ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИНФОРМАТИКЕ

Други колоквијум 14.01.2023. године

Име и презиме: Број индекса:

Број бодова:

1. [4 поена] Написати програм за израчунавање вредности функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ на идеалном рачунару, ако је функција f дата са

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , x \text{ је потпун квадрат;} \\ \text{недефинисано} & , \text{иначе.} \end{cases}$$

2. [2,5 поена] Организује се журка и прогнозира се ко ће од пет особа доћи. Дате су следеће изјаве:

   (1) Ако на журку не дође Сања и дође Никола, онда ће доћи и Ема.

   (2) Ако дође Васа, онда неће доћи Никола и доћи ће Ема.

   (3) Ако не дође Филип и дође Никола, онда неће доћи Сања.

   (4) Ако не дође Васа и дође Ема, онда неће доћи Никола.

   (5) Никола долази на журку.

   Ко ће још доћи на журку?

3. [2 поена] Методом резолуције испитати да ли је формула F таутологија

$$F = (\neg p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(q \vee r)).$$

4. [2 поена] Табличном методом испитати да ли је следећа формула таутологија, а ако је порецива дати пример валуације који то доказује.

$$p \wedge (q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vee \neg q.$$

5. [3 поена] Доказати

$$\vdash (p \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p).$$

6. [1.5 поена] Направити одговарајући модел и у њему записати следеће реченице језиком предикатског рачуна.

   (а) За сваки прост број постоји број који је већи од њега.

   (б) Не постоје два узастопна проста броја већа од 3.

   (в) Постоји само један прост број дељив са 2.

7. [2+4 поена] Нелогички део језика предикатског рачуна првог реда чине следећи скупови:

$$Rel = \{R, S\}, Fun = \{F, G\}, Const = \{a, b\}$$

при чему је $ar(R) = 2$, $ar(S) = 2$, $ar(F) = 2$, $ar(G) = 2$.

(а) Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(1) $(\exists X)(\forall Y)\,(\neg(R(F(X,a)) \wedge S(b, G(X,Y))) \Rightarrow R(Y, G(X,Y)))$

(2) $(\forall Y)(R(Y, G(a,Y)) \Rightarrow (\exists X)(\neg S(F(X,a),Y) \vee S(a,b)))$

(3) $\neg F(G(X,Y), G(F(a,X),b))$

(4) $(\exists X)(\forall Y) S(F(G(Y,b), R(b, G(X,b))))$

(б) Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathcal{P}(A)$, где је скуп $A = \{1,4,5\}$, на следећи начин:

$J(R) = \subseteq$ (подскуп)

$J(S) = \neq$ (различито)

$J(F) = \cap$ $(F(X,Y) = X \cap Y)$

$J(G) = \times$ (Декартов производ)

$J(a) = \emptyset$

$J(b) = \{\emptyset\}$.

У дефинисаном моделу за валуацију $\mu = \begin{pmatrix} X & Y & Y & \cdots \\ \{1,4\} & A & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \cdots \end{pmatrix}$:

(1) израчунати вредност израза $F(G(X, G(F(X,Y),b)),a)$ и $G(F(X,Y), F(Y, G(a,Z)))$;

(2) испитати тачност формула $R(F(a,X), F(Z,b))$ и $S(a, F(Y,b)) \vee R(F(Z,Z),b)$;

(3) одредити да ли су следеће реченице датог језика тачне или нетачне и написати како оне гласе у датом моделу:

$$(\forall M)(\forall N)(R(M,N) \wedge R(N,M) \Rightarrow \neg S(N,M));$$

$$(\forall M)(\exists N)(R(N,M) \wedge S(a,N)).$$

8. [2 поена] Дати пример модела у коме је реченица тачна и пример модела у коме реченица није тачна:

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x)).$$