# Analiză Matematică

LazR ('3')

27 Decembrie, 2023

# Cuprins

# Capitolul 1: Introducere in limite de siruri

## 1.1 Teoreme Relevante

**Lema intervalelor închise incluse**

Fie $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$ un șir descrescător de intervale închise și mărginite în $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n], n \geq 0$. Atunci:

$$\bigcap_{k \geq 0} I_n \neq \emptyset.$$

**Demonstrație:**
Au loc inegalitățile:

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_p \leq ... \leq b_q \leq ... \leq b_1 \leq b_n.$$

Fie $A = \{x : \exists p \ni x = a_p\}$ și $B = \{y : \exists q \ni y = b_q\}$. Evident, $b_0$ este majorant al lui $A$ și $a_0$ este minorant al lui $B$. Conform axiomei mărginirii mulțimilor de numere reale, există $\xi = \sup A$ și $\mu = \inf B$. Prin urmare, $\xi \leq \mu$. Fie $t \in [\xi, \mu]$. Avem $a_n \leq \epsilon \leq t \leq \mu \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in I_n$. Putem concluziona astfel că $[\xi, \mu] \subset \bigcap_{k \geq 0} I_n \Rightarrow \bigcap_{k \geq 0} I_n \neq \emptyset$.

□

**Convergența subșirurilor unui șir fundamental**

Fie un șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ și un subșir al său, $(x_{k_n})_{k_n \geq n \in \mathbb{N}}$, convergent către $l \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l.$$

**Demonstrație:**
Fie $\epsilon > 0, \nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon) \in \mathbb{R}$. Din ipoteză, avem:

$$|x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n \geq \nu_1(\epsilon),$$

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n, m \geq \nu_2(\epsilon).$$

Pentru $m = k_n \geq n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon))$, obținem:

$$|x_{k_n} - x_n| < \frac{\epsilon}{2}\, \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)).$$

Prin urmare:

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\, \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

□

**Lema lui E. Cesaro**

Orice șir de numere reale mărginit are un subșir convergent.

**Demonstrație:**
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir mărginit. Așadar, toți termenii șirului, în număr inifinit, aparțin unui interval închis $I_0 = [a_0, b_0], a_0 < b_0$. Fie $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Atunci, cel puți unul din intervalele $[a_0, c_0], [c_0, b_0]$ conțin un număr infinit de termeni din $x_n$. Vom nota acel interval cu $I_1 = [a_1, b_1]$. Similar, fie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ și un interval cu număr infinit de termeni din $x_n$, fie $[a_1, c_1]$, fie $[c_1, b_1]$, notat $I_2 = [a_2, b_2]$. Procedând în continuare în acest fel, se obține un șir descrescător de intervale închise $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ....$ Conform lemei intervalelor închise incluse, există $\xi \in \bigcap_{k\geq 0} I_n$. Alegem șirul $(x_{k_n})_{k\geq n\in\mathbb{N}}, k_n \in I_n$. Avem:

$$|x_{k_n} - \xi| < a_n - b_n = \frac{a_0 + b_0}{2^n}\, \forall n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \xi.$$

□

**Convergența unui șir fundamental**

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă acesta este un șir Cauchy.

**Demonstrație:**
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir convergent în $\mathbb{R}$ cu limita $l \in \mathbb{R}$ și fie $\epsilon > 0$. Atunci, există $\nu(\epsilon)$ astfel încât:

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}\, \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

Fie $m \geq \nu(\epsilon)$ și $n \geq \nu(\epsilon)$. Așadar:

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|x_m - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Prin urmare:

$$|x_n - x_m| < |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \, \forall m, n \geq \nu(\epsilon).$$

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir Cauchy în $\mathbb{R}$ și $\epsilon > 0, \nu(\epsilon) \in R$. Avem $x_n \in (\nu(\epsilon) - \epsilon, \nu(\epsilon) + \epsilon)$, astfel că șirul $x_n$ este mărginit și prin urmare, conform lemei lui E. Cesaro, șirul $x_n$ are un subșir convergent. Însă, fiind șir Cauchy, rezultă, conform teoremei convergenței subșirurilor unui șir fundamental, că $x_n$ este convergent.

$\square$

**Teorema Bolzano-Weirestrass**

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

**Demonstrație:**
Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir monoton și mărginit. Demonstrațiile sunt similare în ambele cazuri de monotonie. Presupunem $x_n$ crescător. Conform axiomei mărginirii unei mulțimi de numere reale, există $M = \sup_n x_n$. Fie $\epsilon > 0$. Prin urmare:

$$M - \epsilon < x_n \leq M < M + \epsilon \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = M.$$

$\square$

**Notă:** Teorema nu se numește de fapt Bolzano-Weierstrass, dar este o consecință a ei și nu-i mai știu numele originial, deci rămâne așa.

**Teorema Stolz-Cesaro**

Fie șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, v_n \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă:
(i) $b_n$ este un șir strict monoton;
(ii) $b_n \to \infty$ sau $a_n \to 0, b_n \to \infty$;
(iii) există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = l \in \overline{\mathbb{R}};$$

atunci există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

**Demonstrație:**
**Cazul $\frac{*}{\infty}$**
Vom trata doar cazurile în care $v_n$ este monoton crescător, deoarece celelalte cazuri pentru $v_n$ monoton descrescător se tratează similar. Fie $\epsilon, \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$.
(i) $l \in (-\infty, \infty)$
Conform ipotezei:

$$l - \epsilon < \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} < l + \epsilon \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \iff$$
$$(l-\epsilon)(v_{n+1}-v_n) < u_{n+1}-u_n < (l+\epsilon)(v_{n+1}-v_n).$$

Adunând expresiile obținute pentru toți termenii de rang $n+k, n \geq \nu(\epsilon), k = [1...p]$ pentru un $p \in \mathbb{N}$ arbitrar, avem:

$$(l-\epsilon)(v_{\nu(\epsilon)+p}-v_{\nu(\epsilon)}) < u_{\nu(\epsilon)+p}-u_{\nu(\epsilon)} < (l+\epsilon)(v_{\nu(\epsilon)+p}-v_{\nu(\epsilon)}).$$

Putem împărți cu $v_{\nu(\epsilon)+p} > 0$:

$$(l-\epsilon)\left(1-\frac{v_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}}\right) < \frac{u_{\nu(\epsilon)+p}-u_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} < (l+\epsilon)\left(1-\frac{v_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}}\right) \iff$$

$$\frac{u_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} + (l-\epsilon)\left(1-\frac{v_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}}\right) < \frac{u_{\nu(\epsilon)+p}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} < \frac{u_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} + (l+\epsilon)\left(1-\frac{v_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}}\right).$$

