Note Curs Algebră și Geometrie

LazR

26 Noiembrie, 2023

Spații Vectoriale

Definiție: Un spațiu vectorial este o structură algebrică $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$, alcătuită dintr-o mulțime nevidă V de obiecte numite vectori, și două operații, numite, prin convenție, adunarea a doi vectori și înmulțirea cu un scalar, unde scalarii sunt elemente dintr-o mulțime $\mathbb{K}$, înzestrată cu o operație de adunare a doi scalari și o operație de înmulțire a doi scalari, unde operațiile satisfac următoarele axiome:

Axiome de închidere

$$(SV1)\, v_1 + v_2 \in V\, \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(SV2)\, \alpha \cdot v \in V\, \forall v \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Axiomele adunării

$$(SV3)\, v_1 + v_2 = v_2 + v_1\, \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(SV4)\, v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3\, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

$$(SV5)\, \exists \theta \in V \ni v + \theta = v\, \forall v \in V$$

$$(SV6)\, \forall v \in V\, \exists (-v) \in V \ni v + (-v) = 0$$

Axiomele înmulțirii cu un scalar

$$(SV7)\, \alpha(\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v\, \forall v \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

$$(SV8)\, \exists 1 \in \mathbb{K} \ni 1 \cdot v = v\, \forall v \in V$$

Axiomele distributivității

$$(SV9)\, \alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2\, \forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(SV10)\, (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v\, \forall v \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Observație: De obicei, se va omite scrierea simbolului $\cdot$, prezența lui fiind, în majoritatea cazurilor, implicită.
Observație: Înmulțirea dintre doi scalari și înmulțirea dintre un vector și un scalar sunt două operații diferite.
Observație: Vectorul θ se numește element neutru al adunării a doi vectori, sau vectorul nul, iar scalarul 1 se numește element neutru al înmulțirii cu un scalar.

Observație: Vectorul $(-v)$ se numește opusul vectorului v. De obicei, în loc de $+(-v)$, se va utiliza notația $-v$.
Observație: Notația $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ va fi deseori prescurtată sub forma $V/\mathbb{K}$, sau doar V.
Teoremă: În orice spațiu vectorial, elementul neutru al adunării a doi vectori este unic.
Demonstrație: Presupunem că există doi vectori θ_1, θ_2 care satisfac axioma elementului neutru al adunării. Avem:

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre scalarul nul și orice vector este vectorul nul.
Demonstație:

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Rightarrow 0v = \theta.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre orice scalar și vectorul nul este scalarul nul.
Demonstație:

$$\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta \Rightarrow \alpha\theta = \theta.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, produsul dintre scalarul -1 și orice vector este opusul vectorului.
Demonstrație:

$$\theta = 0v = (1 - 1)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v \Rightarrow (-1)v = -v.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, opusul unui vector este unic.
Demonstrație: Presupunem că există doi vectori v_1, v_2 care satisfac axioma opusului unui vector. Avem:

$$v_1 + (v + v_2) = v_1 = (v_1 + v) + v_2 = v_2 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Teoremă: În orice spațiu vectorial, dacă produsul dintre un vector și un scalar este vectorul nul, atunci, fie scalarul este scalarul nul, fie vectorul este vectorul nul.
Demonstrație: Pentru cazul în care vectorul este nenul, scalarul este, în mod evident, scalarul nul. Reciproc

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \theta = (\alpha^{-1}\alpha)v = v \Rightarrow v = \theta.$$

Subspații vectoriale

Definiție: Un subspațiu vectorial al unui spațiu vectorial V este un spațiu vectorial al cărui mulțime de vectori este o submulțime a lui V, iar al cărui operații și mulțime de scalari sunt aceleași cu ale lui V.
Teoremă: Fie V un subspațiu vectorial, iar S o submulțime a mulțimii V. S este un subspațiu al lui V dacă și numai dacă îndeplinește axiomele închiderii.
Demonstrație: Dacă S este un subspațiu, atunci satisface toate axiomele unui spațiu vectorial, inclusiv axiomele închiderii. Reciproc, axiomele (SV3), (SV4), (SV7)-(SV10) sunt verificate pentru orice vector. Au mai rămas de verificat axiomele (SV5), (SV6):

$$(SV5)\ \text{Din (SV2)}\ \Rightarrow 0v \in S \Rightarrow \theta \in S \Rightarrow\ \text{(SV6) este verificată.}$$
$$(SV6)\ \text{Din (SV2)}\ \Rightarrow -v \in S \Rightarrow\ \text{(SV6) este verificată.}$$

