Analiză Matematică - SETUL 3 - Serii numerice - Criterii de convergenţă

1. Folosind criteriile de comparaţie, să se stabilească natura următoarelor serii:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1); \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^2}, \quad a>0$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{5^n}; \qquad v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5+n\cdot 2^n};$$

$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}}{11\sqrt[4]{n^7}-n}. \qquad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n!}.$$

2. Folosind criteriul raportului, să se studieze convergenţa seriilor:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}; \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^{-\sqrt{n^2-2}}; \qquad v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}, \quad a>0;$$

$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}; \qquad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad a>0.$$

3. Folosind criteriul rădăcinii, să se studieze convergenţa seriilor:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+n}{a+n-1}b\right)^n, \ a,b\in\mathbb{R}^*; \qquad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}, a\in\mathbb{R};$$

4. Folosind criteriul lui Leibniz, să se studieze convergenţa seriilor:

$$i)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}; \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2.$$

5. Folosind criteriul lui Raabe-Duhamel, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(ax)^n}{(a+x)(a+2x)\dots(a+(n-1)x)}, a,x>0;$

$ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n;$

$iii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 5^2\dots(4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\dots(4n-1)^2}\cdot a^n,\ a\geq 0;$

$iv)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(a^2+1)\cdot(a^2+3)\cdot\ldots\cdot(a^2+2n+1)}, a\in\mathbf{R};$

$v)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};$

$vi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n!)^2\cdot 4^n};$

$vii)\sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln(n)}, a>0.$

6. Folosind criteriul lui Abel, să se studieze convergenţa seriilor:

$(i)\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\theta,\quad 0<r<1,\theta\in\mathbb{R};$

$(ii)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right)\cdot\frac{\sin na}{n-1},\quad a\in\mathbb{R};$

$(iii)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\ln n},\ x\in\mathbb{R};$

$(iv)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^2-n+1}},\ x\in\mathbb{R};$

$(v)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\cos na}{n}, a\in\mathbb{R}.$

7. Folosind criterii practice adecvate, să se studieze convergenţa seriilor:

$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, x\geq 0;$

$ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}, a>0;$

$iii)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\cdot\frac{\sin nx}{2^n}, p>0, x\in\mathbb{R};$

$iv)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^p(n)}, p\in\mathbb{R};$

$v)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n+1)!};$

$vi)\sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}, a>0;$

$vii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}.$

8. Studiaţi convergenţa şi absolut convergenţa următoarelor serii:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

9. Câţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1) \cdot 5^n}$$

cu trei zecimale exacte?

10. Câţi termeni trebuie însumaţi pentru ca eroarea comisă pentru a obţine suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!},$$

să fie mai mică decât 10^{-6}?