Језик предикатске логике

37

Језик предикатске логике се састоји из скупа логичких и скупа нелогичких симбола.

Скуп логичких симбола чине:

- $Var = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots\}$ - пребројив скуп променљивих (последња слова абецеде, са или без индекса)
- $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - знаци исказних везника
- $\forall, \exists$ - универзални и егзистенцијални квантификатор ($\forall$ се чита "сваки", "за сваки", $\exists$ се чита "постоји", "неки","за неки")
- , ( ) - помоћни знаци (заграде и зарез).

Језик предикатске логике

Скуп нелогичких симбола чине:

- операцијски знаци: $f, g, h, f_1, g_1, *, +, ...,$
- релацијски знаци: $R, Q, S, R_1, Q_1, S_1, \alpha, \beta, \leq, >, \ldots,$
- знаци константи: $a, b, c, a_1, b_1, 0, 1, 5, \top, \pi \ldots,$

при чему се подразумева да је дефинисана и функција ar која сваком релацијском и сваком операцијском знаку додељује неки природни број, такозвану арност или дужину тог знака.

Како је избор нелогичких симбола променљив и зависи од типа структуре коју описујемо (док је скуп логичких симбола фиксиран), одговарајући језик $\mathcal{L}$ задајемо навођењем само нелогичких симбола, тј.
под језиком $\mathcal{L}$ подразумевамо унију три међусобно дисјунктна скупа

$$\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Cons_{\mathcal{L}}$$

које називамо:
$Rel_{\mathcal{L}}$ - скуп релацијских симбола језика $\mathcal{L}$,
$Fun_{\mathcal{L}}$ - скуп операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ и
$Cons_{\mathcal{L}}$ - скуп симбола константи,
заједно са функцијом

$$ar : Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N},$$

која сваком релацијском и сваком операцијском знаку додељује неки природни број, такозвану арност или дужину.

Терми (изрази) језика $\mathcal{L}$

Помоћу променљивих, заграда, симбола константи и операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ граде се, према посебним правилима, изрази или терми.

Дефиниција терма (израза).

(1) Променљиве и симболи константи су терми.

(2) Ако су $t_1, \ldots, t_n$ терми и f операцијски знак дужине n, онда је $f(t_1, \ldots, t_n)$ терм.

(3) Терми се добијају само применом (1) и (2) коначан број пута.

Скуп свих терма језика $\mathcal{L}$ означаваћемо са $Term_{\mathcal{L}}$.

Пример.

(и) На језику $\mathcal{L} = \{R, S\} \cup \{f, g\} \cup \{c\}$, где је $Rel_{\mathcal{L}} = \{R, S\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\}, Cons_{\mathcal{L}} = \{c\}$, $ar(f) = ar(R) = 1,\ ar(g) = ar(S) = 2$,

- терми су, на пример:
  $x, y, z, c, \ldots$
  $f(y), g(x, c), g(z, z), f(c), \ldots$
  $f(g(x, c)), g(c, f(y)), g(f(c), g(z, z))$
- низови симбола $f(x, z), g(z), R(x), f(g(x))$ нису терми (јер $ar(f) = 1, ar(g) = 2$, R није операцијски, већ релацијски знак).

(ии) На језику $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{*\} \cup \{1\}, ar(*) = ar(\leq) = 2$ терми су $x,\ y,\ 1, *(x, y), *(*(x, y), 1), \ldots$, док $*x, x \leq y$ нису терми.

Напомене.

(1) Ако је f операцијски знак дужине 2 често се терм $f(t_1, t_2)$ записује у облику $(t_1 f t_2)$ (у претходном примеру уместо $*(x, y)$ можемо писати $(x * y)$, уместо $*(*(x, y), 1)$ пишемо $((x * y) * 1)$ и слично).

(2) Ако су $x_1, \dots, x_n \in Var, t \in Term_{\mathcal{L}}$, онда ознака $t(x_1, \dots, x_n)$ значи да су све променљиве терма t из скупа $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Атомске формуле

Повезивањем израза релацијским знацима добијају се најједноставније формуле које се зову атомске формуле.

Дефиниција атомске формуле. Ако су $t_1, \ldots, t_n$ терми и R релацијски знак арности n, онда је $R(t_1, \ldots, t_n)$ елементарна (атомска) формула.

Напомене.

(1) Ако је R релацијски знак дужине 2, t_1, t_2 терми, уобичајено је да се уместо префиксне нотације $R(t_1, t_2)$ користи инфиксна нотација $t_1 R t_2$.

