Note Curs Analiză Matematică

LazR

4 Noiembrie, 2023

Teoria mulțimilor

O mulțime este un obiect *atomic* în matematică și nu are o definiție propriu-zisă.
În sistemul axiomatic Zermelo-Fraenkel, orice mulțime satisface următoarele axiome:

Axioma extensionalității

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \iff z \in y) \Rightarrow x = y]$$

Axioma fundației

$$\forall x [x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y (y \in x \land x \cap y = \emptyset)]$$

Axioma specificației:

$$\forall z \forall w_k \exists y \forall x [x \in y \iff ((x \in z) \land \phi(x, w_k, z))] k = [1...n]$$

Axioma perechilor

$$\forall x \forall y \exists z ((x \in z) \land (y \in z))$$

Axioma reuniunii

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x [(x \in Y \land Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A]$$

Axioma schemei de înlocuire

$$\forall A \forall w_k [\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y \phi) \Rightarrow \exists B \forall x (x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \land \phi)))]$$

Axioma mulțimii infinite

$$\exists X [\exists e (\forall z (e \notin z) \land e \in X) \land \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X)]$$

Axioma mulțimii submulțimilor

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$$

Axioma alegerii

$$\forall x \in A \exists y \in B[R(x,y)] \Rightarrow \exists f[f : A \to B \wedge \forall x \in A(R(x, fx))]$$

Spații topologice

Fie o mulțime X oarecare și $\mathcal{P}(X)$ mulțimea submulțimilor sale.
Definițe: O clasă $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește topologie pe mulțimea X dacă satisface următoarele axiome:

$$\text{(D1) } \emptyset, X \in \mathcal{T}$$

(D2) dacă $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ este o familie arbitrară de mulțimi din $\mathcal{T}$ atunci $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$
(D3) dacă $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ este o familie finită de mulțimi din $\mathcal{T}$ atunci $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$
Definiție: Un spațiu topologic ese o structură algebrică $(X, \mathcal{T})$, alcătuită dintr-o mulțime oarecare X și o topologie asociată $\mathcal{T}$.
X se numește suportul spațiului topologic, iar elementele din $\mathcal{T}$ se numesc mulțimi deschise.
Definiție: Fie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ două topologii pe X. Se spune că $\mathcal{T}_2$ este mai fină decât topologia $\mathcal{T}_1$ sau $\mathcal{T}_1$ este mai slabă decât $\mathcal{T}_2$ dacă $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
Exemple:
i) $(X, \mathcal{T}), \mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ - topologia discretă; cea mai fină topologie pe X
ii) $(X, \mathcal{T}_0), \mathcal{T}_0 = \{X, \emptyset\}$ - topologia grosieră; cea mai slabă topologie pe X
iii) $(X, \mathcal{T}_C), \mathcal{T}_C = \{\emptyset\} \cup \{G \subset X : CG \text{ este finită}\}$ - topologia cofinită (sau topologia lui Zariski)
iv) $(Y, \mathcal{T}_Y), \mathcal{T}_Y = \{G \cap Y : G \in \mathcal{T}\}, Y \subset X$ - topologia indusă pe Y de $\mathcal{T}$
v) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}), \mathcal{T} = \{G : \forall x \in G, \exists(\alpha, \beta), x \in (\alpha, \beta) \subset G\}$ - topologia naturală a axei reale
Definiție: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic. O mulțime închisă este o mulțime $F \subset X$ a cărei complementară CF este deschisă.
Remarcă: Fie $\mathcal{F}$ familia tuturor mulțimilor închise din spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$. $\mathcal{F}$ verifică următoarele proprietăți:

$$\text{(F1) } \emptyset, X \in \mathcal{F}$$

(D2) dacă $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ este o familie arbitrară de mulțimi din $\mathcal{F}$ atunci $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$
(D3) dacă $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ este o familie finită de mulțimi din $\mathcal{F}$ atunci $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$

Vecinătăți

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $x \in X$.