Lăsând $p$ să tindă către $\infty$ în expresia de mai sus, obținem că $\frac{u_{\nu(\epsilon)+p}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} \in (l-\epsilon, l+\epsilon) \, \forall p \geq \nu(p) \in \mathbb{R}$. Prin urmare:

$$\frac{u_n}{v_n} \in (l-\epsilon, l+\epsilon) \forall n \geq \nu_1(\epsilon) = \nu(\epsilon) + \nu(p) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$$

(ii) $l = \pm\infty$
Tratǎ doar $l = \infty$. Din ipotezǎ:

$$\epsilon < \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} \forall n \geq \nu(\epsilon) \iff$$
$$\epsilon(v_{n+1} - v_n) < u_{n+1} - u_n \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

Adunând relațiile, conform aceleiași logici ca în cazul anterior:

$$\epsilon(v_{\nu(\epsilon)+p} - v_{\nu(\epsilon)}) < u_{\nu(\epsilon)+p} - u_{\nu(\epsilon)} \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

La final, obținem:

$$\frac{u_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} + \epsilon\left(1 - \frac{v_{\nu(\epsilon)}}{v_{\nu(\epsilon)+p}}\right) < \frac{u_{\nu(\epsilon)+p}}{v_{\nu(\epsilon)+p}} \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

Așadar, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$.

## 1.2 Exercitii

1. Sǎ se arate cǎ pentru $n \in \mathbb{N}$ în orice vecinǎtate a numǎrului $L \in \mathbb{R}$ precizat se aflǎ o infinitate de termeni ai șirurilor urmǎtoare:
(a) $a_n = \frac{n}{n+2}, L = 1$; (b) $b_n = 5 + \frac{1}{2^n}, L = 5$; (c) $c_n = -2 + (-2)^n, L = 0$.
**Rezolvare:**
(a) Fie $\epsilon > 0$ și $V = (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Din $\frac{n}{n+2} < 1 < 1+\epsilon$ și $\frac{n}{n+2} - \overline{\epsilon} < 1 - \overline{\epsilon} \forall \overline{\epsilon} > 0 \iff \frac{n}{n+2} > 1-\epsilon \Rightarrow n > \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}$, constatǎm cǎ existǎ o infinitate de termeni în vecinǎtatea arbitrarǎ $V$.
(b) Fie $\epsilon > 0$ și $V = (5-\epsilon, 5+\epsilon)$. Avem:

$$b_n \in V \iff 5 - \epsilon < 5 + \frac{1}{2^n} < 5 + \epsilon \iff n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}.$$

Pentru $\epsilon \geq 1$, $\frac{1}{\epsilon} \leq 1 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{\epsilon} \leq 0 \leq n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ toți termenii șirului se aflǎ în $V$.
Pentru $\epsilon < 1$, se alege, de exemplu, $\nu(\epsilon) = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon}\right] + 1$, și prin urmare, toți termenii șirului $b_n$ se vor afla în $V$, cu excepția numǎrului finit de termeni pentru care $n < \nu(\epsilon)$. De exemplu, pentru $\epsilon = \frac{1}{4}$, alegem $\nu(\epsilon) = [\log_2 4] + 1 = 3$ și toți termenii se vor afla în vecinǎtatea $V$ cu excepția termenilor $b_1$ și $b_2$.

(c) Fie $\epsilon > 0$ și $V = (-\epsilon, \epsilon)$. Toți termenii șirului $c_n$ se află în $V$, cu excepția termenilor de rang impar (se observă însă, că deși există o infinitate de termeni în vecinătatea oarecare $V$, există de asemenea o infinitate de termeni în afara acesteia, și prin urmare, șirul nu are limită globală).

2. Fie vecinătea $V = (1 - \frac{1}{100}, 1 + \frac{1}{100})$ a lui 1. Să se afle câți termeni se află în afara ei pentru fiecare dinte șirurile:
(a) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$;
(b) $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
(c) $c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{5^n}$.
**Rezolvare:**
(a) $a_n \in V \iff n > \frac{197}{2} = 98.5 \Rightarrow$ toți termenii șirului $a_n$ se află în $V$, cu excepția primilor 98.
(b) Fie $n = 2k, k \in N$. Atunci, $b_n \in V \iff n > 100$. Similar, pentru $n = 2k+1, k \in N$, $b_n \in V \iff n > 100$.
(c) Atât pentru $n$ impar, cât și pentru $n$ par, obținem $c_n \in V \iff c > \log_5 100 = 2 + \log_5 4$. Alegem $\nu(\epsilon) = [2 + log_5 4] + 1 = 3$, astfel că toți termenii șirului $c_n$ se află în $V$ cu excepția primilor doi termeni.

3. Să se demonstreze:
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$;
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;
(d) $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$;
(e) $\lim_{n\to\infty} (1-2n) = -\infty$;
(f) $\lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{n+1}{n} = 0$;
(g) $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$;
(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$;
(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, unde $a > 0$.
**Rezolvare:**
Fie $\epsilon > 0$.
(a) $\frac{n}{n+1} \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \forall n \geq \nu(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon} - 1\right] + 1$.

(b) $\frac{n+1}{2n+3} \in (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon) \iff n > \frac{1-6\epsilon}{4\epsilon}$. Pentru $\epsilon \geq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1}{2n+3} \in (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon) \, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $\epsilon < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1}{2n+3} \in (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon) \, \forall n \geq \nu(\epsilon) = \left[\frac{1-6\epsilon}{4\epsilon}\right] + 1$.

(c) $\frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon) \iff n > \frac{1}{\epsilon}$. Pentru $\epsilon \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)\, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $\epsilon < 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

(d) $n^2 \in (\epsilon, \infty) \iff n > \sqrt{e} \Rightarrow n^2 \in (\epsilon, \infty)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = [\sqrt{\epsilon}] + 1$.

(e) $1 - 2n \in (-\infty, -\epsilon) \iff n > \frac{\epsilon+1}{2} \Rightarrow 1 - 2n \in (-\infty, -\epsilon)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = \left[\frac{\epsilon+1}{2}\right] + 1$.

(f) $\log_2 n + 1n \in (-\epsilon, \epsilon)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = \left[\frac{1}{2^\epsilon - 1}\right] + 1$.

(g) $3^n \in (\epsilon, \infty)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = [\log_3 \epsilon] + 1$.

