Matematici Speciale

LazR ('3')

19 ianuarie, 2024

Cuprins

Capitolul 0: Combinatorica

0.1 Principiile combinatoricii

Principiul adunării

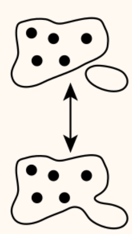
Fie o sarcină oarecare A și $A_k, k = \overline{1,n}$ n abordări diferite ale sarcinii respective, fiecare abordare A_k putând fi dusă la îndeplinire în a_k moduri diferite. Principiul adunării susține că numărul total de moduri în care sarcina poată fi dusă la îndeplinire este egal cu suma algebrică a tuturor modurilor în care poate fi îndeplinită fiecare abordare în parte:

$$\sum_{\text{moduri}} A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\text{moduri}} A_k = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Strict matematic, principiul adunării comunică cum cardinalul reuniunii a n mulțimi disjuncte este egal cu suma algebrică a cardinalelor fiecărei mulțimi în parte:

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \, .$$

Ilustrare a principiului adunării



Principiul înmulțirii

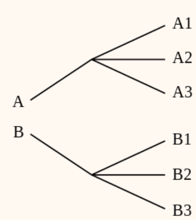
Fie o sarcină oarecare B și $B_k, k = \overline{1,n}$ n sub-sarcini diferite ale sarcinii respective, fiecare sub-sarcină B_k putând fi dusă la îndeplinire în b_k moduri diferite. Principiul înmulțirii susține că numărul total de moduri în care sarcina poată fi dusă la îndeplinire este egal cu produsul tuturor modurilor în care poate fi îndeplinită fiecare sub-sarcină în parte:

$$\sum_{\text{moduri}} B = \prod_{k=1}^{n} \sum_{\text{moduri}} B_k = \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Strict matematic, principiul înmulțirii comunică cum cardinalul produsului cartezian al n mulțimi disjuncte este egal cu produsul cardinalelor fiecărei mulțimi în parte:

$$\left|\times_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Ilustrare a principiului înmulțirii

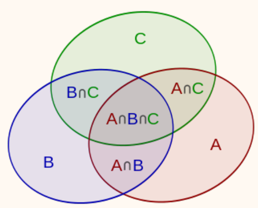


Principiul excluziunii-incluziunii

Principiul excluziunii-incluziunii este o generalizare a principiului adunării pentru mulțimi nu neapărat disjuncte, și susține cum cardinalul reuniunii a n mulțimi nedisjuncte este egal cu suma algebrică a cardinalelor fiecărei mulțimi în parte, din care se scade cardinanul intersecției a oricărei perechi arbitrare de mulțimi și la care se adună apoi cardinanul intersecției a oricăror trei mulțimi, din care se scade cardinalul intersecției a oricăror patru mulțimi și așa mai departe:

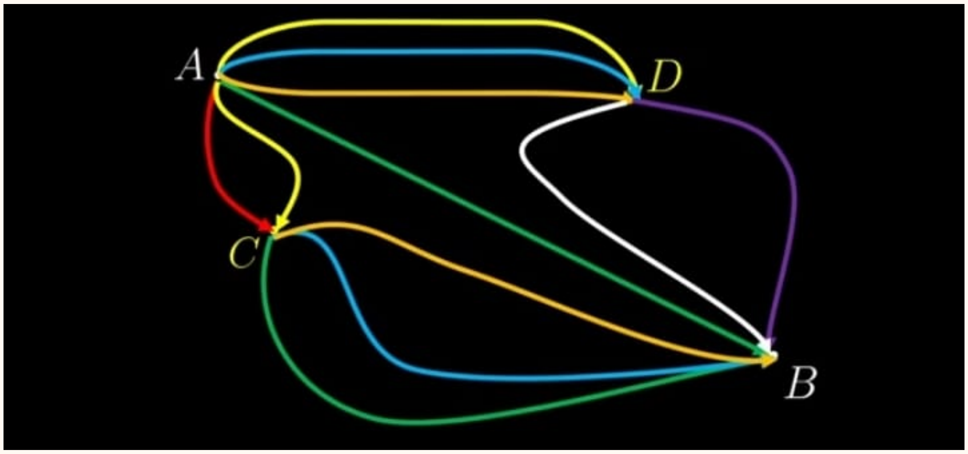
$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \{1,\ldots,n\}} (-1)^{J+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

