $$f_n(x) \leq f_{n+1}(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in D \text{ sau } f_n(x) \geq f_{n+1}(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in D,$$

- *fiecare funcţie f_n este continuă pe D,*

atunci $f_n \xrightarrow[D]{u} f$.

În continuare prezentăm câteva criterii care se pot utiliza simplu în studiul convergenţei uniforme a unui şir de funcţii.

Folosind Remarca 2.1.1 şi definiţia limitei unui şir numeric, se obţine că

$$f_n \xrightarrow[D]{\mathrm{u}} f \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

În practică acest rezultat se foloseşte sub următoarea formă:

Propoziţia 2.1.2 Dacă $f_n \xrightarrow[D]{\mathrm{s}} f$, atunci

$$f_n \xrightarrow[D]{\mathrm{u}} f \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

Exemplul 2.1.4 Fie $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1,$ pentru orice $x > 0$, rezultă că (f_n) este simplu convergent la funcţia constantă $f(x) = 1$ pe mulţimea $D = (0, \infty)$ şi, în particular, pe orice submulţime nevidă a sa. Folosind propoziţia de mai sus, arătăm în continuare că (f_n) este uniform convergent la f pe mulţimea $D_1 = [1, \infty)$, dar nu converge uniform la f pe $D_2 = (0, 1)$. Avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1},$$

deci

$$\|f_n - f\|_{D_1} = \sup_{x \geq 1} \frac{1}{nx+1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ şi } \|f_n - f\|_{D_2} = \sup_{x \in (0,1)} \frac{1}{nx+1} = 1 \nrightarrow 0.$$

Din Propoziţia 2.1.2 rezultă că $f_n \xrightarrow[D_1]{\text{u}} f$, respectiv $f_n \overset{\text{u}}{\underset{D_2}{\nrightarrow}} f$.

$\diamondsuit$

Propoziţia 2.1.3 *Dacă* $f_n \xrightarrow[D]{s} f$, *atunci*

$$f_n \xrightarrow[D]{u} f \iff \forall\, (x_n) \subset D : \lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0.$$

Din propoziţia precedentă deducem un criteriu simplu care se poate utiliza pentru a arăta că un anumit şir de funcţii ce converge punctual la f pe D, nu converge şi uniform la f pe D:

Propoziţia 2.1.4 (Criteriul de convergenţă neuniformă)
Dacă $f_n \xrightarrow[D]{\text{s}} f$, atunci $f_n \overset{\text{u}}{\underset{D}{\nrightarrow}} f$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n) \subset D$ astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0.$$

Exemplul 2.1.5 Fie $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = x$, pentru orice $x \geq 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow[{[0,\infty)}]{\text{s}} f$, unde $f(x) = x$, pentru $x \geq 0$. O să arătăm că $f_n \overset{\text{u}}{\underset{[0,\infty)}{\nrightarrow}} f$. Calculăm

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \frac{x^2}{n+x}.$$

Astfel, considerând $x_n = n \in \mathbb{N}^* \subset [0, \infty)$, se obţine

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n}{2} \to +\infty \neq 0.$$

Din criteriul de convergenţă neuniformă deducem că $f_n \underset{[0,\infty)}{\overset{\mathrm{u}}{\not\to}} f$.

$\diamondsuit$

Propoziţia 2.1.5 (Criteriul majorării) Fie (f_n) un şir de funcţii pe D. Dacă există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ şi un şir de numere reale nenegative $(\alpha_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $\alpha_n \to 0$ astfel încât are loc inegalitatea

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi orice } x \in D,$$

atunci $f_n \xrightarrow[D]{\mathrm{u}} f$.

Remarca 2.1.3 Funcţia f, dată de enunţul criteriului majorării este, de fapt, limita punctuală a şirului de funcţii (f_n), adică

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \; x \in D.$$

Exemplul 2.1.6 Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{|x|}{2n\,|x|} = \frac{1}{2n} = \alpha_n, \; x \in \mathbb{R}^*.$$

Pentru a obţine inegalitatea de mai sus am folosit relaţia

$$a^2 + b^2 \geq 2|a|\,|b|, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, pentru $x = 0$ avem $|f_n(0) - 0| = 0 \leq \alpha_n$. Cum $\alpha_n \to 0$, din criteriul majorării deducem că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathrm{u}} 0$.

