Matematici Speciale

LazR ('3')

12 Februarie, 2024

Cuprins

Capitolul 0:Combinatorica

0.1 Principii

Principiul adunării

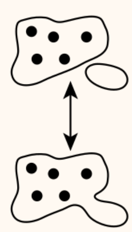
Fie o sarcină oarecare A și $A_k, k = \overline{1,n}$ n abordări diferite ale sarcinii respective, fiecare abordare A_k putând fi dusă la îndeplinire în a_k moduri diferite. Principiul adunării susține că numărul total de moduri în care sarcina poată fi dusă la îndeplinire este egal cu suma algebrică a tuturor modurilor în care poate fi îndeplinită fiecare abordare în parte:

$$\sum_{\text{moduri}} A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\text{moduri}} A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Strict matematic, principiul adunării comunică cum cardinalul reuniunii a n mulțimi disjuncte este egal cu suma algebrică a cardinalelor fiecărei mulțimi în parte:

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| A_k \right|.$$

Ilustrare a principiului adunării



Principiul înmulțirii

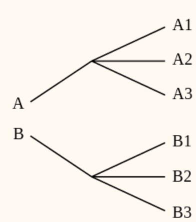
Fie o sarcină oarecare B și $B_k, k = \overline{1,n}$ n sub-sarcini diferite ale sarcinii respective, fiecare sub-sarcină B_k putând fi dusă la îndeplinire în b_k moduri diferite. Principiul înmulțirii susține că numărul total de moduri în care sarcina poată fi dusă la îndeplinire este egal cu produsul tuturor modurilor în care poate fi îndeplinită fiecare sub-sarcină în parte:

$$\sum_{\text{moduri}} B = \prod_{k=1}^{n} \sum_{\text{moduri}} B_k = \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Strict matematic, principiul înmulțirii comunică cum cardinalul produsului cartezian al n mulțimi disjuncte este egal cu produsul cardinalelor fiecărei mulțimi în parte:

$$\left|\times_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} \left|A_k\right|.$$

Ilustrare a principiului înmulțirii

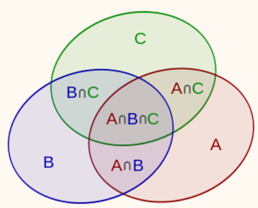


Principiul excluziunii-incluziunii

Principiul excluziunii-incluziunii este o generalizare a principiului adunării pentru mulțimi nu neapărat disjuncte, și susține cum cardinalul reuniunii a n mulțimi nedisjuncte este egal cu suma algebrică a cardinalelor fiecărei mulțimi în parte, din care se scade cardinanul intersecției a oricărei perechi arbitrare de mulțimi și la care se adună apoi cardinanul intersecției a oricăror trei mulțimi, din care se scade cardinalul intersecției a oricăror patru mulțimi și așa mai departe:

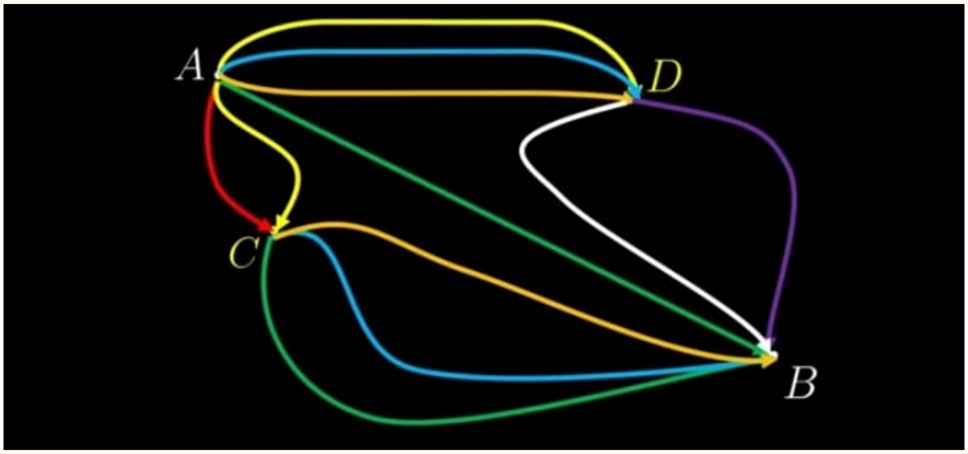
$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \{1,\ldots,n\}} (-1)^{J+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

Ilustrare a principiului excluziunii-incluziunii



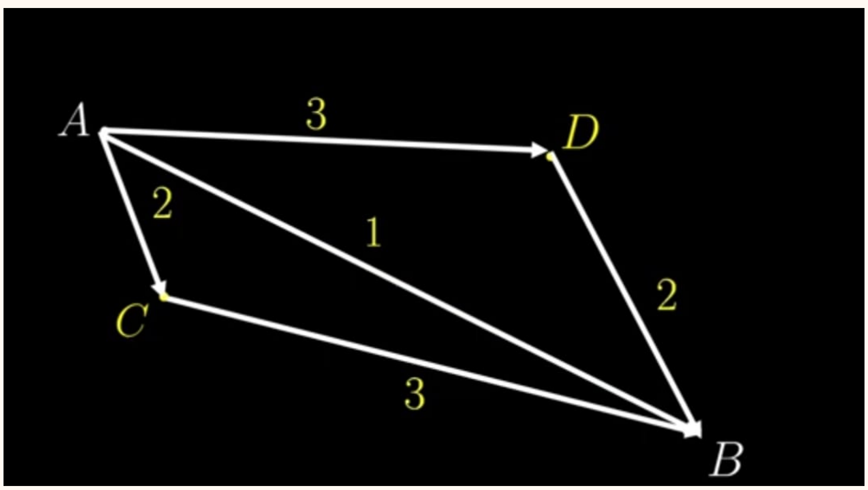
Să luăm de exemplu harta abstractizată a zborurilor unui avion care încep în orașul A și sfârșesc în orașul B. Există 3 rute mari posibile, din A direct în B, din A în C și apoi în B, respectiv din A în D și apoi în B, iar fiecare rută are un număr de sub-rute alternative reprezentate mai jos.

Graf zboruri



Pentru a simplifica vizualizarea problemei, vom trasa o singură linie între fiecare oraș, la care asociem câte un număr, reprezentând modurile posibile de zbor între două orașe.