(h) $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \in (-\epsilon, \epsilon)\, \forall n \geq \nu(\epsilon) = [\epsilon^{-3}] + 1$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

4. Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
**Rezolvare:**

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (\sqrt[n]{n} - 1 + 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5. Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.
**Rezolvare:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n!}{n^n}}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} - ln \frac{n!}{n}}{n+1-n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

6. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2 + 2n}\right\} = 1$.
**Rezolvare:**

$$n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + 2n} < \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\right) = 1.$$

7. Să se demonstreze că șirul $x_n = \sin(n), n \in \mathbb{N}$ nu are limită.
**Rezolvare:**
Fie $(x_n, y_n) = (\cos(n), \sin(n))$. Presupunem $y_n = sin(n) \to y, y \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$x_{n+1} = x_n \cos(1) - y_n \sin(1)$$
$$y_{n+1} = x_n \sin(1) + y_n \cos(1),$$

și din convergeța lui $y_n$ rezultă că

$$x_{n+1} = [y_{n+1} - y_n \cos(1)] \cot(1) - y_n \sin(1),$$

deci $x_n$ de asemenea convergent, adică $x_n = cos(n) \to x, x \in \mathbb{R}$. Prin urmare,

$$x = x\cos(1) - y\sin(1)$$
$$y = x\sin(1) + y\cos(1),$$

iar sistemul are soluția banală $(x, y) = (0, 0)$. Pe de altă parte, obligatoriu, $x^2 + y^2 = 1$. Se ajunge la o contradicție și putem trage concluzia că presupunerea făcută este falsă și șirul $x_n = \sin(n)$ nu are limită.
8. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

**Rezolvare:**

$$\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

9. Să se demonstreze limita remarcabilă:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

**Rezolvare:**
Conform relațiilor dintre ariile descrise de triunghiul dreptunghic de catete 1 și $\tan(x)$, sectorul de cerc descris de unghiul $x$ și triunghiul de bază 1 și înălțime $\sin(x)$, din cadrul cercului trigonometric, avem:

$$\frac{1}{2}\sin(x) \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan(x) \iff \cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

10. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1.$$

**Rezolvare:**

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right| \le \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| = \left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| \to 0.$$

11. Să se arate că șirul

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, n \ge 1$$

are limita $\infty$.
**Rezolvare:**

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow \text{ șirul este monoton descrescător.}$$

Cum un șir real monoton are întotdeauna limită, aceasta este fie finită, fie, în cazul de față al unui șir crescător, $\infty$. Presupunem limita șirului ca fiind finită. Atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \frac{1}{2},$$

deși diferența a doi termeni din șir, începând cu un anumit rang, ar trebui să tindă la 0. Prim urmare, presupunerea făcută este falsă și limita șirului este $\infty$.
12. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 0.$$

**Rezolvare:**

Notăm $x_n = \frac{a^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Astfel:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \in (-\epsilon, \epsilon)\, \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+^* \,\forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+p} < x_n \epsilon^p \,\forall\epsilon \in R_+^* \,\forall n \geq \nu(\epsilon), p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+p} < x_{\nu(\epsilon)}\epsilon^p.$$

Alegem în particual $\epsilon < 1$. Astfel, pentru $p \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

13. Să se arate că:

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \to 0.$$

**Rezolvare:**

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{x_n}\frac{1}{2n+1} \Rightarrow 0 < x_n^2 < \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

14. Să se determine suma șirului

$$x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}, p \in \mathbb{N}.$$

**Rezolvare:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^p - \sum_{k=1}^{n} k^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{\sum_{k=0}^{p}(n+1)^k n^{p-k}} = \frac{1}{p+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^p - \sum_{k=1}^{n} k^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \in \left(\frac{1}{p+1} - \epsilon, \frac{1}{p+1} + \epsilon\right) \forall\epsilon \in R_+^* \,\forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N} \iff$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^{p'}}{(n+1)^{p'+1}}$$

$$\in$$

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu(\epsilon)} k^{p'}}{(n+1)^{p'+1}} + \left(\frac{1}{p+1} - \epsilon\right)\left(1 - \frac{\nu(\epsilon)}{(n+1)^{p'+1}}\right), \frac{\sum_{k=1}^{\nu(\epsilon)} k^{p'}}{(n+1)^{p'+1}} + \left(\frac{1}{p+1} + \epsilon\right)\left(1 - \frac{\nu(\epsilon)}{(n+1)^{p'+1}}\right)\right)$$

$$\forall \epsilon \in R_+^* \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}, p' \in \mathbb{N} \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

15. Studiați convergența șirurilor:
(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{cos(x_k)}{k(k+1)}, (x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}$;
(b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^k(kx)}{4^k}, x \in \mathbb{R}$;
(c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arcsin(\frac{x}{k})}{k^2}, x \in \mathbb{R}$;
(d) $d_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$;
(e) $e_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arctan(kx)}{k!}, x \in \mathbb{R}$;
(f) $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arctan(kx)^k}{2^k}, x \in \mathbb{R}$;
(g) $g_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2kx)}{k^2}, x \in \mathbb{R}$;
(h) $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k}, x \in \mathbb{R}$;
(i) $i_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi\theta)}{k(k+2)}, \theta \in \mathbb{R}$;
(j) $j_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k, |a_k| \leq M \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, |q| < 1$.

**Rezolvare:**

(a) $|a_{n+p} - a_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{cos(x_k)}{k(k+1)}| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} \to 0$.

(b) $|b_{n+p} - b_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos^k(kx)}{4^k}| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p - 1}{\left(\frac{1}{4}\right) - 1} \to 0$.

(c) $|c_{n+p} - c_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arcsin(\frac{x}{k})}{k^2}| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \to 0$.

(d) $|d_{n+p} - d_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \to 0$.

(e) $|e_{n+p} - e_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arctan(kx)}{k!}| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \to 0$.

(f) $|f_{n+p} - f_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arctan(kx)^k}{2^k}| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \to 0$.

(g) $|g_{n+p} - g_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(2kx)}{k^2}| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \to 0$

(h) $|h_{n+p} - h_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{2^k}| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \to 0$

(i) $|i_{n+p} - i_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k\pi\theta)}{k(k+2)}| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \to 0.$

(j) $|j_{n+p} - j_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k q^k| \leq M|q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|} < \epsilon, \forall n \geq \max\left(\left[\frac{\ln\frac{\epsilon(1-|q|)}{M}}{\ln(|q|)}\right], \nu(M)\right) \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

16. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1.$$

**Rezolvare:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot e = 1.$$

17. Calculați $\lim_{n\to\infty} n[\sqrt[n]{n} - \sqrt[n^2]{(n+1)!}]$.

**Rezolvare:**

$$n[\sqrt[n]{n} - \sqrt[n^2]{(n+1)!}] = \frac{n}{\sqrt[n]{n}}\left(1 - \frac{\sqrt[n^2]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n}}\right) \to e(1-1) = 0.$$

18. Să se arate că șirul

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}, n \geq 2,$$

converge la $\frac{1}{e}$.