$\diamondsuit$

Teorema 2.1.2 (Criteriul lui Cauchy) *Şirul de funcţii (f_n) converge uniform pe D, adică există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[D]{u} f$, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}^*,\ x \in D,$$

sau, echivalent, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f_{n+p} - f_n\|_D < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Se poate observa că pentru a studia convergenţa uniformă a unui şir de funcţii (f_n) pe o mulţime D folosind criteriul lui Cauchy, nu este nevoie să determinăm în prealabil expresia analitică a funcţiei f la care (f_n) converge punctual pe D. Deci, criteriul lui Cauchy se utilizează, în general, atunci când funcţia f nu poate fi determinată prin metode elementare.

Proprietăţi ale şirurilor de funcţii uniform convergente

Importanţa convergenţei uniforme este dată, în special, de faptul că principalele proprietăţi funcţionale ale termenilor unui şir de funcţii se transmit şi funcţiei limită.

Teorema 2.1.3 (Transfer de mărginire)
Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D. Dacă fiecare funcţie f_n este mărginită pe D, adică pentru orice $n \geq n_0$ există $M_n > 0$ astfel încât

$$|f_n(x)| \leq M_n,\ \text{pentru orice } x \in D,$$

şi $f_n \xrightarrow[D]{u} f$, atunci funcţia limită f este mărginită pe D. Mai mult, are loc inegalitatea:

$$\sup_{x\in D} |f(x)| \leq \sup_{n\geq n_0} \left(\sup_{x\in D} |f_n(x)| \right).$$

Reamintim că $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ este un **punct de acumulare** al unei mulţimi $D \subset \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x_0 conţine cel puţin un element din D diferit de x_0, adică pentru orice vecinătate V a lui x_0, $V \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor de acumulare ale unei mulţimi D se notezază cu D' şi se numeşte *derivata* mulţimii D.

Dacă x_0 este un punct de acumulare al lui D, nu rezultă neapărat că x_0 aparţine lui D, de exemplu, mulţimea punctelor de acumulare ale intervalului deschis (a, b) este intervalul închis $[a, b]$, adică $(a, b)' = [a, b]$.

Teorema 2.1.4 (Transfer de trecere la limită)
Fie (f_n) un şir de funcţii pe D şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $f_n \xrightarrow[D]{\text{u}} f$ şi există $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$, atunci şirul (l_n) este convergent, există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} l_n$, adică

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Teorema 2.1.5 (Transfer de continuitate)
Fie (f_n) un şir de funcţii pe D. Dacă $f_n \xrightarrow[D]{\text{u}} f$ şi fiecare funcţie f_n este continuă pe D, atunci f este o funcţie continuă pe D.

Teorema 2.1.6 (Transfer de derivabilitate)
Fie I un interval şi (f_n) un şir de funcţii derivabile pe I. Dacă există două funcţii $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:

- $f_n \xrightarrow[I]{\text{u}} f$,
- ${f_n}' \xrightarrow[I]{\text{u}} g$,

atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$, adică

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n \right)' = \lim_{n \to \infty} {f_n}'.$$

În cazul particular în care I este un **interval mărginit**, ipoteza $f_n \xrightarrow[I]{\text{u}} f$ din teorema precedentă poate fi înlocuită cu convergenţa punctuală a şirului (f_n) într-un singur punct. Se obţine astfel următorul rezultat:

Teorema 2.1.7 (Transfer de derivabilitate pe intervale mărginite)
Fie I un interval mărginit şi (f_n) un şir de funcţii derivabile pe I.
Dacă:

- există $x_0 \in I$ astfel încât şirul $(f_n(x_0))$ este convergent,
- există $g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât ${f_n}' \xrightarrow[I]{\text{u}} g$,

atunci există o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[I]{\text{u}} f$ şi $f' = g$, ceea ce este echivalent cu

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} {f_n}'.$$

Teorema 2.1.8 (Transfer de existenţă a primitivelor)
Fie I un interval mărginit şi (f_n) un şir de funcţii primitivabile pe I. Dacă $f_n \xrightarrow[I]{\text{u}} f$, atunci f este o funcţie primitivabilă pe I.

