Функције

3

Везе међу скуповима успостављамо скуповима које називамо функцијама.
Неформално, функција из скупа A у скуп B је "правило" којим се сваком елементу скупа A придружује (додељује) тачно један елемент скупа B.
Пример. Везу између скупа $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и скупа $B = \{a, b, c\}$ успоставимо придруживањем $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & b & c \end{pmatrix}$ што можемо схватити као скуп $f = \{(1, b), (2, a), (3, b), (4, c)\}$.
$\{(1, b), (2, c), (4, a)\}$ није функција из A у B.
$\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, b), (1, b)\}$ није функција.
$\{(1, a), (2, b), (3, a), (4, a)\}$ јесте функција.

Дефиниција функције

Дефиниција. Скуп f је пресликавање (функција) скупа A у скуп B, у ознаци $f : A \to B$, ако је испуњено

1. $f \subseteq A \times B$,
2. за **сваки** елемент x из A **постоји тачно један** елемент $y \in B$ тако да $(x, y) \in f$.

тј.

$$\boxed{(\forall x \in A)(\exists_1 y \in B)\ (x, y) \in f.}$$

Дефиниција функције

Тада:

- уместо $(x, y) \in f$ пишемо $y = f(x)$ или $f : x \mapsto y$
- скуп A је домен или област дефинисаности (користи се и ознака D_f)
- $x \in A$ је оригинал
- скуп B је кодомен или област вредности
- $y = f(x) \in B$ је слика елемента x
- $f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$ је слика скупа A.

Дефиниција функције

Дефиниција. Функције $f : A \to B$ и $g : C \to D$ су једнаке, у ознаци $f = g$, ако

- имају исти домен, тј. $A = C$
- имају исти кодомен, тј. $B = D$ и
- $f(x) = g(x)$ за сваки елемент $x \in A$.

Дефиниција.

- Функција $1_A : A \to A$ дата са $1_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$ за све $x \in A$, зове се идентичко пресликавање скупа A.
- Ако $f : A \to B$ и $C \subseteq A$, тада функција $f \restriction_C : C \to B$ дата са $f \restriction_C (x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ за све $x \in C$, се зове рестрикција (сужење) функције f на скуп C.

Ињекција, сирјекција, бијекција

Дефиниција.

(а) Функција $f : A \to B$ је "1-1" функција (ињекција), ако различитим оригиналима одговарају различите слике, тј. важи

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

што се може написати и у еквивалентном облику

$$\boxed{(\forall x_1, x_2 \in A) \quad (f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow x_1 = x_2)} \quad .$$

(б) Функција $f : A \to B$ је "на" функција (сирјекција) ако је сваки елемент скупа B слика бар једног елемента скупа A, тј. важи

$$\boxed{(\forall y \in B)(\exists x \in A) \quad y = f(x)}$$

(в) Функција $f : A \to B$ је бијекција или обострано једнозначно пресликавање ако је "1-1" и "на", тј. сваки елемент скупа B је слика тачно једног елемент скупа A, што се може записати формулом $\boxed{(\forall y \in B)(\exists_1 x \in A) \quad y = f(x)}$.

Композиција функција

Дефиниција. Ако су $f : A \to B$ и $g : B \to C$ функције, тада се функција $g \circ f : A \to C$ дефинисана са

$$g \circ f\,(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(f(x)), \qquad \text{за све } x \in A,$$

зове композиција (производ, слагање) пресликавања f и g.

Композиција функција

Пример.

(1) Ако $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{P, Q, R, S\}$ и $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ R & P & R & Q \end{pmatrix}$, онда је

$g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ R & R & P \end{pmatrix}$, $\quad f \circ g$ не постоји.

(2) Ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$; $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 2$, онда

$$\begin{aligned} g \circ f\,(x) &= g(f(x)) = g(2x+1) = 3(2x+1) - 2 = 6x + 1 \\ f \circ g\,(x) &= f(g(x)) = f(3x-2) = 2(3x-2) + 1 = 6x - 3 \end{aligned}$$

операција $\circ$ **није комутативна**, тј. $f \circ g \neq g \circ f$ у општем случају.

Теорема.

(а) Ако $f : A \to B$, онда $f \circ 1_A = f, \quad 1_B \circ f = f$.

(б) Ако $h : A \to B$, $g : B \to C$, $f : C \to D$ онда
$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (тј. $\circ$ је асоцијативна операција).

~~(в)~~ Ако су $f : A \to B$ и $g : B \to C$ бијекције, онда је и
$g \circ f : A \to C$ бијекција.

К 3

Доказ

(а) Нека $f : A \to B$, $1_A : A \to A$, $1_B : B \to B$. Тада $f \circ 1_A : A \to B$ и $f \circ 1_A(x) = f(\underbrace{1_A(x)}_{=x}) = f(x)$ за свако $x \in A$, па је $f \circ 1_A = f$

(б) Нека $h : A \to B$, $g : B \to C$, $f : C \to D$. Тада $f \circ (g \circ h) : A \to D$, $(f \circ g) \circ h : A \to D$ и за свако $x \in A$ важи

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h)(x) &= f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) \\ (f \circ g) \circ h(x) &= f \circ g(h(x)) = f(g(h(x))) \end{aligned}$$

одакле је

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Инверзна функција

4

Дефиниција. Нека $f : A \to B$. Ако постоји пресликавање $f^{-1} : B \to A$ такво да важи

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{и} \quad f \circ f^{-1} = 1_B$$

онда се оно зове инверзна функција од f.