**Rezolvare:**

Metoda 1:

Aplicând inegalitatea mediilor, pentru $a_1 = \frac{1}{e_n}, a_k = y_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, obținem:

$$\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)y_n - e_n y_n^2}{1 + \frac{e_n y_n}{n}} \leq L_n \leq \frac{1}{e_n} \Rightarrow L_n \to \frac{1}{e}.$$

Metoda 2:

$$L_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \frac{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n!]{n!}} - 1}{\ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n!]{n!}} - 1\right) + 1} \ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^n}}{n!}\right) \to \frac{1}{e}.$$

19. Să se calculeze limita șirului

$$x_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}, n \in \mathbb{N}.$$

**Rezolvare:**

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \to 0.$$

20. Să se determine parametrul real $p$ astfel încât șirul

$$x_n = n^p(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}), n \geq 1,$$

să fie convergent și apoi să se calculeze limita sa.
**Rezolvare:**

$$x_n = n^{p-1}\frac{2}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Pentru $p < 1 \Rightarrow x_n \to 0$.
Pentru $p = 1 \Rightarrow x_n \to \frac{2}{3}$.
Pentru $p > 1 \Rightarrow x_n \to \infty$.
21. Să se determine limita următoarelor șiruri:
(a) $a_n = \frac{n\cos(n\pi x)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}, x \in \mathbb{R}$;
(b) $b_n = \frac{[nx]}{n}, x \in \mathbb{R}$;
(c) $c_n = \frac{n^{n+1}}{(n!)^2}$;
(d) $d_n = \frac{(2n)^n}{(2n)!}$;
(e) $e_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n}$;
(f) $f_n = \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}{n^n}}$;
(g) $g_n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}}$;
(h) $h_n = n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), a > 0$;
(i) $i_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n+4})$;
(j) $j_n = \sqrt{n}\arcsin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

**Rezolvare:**
(a)

$$|a_n| < \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} \to 0.$$

(b)

$$x - \frac{1}{n} < b_n < x \Rightarrow b_n \to x.$$

(c)

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 0 < 1 \Rightarrow c_n \to 0.$$

(d) Analog (c).

(e)

$$e_n = 6\sqrt{1 + \frac{5^n}{6^n}} \to 6.$$

(f)

$$\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^n \to \frac{1}{e} \Rightarrow f_n \to \frac{1}{e}.$$

(g)

(h)

(i) Cum $\sin(x + \pi n) = (-1)^n \sin(x)$,

$$i_n = \sin^2\left(\pi \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}+n}\right) \to 1.$$

(j)

$$j_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

22. Să se determine limita următoarelor șiruri:

(a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k)}{n^2+k}, n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}, n \in \mathbb{N}^*$;

(c) $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}, n \geq 2$;

(d) $d_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{\ln(n^2+k)}, n \in \mathbb{N}^*$.

23. Să se determine limita următoarelor șiruri:

(a) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)}, n \geq 2$;

(b) $b_n = \frac{\sum_{k=1}^n 2^k \sin(2^k)}{\sum_{k=1}^n 3^k}, n \geq 1$.

24. Arătați că:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[2^k]{k!}}{n} = 1$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\ln(k)}\right) = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^n 4k-1}{\prod_{k=1}^n 4k+1} = 0, n \in \mathbb{N}^*$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \left(\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^p (k+i)\right) = \frac{1}{p+1}\ \forall p \in \mathbb{N}^*$.

25. Studiați convergența șirurilor:

(a) $a_n = \frac{\pi^n}{n!}$ (generalizare);
(b) $b_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ (generalizare);
(c) $c_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+1})$;
(d) $d_n = \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$;
(e) $e_n = 1 + (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$;
(f) $f_n \sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})$;
(g) $g_n = \frac{\alpha^n}{n^4}$;
(h) $h_n = \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}}$.

# Capitolul 2: Rezultate remarcabile ale limitelor de siruri

## 2.1 Teoreme Relevante

**Inegalitatea lui Jensen**

Fie $F$ o funcție reală de o variabilă și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=1}^{n} a_n = 1$. Atunci:

$$F\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k F(x_k).$$

Dacă $F$ este concavă, atunci:

$$F\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} a_k F(x_k).$$

**Demonstrație:**
Este suficient să demonstrăm doar unul dintre cazuri, deoarece ambele demonstrații recurg la procese similare. Presupunem $F$ concav. Fie $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.
Dacă $x_k \leq \overline{x}$, atunci

$$\int_{x_k}^{\overline{x}} F'(t)dt \geq \int_{x_k}^{\overline{x}} F'(\overline{x})dt.$$

Dacă $x_k > \overline{x}$, atunci

$$\int_{\overline{x}}^{x_k} F'(t)dt \leq \int_{\overline{x}}^{x_k} F'(\overline{x})dt.$$

Ambele inegalități implică:

$$F(\overline{x}) - F(x_k) \geq F(\overline{x})(\overline{x} - x_k),$$

adevărat pentru orice termen $x_k$ al șirului nostru. În continuare, putem aplica următorul raționament:

$$F(\overline{x}) - F(x_k) \geq F(\overline{x})(\overline{x} - x_k) \Rightarrow$$

$$a_kF(\overline{x}) - a_kF(x_k) \geq F(\overline{x})(a_k\overline{x} - a_kx_k) \Rightarrow$$
$$F(\overline{x}) - \sum_{k=1}^{n} a_kF(x_k) \geq F(\overline{x})\left(\overline{x} - \sum_{k=1}^{n} a_kx_k\right) \Rightarrow$$
$$F(\overline{x}) \geq \sum_{k=1}^{n} a_kF(x_k).$$

□

**Inegalitatea lui Bernoulli**

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}, x > -1$. Atunci, are loc următoarea inegalitate:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**Demonstrație:**
Folosind inegalitatea lui Jensen și știind că funcția logaritm este concavă, obținem:

$$\ln\left(\frac{1}{n}(1+nx) + \frac{n-1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(1+nx) + \frac{n-1}{n}\ln(1) = \frac{1}{n}\ln(1+nx) \iff$$
$$n\ln\left(\frac{1+nx+n-1}{n}\right) \geq \ln(1+nx) \iff$$
$$\ln(1+x)^n \geq \ln(1+nx) \iff (1+x)^n \geq 1+nx.$$