(2) Често се уместо словних ознака користе знаци

- $+, \cdot, *, \wedge, \vee, \cup, \cap, \circ, \ldots$ као симболи бинарних операција,
- $=, \leq, <, \subseteq, \sim, \equiv, \ldots$ као симболи бинарних релација.

Пример.

(и) На језику $\mathcal{L} = \{R, S\} \cup \{f, g\} \cup \{c\}$, где је $Rel_{\mathcal{L}} = \{R, S\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\}, Cons_{\mathcal{L}} = \{c\}$, $ar(f) = ar(R) = 1,\ ar(g) = ar(S) = 2$,

- атомске формуле су, на пример $R(x), S(c, f(x)), R(g(x, x)), \ldots,$
- $S(g(x, y)), R(x, c), S(f(x), R(x)), g(x, y), \ldots$ нису атомске формуле.

(ии) На језику $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{*\} \cup \{1\},\ ar(*) = ar(\leq) = 2$

- атомске формуле су, на пример, $1 \leq x, x * y \leq 1, (x * y) * 1 \leq x, \ldots,$
- $0 \leq x, x \leq y \leq 1, x * y$ нису атомске формуле.

Предикатске формуле

Дефиниција предикатске формуле

(1) Атомске формуле су формуле.

(2) Ако су A и B формуле и x променљива, онда су и $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(\forall x)A$ и $(\exists x)A$ формуле.

(3) Формуле се могу добити само применом (1) и (2) коначан број пута.

Скуп свих формула језика $\mathcal{L}$ означаваћемо са $Form_{\mathcal{L}}$.

Предикатске формуле

Пример.

(и) На језику $\mathcal{L} = \{R, S\} \cup \{f, g\} \cup \{c\}$, где је $Rel_{\mathcal{L}} = \{R, S\},\ Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\},\ Cons_{\mathcal{L}} = \{c\}$, $ar(f) = ar(R) = 1, ar(g) = ar(S) = 2$,

- формуле су, на пример, $(R(c) \wedge (\forall x)S(f(x), y)), ((\exists y)S(y, c) \Rightarrow R(z)), \neg(\forall z)R(g(y, f(z))), \ldots,$
- $(\forall c)R(g(x, c)), S(c, x) \wedge (\exists f)f(x) = c, (\forall x)g(x, c)$ нису формуле.

(ии) На језику $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{*\} \cup \{1\},\ ar(*) = ar(\leq) = 2$

- формуле су, на пр. $(\forall x)x * y \leq 1, 1 \leq x \wedge (\exists y)y \leq 1$
- $\neg(x * y), 1 \leq (\exists x)1 \leq x,$ нису формуле

Напомена. У ПР^1 дозвољено је квантификовање само променљивих. Постоје предикатски рачуни вишег реда и у њима је могуће квантификовати и операцијске и релацијске знаке.

Ради једноставнијег и прегледнијег записа формула примењују се договори о

- брисању спољашњих заграда,
- приоритету логичких везника: $\forall, \exists; \neg; \wedge, \vee; \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Нека је A формула и x променљива. Кажемо да је у формули

$$(\forall x)\, A$$

променљива x везана универзалним квантификатором, као и да је формула A област дејства овог квантификатора.
Слично за формулу $(\exists x)\, A$.

Слободне и везане променљиве

- Ако је променљива x у формули A под дејством квантификатора (тј. она се јавља у потформули облика $(\forall x)B$ или $(\exists x)B$), кажемо да је то појављивање променљиве x везано. У супротном, појављивање променљиве је слободно.
- Могуће је да променљива у истој формули има и слободна и везана појављивања.
- За променљиву чија су сва појављивања у формули A везана, кажемо да је везана променљива. У супротном (ако променљива има бар једно слободно појављивање у формули A) кажемо да је променљива слободна.

Слободне и везане променљиве

Пример. У формули

$$(\forall x)(R(y) \Rightarrow (\exists y)S(x, f(y)))$$

(језика $\mathcal{L} = \{R, S\} \cup \{f, g\} \cup \{c\}$, где је $ar(f) = ar(R) = 1,\ ar(g) = ar(S) = 2$),

- променљива x има само везана појављивања,
- променљива y има и слободна (прво појављивање) и везана (друго и треће) појављивања.

Дакле, у датој формули променљива x је везана, а променљива y је слободна.