Teorema 2.1.9 (Transfer de integrabilitate)
Dacă (f_n) este un şir de funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi $f_n \xrightarrow[[a,b]]{\text{u}} f$, atunci f este o funcţie integrabilă pe $[a, b]$. Mai mult, are loc relaţia:

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

În continuare vom prezenta două rezultate importante în aproximarea unor funcţii continue prin intermediul unor polinoame:

Teorema 2.1.10 (Teorema lui Bernstein) *Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $(B_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii polinomiale definite prin*

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\,(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1],$$

atunci $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la f pe $[0,1]$.

Teorema 2.1.11 (Teorema de aproximare a lui Weierstrass)
Pentru orice funcţie continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ există un şir de funcţii polinomiale cu coeficienţi reali care converge uniform la f pe intervalul $[a,b]$.

2.1.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Să se studieze convergenţa uniformă pe mulţimea D a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$, unde:

a) $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$, $D=\mathbb{R}$;

b) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{nx+1}$, $D=[0,\infty)$;

c) $f_n(x)=\dfrac{n}{nx+1}$, $D=(0,1)$;

d) $f_n(x)=(1+x^n)^n$, $D=(0,1)$.

Soluţie. a) Avem $|f_n(x)-0|=\frac{|sin(nx)|}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}\to 0$. Din criteriul majorării rezultă că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$.
b) Fie $f(x)=x$, pentru $x\geq 0$. Cum

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx^2}{nx+1}-x\right|=\frac{x}{nx+1}\leq\frac{1}{n}\to 0,$$

din criteriul majorării rezultă că $f_n \xrightarrow[[0,\infty)]{u} f$.
c) Se observă că $f_n(x)\to f(x)=\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in D$, deci $f_n \xrightarrow[D]{s} f$. Calculăm

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{n}{nx+1}-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x(nx+1)}.$$

Considerând $x_n = \frac{1}{n} \in D$ pentru $n \geq 2$, se obţine

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n}{2} \to +\infty \neq 0.$$

Din criteriul de convergenţă neuniformă rezultă că $f_n \overset{\mathrm{u}}{\underset{D}{\not\to}} f$.

Convergenţa neuniformă a şirului de funcţii (f_n) pe intervalul $(0,1)$ se mai poate demonstra utilizând Teorema 2.1.3. Într-adevăr, se observă că funcţia f nu este mărginită pe intervalul $(0,1)$, dar pentru fiecare număr natural n *fixat*, f_n este o funcţie mărginită pe $(0,1)$, căci

$$|f_n(x)| = \frac{n}{nx+1} \leq n < \infty.$$

Dacă presupunem că $f_n \xrightarrow[(0,1)]{\mathrm{u}} f$, atunci rezultă că funcţia f este mărginită pe intervalul $(0,1)$, ceea ce este fals.
d) Pentru orice $x \in (0,1)$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x^n)^n = \lim_{n\to\infty} \left[(1+x^n)^{\frac{1}{x^n}}\right]^{n\,x^n} = 1,$$

căci $\lim\limits_{n\to\infty} n\,x^n = 0$, pentru $x \in (0,1)$. Într-adevăr, notând $a_n = n\,x^n$, avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\,x^{n+1}}{n\,x^n} = \frac{(n+1)\,x}{n} \to x \in (0,1),$$

iar din criteriul raportului pentru şiruri rezulă că $a_n \to 0$. Din cele de mai sus se obţine că $f_n \xrightarrow[(0,1)]{\mathrm{s}} f$, unde $f(x) = 1$, $x \in (0,1)$. Folosind criteriul de convergenţă neuniformă, vom arăta că $f_n \overset{\mathrm{u}}{\underset{(0,1)}{\not\to}} f$. Considerăm şirul

$$x_n = \frac{n}{n+1} \in (0,1), \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se obţine

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = (1+x_n^n)^n - 1 = \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n - 1 \geq \left(1+\frac{1}{e}\right)^n - 1 \to +\infty,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = +\infty \neq 0$. De aici rezultă că $f_n \overset{\mathrm{u}}{\underset{(0,1)}{\not\to}} f$.

