Probleme MAC

LazR ('3')

16 Martie, 2024

1. Aplicați un pas din metoda lui Newton, pentru vectorul inițial $[1,1]^T$, în cazul sistemului de mai jos:

$$\begin{cases} u^2 - 4v^2 = 4 \\ (u-1)^2 + v^2 = 4 \end{cases}.$$

Soluție:

Fie $f_1(u,v) = u^2 - 4v^2$ și $f_2(u,v) = (u-1)^2 + v^2$.

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \\ \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -8v \\ 2(u-1) & 2v \end{pmatrix}.$$

$$J([1,1]^T) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$f_1([1,1]^T) = -3.$$

$$f_2([1,1]^T) = 1.$$

Rezolvăm sistemul

$$J([1,1]^T) \cdot (s := [s1, s2]^T) = -[f_1([1,1]^T), f_2([1,1]^T)]^T.$$

$$\begin{cases} 2s_1 - 8s_2 = 3 \\ 2s_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow s = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T.$$

$$x_1 = x_0 + s = [1,1]^T + \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T.$$

2. Găsiți factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind eliminarea gaussiană clasică:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4=L_4-L_2]{L_3=L_3-2L_2}$$

$$\xrightarrow[L_4=L_4-L_2]{L_3=L_3-2L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Găsiți factorizarea Cholesky $A = R^T R$ a următoarei matrici:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

$$\sqrt{a_{11}} = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 0 \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right), [-1,0]^T.$$

$$[-1,0]^T[-1,0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 2 & -3 \\ & -3 & 10 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 1 & -3 \\ & -3 & 10 \end{array}\right).$$

$$\sqrt{b_{11}} = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -3 \\ & & \end{array}\right), [3]^T.$$

$$[3]^T[3] = 9.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & 10 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & 1 \end{array}\right).$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Găsiți toate punctele fixe ale funției $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ și decideți dacă IPF este local convergentă pentru fiecare punct fix. În cazul de convergență, aplicați doi pași ai iterației de punct fix, cu o valoare inițială din vecinătatea punctului și determinați rata de convergență. Calculați eroarea de aproximare.

Soluție:

$$g(x) = x \iff 8x^2 - 10x + 3 = 0 \iff (2x-1)(4x-3) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}.$$

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{4}.$$

$$\left|g'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{ convergență liniară }.$$

$$\left|g'\left(\frac{3}{4}\right)\right| = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow \text{ divergență }.$$

$$g(g(0,6)) = 0.5709.$$

$$e_2 = |0.5 - 0.5709| = 0.07225.$$

5. Folosiți teorema valorii intermediare pentru a găsi un interval de lungime unu care conține rădăcina pozitivă a ecuației $5x^2 + 3x = 2$. Aplicați metoda bisecției pentru a găsi o aproximare a rădăcinii care se află la cel mult $\frac{1}{8}$ de rădăcina adevărată. Calculați eroarea de aproximare.

Soluție:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \iff (5x-2)(x+1) = 0 \iff x \in \left\{\frac{2}{5}, -1\right\}.$$

Fie intervalul $[0, 1]$.

$$[0,1] : f(0) = -2, f(1) = 6, c_1 = \frac{1}{2}, f(c_1) = \frac{3}{4}.$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] : c_2 = \frac{1}{4}, f(c_2) = -\frac{15}{16}.$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] : c_3 = \frac{3}{8}.$$

6. Estimați eroarea e_{i+1}, în funție de eroarea anterioară, e_i, pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r = -\frac{1}{2}$ și $r = 1$, pentru ecuația $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$. Este convergența liniară, sau pătratică.

Soluție:

Fie $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1$.

$$f(r_1) = -\frac{27}{4} \neq 0.$$

$$f(r_2) = 0 \Rightarrow \text{ metoda lui Newton este pătratic convergentă la } r_2.$$

$$f'(-1)s = -f(-1) \Rightarrow s = -\frac{f'(-1)}{f(1)}.$$

$$x_1 = x_0 + s \Rightarrow x_1 = -1 - \frac{f'(-1)}{f(1)} = -\frac{5}{7}.$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2x_i^4 - 5x_i^3 + x_i - 1}{8x^3 - 15x_i^2 + 6x_i + 1}.$$

7. Găsiți factorizarea $PA = LU$ a următoarei matrice, folosind pivotarea parțială:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2>1]{P_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3+\frac{1}{2}L_1]{L_2=L_2-\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{3}{2}>\frac{1}{2}]{P_{23}}$$

$$\xrightarrow[\frac{3}{2}>\frac{1}{2}]{P_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$