Osnovi elektrotehnike 1

- I kolokvijum -

Skripta je napravljena na osnovu ”Pitanja za proveru znanja iz predmeta Osnovi elektrotehnike 1 (A grupa)’’

Neka pitanja možda nisu tačna. Ukoliko neko ispravi, neka mi pošalje da objavim noviju verziju.

Elektrostatika

Pitanja za proveru znanja iz predmeta Osnovi elektrotehnike 1 (A grupa)

1. **Kako se definišu: linijska (podužna), površinska i zapreminska gustina naelektrisanja u slučaju ravnomerne, a kako u slučaju neravnomerne raspodele? Navesti jedinice za pojedine gustine naelektrisanja.**

Ravnomerna raspodela

a) linijsko (podužno) naelektrisanje ($q' = const$)

$$q' = \frac{Q}{l} \quad ; \quad Q = q' \cdot l$$

b) površinsko naelektrisanje ($\eta = const$)

$$\eta = \frac{Q}{S} \quad ; \quad Q = \eta \cdot S$$

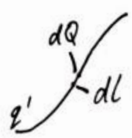
c) zapreminsko naelektrisanje ($\rho = const$)

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad ; \quad Q = \rho \cdot V$$

Neravnomerna raspodela

a) Podužno naelektrisanje q'

Naelektrisanje Q je raspoređeno na nekom telu ukupne dužine l (naelektrisanje ne mora biti ravnomerno raspoređeno). Na svakom mestu diferencijalno male dužine dl nalazi se diferencijalno malo opterećenje dQ.



$$\boxed{q' = \frac{dQ}{dl}}$$

$$Q = \int_l dQ = \int_l q' \cdot dl$$

jedinica: $q' \left[\frac{C}{m}\right]$

b) Površinsko naelektrisanje

Naelektrisanje Q je raspoređeno po nekoj površini S. Na diferencijalno malom elementu dS nalazi se diferencijalno malo opterećenje dQ.

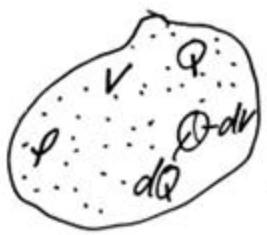
$$\boxed{\eta = \frac{dQ}{dS}}$$

$$Q = \int_S dQ = \int_S \eta \cdot dS$$

jedinica: $\eta \left[\frac{C}{m^2}\right]$

c) Zapreminsko naelektrisanje

Moguće je samo u slučaju dielektrika (izolatora), naelektrisanje Q je raspoređeno unutar zapremine V. U diferencijalno malom elementu zapremine dV nalazi se diferencijalno malo opterećenje dQ.



$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

jedinica: $\rho\left[\frac{C}{m^3}\right]$

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho \cdot dV$$

- Materijal može da se naelektriše; u slučaju ,,elektrika'' naelektrisanje se zadržava na mestu gde je nastalo, a kod ,,neelektrika'' ne.
- Provodnici provode elektricitet 10^{15} do 10^{2} puta brže od izolatora.
- Elektrici – izolatori
  neelektrici – provodnici.

2. Napisati Kulonov zakon u vektorskom obliku. Od čega zavisi sila između dva tačkasta naelektrisanja?

$$\boxed{F = k \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}}$$

$$\boxed{\vec{F} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \hat{r}}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

$$k_0 = 9{,}1 \cdot 10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$$

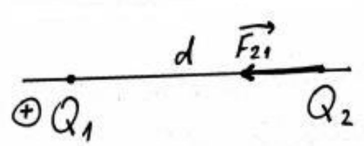
$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

ε – ukupna dielektrična konstanta sredine $\left[\frac{F}{m}\right]$

ε_r – relativna dielektrična konstanta sredine

Sila između dva tačkasta naelektrisanja zavisi od :
- pravca na kome leže naelektrisanja
- da li su naleketrisanja istog znaka (sila je odbojna) $Q_1Q_2 > 0$
- da li su naelektrisanja različitog znaka (sila je privlačna) $Q_1Q_2 < 0$
- sredine u kojoj se nalaze naelektrisanja (u vakuumu najveća)
- sila je direktno proporcionalna vrednosti jednog i drugog naelektrisanja, odnosno njihovom proizvodu
- sila je obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja naelektrisanja

3. **Dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze se na međusobnom rastojanju d u vakuumu (slika 1). Ako je $Q_1 = Q$ i $Q_2 = -Q$ odrediti silu na naelektrisanje Q_2. Ako se rastojanje između naelektrisanja duplo poveća (r = 2d) koliko puta će se promeniti intenzitet sile na nalektrisanje Q_2?**

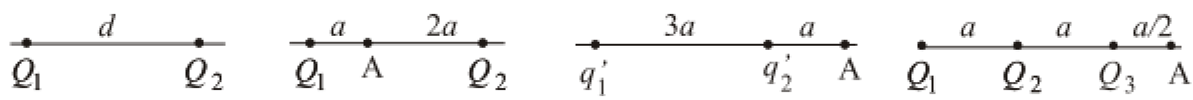


a) $F_{21} = k_0 \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} = k_0 \cdot \frac{Q^2}{d^2}$

b) $F_{12}' = k_0 \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{(2d)^2} = k_0 \cdot \frac{Q^2}{4d^2} = \frac{F_{12}}{4}$

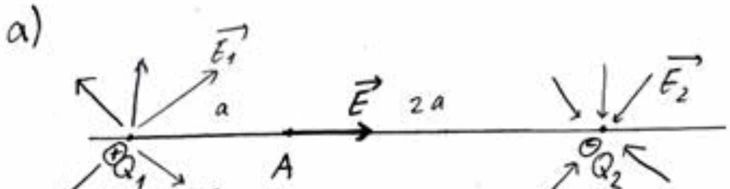
smanjiće se 4 puta

4. **Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q$ i $Q_2 = -Q$ nalaze se u vakuumu. a) Odrediti vektor jačine električnog polja u tački A čiji je položaj dat na slici 2; b) Odrediti silu na probno naelektrisanje $\Delta Q > 0$ u tački A.**



Slika 1. Slika 2. Slika 3. Slika 4.

a)

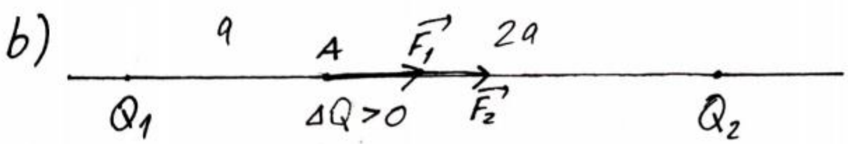


$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q}$

$E_1 = k_0 \cdot \frac{|Q_1|}{a^2} = \frac{k_0 Q}{a^2}$ $\quad E_2 = k_0 \cdot \frac{|Q_2|}{(2a)^2} = \frac{k_0 Q}{4a^2}$

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{k_0 Q}{a^2} \cdot \frac{5}{4} \hat{r}_{12}$

b)