□

Exerciţiul 2 Fie

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}},\ x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că şirul de funcţii (f_n) converge simplu şi neuniform pe mulţimea $D = [-1, 1]$, respectiv converge uniform pe mulţimea $A = [-a, a]$, $\forall\, a \in (0, 1)$.

Soluţie. Dacă $x \in (-1, 1)$, atunci $f_n(x) \to 1$, iar dacă $x = \pm 1$, atunci $f_n(x) = 0$, deci $f_n \xrightarrow[D]{\text{s}} f$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Cum (f_n) este un şir de funcţii continue pe D şi f nu este continuă pe D (nu este continuă în punctele ± 1), din Teorema 2.1.5 rezultă că $f_n \underset{D}{\overset{\text{u}}{\not\to}} f$.

Fie $a \in (0, 1)$. Pentru orice $x \in [-a, a]$, $x \neq 0$, avem

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} - 1 \right| = \frac{2\, x^{2n}}{1 + x^{2n}} \leq \frac{2\, x^{2n}}{2\, |x|^n} = |x|^n \leq a^n = \alpha_n,$$

iar pentru $x = 0$ se obţine $|f_n(0) - 1| = 0 \leq \alpha_n$. Cum $\alpha_n \to 0$, din criteriul majorării rezultă că $f_n \xrightarrow[A]{\text{u}} f$.

□

Exerciţiul 3 Folosind criteriul lui Cauchy, să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform pe $D = [0, \infty)$, unde

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx.$$

Soluţie. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $x > 0$. Avem

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |x \operatorname{arctg}(n+p)x - x \operatorname{arctg} nx| \\ &= x \operatorname{arctg} \frac{px}{1 + n(n+p)x^2} \leq x \operatorname{arctg} \frac{px}{n(n+p)x^2} \\ &\leq x\, \frac{px}{n(n+p)x^2} = \frac{p}{n(n+p)} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0.$$

Din criteriul lui Cauchy deducem că (f_n) converge uniform pe D.

□

2.1.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Să se studieze convergenţa uniformă pe mulţimea D a şirurilor de funcţii (f_n), unde:

a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \mathbb{R}$;

b) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = (0, \infty)$;

c) $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{\sqrt{nx^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}$;

d) $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}$;

e) $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = [1, 2]$;

f) $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exerciţiul 2 Să se studieze convergenţa uniformă pe $\mathbb{R}$ a şirurilor de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$ şi $(f_n{}')_{n\geq 1}$, unde

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Exerciţiul 3 Se consideră şirul de funcţii $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = ne^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $f_n \underset{(0,\infty)}{\xrightarrow{\text{s}}} 0$, dar $f_n \underset{(0,\infty)}{\overset{\text{u}}{\not\to}} 0$.

Exerciţiul 4 Se consideră şirul de funcţii $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{\text{s}}} 0$, dar $f_n \underset{[0,1]}{\overset{\text{u}}{\not\to}} 0$.

Exerciţiul 5 Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[3]{n}\, xe^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{\text{u}}} 0$.

Exerciţiul 6 Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{\text{u}}} f$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

2.2 Serii de funcţii

2.2.1 Breviar teoretic

Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D. Seria

$$\sum_{n\geq n_0} f_n(x),\ x\in D, \tag{2.3}$$

se numeşte *serie de funcţii* cu termenul general f_n şi se notează $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ sau, mai simplu, $\sum\limits_{n} f_n$.

Dacă seria numerică $\sum\limits_{n} f_n(x_0)$ este convergentă, atunci x_0 se numeşte *punct de convergenţă* al seriei de funcţii (2.3), iar mulţimea $C\subset D$ a tuturor punctelor de convergenţă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a acestei serii.

Dacă C este nevidă, se spune că seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ *converge simplu* sau *punctul* pe C şi, în particular, pe orice submulţime nevidă a sa.

Funcţia $S_n : D\to\mathbb{R}$, definită prin

$$S_n(x)=f_{n_0}(x)+f_{n_0+1}(x)+\cdots+f_n(x),\ n\in\mathbb{N},\, n\geq n_0,$$

se numeşte *suma parţială* (de ordin n) asociată seriei de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$.