Graf zboruri simplificat



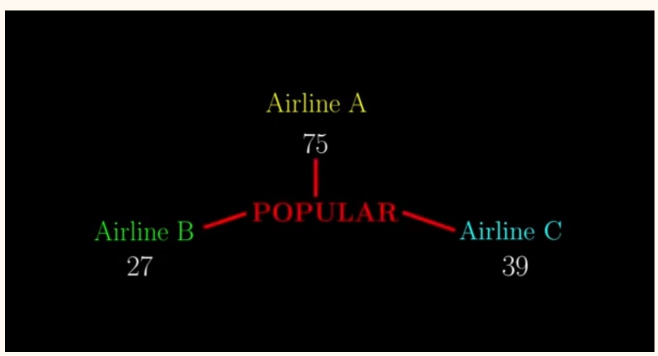
Dorim să numărăm toate modurile posibile de a ajunge din orașul A în orașul B. După cum putem observa, sarcina noastră este să ajungem dintr-un oraș în altul, și există 3 abordări diferite. Conform principiului adunării, trebuie să adunăm toate zborurile posibile pentru fiecare rută aleasă. Ruta directă, din A în B, are un singur zbor posibil. Celelalte două rute alternative, cu opriri într-un oraș intermediar, C, respectiv D, au câte două sub-rute care au la rândul lor un număr de abordări diferite. Conform principiului înmulțirii, trebuie să calculăm produsul numărului de moduri în care poate fi traversată fiecare sub-rută pentru a afla numărul de moduri în care poate fi efectuată ruta mai mare. Conform acestui raționament, numărul total de zboruri din orașul A în orașul B este $2 \cdot 3 + 1 + 3 \cdot 2 = 13$.

Calculul zborurilor posibile din A în B(0.1.1)

Zboruri din A în B = Nr. zboruri prin C + Nr. zboruri directe + Nr. zboruri prin $D = 6 + 1 + 6 = 13$.

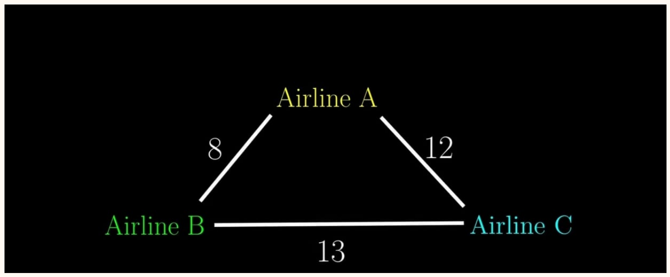
În aceeași idee, pornim de la 3 companii diferite de zboruri, dintre care alegem numai una (important pentru a putea folosi principiul adunării), și dorim să aflăm în câte orașe putem ajunge. Mai jos este reprezentat numărul de orașe în care putem ajunge alegând una dintre companii, cu precizarea că există unele destinații mai populare, pentru care 2, sau chiar 3 companii de zbor oferă zboruri în acele orașe (deci anumite orașe se suprapun).

Companii de zbor și numărul de orașe în care acestea ajung



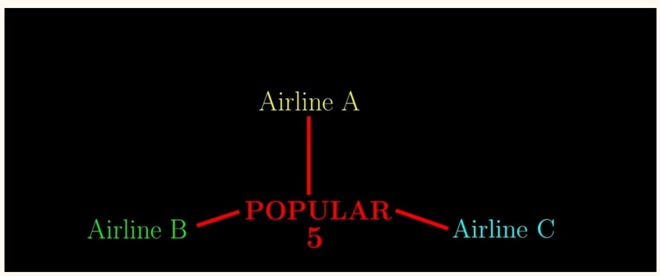
Există un număr de orașe comune în care regăsim zboruri oferite de câte două companii.

Numărul de orașe comune pentru câte două companii de zbor



Există de asemenea un număr de orașe foarte populare în care regăsim zboruri oferite de toate cele 3 companii.

Numărul de orașe comune pentru toate cele 3 companii



Conform principiului excluziunii-incluziunii, mai întâi adunăm toate zborurile posibile, din care scădem toate zborurile comune pentru câte două companii, deoarece acestea se numără de prea multe ori, și la care apoi adunăm numărul de zboruri comune tuturor celor 3 companii, deoarece în urma scăderii repetate, acestea ajung să nu mai fie numărate.

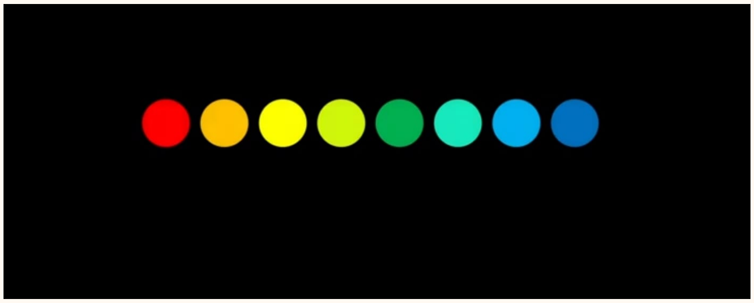
Calculul orașelor în care putem ajunge(0.1.2)

Nr. orașe =
Nr. orașe A + Nr. orașe B + Nr. orașe C
- Nr. orașe AB - Nr. orașe BC - Nr. orașe CA
+ Nr. orașe ABC
= 27 + 75 + 39 - 8 -13 - 12 + 5 = 113.

0.2 Aranjamente si Combinari

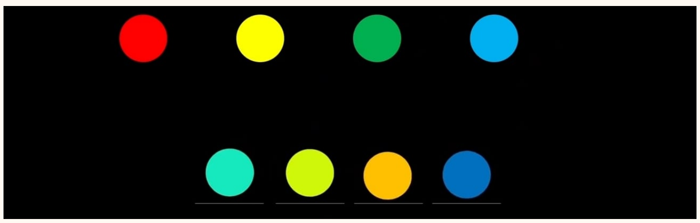
Aranjamentele și combinările, în ciuda aparențelor, nu sunt concepte fundamentale ale combinatoricii, ci sunt de fapt obiecte derivate din principiul de bază mult mai intuitiv al înmulțirii. Atât aranjamentele, cât și combinările, calculează în câte moduri putem selecta k elemente dintr-o mulțime de n elemente (desigur, $k \leq n \in \mathbb{N}$).