Baze

Independența liniară

Definiție: O mulțime liniar dependentă de vectori este o mulțime într-un spațiu vectorial în care există o submulțime finită de elemente distincte, $v_k, k = [1...n]$ și un șir corespunzător de scalari, $\alpha_k, k = [1...n]$, nesimultan nuli, astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \theta.$$

Definiție: O mulțime liniar independentă de vectori este o mulțime într-un spațiu vectorial care nu este liniar dependentă.
Observație: Dacă $\theta \in S$, atunci S este liniar dependentă.
Definiție: Spanul unei mulțimi finite de vectori S, cu n elemente, reprezintă mulțimea tuturor vectorilor de forma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$, $\alpha \in \mathbb{K}, v_k \in S$. O astfel de sumă se numește combinație liniară, iar S se numește sistem de generatori.

Observație: Un sistem de generatori al cărui span este un spațiu vectorial, alcătuit din vectori liniar independenți ai unei submulțimi din acel spațiu este o submulțime maximală de vectori liniar independenți ai mulțimii (se demonstrează prin inducție). Această observație conduce la definiția ce urmează.
Definiție: O bază într-un spațiu vectorial V este un sistem de generatori liniar independeți, inclus în V, al cărui span este V.
Definiție: Coordonatele unui vector relativ la o bază sunt coeficienții combinației liniare a vectorilor bazei, a cărei rezultat este vectorul respectiv.
Teoremă: Orice bază într-un spațiu vectorial are același cardinal.
Demonstrație: Fie S și T două baze distincte într-un spațiu vectorial V. Cum S reprezintă o submulțime maximală de vectori liniar independenți din V, trebuie să avem $card(T) \leq card(S)$. Însă, reciproc, $card(S) \leq card(T)$. Prin urmare, $card(S) = card(T)$.
Definiție: Dimensiunea unui spațiu vectorial este cardinalul unei baze din spațiul respectiv. Cardinalul lui $V = \{\theta\}$ este, prin convenție, 0.

Spații euclidiene

Definiție: Un produs scalar al unui spațiu vectorial $V/\mathbb{K}$ este o lege de compozitie a doi vectori din spațiul respectiv, notată $\langle v_1, v_2\rangle, v_1, v_2 \in V$, care asociază oricărei perechi din V un scalar din $\mathbb{K}$ și care îndeplinește următoarele axiome, pentru orice $v_1, v_2, v_3 \in V$:

$$(PS1)\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$$
$$(PS2)\langle v_1, v_2 + v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_1, v_3\rangle$$
$$(PS3)\alpha\langle v_1, v_2\rangle = \langle \alpha v_1, v_2\rangle$$
$$(PS4)\langle v, v\rangle > 0, \text{ dacă } v \neq \theta$$

Definiție: Un spațiu euclidian este un spațiu vectorial cu produs scalar.
Definiție: O normă a unui spațiu vectorial $V/\mathbb{K}$ este o funcție, notată $||v||, v \in V$, care asociază oricărui vector din V un scalar din $\mathbb{K}$ și care îndeplinește următoarele axiome, pentru orice $v_1, v_2 \in V$ și $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$(N1)||v|| = 0 \iff v = \theta$$
$$(N2)||v|| > 0 \iff v \neq \theta$$
$$(N3)||\alpha v|| = |\alpha|||v||$$

$$(N4)||v_1 + v_2|| \leq ||v_1|| + ||v_2||$$

Observație: În cele ce urmează, vom utiliza norma $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
Definiție: Într-un spațiu euclidian V, unghiul dintre doi vectori $v_1, v_2 \in V$ este numărul $\phi \in [0, \pi]$ care satisface ecuația:

$$\cos(\phi) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1||||v_2||}$$

Teoremă: Într-un spațiu vectorial, orice produs scalar și orice normă verifică umrătoarea identitate, numită Identitatea lui Lagrange:

$$\langle v_1, v_2\rangle^2 + ||v_1 \times v_2||^2 = ||v_1||^2||v_2||^2$$

Teoremă: Într-un spațiu vectorial, orice produs scalar verifică umrătoarea inegalitate, numită Inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\langle v_1, v_2\rangle^2 \leq \langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle$$