Dacă presupunem că mulţimea de convergenţă C a seriei de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este nevidă, are sens să definim funcţia

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),\ x\in C,$$

care se numeşte *suma* acestei serii de funcţii. Pentru a face diferenţa dintre o serie de funcţii şi suma sa, aceasta din urmă va fi notată $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f_n$.

Definiţia 2.2.1 Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D. Spunem că seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ este *uniform convergentă* pe o submulţime nevidă A a lui D, dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este uniform convergent pe A.

Remarcăm faptul că orice serie de funcţii uniform convergentă pe o mulţime $A\subset D$ este simplu convergentă pe A, adică $A\subset C$, deci este suficient să studiem convergenţa uniformă a unei serii de funcţii pe submulţimi nevide ale mulţimii sale de convergenţă. În anumite situaţii, vom studia însă convergenţa uniformă a unor serii de funcţii pe submulţimi nevide ale lui D fără a determina, în prealabil, mulţimea lor de convergenţă.

La fel ca în cazul seriilor numerice, se obţine următorul criteriu necesar de convergenţă uniformă a unei serii de funcţii:

Propoziţia 2.2.1 *Dacă seria de funcţii* $\sum\limits_{n} f_n$ *este uniform convergentă pe* C*, atunci* $f_n \xrightarrow[C]{u} 0$.

Folosind rezultatul de mai sus şi Propoziţia 2.1.2, se obţine următorul criteriu suficient de convergenţă neuniformă a unei serii de funcţii:

Propoziţia 2.2.2 Dacă

$$\|f_n\|_C = \sup_{x\in C} |f_n(x)| \nrightarrow 0,$$

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ nu este uniform convergentă pe C.

Teorema 2.2.1 (Criteriul lui Cauchy) *Fie* (f_n) *un şir de funcţii pe* D*. Seria de funcţii* $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ *este uniform convergentă pe* D *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ *astfel încât*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N,\ p \in \mathbb{N}^* \text{ şi } x \in D. \tag{2.4}$$

Remarca 2.2.1 Relaţia (2.4) este echivalentă cu

$$\|f_{n+1} + \cdots + f_{n+p}\|_D < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N,\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziţia 2.2.3 Fie (f_n) un şir de funcţii pe D. Dacă există $\varepsilon_0 > 0$ şi există şirurile $(p_n) \subset \mathbb{N}^*$, respectiv $(x_n) \subset D$ astfel încât

$$|f_{n+1}(x_n) + \cdots + f_{n+p_n}(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ nu este uniform convergentă pe D.

Următorul rezultat ne dă un criteriu simplu, dar eficient în demonstrarea convergenţei uniforme a unei serii de funcţii:

Teorema 2.2.2 (Criteriul lui Weierstrass) Fie (f_n) un şir de funcţii pe D. Dacă există un şir numeric $(a_n)_{n\geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$|f_n(x)| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } x \in D,$$

şi, în plus, seria numerică $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ este convergentă, atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ este uniform convergentă pe D.

La fel ca în cazul seriilor numerice au loc următoarele criterii de convergenţă uniformă corespunzătoare seriilor de funcţii:

Teorema 2.2.3 (Criteriul lui Dirichlet) *Dacă $(f_n)_{n\geq n_0}$, $(g_n)_{n\geq n_0}$ sunt două şiruri de funcţii pe D care verifică următoarele proprietăţi:*

- *(f_n) este un şir de funcţii monoton descrescător, adică*

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } x \in D,$$

- $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$,
- *şirul sumelor parţiale*

$$G_n(x) = \sum_{n=n_0}^{n} g_n(x),\ x \in D,\ n \geq n_0,$$

este uniform mărginit, adică există un număr real pozitiv $M > 0$ astfel încât

$$|G_n(x)| \leq M, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } x \in D,$$

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n\, g_n$ este uniform convergentă pe D.

Teorema 2.2.4 (Criteriul lui Abel) *Dacă* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *şi* $(g_n)_{n\geq n_0}$ *sunt şiruri de funcţii pe* D *care verifică următoarele proprietăţi:*

- *şirul numeric* $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ *este monoton pentru orice* $x \in D$,
- $(f_n)_{n\geq n_0}$ *este uniform mărginit,*
- *seria de funcţii* $\sum\limits_{n\geq n_0} g_n$ *este uniform convergentă pe* D,

atunci $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n\, g_n$ *este uniform convergentă pe* D.