$F_1 = k_0 \cdot \frac{|Q_1| \cdot \Delta q}{a^2}$ $\quad \vec{F} = (F_1 + F_2) \cdot \hat{r}_{12}$

$F_2 = k_0 \cdot \frac{Q_2 \cdot \Delta q}{4a^2}$ $\quad \vec{F} = k_0 \cdot \frac{Q \cdot \Delta Q}{a^2} \cdot \frac{5}{4} \hat{r}_{12}$

5. **Definisati elektrostatičko polje i vektor jačine elektrostatičkog polja.**

Elektrostatičko polje je posebno fizičko stanje prostora u okolini naelektrisanja (tela koje je naelektrisano) koje se vidno manifestuje dejstvom sile na naelektrisanje uneto u taj prostor.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q}} \quad ; \quad E\left[\frac{N}{C}\right] = \left[\frac{V}{m}\right]$$

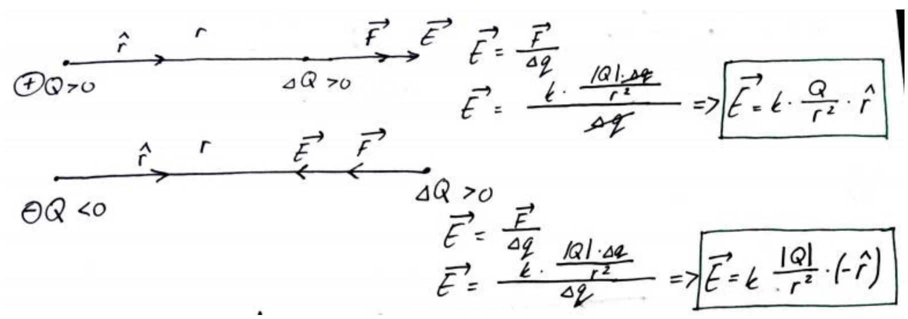
Vektor jačine elektrostatičkog polja jednak je količniku vektora sile koja deluje na pozitivno probno naelektrisanje (u određenoj tački u prostoru) i tog naelektrisanja.

6. **Definisati tačkasto naelektrisanje. Napisati vektor jačine elektrostatičkog polja tačkastog naelektrisanja na rastojanju r od izvora i izraz za izračunavanje vektora jačine električnog polja sistema od N tačkastih naelektrisanja.**

Tačkasto naelektrisanje je naelektrisanje koje se nalazi na telu čije su dimenzije mnogo manje od rastojanja do drugih naelektrisanja ili do tačke u kojoj se nalazi posmatrač.

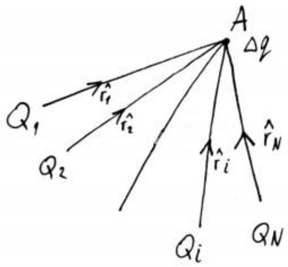
$$Q = [C]$$

<u>$\vec{E}$ **tačkastog naelektrisanja**</u>



Kako je u pitanju izvor, Q>0, važi prvi deo slike. Da je u pitanju ponor (Q<0), važio bi drugi deo slike.

$\vec{E}$ sistema od N tačkasti naelektrisanja



$$\vec{F_1} = k \cdot \frac{Q \cdot \Delta q}{r_1^2} \cdot \hat{r}_1$$

$$\vec{F_2} = k \cdot \frac{Q_2 \cdot \Delta q}{r_2^2} \cdot \hat{r}_2$$

$$\vec{F_i} = k \cdot \frac{Q_i \cdot \Delta q}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i$$

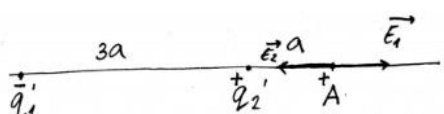
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{Q_i \Delta q}{r_i^2} \hat{r}_i =$$

$$\vec{F} = \Delta q \cdot \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{Q_i \cdot \hat{r}_i}{r_i^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q} = \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i$$

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} E_i}$$

7. Dva podužna naelektrisanja q'$_1$ i q'$_2$ nalaze se na međusobnom rastojanju 3a u vakuumu. Ako je q'$_1$ = -q' i q'$_2$ = q' odrediti vektor jačine električnog polja u tački A čiji je položaj dat na slici 3.



$q_1' = -q'$

$q_2' = +q'$

$\vec{E_A} = ?$

$\vec{E_A} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$$\vec{E_1} = k_0 \cdot \frac{|q_1'|}{(4a)^2} = k_0 \cdot \frac{q'}{16a^2}$$

$$\vec{E_2} = k_0 \cdot \frac{q_2'}{a^2} = k_0 \cdot \frac{q'}{a^2}$$

$$\vec{E_A} = \vec{E_1} - \vec{E_2}$$

$$= k_0 \cdot \frac{q'}{a^2}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{1}\right)$$

$$\vec{E_A} = -k_0 \cdot \frac{15 \cdot q'}{a^2}$$

8. Definisati liniju polja i spektar polja. Skicirati spektar homogenog polja.

Linije polja su zamišljene linije koje u svakoj tački za tangentu imaju vektor jačine električnog polja. Orijentisane su u smeru projekcije vektora jačine električnog polja na liniju polja. Linije polja se ne mogu seći.

Spektar polja jeste skup linija polja. Intenzitet $\vec{E}$ proporcionalan je gustini linija polja.

Ukoliko polje u svim tačkama ima isti pravac, smer i intenzitet, onda se ono naziva homogenim poljem. Linije homogenog polja su paralelne i ekvivalentne.

9. Objasniti konzervativni karakter elektrostatičkog polja i napisati uslov koji u tom slučaju zadovoljava vektor jačine električnog polja.

Pod pojmom konzervativnog polja podrazumeva se polje kod koga je rad sila polja po zatvorenoj putanji jednak nuli.

Da je polje konzervativno dokazuje se pomoću zakona o održanju rada i energije. Neka se u elektrostatičkom polju (koje je posledica nekog rasporeda naelektrisanih tela za čija je naelektrisanja uložen određeni rad) po zatvorenoj putanji C (čiji se smer može proizvoljno birati) kreće naelektrisanje Q. Rad sila polja za jedan obilazak putanje može biti pozitivan (za jedan smer kretanja), negativan (za drugi smer kretanja) ili jednak nuli. Biramo smer za koji je rad sila polja pozitivan. Pošto naelektrisanje tu putanju može obići neograničeno veliki broj puta, može se dobiti neograničeno veliki rad, što je u suprotnosti sa zakonom o održanju rada i energije. Kretanjem naelektrisanja Q ne mogu se promeniti naelektrisanja koja stvaraju polje, a samim tim ni energija sistema. Prema tome, jedini zaključak je da taj rad mora biti jednak nuli, što znači da elektrostatičko polje ima konzervativan karakter.

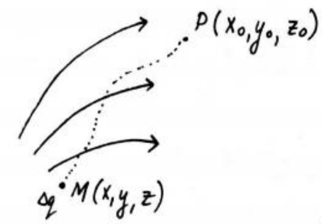
$$\boxed{A = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \cdot \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

<u>Posledica</u>

Rad sila polja pri pomeranju naelektrisanja između dve tačke u polju ne zavisi od oblika putanje po kojoj se naelektrisanje kreće, već samo od položaja tih tačaka.

