Природни бројеви

10

У људском искуству природни бројеви 1,2,3,. . . везују се за бројање. Интуитивно се подразумева да иза сваког од бројева следи број, па се набрајање може одвијати без ограничења.

Аксиоматско заснивање природних бројева извршио је крајем 19. века Ђузепе Пеано и оно је познато као Пеанова аритметика.

Дефиниција. Структуру природних бројева уводимо као уређену тројку $(\mathbb{N},', 1)$, где је

$\mathbb{N}$ скуп,

$' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ унарна операција на скупу $\mathbb{N}$ коју зовемо следбеник,

$1 \in \mathbb{N}$ (константа)

и важе следеће аксиоме:

Природни бројеви

(П1) $(\forall x)\ 1 \neq x'$ (тј. 1 није следбеник ниједног елемента)

(П2) $(\forall x)(\forall y)\ (x \neq y \Rightarrow x' \neq y')$ (тј. различити елементи имају различите следбенике)

(П3) Ако је $S \subseteq \mathbb{N}$ такав да важи:

- $1 \in S$ и
- $(\forall x)\ (x \in S \Rightarrow x' \in S)$,

онда $S = \mathbb{N}$. (аксиома индукције)

Операције и релације на скупу $\mathbb{N}$

На основу ове дефиниције добијамо:

$$\mathbb{N} = \{1, \underbrace{1'}_{=2}, \underbrace{(1')'}_{=3}, \underbrace{((1')')'}_{=4}, \dots\}$$

- У структури $(\mathbb{N}, ', 1)$ дефинишемо бинарне операције сабирање (+) и множење (·) на следећи начин:

$$\begin{cases} x+1 \overset{\text{def}}{=} x' \\ x+y' \overset{\text{def}}{=} (x+y)' \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot 1 \overset{\text{def}}{=} x \\ x\cdot y' \overset{\text{def}}{=} x\cdot y + x \end{cases}$$

- Такође се могу дефинисати релације $<$ и $\leq$ на следећи начин:

$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists z \in \mathbb{N})\ y = x + z$$

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\iff} x < y \text{ или } x = y$$

Операције и релације на скупу $\mathbb{N}$

КЛО

- Даље се могу доказати све добро познате особине операција $+$ и $\cdot$ (комутативност, асоцијативност, дистрибутивност,...), као и релација $<$ и $\leq$.
- Недостатак: није свака једначина облика $a + x = b$ решива у скупу $\mathbb{N}$. На пример $3 + x = 3, 5 + x = 2, \ldots$ немају решење у скупу $\mathbb{N}$.
- Структура природних се проширује у нову структуру, тако да:
  - једначина $a + x = b$ буде решива за свако a и b,
  - својства операција + и · буду сачувана.

Увођење целих бројева

- Једначине $1 + x = 2,\ 2 + x = 3,\ 3 + x = 4, \ldots$ имају исто решење, број 1.
  Једначине $5 + x = 8,\ 1 + x = 4,\ 3 + x = 6, \ldots$ имају исто решење, број 3.
- Сваку једначину представимо уређеним паром:
  прва компонента-познати сабирак, друга компонента-збир.
  $1 + x = 2,\ 2 + x = 3,\ 3 + x = 4, \ldots \quad \longrightarrow$
  $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \ldots \quad \longrightarrow\ 1$
  $5 + x = 8,\ 1 + x = 4,\ 3 + x = 6, \ldots \quad \longrightarrow$
  $(5, 8), (1, 4), (3, 6), \ldots \quad \longrightarrow\ 3.$
- Заједничко својство: једнакост збира спољашњих са збиром унутрашњих чланова, нпр. за (1,2) и (2,3) је 1+3=2+2, за (2,3) и (3,4) је 2+4=3+3,. . .