Ortogonalitate

Definiție: Într-un spațiu euclidian V, doi vectori ortogonali sunt doi vectori ai căror produs scalar este scalarul nul. O submulțime $S \subset V$ de vectori ortogonali doi câte doi se numește mulțime ortogonală. Dacă în plus, norma tuturor vectorilor din S este unitară, atunci S se numește mulțime ortonormată.
Teoremă: Într-un spațiu euclidian, orice mulțime ortogonală de vectori nenuli este liniar independentă.
Demonstrație: Fie

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle v_k, v_i\rangle = \theta, i = [1...n] \Rightarrow$$

$$\alpha_i\langle v_i, v_i\rangle = \theta, v_i \neq \theta \Rightarrow \alpha_i = 0\, \forall i = [1...n] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ mulțimea vectorilor $v_k, k = [1...n]$ este liniar independentă.

Teoremă: Coordonatele relative la o bază ortogonală $\{e_1, ..., e_n\}$ ale unui vector v sunt date de formula:

$$\alpha_k = \frac{\langle v, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$$

Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = v \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle \Rightarrow \alpha_k = \frac{\langle v, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}.$$

Observație: În cazul unei baze ortonormate:

$$\alpha_k = \langle v, e_k \rangle.$$

Prin urmare, într-o bază ortonormată, un vector din spanul bazei se poate scrie în felul următor:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k.$$

Teoremă: Într-un spațiu vectorial finit-dimensional de dimensiune n, cu o bază ortonormată $\{e_1, ..., e_k\}$, are loc următoarea identitate pentru orice pereche de vectori $v_1, v_2 \in V$, cunoscută ca Identitatea lui Parseval:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v_1, e_k \rangle \langle v_2, e_k \rangle.$$

Demonstrație: Este o consecință a observației anterioare.
Observație: În caz particular, avem:

$$||v||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle^2.$$

Ecuația de mai sus este o generalizare a teoremei lui Pitagora.

Aplicații Liniare

Definiție: Fie $V/\mathbb{K}$ și $W/\mathbb{K}$ două spații vectoriale. O aplicație liniară de la V la W este o funcție $T : V \to W$ care verifică:

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \, \forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Observație: În cele ce urmează, vom nota mulțimea tuturor aplicațiilor liniare de la un spațiu arbitrar V la un alt spațiu arbitrar W cu $\mathcal{L}(V, W)$.

Kernel și Imagine

Definiție: Imaginea aplicației liniare T este mulțimea $T(V)$. $\text{Dim}(T(V))$ se numește rangul lui T.
Teoremă: $T(V)$ este un subspațiu pentru W, iar $T(\theta_v) = \theta_w$.
Demonstrație: Axiomele închiderii se verifică ușor cu definiția unei aplicații liniare, iar $T(\theta_v) = T(0\theta_v) = 0T(\theta_v) = \theta_w$.
Definiție: Kernelul unei aplicații liniare T este mulțimea

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = \theta\}.$$

Teoremă: Kernelul lui T este un subspațiu al lui V.
Demonstație: Fie $v_1, v_2 \in V$. Avem:

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) = \theta \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{ Ker}(T);$$
$$\alpha T(v) = T(\alpha v) = \theta \Rightarrow \alpha v \in \text{ Ker}(T).$$

Teoremă: Următoarea identitate este adevărată în orice spațiu vectorial finit-dimensional V, pentru orice aplicație liniară T:

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(T(V)) = \dim(V).$$

Demonstrație:
Știm ca $\text{Ker}(T)$ este un subspațiu în V. Prin urmare, putem alege o bază în $\text{Ker}(T)$, care poate fi în contiunare extinsă la o bază în V:

$$v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+r},$$

unde $k = \dim(\text{Ker}(T))$, iar $r = \dim(V) - k$. Rămâne să demonstrăm că $v_{k+1}, ..., v_{k+r}$ formează o bază în $T(V)$. Fie $w \in V(T)$. Avem:

$$w = \sum_{i=1}^{k+r} \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(e_i) + \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j) = \theta + \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j) = \sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j T(e_j).$$

Prin urmare, $T(V) = \operatorname{span}(v_{k+1}, ..., v_{k+r})$. Fiind submulțimea unei baze, vectorii $v_{k+1}, ..., v_{k+r}$ sunt de asemenea liniari independenți, deci constituie o bază pentru $T(V)$. Astfel, $\dim(V(T)) = \operatorname{card}(\{v_{k+1}, ..., v_{k+r}\}) = r$, dar $r = \dim(V) - k = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(V))$, adică $\dim(\operatorname{Ker}(T)) + \dim(T(V)) = \dim(V)$.

Inverse

Observație: Termeni precum adunarea a două aplicații liniare, compunerea a două aplicații liniare, inversa la stânga și la dreapta a unei aplicații liniare, aplicație liniară injectivă, surjectivă, sau bijectivă își păstrează sensul comun ca și cel pentru funcți obișnuite.
Observație: Compunerea a două aplicații liniare este tot o aplicație liniară.
Teoremă: O aplicație liniaraă are cel mult o inversă la stânga.
Demonstrație: Fie două inverse la stangă, S și S', pentru o aplicație liniară $T : V \to W$.

$$S(w) = S'(w)\, \forall w \in W \Rightarrow S = S'.$$

Teoremă: Inversa la stânga a unei aplicații liniare este și inversa ei la dreapta.
Demonstație:

$$T(S(w)) = T(S(T(v)) = T(v) = w.$$

Teoremă: O aplicație liniară are o inversă la stânga dacă și numai dacă este injectivă.
Demonstrație:

$$\Rightarrow: w \in W, w = T(v) \Rightarrow !\exists v \in V \ni w = T(v) = T(S(w)).$$
$$\Leftarrow: T(v_1) = T(v_2) \iff S(T(v_1)) = S(T(v_2)) \iff v_1 = v_2.$$

Teoremă: Următoarele propoziții sunt echivalente:
(a) T este injectivă.
(b) T este inversabilă și inversa sa este liniară.
(c) $\operatorname{Ker}(T) = \theta$.
Demonstrație:

$$\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} : T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2).$$

$$(b) \;\Rightarrow\; (c) : T(v) = \theta \iff T^{-1}(T(v)) = \theta \iff v = \theta.$$

$$(c) \;\Rightarrow\; (a) : T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = \theta \iff v_1 - v_2 = \theta \iff v_1 = v_2.$$

Matrice

Teoremă: Fie $e_1, ..., e_n$ o bază într-un spațiu vectorial n-dimensional V și $u_1, ..., u_n$ n vectori arbitrari într-un spațiu W. Atunci, există o unică aplicație liniară $T : V \to W$ astfel încât:

$$T(e_k) = u_k, k = [1...n].$$

Observație: Orice transformare liniară este unic determinată de valorile sale într-o bază arbitrară din domeniu, care constituie combinații liniare ale vectorilor unei baze arbitrare din codomeniu. Astfel:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i.$$

Elementele t_{ij} pot fi listate cu ajutorul unui tablou de dimensiuni $n \times m$, numit matrice, și reprezentat în felul umrător:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ t_{m1} & t_{m2} & ... & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Două notații compacte sunt (t_{ij}) și $(t_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. Sau, raportat la T, $\mathcal{M}_{V,W}(T)$.
Observație: Reprezentarea matriceală a unei aplicații liniare depinde de bazele alese.
Teoremă: Fie V și W două spații vectoriale finit-dimensionale, de dimensiune n, respectiv m, și $T \in \mathcal{L}(V, W), r = \dim(T(V))$. Atunci, există o bază $(e_1, ..., e_n)$ în V și o bază $(w_1, ..., w_m)$ în W astfel încât:

$$T(e_i) = w_i \, \forall i = [1...r]$$

și

$$T(e_i) = \theta \, \forall i = [r + 1, n].$$

Definiție: Fie două matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ și $B = A = (b_{jk})_{j,k=1}^{n,p}$. Produsul $C = A \cdot B = (c_{ik})_{i,k=1}^{m,p}$ este matricea a căror componente sunt de forma:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Motivație: Dorim ca înmulțirea a două matrice să rezulte într-o altă matrice, reprezentativă pentru aplicația liniară determinată de compunerea aplicațiilor liniare asociate celor două matrice. Adică:

$$\mathcal{M}_{V,W}(S)\mathcal{M}_{U,V}(T) = \mathcal{M}_{U,W}(ST).$$

Astfel:

$$STu_k = S\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} S v_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=i}^{m} a_{ij} w_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ik} w_i.$$

Vectori Proprii și Valori Proprii

Definiție: Un operator liniar este un izomorfism definit pe un spațiu vectorial.
Definiție: Un operator liniar nilpotent este un operator liniar pentru care o putere a sa este operatorul nul.
Teoremă: Fie o aplicație liniară $T : V \to V$, unde $\dim(V) = n$. Dacă T are o reprezentare matriceală diagonală, atunci există o mulțime independentă de vectori din V și o mulțime corespunzătoare de scalari $\{\lambda_1, ..., \lambda_2\}$ astfel încât:

$$T(v_k) = \lambda_k v_k, k = [1...n].$$

Demonstrație:

$$\Rightarrow: T(e_k) = \alpha_{kk} e_k \Rightarrow v_k = e_k, \lambda_k = \alpha_{kk}.$$
$$\Leftarrow: \text{ Fie } e_k = v_k, \text{ și } \alpha_{kk} = \lambda_k \Rightarrow T(v_k) = \lambda_k v_k, k = [1...n].$$

Observație: Vectorii proprii și valorile proprii ale unei aplicații liniare vor fi definiți întocmai drept vectorii și valorile care îndeplinesc relația teoremei precedente.
Definiție: Un vector propriu al unei aplicații liniare T este un vector v astfel încât:

$$T(v) = \lambda v, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Definiție: O valoarea proprie a unei aplicații liniare T este un scalar λ astfel încât:

$$T(v) = \lambda v, v \in V.$$

Teoremă: Un scalar λ este o valoare proprie a unei aplicații liniare T dacă $T - \lambda I$ nu este o aplicație liniară injectivă.
Demonstrație:

$$Tv = \lambda v \iff (T - \lambda I)v = \theta \Rightarrow \operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq \{\theta\}.$$

Teoremă: Orice operator liniar pe un spațiu vectorial complex finit-dimensional are o valoare proprie.
Demonstație: Fie $v \in V/\{\theta\}$. Vectorii $T^k v, k = [0...n]$ nu pot fi liniar independeți, deoarece dimensiunea lui V este n, iar vectorii aleși sunt în număr de $n+1$. Prin urmare, există un șir de numere complexe, nesimultan nule, a_k, astfel încât:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T^k v = \theta.$$

Fie polinomul

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = c \prod_{k=1}^{n} (z - r_k), c, r_k, z \in \mathbb{C}, c \neq 0.$$

Avem:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T^k v = c \prod_{k=1}^{n} (T - r_k I)v = \theta.$$

Deci există cel puțin un j pentru care $T - r_j I$ nu este injectivă. Așadar, T are cel puțin o valoare proprie.

