BINARNO KODIRANI DEKADNI BROJEVI

- Svaka dekadna cifra se kodira određenim binarnim zapisom.
- Jednostavnost.
- Dekadni razlomljeni brojevi se ne mogu uvek tačno predstaviti u binarnom sistemu. Tačnost se može postići korišćenjem binarno kodiranog zapisa cifara dekadnog sistema.
- Koliko dužina kodne reči nam je potrebna da bismo kodirali sve dekadne cifre?

$$2^3 < 10 < 2^4 \Longrightarrow$$

10 dekadnih cifara moguće je kodirati binarnim rečima dužine 4

01

Jednoznačan – sve binarne reči koje ulaze u kod moraju biti međusobno različite. 02

Komplementaran – ako su a i b dekadne cifre za koje važi da je a+b=9, onda i njihovi kodovi moraju biti međusobno komplementarni. 03

Težinski – svakoj poziciji u kodu je pridružena težina.

OSOBINE KOJE KOD TREBA DA POSEDUJE

PRIMERI BCD KODOVA

Kod 8421:

Težine pozicija s leva na desno su redom 8, 4, 2, 1.

Kod 2421:

Težine pozicija s leva na desno su redom 2, 4, 2, 1.

Dekadna cifra	8421	Višak 3	2421
0	0000	0011	0000
1	0001	0100	0001
2	0010	0101	0010
3	0011	0110	0011
4	0100	0111	0100
5	0101	1000	1011
6	0110	1001	1100
7	0111	1010	1101
8	1000	1011	1110
9	1001	1100	1111
6 7 8	0110 0111 1000	1001 1010 1011	1100 1101 1110

OZNAČENI BROJEVI U BCD KODU

• Broj se prvo prevodi u potpuni komplement dekadne osnove, a potom se tako dobijeni potpuni komplement kodira.

$$-452 \rightarrow [-452]_{pk} \rightarrow [-452]_{pk} = 9548 \rightarrow 1001010101001000$$

PREDSTAVLJANJE REALNIH BROJEVA U RAČUNARU

- Realni brojevi u nepokretnom zarezu (Fixed Point Notation)
- Realni brojevi u pokretnom zarezu (*Floating Point Notation*)

REALNI BROJEVI U NEPOKRETNOM ZAREZU

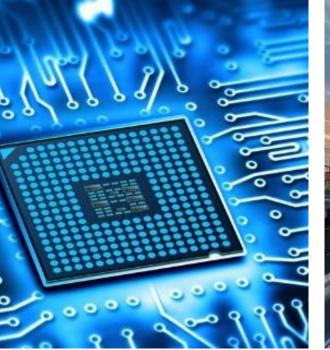
Razlomljeni deo broja zauzima uvek isti broj bitova u zapisu broja. Na primer:



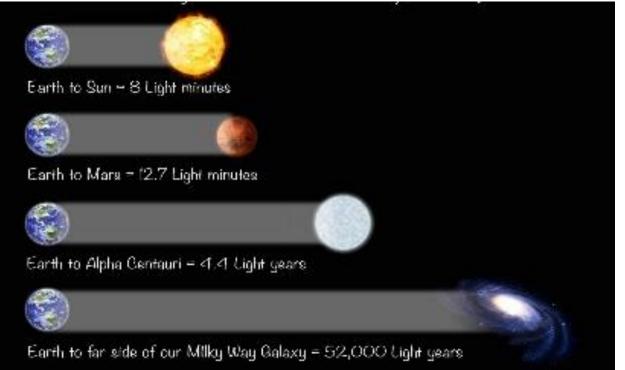
• Na primer, 32-bitna reprezentacija broja 1.625 bi bila

REALNI BROJEVI U NEPOKRETNOM ZAREZU

- Zapis u nepokretnom zarezu je jednostavan, a aritmetičke operacije se obavljaju znatno brže nego sa realnim brojevima zapisanim u pokretnom zarezu.
- Zapis u nepokretnom zarezu obuhvata manji opseg realnih brojeva od zapisa u pokretnom zarezu i pruža manju preciznost.
- Nije pogodan za složenija izračunavanja, jer je teško obezbediti da svi međurezultati i rezultati budu u dozvoljenom intervalu.
- Ovaj način zapisa nije pogodan za:
 - Jako velike realne brojeve
 - Jako male realne brojeve
 - Realne brojeve sa velikim brojem cifara u razlomljenom delu.