**Inegalitatea Cauchy-Schwarz**

Fie șirurile de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci, are loc umrătoarea inegalitate:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2.$$

**Demonstrație:**
Pornind de la afirmația adevărată:

$$\forall\lambda > 0, \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq 0,$$

se impune condiția ca discriminantul ecuației polinomiale să fie mai mic sau egal cu 0. Astfel:

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2.$$

$\square$

**Inegalitatea mediilor**

Fie șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci, are loc următoarea inegalitate:

$$0 < \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}.$$

**Demonstrație:**
Inegalitatea

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}$$

este o consecință directă a inegalității Cauchy-Schwarz. Pentru $a_k = x_k \, \forall k \in \mathbb{N}$ și $b_k = 1 \, \forall k \in \mathbb{N}$, avem:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \iff \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}{n} \iff$$

$$\iff \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n},$$

ne vom folosi de concavitatea funției logaritm:

$$x - 1 \geq \ln(x)\, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Fie $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Pentru oricare $x > 0$, avem:

$$\prod_{k=1}^{n} (xa_k)^{\lambda_k} = x \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(xa_k) = x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Alegem $x = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}}$. Astfel:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k - x \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - 1).$$

Dar

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - 1) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln(a_k) = 0,$$

pentru $\prod_{k=1} a_k^{\lambda_k} = 1$, în cazul particular în care alegem valorile termenilor șirului $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ în funcție de numărul $x$, convenabil ales. Prin urmare, în caz general:

$$x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geq x \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k} \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}.$$

Pentru $\lambda_k = \frac{1}{n}\, \forall k \in \mathbb{N}$, se obține inegalitatea căutată.
Inegalitatea $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ este o consecință directă a inegalității precedente:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{x_i^k}}}{n} \geq 1 \iff \prod_{k=1}^{n} x_k \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n} \geq 1.$$

$\square$

## 2.2 Exercitii

1. Fie șirurile $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Să se arate că:
(a) $(e_n)$ este strict crescător;
(b) $(f_n)$ este strict descrescător;
(c) $2 \le e_n < 3\, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(d) $e_n < f_n\, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
(e) $(f_n)$ este mărginit;
(f) $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} f_n = e$;
(g) $e_n < e < f_n\, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
**Rezolvare:**
(a) Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $a_k = 1+\frac{1}{n}, k = [1...n]$ și $a_{n+1} = 1$, obținem:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \iff$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$e_n < e_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $a_k = 1-\frac{1}{n+1}, k = [1...n+1]$ și $a_{n+2} = 1$, obținem:

$$\sqrt[n+2]{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+1}{n+2} \iff$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \iff$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \iff$$

$$f_n > f_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(c) Pornind de la

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\,\forall k,n\in\mathbb{N}*, k\leq n,$$

pentru $k=n$, avem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2} \iff$$
$$e_n < 3\,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Aplicând inegalitatea lui Bernoulli pentru $x=\frac{1}{n}$, avem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \iff e_n\geq 2\,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

(d) Cum $e_n=\frac{n}{n+1}f_n \Rightarrow e_n < f_n\,\forall n\in\mathbb{N}^*$.
(e) $2=e_1<e_n<f_n<f_1=4\Rightarrow f_n\in(2,4)$.
(f) $e_n$ și $f_n$ sunt strict monotone și mărginite, și prin urmare, conform Bolzano-Weierstrass, sunt șiruri convergenete. Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = e,$$

prin notație.
(g) $e_n$ este strict crescător și convergent; $(f_n)$ este strict descrescător și convergent. Așadar, $e_n<e<f_n\,\forall n\in\mathbb{N}^*$.
2. Să se studieze și să se calculeze limitele șirurilor:
(a) $a_n=\frac{n!}{n^n}, n\in\mathbb{N}^*$;
(b) $b_n=\frac{n^n}{(n!)^2}, n\in\mathbb{N}^*$;
(c) $c_n=\frac{\alpha}{2}+\frac{a_{n-1}^2}{2}, c_1=\frac{\alpha}{2}\,\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \alpha\in(0,1]$.
Rezolvare:
(a) Vom demonstra că $a_n$ este monoton descrescător:

$$1<\frac{n+1}{n}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \iff (n+1)<(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \iff$$
$$\iff \frac{(n+1)!}{n!}<\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \iff \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}<\frac{n!}{n^n} \iff a_{n+1}<a_n\,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Cum $a_n$ conține o infinitate de termeni și $a_n>0\,\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n$ este mărginit inferior de 0. Deci, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\frac{b_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+1} \cdot e_n < \frac{3}{n+1} < 1 \Rightarrow b_n$ mărginit, strict descrescător.

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot b_n\right) = 0.$$

(c) $\operatorname{sgn}(c_{n+1}-c_n) = \operatorname{sgn}\left(\frac{(c_n+c_{n-1})(c_n-c_{n-1})}{2}\right) = \operatorname{sgn}(c_n - c_{n-1}) = \operatorname{sgn}(c_2-c_1)$ $= 1$, deci $c_n$ strict crescător. Se poate demonstra prin inducție că $c_n < 1$. Prin urmare, $c_n$ este convergent.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_2}{2}+\frac{a_{n-1}}{2}\right) = l \iff l = \frac{\alpha}{2}+\frac{l^2}{2} \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{1-\alpha},$$

iar, deoarece $a_n < 1$, obținem $l = 1-\sqrt{1-\alpha}$.

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 3}, a_n\frac{\ln(n)}{n}$. Să se demonstreze că:

(a) $a_n$ este convergent;

(b) $a_{2n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\ln(2)}{2n}, n \geq 3$;

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Rezolvare:**

(a) $a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \ln(n)}{n(n+1)} < 1$, deci $a_n$ strict descrescător și mărginit de $a_3 = \frac{\ln(3)}{3}$, deci $a_n$ convergent.

(b) $a_{2n} = \frac{\ln(2)+\ln(n)}{n} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}a_n$.

(c) Din relația de recurența de mai sus, rezultă că limita șirului este 0.

4. Fie șirurile $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ și $E_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

(a) $E_n$ convergent;

(b) $e_n \leq E_n \, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(c) $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} E_n = e$.

**Rezolvare:**

(a) $E_n - E_{n-1} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, iar, folosind inegalitatea $k! > 2^{k-1}$, $\forall k \geq 1$, obținem:

$$E_n < 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2}} \iff$$

$$\iff E_n < 1 + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \Rightarrow E_1 = 2 < E_n < 3 \, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

deci, prin urmare, $E_n$ este stric crescător și marginit, astfel, convergent.

