Note Curs Analiză Matematică: Șiruri și Serii Numerice

LazR

22 Octombrie 2023

Noțiuni auxiliare

Spații topologice

Fie o mulțime X oarecare și $\mathcal{P}(X)$ mulțimea submulțimilor sale.
Definitie: O clasă $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește topologie pe mulțimea X dacă satisface următoarele axiome:

$$\text{(D1) } \emptyset, X \in \mathcal{T}$$

(D2) dacă $G_{\alpha\alpha\in I}$ este o familie arbitră de mulțimi din $\mathcal{T}$ atunci $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$
(D3) dacă $G_{i1\leq i\leq n}$ este o familie finită de mulțimi din $\mathcal{T}$ atunci $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$
Definitie: Un spațiu topologic ese o structură algebrică $(X, \mathcal{T})$, alcătuită dintr-o mulțime oarecare X și o topologie asociată $\mathcal{T}$.

Spații metrice

Definitie: O metrică pe mulțimea X este orice funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele axiome:

$$\text{Axioma identității: } d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall x, y \in X$$

$$\text{Axioma de simetrie: } d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$$

$$\text{Axioma triunghiului: } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$$

Consecință: Dacă în axioma triunghiului se înlocuiește z cu x se obține:

$$d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$$

Consecință: Pentru oricare $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ are loc inegalitatea generalizată a triunghiului:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$$

Consecință: Urmatoarea relație se numește inegalitatea patrulaterului, sau proprietatea de continuitate a metricii:

$$|d(x, u) - d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v) \ \forall x, y, z, w \in X$$

Demonstrație:

Fie $x, y, u, v \in X$. Avem:

$$d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, v) + d(v, u)$$
$$d(y, v) \leq d(y, x) + d(x, u) + d(u, v)$$

Prin urmare:

$$d(x, u) - d(y, v) \leq d(x, y) + d(v, u)$$
$$d(y, v) - d(x, u) \leq d(y, x) + d(u, v)$$

Așadar:

$$|d(x, u) - d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v) \; \forall x, y, u, v \in X$$

Definitie: Un spațiu metric este o structură algebrică alcatuită dintr-o mulțime X pe care s-a definit o metrică.
Definitie: Fie (X, d) un spațiu metric. Distanța de la un punct $x \in X$ la o multime $A \subset X$ este numărul:

$$d(x, A) = inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

Definitie: Distanța dintre mulțimile $A, B \subset X$ este numărul:

$$d(A, B) = inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Definitie: Diametrul unei mulțimi $A \subset X$ este numărul:

$$d(A) = sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$$

Inegalități remarcabile într-un spațiu metric

Teoremă: (Inegalitatea lui Hölder) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru $p > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Demonstrație:
Considerăm funcția auxiliară:

$$\phi : (0, \infty] \to \mathbb{R}, \phi(x) = x^{\alpha} - \alpha x, \alpha \in (0, 1)$$

$$\phi^{'}(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \Rightarrow x = 1 \text{ este punct de maxim} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\alpha} \leq \alpha x + 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} \frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \frac{\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}}{\frac{|b_k|}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|b_k|^q}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_k|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_k|^q}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|}{(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Teoremă: (Inegalitatea Cauchy-Buniakovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right)$$

Demonstrație:
Este un caz particular al inegalității lui Hölder pentru $p = q = 2$.
Teoremă: (Inegalitatea lui Minkovski) Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pentru $p \geq 1$.
Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|a_k+b_k| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|b_k|$$

Conform inegalității lui Hölder:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

deoarece $q(p-1) = p$.
Prin urmare:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1...n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni cu același semn. Atunci:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Demonstrație:
Vom folosi inducția matematică.

$$(1): 1 + a_1 \geq 1 + a_1$$
$$(n): \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$(n+1): \prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1 + a_{n+1}) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

Teoremă: (Inegalitatea lui Bernoulli) Fie $a > -1, n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Demonstrație:
Este un caz particular al lemei anterioare pentru $a_k = a, k = [1...n]$.
Lemă: Fie $a_k > -1, k = [1...n], n \in \mathbb{N}$ un șir de termeni pozitivi reali. Dacă $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$$

Demonstrație:
Vom folosi inducția matematică.

$$(1): a_1 \geq 1$$
$$(n): \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$$
$$(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1} \geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1}a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq n + a_{n+1}(1 - a_1) - (1 - a_1) + 1 \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq n + 1$$

Teoremă: (Inegalitatea mediilor) Fie șirurile A_n, G_n, H_n definite în felul următor:

$$A_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

$$G_n = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

$$H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

pentru $n \in \mathbb{N}$ și $a_k \in \mathbb{R}, k = [1...n]$. Atunci:

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

Demonstrație:
$A_n \geq G_n$ rezultă din lema anterioară, pentru $a_k = \frac{a_k}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k}}$, iar din această inegalitate se obține mai departe $G_n \geq H_n$ înlocuid a_k cu $\frac{1}{a_k}$.

Șiruri de numere reale

Definitie: Un șir de numere reale este o funcție $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul real x_n. Notația tipică este $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 0}$.

Definitie: Un șir de numere reale (x_n) se numește șir mărginit dacă există un număr real pozitiv $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarcă: Pentru a arăta că un șir este mărginit, este suficient ca relația de mai sus să fie verificată incepând cu un rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \leq M \; \forall n \geq n_0$$

Remarcă: Un șir este mărginit dacă și numai dacă:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \ni a \leq x_n \leq b \; \forall n \in \mathbb{N}$$