REALNI BROJEVI U POKRETNOM ZAREZU ZAŠTO SU NAM POTREBNI?

- Memorija je ograničena ne možemo, radi preciznosti, čuvati proizvoljno dugačke brojeve.
- Koliko precizan treba biti i kada? Koliko cifara nam je potrebno za zapis celog, a koliko za zapis razlomljenog dela broja?
- Potreban nam je zapis realnog broja koji obezbeđuje preciznost za veoma različite veličine brojeva.
- Potreban nam je pokretni zarez floating point.

ZAPIS REALNOG BROJA U POKRETNOM ZAREZU

• Primeri u dekadnom brojevnom sistemu:

Zapis u nepokretnom zarezu	Scientific notation	Znak	Mantisa	Osnova	Eksponent
15000	1.5 · 10 ⁴	+	1.5	10	4
-200.1	$-2.001 \cdot 10^2$	-	2.001	10	2
0.005	5 · 10⁻³	+	5	10	-3
0.0000000006667	6.667e-11	+	6.667	10	-11

ZAPIS REALNOG BROJA U POKRETNOM ZAREZU

Zapis realnog broja u pokretnom zarezu zasniva se na scientific notaciji koju čine četiri dela:

- Znak (+ ili -)
- Mantisa (frakcija) sadrži cifre broja.
- Osnova brojnog sistema
- Eksponent određuje poziciju tačke u odnosu na početak mantise

znak · mantisa · osnova^{eksponent}

NORMALIZOVANA MANTISA

- Primer različiti zapisi broja 123.45 :
 - 12345.0 x 10⁻²
 - 1234.5 x 10⁻¹
 - 123.45 x 10⁰
 - 12.345 x 10¹
 - 1.2345 x 10²
 - 0.12345 x 10³
- Normalizovana mantisa radix tačka je iza prve ne-nula cifre.
- Kod binarnih brojeva normalizovan zapis podrazumeva da se tačka nalazi iza prve jedinice u zapisu.

ZAPIS REALNOG BROJA U POKRETNOM ZAREZU

- Opseg brojeva koji se mogu zapisati određen je:
 - brojem cifara za zapis eksponenta
 - •brojem cifara za zapis mantise
- Korišćenjem normalizovane mantise maksimizujemo broj brojeva koje možemo da zapišemo.

IEEE 754 STANDARD

- IEEE 754 je standard za zapisivanje brojeva u pokretnom zarezu koji koristi većina računara.
- Zapis jednostruke tačnosti zauzima 32-bitnu reč



Zapis dvostruke tačnosti – zauzima 64-bitnu reč

	11 bita	52 bita
Znak	EKSPONENT	MANTISA

IEEE 754 — KARAKTERISTIKE

Bit znaka je 0 za pozitivne, odnosno 1 za negativne brojeve

Mantisa je normalizovana, tako da se jedinica ispred tačke ne zapisuje, već se podrazumeva.

Osnova je 2.

IEEE 754 — KARAKTERISTIKE

Eksponent može biti pozitivan ili negativan broj, međutim on se ne čuva u obliku potpunog komplementa, već se njegova vrednost zapisuje sa uvećanjem 127 (višak 127) (eng. biased exponent) kod jednostruke tačnosti, odnosno 1023 (višak 1023) kod dvostruke tačnosti.

Vrednost eksponenta veća od bias-a -> pozitivan eksponent

Vrednost eksponenta jednaka bias-u -> eksponent je 0

Vrednost eksponenta manja od bias-a -> negativan eksponent

IEEE 754 - EKSPONENT

Bez uvećanja:

	Znak	Eksponent	Mantisa
1.0×2^{-1}	0	11111111	0000000 00000000 00000000
$1.0 \times 2^{+1}$	0	00000001	0000000 00000000 00000000

Kada se za eksponent koristi potpuni komplement, mali pozitivan broj (npr. sa negativnim eksponentom) izgleda kao veoma veliki ceo broj. Korišćenjem biasa manji eksponent uvek izgleda kao manji ceo broj.