(b) Inegalitatea se opține prin expansiunea binomială a lui $e_n$.
(c) Trecând la limită inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}<\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=e_n,$$

obținem:

$$E_k\leq e\Rightarrow e\leq\lim_{n\to\infty}E_n\leq e\Rightarrow\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}e_n=e\,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5. Fie șirul $E_n$ definit în exercițiul anterior și șirul $a_n=E_n+\frac{1}{n!n}$. Să se demonstreze că:
(a) $a_n$ este strict crescător;
(b) $E_{n+1}<e<a_n$;
(c) $\frac{1}{(n+1)!}<e-E_n<\frac{1}{n!n}\,\forall n\in\mathbb{N}^*$;
(d) $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
**Rezolvare:**
(a) $a_{n+1}-a_n=E_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}-E_n-\frac{1}{n!n}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{(n+1)!n(n+1)}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)!n(n+1)}=\frac{-1}{(n+1)!n(n+1)}<0$.
(b) Deoarece $E_n$ strict crescător, $a_n$ strict descrescător și $\lim_{x\to\infty}E_n=\lim_{x\to\infty}a_n=e$, avem $E_{n+1}<e<a_n$.
(c) Din $(b)$ obținem:

$$E_{n+1}<e<a_n\iff E_n+\frac{1}{(n+1)!}<e<E_n+\frac{1}{n!n}\iff\frac{1}{(n+1)!}<e-E_n<\frac{1}{n!n}.$$

(d) Presupunem $e\in Q$. Prin urmare, există $p,q\in\mathbb{Z}$ astfel încât $e=\frac{p}{q},q\neq 0$. Folosind $(c)$, pentru $n=q$:

$$\frac{1}{(q+1)!}<\frac{p}{q}-E_q<\frac{1}{q!q}\iff q<\left(\frac{p}{q}-E_q\right)q(q+1)!<q+1\iff$$

$$\iff q<p(q+1)!-E_qq(q+1)!<q+1,$$

lucru care este fals, deoarece $p(q+1)!-E_qq(q+1)!\in\mathbb{Z}$, iar $q$ și $q+1$ sunt întregi consecutivi. Deci presupunerea făcută este falsă, iar $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
6. Să se demonstreze că $e^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,\forall x\in\mathbb{R}$.
**Rezolvare:**

Folosind definiția lui e sub formă de limită, avem:

$$e^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

În continuare, putem face notația $t = nx$, astfel că $\lim_{n\to\infty} t = \lim_{n\to\infty} nx = \infty$ și, prin urmare:

$$e^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{t}{x}}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t.$$

Cum $t$ este doar o notație care simbolizează aceeași tendință de creștere către infinit ca și $n$, egalitatea este demonstrată.

7. Să se arate că $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Rezolvare:**

Observăm că în expresia

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-k} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{h}$$

totul se reduce datorită tendinței lui $h$ către 0 cu excepția celui de al doilea termen al sumei, pentru $k = 1$. Astfel că

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{1+\frac{x}{n}} = e^x\,\forall x\in\mathbb{R}.$$

8. Să se demonstreze că:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)\,\forall a\in\mathbb{R}, a>0$;

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$;

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^r-1}{x} = r$, $\forall r\in\mathbb{R}$.

**Rezolvare:**

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a)}-1}{x\ln(a)} = \ln(a)\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \ln(a)\cdot e^0 = \ln(a)\,\forall a\in\mathbb{R}, a>0$.

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\ln(1+\frac{1}{t})^t = \ln(e) = 1$.

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^r-1}{x} = \lim_{y\to\infty} y\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^r - 1\right] = \lim_{y\to\infty} y(e^{\frac{r}{y}}-1) = r\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t} = r$.

9. Să se arate că șirul al cărui termen general este

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), n \geq 2,$$

este convergent.
10. Să se arate că șirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1,$$

este convergent.
11. Să se arate că șirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}, n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent pentru orice $p \geq 2$.
12. (a) Să se studieze convergența șirului $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k}\right)$ și să i se calculeze limita în cazul în care aceasta există.
(b) Să se studieze convergența șirului $b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)$ și să i se calculeze limita în cazul în care aceasta există.
(c) Să se demonstreze identitatea lui Botez-Catalan:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

(d) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.
13. Să se studieze convergența șirului

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, n \geq 1.$$

14. (a) Să se arate că șirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx, n \in \mathbb{N}$ verifică relația de recurență

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(b) Să se demonstreze formula lui Wallis:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

(c) Să se demonstreze formula lui Stirling:

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta}{12n}},\theta\in(0,1).$$

# Capitolul 3: Introducere in serii

## 3.1 Teoreme Relevante

**Convergența seriilor absolut convergente**

Într-un spațiu Banach, o serie absolut convergentă este de asemenea convergentă.

**Demonstrație:**
Fie o serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||$ convergentă în $\mathbb{R}$ (prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă). Convergența unei serii este echivalentă cu convergența șirului sumelor parțiale asociat seriei, la un număr real $l$. Așadar, din ipoteză:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists \nu(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni ||s_n^{'} - l|| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n \geq \nu(\epsilon),$$

unde $s_n^{'}$ este șirul sumelor parțiale asociat lui $||u_n||$. Fie $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq \nu(\epsilon), m \geq n$. Atunci:

$$||s_m^{'} - s_n^{'}|| < ||s_m^{'} - l|| + ||s_n^{'} - l|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \, \forall m, n \geq \nu(\epsilon).$$

Dar, dacă $m = n + p, p \in \mathbb{N}$, atunci:

$$||s_m^{'} - s_n^{'}|| = ||\sum_{k=1}^{p} ||u_{n+k}|||| = \sum_{k=1}^{p} ||u_{n+k}||,$$

iar

$$||\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}|| < \sum_{k=1}^{p} ||u_{n+k}|| < \epsilon, \, \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

