

Matematici asistate de calculator

LazR ('3')

22 Februarie, 2024

Cuprins

Capitolul 1: Fundamente	3
1.1 Evaluarea unui polinom	3
1.2 Numere binare	4
1.2.1 Conversia din zecimal în binar	4
1.2.2 Conversia din binar în zecimal	5
Capitolul 2: Rezolvarea ecuatiilor	7
2.1 Metoda biseției	7
2.1.1 Preliminarii	7
2.1.2 Prezentarea metodei	10
2.1.3 Analiza metodei	13
2.2 Iteratia de punct fix	13
2.2.1 Punctele fixe ale unei funcții	13
2.2.2 Geometria iteratiei de punct fix	15
2.2.3 Convergența liniară a iteratiei de punct fix	16
2.2.4 Criterii de oprire	19
Capitolul 3: Sisteme de ecuații	20
3.1 Eliminarea Gaussiană	20
3.1.1 Eliminarea Gaussiană naivă	20
3.2 Factorizarea LU	20
3.2.1 Transformări Gauss	21
??? ???	23
Capitolul 4: Interpolarea	25
Capitolul 5: Cele mai mici patrate	26
Capitolul 6: Derivarea și integrare numerică	27
Capitolul 7: Ecuații diferențiale ordinare	28
Capitolul 8: Interpolarea trigonometrică și TFR	29
Capitolul 9: Compresia	30
Capitolul 10: Valori proprii și valori singulare	31

Capitolul 1: Fundamente

1.1 Evaluarea unui polinom

Polinoamele stau la baza multor tehnici computaționale utilizate în acest curs. Operațiile necesare pentru evaluarea unui polinom sunt cele fundamentale: adunarea și înmulțirea. Ne propunem însă să implementăm evaluarea unui polinom cât mai eficient posibil. Se dovedește că metoda cea mai directă nu se soldează cu rezultate satisfăcătoare. Vom lua ca și exemplu polinomul $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, pe care îl vom evalua în punctul $\frac{1}{2}$.

Metoda 1: Calculul direct(1.1.1)

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Numărul operațiilor fundamentale este 14, 10 înmulțiri și 4 adunări.

Metoda 1: Calculul dinamic(1.1.2)

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Numărul operațiilor se reduce la 11, 7 înmulțiri și 4 adunări.

Metoda 3: Algoritmul lui Horner(1.1.3)

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{1}{2} \left(-3 + \frac{1}{2} \left(3 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)\right)\right) = \frac{5}{4}.$$

Prin intermediul acestei metode, numărul operațiilor s-a redus la 8, 4 înmulțiri și 4 adunări. În general, un polinom de grad d se poate calcula prin minim d înmulțiri și d adunări.

Acest exemplu este caracteristic întregii discipline a metodelor computaționale implementate cu ajutorul calculatorului. Punctele cheie sunt:

- (i) calculatoarele efectuează foarte eficient *operații de bază*;
- (ii) este cu toate acestea important ca și operațiile de bază să fie *efectuate într-un mod cât mai eficient*, datorită *repetabilității lor*;
- (iii) cea mai bună metodă s-ar putea să *nu* fie de obicei și *cea mai intuitivă*.

1.2 Numere binare

Un număr scris într-o bază de numărare oarecare este de forma:

$$\sum_{k=0}^n a_k b^k \text{ (un polinom).}$$

Numerele zecimale sunt convertite în calculator din baza 10 în baza 2 pentru a facilita stocarea datelor și pentru a simplifica anumite operații.

1.2.1 Conversia din zecimal în binar

Evident, prin împărțirea polinomului de mai sus la b obținem, sub formă de *rest*, coeficientul a_0 . Aplicând aceeași operație asupra polinomului asociat *câtului* împărțirii precedente, obținem coeficientul a_1 . Se observă că dacă aplicăm acest raționament în mod repetat, obținem toți *coeficienții necesari scrierii unui număr în baza b , în ordine inversă* (observăm de asemenea că restul împărțirii la b este același, indiferent de baza aleasă pentru reprezentarea numărului pe care îl împărțim la b). Asta ne conduce la algoritmul clasic de conversie din zecimal în binar. Vom lua ca exemplu numărul $(53.7)_{10}$.

