Искази

27

Дефиниција. Реченице које имају смисла и које су или тачне или нетачне (само једно од ова два) зову се искази.

Пример.

- "Данас је други октобар." -нетачан исказ
- "2+5=7" - тачан исказ
- "$2 + 4 < 5$" - нетачан исказ
- "Сваки паран број веци од 4 је збир два проста броја." - исказ, али не знамо да ли је тачан (Голбахова хипотеза)
- "Реченица коју сада изговарам је лаж." -није исказ.

Искази

- Исказе означавамо словима $p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_2, q_2, \ldots$.
- Од исказа градимо нове исказе повезујући их речима "и", "или", "није", "ако. . . онда", "ако и само ако", које називамо логичким везницима.
- Тачност новог исказа одређујемо на основу тачности исказа од којих је саграђен и значења логичких везника у природном језику.

Дисјункција исказа

Дефиниција. Дисјункција редом исказа p и q је исказ "p или q", у ознаци $p \vee q$, који је тачан акко је бар један од исказа p или q тачан.

- "2+5=7 или $2 + 4 < 5$" - тачан исказ
- "2+5=7 или $2 + 4 > 5$." - тачан исказ
- "Сунце се окреће око Земље или слон је птица" -нетачан исказ

Конјункција исказа

Дефиниција. Конјункција редом исказа p и q је исказ "p и q", у ознаци $p \wedge q$, који је тачан акко су оба исказа p и q тачна.

Пример. "2+5=7 и $2 + 4 < 5$." - нетацан исказ.

Импликација

Дефиниција. Импликација редом исказа p и q је исказ "ако p онда q", у ознаци $p \Rightarrow q$, који је нетачан акко и само ако је исказ p тачан, а исказ q нетачан.

Исказ p је премиса (претпоставка), а исказ q је закључак.

Пример.

- "Из $2 + 5 < 7$ следи $2 < 3$" - тачан исказ.
- "ако је $2 < 3$ онда је 2+5=7" -тачан
- "ако је $2 < 3$ онда је 2+5<7" -нетачан исказ
- "ако вода мрзне на 100° онда је Беч главни град Аустрије" -тачан исказ

Напомена. Математичку логику не интересује значење исказа p и q, већ само њихова истинитост. Другим речима, истинитост импликације $p \Rightarrow q$ не зависи од значења исказа p и q, већ само од њихове истинитости.

Импликацију $p \Rightarrow q$ можемо читати и на следећи начин:

- "из p следи q"
- "p повлачи q"
- "p имплицира q"
- "p је довољан услов за q"
- "q је потребан услов за p".

Пример. Сваком од следећих реченица се тврди исто:

(1) Ако је природан број дељив са 4 онда је он дељив и са 2.

(2) Довољан услов да је природан број дељив са 2 је да је он дељив са 4.

(3) Потребан услов да је природан број дељив са 4 је да је он дељив са 2.

Еквиваленција исказа

Дефиниција. Еквиваленција редом исказа p и q је исказ "p ако и само ако q", у ознаци $p \Leftrightarrow q$, који је тачан ако и само ако су или оба исказа p и q тачна или оба исказа нетачна.

Еквиваленцију $p \Leftrightarrow q$ можемо читати и на следећи начин:

- "p је еквивалентно са q"
- "p је потребан и довољан услов за q"
- "ако p онда q и ако q онда p".

Негација исказа

K 2 ¬

Дефиниција. Негација p је исказ "није p", у ознаци $\neg p$, који је тачан акко је исказ p нетачан.

Пример. "Није 2=2." -нетачан исказ.

Синтакса исказне логике

28

?

- Исказна логика настаје формализацијом рачуна са исказима.
- Потребно је одредити скуп симбола (алфабет) који ће се користити за грађење формула и правила по којима ће се формирати формуле.
- Са аспекта синтаксе, формуле се посматрају искључиво као низови симбола, не узимајући у обзир било какво њихово (могуће) значење.

Синтакса исказне логике

Дефиниција. Алфабет исказне логике се састоји од следећих симбола:

- пребројив скуп исказних слова (исказних променљивих) $P = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$,
- скуп логичких везника $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$,
- скуп логичких константи $\{\top, \bot\}$ (опционално, логичке констане могу, али не морају учествовати у грађењу формула),
- скуп помоћних симбола $\{(,)\}$ (заграде).

Од ових симбола по прецизно утврђеним правилима граде се исказне формуле.

K 2 8

Дефиниција. Исказне формуле се дефинишу индуктивно, на следећи начин:

1. Исказна слова и логичке константе су исказне формуле.
2. Ако су A и B исказне формуле, онда су и $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ и $\neg A$ исказне формуле.
3. Исказне формуле се добијају само коначном применом правила (1) и (2).

Пример. Следећи низови симбола су исказне формуле:

- $p, \quad q, \quad \top, \quad \bot$
- $(p \wedge \top), \quad (\neg q), \quad (\top \vee \bot),$
- $((p \wedge \top) \vee (\neg q)), \quad (\neg(p \wedge \top)), \quad ((\neg q) \Leftrightarrow (\top \vee \bot)).$

Следећи низови симбола нису исказне формуле:
$(p \vee q)(\Rightarrow p), \quad p \wedge \bot \vee \top, \quad (\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots).$

Семантика исказне логике

29

Семантички аспект исказне логике говори о значењу исказних формула.