Sa uvećanjem:

	Znak	Eksponent	Mantisa
1.0×2^{-1}	0	-1 + 127 = 126 = 01111110	0000000 00000000 00000000
1.0 × 2 ⁺¹	0	+1 + 127 = 128 = 10000000	0000000 00000000 00000000

TUMAČENJE BROJA ZAPISANOG U IEEE 754

- Prava vrednost eksponenta se dobija oduzimanjem biasa od sačuvane vrednosti eksponenta
- Ako su nam dati znak Z, eksponent E i mantisa M, broj u IEEE zapisu sa pokretnim zarezom ima vrednost:

$$-1^{7} \times (1.0 + 0.M) \times 2^{E-127}$$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

1 10000110 1001000000000000000000

znak:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

1 10000110 1001000000000000000000

znak: -

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: (10000110)₂ (127)₁₀

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$
- mantisa:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$
- mantisa: 1.0 + 0.1001000000000000000000

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$
- dekadna vrednost:

$$-(1.1001)_2 \times 2^7$$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$
- dekadna vrednost:

$$-(1.1001)_2 \times 2^7 = -(11001000)_2$$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000110)_2$ $(127)_{10} = 134 127 = 7$
- mantisa: 1.0 + 0.1001000000000000000000
- dekadna vrednost:

$$-(1.1001)_2 \times 2^7 = -(11001000)_2 = -(2^7 + 2^6 + 2^3) = -200$$

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

110000011001101100 ... 00

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

• znak: -

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000011001)_2$ 1023 = 1024 + 16 + 9 1023 = 26

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

• Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000011001)_2 1023 = 1024 + 16 + 9 1023 = 26$
- mantisa: 1.0 + 0.101100 ... 00

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i mantisu:

- znak: -
- eksponent: $(10000011001)_2$ 1023 = 1024 + 16 + 9 1023 = 26
- mantisa: 1.0 + 0.101100 ... 00
- dekadna vrednost:

$$-(1.1011)_2 \times 2^{26} = -(11011)_2 \times 2^{22} = -27 \times 2^{22}$$

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$
 $-(79.5)_{10} = -(10011111.1)_2 = -(1.00111111) \times 2^6$

Zapisati broj -79.5 po IEEE 754 standardu u formatu binary32.

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$
 $- (79.5)_{10} = - (10011111.1)_2 = - (1.00111111) \times 2^6$

bit za znak: 1

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$
 $-(79.5)_{10} = -(10011111.1)_2 = -(1.00111111) \times 2^6$

- bit za znak: 1
- eksponent: $6 + 127 = 133 = 128 + 5 = (10000101)_2$

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$
 $-(79.5)_{10} = -(10011111.1)_2 = -(1.00111111) \times 2^6$

- bit za znak: 1
- eksponent: $6 + 127 = 133 = 128 + 5 = (10000101)_2$
- frakcija: 0011111<u>00 ... 00</u>

$$(79)_{10} = (64 + 8 + 4 + 2 + 1)_{10} = (10011111)_2$$

 $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$
 $-(79.5)_{10} = -(10011111.1)_2 = -(1.00111111) \times 2^6$

- bit za znak: 1
- eksponent: $6 + 127 = 133 = 128 + 5 = (10000101)_2$
- frakcija: 0011111<u>00 ... 00</u>
- konacno: 1 10000101 0011111 00 ... 00

•
$$48.125 = 32 + 16 + 0.125 = 2^5 + 2^4 + 2^{-3} = (110000.001)_2 = (1.100000001)_2 \times 2^5$$

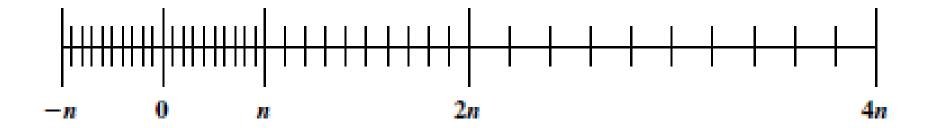
- $48.125 = (110000.001)_2 = (1.10000001)_2 \times 2^5$
- bit za znak: 0

- $48.125 = (110000.001)_2 = (1.10000001)_2 \times 2^5$
- bit za znak: 0
- eksponent: $5 + 1023 = 1028 = 1024 + 4 = (1000000100)_2$

- $48.125 = (110000.001)_2 = (1.10000001)_2 \times 2^5$
- bit za znak: 0
- eksponent: $5 + 1023 = 1028 = 1024 + 4 = (10000000100)_2$
- frakcija: 10000001 <u>00 ... 00</u>
- konacno: 0 10000000100 10000001<u>00 ... 00</u>

