Analiză Matematică - SETUL 2 - Serii numerice

1. Folosind definiţia convergenţei, să se studieze natura următoarelor serii şi în caz de convergenţă să li se calculeze suma:

$i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$;

$ii)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

$iii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$;

$iv)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n^2+4n}\right)$;

$v)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$;

$vi)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{a}{3^n}\right), a \in \mathbb{R}$;

$vii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+(n-1)!}$;

$viii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)\cdot \sin\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right)$;

$ix)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

$x)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$;

$xi)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$;

$xii)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$;

$xiii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

$xiv)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

2. Folosind criteriul general de convergenţă al lui Cauchy (pentru serii) să se studieze natura următoarelor serii:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}; \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}.$$

3. Folosind criteriul de divergenţă, să se arate că următoarele serii sunt divergente:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}; \quad ii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}.$$