Да би се правила за одређивање вредности исказне формуле прецизно формализовала уводи се следећа алгебарска структура:

- двоелементни скуп, чије елементе можемо означити са 0 и 1 или $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$ или $\top$ и $\bot$
- једна унарна и четири бинарне операција на датом скупу, које чемо означити са $\neg^i, \wedge^i, \vee^i, \Rightarrow^i, \Leftrightarrow^i$ и које задајемо таблицама.

Семантика исказне логике

Дефиниција. Двоелементна алгебра $(\{1,0\},\wedge^i,\vee^i,\Rightarrow^i,\Leftrightarrow^i,\neg^i)$ је исказна алгебра ако су:

- 1 и 0 два различита знака,
- $\wedge^i,\vee^i,\Rightarrow^i,\Leftrightarrow^i$ бинарне операције скупа $\{1,0\}$ дате следећим таблицама

$\vee^i$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge^i$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\Rightarrow^i$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\Leftrightarrow^i$	1	0
1	1	0
0	0	1

- и $\neg^i$ унарна операција скупа $\{1,0\}$ дата таблицом

	$\neg^i$
1	0
0	1

.

Да би се израчунала вредност исказне формуле, најпре треба доделити вредности исказним променљивим. Додељивање конкретних вредности променљивама назива се валуација.

Дефиниција. Свако пресликавање $\alpha : \{p_1, p_2, \dots\} \to \{1, 0\}$ зовемо валуација исказних слова (променљивих).

Ако је p исказно слово, за $\alpha(p)$ кажемо да је вредност исказног слова p у валуацији α.

Произвољну валуацију α можемо приказати на следећи начин:

$$\alpha = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_i \in \{1, 0\} \text{ за свако } i.$$

Ако је задата валуација, онда свакој формули одговара тачно једна истинитосна вредност. Другим речима, свака валуација $\alpha : P \to \{0, 1\}$ се природно проширује до функције $v_\alpha : Form \to \{0, 1\}$ чији је домен скуп свих исказних формула Форм.

Дефиниција. Свакој исказној формули A, за дату валуацију α, придружујемо вредност $v_\alpha(A)$ из скупа $\{1,0\}$ дефинисану индукцијом по сложености формуле A, на следећи начин:

$$
\begin{array}{lll}
\text{ако } A = p_i & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(p_i), \\
\text{ако } A = \top & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1, \\
\text{ако } A = \bot & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \\
\text{ако } A = (B \wedge C) & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} v_\alpha(B) \wedge^i v_\alpha(C), \\
\text{ако } A = (B \vee C) & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} v_\alpha(B) \vee^i v_\alpha(C), \\
\text{ако } A = (B \Rightarrow C) & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} v_\alpha(B) \Rightarrow^i v_\alpha(C), \\
\text{ако } A = (B \Leftrightarrow C) & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} v_\alpha(B) \Leftrightarrow^i v_\alpha(C), \\
\text{ако } A = \neg B & \text{онда} & v_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \neg^i v_\alpha(B)
\end{array}
$$

За $v_\alpha(A)$ кажемо да је вредност формуле A за валуацију α.
Ако је $v_\alpha(A) = 1$, кажемо да је формула A тачна за валуацију α, а ако је $v_\alpha(A) = 0$, да је нетачна.

Пример. Одредити $v_\alpha(A)$, ако је $A = p \wedge \neg(q \Rightarrow r)$ и
$\alpha = \begin{pmatrix} p & q & r & s & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} v_\alpha(A) = v_\alpha(p \wedge \neg(q \Rightarrow r)) &= v_\alpha(p) \wedge^i v_\alpha(\neg(q \Rightarrow r)) \\ &= v_\alpha(p) \wedge^i \neg^i v_\alpha(q \Rightarrow r) \\ &= v_\alpha(p) \wedge^i \neg^i (v_\alpha(q) \Rightarrow^i v_\alpha(r)) \\ &= 1 \wedge^i \neg^i (0 \Rightarrow^i 0) \\ &= 1 \wedge^i \neg^i 1 \\ &= 1 \wedge^i 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

K 29

Дефиниција.

(1) Формула A је задовољива акко постоји валуација α таква да је $v_\alpha(A) = \top$.

(2) Формула A је таутологија акко за сваку валуацију α важи $v_\alpha(A) = \top$.

(3) Формула A је порецива акко постоји валуација α таква да је $v_\alpha(A) = \bot$.

(4) Формула A је контрадикција акко за сваку валуацију α важи $v_\alpha(A) = \bot$.

Да је формула A таутологија означавамо са $\models A$.

Пример.

- Формула $p \vee \neg p$ је таутологија,
- формула $p \vee q$ је задовољива и порецива,
- формула $p \wedge \neg p$ је контрадикција.

K