Definiție: O submulțime $V \subset X$ se numește vecinătate a punctului $x \in X$ dacă există o mulțime deschisă $G \in \mathcal{T}$ astfel încât $x \in G \subset V$.
Familia tuturor vecinătăților lui $x \in X$ se numește sistemul de vecinătăți ale lui x, notat $\mathcal{V}_x$.
Teoremă:

$$(V1) V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in V$$

$$(V2) V \in \mathcal{V}_x \wedge V \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x$$

$$(V3) V_i \in \mathcal{V}_x, i = [1...n] \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_x$$

$$(V4) V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x \ni \forall y \in W, V \in \mathcal{W}_y$$

Demonstrație: (V1) și (V2) rezultă din definiția unei vecinătăți. (V3) rezultă din (D3), iar (V4) este imediată, deoarece W poate fi chiar mulțimea deschisă G din definiția vecinătății.
Teoremă: Dacă X este o mulțime oarecare și pentru orice element $x \in X$ se dă o familie $\mathcal{V}_x$ de submulțimi ale lui X cu proprietățile (V1)-(V4), atunci există pe X o topologie unică $\mathcal{T}$ pentru care $\mathcal{V}_x$ să fie sistemul vecinătăților lui x.
Demonstrație:

$$G \in \mathcal{T} \iff \forall x \in G \Rightarrow G \in \mathcal{V}_x.$$

Definiție: O bază (sau sistem fundamental) de vecinătăți ale unui punct $x \in X$ este o subfamilie $\mathcal{W}_x$ a familiei $\mathcal{V}_x$ pentru care orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x$ există $W \in \mathcal{W}_x$ astfel încât $W \subset V$.
Exemplu: Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ topologia naturală a axei reale și $\{\mathcal{W}_{x_0}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{W}_{x_0}^{(n)} = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right), x_0 \in \mathbb{R}$. $\mathcal{W}_{x_0}^{(n)}$ reprezintă o bază de vecinătăți pentru punctul x_0, deoarece în orice mulțime $G \subset \mathbb{R}$ este inclus un astfel de interval simetric.

Puncte și mulțimi în spații topologice

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subset X$.
Definiție: Un punct interior mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V \subset A$.
Mulțimea punctelor interioare se notează $Int(A)$.

Prin urmare,

$$Int(A) = \bigcup_{G \subset A; G \in \mathcal{T}} G.$$

Definiție: Un punct exterior mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V \subset CA$.
Mulțimea punctelor exterioare se notează $Ext(A)$.
Definiție: Un punct de frontieră al mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ conține simultan puncte din A și din CA.
Mulțimea punctelor de frontieră se notează $Fr(A)$.
Definiție: Un punct de acumulare al mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ conține cel puțin un punct al mulțimii A diferit de x_0.
Mulțimea punctelor de acumulare se notează $A^{'}$.
Definiție: Un punct izolat al mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ în care singurul punct al mulțimii A este x_0.
Mulțimea punctelor izolate se notează $Iz(A)$.
Definiție: Un punct aderent al mulțimii A este un punct $x_0 \in X$ pentru care orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ conține cel puțin un punct al mulțimii A.
Mulțimea punctelor aderente se notează $\overline{A}$ și se numește închiderea mulțimii.
Definiție: O mulțime densă în spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$ este o mulțime $A \subset X$ care verifică $\overline{A} = X$.
Prin urmare,

$$\overline{A} = A \cup A^{'} = \bigcap_{A \subset F, F \in \mathcal{F}} F = Int(A) \cup Fr(A).$$

Spații metrice

Definiție: O metrică pe mulțimea X este orice funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele axiome:

$$\text{Axioma identității: } d(x,y) = 0 \iff x = y \; \forall x, y \in X$$
$$\text{Axioma de simetrie: } d(x,y) = d(y,x) \; \forall x, y \in X$$
$$\text{Axioma triunghiului: } d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \; \forall x, y, z \in X$$

Consecință: Dacă în axioma triunghiului se înlocuiește z cu x se obține:

$$d(x,y) \geq 0 \; \forall x, y \in X$$

Consecință: Pentru oricare $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ are loc inegalitatea generalizată a triunghiului:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$$

Consecință: Urmatoarea relație se numește inegalitatea patrulaterului, sau proprietatea de continuitate a metricii:

$$|d(x,u) - d(y,v)| \leq d(x,y) + d(u,v) \; \forall x, y, z, w \in X$$

Demonstrație:
Fie $x, y, u, v \in X$. Avem:

$$d(x,u) \leq d(x,y) + d(y,v) + d(v,u)$$
$$d(y,v) \leq d(y,x) + d(x,u) + d(u,v)$$

Prin urmare:

$$d(x,u) - d(y,v) \leq d(x,y) + d(v,u)$$
$$d(y,v) - d(x,u) \leq d(y,x) + d(u,v)$$

