# ÎNTREBĂRI CU RĂSPUNSURI MULTIPLE

**1**. Vectorul de poziţie al unui punct material este: $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Alegeţi propoziţiile adevărate:

*a)* $r_z = 5$; *b)* $\vec{r}_z = 5$; *c)* $|\vec{r}| = 7{,}07$; *d)* $|\vec{r}| = 4{,}24$; *e)* $\vec{r}_x = 3\vec{i}$; *f)* $r_y = 4$.

***R** : a, c, e.*

**2.** Legile parametrice ale mişcării unui punct material sunt: $x(t)$ = 7sin 3 $t$ (m) şi $y(t)$ = 5 cos 3 $t$ (m).

Traiectoria mişcării este:

*a)* o elipsă de semiaxe $A$ = 7 m şi $B$ = 5 m;

*b)* un cerc de rază $R$ = 9,43 m;

*c)* pe axa $Ox$, proiecţia punctului se deplasează între punctele de coordonate $x_1$ = 7 m *şi* $x_2$ = - 7 m;

*d)* pe axa $Oy$, proiecţia punctului se deplasează între punctele $y_1$ = 5 m şi $y_2$ = - 5 m;

*e)* o dreaptă, $y = 8 + 3x$;

*f)* un arc de hiperbolă, $x \cdot y = 40$.

**R** : *a, c, d.*

**3.** Dacă mişcarea unidimensională unui punct material este descrisă de: $x = -2t^2 + 3t + 6$, (m), atunci :

*a)* traiectoria este o parabolă având coordonatele vârfului : $t_m$=3/4s şi $x_m$=7,13m;
*b)* $a$=-4 m/s$^2$=const.; *c)* $v_0$=3 m/s;
*d)* $a$=4 m/s$^2$=const. ; *e)* $v_0$=6 m/s; *f)* $x_0$=6 m.
**R** : *a, b, c, e, f.*

**4.** Mişcarea unui punct material este descrisă de ecuaţiile: $x(t)$ = 3 sin 2 $t$ (m) şi $y(t)$ = 3 cos 2 $t$ (m). Unghiul dintre vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{a}$, la orice moment, este :

*a)* 360 grd; *b)* π/2; *c)* π; *d)* 180 grd; *e)* zero;

*f)* variabil.

## . PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se studieze mişcarea unui punct material de masă *m* în lungul axei *Ox*, dacă asupra lui acţionează o forţă care se opune mişcării şi a cărei mărime este proporţională cu pătratul vitezei momentane. Se cunosc condiţiile iniţiale: $x(t_0)=x_0$; $\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$.

*Rezolvare:*

Ecuaţia de mişcare: $m\ddot{x}=-k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2}=-\frac{k}{m}dt.$

Dacă integrăm după timp obţinem: $-\frac{1}{\dot{x}}=-\frac{k}{m}(t-t_0)+C$;

Din condiţiile iniţiale: $\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$.rezultă $C=-\frac{1}{\dot{x}_0}$.

Asfel, dependenţa vitezei de timp este: $\dot{x}(t)=\frac{\dot{x}_0}{1+\frac{k\dot{x}_0}{m}(t-t_0)}$.

Integrând încă o dată după timp, se determină legea de mişcare:

$$x(t)=x_0+\frac{m}{k}\ln\left[1+\frac{k\dot{x}_0}{m}(t-t_0)\right].$$

Observaţie: $\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=0$; $\lim_{t\to\infty}x(t)=\infty$.

2Un corp cu masa $m$ = 0,5 kg, se mişcă în planul orizontal *xOy* astfel încât vectorul său de poziţie este :

$\vec{r}$ = 2 cos ω*t* · $\vec{i}$ + 2 sin ω*t* · $\vec{j}$ (m), cu ω>0, const.

Se cere:

*1)* să se precizeze pe ce traiectorie se va deplasa particula;

*2)* să se determine viteza particulei la u moment oarecare *t*;

*3)* să se arate că forţa care acţionează asupra particulei este tot timpul orientată către originea sistemului de coordonate;

*4)* să se calculeze acceleraţia tangenţială şi acceleraţia normală într-un punct oarecare de pe traiectorie.

*Rezolvare:*

*1)* $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$; $x = 2\cos\omega t$; $y = 2\sin\omega t$;

$\cos^2\omega t = x^2/4$; $\sin^2\omega t = y^2/4$;

$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$, rezultă $x^2 + y^2 = 4$, traiectoria este un cerc de rază $r = 2$ (m).

*2)* $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -2\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + 2\omega \cos \omega t \cdot \vec{j}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4\omega^2 \sin^2 \omega t + 4\omega^2 \cos^2 \omega t} = 2\omega \ (m/s).$$

*3)* $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -2\omega^2 \cos\omega t \cdot \vec{i} - 2\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{j} = -\omega^2 \vec{r} \ (m/s^2)$, acceleraţia este paralelă şi opusă vectorului de poziţie.