10. Kako se definiše potencijal neke tačke u elektrostatičkom polju i od čega on zavisi? Definisati napon između dve tačke u polju. Napisati izraz za izračunavanje potencijala tačkastog naelektrisanja Q.



Kada se prebaci iz tačke M u P izvršava se rad:

$$A = \int_M^P \vec{F} \cdot \vec{dl} = \Delta q \cdot \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

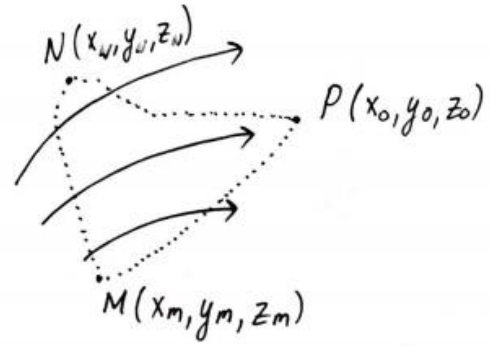
$$W_{pot} = A = \Delta q \cdot \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad / : \Delta q$$

$$\frac{W_{pot}}{\Delta q} = \boxed{\int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl} = \varphi}$$

- Funkcija elektrostatičkog potencijala ne zavisi od Δq, već samo od položaja tačaka M i P, i od električnog polja $\vec{E}$.
- Potencijal bilo koje tačke M u elektrostatičkom polju u odnosu na referentnu tačku P jednak je linijskom integralu vektora električnog polja od tačke M do referentne tačke P:

$$\varphi = \int_M^P \vec{E}\,\vec{dl}$$

- Referentna tačka P se može izabrati u beskonačnosti: $\int_M^{\infty} \vec{E}\vec{dl} = \varphi$
- Napon između dve tačke u polju:



$$\varphi_M = \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad \varphi_N = \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl} - \int_N^P \vec{E} \cdot \vec{dl} =$$

$$= \int_M^P \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_P^N \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\boxed{U_{MN} = \int_M^N \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

jedinica

U [V]

- Potencijalna razlika (napon) između dve tačke jednaka je linijskom integralu polja između tih dveju tačaka i ne zavisi od putanje integracije i izbora referentne tačke.
- U električnom polju na opterećenje Q deluje sila $\vec{F} = Q\vec{E}$. Pri pomeranju Q između M i N (naelektrisanje se može pomeriti pod dejstvom sila elektrostatičkog polja ili protiv njih) izvršiće se rad.

$$A = \int_M^N \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_M^N Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{dl} = Q \int_M^N \vec{E} \cdot \vec{dl} = Q(\varphi_M - \varphi_N) = Q \cdot u_{MN}$$

- Rad se izračunava kao proizvod naelektrisanja i napona između kojih se naelektrisanje kreće.

· Potencijal tačkastog naelektrisanja Q :

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_P}\right)}$$

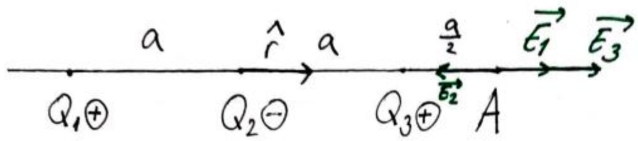
Potencijal na rastojanju r od tačkastog naelektrisanja Q u homogenom dielektriku u odnosu na referentnu tačku P koja se nalazi na r_P od Q.

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}}$$

r – rastojanje od tačkastog naelektrisanja

ako je P u beskonačnosti

11. Raspored tri tačkasta naelektrisanja Q_1=Q, Q_2=-2Q i Q_3=Q, u vakuumu dat je na slici 4. Odrediti vektor jačine električnog polja i potencijal u tački A.



$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}$$

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{F_1}}{\Delta q} = \frac{k_0 \cdot \frac{|Q_1| \cdot \cancel{\Delta q}}{(2a+\frac{a}{2})^2}}{\cancel{\Delta q}} = k_0 \cdot \frac{Q}{(\frac{5a}{2})^2} = \underline{k_0 \cdot \frac{4Q}{25a^2}},$$

$$\vec{E_2} = \frac{\vec{F_2}}{\Delta q} = \frac{k_0 \cdot \frac{|Q_2| \cdot \cancel{\Delta q}}{(a+\frac{a}{2})^2}}{\cancel{\Delta q}} = k_0 \cdot \frac{2Q}{(\frac{3a}{2})^2} = \underline{k_0 \cdot \frac{8Q}{9a^2}},$$

$$\vec{E_3} = \frac{\vec{F_3}}{\Delta q} = \frac{k_0 \cdot \frac{|Q_3| \cdot \cancel{\Delta q}}{(\frac{a}{2})^2}}{\cancel{\Delta q}} = \underline{k_0 \cdot \frac{4Q}{a^2}},$$

$$\vec{E_1} = (E_1 - E_2 + E_3) \cdot \hat{r}$$

$$= \frac{k_0 Q}{a^2} \cdot \left(\frac{4}{25} - \frac{8}{9} + 4\right) \cdot \hat{r}$$

$$\underline{\vec{E} = k_0 \cdot \frac{Q}{a^2} \cdot \frac{736}{225}}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

$$\varphi_1 = k_0 \cdot \frac{Q}{\frac{5a}{2}} = \frac{2k_0 \cdot Q}{5a}$$

$$\varphi_2 = k_0 \cdot \frac{Q}{\frac{3a}{2}} = \frac{2k_0 Q}{3a}$$

$$\varphi_3 = k_0 \cdot \frac{Q}{\frac{a}{2}} = \frac{2k_0 Q}{a}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

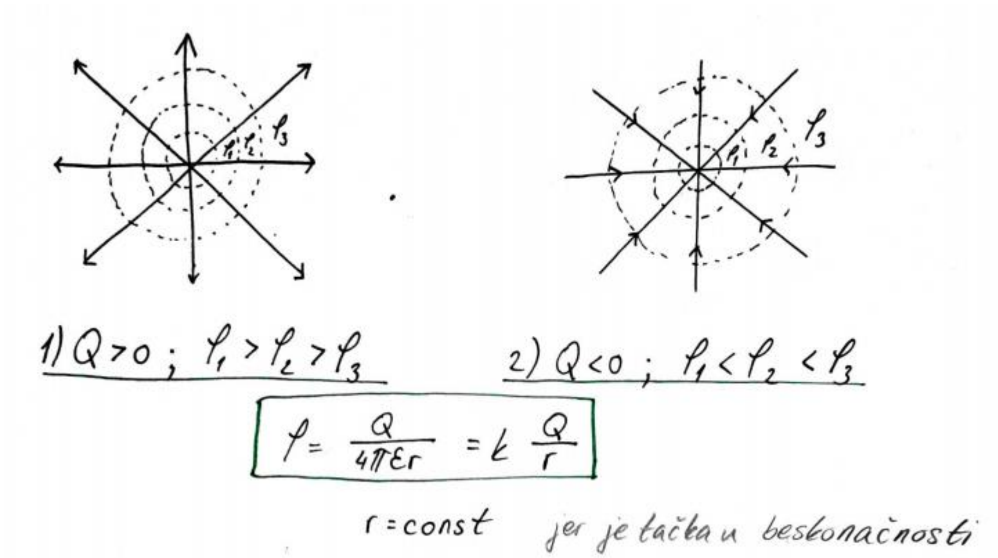
$$= \frac{2k_0 Q}{a}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2k_0 Q}{a} \cdot \frac{8}{15}$$