Mulțime de elemente



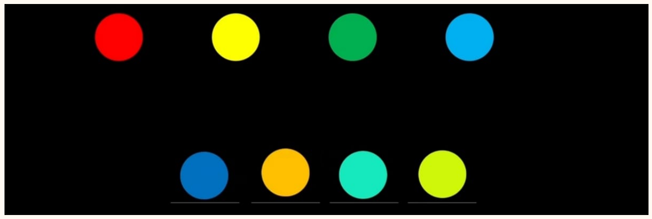
Diferența dintre cele două constă în faptul că aranjamentele țin cont de ordine, în vreme ce combinările nu. Astfel că selecțiile

O alegere de elemente



și

Aceeași alegere - rearanjată



sunt diferite din punctul de vedere al aranjamentelor, însă identice din punctul de vedere al combinărilor. Evident, combinările sunt întotdeauna într-un număr mai mic sau egal cu cel al aranjamentelor.

Formula analitică a aranjamentelor este o consecință directă a principiului înmulțirii. Problema mare este de a selecta k elemente dintr-o mulțime de n elemente. Prima sub-problemă este să selectăm un element dintr-o mulțime de n elemente, iar prin urmare, sunt n posibilități. A două sub-problemă este să selectăm un alt element dintr-o mulțime de $n-1$ elemente, iar prin urmare, sunt $n-1$ posibilități. Analog, constatăm că ultima sub-problemă constă în alegera unui element dintr-o mulțime de $n-k+1$ elemente ($n-k+1$ deoarece în urma ultimei selecții vom rămâne, în mod evident, cu $n-k$ elemente în mulțimea originală și k elemente în mulțimea de elemente selectate). Conform principiului înmulțirii, avem în total $\prod_{i=n-k+1}^{n} i$ aranjamente. Vom folosi notația P_k^n pentru a desemna aranjamentele de n elemente luate câte k, însă este echivalentă cu notația A_n^k.

În cazul combinărilor, pentru care vom folosi notația $\binom{n}{k}$, echivalentă cu C_n^k, o selecție, din punctul de vedere al combinărilor, este echivalentă cu P_k^k selecții din punctul de vedere al aranjamentelor. Prin urmare, rezultă egalitatea $P_k^k \cdot \binom{n}{k} = P_k^n$. Observăm că, în general, P_n^n denotă produsul a primelor n numere naturale, astfel că vom folosi, în scopul simplificării, notația $n!$ (n factorial). Rezultă de aici expresiile analitice ale aranjamentelor, respectiv combinărilor.

Expresia analitică a aranjamentelor(0.2.1)

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Expresia analitică a combinărilor(0.2.2)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

0.3 Binomul lui Newton

Să luăm în considerare formulele de calcul prescurtat precum $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ și $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Există un mod de a generaliza aceste rezultate pentru orice $n \in \mathbb{N}$? Problema se dovedește a fi una de numărare, bazată pe simplele principii combinatorice.

Binomul lui Newton

Fie $n \in \mathbb{N}$ și a și b două numere reale oarecare. Atunci:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demonstrație:
Scriind produsul sub formă explicită, $\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{\text{de } n \text{ ori}}$, observăm că în urma desfacerii parantezelor există un singur termen a^n, un singur termen b^n, selectând a de $n-1$ ori și b o dată, există $\binom{n}{n-1}$ termeni de forma $a^{n-1}b$, deoarce schimbând ordinea a-urilor selecția nu se schimbă, iar pe caz general, trebuie să selectăm a de $n-k$ ori și b de k ori în $\binom{n}{n-k}$ moduri, care însă este un cardinal egal cu $\binom{n}{k}$.

□

Binomul lui Newton ne poate ajuta să demonstrăm următorul rezultat teoretic.

Cardinalul mulțimii submulțimilor

Fie Ω o mulțime finită și $\mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea submulțimilor lui Ω. Atunci

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.$$

Demonstrație:
Pornind de la mulțimea originală Ω, trebuie să selectăm mai întâi 0 elemente, pentru a obține mulțimea vidă, câte un element pentru a obține toate submulțimile de un element, câte două elemente pentru a obține toate submulțimile de două elemente, în general, câte k elemente pentru a obține toate submulțimile de k elemente, iar cum mulțimile nu sunt ordonate, $|\mathcal{P}(\Omega)| = \sum_{k=0}^{|\Omega|} \binom{n}{k} = (1+1)^{|\Omega|} = 2^{\Omega}$.

$\square$

0.4 Functiile B^A

B^A

Fie A și B două mulțimi finite. Notația B^A denotă mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în B.

Notația de mai sus este special aleasă astfel încât să faciliteze exprimarea umrătoarei teoreme.

Cardinalul lui B^A

Fie A și B două mulțimi finite. Cardinalul mulțimii tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în B este

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Demonstrație:
Avem $|A|$ sub-sarcini, de a selecta un element din A și de a-i atribui un element din B, și pentru fiecare sub-sarcină $|B|$ abordări diferite, astfel că putem aplica principiul înmulțirii care ne spune că $|B^A| = \underbrace{|B| \cdot |B| \cdot ...|B|}_{\text{de}|A| \text{ ori}} = |B|^{|A|}$.

$\square$

Un alt rezultat similar se leagă de noțiunea de tuplu, sau k-listă.

Numărul modurilor de formare a k-tuplurilor

Există n^k k-tupluri formate prin selecția a n elemente dintr-o mulțime.

Demonstrație:
Analog la teorema precedentă, unde B este mulțimea elementelor, iar k mulțimea indecșilor.

$\square$

0.5 Partitia unei multimi

0.6 Deranjamente

0.7 Exercitii

1. Fie A mulțimea string-urilor de n biți, $s = b_0b_1...b_{n-1}, b_i \in \{0, 1\}$. Să se determine câte string-uri au suma biților egală cu $k \leq n$.

Soluție:

Cardinalul mulțimii string-urilor care au suma biților egală cu k este cardinalul mulțimii string-urilor cu k biți setați pe valoarea 1. Cum sunt n biți și numărul selecțiilor pe care trebuie să le facem este k, cardinalul tuturor modurilor de selecție posibile este C_n^k.

2. (i) Care este numărul de coduri binare de 4 biți care se pot forma?
(ii) În câte moduri pot fi codificate cifrele zecimale, folosind 4 biți?
(iii) Presupunem că în definirea unui cod arbitrar pentru cifrele zecimale se specifică în prealabil care sunt codurile de 4 biți neuitilizate în codificare. Câte posibilități de codificare există în această etapă?

