Таутологије

30

Дефиниција. Формула A је таутологија акко је тачна за сваку валуацију исказних слова, тј. $v_\alpha(A) = \top$, за сваку валуацију α.
Да је формула A таутологија означавамо са $\models A$.
Таутологије су формуле које су тачне на основу своје форме, односно начина на које су изграђене, а не на основу избора валуације иказних слова.
Зато су таутологије закони исправног закључивања.

Списак важнијих таутологија

(1)	$p \Rightarrow p$	(закон рефлексије за импликациј
(2)	$p \vee \neg p$	(закон искључења трећег)
(3)	$\neg(p \wedge \neg p)$	(закон непротивречности)
(4)	$(\neg p \Rightarrow \bot) \Rightarrow p$	(свођење на апсурд)
(5)	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	(закон двојне негације)
(6)	$p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$	(закон идемпотенције)
(7)	$p \vee \bot \Leftrightarrow p, \quad p \vee \top \Leftrightarrow \top$	
	$p \wedge \top \Leftrightarrow p, \quad p \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	
	$(p \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg p, \quad (\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$	
(8)	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(закони комутације)
(9)	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	(МП-модус поненс)
(10	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$	(МТ-модус толленс)
(11)	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$	(Пирсов закон)

(12)	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p,$	
	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	(закони апсорпције)
(13)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(закон контрапозиције)
(14)	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$	
	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(Де Морганови закони)
(15)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$	(закон уклањања импликациј
(16)	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	(закон уклањања еквиваленц
(17)	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r,$	
	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	(закони асоцијације)
(18)	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$	
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(закони дистрибуције)
(19)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(транзитивност импликације)
(20)	$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	(транзитивност еквиваленциј

Особине таутологија

Теорема. Ако је $\models A$ и $\models A \Rightarrow B$ онда је $\models B$.

Доказ. Нека је

$$\models A \quad \text{и} \quad \models A \Rightarrow B.$$

Тада, за произвољну валуацију α важи

$$v_\alpha(A) = \top \quad \text{и} \quad v_\alpha(A \Rightarrow B) = \top,$$

па по дефиницији вредности формуле $A \Rightarrow B$ имамо

$$v_\alpha(A) \Rightarrow v_\alpha(B) = \top,$$

односно,

$$\top \Rightarrow v_\alpha(B) = \top,$$

одакле следи

$$v_\alpha(B) = \top.$$

Дакле, формула B је тачна за произвољну валуацију α, што значи да је она таутологија.

Дефиниција. Формулу
$$A[B_1/p_1,\dots,B_n/p_n]$$
добијену заменом исказних слова $p_1,\dots,p_n$ у формули $A(p_1,\dots,p_n)$ исказним формулама, редом $B_1,\dots,B_n$, зовемо **инстанца** (извод) формуле $A(p_1,\dots,p_n)$.

Теорема. Све инстанце таутологија су такође таутологије.

Доказ. Нека је

- $\models A$,
- $A[B_1/p_1,\dots,B_n/p_n]$ инстанца таутологије A и
- $\alpha:\{p_1,p_2,\dots\}\to\{\top,\bot\}$ произвољна валуација.

Дефинишимо $$\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n & \dots \\ v_\alpha(B_1) & \dots & v_\alpha(B_n) & \dots \end{pmatrix}.$$

Тада $$v_\alpha(A[B_1/p_1,\dots,B_n/p_n]) = v_{\alpha'}(A) = \top.$$

Дакле, $$\models A[B_1/p_1,\dots,B_n/p_n]. \quad \square$$

Пример. Једна инстанца таутологије

$$A(p, q) = (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

је формула

$$(\neg r \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg r))) \Rightarrow (p \wedge \neg r),$$

добијена заменом исказног слова p формулом $\neg r$ и исказног слова q формулом $p \wedge \neg r$.

Према претходној теореми и ова формула је таутологија.

Уопште, за било које исказне формуле B и C формула

$$(B \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C$$

је инстанца таутологије A.

Еквиваленцијске трансформације формула

Неформално речено, то је поступак када се од једне формуле конструише ланац еквивалентних формула, тако што се у сваком кораку нека потформула замени њој логички еквивалентном формулом. То омогућава следећа теорема.