Увођење целих бројева

K11

- Ова конструкција проширује се и на једначине које немају решење у скупу $\mathbb{N}$.
  $1+x=1,\ 2+x=2,\ 3+x=3,\ a+x=a\ldots \quad \longrightarrow$
  $(1,1),(2,2),(3,3),(a,a)\ldots \ \longrightarrow\ 0$
  $2+x=1,\ 3+x=2,\ 4+x=3,\ (a+1)+x=a\ldots \quad \longrightarrow$
  $(2,1),(3,2),(4,3),(a+1,a)\ldots \ \longrightarrow\ -1.$
- Уопште, дефинишемо бинарну релацију $\sim$ на скупу $\mathbb{N}^2$ на следећи начин
  $$(a,b)\sim(c,d) \overset{\text{def}}{\iff} a+d=b+c.$$
  $\sim$ је (РСТ). Нове бројеве 0,-1,... уводимо као класе еквиваленције релације $\sim$:

$$0 \overset{\text{def}}{=} C_{(1,1)} = \{(1,1),(2,2),(a,a),\ldots\}$$
$$-1 \overset{\text{def}}{=} C_{(2,1)}$$
$$-2 \overset{\text{def}}{=} C_{(3,1)},\ldots$$

$$\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N}^2/_{\sim} = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}.$$

Увођење рационалних бројева

12

- Операције + и · у $\mathbb{Z}$ задржавају особине које имају у скупу $\mathbb{N}$, свака једначина $a + x = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ има решење у скупу $\mathbb{Z}$.
- Недостатак: неке једначине облика $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0)$ немају решење у скупу $\mathbb{Z}$, нпр. $2 \cdot x = -5,\ (-4) \cdot x = 10$,...
- Сличним поступком као при проширивању скупа $\mathbb{N}$ у скуп $\mathbb{Z}$, скуп $\mathbb{Z}$ проширујемо тако да у новом скупу
  - буду решиве све једначине облика $a \cdot x = b,\ a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$,
  - операције $+$ и $\cdot$ задрже особине које имају у структури целих бројева.

Нпр.
$2 \cdot x = -5 \quad \longrightarrow \quad (2, -5), \quad (-4) \cdot x = 10 \quad \longrightarrow \quad (-4, 10)$, $(2, -5) \sim (-4, 10)$ јер $2 \cdot 10 = (-5) \cdot (-4)$, па уводимо $\frac{-5}{2} \stackrel{\text{def}}{=} C_{(2,-5)}$

Увођење рационалних бројева

К12.

- Уопште, дефинишемо релацију $\sim$ на $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}$, где је $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, на следећи начин:

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \cdot d = b \cdot c.$$

$\sim$ је (РСТ). Њене класе ћемо звати разломцима и представљаће елементе новог скупа, који ћемо звати скуп рационалних бројева.

$$\frac{b}{a} \overset{\text{def}}{=} C_{(a,b)}, \quad \mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z})_{/\sim} = \left\{ \frac{b}{a} \middle| b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N} \right\}.$$

Увођење реалних бројева

13

- У структури рационалних бројева:
  - све једначине $a + x = b \; (a, b \in \mathbb{Q})$ имају решење
  - све једначине $a \cdot x = b \; (a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0)$ имају решење
  - операције + и · задржавају "лепе" особине из структуре целих бројева
- Ипак има и недостатака. Један од њих је да постоје дужи које се не могу измерити, нпр. дијагонала јединичног квадрата. Другим речима, између бројне праве и скупа рационалних бројева се не може успоставити бијекција.
  Сваком рационалном броју одговара тачка на правој, али обрнуто не важи, тј. постоје тачке на правој којима не одговара ни један рационалан број.
  Затрпавањем тих "рупа" на бројној правој стижемо до скупа реалних бројева.

Увођење реалних бројева

К13

- Проширивање рационалних у реалне бројеве се може учинити на више еквивалентних начина (децимални записи, Дедекиндови резови,...).
  Реалним бројевима могу се прогласити сви децимални записи:
  - периодични (нпр. 0.13333..., 0.2) тј. рационални бројеви, и
  - непериодични (на пример 0,1010010001...) зову се ирационални бројеви.

  Дакле, скуп реалних бројева је унија скупа рационалних и са њим дисјунктног скупа ирационалних бројева, тј.

$$\underline{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Пребројиви скупови

14

Дефиниција. Скуп A је пребројив ако је истобројан са скупом природних бројева ($A \sim \mathbb{N}$), тј. ако постоји бијекција скупа A на скуп $\mathbb{N}$.

С обзиром да свака бијекција из $\mathbb{N}$ на A представља низ елемената из A, може се и овако рећи:

скуп A је пребројив акко се његови елементи могу поређати у низ.