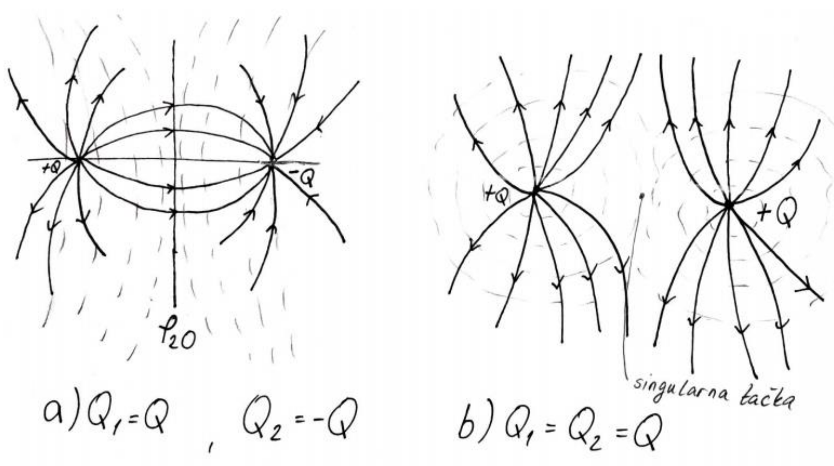
$$= \frac{16Q}{15a}$$

12. Definisati ekvipotencijalnu površinu. Za usamljeno pozitivno tačkasto naelektrisanje Q, skicirati spektar polja i ekvipotencijalne linije. Postupak ponoviti za usamljeno negativno tačkasto naelektrisanje -Q.

Ekvipotencijalne površine jesu površine koje u svakoj tački imaju isti potencijal (potencijal je konstantan).



13. Skicirati spektar električnog polja i ekvipotencijalne linije dva tačkasta naelektrisanja na međusobnom rastojanju d (slika 1) ako je: a) Q_1=Q, i Q_2=-Q; b) Q_1=Q_2=Q.

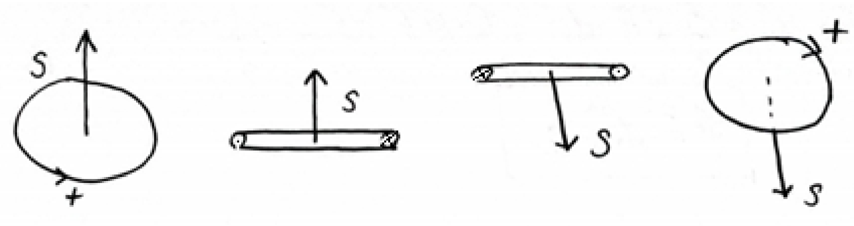


14. Kakav je međusobni položaj linija polja i ekvipotencijalnih površina?

Linije polja i ekvipotencijalne površine su međusobno normalne.

15. Definisati vektor ravne površine $\vec{S}$ i fluks vektora jačine električnog polja $\vec{E}$.

Vektor ravne površine $\vec{S}$ je vektor čiji je intenzitet jednak vrednosti površine S, pravac mu je pravac normale na površinu, a smer se određuje po pravilu desne zavojnice u odnosu na pozitivnu orijentaciju konture na koju se ta površina oslanja.



Fluks vektora polja, u homogenom polju, se kroz ravnu površinu S izračunava kao skalarni proizvod vektora polja i vektora površine.

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Vrednost fluksa kroz neku površinu proporcionalna je broju linija polja koje prodiru tu površinu.

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Fluks vektora električnog polja tačkastog naelektrisanja kroz neku površinu zavisi od prostornog ugla pod kojim se ta površina vidi sa mesta na kome se nalazi naelektrisanje, a ne od oblika i dimenzije te površine, niti od njenog rastojanja od naelektrisanja.

16. Kako glasi Gausov zakon? Koju fizičku činjenicu u vezi vektora jačine električnog polja on iskazuje?

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Izlazni fluks vektora jačine električnog polja kroz proizvoljnu zatvorenu površinu jednak je količniku ukupne količine elektriciteta obuhvaćene tom površinom i dielektrične konstante vakuuma. Gausov zakon važi samo za elektrostatička polja u vakuumu.

Fizički, Gausov zakon iskazuje izvorni karakter elektrostatičkog polja. Linije polja polaze sa pozitivnih (izvori linija polja) ka negativnim (ponori linija polja) naelektrisanjima.

17. Napisati Gausov zakon: a) za sistem od N tačkastih naelektrisanja Q_i, i=1, 2, ..., N; b) za naelektrisanje raspoređeno u prostoru, poznate zapreminske gustine ρ.

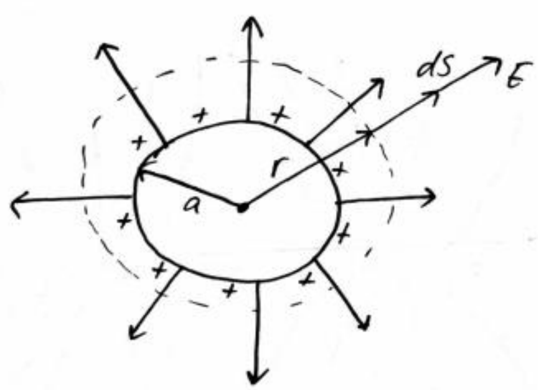
a) Za sistem od N tačkastih naelektrisanja Q_i, i=1,2,...,N:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

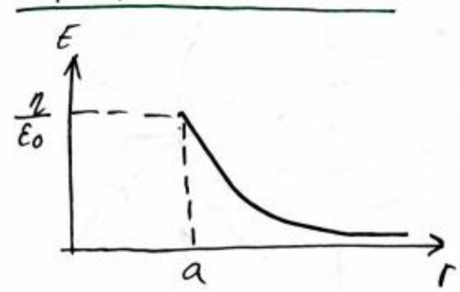
b) Za naelektrisanje raspoređeno u prostoru, poznate zapreminske gustine:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

18. Skicirati spektar linija električnog polja kod usamljene provodne sfere poluprečnika a opterećene naelektrisanjem Q. Napisati izraz za polje na površini provodnika i na rastojanju r od centra sfere, (r>a). Nacrtati zavisnost E(r).