Teorema 2.2.5 (Criteriul lui Leibniz) *Fie* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *un şir de funcţii pe* D. *Dacă:*

- $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, *pentru orice* $n \geq n_0$ *şi* $x \in D$,
- $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$,

atunci $\sum\limits_{n\geq n_0} (-1)^n f_n$ *este uniform convergentă pe* D.

Proprietăţi ale seriilor de funcţii uniform convergente

Teoremele de transfer ale proprietăţilor analitice ale termenilor unei serii de funcţii la suma seriei sunt consecinţe imediate ale rezultatelor corespunzătoare şirurilor de funcţii, acestea aplicându-se şirului sumelor parţiale asociat seriei de funcţii.

Teorema 2.2.6 (Transfer de mărginire)
Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D. Dacă fiecare funcţie f_n este mărginită pe D şi seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe D având suma f, adică

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in D,$$

atunci f este mărginită pe D.

Teorema 2.2.7 (Transfer de trecere la limită)
Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al lui D. Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \in \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq n_0$ şi seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe D având suma f, atunci seria numerică $\sum\limits_{n\geq n_0} \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)$ este convergentă şi are suma $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, adică are loc relaţia

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Teorema 2.2.8 (Transfer de continuitate)
Fie $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii pe D. Dacă fiecare funcţie f_n este continuă pe D şi seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe D având suma f, atunci f este continuă pe D.

Teorema 2.2.9 (Transfer de derivabilitate)
Fie I un interval şi $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii derivabile pe I.
Dacă:

- seria $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe I având suma f,
- seria $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n{}'$ este uniform convergentă pe I având suma g,

atunci funcţia f este derivabilă pe I şi $f' = g$, adică are loc relaţia

$$\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n{}'.$$

În cazul particular în care I este un interval mărginit se poate demonstra că este suficient să presupunem că seria $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este convergentă într-un singur punct $x_0 \in I$, adică are loc:

Teorema 2.2.10 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval mărginit şi $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii derivabile pe I. Dacă:

- există $x_0 \in I$ astfel încât seria numerică $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n(x_0)$ este convergentă,
- seria $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n{}'$ este uniform convergentă pe I având suma g,

atunci există o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă astfel încât $f' = g$, iar seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe I, având suma f.

Teorema 2.2.11 (Transfer de existenţă a primitivelor)
Fie I un interval mărginit şi $(f_n)_{n\geq n_0}$ un şir de funcţii primitivabile pe I. Dacă seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe I având suma f, atunci f este o funcţie primitivabilă pe I.

Teorema 2.2.12 (Transfer de integrabilitate)
Fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii integrabile pe intervalul $[a, b]$. Dacă seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ având suma f, atunci f este o funcţie integrabilă pe $[a, b]$. În plus, are loc relaţia

$$\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right).$$

2.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Să se arate că seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$$

este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Considerând $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, se obţine

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} = a_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}.$$

Cum seria numerică $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $p = 2 > 1$), din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

□

Exerciţiul 2 Să se arate că seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

este convergentă punctual, dar nu este convergentă uniform pe $D = (0, \infty)$.

Soluţie. Fie $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $x > 0$ avem

$$\frac{f_n(x)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^4x}{1+n^4x^2} \to \frac{1}{x} \in (0, \infty).$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ este o serie convergentă, căci este seria armonică generalizată cu $p = 3 > 1$, din criteriul comparaţiei: forma la limită rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ este convergentă pentru orice $x > 0$, deci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este punctual convergentă pe $D = (0, \infty)$.

Folosind Propoziţia 2.2.3, o să arătăm că $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ nu este uniform convergentă pe D. Într-adevăr, fie $\varepsilon_0 = \frac{1}{17}$, $p_n = n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n = \frac{1}{n^2} \in D$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Se obţine

$$|f_{n+1}(x_n) + \cdots + f_{n+p_n}(x_n)| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^4}{n^4}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\frac{(2n)^4}{n^4}} = \frac{1}{17} = \varepsilon_0,$$

deci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ nu este uniform convergentă pe $D = (0, \infty)$.

