Теоријске основе информатике 1

Ненад Стојановић

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Крагујевац, 28.11.2018.

Исказна алгебра

Исказна алгебра је уређена шесторка $(\{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$, где су $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ бинарне операције, $\neg$ унарна операција, а $\top$ и $\bot$ два различита елемента.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Исказни језик

Исказни језик чине следећи симболи:

1. логички везници: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
2. исказна слова којих има пребројиво много $p, q, r, s, \ldots, p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$;
3. логичке константе: $\top$ и $\bot$;
4. помоћни знаци: (и).

Исказна формула

Исказна формула се гради на следећи начин:

1. исказно слово и симболи константи су исказне формуле;

2. ако су F и G исказне формуле, тада су $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$, исказне формуле;

3. свака исказна формула се добија коначном применом корака 1. и 2.

Скуп исказних формула означавамо са For.

Дефиниција. Валуација је било које пресликавање $v : P \to \{\top, \bot\}$.

Дакле, то је пресликавање које сваком исказном слову додељује вредност $\top$ или вредност $\bot$.

Дефиниција. Валуација је било које пресликавање $v : P \to \{\top, \bot\}$.

Дакле, то је пресликавање које сваком исказном слову додељује вредност $\top$ или вредност $\bot$.

Дефиниција. Ако је дата валуација v, интерпретација при валуацији v је пресликавање $\hat{v} : \mathrm{For} \to \{\top, \bot\}$ дефинисано са:

- $\hat{v}(p) = v(p)$, за $p \in P$;
- $\hat{v}(\top) = \top$ и $\hat{v}(\bot) = \bot$;
- $\hat{v}(\neg F) = \neg\hat{v}(F)$, за $F \in \mathrm{For}$;
- $\hat{v}(F * G) = \hat{v}(F) * \hat{v}(G)$, за $F, G \in \mathrm{For}$ и $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}$.

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{smallmatrix}\right)$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{smallmatrix}\right)$.

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{smallmatrix}\right)$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{smallmatrix}\right)$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{smallmatrix}\right)$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{smallmatrix}\right)$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

(2) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \bot$, кажемо да је формула α нетачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \not\models \alpha$.

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

(2) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \bot$, кажемо да је формула α нетачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \not\models \alpha$.

Дефиниција. Исказна формула је
(1) задовољива - ако постоји валуација v која је модел за α;

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{smallmatrix}\right)$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{smallmatrix}\right)$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

(2) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \bot$, кажемо да је формула α нетачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \not\models \alpha$.

Дефиниција. Исказна формула је
(1) задовољива - ако постоји валуација v која је модел за α;

(2) таутологија - ако је свака валуација v модел за α;

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

(2) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \bot$, кажемо да је формула α нетачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \not\models \alpha$.

Дефиниција. Исказна формула је
(1) задовољива - ако постоји валуација v која је модел за α;

(2) таутологија - ако је свака валуација v модел за α;

(3) контрадикција - ако не постоји ниједна валуација v која је модел за α;

1. Одредити истинитосну вредност формуле $\neg p \vee r \Rightarrow r \wedge q$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}$.

2. Одредити истинитосну вредност формуле $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ за валуацију $v = \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}$.

Дефиниција.
(1) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \top$, кажемо да је формула α тачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \models \alpha$ (v је модел за α).

(2) Ако је $\hat{v}(\alpha) = \bot$, кажемо да је формула α нетачна при интерпретацији $\hat{v}$ и пишемо $v \not\models \alpha$.

Дефиниција. Исказна формула је
(1) задовољива - ако постоји валуација v која је модел за α;

(2) таутологија - ако је свака валуација v модел за α;

(3) контрадикција - ако не постоји ниједна валуација v која је модел за α;

(4) порецива - ако постоји валуација v таква да v није модел за α.

3. Написати таблицу истинитости за формулу

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

3. Написати таблицу истинитости за формулу

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

4. Одредити валуације, уколико постоје, које показују да је формула задовољива, односно порецива:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Rightarrow p_1) \Rightarrow (q \Rightarrow q_1))$;

3. Написати таблицу истинитости за формулу

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

4. Одредити валуације, уколико постоје, које показују да је формула задовољива, односно порецива:

(а) $(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Rightarrow p_1) \Rightarrow (q \Rightarrow q_1))$;

(б) $(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow p_1) \Rightarrow (q \Leftrightarrow q_1))$.

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Доказивање таутологије:

(1) Истинитосном таблицом;

(2) Методом свођења на противречност.

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Доказивање таутологије:

(1) Истинитосном таблицом;

(2) Методом свођења на противречност.

1. Испитати да ли је формула $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$, таутологија.

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Доказивање таутологије:
(1) Истинитосном таблицом;
(2) Методом свођења на противречност.

1. Испитати да ли је формула $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$, таутологија.

2. Испитати да ли је формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$, таутологија.

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Доказивање таутологије:
(1) Истинитосном таблицом;
(2) Методом свођења на противречност.

1. Испитати да ли је формула $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$, таутологија.

2. Испитати да ли је формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$, таутологија.

3. Свођењем на противречност доказати да је формула $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$, таутологија.

Таутологије

$\models \alpha$ - ознака да је формула α таутологија

Доказивање таутологије:
(1) Истинитосном таблицом;
(2) Методом свођења на противречност.

1. Испитати да ли је формула $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$, таутологија.

2. Испитати да ли је формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$, таутологија.

3. Свођењем на противречност доказати да је формула $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$, таутологија.

4. Свођењем на противречност доказати да је формула $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$, таутологија.

Таутологије

5. Испитати да ли је формула $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ таутологија.

6. Испитати да ли је формула $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ таутологија.

7. Испитати да ли је формула $\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Rightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$ таутологија.

8. Свођењем на противречност доказати да је формула $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ таутологија.

9. Свођењем на противречност доказати да је формула $\Big(\big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \wedge (p \vee q)\Big) \Rightarrow r$ таутологија.

10. Свођењем на противречност доказати да је формула $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$ таутологија.