* zavisnost E(r):



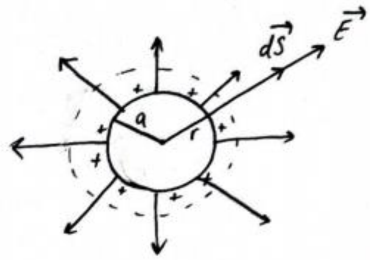
* na površini provodnika

$$E_{max} = E_{(r=a)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi a^2 \varepsilon_0} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} = E_{max}$$

* na rastojanju r od centra sfere

$$E = E_{(r>a)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_0 \cdot \frac{Q}{r^2} = E$$

19. Skicirati spektar linija električnog polja kod usamljenog neograničeno dugog provodnog cilindra poluprečnika a koji je ravnomerno opterećen podužnom gustinom naelektrisanja q'. Napisati izraz za polje na površini provodnika i na rastojanju r od ose cilindra (r>a). Nacrtati zavisnost E(r).



* na površini provodnika

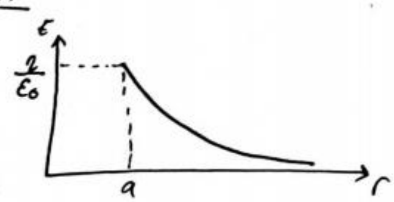
$$E_{max} = E_{(r=a)} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 \cdot a} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{h}{h} = \frac{a}{\varepsilon_0 S_0} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

$$E_{max} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

* na rastojanju r od ose cilindra

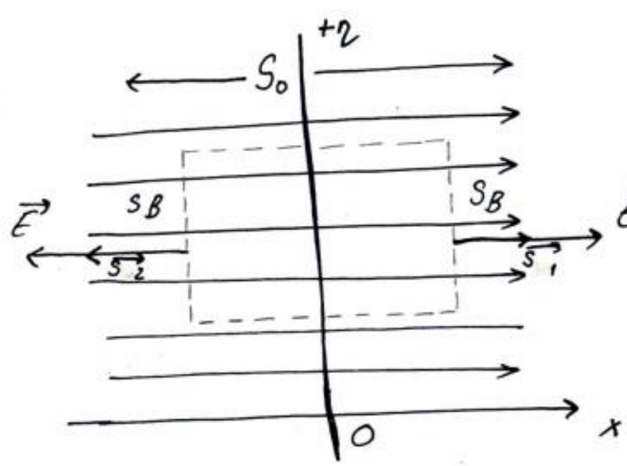
$$E = E_{(r>a)} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r} = E$$

* zavisnost E(r)



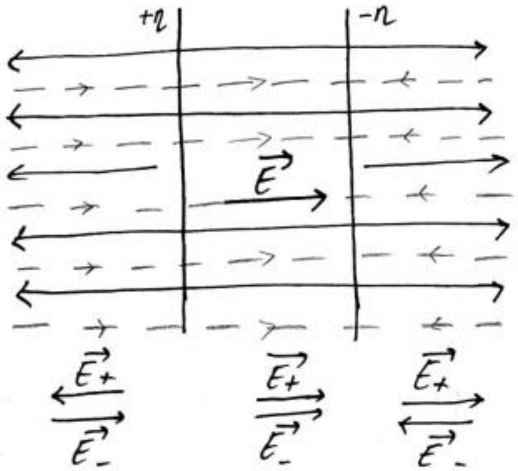
20. Skicirati spektar električnog polja i napisati izraz za električno polje: a) usamljene neograničene provodne ravni opterećene naelektrisanjem stalne površinske gustine η; b) između dve paralelne neograničene provodne ravni opterećene naelektrisanjima stalne površinske gustine + η i - η.

a) Usamljene neograničene provodne ravni opterećene naelektrisanjem stalne površinske gustine η



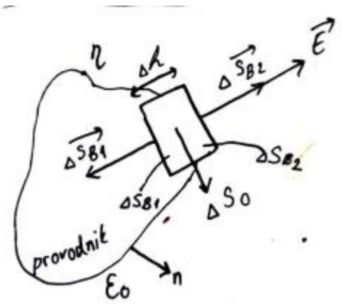
$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}$$

b) Između dve paralelne neograničene provodne ravni opterećene naelektrisanjima stalne površinske gustine + η i - η.



$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

21. Izvesti granični uslov za vektor jačine električnog polja $\vec{E}$ na površini provodnika.
22. Šta je to kondenzator? Od čega zavisi kapacitivnost kondenzatora?



$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Delta S_{B1} = \Delta S_{B2} = \Delta S_B$$

$$\Delta h \to 0$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_{B1}} \vec{E}\,d\vec{S} + \cancel{\int_{\Delta S_{B2}} \vec{E}\,d\vec{S}}^{\,0} + \cancel{\int_{\Delta S_0} \vec{E}\,d\vec{S}}^{\,0} = \quad (\Delta h \to 0)$$

$$= \vec{E}\cdot\Delta\vec{S_B} = E_n \cdot \Delta S_B$$

$$Q = \eta \cdot \Delta S_B \Rightarrow E_n \cdot \Delta S_B = \frac{\eta \cdot \Delta S_B}{\varepsilon_0}$$

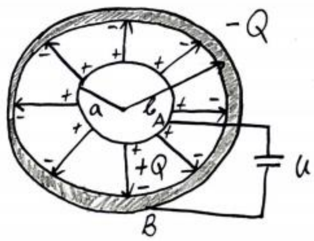
$$E_n = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}}$$

Kondenzator je sistem od 2 provodna tela, ili dve grupe međusobno povezanih provodnih tela, jednakim naelektrisanim količinama elektriciteta suprotnog znaka.

Kapacitet kondenzatora zavisi od dimenzija i oblika elektroda i njihovog međusobnog položaja, kao i od sredine u kojoj se elektrode nalaze (ne zavisi od opterećenja, kondenzatora i od napona između njegovih elektroda).

$$C = \frac{Q}{U}\,\underset{\text{Farad}}{[F]} \rightarrow$$ koliku količinu elektriciteta može primiti kondenzator pri određenom naponu između njegovih elektroda

23. **Izvesti izraz za kapacitivnost sfernog kondenzatora poluprečnika elektroda a i b.**



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \; ; \; E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$[r<a]$: $E=0$

$[a<r<b]$: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$[r>b]$: $E=0$

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

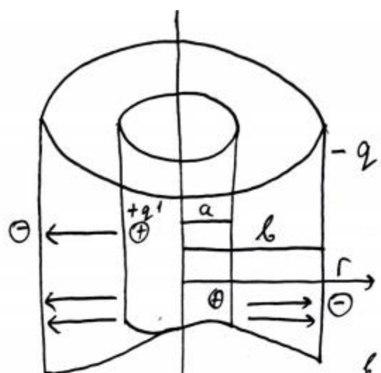
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a\cdot b}{b-a}$$

$$\underbrace{C_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}} \qquad \underbrace{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{b-a}} \Rightarrow C = \varepsilon_r\cdot C_0$$

ε_0 – za vakuum

ε_r – za neki dielektrik

24. **Izvesti izraz za podužnu kapacitivnost cilindričnog kondenzatora poluprečnika elektroda a i b**



