# Probleme Curs Algebră Liniară

LazR

30 Noiembrie, 2023

**Enunț:** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

**Rezolvare:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L2-2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \\ 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$S = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

**Enunț:** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

**Rezolvare:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1=L_1-L_5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2=L_2-3L_1 \; L_3=L_3-4L_1]{L_4=L_4-3L_1 \; L_5=L_5-7L_1}$$

$$\xrightarrow[L_2=L_2-3L_1 \; L_3=L_3-4L_1]{L_4=L_4-3L_1 \; L_5=L_5-7L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{swap}(L_2,-L_4)}$$

$$\xrightarrow{\text{swap}(L_2,-L_4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_5=L_5+10L_2]{L_3=L_3+6L_2\ L_4=L_4+3L_2}$$

$$\xrightarrow[L_5=L_5+10L_2]{L_3=L_3+6L_2\ L_4=L_4+3L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -63 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{swap}(L3,-L_4)}$$

$$\xrightarrow{\text{swap}(L3,-L_4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -63 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4=L_4+3L_3\ L_5=L_5+5L_3}$$

$$\xrightarrow{L_4=L_4+3L_3\ L_5=L_5+5L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{L_5=L_5-2L_4}$$

$$\xrightarrow{L_5=L_5-2L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$S = \{(3, 0, -5, 11)\}$$

**Enunț:** Să se calculeze inversa matricei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Soluție:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=-L_3+L_1}$$

$$\xrightarrow{L_3=-L_3+L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=-L_3+L_2}$$

$$\xrightarrow{L_3=-L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=\frac{1}{2}L_3}$$

$$\xrightarrow{L_3=\frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2=L_2-L_3}$$

$$\xrightarrow{L_2=L_2-L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1=L_1-L_2}$$

$$\xrightarrow{L_1=L_1-L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Inversa matricei este:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Enunț:** Să se rezolve următoarele sisteme:

$$(a) \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 4x-y+5z=7 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y+2z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-z=3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 5x-y=3 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x+2y-z=2 \\ 6x+3y+2z=3 \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y-z=0\end{cases}\quad (f)\begin{cases}x+2y=3\\3x+4y=-11\\5x+6y=2\end{cases}\quad (g)\begin{cases}x+2y=3\\4x+5y=6\\7x+8y=9\end{cases}$$

**Soluție:**

$$(a)\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\2&0&1&2\\4&-1&5&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&-4&3&0\\0&-9&9&3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&1&-3&-3\\0&-9&9&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&1&-3&-3\\0&0&-18&-24\end{array}\right)$$

$$S=\left\{\left(\frac{1}{3},1,\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$(b)\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&1\\1&-1&2&2\\3&0&-1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&2\\0&1&2&1\\3&0&-1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&2\\0&1&2&1\\0&3&-7&-3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&2\\0&1&2&1\\0&0&-13&-6\end{array}\right)$$

$$S=\left\{\left(\frac{15}{13},\frac{1}{13},\frac{6}{13}\right)\right\}$$

$$(c)\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\2&-1&1&2\\5&-1&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&-3&5&0\\0&-6&10&-2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&-3&5&0\\0&0&0&-4\end{array}\right)$$

Sistem incompatibil.

$$(d)\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\4&2&-1&2\\6&3&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&5&0\end{array}\right)$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1-\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(e) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

$$S = \{(1, 2-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$(f) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -11 \\ 5 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & -4 & -13 \end{array} \right)$$

Sistem incompatibil.

$$(g) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right)$$

$$S = \{-1, 2\}$$

**Enunț:** Să se calculeze rangurile matricelor:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \end{pmatrix}$$

**Rezolvare:**

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rangul matricei este 2.

$$(b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rangul matricei este 3.

$$(c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & ... & 3n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n & n & n & ... & n \\ n & n & n & ... & n \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & -n & -2n & ... & n(1-n) \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Rangul matricei este 2.