Conversia părții întregi(1.2.1.1)

$$53 : 2 = 26 \text{ rest } 1;$$

$$26 : 2 = 13 \text{ rest } 0;$$

$$13 : 2 = 6 \text{ rest } 1;$$

$$6 : 2 = 3 \text{ rest } 0;$$

$$3 : 2 = 1 \text{ rest } 1;$$

$$1 : 2 = 0 \text{ rest } 1;$$

$$(53)_{10} = (110101)_2.$$

Pe de altă parte, pentru conversia părții fracționare, trebuie să înmulțim cu b pentru a scoate la iveală coeficienții (care apar de această dată în ordine naturală).

Conversia părții fracționare(1.2.1.2)

$$0.7 \cdot 2 = 0.4 + 1;$$

$$0.4 \cdot 2 = 0.8 + 0;$$

$$0.8 \cdot 2 = 0.6 + 1;$$

$$0.6 \cdot 2 = 0.2 + 1;$$

$$0.2 \cdot 2 = 0.4 + 0;$$

$$0.4 \cdot 2 = 0.8 + 0;$$

$$(0.7)_{10} = (0.1\overline{0110})_2.$$

Astfel, putem concluziona că $(53)_{10} = (110101.1\overline{0110})_2$.

1.2.2 Conversia din binar în zecimal

Pentru conversiile simple, se calculează pur și simplu polinomul finit asociat reprezentării în baza 2 a părții întregi, respectiv fracționare. În cazul periodic de mai sus, aplicăm proprietatea de deplasare către stânga la înmulțire cu baza b :

$$x = 0.1\overline{0110};$$

$$2x = 1.\overline{0110};$$

$$y = 0.\overline{0110};$$

$$2^4 y = 110.\overline{0110};$$

$$(2^4 - 1)y = 110;$$

$$y = \left(\frac{6}{15}\right)_{10};$$

$$2x = 1 + \frac{6}{15};$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{15} = 0.2 + 0.5 = 0.7.$$

Capitolul 2: Rezolvarea ecuațiilor

Acest capitol introduce mai multe *metode iterative* de localizare a soluțiilor x ale unei ecuații $f(x) = 0$. Adesea, în practică, alegerea metodei va depinde de costul computațional al funcției f și, posibil, al derivatei ei.

2.1 Metoda bisectiei

2.1.1 Preliminarii

Lema intervalelor închise incluse

Fie $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ un șir descrescător de intervale închise și mărginite în \mathbb{R} , $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$. Atunci:

$$\bigcap_{k \geq 0} I_k \neq \emptyset.$$

Demonstrație:

Au loc inegalitățile:

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_p \leq \dots \leq b_q \leq \dots \leq b_1 \leq b_0.$$

Fie $A = \{x : \exists p \ni x = a_p\}$ și $B = \{y : \exists q \ni y = b_q\}$. Evident, b_0 este majorant al lui A și a_0 este minorant al lui B . Conform axiomei mărginirii mulțimilor de numere reale, există $\xi = \sup A$ și $\mu = \inf B$. Prin urmare, $\xi \leq \mu$. Fie $t \in [\xi, \mu]$. Avem $a_n \leq \xi \leq t \leq \mu \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in I_n$. Putem concluziona astfel că $[\xi, \mu] \subset \bigcap_{k \geq 0} I_k \Rightarrow \bigcap_{k \geq 0} I_k \neq \emptyset$.