Ако је A нека формула језика $\mathcal{L}$, запис $A(x_1, \ldots, x_n)$ означава да су промељиве $x_1, \ldots, x_n$ слободне у формули A.

Дефиниција. Формула без слободних промељивих назива се затворена формула или реченица.

Пример. На језику $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{*\} \cup \{1\},\ ar(*) = ar(\leq) = 2$,

- формуле $(\forall x)(\neg x \leq 1 \Rightarrow (\exists y)x * y = 1)$, $(\forall x)(\forall y)x * y = y * x$, $1 = 1$ су реченице
- $(\forall x)x \leq 1 \Rightarrow (\exists y)x \leq y$ није реченица, јер је промељива x слободна.

Ради једноставнијег записивања формула, ако језик $\mathcal{L}$ садржи симбол $\in$, могу се увести ограничени квантификатори:
$(\exists x \in S)A(x)$ је замена за формулу $(\exists x)(x \in S \wedge A(x))$,
$(\forall x \in S)A(x)$ је замена за формулу $(\forall x)(x \in S \Rightarrow A(x))$.
Може се увести и квантификатор "постоји тачно једно", на следећи начин:
$(\exists_1 x)A(x)$ је замена за $(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(A(y) \Rightarrow y = x))$.

Пример. На језику предикатског рачуна И реда формализовати следеће реченице и при том искључиво користити дате предикате:
$Z(x)$ са значењем x је женског пола
$M(x)$ са значењем x је мушког пола
$R(x, y)$ са значењем x је родитељ y-ну.

(а) Лука је отац.
(б) Марија и Ана су сестре.
(ц) Свако има мајку.
(д) Јован је Мајин деда.

Одговори:

(а) $(\exists x)R(Luka, x) \land M(Luka)$
(б) $Z(Marija) \land Z(Ana) \land (\exists x)(R(x, Marija) \land R(x, Ana))$
(ц) $(\forall x)(\exists y)(R(y, x) \land Z(y))$
(д) $M(Jovan) \land (\exists x)(R(Jovan, x) \land R(x, Maja))$

Интерпретација језика и предикатских формула

38

Интерпретација формула се разликује према скупу вредности које узимају променљиве као и тумачењу функцијских, релацијских и симбола константи.

Пример. Посматрајмо формулу $(\forall x)P(x)$, где је P релацијски знак дужине 1. Тачност ове формуле зависи од

- скупа из кога променљива x узима вредности (домен интерпретације)
- тумачења релацијског знака P.

Ако је домен скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, а P интерпретирамо као својство 'бити једнак 1' ова формула је нетачна.

Ако је домен скуп $\{1\}$, а P интерпретирамо као својство 'бити једнак 1' ова формула је тачна.

Ако је домен скуп $\{1\}$, а P интерпретирамо као својство '$>$ 1' ова формула је нетачна.

Дефиниција. Под интерпретацијом језика $\mathcal{L} = Rel_{\mathcal{L}} \cup Fun_{\mathcal{L}} \cup Cons_{\mathcal{L}}$ подразумевамо уређени пар (M, I), где је M непразан скуп који називамо домен (носач) интерпретације, а I је функција која

- сваком релацијском знаку $R \in Rel_{\mathcal{L}}$ дужине n додељује једну релацију $R^{\mathcal{M}}$ дужине n на скупу M, тј. $I(R) = R^{\mathcal{M}}$, где је $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$,
- сваком операцијском знаку $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ дужине n додељује једну операцију $f^{\mathcal{M}}$ дужине n на скупу M, тј. $I(f) = f^{\mathcal{M}}$, где је $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$,
- сваком знаку константе $c \in Cons_{\mathcal{L}}$ додељује један елемент $c^{\mathcal{M}}$ скупа M, тј. $I(c) = c^{\mathcal{M}}$, где је $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Структура

$$\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}}, \ldots, f^{\mathcal{M}}, \ldots, c^{\mathcal{M}}, \ldots)$$

се зове модел језика $\mathcal{L} = \{R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots\}$.

Пример. Интерпретације језика
$\mathcal{L} = \{S, f\},\ ar(f) = ar(S) = 2, Rel_{\mathcal{L}} = \{S\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f\}$
су, на пример,

- $(\mathbb{R}, =, +)$,
- $(\mathbb{R}, \leq, +)$,
- $(\mathbb{Z}, \leq, \cdot)$,
- $(\mathcal{P}(E), \subseteq, \cup)$.

док $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathcal{P}(E), \cup, \setminus)$ нису модели датог језика.