Ilustrare a principiului excluziunii-incluziunii



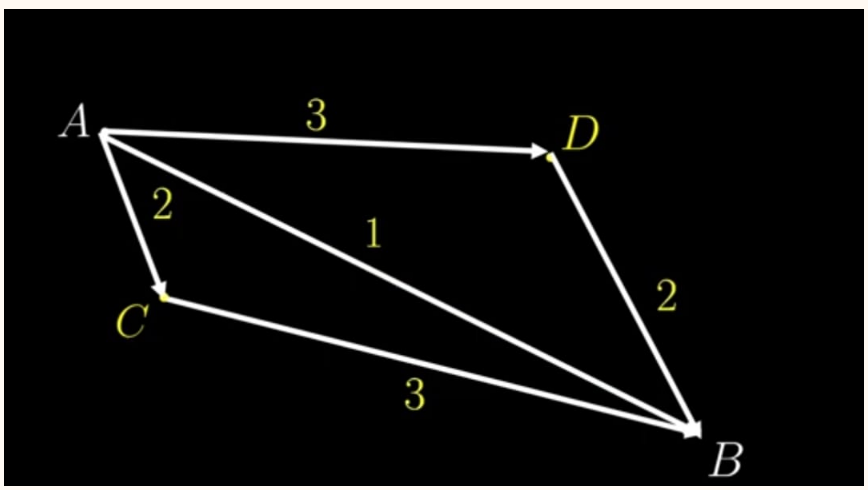
Să luăm de exemplu harta abstractizată a zborurilor unui avion care încep în orașul A și sfârșesc în orașul B. Există 3 rute mari posibile, din A direct în B, din A în C și apoi în B, respectiv din A în D și apoi în B, iar fiecare rută are un număr de sub-rute alternative reprezentate mai jos.

Graf zboruri



Pentru a simplifica vizualizarea problemei, vom trasa o singură linie între fiecare oraș, la care asociem câte un număr, reprezentând modurile posibile de zbor între două orașe.

Graf zboruri simplificat



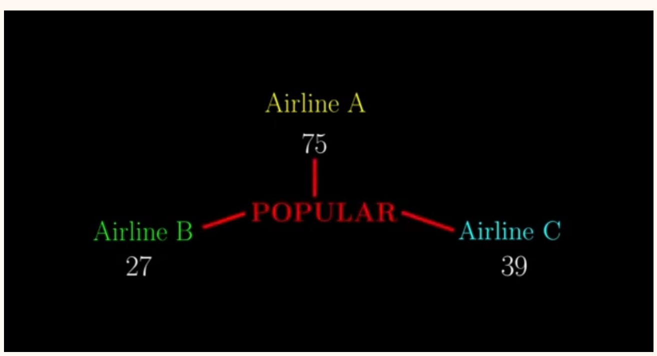
Dorim să numărăm toate modurile posibile de a ajunge din orașul A în orașul B. După cum putem observa, sarcina noastră este să ajungem dintr-un oraș în altul, și există 3 abordări diferite. Conform principiului adunării, trebuie să adunăm toate zborurile posibile pentru fiecare rută aleasă. Ruta directă, din A în B, are un singur zbor posibil. Celelalte două rute alternative, cu opriri într-un oraș intermediar, C, respectiv D, au câte două sub-rute care au la rândul lor un număr de abordări diferite. Conform principiului înmulțirii, trebuie să calculăm produsul numărului de moduri în care poate fi traversată fiecare sub-rută pentru a afla numărul de moduri în care poate fi efectuată ruta mai mare. Conform acestui raționament, numărul total de zboruri din orașul A în orașul B este $2 \cdot 3 + 1 + 3 \cdot 2 = 13$.

Calculul zborurilor posibile din A în B(0.1.1)

Zboruri din A în B = Nr. zboruri prin C + Nr. zboruri directe + Nr. zboruri prin $D = 6 + 1 + 6 = 13$.

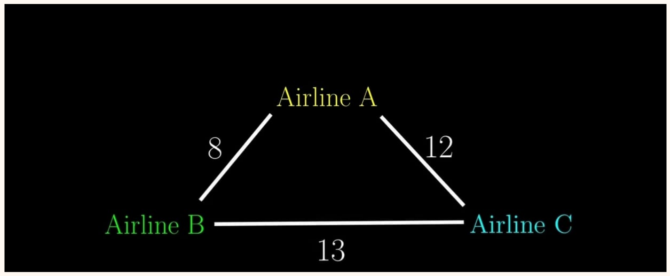
În aceeași idee, pornim de la 3 companii diferite de zboruri, dintre care alegem numai una (important pentru a putea folosi principiul adunării), și dorim să aflăm în câte orașe putem ajunge. Mai jos este reprezentat numărul de orașe în care putem ajunge alegând una dintre companii, cu precizarea că există unele destinații mai populare, pentru care 2, sau chiar 3 companii de zbor oferă zboruri în acele orașe (deci anumite orașe se suprapun).

Companii de zbor și numărul de orașe în care acestea ajung



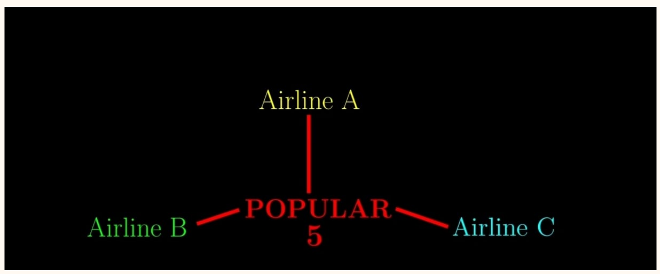
Există un număr de orașe comune în care regăsim zboruri oferite de câte două companii.

Numărul de orașe comune pentru câte două companii de zbor



Există de asemenea un număr de orașe foarte populare în care regăsim zboruri oferite de toate cele 3 companii.