□

Exerciţiul 3 Să se studieze dacă seria de funcţii $\sum\limits_{n} f_n$ este uniform convergentă pe $D = (0, \infty)$, unde:

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^n + n + 1},\ n \geq 0 \qquad \text{b) } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x},\ n \geq 2.$$

Soluţie. a) Vom folosi criteriul lui Leibniz pentru a arăta că seria dată este uniform convergentă pe $D = (0, \infty)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ considerăm

$$g_n(x) = \frac{1}{x^n + n + 1},\ x > 0.$$

O să arătăm că şirul de funcţii (g_n) satisface condiţiile din criteriul lui Leibniz pentru convergenţa uniformă a unei serii de funcţii. Cum

$$|g_n(x) - 0| = \frac{1}{x^n + n + 1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0,$$

din criteriul lui Weierstrass rezultă că $g_n \xrightarrow[D]{u} 0$. Rămâne să arătăm că

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x),\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi } x > 0.$$

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci

$$g_n(x) - g_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1} + 1 - x^n}{(x^n + n + 1)(x^{n+1} + n + 2)} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, dacă $x \geq 1$, are loc

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{x^{n+1} + n + 2} \leq \frac{1}{x^{n+1} + n + 1} \leq \frac{1}{x^n + n + 1} = g_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Din cele de mai sus şi din criteriul lui Leibniz deducem că seria de funcţii $\sum_{n\geq 0}(-1)^n g_n$ este uniform convergentă pe $(0,\infty)$.

b) Pentru orice $x>0$ considerăm şirul $g_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$, $n\geq 2$. Cum $g_n(x)\to 0$ şi

$$g_{n+1}(x)\leq g_n(x),\ n\geq 2,$$

pentru orice $x>0$, din criteriul lui Leibniz pentru serii numerice rezultă că seria $\sum_{n\geq 2}(-1)^n g_n(x)$ este convergentă pentru orice $x>0$, deci $\sum_{n\geq 2} f_n$ este punctual convergentă pe $D=(0,\infty)$. O să arătăm că această serie de funcţii nu este uniform convergentă pe D. Într-adevăr, cum

$$\|f_n\|_D=\sup_{x>0}|f_n(x)|=\sup_{x>0}\frac{1}{n^x}=1\nrightarrow 0,$$

din Propoziţia 2.2.2 rezultă că $\sum_{n\geq 2} f_n$ nu este uniform convergentă pe $D=(0,\infty)$.

□

2.2.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Folosind *criteriul lui Weierstrass*, să se arate că seriile de funcţii

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(nx)}{n^3+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4+x^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2(x^2+1)}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^4}$

sunt uniform convergente pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 2 Să se arate că următoarele serii de funcţii sunt uniform convergente pe D:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2},\ D=[-1,1]$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^n\,n^x},\ D=(0,\infty)$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x^2+n},\ D=\mathbb{R}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}},\ D=(0,1)$.

Exerciţiul 3 Folosind *criteriul lui Dirichlet*, să se arate că seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{\sqrt{n+x^2}}$$

este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 4 Pentru orice parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ se consideră seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{1+n^{\alpha}x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine mulţimea valorilor parametrului α astfel încât seria să fie convergentă punctual pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că această serie de funcţii este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $\alpha > 2$.

c) Să se arate că pentru $\alpha = 2$ seria de funcţii este uniform convergentă pe mulţimea $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, dar nu este uniform convergentă pe $(-1, 1)$.

Exerciţiul 5 Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+x^n},\ x \geq 0,$$

şi apoi să se studieze convergenţa uniformă a acestei serii pe mulţimea sa de convergenţă. Să se arate că seria este uniform convergentă pe orice interval de forma $[a, \infty)$, unde a este un parametru real cu $a > 1$.

Exerciţiul 6 Să se arate că seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 0} a^n \cos(b^n \pi x),\ \text{unde } a \in (0,1) \text{ şi } b \in \mathbb{R}^*,$$

este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ având suma continuă.

Remarca 2.2.2 Funcţia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ x \in \mathbb{R},$$

unde $a \in (0, 1)$ şi b este un număr natural impar care verifică inegalitatea

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

este exemplul dat de Weierstras pentru o funcţie continuă care nu este derivabilă în nici un punct.