Функција може имати највише једну инверзну функцију: ако су g и f^{-1} инверзне функције од f онда

$$g = 1_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ 1_B = f^{-1}.$$

Теорема.

(а) Функција $f : A \to B$ има инверзно пресликавање f^{-1} акко је бијекција. У том случају и инверзна функција је бијекција.

(б) Ако су $f : A \to B$ и $g : B \to C$ бијекције, тада

$$(f^{-1})^{-1} = f, \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

K4

Пример.

(1) Ако $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ функција

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$ је бијекција,

па постоји $f^{-1} : B \to A$ и $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ је бијекција, па постоји инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Одредимо је:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \quad & f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & f^{-1}\underbrace{(2x+1)}_{=t} = x \\ \Leftrightarrow \quad & f^{-1}(t) = \tfrac{t-1}{2}, \quad . \end{aligned}$$

Дакле, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ је инверзна функција функције f.

Еквипотентни скупови

5

Између два коначна скупа можемо успоставити бијекцију акко они имају исти број елемената. То нас мотивише да истобројност било која два скупа схватимо као могућност успостављанаја бијекције између та два скупа.

Дефиниција. Скупови A и B су истобројни (еквипотентни, исте кардиналности), у ознаци $|A| = |B|$ (или $A \sim B$), ако постоји бијекција $f : A \to B$.

Еквипотентни скупови

Пример.

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ $\quad |A| \neq |B|$ $\quad$ јер не постоји бијекција између ова два скупа ($f : A \rightarrow B$ није "1-1", $g'' B \rightarrow A$ није "на")
- $|N| = |2N|$, $\quad$ јер је $\quad f : N \rightarrow 2N$, $\quad f(n) = 2n$, $\quad$ бијекција.
- Било које две дужи AB и CD су еквипотентне (централно пројектовање).
- $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$, $\quad$ јер је $\quad f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = tgx$, бијекција .

Пример. Међу бројевима 0,1,2,...,999 има једнак број оних са збиром цифара 11 и оних са збиром цифара 16. Сваки од ових бројева посматрамо као реч abc где су a, b, c цифре (2 је 002, 17 је 017). Нека је

X ?

$$A = \{abc | a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ a + b + c = 11\},$$

$$B = \{abc | a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ a + b + c = 16\}.$$

Нека је $f : A \to B$ дато са $f(abc) = a'b'c'$ где
$a' = 9 - a,\ b' = 9 - b,\ c' = 9 - c$

Пример.

- f је добро дефинисано, јер

$$
\begin{aligned}
abc \in A \Rightarrow \quad & a+b+c=11 \\
\Rightarrow \quad & a'+b'+c' = 9-a+9-b+9-c = 27 - \underbrace{(a+b+c)}_{=11} \\
\Rightarrow \quad & f(abc) = a'b'c' \in B
\end{aligned}
$$

- Функција f је бијекција, јер за свако $a'b'c' \in B$ $(a'+b'+c'=16)$ постоји јединствено $a = 9-a', b = 9-b', c = 9-c'$ тако да $a+b+c = 9-a'+9-b'+9-c' = 27-16 = 11$, тј. $abc \in A$ и $f(abc) = a'b'c'$.

Дакле, $|A| = |B|$.

Операције

6

Нека је $A \neq \emptyset$ и $n \in N$.

Дефиниција. Свака функција $f : A^n \to A$ зове се $n-$арна операција скупа A.

Специјално, за $n = 1$, $f : A \to A$ је унарна операција на скупу A, за $n = 2$, $f : A^2 \to A$ је бинарна операција на скупу A.

За бинарне операције се уместо словних ознака обично користе знаци $*, +, \circ, \cup, +_3, \ldots$.

Уместо $z = *(x, y)$ уобичајено је писати $z = x * y$.

Пример.

(1) $+ : N^2 \to N, \quad + : (2,3) \mapsto 5.$

(2) $A = \{a, b, c\}, \quad * : A^2 \to A$ дата је Кејлијевом таблицом

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	b	c	a
a	a	c	a

тј. $* =$

$$\begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (b,a) & (b,b) & (b,c) & (c,a) & (c,b) & (c,c) \\ a & a & b & b & c & a & a & c & a \end{pmatrix}$$

Пример.

(3) $Z_4 = \{0,1,2,3\}$, $+_4$, $\cdot_4$ -сабирање и множење по модулу 4.

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Особине операција

Дефиниција.

(1) Бинарна операција $*$ скупа A је комутативна акко за све $x, y \in A$ важи
$$x * y = y * x.$$

(2) Бинарна операција $*$ скупа A је асоцијативна акко за све $x, y, z \in A$ важи
$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

(3) Бинарна операција $*$ скупа A је дистрибутивна према бинарној операцији $\star$ скупа A акко за све $x, y, z \in A$ важи
$$x * (y \star z) = (x * y) \star (x * z), \quad (x \star y) * z = (x * z) \star (y * z).$$

Особине операција

x К6

Пример.

- Сабирање природних бројева је комутативна и асоцијативна операција, јер важи
  $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$
  Множење природних бројева је комутативна и асоцијативна операција:
  $x \cdot y = y \cdot x, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  Множење је и дистрибутивно према сабирању:
  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$
- Операције $+_4$ и $\cdot_4$ су комутативне и асоцијативне.