Teoremă: Vectori proprii nenuli corespunzători unor valori proprii distincte ale unei aplicații liniare T sunt liniar independenți.
Demonstrație: Fie vectorii proprii $v_k, k = [1...m]$, cu valorile proprii asociate λ_k, și un șir de numere complexe a_k astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v_k = \theta \Rightarrow \circ_{i \neq j}(T - \lambda_i I) \sum_{k=1}^{m} a_k v_k = \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_j \prod_{k=1, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k) v_j = \theta \Rightarrow a_j = 0 (\text{deoarece valorile proprii alese sunt distincte}).$$

Observație: Vectorii proprii ai unei aplicații T nu determină neapărat un sistem de generatori pentru V. Acest fapt conduce la următoarea definiție, a cărei motivație este dorința de a găsi un tip generalizat de vectori proprii care să determine un sistem de generatori, și prin teorema precedentă, o bază, într-un spațiu vectorial dat.
Definiție: Un vector propriu generalizat este un vector propriu al unei aplicații liniare T care satisface:

$$(T - \lambda I)^k v = \theta, \lambda \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Teoremă: Mulțimea vectorilor proprii ai unei aplicații liniare T corespunzători unei valori proprii λ este egală cu $\mathrm{Ker}((T - \lambda I)^n)$.
Demonstrație: În mod evident, $\mathrm{Ker}((T - \lambda I)^n)$ este inclus în mulțimea vectorilor proprii generalizați ai lui T. Pentru a arăta incluziunea în cealaltă direcție, fie un șir de numere complexe, $a_{k'}, k' = [0...k-1]$ astfel încât:

$$\sum_{k'=0}^{k-1} a_{k'} (T - \lambda I)^{k'} v = \theta \Rightarrow (T - \lambda I)^{k-(j+1)} \sum_{k'=0}^{k-1} a_{k'} (T - \lambda I)^{k'} v = \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_j (T - \lambda I)^{k-1} v = \theta \Rightarrow a_j = 0 \Rightarrow \text{ vectorii} (T - \lambda I)^{k'} v \text{ sunt liniar independenți}$$

$$\Rightarrow k \leq n \Rightarrow \text{ Mulțimea vectorilor liniar independeți este inclusă în } \mathrm{Ker}((T - \lambda I)^n).$$

Am demonstrat incluziunea în amblele direcții, prin urmare, cele două mulțimi sunt egale.
Teoremă: Vectorii generalizați constituie un span pentru V.
Demonstrație: Vom demonstra prin inducție pe n, dimensiunea lui V. Rezultatul este, în mod evident, adevărat pentru $n = 1$. Presupunem că

$n > 1$ și că rezultatul este adevărat pentru toate dimensiunile mai mici decât n. Fie λ o valoare proprie a lui T, și $v \in \text{ Ker}(T-\lambda I)^n \cap \text{ Im}(T-\lambda I)^n$.

$$v \in \text{ Ker}(T-\lambda I)^n \cap \text{ Im}(T-\lambda I)^n \Rightarrow \exists u \in V \ni (T-\lambda I)^n u = v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T-\lambda I)^{2n} u = \theta \Rightarrow (T-\lambda I)^n u = \theta \Rightarrow v = \theta \Rightarrow \text{ Ker}(T-\lambda I)^n \cap \text{ Im}(T-\lambda I)^n = \{\theta\}.$$

Dar cele două mulțimi sunt kernelul și imaginea unui operator liniar definit pe V, deci:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T-\lambda I)^n) + \dim(\text{Im}(T-\lambda I)^n),$$

iar cum intersecția lor este vectorul nul, avem:

$$V = \text{ Ker}(T-\lambda I)^n \oplus \text{ Im}(T-\lambda I)^n.$$

Teoremă: Vectori proprii generalizați nenuli corespunzători unor valori proprii distincte ale lui T sunt liniari independenți.
Demonstrație: Fie $v_k, k = [1...m]$ vectori proprii generalizați și λ_k valorile proprii corespunzătoare. Fie un șir de numere complexe a_k astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v_k = \theta \Rightarrow a_j (T-\lambda_j I)^{k-(j+1)} \circ_{k=1,k\neq j} (T-\lambda_k I)^n v_j = \theta \iff$$

$$\iff a_j (T-\lambda_j I)^{k-(j+1)} \circ_{k=1,k\neq j} ((T-\lambda_j I) + (\lambda_j - \lambda_k) I)^n v_j = \theta \iff$$

$$\iff a_j \prod_{k=1,k\neq j} (\lambda_j - \lambda_k) v_k = \theta \Rightarrow a_j = \theta \Rightarrow \text{ vectorii } v_k \text{ sunt liniar independeți.}$$