Soluție:

(i) Cardinalul codurilor binare de 4 biți ce se pot forma este cardinalul funcțiilor definit pe mulțimea indecșilor, $\{0, 1, 2, 3\}$, cu valori în $\{0, 1\}$, adică $2^4 = 16$.

(ii) Codificarea cifrelor se realizează printr-o aplicație injectivă

$$C : \{k : k = \overline{0,9}\} \to \{0,1\}^4.$$

Mulțimea tuturor funțiilor de această formă are cardinalul A_{16}^{10}.

(iii) Dacă înainte de codificare sunt specificate cele $16 - 10 = 6$ coduri nefolosite, cele 10 coduri rămase pot fi permutate în 10! moduri pentru a fi asociate cu câte o cifră zecimală.

3. Să se determine câte parole de 8 caractere din mulțimea

$$\{a, b, c, ..., x, y, z, 0, 1, 2, ..., 9\}$$

se pot forma astfel încât fiecare parolă conține cel puțin o cifră și să se termine cu o literă.

Soluție:

Scădem din cardinalul tuturor parolelor posibile, cardinalul parolelor inadmisibile, conform ceriței. Cardinalul mulțimii tuturor parolelor posibile de 8 caractere ce se pot forma cu elemente din mulțimea dată este 36^8, din care scădem cardinalul parolelor ce nu respectă cerința, mai exact parolele ce se termină cu o cifră, ale căror cardinal este $10 \cdot 36^7$, respectiv cardinalul parolelor ce se termină cu o literă, însă nu conțin deloc cifre, ale căror cardinal este 26^8. Deci răspunsul este $36^8 - 10 \cdot 36^7 - 26^8 = 26 \cdot (36^7 - 26^7)$.

4. O magistrală a plăcii de bază este un circuit specializat ce comunică cuvinte. În cazul de față, un cuvânt este un string binar de 8 biți.
(i) Câte cuvinte distincte poate comunica magistrala?
(ii) În modul de lucru redus cel mult 6 biți dintr-un cuvânt pot fi setați simultan pe 1. Câte cuvinte diferite poate să comunice magistrala în modul redus?

Soluție:

(i) Cardinalul selecțiilor care asociază unui *place-holder* din mulțimea $\{b_1, b_2, ..., b_8\}$ un bit din mulțimea $\{0, 1\}$ este 2^8.

(ii) Calculăm diferența dintre cardinalul selecțiilor nerestricționate și cardinalul seleţiilor cu cel puțin 7 biți setați pe 1. Cum cardinalul modurilor de a seta 7 biți este $C_8^7 = 8$ și cardinalul modurilor de a seta 8 biți este $C_8^8 = 1$ cardinalul cuvintelor specificate este $2^8 - 9$.

5. Există 128 caractere ASCII. Câte din string-urile de 5 caractere ASCII conțin caracterul @?

Soluție:

Scădem din numărul total de cuvinte de cinci caractere ce se pot forma din tabela ASCII, cuvintele ce nu-l conțin pe @, adică efectuăm calculul $128^5 - 127^5$.

6. Considerăm mulțimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 9, a, b, c, ..., z\}$. În câte moduri se pot codifica elementele acestei mulțimi pe 8 biți? Dar pe 16 biți?

Soluție:

În cazul cu 8 biți, cardinalul mulțimii tuturor modurilor de codificare este cardinalul mulțimii tuturor funțiilor injective

$$C : \{0, 1, 2, 3, ..., 9, a, b, c, ..., z\} \to \{0, 1\}^8,$$

adică A_{32}^{26}. Analog pentru 16 biți ($A_{2^{16}}^{26}$).

7. Câte numere de 4 cifre se pot forma în baza 16?

Soluție:

Calculăm cardinalul mulțimilor definite pe mulțimea indecșilor, $\{0, 1, 2, 3\}$, cu valori în $\{k : k = \overline{0, F}\}$. Răspunsul este 16^4.

8. O mulțime conține n obiecte dintre care k au caracteristica C_1, iar $n - k$ au caracteristica C_2. Unui m-tuplu de elemente distincte din A i se asociază m-codul cu două simboluri, s_1 dacă elementul corespunzător are caracterisitca C_1, și s_2 dacă are caracterisitca C_2. Câte coduri distincte există?

9. Fie ecuația în numere întregi mai mari sau egale cu 0: $\sum_{i=1}^{5} x_i = 20$. Care

este procentul de soluții de forma $(0, x_2, x_3, x_4, 0)$?

Soluție:

Un mod de a codifica toate soluțiile posibile este următorul: cum numărul 20 este alcătuit din 20 de unități, numărul de moduri de a-l scrie pe 20 ca sumă de 5 numere naturale, nu toate neapărat nenule, este egal cu numărul de moduri de a scrie un string de 24 de biți, unde 20 de biți sunt setați pe 1 și 4 biți sunt setați pe 0 (unde, intuitiv, 1 reprezintă unitatea și 0 reprezintă semnul +). De exemplu, soluția { 1, 7, 2, 4, 6 } va fi codificată sub forma 101111111011011110111111, în vreme ce soluția { 10, 6, 0, 3, 1 } va deveni 111111111101111110011101 (se observă că sunt 0 biți albaștrii setați pe 1). Numărul total de astfel de string-uri este C_{24}^4, deoarece un string este unic determinat de biții pe care îi setăm ca fiind 0. Analog, numărul de soluții de forma $\{0, x_2, x_3, x_4, 0\}$ este C_{22}^2 (avem 20 de unități și 2 ”+”-uri). Procentul este $\approx 2.17\%$.

10. Un număr de 7 cifre este o listă de 7 cifre în care prima cifră este diferită de 0.
(i) Cât numere de 7 cifre există?
(ii) Câte numere de 7 cifre nu conțin 0?
(iii) Câte numere de 7 cifre conțin cel puțin un 0?

Soluție:

(i) Calculăm cardinalul produsului cartezian dintre 7 mulțimi, una având cardinalul 9 (cifra de pe prima poziție), iar celelalte având cardinalul 10 (restul cifrelor), adică $9 \cdot 10^6$.

(ii) Eliminând elementul 0 din fiecare mulțime de posibilități, rămânem cu 9^7 numere.