Напомена. Понекад се користи иста ознака за симбол језика и његову интерпретацију.
Нпр. $\mathcal{L} = \{\leq, +, \cdot\}$ - језик,
$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ - једна интерпретација језика $\mathcal{L}$.

Валуација. Вредност терма

Сада треба дефинисати вредност произвољног терма у датој интерпретацији језика. Да бисмо то урадили најпре додељујемо вредности променљивим.

Дефиниција. Нека је $\mathcal{M} = (M, I)$ интерпретација језика $\mathcal{L}$. Пресликавање $\mu : Var \to M$ зове се валуација променљивих у односу на домен M. Ако је $\mu(x) = d$ кажемо да је d вредност променљиве x у валуацији μ.

Валуација. Вредност терма

Дефиниција. Вредност терма t језика $\mathcal{L}$ у интерпретацији $\mathcal{M}$, за валуацију μ, означавамо са $t^{\mathcal{M}}[\mu]$ и дефинишемо индукцијом по сложености терма t на следећи начин:

- ако је t променљива x онда је $t^{\mathcal{M}}[\mu] = \mu(x)$;
- ако је t симбол константе c, онда је $t^{\mathcal{M}}[\mu] = c^{\mathcal{M}}$;
- ако је $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, где је f операцијски знак дужине n, а $t_1, \ldots, t_n$ терми, онда је $t^{\mathcal{M}}[\mu] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\mu], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\mu])$.

Из дефиниције непосредно следи да вредност $t^{\mathcal{M}}[\mu]$ зависи од вредности само оних променљивих од којих је изграђен терм t (иако валуација μ додељује вредност свакој променљивој скупа Var).

Пример. Нека је дат језик $\mathcal{L} = \{f, g, c\}, Fun_{\mathcal{L}} = \{f, g\},\ ar(f) = ar(g) = 2,\ Cons_{\mathcal{L}} = \{c\}$ и терм $t := f(x, g(y, c))$.

- У интерпретацији $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 1)$ за валуацију $\mu = \begin{pmatrix} x & y & z\dots \\ 2 & 5 & 3\dots \end{pmatrix}$ вредност терма t је
$$t^{\mathcal{R}}[\mu] = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$
- У истој интерпретацији за валуацију $\nu = \begin{pmatrix} x & y & z\dots \\ 1 & 0 & 0\dots \end{pmatrix}$ исти терм има вредност
$$t^{\mathcal{R}}[\nu] = 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$
- У интерпретацији $\mathcal{M} = (\{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \top)$ за валуацију $\mu = \begin{pmatrix} x & y & z\dots \\ \top & \bot & \bot\dots \end{pmatrix}$ исти терм има вредност
$$t^{\mathcal{M}}[\mu] = \top \wedge (\bot \vee \top) = \top.$$

Вредност предикатске формуле

Дефиниција. Да је формула A тачна за валуацију μ у моделу $\mathcal{M}$ означавамо са $\mathcal{M} \models A[\mu]$ (или $A^{\mathcal{M}}[\mu] = \top$)и дефинишемо индукцијом по сложености формуле A на следећи начин:

- ако је A атомска формула $R(t_1, \ldots, t_n)$ онда
$$\mathcal{M} \models A[\mu] \text{ акко } (t_1^{\mathcal{M}}[\mu], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\mu]) \in R^{\mathcal{M}};$$
- ако је $A = \neg B$ онда је
$$\mathcal{M} \models A[\mu] \text{ акко не важи } \mathcal{M} \models B[\mu];$$
- ако је $A = B \wedge C$ онда
$$\mathcal{M} \models A[\mu] \text{ акко } \mathcal{M} \models B[\mu] \text{ и } \mathcal{M} \models C[\mu]$$
(слично за остале везнике, уз помоћ истинитосних таблица);
- ако је $A = (\forall x)B$ онда
$$\mathcal{M} \models A[\mu] \text{ акко } \mathcal{M} \models B[\mu\tbinom{x}{a}] \quad \textbf{за свако } a \in M$$
- ако је $A = (\exists x)B$ онда
$$\mathcal{M} \models A[\mu] \text{ акко } \mathcal{M} \models B[\mu\tbinom{x}{a}] \quad \textbf{за неко } a \in M,$$

Модел предикатске формуле

39

где је $\mu\binom{x}{a}$ валуација која променљивој x додељује вредност a, а на осталим променљивим је једнака са валуацијом μ, тј.

$$\mu\binom{x}{a} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x & y & z & \dots \\ a & \mu(y) & \mu(z) & \dots \end{pmatrix}.$$

Дефиниција. Интерпретација $\mathcal{M}$ је модел формуле A, у ознаци $\mathcal{M} \models A$, ако је формула A тачна за за сваку валуацију $\mu : Var \to M$, тј. важи $\mathcal{M} \models A[\mu]$.