Teoremă: Fie $\lambda_k, k = [1...m]$ valori proprii distincte ale lui T, iar U_k mulțimile corespunzătoare de vectori proprii generalizați asociați fiecărei valori proprii. Atunci:
(a) $V = \bigoplus U_k$;
(b) $\text{Im}(T(U_j)) = U_j$;
(c) Toate restricțiile de forma $(T-\lambda_j I)|_{U_j}$ sunt nilpotente;
(d) Toate restricțiile de forma $T|_{U_j}$ au o valoare proprie unică, anume λ_j.
Demonstație: Rezultă din teoremele precedente.

Polinoame. Polinomul minim și polinomul caracteristic.

Amintim că un polinom de grad m este o funție $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de forma:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k.$$

O rădăcină a unui polinom este un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât:

$$p(\lambda) = 0.$$

Mulțimea tuturor polinoamelor dintr-un corp $\mathbb{K}$ se notează $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.
Teoremă: Fie $m \in \mathbb{N}^*, p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}),\ \mathrm{grad}(p) = m, \lambda \in \mathbb{K}$. Atunci:

$$p(\lambda) = 0 \iff \exists q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}),\ \mathrm{grad}(q) = m - 1 \ni p(z) = (z - \lambda)q(z)\, \forall z \in \mathbb{K}.$$

Demonstrație:

$$\Rightarrow: p(z) = p(z) - p(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z^k - \lambda^k) = (z - \lambda) \sum_{k=1}^{m} a_k \left(\sum_{j=1}^{k} z^{j-1}\lambda^{k-j} \right).$$

$$\Leftarrow: p(\lambda) = (\lambda - \lambda)q(\lambda) = 0.$$

Teoremă: Fie $m \in \mathbb{N}^*, p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}),\ \mathrm{grad}(p) = m$. Atunci p are cel mult m rădăcini în $\mathbb{K}$.
Demonstrație: Se demonstrează prin inducție, utilizând teorema precedentă și ținând cont că dacă polinomul are o rădăcină, atunci *moștenește* și cele $m - 1$ rădăcini ale polinomului de grad inferior din descompunerea sa.
Teoremă: Orice polinom cu coeficienți în $\mathbb{C}$ are rădăcină în $\mathbb{C}$.
Demonstrație: Poate altcândva.
Definiție: Polinomul minim al unei aplicații liniare T este un polinomul monic de grad minim care verifică:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i z^i = \theta,$$

unde

$$\sum_{i=0}^{k} a_i T^i = \theta, a_k = 1, k \in \mathbb{N}^*.$$

Observație: Știm că un astfel de polinom minim există, deoarece există un cel mai mic k astfel încât vectorii $T^i, i = [0...k]$ din spațiul operatorilor liniari definiți pe V să fie liniar dependenți, având în vedere că se află într-un spațiu finit dimensional.
Teoremă: Fie $\lambda_k, k = [1...m]$ valori proprii distincte ale lui T și U_k mulțimile corespunzătoare de vectori proprii generalizați asociați fiecărei valori proprii. Fie α_j cea mai mică valoare naturală nenulă astfel încât $(T-\lambda_j I)^{a_j} v = \theta \, \forall v \in U_j$ și

$$p(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$

(a) p este polinomul minim al lui T.
(b) p are gradul cel mult egal cu dimensiunea lui V.
(c) Dacă există un q astfel încât $q(T) = \theta$, atunci q este un multiplu al polinomului p.
Demonstrație:
(b)

$$U_j = \text{ Ker}(T - \lambda_j I)^n \Rightarrow \alpha_j \leq \text{ dim}(U_j), \text{ dar } V = \bigoplus U_j \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} a_j \leq \text{ dim}(V).$$

(c)

$$q(z) = c \left(\prod_{k=1}^{M} (z - r_k)^{\delta_k} \right) (z - \lambda_j)^{\delta}$$

$$q(T)v = \theta \, \forall v \in U_j \Rightarrow (T - \lambda_j I)^{\delta} v = \theta \Rightarrow \alpha_j \leq \delta.$$