(iii) Scădem din cardinalul tuturor posibilităților cardinalul numerelor care nu-l conțin pe 0: $9 \cdot 10^6 - 9^7$.

11. O bandă dreptunghiulară de lungime 120 este divizată cu pasul 10. Câte modele se pot genera, vopsind 4 sub-dreptunghiuri în roșu, 3 în verde și 5 în albastru?

Soluție:

Modelele sunt unic determinate de alegerea a $k_1 \in \{3,4,5\}$ sub-dreptunghiuri, apoi a $k_2 \in \{3,4,5\} \setminus \{k_1\}$ sub-dreptunghiuri din cele rămase, a treia ”alegere” fiind predeterminată de primele două, iar alegerile nu influențează cu nimic răspunsul definitiv: $C_{12}^3 C_9^4 = C_{12}^3 C_9^5 = C_{12}^4 C_8^3 = C_{12}^4 C_8^5 = C_{12}^5 C_7^3 = C_{12}^5 C_7^3$.

12. După sesiunea de admitere din vara anului 2008 au fost adimiși la CTI 140 de studenți, care sunt distribuiți în 4 grupe de câte $35, 38, 34$, respectiv 33 de studenți. Câte astfel de repartizări sunt posibile?

Soluție:

Aplicând un raționament similar cu cel de la exercițiul anterior, ajungem la rezultatul imediat $\frac{140!}{33!34!35!38!}$.

13. Un comitet de 10 persoane conține 5 membrii din coaliția aflată la guvernare și 5 membrii din coaliția aflată în opoziție. Care este numărul de sub-comitete de 3 persoane în care opoziția domină ca număr?

Soluție:

Evident, alegem doi reprezentanți ai opoziției și unul din guvernare: $C_5^2 C_5^1$.

Capitolul 1:Introducere

Tematici cheie: definiția axiomatică a probabilității, scenariul matematic, probabilități condiționate, teoria lui Bayes.

1.1 Euristica

Experimente aleatoare

Experimentele care pot avea rezultate diferite în funcție de o serie de circumstanțe, rezultate care nu pot fi cunoscute înainte efectuării experimentului, se numesc experimente aleatoare.

Realizare

Rezultatul atomic al unui experiment aleator se numește realizare.

Eveniment

O colecție de realizări se numește eveniment. Mulțimea tuturor realizărilor se numește eveniment sigur. Evenimentul imposibil reprezintă mulțimea vidă.

Colecția tuturor realizărilor acoperă orice rezultat posibil și nici o realizare nu o implică pe cealaltă, fiind ***mutual exclusive***.
Evenimentul sigur se notează aici cu Ω, iar cel imposibil cu $\emptyset$.
O ilustrare clasică a acestor noțiuni este ***experiența aruncării unui zar***.
Evenimentele de apariție a feței cu numărul $k = \overline{1, n}$ se numesc evenimente elementare. Evenimentul de apariție a unei fețe cu un număr par este reprezentat simbolic de mulțimea $A = \{2, 4, 6\}$, în timp ce evenimentul apariției unei fețe cu numărul mai mare sau egal ca 3 este $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Orice eveniment are asociat un ***eveniment contrar***. Producerea unui eveniment implică nerealizarea evenimentului său contrar și vice-versa. Notația sa este $C_\Omega A = \Omega \setminus A$. Remarcăm că $C_\Omega(C_\Omega A) = A$. Evenimentul sigur și evenimentul imposibil sunt contrare unul altuia: $C_\Omega\emptyset = \Omega$ și $C_\Omega\Omega = \emptyset$.

Probabilitate

Probabilitatea unui eveniment A este un număr, notat $P(A) \in [0, 1]$, care asociază fiecărui eveniment șansa sa de a se produce.

În teoria probabilităților, conceptele de ***eveniment*** și ***probabilitate*** sunt cele care primează.

1.2 Spatiu discret de probabilitate

Cea mai dificilă sarcină în analiza unui experiment aleator este atribuirea unei probabilități de producere a fiecărui experiment posibil. Două cazuri simple însă sunt:

(i) Atunci când evenimentul sigur Ω este o mulțime finită de cazuri egal probabile - caz în care probabilitatea se definește astfel:

Probabilitatea unui eveniment dintr-o mulțime finită cu probabilități omogene(1.2.1)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

(ii) Atunci când evenimentul sigur Ω este o mulțime finită de cazuri care nu sunt egal probabile - caz în care se folosește aproximarea:

Probabilitatea unui eveniment dintr-o mulțime finită cu probabilități neomogene(1.2.1)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{k(n)}{n}, k = \overline{0, n}.$$

Urmează o tratare axiomatică a conceptului de probabilitate.

Tripletul $(\Omega \mathcal{F} P)$

Spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este o structură algebrică formată dintr-un eveniment sigur Ω, familia sa de evenimente asociate $\mathcal{F}$ și funcția care atribuie o probabilitate fiecărui eveniment studiat P.

Familie admisibilă de evenimente

Familia $\mathcal{F}$ de evenimente este considerată admisibilă dacă:
(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow C_\Omega A \in \mathcal{F}$;
(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Această definiție axiomatică ne permite să demonstrăm câteva rezultate importante.

Apartenența intersecției și a diferenței la $\mathcal{F}$

(i) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Demonstrație:
(i) $C_\Omega(C_\Omega A \cup C_\Omega B) = A \cap B$;
(ii) $A \cup C_\Omega B = A \setminus B$.

$\square$

Probabilitate peste $\mathcal{F}$

Fie $\mathcal{F}$ o familie admisibilă de evenimente asociată evenimentului sigur Ω. O probabilitate P peste $\mathcal{F}$ este o funcție $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ce verifică condițiile:
(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Proprietăți ale probabilității

(i) $P(C_\Omega A) = 1 - P(A)$;
(ii) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
(iii) $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Demonstrație:
(i) $P(A) + P(C_\Omega A = P(A \cup C_\Omega A) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(C_\Omega A)$;
(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
(iii) $P(B) = P(A) + P(A \setminus B), P(A \setminus B) \geq 0$.

$\square$

Se poate demonstra că probabilitatea verifică principiul incluziunii-excluziunii. Există apoi situații în care evenimentul sigur este o mulțime infinită.

