Logică Digitală

LazR ('3')

7 Martie, 2024

Cuprins

Capitolul 1:Algebra Booleana

1.1 Axiomele algebrei booleene

Algebra booleeană este definită asupra unei mulțimi de elemente B cu 2 operatori binari, $+$ și $\cdot$, care satisfac 6 axiome.

Proprietatea închiderii

(i) B este închisă cu privire la operatorul $+$;
(ii) B este închisă cu privire la operatorul $\cdot$.

Element neutru

(i) $\forall a \in B! \exists 0 \ni a + 0 = a$;
(ii) $\forall a \in B! \exists 1 \ni a \cdot 1 = a$.

Comutativitate

(i) $\forall a, b \in B a + b = b + a$;
(ii) $\forall a, b \in B a \cdot b = b \cdot a$.

Distributivitate

(i) $\forall a, b, c \in B a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
(ii) $\forall a, b, c \in B a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Complementul

(i) $\forall x \in B \exists x' \in B \ni x + x' = 1$;
(ii) $\forall x \in B \exists x' \in B \ni x \cdot x' = 0$.

Mulțimea B conține cel puțin două elemente distincte

$$\exists x, y \in B, x \neq y.$$

Elementele mulțimii B sunt 0 și 1. Operatorii algebrei booleene sunt ***sau-logic*** și ***și-logic***.

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operatorii booleeni se aplică în ***ordinea*** următoare: paranteze, NOT, AND, OR.

Observație

(i) Axiomele algebrei booleene sunt prezentate în perechi, fiecare pereche fiind ***duală*** celeilalte;
(ii) O axiomă se poate obține din duala sa, modificând "+" în "-" și "1" în 0.

1.2 Teoremele algebrei booleene

Idempotența

(i) $x + x = x$;
(ii) $x \cdot x = x$.

Demonstrație:
(i) $x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x) \cdot (x + x') = x + (x \cdot x') = x + 0 = x$.
(ii) $x \cdot x = (x \cdot x) + 0 = (x \cdot x) + (x \cdot x') = x \cdot (x + x') = x \cdot 1 = x$.

$\square$

Element absorbant

(i) $x + 1 = 1$;
(ii) $c \cdot 0 = 0$.

Demonstrație:
(i) $x + 1 = x + x + x' = x + x' = 1$.
(ii) $x \cdot 0 = x \cdot x \cdot x' = x \cdot x' = 0$.

□

Absorbție

(i) $y \cdot x + x = x$;
(ii) $(y + x) \cdot x = x$.

Demonstrație:
(i) $y \cdot x + x = y \cdot x + x \cdot 1 = x \cdot (y + 1) = x \cdot 1 = x$.
(ii) $(y + x) \cdot x = (y + x) \cdot (x + 0) = x + (y \cdot 0) = x + 0 = x$.

□

Involuție

(x')' = x.

Demonstrație:

$$(x')' + x' = 0 \Rightarrow (x')' = x.$$

□