Probleme Curs Algebră Liniară

LazR

30 Noiembrie, 2023

Definiție: Un spațiu vectorial este o structură algebrică $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$, alcătuită dintr-o mulțime nevidă V de obiecte numite vectori, și două operații, numite, prin convenție, adunarea a doi vectori și înmulțirea cu un scalar, unde scalarii sunt elemente dintr-o mulțime $\mathbb{K}$, înzestrată cu o operație de adunare a doi scalari și o operație de înmulțire a doi scalari, unde operațiile satisfac următoarele axiome:

Axiome de închidere

$$(SV1)\, v_1 + v_2 \in V \, \forall v_1, v_2 \in V$$
$$(SV2)\, \alpha \cdot v \in V \, \forall v \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Axiomele adunării

$$(SV3)\, v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \, \forall v_1, v_2 \in V$$
$$(SV4)\, v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$
$$(SV5)\, \exists \theta \in V \ni v + \theta = v \, \forall v \in V$$
$$(SV6)\, \forall v \in V \, \exists (-v) \in V \ni v + (-v) = 0$$

Axiomele înmulțirii cu un scalar

$$(SV7)\, \alpha(\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v \, \forall v \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$
$$(SV8)\, \exists 1 \in \mathbb{K} \ni 1 \cdot v = v \, \forall v \in V$$

Axiomele distributivității

$$(SV9)\, \alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2 \, \forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}$$
$$(SV10)\, (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \, \forall v \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Observație: De obicei, se va omite scrierea simbolului $\cdot$, prezența lui fiind, în majoritatea cazurilor, implicită.
Observație: Înmulțirea dintre doi scalari și înmulțirea dintre un vector și un scalar sunt două operații diferite.
Observație: Vectorul θ se numește element neutru al adunării a doi vectori, sau vectorul nul, iar scalarul 1 se numește element neutru al înmulțirii cu un scalar.
Observație: Vectorul $(-v)$ se numește opusul vectorului v. De obicei, în loc de $+(-v)$, se va utiliza notația $-v$.

Observație: Notația $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ va fi deseori prescurtată sub forma $V/\mathbb{K}$, sau doar V.
Teoremă: În orice spațiu vectorial, elementul neutru al adunării a doi vectori este unic.
Demonstrație: Presupunem că există doi vectori θ_1, θ_2 care satisfac axioma elementului neutru al adunării. Avem:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre scalarul nul și orice vector este vectorul nul.
Demonstație:

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = \theta.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre orice scalar și vectorul nul este scalarul nul.
Demonstație:

$$\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta \Rightarrow \alpha\theta = \theta.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre scalarul -1 și orice vector este opusul vectorului.
Demonstrație:

$$\theta = 0v = (1 - 1)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v \Rightarrow (-1)v = -v.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, opusul unui vector este unic.
Demonstrație: Presupunem că există doi vectori v_1, v_2 care satisfac axioma opusului unui vector. Avem:

$$v_1 + (v + v_2) = v_1 = (v_1 + v) + v_2 = v_2 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, dacă produsul dintre un vector și un scalar este vectorul nul, atunci, fie scalarul este scalarul nul, fie vectorul este vectorul nul.
Demonstrație: Pentru cazul în care vectorul este nenul, scalarul este, în mod evident, scalarul nul. Reciproc

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \theta = (\alpha^{-1}\alpha)v = v \Rightarrow v = \theta.$$

Subspații vectoriale

Definiție: Un subspațiu vectorial al unui spațiu vectorial V este un spațiu vectorial al cărui mulțime de vectori este o submulțime a lui V, iar al cărui operații și mulțime de scalari sunt aceleași cu ale lui V.
Teoremă: Fie V un subspațiu vectorial, iar S o submulțime a mulțimii V. S este un subspațiu al lui V dacă și numai dacă îndeplinește axiomele închiderii.
Demonstrație: Dacă S este un subspațiu, atunci satisface toate axiomele unui spațiu vectorial, inclusiv axiomele închiderii. Reciproc, axiomele (SV3), (SV4), (SV7)-(SV10) sunt verificate pentru orice vector. Au mai rămas de verificat axiomele (SV5), (SV6):

$$(SV5)\ \text{Din (SV2)}\ \Rightarrow 0v \in S \Rightarrow \theta \in S \Rightarrow\ \text{(SV6) este verificată.}$$
$$(SV6)\ \text{Din (SV2)}\ \Rightarrow -v \in S \Rightarrow\ \text{(SV6) este verificată.}$$

Definiție: Fie $V/\mathbb{K}$ și $W/\mathbb{K}$ două spații vectoriale. O aplicație liniară de la V la W este o funcție $T : V \to W$ care verifică:

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)\, \forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Observație: În cele ce urmează, vom nota mulțimea tuturor aplicațiilor liniare de la un spațiu arbitrar V la un alt spațiu arbitrar W cu $\mathcal{L}(V, W)$.

