Теоријске основе информатике 1

Ненад Стојановић
nenad.s@kg.ac.rs

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Крагујевац, 05.12.2015.

Логичке последице

Дефиниција. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \alpha$, ако свака валуација која задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

Логичке последице

Дефиниција. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \alpha$, ако свака валуација која задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ пише се $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$

Логичке последице

Дефиниција. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \alpha$, ако свака валуација која задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ пише се $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
- $\emptyset \models \alpha$ пише се $\models \alpha$

Логичке последице

Дефиниција. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \alpha$, ако свака валуација која задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ пише се $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
- $\emptyset \models \alpha$ пише се $\models \alpha$

Теорема. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$ акко $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$.

Логичке последице

Дефиниција. Исказна формула α је логичка последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \alpha$, ако свака валуација која задовољава све формуле скупа Γ задовољава и формулу α.

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$ пише се $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
- $\emptyset \models \alpha$ пише се $\models \alpha$

Теорема. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$ акко $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$.

Теорема. Нека је Γ скуп формула и α и β неке формуле, тада важи $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ акко $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \beta$

Логичке последице

1. Нека је скуп формула $\Gamma = \{p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, p\}$. Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа формула Γ:

(а) $p \wedge \neg q$;

(б) $r \Rightarrow q$;

(в) $\neg r$;

(г) $p \wedge q \wedge r$;

(д) $\neg q \Rightarrow \neg p$;

(ђ) $p \Rightarrow \perp$.

Логичке последице

2. Нека је скуп формула $\Gamma = \{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow q, r\}$. Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа формула Γ:

(а) $p \wedge \neg q$;

(б) $\neg p \wedge q$;

(в) $\neg(p \Rightarrow q)$;

(г) p;

(д) $q \Rightarrow \neg p$;

(ђ) $p \Rightarrow \perp$.

Логичке последице

2. Нека је скуп формула $\Gamma = \{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow q, r\}$. Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа формула Γ:

(а) $p \wedge \neg q$;

(б) $\neg p \wedge q$;

(в) $\neg(p \Rightarrow q)$;

(г) p;

(д) $q \Rightarrow \neg p$;

(ђ) $p \Rightarrow \bot$.

3. Доказати да је формула $p \vee r \Rightarrow q$ логичка последица скупа формула $\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$.

Логички еквивалентне формуле

Дефиниција. Исказне формуле α и β су логички еквивалентне, у ознаци $\alpha \equiv \beta$, ако важи $\alpha \models \beta$ и $\beta \models \alpha$. Дакле, формуле α и β су логички еквивалентне уколико су њихове вредности међусобно једнаке за било коју валуацију.

Логички еквивалентне формуле

Дефиниција. Исказне формуле α и β су логички еквивалентне, у ознаци $\alpha \equiv \beta$, ако важи $\alpha \models \beta$ и $\beta \models \alpha$. Дакле, формуле α и β су логички еквивалентне уколико су њихове вредности међусобно једнаке за било коју валуацију.

Теорема. Формуле α и β су логички еквивалентне акко је исказна формула $\alpha \Leftrightarrow \beta$ таутологија, тј. $\models \alpha \Leftrightarrow \beta$.

Логички еквивалентне формуле

Дефиниција. Исказне формуле α и β су логички еквивалентне, у ознаци $\alpha \equiv \beta$, ако важи $\alpha \models \beta$ и $\beta \models \alpha$. Дакле, формуле α и β су логички еквивалентне уколико су њихове вредности међусобно једнаке за било коју валуацију.

Теорема. Формуле α и β су логички еквивалентне акко је исказна формула $\alpha \Leftrightarrow \beta$ таутологија, тј. $\models \alpha \Leftrightarrow \beta$.

4. Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули $p \Rightarrow \neg(q \vee r)$:

(а) $\neg p \vee q \vee r$;

(б) $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow \neg r)$;

(в) $\neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$;

(г) $\neg p \vee \neg(\neg q \Rightarrow r)$.

Логички еквивалентне формуле

5. Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули $p \lor \neg q \Rightarrow \neg r$:

(а) $\neg p \lor q \lor \neg r$;

(б) $\neg(q \Rightarrow p) \lor \neg r$;

(в) $\neg(p \Rightarrow q) \lor \neg r$;

(г) $r \Rightarrow \neg p \lor q$.

Логички еквивалентне формуле

5. Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули $p \vee \neg q \Rightarrow \neg r$:

(а) $\neg p \vee q \vee \neg r$;

(б) $\neg(q \Rightarrow p) \vee \neg r$;

(в) $\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg r$;

(г) $r \Rightarrow \neg p \vee q$.

6. Доказати да су формуле $p \Rightarrow q$ и $\neg q \Rightarrow \neg p$ логички еквивалентне формуле.

Примена

7. Четири пријатеља - Милена, Сузана, Алекса и Милан осумњичени су за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

Милена: Ако је Сузана крива, крив је и Милан.

Сузана: Милена је крива, а Милан није крив.

Алекса: Ја нисам крив, али су Милена или Милан криви.

Милан: Ако Милена није крива, тада је крив Алекса.

(а) Да ли су ове четири изјаве непротивречне, односно да ли је скуп формула добијен превођењем у исказну логику непротивречан?

(б) Ако свако говори истину, ко је крив?

Примена

8. Превести следећа тврђења у исказне формуле и одредити исправност аргументације:

(1) Ако су једине особе присутне у кући у време убиства били батлер и собарица, тада је батлер убица или је собарица убица.

(2) Једине особе присутне у кући у време убиства су били батлер и собарица.

(3) Ако је собарица убица, онда је собарица имала мотив за убиство.

(4) Собарица није имала мотив за убиство.

Закључак: Батлер је убица.

Примена

9. Пера, Влада и Сава су другари који често излазе заједно на пиће у кафану. Познато је да свако од њих пије увек исто пиће и то или вино или пиво (само једно од тога, јер знају ако се пиће меша, ујутро боли глава). У вези тога ко од њих шта пије, познати су следећи искази:

(1) Ако Пера пије пиво, онда Влада пије исто пиће као и Сава.

(2) Ако Влада наручује пиво, онда Сава пије другачије пиће од Периног.

(3) Ако Сава наручује вино, онда Пера пије исто пиће као и Сава.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За кога од њих са сигурношћу можете да тврдите шта пије?

Примена

10. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

Аца: Ако је Боки крив, крива је и Дуда.

Боки: Ако Аца није крив, онда је крива Цеца.

Цеца: Ја нисам крива, али је или Аца крив или је Дуда крива.

Дуда: Ја нисам крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив? (Уколико има више могућих решења навести их сва!)