$[r<a]$: $E=0$

$[a<r<b]$: $E = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\hat{r}$

$[r>b]$: $E=0$

$C = \frac{Q}{U}$

$C = \frac{q'\cdot h}{U}$

$\int_a^b \frac{dr}{r}$

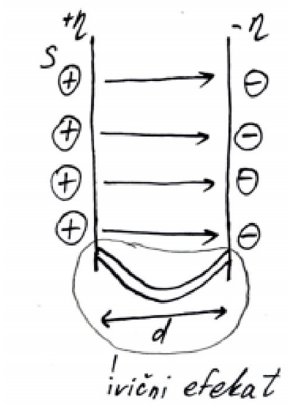
$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{q'}{2\pi\varepsilon r}\cdot dr = \frac{q'}{2\pi\varepsilon}\cdot \ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{C}{h} = \frac{q'\cdot h}{U\cdot h} = \frac{q'}{h} = \frac{q'}{\frac{q'}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}} \quad \left[\frac{F}{m}\right]$$

podužna kapacitativnost

25. **Izvesti izraz za kapacitivnost ravnog kondenzatora površine elektroda S i rastojanja između njih d.**



$$E = \frac{\eta}{\varepsilon} \; ; \; U = E\cdot d \; ; \; C = \frac{Q}{U} \; ; \; Q = \eta \cdot S$$

$$\eta = \frac{Q}{S}$$

$$U = E\cdot d = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\cdot d = \frac{Q}{S\cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r}\cdot d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{S\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot d} = \varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \frac{S}{d} = C$$

Kapacitativnost **zavisi** od oblika elektroda, dimenzija sistema (u zavisnosti od toga da li su a, b veći ili manji) i od sredine. Kapacitativnost ne zavisi od napona i naelektrisanja.

26. **Ako se sa Ci obeleži kapacitivnost i-tog kondenzatora napisati izraz za ekvivalentnu kapacitivnost N kondenzatora vezanih: a) na red; b) u paraleli.**

a) na red

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1\cdot C_2}$$

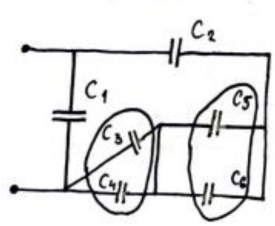
$$C_e = \frac{C_1\cdot C_2}{C_1 + C_2}$$ – ovako može samo za 2 kondenzatora

b) u paraleli

$$C_e = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

$$C_e = C_1 + C_2$$

27. **Odrediti ekvivalentnu kapacitivnost mešovite veze kondenzatora prikazane na slici 5. Poznato je: $C_1 = C_3 = 3F$, $C_2 = 4F$, $C_4 = 5F$, $C_5 = 6F$, i $C_6 = 2F$.**



$$\left[\left((C_5 \parallel C_6) \oplus (C_3 \parallel C_4)\right) \oplus C_2\right] \parallel C_1 = C_e$$

$$C_{56} = C_5 + C_6 = 6F + 2F = 8F$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 3F + 5F = 8F$$

$$C_{3456} = \frac{C_{56}\cdot C_{34}}{C_{56} + C_{34}} = \frac{8\cdot 8}{8+8} = \frac{64}{16} = 4F$$

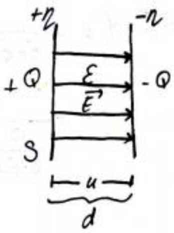
$$C_{23456} = \frac{C_{3456}\cdot C_2}{C_{3456} + C_2} = \frac{4\cdot 4}{4+4} = \frac{16}{8} = 2F$$

$$C_e = C_1 + C_{23456} = 4F$$

$$\boxed{C_e = 4F}$$

28. Napisati izraz za gustinu energije elektrostatičkog polja. Na primeru ravnog kondenzatora, površine elektroda S i rastojanja između njih d, izvesti izraz za gustinu energije elektrostatičkog polja.

$$\underbrace{W = \frac{1}{2}\varepsilon E^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$$



jedinica:

$$W\left[\frac{J}{m^3}\right]$$

$$W = \frac{1}{2}Q\cdot u \; ; \; Q = \eta\cdot S$$

$$\eta = \varepsilon\cdot E$$

$$u = E\cdot d$$

$$W = \frac{1}{2}\eta\cdot S\cdot E\cdot d = \frac{1}{2}\varepsilon\cdot E\cdot S\cdot E\cdot d \quad V$$

$$W = \frac{1}{2}E^2\varepsilon V \,/ : V$$

$$\underbrace{\frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

$u = E\cdot d$
iz neograničene ravni
$\eta = \varepsilon\cdot E$
$\vec{E} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \Rightarrow \eta = \varepsilon\cdot E$

29. Napisati izraz za energiju elektrostatičkog polja kondenzatora kapacitivnosti C ako je: a) poznat napon kondenzatora U; b) poznata količina naelektrisanja Q.

a) poznat napon kondenzatora u

$$\underbrace{W = \frac{C\cdot u^2}{2}}$$

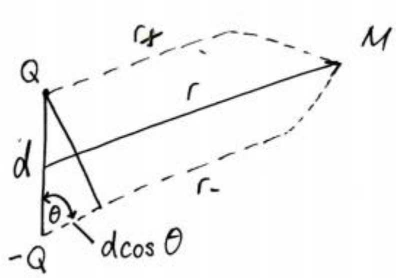
b) poznata količina naelektrisanja Q

$$\underbrace{W = \frac{Q^2}{2C}}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\cdot u}{2} = \frac{C\cdot u^2}{2}$$

30. Definisati električni dipol i električni moment dipola. Kako se ponaša dipol u električnom polju?

Električni dipol je sistem od 2 tačkasta naelektrisanja iste vrednosti, suprotnog znaka, koja se nalaze na međusobnom rastojanju d.

