

Probleme Curs Algebră Liniară

LazR

30 Noiembrie, 2023

Enunț: Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \\ 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$S = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Enunț: Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1=L_1-L_5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2=L_2-3L_1 \quad L_3=L_3-4L_1]{L_4=L_4-3L_1 \quad L_5=L_5-7L_1}$$

$$\xrightarrow[L_2=L_2-3L_1 \quad L_3=L_3-4L_1]{L_4=L_4-3L_1 \quad L_5=L_5-7L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{swap}(L_2, -L_4)}$$

$$\xrightarrow{\text{swap}(L_2, -L_4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[L_5=L_5+10L_2]{L_3=L_3+6L_2 \ L_4=L_4+3L_2}$$

$$\xrightarrow[L_5=L_5+10L_2]{L_3=L_3+6L_2 \ L_4=L_4+3L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -63 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{swap}(L_3, -L_4)}$$

$$\xrightarrow{\text{swap}(L_3, -L_4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -63 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4=L_4+3L_3 \ L_5=L_5+5L_3}$$

$$\xrightarrow{L_4=L_4+3L_3 \ L_5=L_5+5L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{L_5=L_5-2L_4}$$

$$\xrightarrow{L_5=L_5-2L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$S = \{(3, 0, -5, 11)\}$$

Enunț: Să se calculeze inversa matricei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluție:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 = -L_3 + L_1} \\
& \xrightarrow{L_3 = -L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 = -L_3 + L_2} \\
& \xrightarrow{L_3 = -L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}L_3} \\
& \xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3} \\
& \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \\
& \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Inversa matricei este:

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Enunț: Să se rezolve următoarele sisteme:

$$\begin{aligned}
(a) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 4x - y + 5z = 7 \end{cases} & \quad (b) \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \\
(c) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x - y = 3 \end{cases} & \quad (d) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -11 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases} \quad (g) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Soluție:

$$\begin{aligned} (a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -9 & 9 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & -24 \end{array} \right) \\ &S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -6 \end{array} \right) \\ &S = \left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{1}{13}, \frac{6}{13} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistem incompatibil.

$$(d) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(e) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

$$S = \{(1, 2 - \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$(f) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -11 \\ 5 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & -4 & -13 \end{array} \right)$$

Sistem incompatibil.

$$(g) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right)$$

$$S = \{-1, 2\}$$

Enunț: Să se calculeze rangurile matricelor:

$$(a) \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \right) \quad (b) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

$$(c) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{array} \right)$$

Rezolvare:

$$(a) \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rangul matricei este 2.

$$\begin{aligned}
(b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rangul matricei este 3.

$$\begin{aligned}
(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \rightarrow \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & n(1-n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rangul matricei este 2.

Enunț: Să se determine forma scară redusă pentru matricele:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned}
(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3
\end{aligned}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enunț: Fie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$.

- (a) Să se calculeze $\pi^{-1}, \sigma^{-1}, \pi\sigma, \sigma\pi, \pi^{-1}\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\pi^{-1}, (\pi\sigma)^{-1}, (\sigma\pi)^{-1}$.
(b) Să se calculeze numărul de inversiuni și signatura permutărilor date.
(c) Să se determine matricele permutărilor de la punctul (a) și determinanții acestora.

- (d) Să se calculeze inversele matricelor de la punctul precedent.

(e) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Să se calculeze produsele $P_\pi A, P_\sigma A, P_{\sigma^2} A, P_{\sigma\pi^{-1}} A$.
(ii) Să se determine toate produsele posibile dintre matricele determinate la punctul (c) și matricea A .

Rezolvare:

(a)

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1}\sigma^{-1} = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1}\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\pi\sigma)^{-1} = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}\pi^{-1} (\sigma\pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi^{-1}\sigma^{-1}$$

(b)

$$\pi = (1\ 2)(2\ 3) \Rightarrow \epsilon(\pi) = 1 \quad \sigma = (2\ 4)(3\ 4) \Rightarrow \epsilon(\sigma) = 1$$

(c)

$$P_{\pi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\pi\sigma} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma\pi} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}} = P_{(\sigma\pi)^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toate matricele de mai sus au determinantul 1.

(d) Inversele permutărilor și inversele matricelor asociate fiecărei permutări se află în relație de izomorfism.

Enunț: Arătați că:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enunț: Arătați că produsul a două matrice Markov este tot o matrice Markov.

Rezolvare:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{jk} = 1$$

Enunț: Fie $f(x) = x^3 + 7x^2 + 13x - 5$ și $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se arate

că $f(A) = O_3$.

Rezolvare:

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 13\lambda + 5 = -f(\lambda) \Rightarrow$$

$f(A) = O_3 \iff -f(\lambda) = 0$, adevărat, conform teoremei Hamilton-Cayley.