Astfel,

$$||\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}|| < \epsilon \, \forall n \geq \nu(\epsilon),$$

sau, altfel spus,

$$||s_m - s_n|| < \epsilon \, \forall n, m \geq \nu(\epsilon),$$

unde $s_n$ reprezintă șirul sumelor parțiale asociat lui $u_n$. Particularizând pentru $m = \nu(\epsilon)$, $s_n \in (\nu(\epsilon) - \epsilon, \nu(\epsilon) + \epsilon)$, și, deci, este mărginit. Fie $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$ un șir descrescător de intervale închise, unde $I_k = [a_k, b_k]$ este intervalul obținut prin înjumătățirea succesivă, de $k$ ori, a intervalului $I_0 = [a_0, b_0] = [\nu(\epsilon) - \epsilon, \nu(\epsilon) + \epsilon]$ și alegerea de fiecare dată a oricărei jumătăți care conține un număr infinit de termeni. Conform uneia dintre axiomele corpului $\mathbb{R}$, există numerele reale $\xi = \sup\{a : \exists p \ni a_p = a\}$ și $\mu = \inf\{b : \exists q \ni b_q = b\}$. Avem $a_n \leq \xi \leq t \leq \mu \leq b_n \, \forall t \in [\xi, \mu] \Rightarrow [\xi, \mu] \in \bigcap_{n\geq 0} I_n \Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} I_n \neq \emptyset$. Alegem subșirul $s_{k_n}, k_i \in I_i$ și $\lambda \in \bigcap_{n\geq 0} I_n$, de unde rezultă:

$$|s_{k_n} - \lambda| < a_n - b_n = \frac{a_0 + b_0}{2^n} \, \forall n \geq 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_{n_k} = \lambda,$$

deci avem un subșir convergent al lui $s_n$. Cum $s_n$ este șir fundamental cu un subșir convergent:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists \nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon) \in \mathbb{R} \ni$$
$$|s_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n \geq \nu_1(\epsilon),$$
$$|s_n - s_m| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n, m \geq \nu_2(\epsilon).$$

Pentru $m = k_n \geq n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon))$:

$$|s_{k_n} - s_n| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)).$$

Așadar:

$$|s_n - \lambda| < |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \, \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)) \iff \exists \lim_{n\to\infty} s_n = \lambda,$$

adică șirul sumelor parțiale asociate lui $u_n$ este într-adevăr convergent, și, deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

□

## 3.2 Exercitii

1. Să se studieze natura seriei geometrice $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{n-1}, a, q \in \mathbb{C}, a \neq 0$.
**Rezolvare:**
Presupunând $q \neq \pm 1$:

$$s_n = \frac{qs_n}{q} = \frac{s_n + aq_n - a}{q} \Rightarrow s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Astfel că:

$$s_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} - q^n \frac{a}{1-q} & q \neq 1 \\ na & q = 1 \\ a & n = 2k, k \in \mathbb{N}, q = -1 \\ 0 & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, q = -1 \end{cases}.$$

Deci:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{divergentă} & |q| \geq 1 \end{cases}.$$

2. Să se studieze natura seriei armonice $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.
**Rezolvare:**
Presupunem $s_n$ convergent. Prin urmare, există $\nu\left(\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n+k} < \frac{1}{3} \, \forall n \geq \nu\left(\frac{1}{3}\right).$$

Însă, de aici putem trage concluzia:

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} < \sum_{k=1}^{n} s_{n+k} < \frac{1}{3},$$

ceea ce este absurd. Prin urmare, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentă.

# Capitolul 4: Criterii de convergenta pentru serii

## 4.1 Demonstratiile Criteriilor

**Criteriul comparației**

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ două serii dintr-un spațiu Banach. Dacă există un număr $m \in \mathbb{N}$ și o constantă $c \in \mathbb{R}_+$ astfel încât:

$$||u_n|| \leq c||v_n|| \, \forall n \geq m,$$

atunci:
(i) Dacă seria $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ este absolut convergentă, atunci și seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ este de asemenea absolut convergentă;
(ii) Dacă seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_{k=1}^{\infty} ||v_n||$ este de asemenea divergentă.

**Demonstrație:**
(i) Seria $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ fiind absolut convergentă, este prin urmare și convergentă. Deci, șirul sumelor parțiale asociat seriei este un șir fundamental. Astfel că:

$$\sum_{k=1}^{p} ||v_{n+k}|| < \epsilon \, \forall \epsilon \in \mathbb{R} \epsilon > 0 \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N},$$

și deci

$$\sum_{k=1}^{p} ||u_{n+k}|| < c \sum_{k=1}^{p} ||v_{n+k}|| < c \cdot \epsilon \, \forall \epsilon \in \mathbb{R} \epsilon > 0 \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N},$$

lucru din care rezultă că șirul sumelor parțiale asociat $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ este de asemenea fundamental, și, datorită acestui fapt, convergent. Așadar $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ convergentă.
(ii) Seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ fiind divergentă, și seria $\sum_{k=1}^{\infty} ||u_n||$ este divergentă. Fiind o serie cu termeni pozitivi, șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{k=1}^{\infty} ||u_n||$ este crescător și nemărginit, deci divergent către $\infty$. Deducem astfel, din ipoteză, că și $\sum_{k=1}^{\infty} ||v_n||$ este o serie divergentă.

$\square$

### Criteriul comparației la limită

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ două serii dintr-un spațiu Banach.
(i) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||}{||v_n||} = l \in (0, \infty)$, atunci cele două serii au aceeași natură;
(ii) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||}{||v_n||} = 0$ și $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ absolut convergentă $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_n$ absolut convergentă;
(iii) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||}{||v_n||} = \infty$ și $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ divergentă $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_n$ divergentă.

**Demonstrație:**
(i) Din ipoteză:

$$(l-\epsilon)||v_n|| < ||u_n|| < (l+\epsilon)||v_n||\, \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}.$$

Evident, dacă $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ absolut convergentă, $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ absolut convergentă, și dacă $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ divergentă, $\sum_{k=1}^{\infty} v_n$ divergentă.
(ii) Pentru $l = 0$, avem:

$$||u_n|| < \epsilon||v_n||\, \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}.$$

(iii) Pentru $l = \infty$, avem:

$$\epsilon||v_n|| < ||u_n||\, \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}.$$

$\square$

### Criteriul raportului

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ o serie într-un spațiu Banach. Dacă există un rang $m \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq m$, una din următoarele relații să fie verificată:
(i) $\frac{||u_{n+1}||}{||u_n||} \leq q < 1 \Rightarrow$ seria este absolut convergentă;
(ii) $\frac{||u_{n+1}||}{||u_n||} \geq 1 \Rightarrow$ seria este divergentă.

**Demonstrație:**
(i) Din $\frac{||u_{n+1}||}{||u_n||} \leq q < 1 \Rightarrow ||u_{n+i}|| < q^i||u_n||\, \forall n \geq m, i > 0$. Astfel că:

$$||u_n|| \leq \frac{||u_m||}{q} \cdot q^n,$$

iar cum $\sum_{k=1}^{\infty} q^n$ convergentă, $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ absolut convergentă.
(ii) $||u_n|| \geq ||u_m|| > 0 \iff \lim_{n\to\infty} ||u_n|| \neq 0$.

