# Релације

7

Неформално, релације представљају везе (односе) између извесних објеката. Најчешће се ради о вези два објекта, то су бинарне релације. У математици се релације дефинишу скуповном терминологијом.

**Дефиниција.**

- Скуп $\rho$ је бинарна релација на скупу $A$ ако је $\rho \subseteq A^2$.
- Ако $(a, b) \in \rho$ кажемо да је $a$ у релацији $\rho$ са $b$ и пишемо $a\rho b$,
- ако $(a, b) \notin \rho$ кажемо да $a$ није у релацији $\rho$ са $b$ и пишемо $a \not\rho b$.

Релација $\rho = \emptyset$ је празна релација, а $\rho = A^2$ је пуна релација.

# Релације

**Пример.**

- На скупу $A = \{1, 2, 3\}$ примери бинарних релација су
  $\rho_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$, тј. $\rho_1 = " = "$,
  $\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, тј. $\rho_2 = " < "$.
- На скупу особа примери бинарних релација су: "бити старији од", "бити виши од", "бити тежи од", "бити пријатељ", ...

# Карактеристична функција бинарне релације

?

Свакој бинарној релацији $\rho$ скупа $A$ одговара функција $f_\rho : A^2 \to \{1,0\}$, дата на следећи начин

$$f_\rho(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & (x,y) \notin \rho \\ 1, & (x,y) \in \rho \end{cases}$$

која се зове карактеристична функција релације $\rho$.
Обратно, свака функција $f : A^2 \to \{1,0\}$ одређује бинарну релацију $\rho_f \subseteq A^2$ дату са

$$\rho_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) | f(x,y) = 1\}.$$

Дакле, бинарну релацију можемо задати и њеном карактеристичном функцијом. У случају коначног скупа $A$, функцију $f_\rho$ обично задајемо таблицом.

**Пример.** Нека је $A = \{a, b, c, d, e\}$. Бинарну релацију $\rho$ можемо задати

- навођењем елемената
  $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b), (d, d), (d, e)\}$
- таблицом карактеристичне функције

| $f_\rho$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $b$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $e$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- графом.

# Појам $n$-арне релације

Слично појму бинарне релације, за било који природан број $n$ уводимо појам $n$-арне релације $\rho$ на непразном скупу $A$.

**Дефиниција.** Сваки подскуп $\rho$ Декартовог степена $A^n$ зовемо $n-$арна релација скупа $A$. Број $n$ се назива арност или дужина релације $\rho$.

- Специјално, за $n = 1$, релација $\rho \subseteq A$ је унарна релација. Унарне релације издвајају из скупа $A$ елементе који имају одређену особину (својство). Ако $x \in \rho$ кажемо да $x$ има својство $\rho$ и пишемо $\rho(x)$.
- Релације арности 2 су управо бинарне релације.
- Релације арности 3 називамо тернарне релације.

У математици се најчешће ради са бинарним релацијама.

# Особине релација

Основне особине које бинарна релација може имати су: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

**Дефиниција.** Бинарна релација $\rho$ скупа $A$ је:

(Р) рефлексивна ако $(\forall x \in A)\ x\rho x$;

(С) симетрична ако $(\forall x, y \in A)\ (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$;

(А) антисиметрична ако $(\forall x, y \in A)\ (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$;

(Т) транзитивна ако $(\forall x, y, z \in A)\ (x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

Једина релација скупа $A$ која има све четири наведене особине (РСАТ) је релација једнакости.

# Релација еквиваленције

8

**Дефиниција.** Бинарна релација $\rho$ скупа $A$ је релација еквиваленције ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна (РСТ). Релација еквиваленције се обично означава са $\sim$ (чита се *тилда*). Примери релација еквиваленције: једнакост (на било ком скупу), паралелност правих у равни, еквипотентност скупова,. . .

