Теоријске основе информатике 1

Ненад Стојановић
nenad.s@kg.ac.rs

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Крагујевац, 12.12.2018.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

3. Убацујемо $\neg$ у заграде користећи: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
3. Убацујемо $\neg$ у заграде користећи: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
4. Елиминишемо дупле негације користећи: $\neg\neg p \equiv p$.

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

3. Убацујемо $\neg$ у заграде користећи: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

4. Елиминишемо дупле негације користећи: $\neg\neg p \equiv p$.

5. Подешавамо тако да добијемо КНФ или ДНФ користећи: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ и њихова уопштења

КНФ - ДНФ алгоритам

Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
3. Убацујемо $\neg$ у заграде користећи: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
4. Елиминишемо дупле негације користећи: $\neg\neg p \equiv p$.
5. Подешавамо тако да добијемо КНФ или ДНФ користећи: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ и њихова уопштења
6. Козметичка подешавања: $p \wedge p \equiv p,\ p \vee p \equiv p,\ q \wedge \top \equiv q,\ q \vee \top \equiv \top,\ q \wedge \bot \equiv \bot,\ q \vee \bot \equiv q$.

КНФ - ДНФ

4. Одредити КНФ и ДНФ следеће формуле

$$p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p).$$

КНФ - ДНФ

4. Одредити КНФ и ДНФ следеће формуле

$$p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p).$$

5. Доказати да су следеће формуле таутологије:

(a) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;

КНФ - ДНФ

4. Одредити КНФ и ДНФ следеће формуле

$$p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p).$$

5. Доказати да су следеће формуле таутологије:

(а) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;

(б) $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$;

4. Одредити КНФ и ДНФ следеће формуле

$$p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p).$$

5. Доказати да су следеће формуле таутологије:

(а) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;

(б) $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$;

(в) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$;

КНФ - ДНФ

4. Одредити КНФ и ДНФ следеће формуле

$$p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p).$$

5. Доказати да су следеће формуле таутологије:

(а) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;

(б) $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$;

(в) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$;

(г) $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow ((p_3 \Rightarrow p_1) \Rightarrow (p_4 \Rightarrow p_1))$.

Резолуција у исказној логици

Литерал. Литерал је исказно слово или негација исказног слова.

Резолуција у исказној логици

Литерал. Литерал је исказно слово или негација исказног слова.

Клауза. Клауза је дисјункција литерала. Клаузе ћемо записивати као скупове: тј. клаузу $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, где су L_i литерали, пишемо као $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

Резолуција у исказној логици

Литерал. Литерал је исказно слово или негација исказног слова.

Клауза. Клауза је дисјункција литерала. Клаузе ћемо записивати као скупове: тј. клаузу $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, где су L_i литерали, пишемо као $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

КНФ. КНФ је конјункција клауза.

Резолуција у исказној логици

Литерал. Литерал је исказно слово или негација исказног слова.

Клауза. Клауза је дисјункција литерала. Клаузе ћемо записивати као скупове: тј. клаузу $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, где су L_i литерали, пишемо као $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

КНФ. КНФ је конјункција клауза.

Правило резолуције. Ако су C_1 и C_2 клаузе, $L_1 \in C_1$, $L_2 \in C_2$ литерали такви да $L_1 \equiv \neg L_2$ (тј. један од L_1, L_2 је исказно слово, а други је његова негација), тада је **резолвента** од C_1 и C_2, у односу на L_1 и L_2, следећа клауза $Res(C_1, C_2; L_1, L_2) = (C_1 \setminus \{L_1\}) \cup (C_2 \setminus \{L_2\})$. У овом случају правило резолуције гласи

$$Res \frac{C_1, C_2}{Res(C_1, C_2; L_1, L_2)}.$$

Резолуција у исказној логици

Теорема потпуности за резолуцију. Скуп клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ је контрадикторан ако и само ако постоји доказ за $\emptyset$ из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Резолуција у исказној логици

Теорема потпуности за резолуцију. Скуп клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ је контрадикторан ако и само ако постоји доказ за $\emptyset$ из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

6. Методом резолуције доказати да је
$F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија.

Резолуција у исказној логици

Теорема потпуности за резолуцију. Скуп клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ је контрадикторан ако и само ако постоји доказ за $\emptyset$ из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

6. Методом резолуције доказати да је $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија.

7. Методом резолуције доказати да је $F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$ таутологија.

Природна дедукција

Дефиниција. Формула α је синтаксна последица скупа формула Γ, ако се секвент $\Gamma \vdash \alpha$ може добити применом следећих правила коначан број пута

Природна дедукција

Дефиниција. Формула α је синтаксна последица скупа формула Γ, ако се секвент $\Gamma \vdash \alpha$ може добити применом следећих правила коначан број пута

Аксиома $$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}(\mathrm{ax})$$	Слабљење $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \gamma \vdash \varphi}(\mathrm{Slab})$$
Увођење конјункције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}(\wedge_{\mathrm{U}})$$	Елиминација конјункције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}(\wedge_{\mathrm{E}}^{l}) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}(\wedge_{\mathrm{E}}^{d})$$
Увођење дисјункције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}(\vee_{\mathrm{U}}^{l}) \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}(\vee_{\mathrm{U}}^{d})$$	Елиминација дисјункције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}(\vee_{\mathrm{E}})$$
Увођење импликације $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Rightarrow_{\mathrm{U}})$$	Елиминација импликације $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}(\Rightarrow_{\mathrm{E}})$$

Природна дедукција

Увођење еквиваленције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}(\Leftrightarrow_{\mathrm{U}})$$	Елиминација еквиваленције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Leftrightarrow^{l}_{\mathrm{E}}) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}(\Leftrightarrow^{d}_{\mathrm{E}})$$
Увођење негације $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg_{\mathrm{U}})$$	Елиминација негације $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}(\neg_{\mathrm{E}})$$
Класична противречност $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}(\bot_{\mathrm{c}})$$	

Природна дедукција

Увођење еквиваленције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}(\Leftrightarrow_{\mathrm{U}})$$	Елиминација еквиваленције $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Leftrightarrow^{l}_{\mathrm{E}}) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}(\Leftrightarrow^{d}_{\mathrm{E}})$$
Увођење негације $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg_{\mathrm{U}})$$	Елиминација негације $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}(\neg_{\mathrm{E}})$$
Класична противречност $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}(\bot_{\mathrm{c}})$$	

Дефиниција. Формула α је доказива, тј. јесте теорема исказне логике, у ознаци $\vdash \alpha$, ако је доказив секвент $\emptyset \vdash \alpha$.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

5. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

5. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ теорема у датом дедуктивном систему.

6. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

7. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

7. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

9. Доказати да је формула $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \wedge q))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

9. Доказати да је формула $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \wedge q))$ теорема у датом дедуктивном систему.

10. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$ теорема у датом дедуктивном систему.