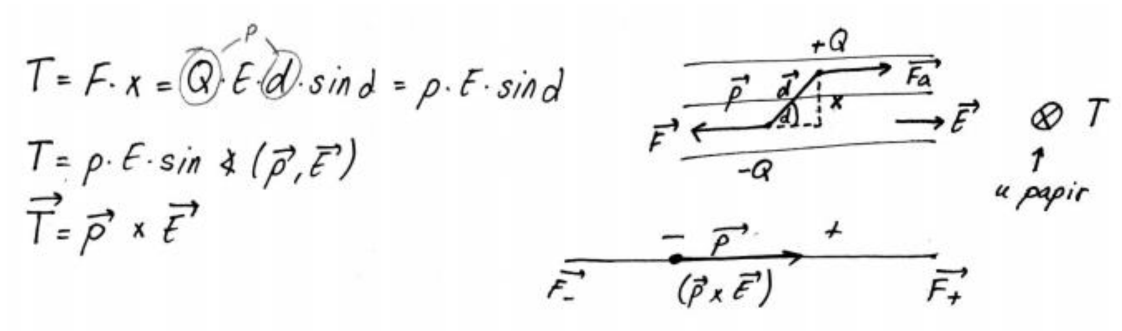


$\vec{p} = Q\cdot\vec{d}$

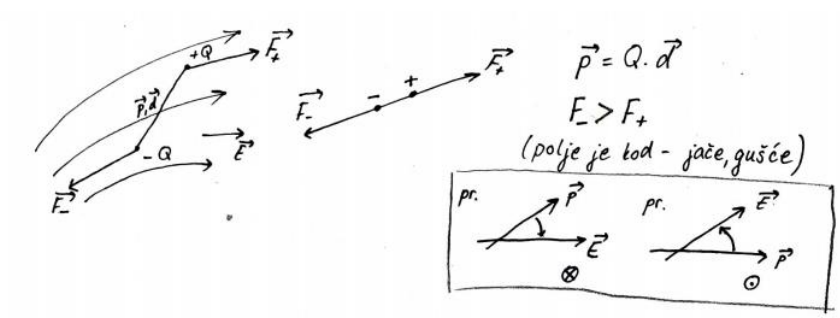
(električni moment dipola

Električni moment dipola je vekorska veličina. Njegov smer je od negativnog ka pozitivnom polu dipola. To je proizvod količine naelektrisanja i rastojanja između njih.

Dipol u homogenom polju – na njegova naelektrisanja deluju sile u pravcu polja (na pozitivno naelektrisanje u smeru polja, a na negativno u suprotnom smeru). Intenzitet ovih sila su međusobno jednaki ($F_+ = F_- = QE$) ; i one stvaraju spreg čiji moment ima intezitet:



Dipol u nehomogenom polju – na njegova naelektrisanja će delovati sile različitog intenziteta (sila na naelektrisanje koje se nalazi u jednom polju biće veća) pa će se pored sprega, koji teži da zakrene dipol u smeru vektora električnog polja, pojaviti i rezultantna sila koja teži da povuče dipol u prostor u kome je električno polje jače.



31. Kako glasi generalisani Gausov zakon i koju fizičku činjenicu u vezi vektora elektrostatičke indukcije on iskazuje?

Izlazni fluks vektora električne indukcije kroz proizvoljnu zatvorenu površinu jednak je algebarskom zbiru slobodnih naelektrisanja obuhvaćenih tom površinom.

$$\oint_S \vec{D}\vec{ds} = Qs$$

$$\oint_S \vec{D}\vec{ds} = \oint_V \rho dV$$

$\vec{D}$ – vektor dielektrične indukcije

Maksvelov postulat iskazuje fizičku činjenicu da je polje vektora električne indukcije izvorno i da su izvori i ponori linija polja vektora $\vec{D}$ isključivo slobodna električna opterećenja, za razliku od vektora $\vec{E}$ gde su izvori i ponori linija polja i slobodna i vezana električna opterećenja.

32. **Napisati konstitutivnu vezu između vektora $\vec{D}$, $\vec{E}$ i $\vec{P}$. Navesti nazive svih fizičkih veličina u izrazu i njihove jedinice.**

$$\underline{\vec{D} = \varepsilon_0 E + \vec{P}}$$

$\vec{D}\left[\frac{C}{m^2}\right]$ vektor dielektričnog pomeraja (električna indukcija)

$\vec{E}\left[\frac{V}{m}\right]$ = vektor elektrostatičkog polja

$\vec{\varepsilon_0}\left[\frac{F}{m}\right]$ = dielektrična konstanta vakuuma (permeabilnost)

$\vec{P}\left[\frac{C}{m^2}\right]$ = vektor jačine polarizacije

33. **Na kojim naelektrisanjima su izvori a na kojim ponori linija polja vektora $\vec{D}$, $\vec{E}$ i $\vec{P}$.**

$\vec{D}$ - izvori i ponori linija polja stvaraju isključivo slobodna naelek.

$\vec{E}$ - izvori i ponori linija polja stvaraju i slobodna i vezana naelek.

$\vec{P}$ - izvori i ponori linija polja stvaraju isključivo vezana naelek

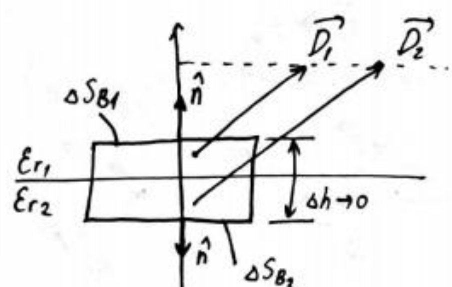
$+$ izvori linija polja

$-$ ponori linija polja

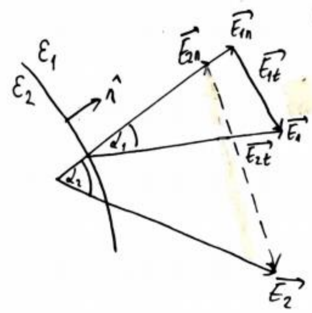
34. **Napisati granične uslove na razdvojnoj površini dva dielektrika, relativnih dielektričnih konstanti ε_{r1} i ε_{r2}, za komponente vektora električne indukcije i vektora jačine električnog polja.**

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon_1 \cdot E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\cancel{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_{r2}}{\cancel{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_{r1}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$



35. Izvesti izraz za zakon prelamanja linija polja na razdvojnoj površini dva dielektrika dielektričnih konstanti ε_1 i ε_2 .



$$tg\,\alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

iz graničnog uslova važi $E_{1t} = E_{2t}$

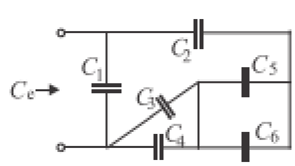
$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\cancel{E_{1t}} \cdot E_{2n}}{\cancel{E_{2t}} \cdot E_{1n}} = \frac{\cancel{D_{2n}} \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \cdot \cancel{D_{1n}}}$$

iz drugog graničnog uslova važi $D_{1n} = D_{2n}$

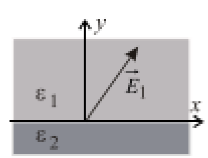
$$\underbrace{\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} * \; & D_{1n} = D_{2n} \\ & \varepsilon_1 E_{1n} \quad \varepsilon_2 E_{2n} \\ \Rightarrow \; & E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_1} \\ & E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon_2} \end{aligned}}$$

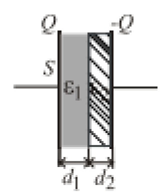
36. Vektor jačine električnog polja u sredini sa ε_1 , слика 6, neposredno uz razdvojnu površinu dva dielektrika relativnih dielektričnih konstanti $\varepsilon_{r1} = 2$ i $\varepsilon_{r2} = 3$, je $\vec{E} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ [V/m]. Odrediti vektor jačine električnog polja neposredno uz razdvojnu površinu u sredini sa ε_2 i ugao prelamanja linija električnog polja.



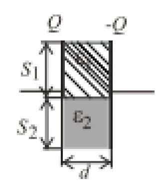
Slika 5.



