Принципи дефинисања скупова

Аксиома екстензије. Два скупа су једнака акко имају исте елементе, тј.

$$X = Y \Leftrightarrow (\forall u)(u \in X \Leftrightarrow u \in Y).$$

Дефиниција. Скуп X је **подскуп** скупа Y (а скуп Y је надскуп скупа X), у ознаци $X \subseteq Y$, ако је сваки елемент скупа X уједно и елемент скупа Y, тј.

$$X \subseteq Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall u)(u \in X \Rightarrow u \in Y).$$

Релација $\subseteq$ зове се релација подскупа или **инклузија**.
Ако је $X \subseteq Y$, кажемо и да је X садржан у Y.
Дефинишемо и **прави подскуп**: $A \subset X$ акко $A \subseteq X$ и $A \neq X$.

Принципи дефинисања скупова

Теорема. За произвољне скупове X, Y и Z важи

- $X \subseteq X$
- $X \subseteq Y \quad \wedge \quad Y \subseteq X \quad \Rightarrow \quad X = Y$
- $X \subseteq Y \quad \wedge \quad Y \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X \subseteq Z.$

Принципи дефинисања скупова

Аксиома подскупа (издвајања). За дати скуп X и дато својство S постоји скуп $A = \{x \in X | S(x)\}$.
Из аксиоме екстензије следи да је овако дефинисан скуп A јединствен.
Теорема. Не постоји скуп свих скупова.
Доказ. Покажимо да за сваки скуп X постоји скуп A који му не припада.
Нека је $A = \{x \in X | x \notin x\}$. Тада
$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \quad \wedge \quad x \notin x$. Узимајући за x скуп A имамо
$A \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \in X \quad \wedge \quad A \notin A$, па би нас тачност исказа $A \in X$ довела до: $\quad A \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \notin A$. Контрадикција. Следи $A \notin X$.

Празан скуп

Дефиниција. Скуп

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | x \neq x\}$$

се зове **празан скуп**.

Егзистенција празног скупа следи из аксиоме подскупа (узимајући $S(x) := x \neq x$), а јединственост из аксиоме екстензије.

Из дефиниције следи да празан скуп нема ниједан елемент, тј.

$$(\forall x)\, x \notin \emptyset.$$

Теорема. $\emptyset \subseteq X$, за сваки скуп X.

Пресек и разлика

Принцип издвајања нам омогућава да од постојећих скупова X и Y применом својстава $x \in Y$ и $x \notin Y$ изградимо нове:

- $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | x \in Y\}$ - **пресек скупова** X **и** Y
- $X \setminus Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | x \notin Y\}$ - **разлика** скупова X и Y
- Ако је $X \cap Y = \emptyset$ кажемо да су скупови X и Y **дисјунктни**.

Теорема (особине пресека и разлике).

- $X \cap X = X \qquad X \setminus X = \emptyset$
- $X \cap \emptyset = \emptyset \qquad X \setminus \emptyset = X$
- $X \cap Y \subseteq X \qquad \emptyset \setminus X = \emptyset$
- $X \cap Y \subseteq Y \qquad X \setminus Y \subseteq X$
- Ако је $Z \subseteq X$ и $Z \subseteq Y$ онда је $Z \subseteq X \cap Y$.

Комплемент

Дефиниција. Ако су A и X скупови и $A \subseteq X$, тада

$$A^C \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus A$$

зовемо **комплемент** скупа A у односу на скуп X.

Теорема. За $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ важи

- $(A^C)^C = A$
- Ако је $A \subseteq B$ онда $B^C \subseteq A^C$.

Уређени пар

Аксиома неуређеног пара.За свака два скупа x и y постоји скуп $\{x, y\}$ чији су једини елементи x и y.

Дефиниција. Скуп $\{x, y\}$ (чију егзистенцију обезбеђује претходна аксиома) се зове неуређени **пар** елемената x и y.

Специјално, за $x = y$ скуп $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x, x\}$ се зове **синглтон** или једночлани скуп.

Из дефиниције непосредно следи $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Често је потребно истаћи који елемент пара је први, а који други. Зато дефинишемо уређени пар.

Дефиниција.Уређен пар (x, y) скупова x и y дефинисан је следећом једнакошћу

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

x је **прва координата** (компонента), а y је **друга координата**.

Уређени пар

К1

Теорема.

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{и} \quad b = d$$

Напомена.

$\{a, b\} = \{b, a\}$,
$(a, b) = (b, a)$ акко $a = b$.

Индуктивно се даље дефинишу уређене тројке, четворке, . . . уопште уређене $n-$торке:

$(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} ((a, b), c)$ - уређена тројка

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ -уређена n-торка.

Декартов производ скупова

2

Скуп $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$ се зове **Декартов производ** скупова A и B.

Слично, дефинишемо

$A \times B \times C \overset{\text{def}}{=} \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$.

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

$A^2 \overset{\text{def}}{=} A \times A$,

$A^3 \overset{\text{def}}{=} A \times A \times A$,...

Пример. За $A = \{0, 1\}$ и $B = \{x, y, z\}$ важи

$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$,

$B \times A = \{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1), (z, 0), (z, 1)$.

$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$,

$A^3 =$

$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Аксиома уније

Аксиома уније. За дати скуп X постоји скуп који садржи све елементе елемената скупа X.

Скуп чију егзистенцију обезбеђује претходна аксиома се зове унија елемената скупа X и означава са $\cup X$.

Специјално, за $X = \{A, B\}$, постоји скуп који садржи све елементе скупа A и све елементе скупа B. Скуп

$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \ \vee \ x \in B\}$ се зове **унија** скупова A и B.

Теорема. За произвољне скупове X, Y, Z важи:

- $X \cup X = X$,
- $X \cup \emptyset = X$
- Ако је $X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$ онда је $X \cup Y \subseteq Z$.

Аксиома партитивног скупа

Аксиома партитивног скупа. За дати скуп A постоји скуп који садржи све подскупове скупа A.

Претходна аксиома и аксиома екстензије оправдавају следећу дефиницију.

Скуп $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X | X \subseteq A\}$ се зове **партитивни скуп** скупа A.

Пример.

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{1, a, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{2\}, \{1, a\}, \{1, 2\}, \{a, 2\}, \{1, 2, a\}\}$.