Ако није $\mathcal{M} \models A$ онда кажемо да је $\mathcal{M}$ контрамодел за A и пишемо $\mathcal{M} \not\models A$.

Модел предикатске формуле

Пример.

(1) Формула $A := (\forall x) f(x,y) = x$ језика $\{=, f\}$, $ar(f) = 2$, у структури $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, =, \cdot)$ је тачна за валуацију
$\mu = \begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 2 & 1 & \dots \end{pmatrix}$,
а нетачна за валуацију $\nu = \begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 2 & 2 & \dots \end{pmatrix}$, тј. важи

$$\mathcal{R} \models A[\mu] \quad \text{и} \quad \mathcal{R} \not\models A[\nu].$$

То значи да интерпретација $\mathcal{R}$ није модел формуле A, тј.

$$\mathcal{R} \not\models A.$$

(2) Формула $B := (\exists x)(\forall y) S(x,y)$ језика $\mathcal{L} = \{S\}, ar(S) = 2$, је нетачна у структури $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \leq)$, а тачна у структури $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$, тј.

$$\mathcal{R} \not\models B, \qquad \mathcal{N} \models B.$$

- Приметимо да тачност формуле A у некој интерпретацији $\mathcal{M}$, за валуацију μ домена M, зависи од $\mu(x)$ акко је x слободна променљива у формули A.
- Како реченице немају слободних променљивих, њихова тачност у некој интерпрертацији не зависи од избора валуације. Другим речима, за сваку реченицу A језика $\mathcal{L}$ и сваки модел $\mathcal{M}$ овог језика важи:
  или $\mathcal{M} \models A$ или $\mathcal{M} \models \neg A$
  (такав случај имамо у претходном примеру (2)).

- Ако је $\mathcal{M} \models A$ онда формула A изражава неко својство структуре $\mathcal{M}$. То не мора бити опште правило закључивања, већ својство конкретне структуре $\mathcal{M}$. У претходном примеру под (2), формула B изражава егзистенцију најмањег елемента у структури природних бројева, то својство нема структура реалних бројева.
- Међутим, ако је формула тачна у свакој интерпретацији језика, онда она не описује својство неке конкретне структуре, већ опште својство свих структура, тј. опште правило закључивања. Таква формула се зове ваљана формула.

Дефиниција.

(а) Формула A језика $\mathcal{L}$ је ваљана, у ознаци $\models A$, ако је тачна у сваком моделу језика $\mathcal{L}$, тј. за сваки модел $\mathcal{M}$ језика $\mathcal{L}$ и сваку валуацију $\mu : Var \to M$ важи $\mathcal{M} \models A[\mu]$.

(б) Формула A језика $\mathcal{L}$ је задовољива ако постоји интерпретација $\mathcal{M}$ језика $\mathcal{L}$ и постоји валуација $\mu : Var \to M$ тако да важи $\mathcal{M} \models A[\mu]$.

Пример. Формула $(\forall x)x = x$ је тачна у свакој интерпретацији, па је ваљана.

Како постоји бесконачно много интерпретација формула, проблем испитивања тачности предикатске формуле је много сложенији него у исказном рачуну.

Може се доказати да, у општем случају, **не постоји алгоритам који за сваку реченицу може проверити да ли јесте или није ваљана формула**.

Теорема. Ако је $A(p_1, \ldots, p_n)$ таутологија и $B_1, \ldots, B_n$ предикатске формуле, тада је предикатска формула $A(B_1, \ldots, B_n)$ добијена из A заменом сваког исказног слова p_j предикатском формулом B_j, за $j = 1, \ldots, n$, ваљана формула.

Ваљане формуле добијене из таутологија на начин описан у претходној теореми зову се изводи таутологија.

Пример. Ако су A и B предикатске формуле, онда је формула $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ваљана, јер је извод таутологије $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

Да нису све ваљане формуле изводи таутологија показује следећи пример.

Пример. Формула

$$\neg(\forall x)R(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg R(x),$$

где је R релацијски знак дужине 1, је ваљана, а није извод таутологије.