Familie boreliană

Fie mulțimea $\Omega \neq \emptyset$. Se numește o familie boreliană de evenimente o familie de partiții $\mathcal{F}$ ale lui Ω ce verifică condițiile:
(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow C_\Omega A \in \mathcal{F}$;
(iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Probabilitate boreliană

O probabilitate peste o familie boreliană de evenimente $\mathcal{F}$ este o funcție $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ cu proprietățile:
(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset \, \forall n \neq m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este, ce se numește în acest caz, un câmp de probabilitate.

Inegalitatea lui Boole

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

pentru orice șir $A_n \in \mathcal{F}$.

Demonstrație:
Știm că

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_n),$$

pentru orice șir $B_n \in \mathcal{F}$ de mulțimi disjuncte. Încercăm să reducem șirul oarecare A_n la șirul disjunct $B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Vrem să arătăm că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Fie $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_m$ pentru un m minim astfel încât $k < m \Rightarrow x \notin A_k$. Astfel că $x \in B_m = A_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$.
Fie $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow x \in B_m$ pentru un anume m. Cum $B_m = A_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k \Rightarrow x \in A_m$.
Putem concluziona că

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

□

1.3 Probabilitati conditionate

Într-un experiment aleator, cunoașterea unor informații adiționale despre un eveniment, relativ la alt eveniment, poate influența probabilitatea celui dintâi. Vom ilustra asta printr-un exemplu:

Fie 7 studenți, 4 băieți și 3 fete, care participă la un concurs pentru o bursă. Roxana, una dintre cele 3 studente, are astfel șansa de $\frac{1}{7}$ să ia concursul.

După un interviu, înainte de a se anunța rezultatele, se află că a fost admisă o fată. Cum au candidat 3 studente, probabilitatea Roxanei de succes este acum $\frac{1}{3}$.

Probabilitate condiționată

Probabilitatea unui eveniment A, condiționată de evenimentul B, cu $P(B) \neq 0$, este

$$P_B A = P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}.$$

Probabilitatea condiționată poate fi gândită ca o ***redistribuție a probabilităților unui câmp***, astfel încât următoarele 3 proprietăți să fie îndeplinite, pentru realizările ω, în contextul în care ***evenimentul B este acum considerat ca fiind sigur***:

$$(i)\, \omega \in B \Rightarrow P(\omega|B) = \alpha P(\omega);$$
$$(ii)\, \omega \notin B \Rightarrow P(\omega|B) = 0;$$
$$(iii) \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega|B) = 1.$$

De aici, avem:

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega|B) = \sum_{\omega \in B} P(\omega|B) + \sum_{\omega \notin B} P(\omega|B) =$$
$$= \alpha \sum_{\omega \in B} P(\omega) = \alpha P(B) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{P(B)}.$$

Astfel că noua distribuție va fi

$$(i)\, \omega \in B \Rightarrow P(\omega|B) = \frac{P(\omega)}{B};$$
$$(ii)\, \omega \notin B \Rightarrow P(\omega|B) = 0.$$

Pentru un eveniment oarecare A:

$$P(A|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega|B) + \sum_{\omega \in A \cap C_\Omega B} P(\omega|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{P(\omega)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Evenimente independente

Evenimentele independente ale unui câmp de probabilitate sunt evenimentele $A_k \in \mathcal{F}$ de probabilități nenule, cu proprietatea că

$$P\left(\bigcap A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} A_{ij}.$$

Se observă că independența constă în proprietatea ca $P(A|B)$ să fie egal cu $P(A)$, pentru ca $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Deci setarea probabilității evenimentul B ca fiind 1 nu influențează probabilitatea evenimentului A.

Observație

Verificarea independenței a n elemente presupune verificarea independenței a

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k = 2^n - (n+1)$$

intersecții de evenimente.

1.4 Formula lui Bayes

Atunci când nivelul nostru de cunoștințe asupra unui anumit proces analizat este amplificat pe baza a noi informații, probabilitatea inițială atribuită unui eveniment se rectifică. Aceasta este ideea care stă la baza formulării lui Bayes. H_k sunt considerate mulțimile unei partiții a elementului sigur și se numesc ***ipoteze***. Evenimentul care aduce informație despre ipoteze se numește ***eveniment informație***.

Formula probabilității totale

Dacă $A \in \mathcal{F}$ este un eveniment oarecare, atunci probabilitatea sa este

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k).$$

Demonstrație:

Cum $A = \bigcup_{k=1}^{k}(A \cap H_k)$, $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap H_k)$ (datorită partiționării), iar din formula probabilității condiționate avem că $P(A \cap H_k) = P(H_k)P(A|H_k)$, rezultă concluzia.

$\square$

Probabilitățile $P(H_k)$ se numesc ***probabilități apriorice***, deoarece au fost atribuite *a priori*, în funcție de nivelul de convingere față de ipoteze, iar pe baza acestor probabilități, precum și ***a nivelului de încredere*** în informația A, $P(A|H_k)$, știind că ipotezele au loc, se calculează, conform formulei probabilității totale, nivelul de veridicitate al informației, $P(A)$. În urma constatării informației A ca fiind verosimilă, probabilitățile ipotezelor devin rectificate.

Formula lui Bayes

Probabilitatea ipotezelor, condiționată de evenimentul informație, este

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_m)P(A|H_m)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}.$$

Demonstrație:
Cum $P(H_m|A)P(A) = P(A|H_m)P(H_m)$, iar $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)$, rezultă concluzia.

$\square$

Probabilitățile actualizate ale ipotezelor se numesc ***probabilități posteriorice***.

1.5 Exercitii

1.5.1 Evenimente. Probabilitati.

1. Numerele de mașină sunt formate din înșiruiri de 5 caractere: primele sunt cifre (între 0 și 9), urmate de 3 litere (între A și Z). Dacă un număr este selectat aleator, care este probabilitatea să fi fost selectat cel al mașinii tale?
2. Să se exprime fiecare dintre evenimentele următoare în funție de evenimentele A, B, C, folosind operațiile de complementare, reuniune și intersecție.

(i) Cel puțin unul dintre evenimente se produce;

(ii) Cel mult un eveniment se produce;

(iii) Niciunul dintre evenimente nu se produce;

(iv) Toate trei evenimentele se produce;

(v) Exact un eveniment se produce;

(vi) Evenimentele A, B se produc, însă C nu se produce;

(vii) Fie evenimentul A se produce, sau dacă nu, atunci nici B nu se produce.