**Enunț:** Să se determine forma scară redusă pentru matricele:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} (c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} (d)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Rezolvare:**

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Enunţ:** Fie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$.
(a) Să se calculeze $\pi^{-1}, \sigma^{-1}, \pi\sigma, \sigma\pi, \pi^{-1}\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\pi^{-1}, (\pi\sigma)^{-1}, (\sigma\pi)^{-1}$.
(b) Să se calculeze numărul de inversiuni și signatura permutărilor date.
(c) Să se determine matricele permutărilor de la punctul (a) și determinanţii acestora.
(d) Să se calculeze inversele matricelor de la punctul precedent.
(e) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
(i) Să se calculeze produsele $P_\pi A, P_\sigma A, P_{\sigma^2} A, P_{\sigma\pi^{-1}} A$.
(ii) Să se determine toate produsele posibile dintre matricele determinate la punctul (c) și matricea $A$.
**Rezolvare:**
(a)

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1}\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\pi\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}\pi^{-1} \quad (\sigma\pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi^{-1}\sigma^{-1}$$

(b)

$$\pi = (1\ 2)(2\ 3) \Rightarrow \epsilon(\pi) = 1 \quad \sigma = (2\ 4)(3\ 4) \Rightarrow \epsilon(\sigma) = 1$$

(c)

$$P_{\pi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\pi\sigma} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma\pi} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}} = P_{(\sigma\pi)^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toate matricele de mai sus au determinantul 1.
(d) Inversele permutărilor și inversele matricelor asociate fiecărei permutări se află în relație de izomorfism.
**Enunț:** Arătați că:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Enunț:** Arătați că produsul a două matrice Markov este tot o matrice Markov.
**Rezolvare:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = 1$$

**Enunț:** Fie $f(x) = x^3 + 7x^2 + 13x - 5$ și $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $f(A) = O_3$.
**Rezolvare:**

$$det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 13\lambda + 5 = -f(\lambda) \Rightarrow$$

$f(A) = O_3 \iff -f(\lambda) = 0,$ adevărat, conform teoremei Hamilton-Cayley.

**Enunț:** Dacă A și B sunt două matrice pătratice de aceeași dimensiune, $n \geq 2$, cu elemente reale, atunci egalitatea $ABAB = O$ implică egalitatea $BABA = O$?

**Rezolvare:**

Cazul $n = 2$:

(i) $A = O$ sau $B = O \Rightarrow BABA = O$.

(ii) $A$ inversabilă sau $B$ inversabilă $\Rightarrow ABAB = O \iff A^{-1}ABABA = O$ sau $BABABB^{-1} = O \iff BABA = O$.

(iii) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1 \Rightarrow$

$$ABAB = O \Rightarrow BAB \subseteq \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rang}(BAB) \leq \dim(\ker(A)) = 1,$$

$$\text{deoarece } \text{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = 2.$$

$$\text{Dacă } \text{rang}(BAB) = 0 \Rightarrow BABA = O.$$

$$\text{Dacă } \text{rang}(BAB) = 1 = \text{rang}(B) \Rightarrow \text{Im}(BAB) = \text{Im}(B),$$

$$\text{deoarece } \text{Im}(BAB) \subseteq \text{Im}(B), \text{ iar cum din ipoteză } \ker(A) = \text{Im}(BAB) \Rightarrow$$

$$\ker(A) = \text{Im}(B) \Rightarrow BABA = BO = O.$$

Cazul $n \geq 3$:

Avem contraexemplul:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

care poate fi extins prin zerouri pentru $n > 3$.

**Enunț:** Arătați că:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & ... & n-1 & n-2 \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
**Rezolvare:** Prin inducție:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

**Enunț:** Să se arate că

$$S = \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}, a+2b=c \right\} \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

**Soluție:**

$$\alpha A(a,b,c) + \beta A(a'b'c') = A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c')$$

$$\alpha a + \beta a' + 2\alpha b + 2\beta b' = \alpha(a+2b) + \beta(a'+2b') = \alpha c + \beta c'$$

$$\alpha A(a,b,c) + \beta A(a',b',c') \in S \Rightarrow \text{ S este subspațiu vectorial în } \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}.$$

**Observație:** $S = \text{ span}(A(1,0,1)) + \text{ span}(A(0,1,2))$.
**Enunț:** Fie $v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,-2,-1), v_3 = (2,3,\alpha) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$. Studiați independența liniară a vectorilor.
**Soluție:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-5 \end{pmatrix}$$

(i) $\alpha \in \mathbb{R}/\{5\} \Rightarrow \text{ rang}(A) = 3 \Rightarrow$ sistemul este liniar independent.

