Теоријске основе информатике 1

Ненад Стојановић
nenad.s@kg.ac.rs

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Крагујевац, 21.12.2018.

Природна дедукција

Дефиниција. Формула α је синтаксна последица скупа формула Γ, ако се секвент $\Gamma \vdash \alpha$ може добити применом следећих правила коначан број пута

Природна дедукција

Дефиниција. Формула α је синтаксна последица скупа формула Γ, ако се секвент $\Gamma \vdash \alpha$ може добити применом следећих правила коначан број пута

Аксиома $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}(\mathrm{ax})$	Слабљење $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \gamma \vdash \varphi}(\mathrm{Slab})$
Увођење конјункције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}(\wedge_{\mathrm{U}})$	Елиминација конјункције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}(\wedge_{\mathrm{E}}^{l}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}(\wedge_{\mathrm{E}}^{d})$
Увођење дисјункције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}(\vee_{\mathrm{U}}^{l}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}(\vee_{\mathrm{U}}^{d})$	Елиминација дисјункције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}(\vee_{\mathrm{E}})$
Увођење импликације $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Rightarrow_{\mathrm{U}})$	Елиминација импликације $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}(\Rightarrow_{\mathrm{E}})$

Природна дедукција

Увођење еквиваленције	Елиминација еквиваленције
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}(\Leftrightarrow_{\mathrm{U}})$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Leftrightarrow^{l}_{\mathrm{E}})$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}(\Leftrightarrow^{d}_{\mathrm{E}})$
Увођење негације	Елиминација негације
$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg_{\mathrm{U}})$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}(\neg_{\mathrm{E}})$
Класична противвречност	
$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}(\bot_{\mathrm{c}})$	

Природна дедукција

Увођење еквиваленције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}(\Leftrightarrow_{\mathrm{U}})$	Елиминација еквиваленције $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}(\Leftrightarrow^{l}_{\mathrm{E}}) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}(\Leftrightarrow^{d}_{\mathrm{E}})$
Увођење негације $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg_{\mathrm{U}})$	Елиминација негације $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}(\neg_{\mathrm{E}})$
Класична противречност $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}(\bot_{\mathrm{c}})$	

Дефиниција. Формула α је доказива, тј. јесте теорема исказне логике, у ознаци $\vdash \alpha$, ако је доказив секвент $\emptyset \vdash \alpha$.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

5. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

1. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

2. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

3. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

4. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ теорема у датом дедуктивном систему.

5. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ теорема у датом дедуктивном систему.

6. Доказати да је формула $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

9. Доказати да је формула $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \wedge q))$ теорема у датом дедуктивном систему.

Природна дедукција

7. Доказати да је формула $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ теорема у датом дедуктивном систему.

8. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ теорема у датом дедуктивном систему.

9. Доказати да је формула $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \wedge q))$ теорема у датом дедуктивном систему.

10. Доказати да је формула $\vdash (p \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$ теорема у датом дедуктивном систему.

Предикатска логика првог реда

Логички део језика предикатске логике првог реда чине следећи скупови симбола:

1. логички везници: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$;
2. квантификатори: $\exists, \forall$;
3. знак једнакости: $=$;
4. променљиве (Var): $x, y, z, x_1, \ldots, x_n, \ldots$;
5. помоћни симболи: $), ($.

Предикатска логика првог реда

Језик првог реда $\mathcal{L}$ чине три скупа међусобно дисјунктних симбола:

1. $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола константи;
2. $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола операција;
3. $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола релација (предиката).

Предикатска логика првог реда

Језик првог реда $\mathcal{L}$ чине три скупа међусобно дисјунктних симбола:

1. $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола константи;
2. $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола операција;
3. $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола релација (предиката).

При томе, за сваки симбол $s \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ је унапред одређен природан број који означавамо са $\mathrm{ar}(s)$ и зовемо арност (дужина) симбола s.

Предикатска логика првог реда

Језик првог реда $\mathcal{L}$ чине три скупа међусобно дисјунктних симбола:

1. $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола константи;

2. $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола операција;

3. $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола релација (предиката).

При томе, за сваки симбол $s \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$ је унапред одређен природан број који означавамо са $\mathrm{ar}(s)$ и зовемо арност (дужина) симбола s.

Терми језика $\mathcal{L}$ $(\mathrm{Term}\mathcal{L})$ се граде на следећи начин:

1. елементи скупова Var и $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}}$ су терми;

2. ако је $f \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = n$, и $t_1, t_2, \dots, t_n$ терми, тада је $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ терм;

3. терми се граде коначном применом 1. и 2.