□

Convergența subșirurilor unui șir fundamental

Fie un șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ și un subșir al său, $(x_{k_n})_{k_n \geq n \in \mathbb{N}}$, convergent către $l \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

Demonstrație:

Fie $\epsilon > 0$, $\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon) \in \mathbb{R}$. Din ipoteză, avem:

$$|x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq \nu_1(\epsilon),$$

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, m \geq \nu_2(\epsilon).$$

Pentru $m = k_n \geq n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon))$, obținem:

$$|x_{k_n} - x_n| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)).$$

Prin urmare:

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \forall n \geq \max(\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

□

Lema lui E. Cesaro

Orice șir de numere reale mărginit are un subșir convergent.

Demonstrație:

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit. Așadar, toți termenii șirului, în număr infinit, aparțin unui interval închis $I_0 = [a_0, b_0]$, $a_0 < b_0$. Fie $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Atunci, cel puțin unul din intervalele $[a_0, c_0]$, $[c_0, b_0]$ conține un număr infinit de termeni din x_n . Vom nota acel interval cu $I_1 = [a_1, b_1]$. Similar, fie $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ și un interval cu număr infinit de termeni din x_n , fie $[a_1, c_1]$, fie $[c_1, b_1]$, notat $I_2 = [a_2, b_2]$. Procedând în continuare în acest fel, se obține un șir descrescător de intervale închise $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Conform lemei intervalelor închise incluse, există $\xi \in \bigcap_{k \geq 0} I_k$. Alegem șirul $(x_{k_n})_{k \geq n \in \mathbb{N}}$, $k_n \in I_n$. Avem:

$$|x_{k_n} - \xi| < a_n - b_n = \frac{a_0 - b_0}{2^n} \forall n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \xi.$$

□

Convergența unui șir fundamental

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă acesta este un șir Cauchy.

Demonstrație:

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir convergent în \mathbb{R} cu limita $l \in \mathbb{R}$ și fie $\epsilon > 0$. Atunci, există $\nu(\epsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq \nu(\epsilon).$$

Fie $m \geq \nu(\epsilon)$ și $n \geq \nu(\epsilon)$. Așadar:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &< \frac{\epsilon}{2}, \\ |x_m - l| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$|x_n - x_m| < |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \forall m, n \geq \nu(\epsilon).$$

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir Cauchy în \mathbb{R} și $\epsilon > 0, \nu(\epsilon) \in \mathbb{N}$. Avem $x_n \in (\nu(\epsilon) - \epsilon, \nu(\epsilon) + \epsilon)$, astfel că șirul x_n este mărginit și prin urmare, conform lemei lui E. Cesaro, șirul x_n are un subșir convergent. Însă, fiind șir Cauchy, rezultă, conform teoremei convergenței subșirurilor unui șir fundamental, că x_n este convergent.

□

Teorema Bolzano-Weierstrass

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Demonstrație:

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir monoton și mărginit. Demonstrațiile sunt similare în ambele cazuri de monotonie. Presupunem x_n crescător. Conform axiomei mărginirii unei mulțimi de numere reale, există $M = \sup_n x_n$. Fie $\epsilon > 0$. Prin urmare:

$$M - \epsilon < x_n \leq M < M + \epsilon \forall n \geq \nu(\epsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M.$$

□

Notă: Teorema nu se numește de fapt Bolzano-Weierstrass, dar este o consecință a ei și nu-i mai știu numele original, deci rămâne așa.

2.1.2 Prezentarea metodei

Primul pas în rezolvarea unei ecuații este de a verifica dacă există într-adevăr o rădăcină. Un mod de a ne asigura este de a găsi **limitele între care se află o rădăcină**, și anume a găsi un interval $[a, b]$ pe dreapta reală pentru care perechea $(f(a), f(b))$ constă din două numere opuse ca și semn, adică $f(a)f(b) < 0$. Dacă funcția este continuă, atunci, desigur, va exista o rădăcină, adică un punct intermediar care taie axa Ox .

Teorema valorii intermediare

Fie f o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci f ia orice valoare între $f(a)$ și $f(b)$.

$$\forall y \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))] \exists \tilde{x} \in [a, b] \ni f(\tilde{x}) = y.$$

Demonstrație:

Fie $g = f - y$.