3. Un student dă un test grilă ce constă din 5 întrebări, fiecare având asociate câte 3 răspunsuri. Dacă studentul încercuiește la întâmplare răspunsul la fiecare dintre cele 5 întrebări, să se determine:

(i) probabilitatea de a da exact un răspuns corect;

(ii) probabilitatea de a da cel puțin un răspuns corect;

(iii) probabilitatea de a nu da niciun răspuns corect;

(iv) probabilitatea de a da cel mult un răspuns corect.

4. O rețea de calculatoare de comutație are calculatoarele dispuse în locațiile de coordonate întregi, (i, j), ale unui pătrat $[0, 8] \times [0, 8]$. Orice pachet de informație ajunge în nodul $(0, 0)$ și este transmis spre nodul $(8, 8)$ pe o rută prin noduri intermediare. Și anume, fiecare calculator transmite pachetul fie în sus, fie în dreapta.

(i) Să se calculeze probabilitatea ca router-ul din poziția $(4, 3)$ să participe la transferul unui pachet din nodul $(0, 0)$ spre nodul $(8, 8)$;

(ii) Să se deducă p_{ij} ca un nod arbitrar, (i, j), să facă parte din ruta unui pachet prin rețea, din $(0, 0)$ spre $(8, 8)$.

5. Un card de credit conține 16 caractere, toate fiind numere cuprinse între 0 și 9. Dintre acestea, doar 100 de milioane sunt valide (au fost atribuite diverselor persoane). Dacă un număr de card se introduce în mod aleator (pe o pagina de cumpărături), care este probabilitatea ca el să fie al unui card activ?

6. Videoclipurile YouTube au adrese URL de forma

http://www.youtube.com/watch?v=8Skd4fXYWaI,

în care fiecare caracter din ultima suită de 11 caractere ”8Skd4fXYWaI” este generat uniform și independent, din mulțimea caracterelor formate cu literele mari și mici ale alfabetului englezesc și din cifrele $0-9$. Să se determine care este probabilitatea generarării acestui string.

7. Într-o parcare circulară există 15 locuri și numerotate $1-15$. Când ajungi în parcare găsești 5 locuri libere. Care este probabilitatea ca acestea să fie unul după altul?

8. Numerele atribuite mașinilor dintr-un județ este format prin alăturarea a 5 cifre, din mulțimea $C = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Poliția generează cele 5 cifre independent și uniform (cu aceeași probabilitate), iar un număr de mașină poate să înceapă cu 0.

(i) Calculați probabilitatea de a primi un număr de mașină cu 5 cifre distincte;

(ii) Care este probabilitatea ca toate cele 5 cifre să fie egale?;

(iii) Calculați probabilitatea ca numărul să contină două cifre egale.

1.5.2 Probabilitati conditionate. Evenimente independente.

1. O cutie conține 20 de chip-uri de memorie, dintre care 5 sunt defecte. Se aleg 3 la întâmplare. Să se calculeze:

(i) probabilitatea ca toate trei să fie defecte;

(ii) exact un chip să fie defect.

2. Fie A și B două evenimente independente într-un experiment. Știind că $P(A) = 0.25, P(B) = 0.3$, să se calculeze $P(A \cup B), P_B(C_\Omega A)$ și $P(A \cap C_\Omega B)$.

3. Un proiect constă din trei sarcini independente și probabilitățile ca aceste sarcini să fie îndeplinite la timp sunt, respectiv: 0.9, 0.8, 0.85. Să se calculeze probabilitatea:

(i) ca toate cele trei sarcini să fie îndeplinite la timp;

(ii) ca primele două să fie îndeplinite la timp, iar a treia nu;

(iii) cel puțin una din sarcini să fie îndeplinită la timp.

4. Un disc de plastic este analizat din două puncte de vedere: al rezistenței la șoc și al rezistenței la zgârieturi. Rezultatele analizei a 100 de discuri sunt prezentate în tabelul alăturat.

rezist. bună la șoc și zgârieturi: 70	rezist. scăzută la șoc și bună la zgârieturi: 9
rezist. bună la șoc și scăzută la zgârieturi: 16	rezist. scăzută la șoc și zgârieturi: 5

Se definesc evenimentele A, discul are rezistență bună la șoc, și B, discul are rezistență bună la zgâriteturi. Să se determine următoarele probabilități: $P(A), P(B), P(A|B), P(B|A)$. Sunt evenimentele A și B independente?

Soluție:

$$P(A) = 0.86.$$

$$P(B) = 0.79.$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = 0.70.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.88.$$

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.81.$$

Cum $P(A \cap B) = P(B \cap A) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ evenimentele sunt dependente.

5. Într-un lot de 100 de produse sunt 5 cu defecțiuni. Se aleg aleator 3 produse din acest lot. Să se determine probabilitatea ca nici unul dintre produsele alese să fie cu defect.

Soluție:

Se definesc evenimentele E_i: al i-lea produs ales nu este defect. Cum ele sunt independente:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98}.$$

Alternativ, se poate ajunge la același rezultat, considerând numărul cazurilor posibile, C_{100}^3, și cel al cazurilor favorabile, C_{100-5}^3.

6. Se consideră evenimentele A și B astfel încât $P(A|B) = 0.4$ și $P(B) = 0.5$. Să se determine $P(A \cap B)$ și $P(C_\Omega A \cap B)$.

Soluție:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.2.$$

$$P(C_\Omega A \cap B) = P(C_\Omega A|B) \cdot P(B) = (1 - P(A|B)) \cdot P(B) = 0.3.$$

7. Se consideră evenimentele A și B astfel încât $P(A|B) = 0.2, P(B) = 0.8$ și $P(A|C_\Omega B) = 0.3$. Să se determine $P(A)$.