Предикатска логика првог реда

Атомичне формуле језика $\mathcal{L}$ $(\mathrm{At}_{\mathcal{L}})$ се граде на два начина:

1. ако је $p \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(p) = n$, и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ терми, тада је $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ атомична формула;

2. ако су t_1, t_2 терми, тада је $t_1 = t_2$ атомична формула.

Предикатска логика првог реда

Атомичне формуле језика $\mathcal{L}$ $(\mathrm{At}_{\mathcal{L}})$ се граде на два начина:

1. ако је $p \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(p) = n$, и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ терми, тада је $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ атомична формула;

2. ако су t_1, t_2 терми, тада је $t_1 = t_2$ атомична формула.

Формуле језика $\mathcal{L}$ $(\mathrm{For}\mathcal{L})$ се граде на следећи начин:

1. атомичне формуле су формуле;

2. ако су A и B формуле, тада су $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ формуле;

3. ако је A формула и $x \in Var$, тада су $(\forall x)A(x)$ и $(\exists x)A(x)$ формуле;

4. формуле се граде коначном применом 1., 2. и 3.

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.

Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(a) $F(G(x), G(y))$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;
(в) $R(x, S(x))$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;
(в) $R(x, S(x))$;
(г) $F(G(x))$;

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.

Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;

(б) $S(F(x, G(e)))$;

(в) $R(x, S(x))$;

(г) $F(G(x))$;

(д) $R(e, e)$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;
(в) $R(x, S(x))$;
(г) $F(G(x))$;
(д) $R(e, e)$;
(ђ) $(\forall x)(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.

Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;

(б) $S(F(x, G(e)))$;

(в) $R(x, S(x))$;

(г) $F(G(x))$;

(д) $R(e, e)$;

(ђ) $(\forall x)(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$;

(е) $F(F(x, e), S(e))$;

Предикатска логика првог реда

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;
(в) $R(x, S(x))$;
(г) $F(G(x))$;
(д) $R(e, e)$;
(ђ) $(\forall x)(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$;
(е) $F(F(x, e), S(e))$;
(ж) $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$;

1. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$.
Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(а) $F(G(x), G(y))$;
(б) $S(F(x, G(e)))$;
(в) $R(x, S(x))$;
(г) $F(G(x))$;
(д) $R(e, e)$;
(ђ) $(\forall x)(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$;
(е) $F(F(x, e), S(e))$;
(ж) $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$;
(з) $(\forall x)(S(G(e)) \Leftrightarrow (\forall y)R(x, y))$.

Предикатска логика првог реда

2. Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

а) Сви природни бројеви су рационални.

Предикатска логика првог реда

2. Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

а) Сви природни бројеви су рационални.

б) Неки природни бројеви су рационални.

2. Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

а) Сви природни бројеви су рационални.

б) Неки природни бројеви су рационални.

в) Ниједан природан број није рационалан.

Предикатска логика првог реда

2. Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

а) Сви природни бројеви су рационални.

б) Неки природни бројеви су рационални.

в) Ниједан природан број није рационалан.

г) Неки природни бројеви нису рационални.

2. Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:
а) Сви природни бројеви су рационални.
б) Неки природни бројеви су рационални.
в) Ниједан природан број није рационалан.
г) Неки природни бројеви нису рационални.

Дефиниција. Интерпретација језика $\mathcal{L}$ (нелогичких симбола) у скупу M је пресликавање J које:

- (-) сваком релацијском симболу дужине n придружује једну n-арну релацију скупа M;
- (-) сваком функцијском симболу дужине n придружује једну n-арну операцију скупа M;
- (-) сваком симболу константе придружује један елеменат скупа M.

Предикатска логика првог реда

3. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{c\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 2$.

3. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{c\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 2$.

(a) Интерпретација на скупу $\mathbb{R}$

- (-) $J(R) = \leqslant$;
- (-) $J(F) = +$;
- (-) $J(G) = \cdot$;
- (-) $J(c) = 0$.

3. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{c\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 2$.

(а) Интерпретација на скупу $\mathbb{R}$

- (-) $J(R) = \leqslant;$
- (-) $J(F) = +;$
- (-) $J(G) = \cdot;$
- (-) $J(c) = 0.$

(б) Интерпретација на скупу $\mathcal{P}(X)$

- (-) $J(R) = \subseteq;$
- (-) $J(F) = \cup;$
- (-) $J(G) = \cap;$
- (-) $J(c) = \emptyset.$

Предикатска логика првог реда

Ако је J интерпретација неког језика на скупу M, тада се пар (M, J) назива модел тог језика.