Enunț: Dacă A și B sunt două matrice pătratice de aceeași dimensiune, $n \geq 2$, cu elemente reale, atunci egalitatea $ABAB = O$ implică egalitatea $BABA = O$?

Rezolvare:

Cazul $n = 2$:

- (i) $A = O$ sau $B = O \Rightarrow BABA = O$.
- (ii) A inversabilă sau B inversabilă $\Rightarrow ABAB = O \iff A^{-1}ABABA = O$ sau $BABABB^{-1} = O \iff BABA = O$.
- (iii) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1 \Rightarrow$

$$ABAB = O \Rightarrow BAB \subseteq \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rang}(BAB) \leq \dim(\text{ker}(A)) = 1,$$

$$\text{deoarece } \text{rang}(A) + \dim(\text{ker}(A)) = 2.$$

$$\text{Dacă } \text{rang}(BAB) = 0 \Rightarrow BABA = O.$$

$$\text{Dacă } \text{rang}(BAB) = 1 = \text{rang}(B) \Rightarrow \text{Im}(BAB) = \text{Im}(B),$$

$$\text{deoarece } \text{Im}(BAB) \subseteq \text{Im}(B), \text{ iar cum din ipoteză } \text{ker}(A) = \text{Im}(BAB) \Rightarrow$$

$$\text{ker}(A) = \text{Im}(B) \Rightarrow BABA = BO = O.$$

Cazul $n \geq 3$:

Avem contraexemplul:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

care poate fi extins prin zerouri pentru $n > 3$.

Enunț: Să se arate că

$$S = \left\{ A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}, a + 2b = c \right\} \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Soluție:

$$\alpha A(a, b, c) + \beta A(a' b' c') = A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c')$$

$$\alpha a + \beta a' + 2\alpha b + 2\beta b' = \alpha(a + 2b) + \beta(a' + 2b') = \alpha c + \beta c'$$

$\alpha A(a, b, c) + \beta A(a', b', c') \in S \Rightarrow S$ este subspațiu vectorial în $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$.

Observație: $S = \text{span}(A(1, 0, 1)) + \text{span}(A(0, 1, 2))$.

Enunț: Fie $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, -2, -1), v_3 = (2, 3, \alpha) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$. Studiați independența liniară a vectorilor.

Soluție:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha - 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix}$$

(i) $\alpha \in \mathbb{R}/\{5\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow$ sistemul este liniar independent.

(ii) $\alpha = 5 \Rightarrow$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{7}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2.$$

Enunț: Studiați liniar independența vectorilor $v_1 = 1, v_2 = i$ în spațiile vectoriale \mathbb{C}/\mathbb{R} și \mathbb{C}/\mathbb{C} .

Rezolvare:

Cazul \mathbb{C}/\mathbb{R} :

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0 \iff \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sunt liniari independenți.}$$

Cazul \mathbb{C}/\mathbb{C} :

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0 \Leftarrow \alpha_1 = -i, \alpha_2 = -1 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sunt liniari dependenți.}$$

Enunț: Se consideră mulțimile $B_1 = \{1 + X, X + X^2, X^2 + 1\}$ și $B_2 = \{1, X - 1, X^2 - 1\}$ din spațiul $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$.

(a) Să se arate că B_1 și B_2 sunt baze în spațiul dat.

(b) $T_{B_c B_1}, T_{B_1 B_c}, T_{B_c B_2}, T_{B_2 B_c}, T_{B_1 B_2} = ?$

(c) Care sunt coordonatele vectorului $f = 1 + X + X^2$ în bazele B_1 și B_2 ?

Rezolvare:

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = 2 \neq 0, \det(A_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{rang}(A_1) = \text{rang}(A_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow B_1, B_2$ sunt mulțimi liniar independente care de asemenea formează
 sisteme de generatori în spațiul dat $\Rightarrow B_1, B_2$ baze în $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$

(b)

$$\begin{aligned}
 T_{B_c B_1} &= A_1, T_{B_c B_2} = A_2 \\
 T_{B_1 B_c} &= T_{B_c B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 T_{B_2 B_c} &= T_{B_c B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 T_{B_1 B_2} &= T_{B_1 B_c} T_{B_c B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 f_{B_1} &= T_{B_c B_1} f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\
 f_{B_2} &= T_{B_c B_2} f = (3, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Enunț: Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, x + y, y)$.

(a) Să se arate că f este o aplicație liniară.

(b) Să se determine matricea aplicației liniare în raport cu bazele canonice.

