Дедуктивни системи (формалне теорије) 35

- Однос $\mathcal{F} \models A$ између хипотеза $\mathcal{F}$ и последице A је дефинисан значењем ових формула у исказној алгебри.
- Дакле, ради се о семантичком приступу.
- Постоји и потпуно другачији приступ, синтаксно-дедуктивни, где се формуле посматрају искључиво као низови симбола, не улазећи у њихово значење.
- Поступци доказивања се изводе по строго дефинисаним правилима, независно од валуација и тачности формула.
- На тај начин се избегава неодређеност и непрецизност (која проистиче из употребе природног језика), а употреба интуиције своди на минимум.

Пре него што изложимо исказну рачун као формалну теорију, одговарајуће појмове ћемо дефинисати у општем случају.

Дефиниција. Формална теорија (дедуктивни систем) $\mathcal{T}$ је уређена четворка (S, For, Ax, R) где је:

- S - највише пребројив скуп полазних симбола (азбука, алфабет). Коначни низови симбола из S су речи. Скуп свих речи означимо са S^*.
- $For \subseteq S^*$ - скуп формула. Постоји ефективан поступак којим се утврђује да ли је дата реч формула или не.
- $Ax \subseteq For$ - скуп аксиома. Ако је дат ефективан поступак за одлучивање да ли је формула аксиома или не, кажемо да је теорија аксиоматска.
- R - коначан скуп правила извођења. Свако правило извођења је облика

$$r : \frac{A_1, \quad \ldots, \quad A_n}{A}$$

где су $A_1, \ldots, A_n, A$ формуле из скупа For.

Доказ, теорема

Дефиниција.

1. Коначан низ формула $B_1, B_2 \ldots, B_n$ је доказ (извођење, дедукција) у формалној теорији $\mathcal{T}$ ако за све $i = 1, \ldots, n$
   - B_i је аксиома или
   - B_i је добијена из претходних формула низа $B_1, B_2 \ldots, B_{i-1}$ применом неког правила извођења из R.
2. Формула B је теорема формалне теорије $\mathcal{T}$, у ознаци $\vdash B$, ако је последњи члан неког доказа, тј. постоји доказ $B_1, B_2 \ldots, B_{n-1}, B$ у формалној теорији $\mathcal{T}$.
3. Формална теорија $\mathcal{T}$ је одлучива ако постоји ефективни поступак којим се за произвољну формулу утврђује да ли је теорема или не.

Синтаксна последица

Дефиниција. Формула A је синтаксна последица (краће, последица) скупа формула $\mathcal{F}$, у ознаци $\mathcal{F} \vdash A$, ако постоји коначан низ $B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n$ формула из For такав да је $B_n = A$ и за свако $i = 1, \ldots, n$

- $B_i \in Ax$ или
- $B_i \in \mathcal{F}$ или
- B_i је добијена из претходних чланова низа помоћу неког од правила извођења из R.

У том случају формуле скупа $\mathcal{F}$ се зову премисе или хипотезе.

Исказни рачун као формална теорија

36

- Постоји више различитих начина да се исказни рачун изгради као формална теорија.
- Они се разликују по избору основних симбола, као и избору аксиома и правила извођења.
- Избор аксиома и правила извођења треба да буде такав да:
  - буду доказиве све таутологије (свака таутологија је теорема)
  - не мозе се доказати ниста више, сем таутологија (свака теорема је таутологија)
- Хилбертов систем, природна дедукција, рачун секвената...

Природна дедукција

Природна дедукција је формална теорија изграђена над алфабетом $S = \{p_1, \dots, p_n, \dots, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \perp, (,)\}$.

Скуп формула је изграђен на уобичајен начин (по дефиницији формуле исказне логике) помоћу симбола из S.

Симболи $\Leftrightarrow$ и $\top$ се уводе дефиницијама:

$A \Leftrightarrow B$ је замена за $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$,

$\top$ је замена за $\neg\perp$.

Нека је $\mathcal{F}$ произвољан скуп исказних формула и A исказна формула. Запис $\mathcal{F} \vdash A$ се зове секвент.

Правила извођења

Секвент $\mathcal{F} \vdash A$ је доказив ако се може добити применом следећих правила коначан број пута:

аксиома:

$$\frac{}{\mathcal{F}, A \vdash A}\ (ax)$$

слабљење:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A}{\mathcal{F}, B \vdash A}\ (slab)$$

увођење импликације:

$$\frac{\mathcal{F}, A \vdash B}{\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_U)$$

елиминација импликације:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B, \quad \mathcal{F} \vdash A}{\mathcal{F} \vdash B}\ (\Rightarrow_E)$$

увођење конјункције:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A, \quad \mathcal{F} \vdash B}{\mathcal{F} \vdash A \wedge B}\ (\wedge_U)$$

елиминација конјункције:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A \wedge B}{\mathcal{F} \vdash A}\ (\wedge^l_E) \qquad \frac{\mathcal{F} \vdash A \wedge B}{\mathcal{F} \vdash A}\ (\wedge^d_E)$$

Правила извођења

увођење дисјункције:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A}{\mathcal{F} \vdash A \vee B} \, (\vee_U^l) \qquad \frac{\mathcal{F} \vdash B}{\mathcal{F} \vdash A \vee B} \, (\vee_U^d)$$

елиминација дисјункције:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash A \vee B, \quad \mathcal{F}, A \vdash C, \quad \mathcal{F}, B \vdash C}{\mathcal{F} \vdash C} \, (\vee_E)$$

увођење негације:

$$\frac{\mathcal{F}, A \vdash \bot}{\mathcal{F} \vdash \neg A} \, (\neg_U)$$

елиминација негације:

$$\frac{\mathcal{F} \vdash \neg A, \quad \mathcal{F} \vdash A}{\mathcal{F} \vdash \bot} \, (\neg_E)$$

класична противречност:

$$\frac{\mathcal{F}, \neg A \vdash \bot}{\mathcal{F} \vdash A} \, (\bot_C)$$

K