Теорема замене. Нека је формула $A \Leftrightarrow B$ таутологија, $F(A)$ формула која има као потформулу формулу A и нека је формула $F(B)$ настала заменом формуле A у формули $F(A)$ формулом B. Тада је $F(A) \Leftrightarrow F(B)$ таутологија.

Или:

Ако $A \equiv B$, онда и $F(A) \equiv F(B)$.

Пример. Применом теореме замене и познатих таутологија добијамо

$$\begin{aligned} & \neg(p \Rightarrow q) \\ \equiv\quad & \neg(\neg p \vee q) \\ \equiv\quad & \neg\neg p \wedge \neg q \\ \equiv\quad & p \wedge \neg q \end{aligned}$$

па је

$$\models \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Методе за доказивање таутологија

31

I **Таблични метод**

- Истинитосна вредност дате исказне формуле зависи само од вредности исказних слова која у њој учествују.
- За формулу $A(p_1, \ldots, p_n)$ (са n исказних слова) има 2^n различитих "комбинација" вредности исказних слова.
- Овај поступак се састоји у провери истинитосне вредности формуле у свих 2^n случајева, што се приказује таблицом.

Методе за доказивање таутологија

Пример. Из таблице истинитости за формулу
$A = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	A
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

закључујемо да је ова формула таутологија.

Недостатак: број врста таблице брзо (експоненцијално - 2^n) расте са порастом броја исказних слова у формули.

II Свођење на противречност

- Ако пронађемо валуацију α за коју је $v_\alpha(A) = \bot$, онда A није таутологија.
- Ако такве валуације нема, онда је A таутологија.

Пример. Докажимо да је формула
$A = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија. Претпоставимо да постоји валуација α исказних слова за коју је $v_\alpha(A) = \bot$. Тада

$$v_\alpha(p \Rightarrow q) = \top \qquad \text{и} \qquad v_\alpha((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \bot$$

$$v_\alpha(q \Rightarrow r) = \top, v_\alpha(p \Rightarrow r) = \bot$$

$$v_\alpha(p) = \top, \quad v_\alpha(r) = \bot$$

$$v_\alpha(q) \Rightarrow \bot = \top$$

$$v_\alpha(q) = \bot$$

$$v_\alpha(p \Rightarrow q) = \top \Rightarrow \bot = \bot$$

Контрадикција.

Дакле, не постоји валуација за коју је вредност дате формуле једнака $\bot$, па је ова формула таутологија.

III Дискусија по исказном слову

Овај метод се заснива на следећој чињеници:
$\models A(p_1,\ldots,p_n)$ акко $\models A(p_1,\ldots,p_{n-1},\top)$ и $\models A(p_1,\ldots,p_{n-1},\bot)$.

Пример. Докажимо дискусијом по исказном слову q да је формула

$$A := ((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

таутологија:

$$\begin{aligned}
A(p,\top) &= ((p \Rightarrow \top) \wedge \neg\top) \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \top \wedge \bot \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \bot \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \top \\
A(p,\bot) &= ((p \Rightarrow \bot) \wedge \neg\bot) \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \neg p \wedge \top \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \neg p \Rightarrow \neg p \\
&\equiv \top
\end{aligned}$$

32

Дефиниција. Исказна слова и негације исказних слова се називају литералима.

Дефиниција.

(1) Исказна формула A је у конјунктивној нормалној форми (КНФ) ако је облика
$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n,$$
при чему је свака формула C_i, $(1 \leq i \leq n)$, дисјункција литерала.

(2) Исказна формула A је у дисјунктивној нормалној форми (ДНФ) ако је облика
$$D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_m,$$
при чему је свака формула D_i, $1 \leq i \leq m$, конјункција литерала.

Пример. $p,\ q, \neg p,\ \neg r$ су литерали, док $\neg\neg p,\ p \wedge q,\ \neg(p \vee q)$ нису литерали.

$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg r$ је у ДНФ $(D_1 = p \wedge \neg q \wedge r,\ D_2 = \neg p,\ D_3 = \neg r)$

$p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg q)$ је у КНФ $(C_1 = p,\ C_2 = \neg q,\ C_3 = r \vee \neg q)$

$p \wedge \neg q \wedge r$ је у КНФ, али и у ДНФ

$\neg(\neg p \wedge q) \vee r$ није у ДНФ, нити у КНФ.