Așadar:

$$|d(x,u) - d(y,v)| \leq d(x,y) + d(u,v) \; \forall x, y, u, v \in X$$

Definiție: Un spațiu metric este o structură algebrică alcatuită dintr-o mulțime X pe care s-a definit o metrică.
Definiție: Fie (X, d) un spațiu metric. Distanța de la un punct $x \in X$ la o multime $A \subset X$ este numărul:

$$d(x, A) = inf\{d(x, y)|y \in A\}$$

Definiție: Distanța dintre mulțimile $A, B \subset X$ este numărul:

$$d(A, B) = inf\{d(x, y)|x \in A, y \in B\}$$

Definiție: Diametrul unei mulțimi $A \subset X$ este numărul:

$$d(A) = sup\{d(x, y)|x, y \in A\}$$

Inegalități remarcabile într-un spațiu metric

Teoremă: (Inegalitatea lui Hölder) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru $p > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Demonstrație:
Considerăm funcția auxiliară:

$$\phi : (0, \infty] \to \mathbb{R}, \phi(x) = x^{\alpha} - \alpha x, \alpha \in (0, 1)$$

$$\phi^{'}(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \Rightarrow x = 1 \text{ este punct de maxim} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\alpha} \leq \alpha x + 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}\frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|b_k|^q}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|}{(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teoremă: (Inegalitatea Cauchy-Buniakovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right)$$

Demonstrație:
Este un caz particular al inegalității lui Hölder pentru $p = q = 2$.
Teoremă: (Inegalitatea lui Minkovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pentru $p \geq 1$.
Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1} |b_k|$$

Conform inegalității lui Hölder:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1} |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

deoarece $q(p-1) = p$.
Prin urmare:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1...n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni cu același semn. Atunci:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Demonstrație:
Vom folosi inducția matematică.

$$(1): 1+a_1 \geq 1+a_1$$
$$(n): \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$(n+1): \prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1}a_k.$$

Teoremă: (Inegalitatea lui Bernoulli) Fie $a > -1, n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Demonstrație:
Este un caz particular al lemei anterioare pentru $a_k = a, k = [1...n]$.
Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1...n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni pozitivi reali. Dacă $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$$

Demonstrație:
Vom folosi inducția matematică.

$$(1) : a_1 \geq 1$$

$$(n) : \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$$

$$(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1} \geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1}a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1}(1-a_1) - (1-a_1) + 1 \geq n + 1 + (a_{n+1}-1)(1-a_1) \geq n+1.$$

Teoremă: (Inegalitatea mediilor) Fie șirurile A_n, G_n, H_n definite în felul următor:

$$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

$$G_n = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

$$H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

pentru $n \in \mathbb{N}$ și $a_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci:

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

Demonstrație:
$A_n \geq G_n$ rezultă din lema anterioară, pentru $a_k = \frac{a_k}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k}}$, iar din această inegalitate se obține mai departe $G_n \geq H_n$, înlocuind a_k cu $\frac{1}{a_k}$.

Exemple de spații metrice

1. (Metrica discretă) $d : X \times X \to \mathbb{R}, d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

2. (Distanța euclidiană) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|$

Vom nota $(\mathbb{R}, |.|)$ spațiul numerelor reale cu metrica modul.

$$3.\ d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Vom nota $(\mathbb{C}, |.|)$ spațiul numerelor complexe cu metrica modul.

$$4.\ d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$5.\ \text{(Metrica lui Cebîșev) } d_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_c(x, y) = max_{1 \le i \le n}|x_i - y_i|$$

$$6.\ d_o : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_o(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$7.\ \text{(Distanța Hamming) } d : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}, d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) mod 2$$

Topologizarea spațiilor metrice

Definiție: Sfera deschisă cu centrul în punctul $x_0 \in X$ și de rază $r > 0$ este mulțimea:

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definiție: Sfera închisă cu centrul în punctul $x_0 \in X$ și de rază $r > 0$ este mulțimea:

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \le r\}.$$

Teoremă: Fie $\mathcal{T}_d = \{G \subset X : \forall x \in G, \exists r > 0, S(x, r) \subset G\} \cup \emptyset$ (topologia indusă metricii d). Orice spațiu metric (X, d) este un spațiu topologic $(X, \mathcal{T}_d)$.
Demonstrație:
Fie $G_1 = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha, \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}, G_\alpha \in \mathcal{T}_d$ și $G_2 = \bigcap_{i=1}^{n} G_i, \{G_i\}_{1 \le i \le n}, G_i \in \mathcal{T}_d$.