- $48.125 = (110000.001)_2 = (1.10000001)_2 \times 2^5$
- bit za znak: 0
- eksponent: $5 + 1023 = 1028 = 1024 + 4 = (10000000100)_2$
- frakcija: 10000001 <u>00 ... 00</u>

ZAPIS REALNOG BROJA U POKRETNOM ZAREZU



- Pored postojanja realnih brojeva koji se ne mogu prikazati u zapisu sa pokretnim zarezom, bitna razlika između ovog zapisa i skupa realnih brojeva je njihova gustina.
- · Između dva različita realna broja uvek postoji drugi realan broj. Skup realnih brojeva je kontinualan.
- Zapis u pokretnom zarezu ne može da pokrije beskonačno mnogo realnih brojeva.
- Ako se rezultat aritmetičke operacije nalazi između dva broja koji se mogu prikazati zapisom u pokretnom zarezu, onda se vrši zaokruživanje.

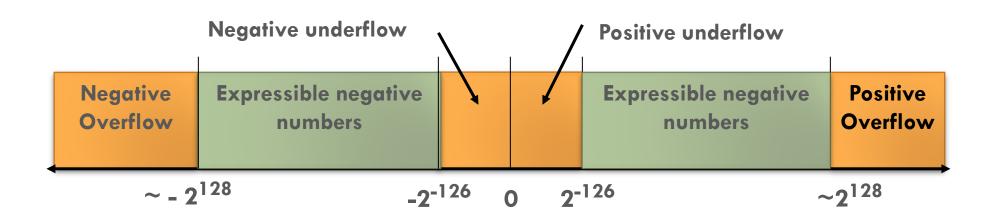
ZAPIS JEDNOSTRUKE TAČNOSTI

Najmanja vrednost

- Eksponent*: 0000001
- Stvarni eksponent = 1 127 = -126
- Mantisa: 000...00 = 1.0
- $+1.0 \times 2^{-126} \approx +1.2 \times 10^{-38}$

Najveća vrednost

- Eksponent*: 11111110
- Stvarni eksponent = 254 127 = +127
- Mantisa: $111...11 \approx 2.0$
- $\pm 2.0 \times 2^{+127} \approx \pm 3.4 \times 10^{+38}$



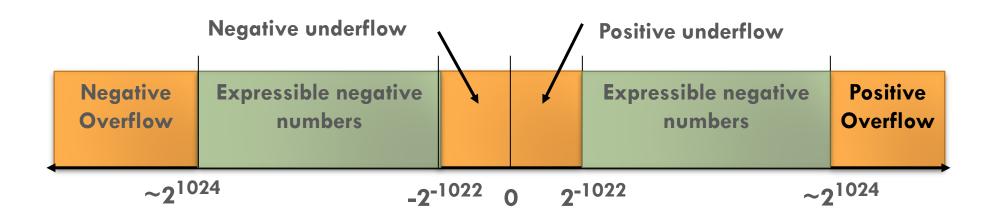
ZAPIS DVOSTRUKE TAČNOSTI

Najmanja vrednost

- Eksponent: 0000000001
- Stvarni eksponent = 1 1023 = -1022
- Mantisa: 000...00 = 1.0
- $+1.0 \times 2^{-1022} \approx +2.2 \times 10^{-308}$

Najveća vrednost

- Eksponent: 11111111110
- Stvarni eksponent = 2046 1023 = +1023
- Mantisa: 111...11 ≈ 2.0
- $\pm 2.0 \times 2^{+1023} \approx \pm 1.8 \times 10^{+308}$



POSEBNE VREDNOSTI U IEEE 754 STANDARDU

Nula:

• Eksponent: 000...00

Mantisa: 000...00

Beskonačno:

• Eksponent: 111...11

Mantisa: 000...00

NaN (Not a Number)

• Eksponent: 111...11

• Mantisa koja nema sve nule

- NaN je poseban "kod" i može biti signalni ili tihi.
- Signalni NaN (SNaN) signalizira izuzeto stanje kod aritmetičkih operacija.
- Tihi NaN (QNanN) predstavlja pojavu nedozvoljene operacije u programu. QNaN se propagira kroz aritmetičke operacije bez signalizacije izuzetka i ostaje vidljiv na kraju izračunavanja.

