

# ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИНФОРМАТИКЕ 1

## ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

### – ИСКАЗНА ЛОГИКА –

#### 1. Испитати да ли су формуле таутологије

(а)  $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ ;

(б)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;

(в)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ;

(г)  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ ;

(д)  $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ .

#### 2. Свођењем на противречност доказати да су формуле таутологије

(а)  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;

(б)  $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ;

(в)  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ;

(г)  $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (p \vee q) \Rightarrow r$ ;

(д)  $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ .

#### 3. Формула $A$ има таблицу:

$p$	$q$	$r$	$A$
⊤	⊤	⊤	⊥
⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥

Одредити две формуле еквивалентне са формулом  $A$ .

#### 4. Одредити две формуле са словима $p$ , $q$ и $r$ које су тачне само за валуације у којима је једно слово нетачно.

#### 5. Формула $A$ има таблицу:

$p$	$q$	$r$	$A$
⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥

Одредити две формуле еквивалентне са формулом  $A$ .

6. Конструисати исказну формулу над три исказне променљиве тако да је она тачна за неку валуацију ако и само ако су за ту валуацију тачне тачно две исказне променљиве.

7. Користећи елементарне трансформације показати да су формуле таутологије:

- (a)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ ;
- (б)  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ;
- (в)  $((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ;
- (г)  $(r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r)$ ;
- (д)  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow r \vee \neg(p \vee q)$ ;
- (ђ)  $p \wedge (q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q)$ ;
- (е)  $p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ ;
- (ж)  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;
- (з)  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$ .

8. Пера, Влада и Сава су другари који често излазе заједно на пиће у кафану. Познато је да свако од њих пије увек исто пиће и то или вино или пиво (само једно од тога, јер знају ако се пиће меша, ујутро боли глава). У вези тога ко од њих шта пије, познати су следећи искази:

- (1) Ако Пера пије пиво, онда Влада пије исто пиће као и Сава.
- (2) Ако Влада наручује пиво, онда Сава пије другачије пиће од Периног.
- (3) Ако Сава наручује вино, онда Пера пије исто пиће као и Сава.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За кога од њих са сигурношћу можете да тврдите шта пије?

9. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

**Аца:** Ако је Боки крив, крива је и Дуда.

**Боки:** Ако Аца није крив, онда је крива Цеца.

**Цеца:** Ја нисам крива, али је или Аца крив или је Дуда крива.

**Дуда:** Ја нисам крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив? (Уколико има више могућих решења навести их сва!)

10. Пред студентске лиге у фудбалу, рукомету и кошарци разговарају четворица студената ПМФ-а.

Аца каже: "Ако победимо у фудбалу, победићемо или у кошарци или у рукомету."

Филип каже: "Ако не победимо у кошарци, победићемо и у фудбалу и у рукомету."

Михајло каже: "Победићемо у бар једном од ова три спорта."

Данко каже: "Ако Филип није у праву онда је бар један од Аце и Михајла у праву."

Да ли су њихове изјаве непротивречне? Да ли је Данко у праву? уколико сви студенти говоре истину за који спорт можемо са сигурношћу рећи да ће ПМФ победити у њему?

11. Ана, Беба, Цица и Даца су другарице које често излазе заједно у посластичарницу. Познато је да свака од њих једе увек исти колач и то или баклаву или орасницу (само једно од тога). У вези тога која од њих шта једе, познати су следећи искази:

- (1) Ако Ана једе ораснице, онда Беба једе исти колач као и Даца.

(2) Ако Цица једе ораснице, онда Ана и Даца једу различите колаче.

(3) Ако Беба и Цица једу различите колаче, онда Ана једе баклаву.

(4) Даца и Цица једу различите колаче.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За које од њих са сигурношћу можете да тврдите који колач једу?

**12.** Ана, Беба, Цица и Даца су другарице које често излазе заједно у посластичарницу. Познато је да свака од њих једе увек исти колач и то или баклаву или орасницу (само једно од тога). У вези тога која од њих шта једе, познати су следећи искази:

(1) Ако Ана једе ораснице, онда Беба једе исти колач као и Даца.

(2) Ако Цица једе баклаве, онда Ана и Беба једу различите колаче.

(3) Ако Цица и Даца једу исти колач, онда Ана једе баклаву.

(4) Беба и Цица једу исти колач.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За које од њих са сигурношћу можете да тврдите који колач једу?

**13.** Доказати:

(a)  $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ ;

(б)  $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ ;

(в)  $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ ;

(г)  $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;

(д)  $\vdash (p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$ ;

(ђ)  $\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ ;

(е)  $\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ;

(ж)  $\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$ ;

(з)  $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;

(и)  $\vdash (((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow r$ ;

(j)  $\vdash (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ ;

(к)  $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ ;

(л)  $\vdash p \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$ ;

(љ)  $\vdash p \wedge (q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$ ;

(м)  $\vdash (p \wedge (q \vee r) \Rightarrow p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ;

(н)  $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ;

(њ)  $\vdash (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ ;

- (o)  $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \wedge q))$ ;
- (п)  $\vdash (p \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$ ;
- (р)  $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ ;
- (с)  $\vdash p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ;
- (т)  $\vdash p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ ;
- (ћ)  $\vdash p \vee q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ ;
- (у)  $\vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r))$ ;
- (ф)  $\vdash ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q))$ ;
- (х)  $\vdash (p \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p)$ ;
- (ц)  $\vdash \neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \perp)$ ;
- (ч)  $\vdash (r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p \vee q)$ ;
- (ш)  $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ ;
- (ш)  $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ .

**14. Методом резолуције доказати да су формуле таутологије**

- (а)  $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;
- (б)  $F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$ ;
- (в)  $F = (r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ ;
- (г)  $F = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Rightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ ;
- (д)  $F = (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ ;
- (ђ)  $F = (((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow r$ ;
- (е)  $F = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ ;
- (ж)  $F = ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$ ;
- (з)  $F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r)$ .

**15. Одредити валуације, уколико постоје, које показују да је формула задовољива, односно порецива:**

- (а)  $(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Rightarrow p_1) \Rightarrow (q \Rightarrow q_1))$ ;
- (б)  $(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow p_1) \Rightarrow (q \Leftrightarrow q_1))$ .

**16. Нека је скуп формула  $\Gamma = \{p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, p\}$ . Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа формула  $\Gamma$ :**

- (а)  $p \wedge \neg q$ ;
- (б)  $r \Rightarrow q$ ;
- (в)  $\neg r$ ;

(г)  $p \wedge q \wedge r$ ;

(д)  $\neg q \Rightarrow \neg p$ ;

(ђ)  $p \Rightarrow \perp$ .

**17.** Нека је скуп формула  $\Gamma = \{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow q, r\}$ . Испитати које од следећих формула су логичке последице скупа формула  $\Gamma$ :

(а)  $p \wedge \neg q$ ;

(б)  $\neg p \wedge q$ ;

(в)  $\neg(p \Rightarrow q)$ ;

(г)  $p$ ;

(д)  $q \Rightarrow \neg p$ ;

(ђ)  $p \Rightarrow \perp$ .

**18.** Доказати да је формула  $p \vee r \Rightarrow q$  логичка последица скупа формула  $\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$ .

**19.** Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули  $p \Rightarrow \neg(q \vee r)$ :

(а)  $\neg p \vee q \vee r$ ;

(б)  $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow \neg r)$ ;

(в)  $\neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$ ;

(г)  $\neg p \vee \neg(\neg q \Rightarrow r)$ .

**20.** Испитати која од датих формула је логички еквивалентна формули  $p \vee \neg q \Rightarrow \neg r$ :

(а)  $\neg p \vee q \vee \neg r$ ;

(б)  $\neg(q \Rightarrow p) \vee \neg r$ ;

(в)  $\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg r$ ;

(г)  $r \Rightarrow \neg p \vee q$ .

**21.** Доказати да су формуле  $p \Rightarrow q$  и  $\neg q \Rightarrow \neg p$  логички еквивалентне формуле.

**22.** Нека је дата следећа аргументација:

- (1) Ако је знање стање ума (попут осећаја бола), онда бих на основу самопроматрања увек могао да кажем шта знам.
- (2) Ако бих на основу самопроматрања увек могао да кажем шта знам, онда никад не бих био у заблуди да знам.
- (3) Ја сам понекад у заблуди да знам.
- (4) Дакле, знање није стање ума.

Превести ове реченице у исказне формуле и установити да ли је аргументација исправна.

**23.** Четири пријатеља - Милена, Марија, Алекса и Милан осумњичени су за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

**Милена:** Ако је Марија крива, крив је и Милан.

**Марија:** Милена је крива, а Милан није крив.

**Алекса:** Ја нисам крив, али су Милена или Милан криви.

**Милан:** Ако Милена није крива, тада је крив Алекса.

(а) Да ли су ове четири изјаве непротивречне, односно да ли је скуп формула добијен превођењем у исказну логику непротивречан?

(б) Ако свако говори истину, ко је крив?

**24.** Превести следећа тврђења у исказне формуле и одредити исправност аргументације:

(1) Ако су једине особе присутне у кући у време убиства били батлер и собарица, тада је батлер убица или је собарица убица.

(2) Једине особе присутне у кући у време убиства су били батлер и собарица.

(3) Ако је собарица убица, онда је собарица имала мотив за убиство.

(4) Собарица није имала мотив за убиство.

Закључак: Батлер је убица.

**25.** Пера, Влада и Сава су другари који често излазе заједно на пиће у кафану. Познато је да свако од њих пије увек исто пиће и то или вино или пиво (само једно од тога, јер знају ако се пиће меша, ујутро боли глава). У вези тога ко од њих шта пије, познати су следећи искази:

(1) Ако Пера пије пиво, онда Влада пије исто пиће као и Сава.

(2) Ако Влада наручује пиво, онда Сава пије другачије пиће од Периног.

(3) Ако Сава наручује вино, онда Пера пије исто пиће као и Сава.

Да ли су ове изјаве непротивречне? За кога од њих са сигурношћу можете да тврдите шта пије?

**26.** Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

**Аца:** Ако је Боки крив, крива је и Дуда.

**Боки:** Ако Аца није крив, онда је крива Цеца.

**Цеца:** Ја нисам крива, али је или Аца крив или је Дуда крива.

**Дуда:** Ја нисам крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив? (Уколико има више могућих решења навести их сва!)