

Note Curs Analiză Matematică: Șiruri și Serii Numerice

LazR

22 Octombrie 2023

Noțiuni auxiliare

Spații metrice

Definiție: O metrică pe mulțimea X este orice funcție $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele axiome:

$$\text{Axioma identității: } d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$$

$$\text{Axioma de simetrie: } d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$\text{Axioma triunghiului: } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

Consecință: Dacă în axioma triunghiului se înlocuiește z cu x se obține:

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

Consecință: Pentru oricare $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ are loc inegalitatea generalizată a triunghiului:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$$

Consecință: Următoarea relație se numește inegalitatea patrulaterului, sau proprietatea de continuitate a metricii:

$$|d(x, u) - d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v) \quad \forall x, y, z, w \in X$$

Demonstrație:

Fie $x, y, u, v \in X$. Avem:

$$d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, v) + d(v, u)$$

$$d(y, v) \leq d(y, x) + d(x, u) + d(u, v)$$

Prin urmare:

$$d(x, u) - d(y, v) \leq d(x, y) + d(v, u)$$

$$d(y, v) - d(x, u) \leq d(y, x) + d(u, v)$$

Așadar:

$$|d(x, u) - d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v) \quad \forall x, y, u, v \in X$$

Definitie: Un spațiu metric este o structură algebrică alcătuită dintr-o mulțime X pe care s-a definit o metrică.

Definitie: Fie (X, d) un spațiu metric. Distanța de la un punct $x \in X$ la o mulțime $A \subset X$ este numărul:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

Definitie: Distanța dintre mulțimile $A, B \subset X$ este numărul:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Definitie: Diametrul unei mulțimi $A \subset X$ este numărul:

$$d(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$$

Inegalități remarcabile într-un spațiu metric

Teoremă: (Inegalitatea lui Hölder) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru $p > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstrație:

Considerăm funcția auxiliară:

$$\begin{aligned} \phi : (0, \infty] &\rightarrow \mathbb{R}, \phi(x) = x^\alpha - \alpha x, \alpha \in (0, 1) \\ \phi'(x) &= \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \Rightarrow x = 1 \text{ este punct de maxim} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \right)^{1-\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \\ \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k|}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} &\leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n |a_k b_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Teoremă: (Inegalitatea Cauchy-Buniakovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)$$

Demonstrație:

Este un caz particular al inegalității lui Hölder pentru $p = q = 2$.

Teoremă: (Inegalitatea lui Minkovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pentru $p \geq 1$.

Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |b_k|$$

Conform inegalității lui Hölder:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |b_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

deoarece $q(p-1) = p$.

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1...n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni cu același semn. Atunci:

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k$$

Demonstrație:

Vom folosi inducția matematică.

$$(1) : 1 + a_1 \geq 1 + a_1$$

$$(n) : \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k$$

$$(n+1) : \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right) (1 + a_{n+1}) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

Teoremă: (Inegalitatea lui Bernoulli) Fie $a > -1, n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Demonstrație:

Este un caz particular al lemei anterioare pentru $a_k = a, k = [1..n]$.

Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1..n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni pozitivi reali. Dacă $\prod_{k=1}^n a_k = 1$, atunci:

$$\sum_{k=1}^n a_k \geq n$$

Demonstrație:

Vom folosi inducția matematică.

$$(1) : a_1 \geq 1$$

$$(n) : \sum_{k=1}^n a_k \geq n$$

$$(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1} \geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1}a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1}(1 - a_1) - (1 - a_1) + 1 \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq n + 1$$

Șiruri de numere reale

Definiție: Un șir de numere reale este o funcție $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul natural x_n . Notăția tipică este $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n \geq 0}$.

Definiție: Un șir de numere reale (x_n) se numește șir mărginit dacă există un număr real pozitiv $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarcă: Pentru a arăta că un șir este mărginit, este suficient ca relația de mai sus să fie verificată începând cu un rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \geq n_0$$

Remarcă: Un șir este mărginit dacă și numai dacă:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \ni a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$