**Дефиниција.** Нека је $\sim$ релација еквиваленције скупа $A$ и $a \in A$. Скуп

$$C_a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A | x \sim a\}$$

зове се класа еквиваленције елемента $a$ у односу на релацију $\sim$. Користи се и ознака $[a]$.

# Особине класа еквиваленције

**Теорема.** Нека је $\sim$ релација еквиваленције скупа $A$. Тада

(1) $C_a \neq \emptyset$, за све $a \in A$ (тј. свака класа еквиваленције је непразан скуп);

(2) $a \sim b$ акко $C_a = C_b$ (тј. два елемента имају исту класу еквиваленције акко су у релацији);

(3) $a \not\sim b$ акко $C_a \cap C_b = \emptyset$ (тј. два елемента нису у релацији акко су им класе дисјунктне);

(4) $A = \cup_{a \in A} C_a$. (унија свих класа еквиваленције једнака је целом скупу $A$)

**Доказ.**

(1) (P) $\Rightarrow$
$(\forall a \in A)\ a \sim a \ \Rightarrow\ (\forall a \in A)\ a \in C_a \ \Rightarrow\ (\forall a \in A)\ C_a \neq \emptyset$.

(2) $(\rightarrow)$ Нека $a \sim b$. Из

$$z \in C_a \Rightarrow \left.\begin{array}{c} z \sim a \\ a \sim b \end{array}\right\} \Rightarrow z \sim b \Rightarrow z \in C_b$$

следи $C_a \subseteq C_b$. Слично, $C_b \subseteq C_a$, па је $C_a = C_b$.
$(\leftarrow)$ Из $C_a = C_b$ и $a \in C_a$ следи $a \in C_b$, па је $a \sim b$.

(3) $(\rightarrow)$ Нека $a \not\sim b$ и $C_a \cap C_b \neq \emptyset$. Тада
$(\exists z)\ z \in C_a \cap C_b \ \Rightarrow\ (\exists z)(z \sim a \wedge z \sim b) \Rightarrow a \sim b$. Контрадикција.
$(\leftarrow)$ Нека $C_a \cap C_b = \emptyset$ и претпоставимо $a \sim b$. Тада из (2) следи $C_a = C_b$, па је $C_a \cap C_b = C_a \neq \emptyset$, контрадикција.

(4) (P) $\Rightarrow\ (\forall a \in A)\ a \in C_a \ \Rightarrow\ (\forall a \in A)\ a \in \cup_{a\in A} C_a \ \Rightarrow A \subseteq \cup_{a\in A} C_a$. Обратна инклузија тривијално важи. $\square$

Дакле, свака релација еквиваленције распарчава (врши партицију, сече) скуп $A$ на дисјунктне подскупове (класе еквиваленције). У једној класи су груписани сви они елементи које обједињује заједничко својство - оно које описује та релација. Стога је једноставније, уместо са целим скупом $A$, радити са скупом који се састоји од представника класа еквиваленције.

**Дефиниција.** Скуп

$$A/_\sim \overset{\text{def}}{=} \{C_a | a \in A\}$$

зовемо фактор скуп или количнички скуп скупа $A$ у односу на релацију $\sim$.

Фактор скуп се заправо добија тако што се свака класа еквиваленције сажме у један елемент.

# Релације поретка

**Дефиниција.** Бинарна релација $\rho$ скупа $A$ је релација поретка, у ознаци $\preceq$, ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (РАТ). Уређени пар $(A, \preceq)$ зовемо парцијално (делимично) уређени скуп.

**Пример.** $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \geq)$ $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, $(\mathbb{N}, |)$ су парцијално уређени скупови.

Релација < није релација поретка на скупу $\mathbb{N}$ јер није (Р).

**Дефиниција.** Парцијално уређени скуп $(A, \preceq)$ је линеарно (тотално) уређен ако су свака два елемента скупа $A$ упоредива, тј. важи

(Л) $$(\forall a, b \in A)\ (a \preceq b \vee b \preceq a).$$

K