Пример. Формула $A = (p \Rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)$ није у КНФ, нити у ДНФ, али коришћењем познатих таутологија лако можемо одредити њој логички еквивалентну формулу која је у КНФ или ДНФ.

$$
\begin{aligned}
A = (p \Rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r) &\equiv \neg p \vee q \vee (\neg p \wedge r) \quad \text{ДНФ} \\
&\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \quad \text{КНФ} \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p) \quad \text{КНФ}
\end{aligned}
$$

Свака исказна формула има КНФ, али она није јединствена. Исто важи и за ДНФ.

Алгоритам довођења формуле на КНФ

- Елиминација везника $\Leftrightarrow$ коришћењем еквиваленције

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- Елиминација везника $\Rightarrow$ помоћу $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- Док год је могуће примењивати Де Моргανове законе

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B,$$

- Елиминација вишеструких везника $\neg$ помоћу

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Док год је могуће примењивати дистрибутивне законе

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Аналогно за ДНФ.

IV Свођење на конјунктивни облик

Формула A, која је у КНФ $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$, је таутологија акко је **свака формула C_i таутологија** (за $1 \leq i \leq n$).
Формула C_i је таутологија акко се у њој јавља неко исказно слово заједно са својом негацијом.
Дакле, **формула A, која је у КНФ $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$, је таутологија акко се у свакој потформули C_i појављује неко исказно слово заједно са својом негацијом**.
Пример.

$$
\begin{aligned}
A &= (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\
&\equiv (\neg\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee p) \\
&\equiv \neg(p \vee \neg q) \vee \neg q \vee p \\
&\equiv (\neg p \wedge q) \vee \neg q \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p) \\
&\equiv \top \wedge \top \equiv \top
\end{aligned},
$$

па је формула A таутологија.

Пример.

$$
\begin{aligned}
B &= ((p \vee q) \wedge r) \vee (\neg r \wedge p) \\
&\equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee p) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (r \vee p) \\
&\equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (r \vee p).
\end{aligned}
$$

Прва дисјункција $p \vee q \vee \neg r$ не садржи исказно слово заједно са његовом негацијом, па можемо наћи валуацију, на пример $\alpha = \begin{pmatrix} p & q & r & \dots \\ \perp & \perp & \top & \dots \end{pmatrix}$ за коју прва дисјункција има вредност $\perp$, а тиме и цела формула има вредност $\perp$.

Хипотезе и последице

33

Нека је A исказна формула и $\alpha : P \to \{\top, \bot\}$ валуација исказних слова.
Дефиниција.

(а) Валуација α је модел за исказну формулу A ако је $v_\alpha(A) = \top$.

(б) Валуација α је модел за скуп исказних формула Γ ако за све $A \in \Gamma$ важи $v_\alpha(A) = \top$.

- Скуп формула Γ је противречан ако нема модел, тј. ако не постоји валуација за коју су тачне све формуле из скупа Γ.

Уведимо појам семантичке рампе, у ознаци $\models$.
Дефиниција. Формула A је семантичка (логичка) последица скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models A$ ако свака валуација α која је модел за Γ је и модел за A
(тј. за сваку валуацију за коју су тачне све формуле из Γ, тачна је и формула A).
Елементи скупа Γ су хипотезе, а A је последица.

Пример.

(1) $p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models r$

јер за сваку валуацију α за коју је

$$v_\alpha(p) = \top, \qquad v_\alpha(p \Rightarrow q) = \top, \qquad v_\alpha(q \Rightarrow r) = \top$$

$$\to \alpha(q) = \top$$

$$\to \alpha(r) = \top$$

(2) $p \Rightarrow \neg q, p \not\models p \wedge q$

јер за валуацију $\alpha = \begin{pmatrix} p & q & \dots \\ \top & \bot & \dots \end{pmatrix}$ важи

$v_\alpha(p \Rightarrow \neg q) = \top, \quad v_\alpha(p) = \top,$ али $v_\alpha(p \wedge q) = \bot.$

Размотримо шта би значило $\emptyset \models A$?
"За сваку валуацију α, ако је α модел за празан скуп формула онда је α модел и за формулу A."
С обзиром да је исказ " валуација α је модел празног скупа формула" тачан, претходна реченица је еквивалентна са:
"свака валуација α је модел формуле A", што значи да је A таутологија.
Дакле,

$$\emptyset \models A \quad \text{акко} \quad \models A.$$

Ако је $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_n\}$ коначан скуп, онда уместо $\Gamma \models A$ пишемо $F_1, \ldots, F_n \models A$.