Numărul de orașe comune pentru toate cele 3 companii



Conform principiului excluziunii-incluziunii, mai întâi adunăm toate zborurile posibile, din care scădem toate zborurile comune pentru câte două companii, deoarece acestea se numără de prea multe ori, și la care apoi adunăm numărul de zboruri comune tuturor celor 3 companii, deoarece în urma scăderii repetate, acestea ajung să nu mai fie numărate.

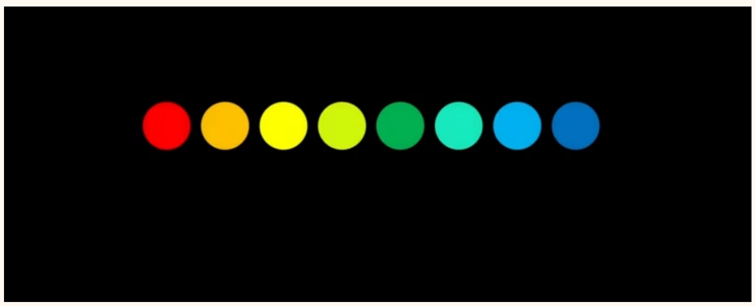
Calculul orașelor în care putem ajunge(0.1.2)

Nr. orașe =
Nr. orașe A + Nr. orașe B + Nr. orașe C
- Nr. orașe AB - Nr. orașe BC - Nr. orașe CA
+ Nr. orașe ABC
= 27 + 75 + 39 - 8 -13 - 12 + 5 = 113.

0.2 Aranjamente si Combinari

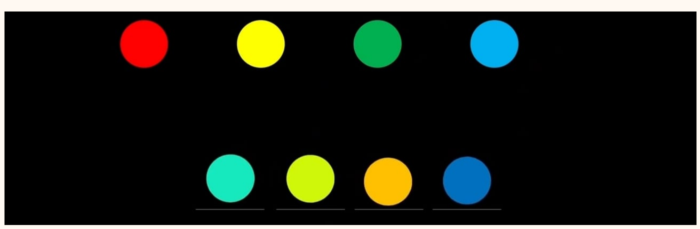
Aranjamentele și combinările, în ciuda aparențelor, nu sunt concepte fundamentale ale combinatoricii, ci sunt de fapt obiecte derivate din principiul de bază mult mai intuitiv al înmulțirii. Atât aranjamentele, cât și combinările, calculează în câte moduri putem selecta k elemente dintr-o mulțime de n elemente (desigur, $k \leq n \in \mathbb{N}$).

Mulțime de elemente



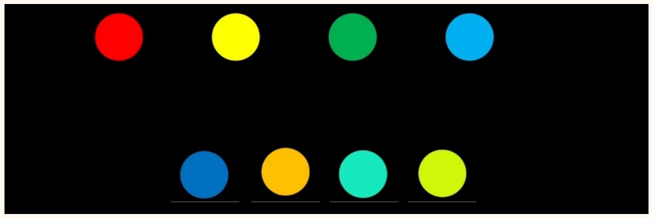
Diferența dintre cele două constă în faptul că aranjamentele țin cont de ordine, în vreme ce combinările nu. Astfel că selecțiile

O alegere de elemente



și

Aceeași alegere - rearanjată



sunt diferite din punctul de vedere al aranjamentelor, însă identice din punctul de vedere al combinărilor. Evident, combinările sunt întotdeauna într-un număr mai mic sau egal cu cel al aranjamentelor.

Formula analitică a aranjamentelor este o consecință directă a principiului înmulțirii. Problema mare este de a selecta k elemente dintr-o mulțime de n elemente. Prima sub-problemă este să selectăm un element dintr-o mulțime de n elemente, iar prin urmare, sunt n posibilități. A două sub-problemă este să selectăm un alt element dintr-o mulțime de $n-1$ elemente, iar prin urmare, sunt $n-1$ posibilități. Analog, constatăm că ultima sub-problemă constă în alegera unui element dintr-o mulțime de $n-k+1$ elemente ($n-k+1$ deoarece în urma ultimei selecții vom rămâne, în mod evident, cu $n-k$ elemente în mulțimea originală și k elemente în mulțimea de elemente selectate). Conform principiului înmulțirii, avem în total $\prod_{i=n-k+1}^{n} i$ aranjamente. Vom folosi notația P_k^n pentru a desemna aranjamentele de n elemente luate câte k, însă este echivalentă cu notația A_n^k.

În cazul combinărilor, pentru care vom folosi notația $\binom{n}{k}$, echivalentă cu C_n^k, o selecție, din punctul de vedere al combinărilor, este echivalentă cu P_k^k selecții din punctul de vedere al aranjamentelor. Prin urmare, rezultă egalitatea $P_k^k \cdot \binom{n}{k} = P_k^n$. Observăm că, în general, P_n^n denotă produsul a primelor n numere naturale, astfel că vom folosi, în scopul simplificării, notația $n!$ (n factorial). Rezultă de aici expresiile analitice ale aranjamentelor, respectiv combinărilor.

Expresia analitică a aranjamentelor(0.2.1)

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Expresia analitică a combinărilor(0.2.2)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$