(ii) $\alpha = 5 \Rightarrow$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{7}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2.$$

**Enunţ:** Studiaţi liniar independenţa vectorilor $v_1 = 1, v_2 = i$ în spaţiile vectoriale $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}/\mathbb{C}$.
**Rezolvare:**
Cazul $\mathbb{C}/\mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0 \iff \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sunt liniari independenţi.}$$

Cazul $\mathbb{C}/\mathbb{C}$:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0 \Leftarrow \alpha_1 = -i, \alpha_2 = -1 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sunt liniari dependenţi.}$$

**Enunţ:** Se consideră mulţimile $B_1 = \{1 + X, X + X^2, X^2 + 1\}$ şi $B_2 = \{1, X - 1, X^2 - 1\}$ din spaţiul $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$.
(a) Să se arate că $B_1$ şi $B_2$ sunt baze în spaţiul dat.
(b) $T_{B_cB_1}, T_{B_1B_c}, T_{B_cB_2}, T_{B_2B_c}, T_{B_1B_2} =?$
(c) Care sunt coordonatele vectorului $f = 1 + X + X^2$ în bazele $B_1$ şi $B_2$?
**Rezolvare:**
(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 2 \neq 0,\ \det(A_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ rang}(A_1) = \text{ rang}(A_2) = 3 = \text{ dim}(\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1, B_2 \text{ sunt mulţimi liniar independente care de asemenea formează}$$
$$\text{sisteme de generatori în spaţiul dat} \Rightarrow B_1, B_2 \text{ baze în } \mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$$

(b)

$$T_{B_cB_1} = A_1, T_{B_cB_2} = A_2$$

$$T_{B_1B_c} = T_{B_cB_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T_{B_2B_c} = T_{B_cB_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B_1B_2} = T_{B_1B_c}T_{B_cB_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$f_{B_1} = T_{B_cB_1}f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{B_2} = T_{B_cB_2}f = (3, 1, 1)$$

**Enunț:** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, x + y, y)$.
(a) Să se arate că $f$ este o aplicație liniară.
(b) Să se determine matricea aplicației liniare în raport cu bazele canonice.
(c) Să se determine matricea aplicației liniare în raport cu bazele $B_1 = \{(1, 1), (1, 0)\}, B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0).\}$.
**Rezolvare:**
(a)

$$\alpha f(x_1, y_1)+\beta f(x_2, y_2) = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2, \alpha y_1+\beta y_2) = f(\alpha x_1+\beta x_1, \alpha y_1+\beta y_2)$$

(b)

$$f(1, 0) = (1, 1, 0), f(0, 1) = (0, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$f(1, 1) = (1, 2, 1) = (1, 1, 1) + (1, 1, 0) + (1, 0, 0)$$

$$f(1, 0) = (1, 1, 0) = 0(1, 1, 1) + (1, 1, 0) + 0(1, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Enunţ:** Fie aplicaţia liniară $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(1,1)=(1,3), f(1,2)=(2,5)$. Să se determine expresia ei analitică şi apoi matricea relativă la baza canonică respectiv la baza $B=\{(1,1),(1,2)\}$
**Rezolvare:**

$$f(x,y)=(2x-y)f(1,1)+(-x+y)f(1,2)=(y,x+2y)$$
$$f(1,0)=(0,1), f(0,1)=(1,2)\Rightarrow \mathcal{M}_{B_c}(f)=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$$
$$f(1,1)=(1,3)=-(1,1)+2(1,2), f(1,2)=(2,5)=-(1,1)+3(1,2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{M}_B(f)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$$

**Enunţ:** Se consideră aplicaţia liniară $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3, f(a,b,c,d)=(a+2b-2c,-2a+b+c,a-2b+c)$. Determinaţi nucleul şi imaginea lui $f$, câte o bază în cele două subspaţii şi studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea lui $f$.
**Rezolvare:**

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f)&=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4: f(a,b,c,d)=\theta=(0,0,0)\}\\&=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:(a+2b-2c,-2a+b+c,a-2b+c)=(0,0,0)\}\\&=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4: a+2b-2c=0,-2a+b+c=0,a-2b+c=0\}\\&=\{(0,0,0,d): d\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

deoarece matricea sistemului $a+2b-2c=0,-2a+b+c=0,a-2b+c=0$ are determinantul nenul, iar prin urmare, soluţia este unică, şi anume cea banală, $a=b=c=0$(variabila $d$ nu influenţează cu nimic rezultatul).