$$\text{(D1) } \forall x \in X \forall r > 0 [S(x, r) \subset X] \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}_d$$

$$\text{(D2) } \forall x \in G_1 [\exists \alpha_0 \ni \exists S(x_0, r) \subset G_{\alpha_0} \subset G] \Rightarrow G \in \mathcal{T}_d$$

$$(\text{D3})\ \forall x \in G_2[\exists n \ni \exists S(x,r) = \bigcap_{i=1}^{n} S_i(x_i, r_i) \subset G] \Rightarrow G \in \mathcal{T}_d.$$

Teoremă: (Teorema de separare a lui Hausdorff) Într-un spațiu metric (X,d) pentru orice $x, y \in X, x \neq y$ există $r_1, r_2 > 0$ astfel încât:

$$S(x, r_1) \cap S(y, r_2) = \emptyset.$$

Demonstrație: Se aleg $r_1, r_2 \ni r_1 + r_2 \leq r \Rightarrow S(x,r_1) \cap S(y,r_2) = \emptyset$.
Definiție: Metricile echivalente sunt seturile de metrici care generează aceeași topologie.
Definiție: O mulțime mărginită este o mulțime $A \subset X$ pentru care există o sferă închisă care să o conțină pe A.
Definiție: O mulțime conexă este o mulțime $A \subset X$ pentru care nu există două mulțimi deschise nevide $G_1, G_2 \ni A \subset G_1 \cup G_2 \wedge G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
O mulțime deschisă și conexă se numește domeniu.
Definiție: O mulțime compactă este o mulțime $K \subset X$ pentru care oricare ar fi familia $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha, \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}, G_\alpha \in \mathcal{T}_d$ astfel încât $A \subseteq G$, exisă $\alpha_k \in I \ni A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}, k = [1...n]$ (din oricare acoperire deschisă a sa se poate extrage o acoperire finită).
Teoremă: (Weierstrass-Bolzano) Orice mulțime mărignită și infinită din spațiul $(\mathbb{R}^p, d_e)$, sau $(\mathbb{R}^p, d_c)$, unde $p \geq 1$, are cel puțin un punct de acumulare.
Demonstrație: Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime infinită și mărginită.

$$A \subset [a,b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \in A' \Leftarrow [a_m, b_m] \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), \epsilon > 0.$$

Spații vectoriale normate

Fie $(X, \mathbb{K})$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}, \mathbb{K} = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Definiție: O normă pe X este o funcție $||.|| : X \times X \to \mathbb{R}, x \to ||x||$, care îndeplinește următoarele axiome:

$$\text{(N1) } ||x|| = 0 \iff x = 0$$
$$\text{(N2 - omogenitate) } ||\lambda x|| = |\lambda|||x||$$
$$\text{(N3 - subaditivitate) } ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$
$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Consecință:

$$||x|| \geq 0 \Leftarrow 0 = ||0x|| = ||x + (-x)|| \leq 2||x||$$

Consecință:

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \Leftarrow ||x|| \leq ||x - y|| + ||y|| \wedge ||y|| \leq ||y - x|| + ||x|| = ||x - y|| + ||x||$$

Exemple:

$$1.\ ||.||_e : R^n \to R, ||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
$$2.\ ||.||_c : R^n \to R, ||x||_c = max_{1 \leq i \leq n}|x_i|$$
$$3.\ ||.||_0 : R^n \to R, ||x||_0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Topologia unui spațiu normat

Teoremă: Orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric în care metrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ este definită în felul următor:

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Demonstrație: Axiomele metricii sunt ușor verificate prin axiomele normei.

Definiție: Topologia unui spațiu vectorial normat $(X, \mathbb{K}, ||.||)$, înzestrat cu metrica definită mai sus, este topologia indusă de metrica spațiului.
Definiție: Fie $||.||_1$ și $||.||_2$ două norme pe același spațiu vectorial X. Cele două norme sunt echivalente dacă oricare ar fi $x \in X$, există constantele $c_1, c_2 > 0$ astfel încât $c_1||x_1|| \leq ||x||_2 \leq c_2||x_1||$.

Șiruri de numere reale

Fie (X, d) un spațiu metric arbitrar.
Definiție: Un șir de puncte, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, în spațiul metric (X, d) este orice funcție $f : \mathbb{N} \to X$.
Definiție: Un subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ este restricția șirului la o submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cu $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$.