Следеће особине релације $\models$ се лако показују:

Теорема.

(i) Ако $A \in \Gamma$, онда $\Gamma \models A$.

(ii) За сваку формулу A важи $\perp \models A$.

(iii) Ако је $\Gamma \models A$ и $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, онда $\Gamma_1 \models A$.

Теорема. Нека су $A, , A_1, \ldots, A_n$ исказне формуле. Тада важи:

$$A_1, \ldots, A_n \models A \quad \text{акко} \quad \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A.$$

Последица.

(1) $A_1, \ldots, A_n \models A$ акко $\models A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \ldots))$

(2) $A_1, \ldots, A_n \models A$ акко $A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow A.$

Пример. Релацију

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r$$

применом претходних тврђења можемо записати на следеће начине:

- $p \Rightarrow q \models (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $q \Rightarrow r \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $\models (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $\models (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $\models (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

V Метод резолуције

34

Метод резолуције је формулисао Алан Робинсон 1965. године.
Примењује се на исказне формуле које су у КНФ, тј. на формуле облика

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$$

при чему је свака формула C_i *клауза* (дисјункција литерала).
Без губитка општости можемо претпоставити да у датој формули нема вишеструког појављивања једне клауза, као ни вишеструког појављивања једног литерала у клаузи.
Подсетимо се: литерал је исказно слово или негација исказног слова (нпр. p, $\neg p, \neg r, \ldots$).

V Метод резолуције

Пример. $p \vee \neg r, \quad p \vee q \vee r, \quad \neg p \vee \neg r$ - примери клауза,
$p \vee (r \Rightarrow q), \quad p \vee \neg(q \vee r)$ - нису клаузе.
Методом резолуције испитујемо да ли је формула
$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ задовољива.
Због асоцијативности и комутативности конјункције и дисјункције ово је еквивалентно, испитивању задовољивости скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, при чему је свака клауза C_i скуп литерала.
Формула која је у КНФ је задовољива ако постоји валуација у којој су све клаузе те формуле тачне. Клауза је тачна за неку валуацију ако је бар један литерал те клаузе тачан у тој валуацији.
Празна клауза, у ознаци $\square$, не садржи ниједан литерал и није задовољива.

Правило резолуције. Нека су C_1 и C_2 произвољне клаузе и p исказно слово.
Из клауза $C_1 \vee p$ и $C_2 \vee \neg p$ изводимо клаузу $C_1 \vee C_2$, тј.

$$\frac{C_1 \vee p, \quad C_2 \vee \neg p}{C_1 \vee C_2}$$

$C_1 \vee C_2$ је резолвента клауза $C_1 \vee p$ и $C_2 \vee \neg p$,
$C_1 \vee p$ и $C_2 \vee \neg p$ су родитељи резолвенте.
Теорема. Правило резолуције чува задовољивост, тј. ако валуација α задовољава скуп клауза $\{C_1 \vee p, C_2 \vee \neg p\}$, онда она задовољава и клаузу $C_1 \vee C_2$. Другим речима, полазећи од задовољивог скупа клауза, применом правила резолуције не можемо добити празну клаузу.

Поступак се састоји у узастопној примени правила резолуције и проширивању скупа клауза добијеним резолвентама.
За задати скуп клауза $\mathcal{K}$, применом овог правила родитељи резолвенте се не замењују резолвентом, већ се резолвента додаје скупу клауза $\mathcal{K}$ (родитељи резолвенте остају у скупу $\mathcal{K}$).