Предикатска логика првог реда

Ако је J интерпретација неког језика на скупу M, тада се пар (M, J) назива модел тог језика.

4. Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, \quad Fun = \{F, G\}, \quad Const = \{e\},$$

при чему је $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(F) = 2$ и $\mathrm{ar}(G) = 1$, и нека су дате следеће интерпретације:

(a) интерпретација на скупу $\mathbb{Z}$

- (-) $J(R) = \leqslant;$
- (-) $J(S) =$ бити позитиван број;
- (-) $J(F) = +;$
- (-) $J(G) = g, \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad g(x) = -x;$
- (-) $J(e) = 0.$

Предикатска логика првог реда

(б) Интерпретација на скупу $\mathbb{N}$

(-) $J(R) = \mid$ дељивост природних бројева;

(-) $J(S) =$ бити паран број;

(-) $J(F) = \cdot$;

(-) $J(G) = g, \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(x) = 2x + 1$;

(-) $J(e) = 1$.

(б) Интерпретација на скупу $\mathbb{N}$

- $J(R) = \mid$ дељивост природних бројева;
- $J(S) =$ бити паран број;
- $J(F) = \cdot$;
- $J(G) = g, \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(x) = 2x + 1$;
- $J(e) = 1$.

(1) Одредити вредност израза $F(F(x, e), G(y))$, $G(F(x, x))$ и $F(G(x), G(x))$ у $\mathbb{Z}$ при валуацији $\mu_Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, и у $\mathbb{N}$ при валуацији $\mu_N = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Предикатска логика првог реда

(б) Интерпретација на скупу $\mathbb{N}$

(-) $J(R) = |$ дељивост природних бројева;

(-) $J(S) =$ бити паран број;

(-) $J(F) = \cdot$;

(-) $J(G) = g, \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(x) = 2x + 1$;

(-) $J(e) = 1$.

(1) Одредити вредност израза $F(F(x,e), G(y))$, $G(F(x,x))$ и $F(G(x), G(x))$ у $\mathbb{Z}$ при валуацији $\mu_Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, и у $\mathbb{N}$ при валуацији $\mu_N = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Испитати тачност формула $R(F(x,e), G(y))$ и $\neg S(F(x,x)) \vee R(G(x), G(y))$ у $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ за валуације μ_Z и μ_N.

Предикатска логика првог реда

(3) Испитати тачност реченица $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)\neg S(x)$, $(\exists x)\neg S(x)$, $\neg S(G(e))$ редом у моделима $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

Предикатска логика првог реда

(3) Испитати тачност реченица $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)\neg S(x)$, $(\exists x)\neg S(x)$, $\neg S(G(e))$ редом у моделима $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

5. Одредити модел у коме је формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ тачна.

Предикатска логика првог реда

(3) Испитати тачност реченица $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)\neg S(x)$, $(\exists x)\neg S(x)$, $\neg S(G(e))$ редом у моделима $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

5. Одредити модел у коме је формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ тачна.

6. Одредити модел у коме формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ није тачна.

Предикатска логика првог реда

(3) Испитати тачност реченица $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)\neg S(x)$, $(\exists x)\neg S(x)$, $\neg S(G(e))$ редом у моделима $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

5. Одредити модел у коме је формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ тачна.

6. Одредити модел у коме формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ није тачна.

7. Да ли је формула $(\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y) \vee \alpha(y,x))$ тачна у одговарајућој структури:
а) $(\mathbb{R}, \leqslant)$;

Предикатска логика првог реда

(3) Испитати тачност реченица $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)\neg S(x)$, $(\exists x)\neg S(x)$, $\neg S(G(e))$ редом у моделима $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$.

5. Одредити модел у коме је формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ тачна.

6. Одредити модел у коме формула $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ није тачна.

7. Да ли је формула $(\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y) \vee \alpha(y,x))$ тачна у одговарајућој структури:
а) $(\mathbb{R}, \leqslant)$;
б) $(\mathbb{R}, <)$?

Предикатска логика првог реда

8. Одредити модел и контрамодел за реченицу:

а) $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$;

8. Одредити модел и контрамодел за реченицу:

а) $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$;

б) $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$.

Предикатска логика првог реда

8. Одредити модел и контрамодел за реченицу:

а) $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$;

б) $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$.