Fie

$$\tilde{f} = \begin{cases} -g & g(a) > 0 \\ g & g(a) \leq 0 \end{cases}.$$

Observăm că $\tilde{f}(a) \leq 0$ și $\tilde{f}(b) \geq 0$. Căutăm \tilde{x} pentru care $\tilde{y} := 0$. Aplicăm biseția repetată pe intervalele $[a_k, b_k]$, unde

$$\begin{cases} \tilde{f}\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) > 0 : b_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, a_k = a_{k-1} \\ \tilde{f}\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) \leq 0 : a_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_k = b_{k-1} \end{cases}.$$

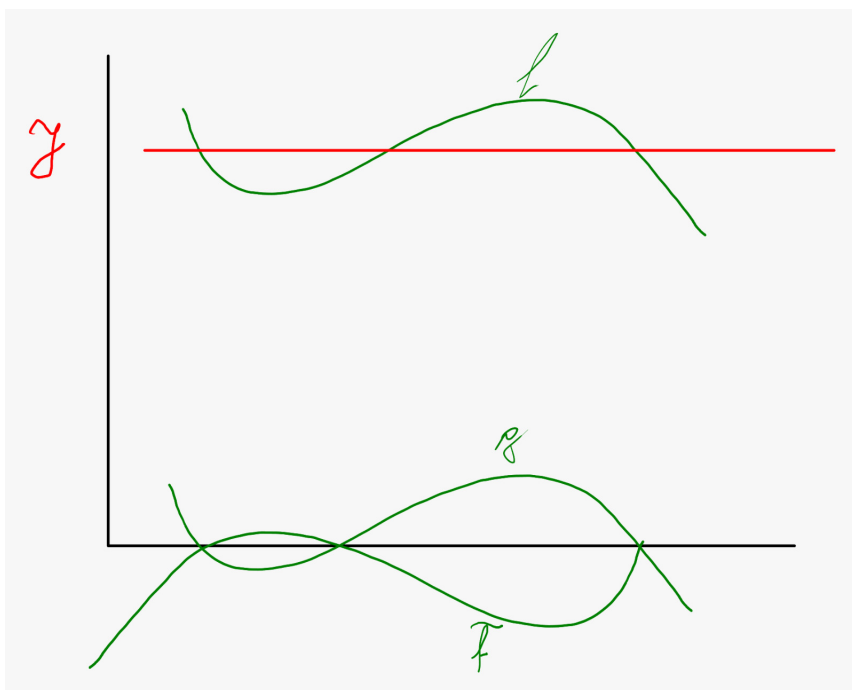
Obținem astfel două șiruri fundamentale (Cauchy), $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cum $a_n - b_n \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in [a, b].$$

Datorită continuității lui \tilde{f} , avem

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(a_n) \leq 0 \Rightarrow \tilde{f}(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \leq 0 \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(b_n) \geq 0 \Rightarrow \tilde{f}(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) \geq 0 \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) \geq 0 \end{cases}.$$

Astfel că $\tilde{f}(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow g(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{x}) = y$.



□

Metoda biseției

```
metoda_bisectiei(f, a, b, toleranta)

f_a = f(a);
f_b = f(b);

if sign(f_a) * sign(f_b) >= 0
error(
'conditia sign(f_a)sign(f_b) < 0
nu e satisfacuta!s')
end

while (b - a) / 2 > toleranta

c = (a + b) / 2;
f_c = f(c);

if f_c == 0
break;
end

if sign(f_c) * sign(f_a) < 0
b = c;
f_b = f_c;

else
a = c;
f_a = f_c;
end

end

c = (a + b) / 2;
```

2.1.3 Analiza metodei

Dacă $[a_0, b_0]$ este intervalul inițial ales, constatăm că, după n pași ai metodei biseției, intervalul $[a_n, b_n]$ are lungimea $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Alegând mijlocul $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, eroarea se înjumătățește cu fiecare iterație:

$$|\epsilon_n| = |c_n - r| \leq |c_n - a_n| \leq |b_n - c_n| = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Eroarea soluției metodei biseției(2.1.3.1)

$$|\epsilon_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Soluție corectă cu p zecimale exacte

O soluție corectă cu p zecimale exacte este o soluție a cărei eroare este mai mică decât $0.5 \cdot 10^{-p}$.