OPERACIJE KOJE PROIZVODE TIHI NaN

Operation	Quiet NaN Produced by	
Any	Any operation on a signaling NaN	
Add or subtract	Magnitude subtraction of infinities:	
	$(+\infty) + (-\infty)$	
	$(-\infty) + (+\infty)$	
	$(+\infty) - (+\infty)$	
	$(-\infty) - (-\infty)$	
Multiply	$0 imes \infty$	
Division	$\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$	
Remainder	$x \text{ REM } 0 \text{ or } \infty \text{ REM } y$	
Square root	\sqrt{x} , where $x < 0$	

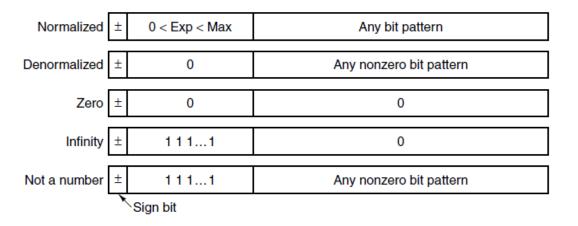
PARAMETRI IEEE STANDARDA

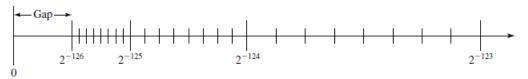
Parametar	Jednostruka preciznost	Dvostruka preciznost
Broj bitova u znaku broja	1	1
Broj bitova u eksponentu	8	11
Broj bitova u mantisi	23	52
Ukupan broj bitova	32	64
Opseg eksponenta	[-126, 127]	[-1022, 1023]
Zapis eksponenta	Višak 127	Višak 1023
Opseg decimalnih brojeva koji se mogu prikazati	~[10 ⁻³⁸ - 10 ³⁸]	~[10 ⁻³⁰⁸ - 10 ³⁰⁸]

IEEE DENORMALIZOVANI BROJEVI

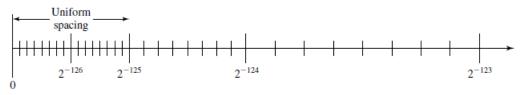
 Denormalizovani brojevi – deo IEEE standarda kojim se rešava problem rezultata koji je po apsolutnoj vrednosti manji od najmanjeg broja koji se može prikazati u sistemu.

- U eksponentu su sve 0, dok je mantisa različita od 0. Implicitni bit levo od radiks tačke je 0.
- Kada je eksponent rezultata previše mali, rezultat se denormalizuje pomeranjem bitova mantise u desno i povećanjem eksponenta za 1 za svaki pomeraj mantise, dok eksponent ne bude u okviru dozvoljenog opsega.





(a) 32-Bit format without denormalized numbers

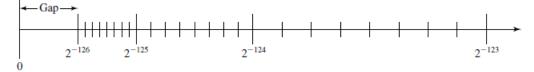


(b) 32-Bit format with denormalized numbers

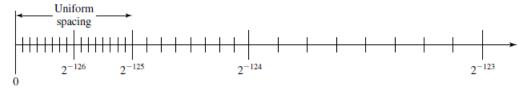
IEEE DENORMALIZOVANI BROJEVI

- Najmanji denormalizovani broj (apsolutna vr.):
 - Eksponent: 0000000
 - Mantisa: 000000...001
 - Implicitni bit: 0
 - 0.000...01 x $2^{-126} = 2^{-23}$ x $2^{-126} = 2^{-149}$

- Najveći denormalizovani broj (apsolutna vr.):
 - Eksponent: 0000000
 - Mantisa: 111...11
 - Implicitni bit: 0
 - 0.111...11 x $2^{-126} \sim 0.9999999$ x $2^{-126} \sim 2^{-126}$



(a) 32-Bit format without denormalized numbers



(b) 32-Bit format with denormalized numbers

PRIMER 5 — DENORMALIZOVANI ZAPIS JEDNOSTRUKE TAČNOSTI U DEKADNI SISTEM

Odrediti dekadnu vrednost sledećeg broja datog u IEEE 754 zapisu sa binarnom osnovom:

Zapis razdvajamo na znak, eksponent i frakciju:

0 0000000 110100000000000000000

U eksponentu su samo nule, pa je u pitanju specijalna vrednost: kako je frakcija različita od nule u pitanju je zapis denormalizovanog broja

- znak: +
- eksponent: -126
- dekadna vrednost:

$$+(0.1101)_2 \times 2^{-126} = (1101)_2 \times 2^{-130} = 13 \times 2^{-130}$$