$\square$

### Criteriul lui Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ într-un spațiu Banach. Dacă există un rang $m \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq m$, una din următoarele relații să fie verificată:
(i) $n\left(\frac{||u_n||}{||u_{n+1}||} - 1\right) \geq q > 1 \Rightarrow$ seria este absolut convergentă;
(ii) $n\left(\frac{||u_n||}{||u_{n+1}||} - 1\right) \leq 1 \Rightarrow$ seria este divergentă.

**Demonstrație:**
(i) Ipoteza este echivalentă cu relația $n||u_n|| - (n+q)||u_{n+1}|| \geq 0$. Pentru $q = \alpha + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, obținem $n||u_n|| - (n+1)||u_{n+1}|| \geq \alpha||u_{n+1}|| > 0 \Rightarrow$ șirul $(n||u_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton descrescător. Cum $n||u_n|| > 0$ și este, în mod evident, mărginit superior de primul său termen, $n||u_n||$ convergent. Astfel:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n||u_n|| - (n+1)||u_{n+1}||) = ||u_1|| - \lim_{n\to\infty} n||u_n||.$$

Cum seria de mai sus este convergentă, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha||u_{n+1}||$ este convergentă și deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$ este convergentă $\Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă.
(ii) Negarea afirmației conduce la faptul că șirul din cazul anterior este monoton crescător, și astfel, șirul asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ nu are limita 0.

$\square$

### Criteriul lui Abel

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cu șirul sumelor parțiale asociat $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mărginit și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale pozitive, descrescător și convergent la 0. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă.

**Demonstrație:**
Din ipoteză:

$$a_n < \frac{\epsilon}{2M} \, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \, \forall n \geq \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{N}, ||s_n|| < M$$

și

$$a_{n+1} \leq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ fixat. Avem:

$$|| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} u_{n+k} || = || \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(s_{n+k} - s_{n+k-1}) || \leq 2M a_{n+1} < \epsilon.$$

$\square$

## 4.2 Exercitii

1. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirul de funcții cu termenul general:

$$f_n : E_n \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n},$$

unde prin $E_n$ am notat domeniul maxim de definiție a funcției $f_n$.
(a) Să se determine mulțimea $D$, domeniul de convergență al șirului, și funcția limită $f$.
(b) Studiați convergența uniformă a șirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Comparați

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ cu } \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

și respectiv

$$\lim_{x\to 3}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ cu } \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 3} f_n(x).$$

(d) Studiați convergența uniformă a șirului $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, restricția lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la $(-1,4]$:

$$f_n : (-1,4] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Ce puteți afirma despre convergența uniformă a restricției lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la intervalul $(-2,-1)$?

**Rezolvare:**

(a) Domeniul maxim de definiție al șirului $f_n$ este $E_n = \mathbb{R}\setminus\{-n : n\in\mathbb{N}\}$, iar $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, așadar, domeniul de convergență al șirului este $D = \mathbb{R}\setminus\{-n : n\in\mathbb{N}\}$, iar limita sa este funția $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = 0$.
(b) Presupunem

$$\left|\frac{x}{x+n}\right| < \frac{1}{4}\,\forall n \geq \nu\left(\frac{1}{4}\right) \in \mathbb{N}.$$

Alegem $n = x = \nu(\frac{1}{4})$, astfel că:

$$\frac{1}{2} = \left|\frac{\nu\left(\frac{1}{4}\right)}{\nu\left(\frac{1}{4}\right)+\nu\left(\frac{1}{4}\right)}\right| < \frac{1}{4},$$

ceea ce este o contradicție. Prin urmare, șirul este doar simplu convergent, nu și uniform convergent.

(c) Calculând limitele, obținem imediat:

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ și } \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1;$$
$$\lim_{x\to 3}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ și } \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 3} f_n(x) = 0.$$

Se constată că pentru șirurile de funcții convergente doar în sens simplu, nu și uniform, ordinea în care se efectuează trecerea la limită este esențială; în general

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x).$$

(d) Are loc majorarea:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{x}{x+n}\right| < \frac{4}{n-1}.$$

Deci șirul $g_n$ este convergent. Similar, restricția pe $(-2,-1)$ este uniform convergentă, deoarece:

$$|(f_n)_{x\in(-2,-1)}| < \frac{-1}{n+2}.$$

2. Fie $(f_n)$ șirul de funții cu termenul general

$$f_n : [-2.2] \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

(a) Să se determine limita simplă a șirului.
(b) Studiați convergența uniformă a șirului.
(c) Comparați

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2}^{2} f_n(x)dx \text{ cu } \int_{-2}^{2}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

**Rezolvare:**
(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2,2) \\ 0, & x \in \{\pm 2\} \end{cases}.$$

(b) $f_n$ nu este uniform convergent, deoarece

$$|f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu\left(\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{2}\,\forall n \geq \nu\left(\frac{1}{2}\right),$$

ceea ce implică, pentru $x \to 2$, că $1 < \frac{1}{2}$.
(c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2}^{2} f_n(x)dx = \int_{-2}^{2} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 4.$$

În concluzie, condiția de convergență uniformă este suficientă însă nu și necesară pentru a trece la limită sub semnul de integrală.
3. Studiați convergența simplă, uniformă și transmiterea proprietății de derivabilitate pentru următoarele șiruri de funcții:
(a) $f_n : [-10, 10] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$;
(b) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}$.
**Rezolvare:**
(a)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

iar

$$|f_n(x) - f(x) \le \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n} \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n$ este uniform convergent.
Studiem acum șirul derivatelor:

$$f_n^{'}(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-10,0) \cup (0,10] \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Putem remarca fără dificultate că șirul $f_n^{'}$ nu este uniform convergent: în timp ce derivatele tuturor funcțiilor $f_n$ sunt continue, limita lor are o discontinuitate de speța întâi în punctul $x = 0$. Cu toate acestea, $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))^{'} = (f(x))^{'}_{x=0} = 0$. Deci condiția de convergență uniformă a șirului nu este suficientă pentru ca proprietatea de derivabilitate să se transmită prin trecere la limită.
(b) Convergența simplă și uniformă rezultă cu ușurință din inegalitatea:

$$0 \ge |f_n(x) - 0| \le \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Însă

$$g_n^{(k)}(x) = n^{k-1}\sqrt{n}\sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right),$$

astfel că șirul derivatelor nu are limită.