$\vec{F} = m\vec{a} = -\dfrac{\omega^2}{2}\vec{r}$, forţa este centripetă.

*4)* $|\vec{a}_n| = \dfrac{|\vec{v}^2|}{r} = \dfrac{4\omega^2}{2} = 2\omega^2$; $|\vec{a}| = \sqrt{4\omega^4(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = 2\omega^2$; $|\vec{a}_t| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_n|} = 0$.

3. Corpul cu masa $m$ = 0,50 kg este lansat din originea axelor în câmpul gravitaţional sub unghiul $\alpha_0 = 45^\circ$, cu viteza $v_0$ = 15 m/s, ($t_0$ = 0).

Se cere:

*1)* ecuaţia mişcării $\vec{r} = f(t)$;

*2)* legile parametrice ale mişcării, $x = f(t)$, $y = f(t)$ şi ecuaţia traiectoriei, $f(x,y,z) = 0$;

*Rezolvare:*

**1)** Cum scriem legea a doua a dinamicii în caz?

$$m\vec{g} = m(d^2\vec{r}/dt^2) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{g} \cdot dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g} \cdot t + \vec{C}_1$$

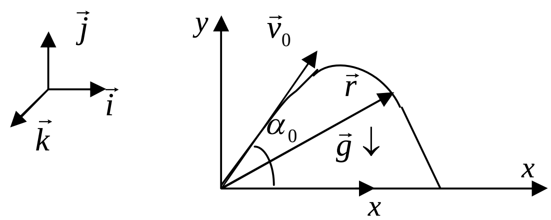
$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=t_0} = \vec{v}_0 = \vec{C}_1; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

$$d\vec{r} = \vec{g}\,t\ dt + \vec{v}_0\ dt$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \vec{C}_2$$

$$\vec{r}(t_0 = 0) = 0 = \vec{C}_2$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$




Traiectoria mişcării punctului.

) şi obţinem: $\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$

Eliminăm timpul din legile parametrice şi obţinem traiectoria:

$y = x \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{g\, x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$ adică, o parabolă

## PROBLEME PROPUSE

**1.** La momentul $t = t_0 = 6{,}1$ s viteza unui mobil este $v = v_0 = 8{,}3$ m/s. Ştiind că între viteză şi spaţiul parcurs până la atingerea vitezei există o dependenţă hiperbolică, se cere să se deducă expresiile dependenţelor $a = f(t)$, $v = f(t)$, $s = f(t)$ şi $v = f(s)$.

*Indicaţie:* $v \cdot t = v_0 \cdot t_0 = Const. = C = 50{,}6$ m;

***R:*** $v = 50{,}6/t$ ; $a = -50{,}6/t^2$ ; $ds = v{\cdot}dt = Cdt/t$; $s = C{\cdot}\ln(t/t_0)$ ;
$s = 50{,}6 \cdot \ln(t/6{,}1)$;
$v = v_0 e^{-s/C}$; $t/t_0 = e^{s/C} = v_0/v$; $v = v_0 e^{-s/C}$; $v = 5{,}4\ \exp(-0{,}04s)$.

**2.** De la suprafaţa Pământului la $t_0 = 0$ este lansat pe verticală în sus un corp cu $v_0 = 20 m/s$. Corpul se întoarce şi după fiecare lovire a pardoselii viteza sa este fracţiunea $f = 0{,}9$ din viteza de cădere. Să se calculeze lungimea drumului parcurs de corp până la oprire.

*Indicaţie:* $h_0 = \dfrac{v_0^2}{g}$; $h_1 = f^2 \dfrac{v_0^2}{g}$; $h_2 = f^4 \dfrac{v_0^2}{g}$;

$$h = \frac{v_0^2}{g}\left(1 + f^2 + f^4 + \ldots\right) = \frac{v_0^2}{g}\frac{1}{1 - f^2}$$

***R:*** $h = 214{,}7m.$

**3.** La momentul iniţial $t_0 = 0$, din originea axei $Ox$ pleacă un corp de masă $m = 1{,}5$ kg cu viteza $v_0 = 4{,}5$ m/s. Mediul se opune mişcării cu o forţă proporţională cu pătratul vitezei. Rezistenţa mecanică a mediului este $r = 0{,}03$ Ns$^2$/m$^2$. Să se deducă dependenţele $a = f(t)$, $v = f(t)$, $x = f(t)$ şi să se calculeze valorile mărimilor $a$, $v$ şi $x$ la momentul $t = 5{,}3$ s.

*Indicaţie:* $rv^2 = -m\, dv/dt;\ dv/v^2 = -\dfrac{r}{m} \cdot dt$

***R:*** $v = \dfrac{mv_0}{m + rv_0 t}$; $a = -\dfrac{mrv_0^2}{\left(m + rv_0 t\right)^2}$;

$$x = \frac{m}{r} \cdot \ln\left(\frac{m + rv_0 t}{m}\right)$$

$v = 3{,}05$ m/s; $a = -0{,}18$ m/s$^2$; $x = 19{,}50$ m.