Кардинални број скупа $\mathbb{N}$ означавамо са $\aleph_0$ (чита се "алеф нула"). Дакле,

$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Пребројиви скупови

Пример. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ -парни природни бројеви

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \quad f(n) \stackrel{\text{def}}{=} 2n \text{ је бијекција}$$

па је $k(2\mathbb{N}) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$, односно скуп парних природних бројева је пребројив.

Дакле, $2\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}$, али $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Ово својство не могу имати коначни скупови.

Дефиниција. Скуп A је бесконачан ако је истобројан са неким својим правим подскупом, тј. постоји $B \subseteq A$ такав да је $A \neq B$ и $k(A) = k(B)$.

Пример.

× ?

(1) $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ - цели бројеви се могу поређати у низ, па је скуп $\mathbb{Z}$ пребројив, тј. $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

(2) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (Кантор, 1873.): Прикажимо све рационалне бројеве у облику табеле са бесконачно много врста и колона (у првој врсти су сви разломци са имениоцем 1, тј. сви цели бројеви, у другој врсти су сви разломци са имениоцем 2, итд.)

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \to & \frac{1}{1} & \to & \frac{-1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & \frac{-2}{1} & & \frac{3}{1} & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
 & & \frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{-1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{-3}{2} & & \frac{5}{2} & \dots \\
 & & \downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
 & & \frac{1}{3} & \to & \frac{-1}{3} & \to & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \downarrow & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Пример.

Сада поређајмо дијагонално све елементе табеле у низ, изостављајући притом разломке који су једнаки неком који је већ уписан у низ (нпр. изоставимо $\frac{2}{4}$, јер је већ уписан $\frac{1}{2}$)

$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots\}$.

Дакле, скуп рационалних бројева је пребројив, тј.

$k(\mathbb{Q}) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Да ли постоје бесконачни скупови који нису пребројиви?

Непребројиви скупови

15

Дефиниција. Бесконачан скуп који се не може бијективно пресликати на скуп $\mathbb{N}$ је непребројив.

Теорема(Кантор). Интервал $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ je непребројив скуп.

Последица. Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ је непребројив.

Доказ. Из

- $k(\mathbb{R}) = k(0,1)$ (јер је $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$),
- $k(0,1) \neq k(\mathbb{N})$ и $(0,1)$ је бесконачан (претходна теорема)

непосредно следи $k(\mathbb{R}) \neq k(\mathbb{N})$, тј. $k(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$ $\square$

Кардиналност скупа $\mathbb{R}$ обележавамо са $\mathfrak{c}$ (чита се "континуум"),

$$k(0,1) = k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} < 2^{2^{\mathfrak{c}}} < \ldots$$

Булове алгебре

16

Дефиниција. Нека је

- B непразан скуп,
- $\oplus, \odot$ бинарне операције скупа B,
- $'$ унарна операција на скупу B и
- $0, 1 \in B$.

Алгебарска структура $(B, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ је Булова алгебра ако за свако $x, y, z \in B$ важи:

Булове алгебре

(B_1)	$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,	$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
	(закони асоцијације)	
(B_2)	$x \oplus y = y \oplus x$,	$x \odot y = y \odot x$
	(закони комутације)	
(B_3)	$x \oplus (y \odot z) = (x \oplus y) \odot (x \oplus z)$,	$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot$
	(закони дистрибуције)	
(B_4)	$x \oplus 0 = x$,	$x \odot 1 = x$
	(закони неутралног елемента)	
(B_5)	$x \oplus x' = 1$,	$x \odot x' = 0.$
	(закони комплементирања)	

У Буловој алгебри важи принцип дуалности: ако важи неки идентитет, онда важи и њему дуални идентитет добијен узајамном заменом $\oplus$ и $\odot$, 0 и 1 (на пример аксиома (B_4') је дуална аксиоми (B_4)).

Пример.

(1) Алгебра скупова $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, ^c, \emptyset, E)$, где је
- $\mathcal{P}(E) = \{X | X \subseteq E\}$ партитивни скуп скупа E,
- бинарне операције су унија и пресек,
- унарна операција је комплементирање (у односу на скуп E)

је Булова алгебра.