Luând ca exemplu funcția $f(x) = \cos(x) - x$ și intervalul $[0, 1]$, a cărei soluție (una dintre ele) dorim să o aflăm cu 6 zecimale exacte, eroarea după n pași în care aplicăm metoda biseției este $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Din definiția celor p zecimale exacte, trebuie ca

$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow n > \frac{6}{\log_{10}(2)} \approx \frac{6}{0.301} = 19.9.$$

Prin urmare, $n = 20$ de pași vor fi necesari.

Unii **algoritmi mai puternici** sunt adesea **mai puțin predictibili** și va trebui să stabilim anumite **criterii de oprire**.

2.2 Iteratia de punct fix

2.2.1 Punctele fixe ale unei functii

Punct fix

Numărul real r este un punct fix al funcției g , dacă $g(r) = r$.

Funcția $g(x) = x^3$ are trei puncte fixe: $0, 1$ și -1 . Aplicând funcția \cos în mod recursiv și repetat asupra aceluiași punct de intrare, vom obține o

aproximare a punctului său fix (în jur de 0.7391). Funcția \cos se întâmplă să fie funcția g potrivită pentru transformarea ecuației $f(x) = 0$ într-o ecuație de forma $g(x) = x$, în cazul funcției $f(x) = \cos(x) - x$.

Iterația de punct fix

```
function res = fpi(g, x0, k)
x(1) = x0;
for i = 1 : k
    x(i+1) = g(x(i));
end
res = x(k+1);
```

Șirul x_n poate să convergă sau nu, pe măsură ce numărul de pași ai iterației tinde la infinit. Însă, dacă g este **continuu** și x_n **converge**, de exemplu, la un număr r , atunci r este punct fix.

Limite continue

Fie f o funcție continuă într-o vecinătate a lui x_0 , și presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Demonstrația este trivială și rezultă din definiția continuității. Astfel,

Convergența iterației de punct fix(2.2.1.1)

$$g(r) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n+1}) = r.$$

Iterația de punct fix rezolvă ecuațiile de forma $g(x) = x$, însă se pune problema dacă orice ecuație generală, $f(x) = 0$, poate fi redusă la o ecuație de punct fix. Nu doar că acest lucru este, desigur, posibil, însă transformarea poate fi efectuată în multe moduri diferite, unele ducând la un șir convergent la punctul nostru fix, iar altele nu. Vom lua ca exemplu ecuația $x^3 + x - 1 = 0$.

Metoda 1(2.2.1.2)

$$g(x) = 1 - x^3.$$

Metoda 2(2.2.1.3)

$$g(x) = \sqrt[3]{1-x}.$$

Metoda 3(2.2.1.4)

$$g(x) = \frac{1 + 2x^3}{1 + 3x^2}.$$

Ultima formă se obține efectuând următoarele operații:

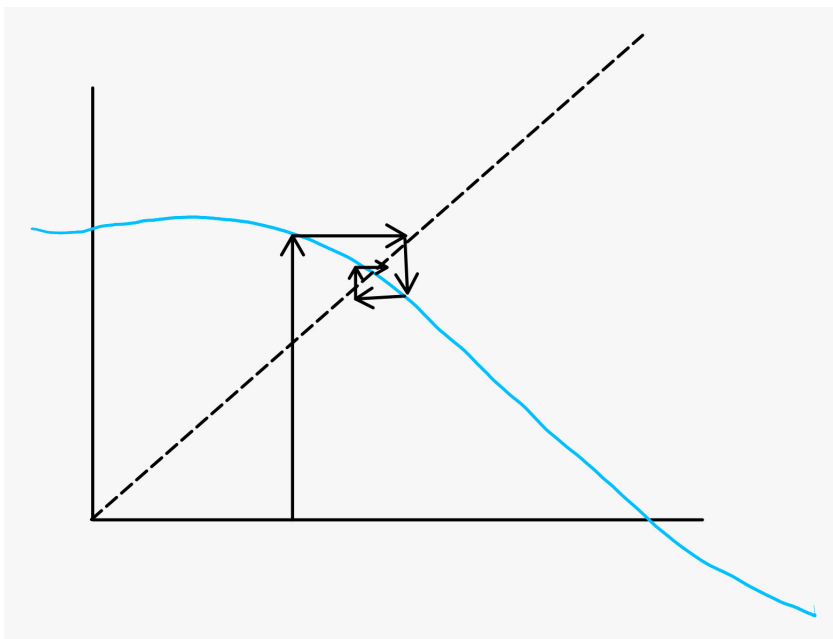
$$x^3 + x - 1 = 0$$

$$3x^3 + x = 2x^3 + 1$$

$$x = \frac{1 + 2x^3}{1 + 3x^2}.$$

2.2.2 Geometria iteratiei de punct fix

Pentru a afla când anume metoda IPF converge și când nu, este util să apelăm mai întâi la o modalitate de a vizualiza geometria din spatele metodei, numită *diagramă cobweb*.



Punctul fix al unei funcții reprezintă punctul cartezian în care graficele funcției g ($y = g(x)$), respectiv al primei bisectoare ($y = x$), se intersectează. Fiecare pas al IPF poate fi vizualizat ca trasarea unor segmente de dreaptă *verticale la funcție* și apoi *orizontale la prima bisectoare*. Săgeata verticală reprezintă maparea $x_n \rightarrow g(x_n)$, în vreme ce săgeata orizontală reprezintă găsirea celui x_{n+1} corespunzător, adică noul parametru de intrare necesar în a continua iterația.

2.2.3 Convergența liniară a iterației de punct fix

Convergența metodei depinde, după cum se poate observa, de panta funcției în apropierea punctului fix. De exemplu, în cazul funcțiilor liniare $g_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ și $g_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, putem analiza ușor pantele lor, care se văd cu ochiul liber că sunt $-\frac{3}{2}$, respectiv $-\frac{1}{2}$. Cum afectează pantele efectivitatea metodei putem vedea scriindu-le pe g_1 și g_2 în funcție de $x - r$, unde punctul fix r este 1.

$$g_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$g_1(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1$$

$$g_1(x) - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1).$$

Recurența IPF pentru funcția g_1 (2.2.3.1)

$$x_{n+1} - 1 = -\frac{3}{2}(x_n - 1).$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$$

$$g_2(x) - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1).$$

Recurența IPF pentru funcția g_2 (2.2.3.2)

$$x_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}(x_n - 1).$$

Cum $\epsilon_n = |r - x_n|$ este eroarea la pasul n , avem că $\epsilon_{n+1} = \frac{3}{2}\epsilon_n$, pentru g_1 , și $\epsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\epsilon_n$, pentru g_2 . Eroarea **scade treptat** în cazul funcțiilor cu panta **subunitară**.

Metodă liniar convergentă

Fie ϵ_n eroarea la pasul n al unei metode iterative. Dacă

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = S < 1,$$

atunci se spune că metoda este **liniar convergentă**, cu rata S .

Teorema de medie

Fie f o funcție derivabilă pe $[a, b]$, cu derivata continuă pe intervalul (a, b) . Atunci, există un număr $c \in [a, b]$, astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstrație:

Fie $g(x) = f(x) - rx$, unde r este o constantă. Cum f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , atunci și g este înzestrată cu aceleași proprietăți. Dorim să alegem r , astfel încât să putem aplica teorema lui Rolle:

$$g(a) = g(b) \iff f(a) - ra = f(b) - rb \iff x = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Conform teoremei lui Rolle, având în vedere că g este diferențiabilă și $g(a) = g(b)$, există $c \in (a, b)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Avem

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - r \text{ și } g'(c) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

□

Convergența liniară a iterației de punct fix

Fie g o funcție derivabilă, cu derivata continuă, având punctul fix $r = g(r)$. Dacă $S = |g'(r)| < 1$, atunci iterația de punct fix a funcției g converge liniar la punctul r pentru o valoare inițială din vecinătatea punctului fix.