(c) Să se determine matricea aplicației liniare în raport cu bazele $B_1 = \{(1, 1), (1, 0)\}, B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Rezolvare:

(a)

$$\alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

(b)

$$f(1, 0) = (1, 1, 0), f(0, 1) = (0, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$f(1, 1) = (1, 2, 1) = (1, 1, 1) + (1, 1, 0) + (1, 0, 0)$$

$$f(1, 0) = (1, 1, 0) = 0(1, 1, 1) + (1, 1, 0) + 0(1, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enunț: Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(1, 1) = (1, 3)$, $f(1, 2) = (2, 5)$. Să se determine expresia ei analitică și apoi matricea relativă la baza canonică respectiv la baza $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$

Rezolvare:

$$f(x, y) = (2x - y)f(1, 1) + (-x + y)f(1, 2) = (y, x + 2y)$$

$$f(1, 0) = (0, 1), f(0, 1) = (1, 2) \Rightarrow \mathcal{M}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 1) = (1, 3) = -(1, 1) + 2(1, 2), f(1, 2) = (2, 5) = -(1, 1) + 3(1, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Enunț: Fie operatorii $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiți prin $f(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 4y + z, -2x - 4y - z)$, $g(x, y, z) = (4x + 9y, -2y + 8z, 7z)$.

(a) Să se determine polinoamele caracteristice ale lui f și g .

(b) Să se determine subspațiile proprii și valorile proprii ale lui f și g .

(c) Să se studieze posibilitatea diagonalizării operatorilor dați.

(d) Să se determine $\circ^m f, m \in \mathbb{N}^*$.

(e) Să se calculeze $A_g^m, m \in \mathbb{N}^*$, unde A_g este matricea operatorului g în baza canonică.

Rezolvare: (a) Determinăm mai întâi matricele A_f și A_g relative la baza canonică din \mathbb{R}^3 .

$$f(1, 0, 0) = (3, 1, -2), f(0, 1, 0) = (2, 4, -4), f(0, 0, 1) = (2, 1, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(1, 0, 0) = (4, 0, 0), f(0, 1, 0) = (9, -2, 0), f(0, 0, 1) = (0, 0, 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_g = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Fie vectorul nenul $v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Pentru A_g avem:

$$I_3 v = (1, 0, 0) \quad A_f v = (3, 1, -2) \quad A_f^2 v = (7, 5, -8) \quad A_f^3 v = (15, 19, -26)$$

Cum vectorii $I_3 v, A_f v, A_f^2 v, A_f^3 v$ sunt în număr de 4, iar $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, rezultă că aceștia sunt liniar dependenți. Efectuând operații elementare pe matricea obținută prin concatenarea lor, obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & -2 & -8 & -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Într-adevăr, $(15, 19, -26) = 6(1, 0, 0) - 11(3, 1, -2) + 6(0, -2, -8)$. Prin urmare:

$$A_f^3 v = 6I_3 v - 11A_f v + 6A_f^2 v \iff A_f^3 v - 6A_f^2 v + 11A_f v - 6I_3 v = \theta$$

$$\iff (A_f^3 - 6A_f^2 + 11A_f - 6I_3)v = \theta \Rightarrow A_f^3 - 6A_f^2 + 11A_f - 6I_3 = O_3.$$

Fie polinomul $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Având în vedere faptul că p este un polinom monic de grad 3 care anulează o matrice de 3×3 , rezultă că p este polinomul caracteristic al matricei A_f , iar valorile proprii ale lui f sunt întocmai rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. În cazul operatorului g , valorile sale proprii sunt, în mod evident, $\lambda_4 = 4, \lambda_5 = -2, \lambda_7 = 7$.

(b)

Rezolvăm sistemele $A_f v = \lambda v, v \in V$ pe rând, pentru λ_1, λ_2 , respectiv λ_3 . Avem soluțiile:

$$S_1 = \text{span}\{(1, 0, -1)\} \quad S_2 = \text{span}\{(-2, 1, 0)\} \quad S_3 = \text{span}\{(0, -1, 1)\}$$

Analog pentru g :

$$S_4 = \text{span}\{(1, 0, 0)\} \quad S_2 = \text{span}\{(24, 8, 9)\} \quad S_3 = \text{span}\{(3, -2, 0)\}$$

(c) Multiplicitatea fiecărei valori este egală cu dimensiunea fiecărui subspațiu asociat, prin urmare, ambii operatori sunt diagonalizabili.

Enunț: Să se determine valorile proprii și câte o bază în subspațiile proprii ale operatorului $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Avem sistemul $Av = \lambda v$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = \lambda x \\ 2x + y + 3z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda)x - 2y + z = 0 \\ 2x + (1 - \lambda)y + 3z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Matricea sistemului este:

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & -1 - \lambda & -1 - 2\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$