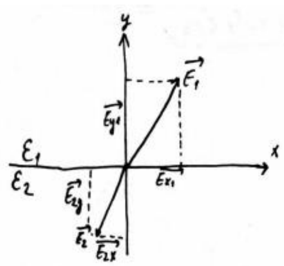
Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.



$$E_{t1} = 2 \qquad E_{n1} = 3 \quad \Rightarrow \quad E_{t1} = E_t = 2$$

$$D_{1n} = E_{1n} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}$$

$$D_{2n} = E_{2n} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow E_{1n} \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} = E_{2n} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}$$

$$E_{2n} = E_{1n} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$E_{2t} = E_{2x}$$

$$E_{2n} = E_{2y}$$

$$\vec{E_2} = E_{2x} \cdot \hat{x} + E_{2y} \cdot \hat{y} = 2\hat{x} + 2\hat{y} \left[\frac{V}{m}\right]$$

37. Definisati maksimalno i kritično polje u dielektriku. Kako se definiše koeficijent sigurnosti dielektrika?

Kritično polje – vrednost jačine električnog polja kada kroz dielektrik počinje da protiče kondukciona električna struja, ovo će imati kao posledicu prekomerno zagrevanje dielektrika, što dovodi do njegovog ukrštenja. (stoga se vodi računa da ni u jednoj tački dielektrika jačina električnog polja ne pređe vrednost E_{kr})

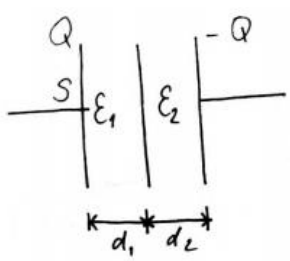
Maksimalno polje – maksimalna vrednost napona koja je nešto manja od kritičnog polja i sa kojom ne dolazi do proboja (ukoliko se ne pređe preko).

$$E_{max} \leq \frac{E_{kr}}{ks}$$

Koeficijent sigurnosti dielektrika (ks) – to je odnos kritičnog polja dielektrika i maksimalne jačine polja sa kojom se vrši proračun.

$$ks = \frac{E_{kr}}{E_{max}}$$

38. Odrediti kapacitivnost ravnog kondenzatora koji je ispunjen sa dva dielektrika dielektričnih konstanti ε_1 i ε_2, kao na slici 7. Površine elektroda su S, a debljine pojedinih slojeva dielektrika d_1 i d_2. Ivični efekat zanemariti.



I način

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$D = \eta$$

$$E = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \; ; \; D = \frac{\frac{\eta}{\cancel{\varepsilon_0}}}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\eta}{\varepsilon_2} = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

$$u = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} d_2$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

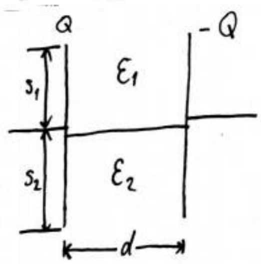
$$C = \frac{Q}{u} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)} = \underbrace{\varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{d_1 \varepsilon_{r1} + d_2 \varepsilon_{r2}} = C}$$

II način

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \cdot \frac{S}{d_2}} = \underbrace{\varepsilon_0 S \cdot \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{d_2 \varepsilon_{r1} + d_1 \varepsilon_{r2}}} = C$$

39. **Odrediti kapacitivnost ravnog kondenzatora koji je ispunjen sa dva dielektrika dielektričnih konstanti ε_1 i ε_2, kao na slici 8. Razmak između elektroda je d a površine elektroda sa različitim dielektricima su S_1 i S_2. Ivični efekat zanemariti.**



I način

$$E_1 t = E_2 t$$

$$u = E \cdot d$$

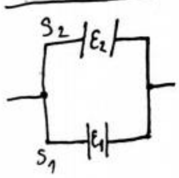
$$\eta_1 = B_1 = \varepsilon_1 E = \varepsilon_1 \frac{u}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{u}{d}$$

$$\eta_2 = B_2 = \varepsilon_2 E = \varepsilon_2 \frac{u}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{u}{d}$$

$$Q = \eta_1 S_1 + \eta_2 S_2 = \frac{u}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S_1 + \frac{u}{d} \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S_2$$

$$C = \frac{Q}{u} = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \underline{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S_2}{d}}$$

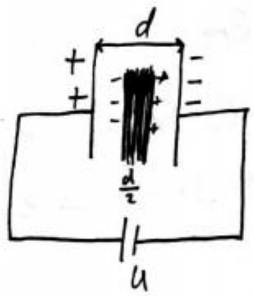
II način



$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S_1}{d} \qquad C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} =$$

$$C_2 = \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S_2}{d} \qquad \underline{C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S_2}{d}}$$

40. **Kapacitivnost ravnog vazdušnog kondenzatora površine elektroda S i rastojanja između njih d iznosi C_0. Koliko puta će se promeniti kapacitivnost kondenzatora ako se rastojanje između njegovih elektroda poveća dva puta, a uz jednu elektrodu postavi ploča od dielektrika relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 2$ debljine d/2.**



$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d - \frac{d}{2}} = \varepsilon_0 \frac{\frac{S}{2}}{\frac{d}{2}} = 2\,\varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d} = 2\,C_0$$

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 u^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 u^2 = C_0 u^2$$

$$C_1 = 2\,C_0$$

$$W_1 = 2\,W_0$$

Jedinice

tačkasto naelektrisanje
q - naelektrisanje bilo kog tela - C
tačkasto naelektrisanja

λ' - podužna gustina naelektrisanja - C/m

η - površinska gustina naelektrisanja - C/m^2

$\rho(\rho)$ - zapreminska gustina naelektrisanja - C/m^3

F - intenzitet sile - N

k - konstanta proporcionalnosti - $k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

ε - dielektrična konstanta sredine - $\frac{F}{m}$

ε_r - relativna dielektrična konstanta - /

ε_0 - dielektrična konstanta vakuuma (permeabilnost) - $\frac{F}{m}$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

Δq - probno naelektrisanje - C

$\vec{E}$ - vektor jačine elektrostatičkog polja - N/C, $\underline{V/m}$

φ - električni skalar potencijal - V

A - rad - J

U - potencijalna razlika (napon) - V

$\vec{S}$ - vektor ravne površine

Ψ_E - fluks vektora jačine električnog polja

Ψ_v - fluks vektora brzine v

C - električna kapacitivnost - F

C' - podužna kapacitivnost - F/m

W - energija elektrostatičkog polja (kondenzatora) - J/m

w - zapreminska gustina energije elektrostatičkog polja - J/m^3

$\vec{p}$ - električni moment dipola - C·m $(Q\vec{d})$

$\vec{T}$ - moment sprega $(\vec{p} \times \vec{E})$

$\vec{P}$ - vektor jačine polarizacije - C/m^2

α - koeficijent polarizacije dielektrika

$\vec{D}$ - vektor električne indukcije (dielektričnog pomeraja) - C/m^2

E_{kr} - kritično polje dielektrika - V/m

k_s - koeficijent sigurnosti = $\frac{E_{kr}}{E_{max}}$

E_{max} - maksimalna jačina polja - V/m

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40