(a) Prin comutare la dreapta a elementului $(T - \lambda_j I)^{\alpha_j}$ în expresia

$$(T - \lambda_1 I)^{\alpha_1} ... (T - \lambda_m I)^{\alpha_m},$$

avem:

$$p(T)v = \theta \, \forall v \in U_j \Rightarrow p(T) = \theta, \text{ deoarece } V = \bigoplus U_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \text{ este polinomul minim al lui } T, \text{ deoarece, conform (c), orice } q \text{ este multiplu al lui } p.$$

Definiție: Multiplicitatea unei valori proprii este dimensiunea subspațiului alcătuit din vectorii proprii generalizați corespunzători valorii proprii respective.

Definiție: Polinomul caracteristic al unei aplicații liniare T cu valorile proprii distincte $v_k, k = [1...m]$ este polinomul

$$\prod_{k=1}^{m}(z - \lambda_k)^{\beta_k},$$

unde β_k sunt multiplicitățile corespunzătoare fiecărei valori proprii.
Teoremă: (Teorema Hamilton-Cayley) Fie q polinomul caracteristic al unei aplicații liniare T. Atunci $q(T) = \theta$.
Demonstrație: Conform teoremei precedente, $\alpha_j \leq \beta_j \Rightarrow$ polinomul caracteristic este un multiplu al polinomului minim $\Rightarrow q(T) = \theta$.
Teoremă: Fie T nilpotent. Există o bază în V astfel încât matricea relativă să aibă doar 0-uri sub diagonala principală și deasupra diagonalei principale.

Teorema Spectrală

Definiție: Adjunctul unui operator liniar T este un operator liniar astfel încât:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle.$$

Definiție: Un operator liniar normat este un operator liniar care comută cu adjunctul său.
Teoremă: Dacă T este normat, atunci Ker(T) = Ker(T*).
Demonstrație:

$$\langle Tv, Tv\rangle = \langle TT^*v, v\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \langle T^*v, T^*v\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Tv = \theta \iff T^*v = \theta.$$

Teoremă: Fie T un operator liniar normat. Atunci:

$$\text{Ker}(T^k) = \text{Ker}(T).$$

Demonstrație: Inducție.

$$v \in \text{Ker}(T^{k+1}) \Rightarrow T^{k+1}v = \theta \iff T(T^kv) = \theta \Rightarrow T^kv \in \text{Ker}(T) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^*(Tv) = \theta \Rightarrow \theta = \langle T^*(T^kv), T^{k-1}v\rangle = \langle T^kv, T^kv\rangle.$$

Teoremă: Orice vector propriu generalizat al unui operator normat este un un vector propriu pentru acel operator.
Demonstrație:

$$\mathrm{Ker}(T^k) = \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow \mathrm{Ker}((T - \lambda I)^k) = \mathrm{Ker}(T - \lambda I).$$

Teoremă: Vectori proprii corespunzători unor valori proprii disincte ale unui operator normat sunt ortogonali.
Demonstrație:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1 - v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle - \langle v_1, \lambda_2^* v_2\rangle = \langle Tv_1, v_2\rangle - \langle v_1, T^* v_2\rangle = \theta.$$

Teormă: (Teorema Spectrală) Există o bază ortonormată în V ce consistă din vectorii proprii ai lui T dacă și numai dacă T este normat.

Determinant

Definiție: Determinantul unui operator liniar este produsul valorilor sale proprii, incluzând multiplicitatea.
Definiție: Un operator este inversabil dacă și numai dacă determinantul său este nenul.
Demonstrație: T este inversabil dacă și numai dacă 0 nu este o valoare proprie a sa, deoarece altfel nu ar fi injectiv, și prin urmare se impune condiția ca produsul valorilor sale proprii să fie nenul.
Teoremă: Polinomul caracteristic al lui T este egal cu $\det(\lambda I - T)$.
Demonstrație:

$$\det(\lambda I - T) = \prod_{k=1}^{m} (z - \lambda_k)^{\beta_k}.$$