Demonstrație:

Conform teoremei de medie, există un punct c_n , între x_n și r , astfel încât

$$x_{n+1} - r = g'(c_n)(x_n - r) \iff \epsilon_{n+1} = |g'(c_n)|\epsilon_n.$$

Astfel că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(c_n)| = |g'(r)| = S.$$

□

Local convergența

O metodă iterativă se numește **local convergentă** la r , dacă metoda converge la r pentru valori inițiale din vecinătatea lui r .

Concluzia este că IPF este local convergentă, dacă și numai dacă $|g'(r)| < 1$.

Luând cazurile anterioare de transformare în funcție adecvată pentru IPF, avem derivatele $-3x^2$, $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$, $\frac{6x(x^3+x-1)}{(1+3x^2)^2}$. Știind că $r \approx 0.6823$, valoarea cea mai mică și subunitară a lui S se găsește pentru a treia variantă de scriere a funcției g , în vreme ce a doua variantă converge mai încet, iar prima este divergentă.

2.2.4 Criterii de oprire

Spre deosebire de metoda biseției, numărul de paș necesari pentru convergența IPF în limitele unei toleranțe date nu poate fi prezisă cu anticipare. În absența unei formule de eroare, se alege arbitrar un **criteriu de oprire**, ținând totuși cont de anumiți factori. Putem formula un criteriu cu privire la eroarea absolută:

Criteriul erorii absolute(2.2.4.1)

$$|x_{n+1} - x_n| < TOL.$$

În cazul în care eroarea absolută este prea mare, putem să ne raportăm la cea relativă:

Criteriul erorii relative(2.2.4.2)

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < TOL.$$

Un criteriu hibrid poate fi util în cazul soluțiilor apropiate de 0:

Criteriul hibrid(2.2.4.3)

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{\max(|x_{n+1}|, \theta)} < TOL, \text{ unde } \theta > 0.$$

Prin urmare, IPF poate fi mai lentă sau mai rapidă decât metoda biseției, depinzând de valoarea lui S față de rata de convergență liniară a metodei biseției, $\frac{1}{2}$. Metoda lui Newton caută să rafineze rata de convergență, astfel încât să tindă la 0.

Capitolul 3: Sisteme de ecuații

3.1 Eliminarea Gaussiana

Sistemele de ecuații pot fi privite atât din perspectivă algebrică, cât și dintr-o perspectivă geometrică. Luând ca exemplu sistemul cu două ecuații și două necunoscute:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases},$$

observăm că, geometric, soluția noastră reprezintă intersecția dreptelor, în planul xy , descrise de cele două ecuații. Pentru calculul soluțiilor, cu precizie cât mai mare, ne vom raporta însă la calculul algebric.

3.1.1 Eliminarea Gaussiana naivă

Eliminarea Gaussiană naivă are la bază trei operații fundamentale:

- (i) *Interschimbarea* unei ecuații cu altă ecuație;
- (ii) *Adunarea* sau *scăderea* unui *multiplu* al unei ecuații la o/dintr-o altă ecuație;
- (iii) *Înmulțirea* unei ecuații cu o constantă nenulă.

Pentru cazul nostru, scris sub formă tabulară, avem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L2=L2-3L1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{array} \right),$$

de unde putem trage ușor concluzia $y = 1$ și $x = 2$.