- За формулу $A \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$, где су $C_1, \ldots, C_n$ клаузе, нека је
$\mathcal{K}_0 = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ почетни скуп клауза.
- Применом резолуције на скуп клауза $\mathcal{K}_i$ добијамо скуп $\mathcal{K}_{i+1}$, тако што скупу $\mathcal{K}_i$ додамо добијену резолвенту.
- Поступак резолуције се зауставља на један од следећа два начина:
  - ако у неком кораку скуп клауза $\mathcal{K}_i$ садржи празну клаузу $(\Box)$, извођење се прекида и закључује да је полазни скуп клауза незадовољив, тј. формула A је незадовољива;
  - ако не постоји могућност да се примени правило резолуције тако да се скупови $\mathcal{K}_i$ и $\mathcal{K}_{i+1}$ разликују, извођење се прекида и закључује да је почетни скуп клауза задовољив, тј. формула A је задовољива.

Да ли се метод резолуције увек зауставља?

Користићемо следеће ознаке:

- низ полазних и изведених клауза означаваћемо са $C_1, C_2, \ldots$
- литерале у клаузама раздвајамо зарезима;
- иза ознаке изведене клаузе и литерала који је чине записујемо ознаке клауза и литерале на којима је примењено правило резолуције.

Пример. За формулу $A \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg r$ почетни скуп клауза је

$$\mathcal{K}_0 = \{\, \neg p \vee \neg q \vee r, \quad \neg p \vee q, \quad p, \quad \neg r \,\}.$$

Применом правила резолуције добијамо

$$\begin{array}{llll}
C_1 & : \neg p,\ \neg q,\ r & & \\
C_2 & : \neg p,\ q & & \\
C_3 & : p & & \\
C_4 & : \neg r & & \\
C_5 & : \neg p,\ r & & (C_1, \neg q;\ C_2, q) \\
C_6 & : r & & (C_3, p;\ C_5, \neg p) \\
C_7 & : \square & & (C_4, \neg r;\ C_6, r)
\end{array}$$

Дакле, скуп клауза $\mathcal{K}_0$ није задовољив, односно, дата формула није задовољива.

Пример. За формулу $A \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge p$ скуп клауза је

$$\{\, \neg p \vee \neg q \vee r, \quad \neg p \vee q, \quad p \,\}.$$

Применом метода резолуције добијамо

$$\begin{array}{llll}
C_1 : & \neg p,\ \neg q,\ r & & \\
C_2 : & \neg p,\ q & & \\
C_3 : & p & & \\
C_4 : & \neg p,\ r & & (C_1, \neg q;\ C_2, q) \\
C_5 : & r & & (C_3, p;\ C_4, \neg p) \\
C_6 : & q & & (C_2, \neg p;\ C_3, p) \\
C_7 : & \neg q,\ r & & (C_1, \neg p;\ C_3, p)
\end{array}$$

Даљом применом правила не могу се добити нове клаузе, да је почетни скуп клауза, а тиме и формула A задовољив.

Метод резолуције се може користити и за доказивање да је дата формула таутологија. Наиме, како важи

A је таутологија акко за сваку валуацију α важи $v_\alpha(A) = \top$
акко за сваку валуацију α важи $v_\alpha(\neg A) = \bot$
акко формула $\neg A$ није задовољива,

да бисмо доказали да је A таутологија, довољно је да докажемо да $\neg A$ није задовољива.

Пример. Доказати да је следећа формула таутологија

$$A \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow r.$$

Довољно је доказати да формула

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv \neg\left((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow r\right) \\ &\equiv \neg\left(\neg((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \vee r\right) \\ &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r \end{aligned}$$

није задовољива, тј. да скуп клауза

$$\mathcal{K}_0 = \{\, \neg p \vee r, \quad \neg q \vee r, \quad p \vee q, \quad \neg r \,\}$$

није задовољив.

$$\begin{array}{lll} C_1 : & \neg p,\ r & \\ C_2 : & \neg q,\ r & \\ C_3 : & p,\ q & \\ C_4 : & \neg r & \\ C_5 : & q,\ r, & (C_1, \neg p;\ C_3, p) \\ C_6 : & r & (C_2, \neg q;\ C_5, q) \\ C_7 : & \Box & (C_4, \neg r;\ C_6, r) \end{array}$$

$\rightarrow$ $\neg A$ није задовољива тј. $\rightarrow$ A је таутологија.