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)&=\{(a',b',c')\in\mathbb{R}^3:(a',b',c')=f(a,b,c,d);(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\}\\&=\{(a',b',c')\in\mathbb{R}^3:(a',b',c')=(a+2b-2c,-2a+b+c,a-2b+c);a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\\&=\{(a',b',c')\in\mathbb{R}^3:(a',b',c')=a(1,-2,1)+b(2,1,-2)+c(-2,1,1)+d(0,0,0);a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\\&=\mathrm{span}\{(1,-2,1),(2,1,-2),(-2,1,1)\},\end{aligned}$$

formă care nu necesită simplificare deoarece vectorii $(1,-2,1),(2,1,-2),(-2,1,1)$ sunt linar independeţi (acelaşi argument cu determinantul).
$\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0,d):d\in\mathbb{R}\}=\mathrm{span}\{(0,0,0,1)\}$, prin urmare, vectorul $(0,0,0,1)\in\mathbb{R}^4$ formează o bază în subspaţiul $\mathrm{Ker}(f)$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{(1,-2,1),(2,1,-2),(-2,1,1)\}$, prin urmare, vectorii

$$(1,-2,1),(2,1,-2),(-2,1,1) \in \mathbb{R}^3$$

formează o bază în subspațiul $\mathrm{Im}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f) \neq \theta$, prin urmare, $f$ nu este injectivă.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\{(1,-2,1),(2,1,-2),(-2,1,1)\} = \mathbb{R}^3$(codomeniul), prin urmare, $f$ este surjectivă.
**Enunț:** Fie $v_1 = (X-1)^2, v_2 = (X+1)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Completați $\{v_1, v_2\}$ la o bază în $\mathbb{R}_2[X]$, apoi stabiliți coordonatele vectorului $v = 2017X$ în această bază.
**Rezolvare:**
Știind că

$$v_1 = X^2 - 2X + 1 \text{ și } v_2 = X^2 + 2X + 1,$$

identificăm vectorii $v_1, v_2$ cu coordonatele acestora relative la baza canonică din $\mathbb{R}_2[X], \{X^2, X, 1\}$, și anume $(1,-2,1)$, respectiv $(1,2,1)$. Căutăm un vector $v_3$ din $\mathbb{R}_2[X]$ a cărui coordonate relative la baza canonică, $(a,b,c), a,b,c \in \mathbb{R}$ să indeplinească condiția:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 2 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} \neq 0,$$

deoarece astfel este asigurată independența liniară a vectorilor $v_1, v_2, v_3$, iar având în vedere că $\mathrm{card}(\{v_1, v_2, v_3\} = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]))$, în mod imediat va fi verificată condiția ca $\{v_1, v_2, v_3\}$ să determine un sistem de generatori în $\mathbb{R}_2[X]$(3 vectori liniar independenți într-un spațiu de dimenisune 3 formează întotdeauna un sistem de generatori și prin urmare o bază). Astfel, avem condiția $-4a + 4c \neq 0 \iff a \neq c$, verificată, de exemplu, de vectorul de coordonate $(0,1,0)$. Alegem vectorul $v_3 = X^2 + X + 2$ de coordonate relative la baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$ $(1,1,2)$, și completăm $\{v_1, v_2\}$ la baza $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$2017X = \frac{4}{2017} \cdot v_1 - \frac{4}{2017} \cdot v_2 + 0 \cdot v_3.$$

**Enunț:** Fie $B_1 = \{v_1, v_2\}$ o bază în $V_1$ și $B_2 = \{w_1, w_2\}$ o bază în $V_2$ și $f : V_1 \to V_2$ o aplicație liniară care are matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

relativă la bazele $B_1$ și $B_2$. Care este matricea lui $f$ relativă la bazele $B_1' = \{v_2, v_1\}$ și $B_2' = \{-2w_1, 2w_2\}$?
**Rezolvare:**
În traducere, matricea de mai sus codifică următoarea informație: $w_1 = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$ și $w_2 = 2 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2$. Avem:

$$-2w_1 = (-6) \cdot v_2 + (-2) \cdot v_1 \text{ și } 2w_2 = 8 \cdot v_2 + 4 \cdot v_1,$$

deci, matricea cerută este:

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Enunț:** Fie operatorii $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiți prin $f(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 4y + z, -2x - 4y - z), g(x, y, z) = (4x + 9y, -2y + 8z, 7z)$.
(a) Să se determine polinoamele caracteristice ale lui $f$ și $g$.
(b) Să se determine subspațiile proprii și valorile proprii ale lui $f$ și $g$.
(c) Să se studieze posibilitatea diagonalizării operatorilor dați.
(d) Să se determine $\circ^m f, m \in \mathbb{N}^*$.
(e) Să se calculeze $A_g^m, m \in \mathbb{N}^*$, unde $A_g$ este matricea operatorului $g$ în baza canonică.
**Rezolvare:** (a) Determinăm mai întâi matricele $A_f$ și $A_g$ relative la baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

$$f(1, 0, 0) = (3, 1, -2), f(0, 1, 0) = (2, 4, -4), f(0, 0, 1) = (2, 1, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(1, 0, 0) = (4, 0, 0), f(0, 1, 0) = (9, -2, 0), f(0, 0, 1) = (0, 0, 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_g = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Fie vectorul nenul $v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Pentru $A_g$ avem:

$$I_3 v = (1, 0, 0) \;\; A_f v = (3, 1, -2) \;\; A_f^2 v = (7, 5, -8) \;\; A_f^3 v = (15, 19, -26)$$

Cum vectorii $I_3v, A_fv, A_f^2v, A_f^3v$ sunt în număr de 4, iar $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, rezultă că aceștia sunt liniar dependenți. Efectuând operații elementare pe matricea obținută prin concatenarea lor, obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & -2 & -8 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Într-adevăr, $(15, 19, -26) = 6(1,0,0) - 11(3,1,-2) + 6(0,-2,-8)$. Prin urmare:

$$A_f^3v = 6I_3v - 11A_fv + 6A_f^2v \iff A_f^3v - 6A_f^2v + 11A_fv - 6I_3v = \theta$$

$$\iff (A_f^3 - 6A_f^2 + 11A_f - 6I_3)v = \theta \Rightarrow A_f^3 - 6A_f^2 + 11A_f - 6I_3 = O_3.$$

Fie polinomul $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Având în vedere faptul că $p$ este un polinom monic de grad 3 care anulează o matrice de $3 \times 3$, rezultă că $p$ este polinomul caracteristic al matricei $A_f$, iar valorile proprii ale lui $f$ sunt întocmai rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Î cazul operatorului $g$, valorile sale proprii sunt, în mod evident, $\lambda_4 = 4, \lambda_5 = -2, \lambda_7 = 7$.
(b)
Rezolvăm sistemele $A_fv = \lambda v, v \in V$ pe rând, pentru $\lambda_1, \lambda_2$, respectiv $\lambda_3$. Avem soluțiile:

$$S_1 = \operatorname{span}\{(1,0,-1)\} \;\; S_2 = \operatorname{span}\{(-2,1,0)\} \;\; S_3 = \operatorname{span}\{(0,-1,1)\}$$

Analog pentru $g$:

$$S_4 = \operatorname{span}\{(1,0,0)\} \;\; S_2 = \operatorname{span}\{(24,8,9)\} \;\; S_3 = \operatorname{span}\{(3,-2,0)\}$$

(c) Multiplicitatea fiecărei valori este egală cu dimensiunea fiecărui subspațiu asociat, prin urmare, ambii operatori sunt diagonalizabili.
**Enunț:** Să se determine valorile proprii și câte o bază în subspațiile proprii ale operatorului $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Rezolvare:** Avem sistemul $Av = \lambda v$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+z=\lambda x \\ 2x+y+3z=\lambda y \\ x+y+2z=\lambda z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (1-\lambda)x-2y+z=0 \\ 2x+(1-\lambda)y+3z=0 \\ x+y+(2-\lambda)z=0 \end{array}\right.$$

Matricea sistemului este:

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda & -1-2\lambda \end{pmatrix} \to$$