Kernel și Imagine

Definiție: Imaginea aplicației liniare T este mulțimea $T(V)$. $\text{Dim}(T(V))$ se numește rangul lui T.
Teoremă: $T(V)$ este un subspațiu pentru W, iar $T(\theta_v) = \theta_w$.
Demonstrație: Axiomele închiderii se verifică ușor cu definiția unei aplicații liniare, iar $T(\theta_v) = T(0\theta_v) = 0T(\theta_v) = \theta_w$.
Definiție: Kernelul unei aplicații liniare T este mulțimea

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = \theta\}.$$

Teoremă: Kernelul lui T este un subspațiu al lui V.
Demonstație: Fie $v_1, v_2 \in V$. Avem:

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) = \theta \Rightarrow v_1 + v_2 \in\ \text{Ker}(T);$$

$$\alpha T(v) = T(\alpha v) = \theta \Rightarrow \alpha v \in \text{ Ker}(T).$$

Teoremă: Următoarea identitate este adevărată în orice spațiu vectorial finit-dimensional V, pentru orice aplicație liniară T:

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(T(V)) = \dim(V).$$

Demonstrație:
Știm ca $\text{Ker}(T)$ este un subspațiu în V. Prin urmare, putem alege o bază în $\text{Ker}(T)$, care poate fi în contiunuare extinsă la o bază în V:

$$v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+r},$$

unde $k = \dim(\text{Ker}(T))$, iar $r = \dim(V) - k$. Rămâne să demonstrăm că $v_{k+1}, ..., v_{k+r}$ formează o bază în $T(V)$. Fie $w \in V(T)$. Avem:

$$w = \sum_{i=1}^{k+r} \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(e_i) + \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j) = \theta + \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j) = \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j).$$

Prin urmare, $T(V) = \text{ span}(v_{k+1}, ..., v_{k+r})$. Fiind submulțimea unei baze, vectorii $v_{k+1}, ..., v_{k+r}$ sunt de asemenea liniari independenți, deci constituie o bază pentru $T(V)$. Astfel, $\dim(V(T)) = \text{ card}(\{v_{k+1}, ..., v_{k+r}\}) = r$, dar $r = \dim(V) - k = \dim(V) - \dim(\text{ Ker}(V))$, adică $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(T(V)) = \dim(V)$.

Inverse

Observație: Termeni precum adunarea a două aplicații liniare, compunerea a două aplicații liniare, inversa la stânga și la dreapta a unei aplicații liniare, aplicație liniară injectivă, surjectivă, sau bijectivă își păstrează sensul comun ca și cel pentru functi obișnuite.
Observație: Compunerea a două aplicații liniare este tot o aplicație liniară.
Teoremă: O aplicație liniaraă are cel mult o inversă la stânga.
Demonstrație: Fie două inverse la stangă, S și S', pentru o aplicație liniară $T : V \to W$.

$$S(w) = S'(w)\, \forall w \in W \Rightarrow S = S'.$$

Teoremă: Inversa la stânga a unei aplicații liniare este și inversa ei la dreapta.

Demonstație:

$$T(S(w)) = T(S(T(v)) = T(v) = w.$$

Teoremă: O aplicație liniară are o inversă la stânga dacă și numai dacă este injectivă.
Demonstrație:

$$\Rightarrow: w \in W, w = T(v) \Rightarrow !\exists v \in V \ni w = T(v) = T(S(w)).$$

$$\Leftarrow: T(v_1) = T(v_2) \iff S(T(v_1)) = S(T(v_2)) \iff v_1 = v_2.$$

Teoremă: Următoarele propoziții sunt echivalente:
(a) T este injectivă.
(b) T este inversabilă și inversa sa este liniară.
(c) $\mathrm{Ker}(T) = \theta$.
Demonstrație:

$$\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} : T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2).$$

$$\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} : T(v) = \theta \iff T^{-1}(T(v)) = \theta \iff v = \theta.$$

$$\text{(c)} \Rightarrow \text{(a)} : T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = \theta \iff v_1 - v_2 = \theta \iff v_1 = v_2.$$

Matrice

Teoremă: Fie $e_1, ..., e_n$ o bază într-un spațiu vectorial n-dimensional V și $u_1, ..., u_n$ n vectori arbitrari într-un spațiu W. Atunci, există o unică aplicație liniară $T : V \to W$ astfel încât:

$$T(e_k) = u_k, k = [1...n].$$

Observație: Orice transformare liniară este unic determinată de valorile sale într-o bază arbitrară din domeniu, care constituie combinații liniare ale vectorilor unei baze arbitrare din codomeniu. Astfel:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i.$$

Elementele t_{ij} pot fi listate cu ajutorul unui tablou de dimensiuni $n \times m$, numit matrice, și reprezentat în felul umrător:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ t_{m1} & t_{m2} & ... & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Două notații compacte sunt (t_{ij}) și $(t_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. Sau, raportat la T, $\mathcal{M}_{V,W}(T)$.
Observație: Reprezentarea matriceală a unei aplicații liniare depinde de bazele alese.
Teoremă: Fie V și W două spații vectoriale finit-dimensionale, de dimensiune n, respectiv m, și $T \in \mathcal{L}(V, W), r = \dim(T(V))$. Atunci, există o bază $(e_1, ..., e_n)$ în V și o bază $(w_1, ..., w_m)$ în W astfel încât:

$$T(e_i) = w_i \, \forall i = [1...r]$$

și

$$T(e_i) = \theta \, \forall i = [r + 1, n].$$

Definiție: Fie două matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ și $B = A = (b_{jk})_{j,k=1}^{n,p}$. Produsul $C = A \cdot B = (c_{ik})_{i,k=1}^{m,p}$ este matricea a căror componente sunt de forma:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Motivație: Dorim ca înmulțirea a două matrice să rezulte într-o altă matrice, reprezentativă pentru aplicația liniară determinată de compunerea aplicațiilor liniare asociate celor două matrice. Adică:

$$\mathcal{M}_{V,W}(S)\mathcal{M}_{U,V}(T) = \mathcal{M}_{U,W}(ST).$$

Astfel:

$$STu_k = S\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} S v_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=i}^{m} a_{ij} w_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ik} w_i.$$