Ваљане формуле и њихова својства

40

Ваљане формуле су формуле које су тачне у сваком моделу одговарајућег језика.
Зато оне представљају основне законитости мишљења и закључивања.
Наводимо важније ваљане формуле:

(1) $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$ Де Органови закони

(2) $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$ за квантификаторе

(3) $(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$

(4) $(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$

(5) $(\forall x)A \vee (\forall x)B \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$

(али $(\forall x)(A \vee B) \Rightarrow (\forall x)A \vee (\forall x)B$ није ваљана, нпр. у интерпретацији $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, A^{\mathcal{N}}, B^{\mathcal{N}})$, где је $A^{\mathcal{N}}(x)$-" x је паран број", а $B^{\mathcal{N}}(x)$-"x је непаран број", ова формула није тачна.)

(6) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$

(али $(\exists x)A \wedge (\exists x)B \Rightarrow (\exists x)(A \wedge B)$ није ваљана)

(7) $(\forall x)(\forall y)A \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$

(8) $(\exists x)(\exists y)A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$

(9) $(\exists x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A$

(али $(\forall y)(\exists x)A \Rightarrow (\exists x)(\forall y)A$ није ваљана, контрамодел: из чињенице да сваки човек има оца не следи да постоји отац свих људи).

Ако x није слободна променљива формуле B онда су и следеће формуле ваљане:

(10) $(\forall x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A \vee B$

(11) $(\exists x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A \wedge B$

(12) $(\forall x)(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (\forall x)A)$

Наводимо нека својства ваљаних формула.

Теорема. Ако су A и $A \Rightarrow B$ ваљане формуле онда је и B ваљана формула.

Доказ. Нека је:

- $\models A, \quad \models A \Rightarrow B$,
- $\mathcal{M}$ произвољна интерпретација језика и
- μ произвоља валуација домена M.

Тада

$$\begin{array}{ll} \models A, & \models A \Rightarrow B \\ \to \mathcal{M} \models A[\mu] \text{ и } & \mathcal{M} \models A \Rightarrow B[\mu] \\ \to & \text{ако } \mathcal{M} \models A[\mu] \text{ онда } \mathcal{M} \models B[\mu] \\ \to & \mathcal{M} \models B[\mu]. \end{array}$$

Како су $\mathcal{M}$ и μ произвољни, следи да је

$$\models B. \quad \square$$

Теорема. Формула $A(x)$ је ваљана акко је формула $(\forall x)A(x)$ ваљана, тј.

$$\models A(x) \text{ акко } \models (\forall x)A(x).$$

Ова теорема нам омогућава да проучавање ваљаних формула сведемо на проучавање ваљаних реченица.

K