3.2 Factorizarea LU

Rezolvarea unui sistem triunghiular reprezintă un calcul facil, de complexitate $O(n^2)$. Ideea din spatele eliminării Gaussiene este transformarea unui sistem $Ax = b$ într-un sistem triunghiular echivalent. De exemplu, sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 6x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$$

are următoarea descompunere, de formă LU , unde L și U sunt matrice triunghiulare, inferioară, respectiv, superioară:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_U.$$

Soluția problemei originale se obține acum prin doi pași:

$$Ly = b, Ux = y \Rightarrow Ax = LUx = Ly = b.$$

3.2.1 Transformari Gauss

În acest punct, avem nevoie de o descriere matriceală al procesului de obținere de 0-uri. Luând cazul $n = 2$, dacă $v_1 \neq 0$ și $\tau = \frac{v_2}{v_1}$, atunci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerăm cazul general. Fie $v \in \mathbb{R}^n, v_k \neq 0$. Dacă

$$\tau = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n], \tau_i = \frac{v_i}{v_k}, i = \overline{k+1, n},$$

și definim

$$M_k = I_n - \tau e_k^T,$$

atunci

$$M_k v = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -\tau_{k+1} & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -\tau_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O matrice de forma $M_k = I_n - \tau e_k^T$ se numește **transformare Gauss**. O astfel de matrice este inferior triunghiulară. Componentele $\tau(k+1:n)$ se numesc **multiplicatori**. Vectorul τ se numește **vector Gauss**.
Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul în care toți pivoții sunt nenuli, atunci, transformările Gauss M_1, \dots, M_{n-1} pot fi generate astfel încât $M_{n-1} \dots M_1 A = U$ este o matrice superior triunghiulară. Se verifică ușor că $M_k^{-1} = I_n + \tau^k e_k^T$, de unde obținem $A = LU$, unde $L = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$. Câteodată însă, factorizarea este imposibilă, ca și în cazul matricei de mai jos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}.$$

Din $u_{11} = 1, u_{12} = 2, l_{21} = 2, u_{22} = 0, l_{31} = 3$, ajungem la concluzia falsă, $5 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 6$. În acest exemplu, pivotul $a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} = 0$. Devine aparent faptul că al k -lea pivot este zero, dacă $A(1 : k, 1 : k)$ este singulară.

Factorizarea LU

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și $\det(A(1 : k, 1 : k)) \neq 0, k = \overline{1, n-1}$, atunci există o matrice unitate inferior triunghiulară și o matrice superior triunghiulară, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, respectiv $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, astfel încât $A = LU$. Dacă A nu este singulară, atunci factorizarea este unică, iar $\det(A) = \prod_{k=1}^n u_{kk}$.

Demonstrație:

După $k-1$ pași, matricea A inițială a fost suprascrisă de către noua matrice $A^{(k-1)} = M_{k-1} \dots M_1 A$. Cum

$$\det(A(1 : k, 1 : k)) = a_{11}^{(k-1)} \dots a_{kk}^{(k-1)},$$

dacă matricea $A(1 : k, 1 : k)$ este nesingulară, atunci pivotul $a_{kk}^{(k-1)}$ este nenul. Pentru unicitate, fie $A = L_1 U_1 = L_2 U_2 \Rightarrow L_1^{-1} L_2 = U_1 U_2^{-1}$, identitate adevărată doar în cazul $L_1 = L_2, U_1 = U_2$, deoarece avem de a face cu matrice inferior, respectiv superior triunghiulare. Din

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \det(U) \Rightarrow \det(A) = \prod_{k=1}^n u_{kk}.$$

□

??? ???

Considerăm descompunerea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix}.$$

Dacă a și b ”domină”, ca magnitudine, b și c , atunci elementele din L și U vor fi suficient de bine mărginite încât să putem efectua factorizarea LU . Asta ne conduce la o nouă definiție.

Matrice diagonal dominantă

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matricea A este diagonal dominantă dacă

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}.$$

Capitolul 4: Interpolarea

Capitolul 5: Cele mai mici patrate

Capitolul 6: Derivarea si integrare numerica

Capitolul 7: Ecuatii diferentiale ordinare

Capitolul 8: Interpolarea trigonometrica si TFR

Capitolul 9: Compresia

Capitolul 10: Valori proprii si valori singulare

Capitolul 11: Optimizarea