Soluție:

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \Rightarrow P(A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B|A)}.$$

$$P(A|C_\Omega B) = \frac{P(A \cap C_\Omega B)}{P(C_\Omega B)} = \frac{P(A)P(C_\Omega B|A)}{1 - P(B)} = \frac{P(A)(1 - P(B|A))}{1 - P(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A) - (1 - P(B))P(A|C_\Omega B)}{P(A)}.$$

$P(A) = P(B)P(A|B) \Rightarrow P(A) = (1-P(B))(P(A|C_\Omega B))+P(B)(A|B) = 0.22.$

8. Într-un birou se cumpără un nou computer. Firma producătoare menționează în certificatul de garanție că există probabilitatea de 5% ca acest calculator să se defecteze în primul an. Dacă nu s-a defectat în primul an, atunci cu probabilitate de 10% se poate defecta în al doilea an. Dacă nu s-a defectat în primii doi ani de funcționare, atunci cu probabilitate de 30% s-ar putea defecta în al treilea an. Să se calculeze:

(i) probabilitatea să nu se defecteze în primii doi ani;

(ii) probabilitatea să nu se defecteze în primii trei ani.

9. Un student dă un test grilă ce constă din 5 întrebări, fiecare având asociate câte 3 răspunsuri. Dacă studentul încercuiește la întâmplare răspunsul la fiecare din cele 5 întrebări, să se determine:

(i) probabilitatea de a da exact un răspuns corect;

(ii) probabilitatea de a da cel puțin un răspuns corect;

(iii) probabilitatea de a da niciun răspuns corect;

(iv) probabilitatea de a da cel mult un răspuns corect.

Indicație: Se va rezolva folosind faptul că răspunsul la o întrebare este independent de răspunsul la altă întrebare.

10. Dacă A și B sunt două evenimente independente și $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4$, să se calculeze $P(A \cup B)$ și $P(A \setminus B)$.

1.5.3 Formula lui Bayes

1. Un pacient este suspectat de o boală rară. Diagnosticul se poate pune în urma unui test clinic. Există două ipoteze mutual exclusive: pacientul are boala respectivă (H_1) sau nu (H_2). Evident $H_2 = \overline{H_1}$. Probabilitățile apriorice ale ipotezelor sunt furnizate de Organizația Mondială a Sănătății,

care afirmă (pe baza nivelului ei de cunoaștere, rezultat din datele statistice) că 2 adulți din 1000 au această boală, adică $P(H_1) = 2/1000 = 0.002$. Prin urmare $P(H_2) = 0.998$ Notăm cu $A+$ evenimentul informație, ce semnifică test clinic pozitiv și cu $A-$ informația, test clinic negativ. Experiența de laborator arată că în 97% din cazuri în care afecțiunea respectivă există, testul iese pozitiv, deci $P(A+|H_1) = 0.97$, iar la 95% din cazuri, în care boala nu este prezentă, testul iese negativ, adică $P(A-|H_2) = 0.95$ și deci $P(A+|H_2) = 0.05$ (deoarece P_{H_2} este o funcție de probabilitate și deci, $P_{H_2}C_\Omega A = 1 - P_{H_2}(A)$). Dacă testul pentru pacientul în discuție iese pozitiv care este probabilitatea $P(H_1|A+)$, ca pacientul să aibă boala X?

2. La un examen de tip grilă, fiecare întrebare are 5 răspunsuri asociate, dintre care unul singur este cel corect. Un student știe răspunsul corect la 65% din întrebări. La cele la care nu știe răspunsul, încercuiește unul la întâmplare.

(i) Care este probabilitatea ca studentul să dea un răspuns greșit la o anumită întrebare?

(ii) Știind că acesta a răspuns corect la întrebare, care este probabilitatea ca răspunsul să fi fost obținut prin ghicire?

3. Un program are două module. Primul modul conține erori cu probabilitatea de 0.2, iar al doilea, fiind mai complex, conține erori cu probabilitatea de 0.4, independent de erorile din primul modul. Existența unei erori doar în primul modul face ca programul să eșueze cu o probabilitate de 0.5, în timp ce o eroare doar în al doilea modul conduce la blocajul programului cu o probabilitate de 0.8. Existența unei erori în ambele module produce blocarea programului cu o probabilitate de 0.9. Dacă programul a eșuat, care este probabilitatea ca eșecul să fi fost produs de erori din ambele module (o eroare în primul modul și o eroare în al doilea modul)?

4. Într-un sistem de comunicație digitală, biții transmiși sunt eronați din cauza zgomotului din canalul de transmitere și astfel sunt receptați eronat. Notăm cu E_b, evenimentul "s-a transmis bitul b", $b \in \{0, 1\}$ si cu R_b, evenimentul "s-a receptat bitul b", $b \in \{0, 1\}$. Știind că $P(R_0|E_0) = 0.7, P(R_1|E_1) = 0.8$ și că bitul 0 este transmis cu probabilitatea 0.6, să se calculeze probabilitatea să se transmită bitul 0, știind că s-a recepționat bitul

1.

Soluție:

$$P(E_0|R_1) = \frac{P(E_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(E_0)P(R_1|E_0)}{P(E_0)P(R_1|E_0) + P(E_1)P(R_1|E_1)} =$$

$$= \frac{P(E_0)(1 - P(R_0|E_0))}{P(E_0)(1 - P(R_0|E_0)) + (1 - P(E_0)P(E_1|R_1))} = 0.36.$$

5. Un robot se mișcă într-un spațiu de lucru (de exemplu, o cameră). El are un senzor care poate măsura distanța până la orice obiect din preajmă. Pe baza informației primite de la senzor, sistemul de calcul încorporat calculează probabilitatea ca ușa camerei să fie deschisă. Notăm cu H evenimentul ”ușa este deschisă”, care are probabilitatea 0.6. Robotul primește informația de la senzor că o anumită distanță până în zona ușii este d, privită ca o observație asupra unei variabile aleatoare D. Din experiența robotului în spațiul de lucru, sistemul de calcul are stocată informația că $P(D = d|H) = 0.7$, respectiv $P(D = d|C_\Omega H) = 0.1$. Să se calculeze probabilitatea ca ușa să fie deschisă știind că distanța măsurată este d.

Soluție:

$$P(H|D = d) = \frac{P(H)(D = d|H)}{P(H)P(D = d|H) + P(C_\Omega H)P(D = d|C_\Omega H)} = 0.91.$$

Capitolul 2:Variabile (vectori) aleatoare discrete

Tematici cheie: distribuții clasice.

Capitolul 3: Variabile (vectori) aleatoare continue

Tematici cheie: distribuția normală, clopotul lui Gauss.

Capitolul 4:Procese stochastice

Tematici cheie: lanțuri Markov, procese Poisson.

Capitolul 5:Statistică

Tematici cheie: estimatori, teorema de limită centrală.