(2) Исказна алгебра $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, где су операције дате таблицама

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\neg$
0	1
1	0

је Булова алгебра.

Особине Булових алгебри

Теорема 1. За све елементе x, y Булове алгебре B важи:

(1) $x \oplus x = x, \quad x \odot x = x$ (закони идемпотенције)

(2) $x \oplus 1 = 1, \quad x \odot 0 = 0$ (закони највећег и најмањег елемента)

(3) $x \oplus (x \odot y) = x, \quad x \odot (x \oplus y) = x$ (закони апсорпције).

Доказ.

(1)

$$\begin{aligned} x \oplus x &= (x \oplus x) \odot 1 && (\text{из } (B_4')) \\ &= (x \oplus x) \odot (x \oplus x') && (\text{ из } (B_5)) \\ &= x \oplus (x \odot x') && (\text{ из } (B_3)) \\ &= x \oplus 0 && (\text{ из } (B_5')) \\ &= x && (\text{ из } (B_4)) \end{aligned}$$

Доказ за $x \odot x = x$ је дуалан претходном доказу.

(2)

$$\begin{aligned}
x \oplus 1 &= (x \oplus 1) \odot 1 && (\text{из } (B_4')) \\
&= (x \oplus 1) \odot (x \oplus x') && (\text{ из } (B_5)) \\
&= x \oplus (1 \odot x') && (\text{ из } (B_3)) \\
&= x \oplus (x' \odot 1) && (\text{ из } (B_2')) \\
&= x \oplus x' && (\text{ из } (B_4')) \\
&= 1 && (\text{ из } (B_5))
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
x \oplus (x \odot y) &= (x \odot 1) \oplus (x \odot y) && (\text{из } (B_4')) \\
&= x \odot (1 \oplus y) && (\text{ из } (B_3')) \\
&= x \odot (y \oplus 1) && (\text{ из } (B_2)) \\
&= x \odot 1 && (\text{ из } (2)) \\
&= x && (\text{ из } (B_4'))
\end{aligned}$$

Теорема 2. (о јединствености комплементирања). Ако је $x \oplus y = 1$ и $x \odot y = 0$, онда је $y = x'$.

Доказ.

$$
\begin{aligned}
y &= y \odot 1 = y \odot (x \oplus x') && ((B_4'),\ \text{затим } (B_5)) \\
&= (y \odot x) \oplus (y \odot x') && (B_3') \\
&= (x \odot y) \oplus (x' \odot y) && (B_3') \\
&= 0 \oplus (x' \odot y) && (\text{ по претпоставци}) \\
&= (x \odot x') \oplus (x' \odot y) && (B_5') \\
&= (x' \odot x) \oplus (x' \odot y) && (B_2') \\
&= x' \odot (x \oplus y) && (B_3') \\
&= x' \odot 1 && (\text{ по претпоставци}) \\
&= x' && (B_4')
\end{aligned}
$$

Теорема 3. За све елементе x, y Булове алгебре B важи

(1) $(x')' = x$ (закон инволуције)

(2) $0' = 1, \quad 1' = 0$ (закони комплемената највећег и најмањег елемента)

(3) $(x \oplus y)' = x' \odot y', (x \odot y)' = x' \oplus y'$ (Де Моргaнови закони).

Доказ.

(1) Из $x' \oplus x = 1$ и $x' \odot x = 0$ по Теореми 2 следи $(x')' = x$.

(2) Из $0 \oplus 1 = 1$ и $0 \odot 1 = 0$ по Теореми 2 следи $1 = 0'$.

(3) Из

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus (x' \odot y') &= ((x \oplus y) \oplus x') \odot ((x \oplus y) \oplus y') = \\ &= ((x \oplus x') \oplus y) \odot (x \oplus (y \oplus y')) = \\ &= (1 \oplus y) \odot (x \oplus 1) = 1 \odot 1 = 1\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \odot (x' \odot y') &= (x \odot (x' \odot y')) \oplus (y \odot (x' \odot y')) = \\ &= ((x \odot x') \odot y') \oplus ((y \odot y') \odot x') = \\ &= (0 \odot y') \oplus (0 \odot x') = 0 \oplus 0 = 0\end{aligned}$$

по Теореми 2. следи $(x \oplus y)' = x' \odot y'$.