ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИНФОРМАТИКЕ

Други колоквијум 15.01.2020. године

Време израде 150 минута

ПРВА ГРУПА

Име и презиме: Број индекса:

Број бодова:

1. [2,5 поена] Четворо пријатеља Иван, Павле, Марија и Дуња су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

Иван: Ако је Павле крив, крива је и Дуња.

Марија: Ја нисам крива, али је Иван крив или је Дуња крива.

Дуња: Ја нисам крива.

Павле: Ако Иван није крив, онда је крива и Марија.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив? (Уколико има више могућих решења навести их све!)

2. [2,5 поена] Методом резолуције испитати да ли је формула F таутологија

$$F = ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$$

3. [2 поена] Свођењем на противречност доказати да је формула

$$(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

таутологија.

4. [3 поена] Доказати

$$\vdash (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r).$$

5. [4 поена] Од цифара $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ треба саставити све седмоцифрене бројеве са различитим цифрама код којих се цифре $1, 2$ и 3 налазе једна уз другу:

(а) поређане по величини;

(б) у произвољном распореду.

Колико има таквих бројева? Колико је међу њима таквих бројева, код којих се цифре 4 и 5 налазе испред осталих (за оба дела задатка)? Одговор детаљно образложити!

6. [2 поена] Записати следеће реченице језиком предикатског рачуна:

(а) Постоји девојка коју воли сваки момак.

(б) За сваког момка може се пронаћи девојка коју он воли.

(в) Постоји момак који воли две различите девојке.

(г) Постоји девојка за коју постоји само један момак кога она воли.

7. [2+3 поена] Нелогички део језика предикатског рачуна чине следећи скупови

$$Rel = \{R, S\}, Fun = \{F, G\}, Const = \{a, b\}$$

при чему је $ar(R) = 2$, $ar(S) = 1$, $ar(F) = 2$ и $ar(G) = 1$.

(а) Који од следећих низова симбола је израз, који формула, а који ни једно ни друго?

(1) $R(y, G(x)) \wedge S(F(a, a))$

(2) $F(S(x), G(y))$

(3) $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)S(x)$

(4) $F(F(G(x), F(b, y)), F(b, G(a)))$

(б) Дати језик је интерпретиран на скупу природних бројева на следећи начин:

$J(R) = |$ дељивост природних бројева
$J(S) =$ бити прост број
$J(F) = f,\ f(x, y) = x \cdot y$
$J(G) = g,\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(x) = 3x + 1$
$J(a) = 1$
$J(b) = 2$.
У дефинисаном моделу $\mathbb{N}$ за валуацију $\mu = \begin{pmatrix} x & y & z & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$:

(1) израчунати вредност израза: $F(G(x), F(y, G(b)))$ и $G(F(F(a, x), G(y)))$

(2) испитати тачност следећих формула: $R(F(G(x), G(y)), G(F(x, y)))$ и $S(F(a, y)) \vee R(F(a, b), G(y))$

(3) одредити да ли су одговарајуће реченице датог језика тачне или нетачне, у датом моделу: $(\forall m)(\exists n)R(m, n)$ и $(\forall m)(S(m) \Rightarrow \neg((\exists n)R(n, m)))$.

8. [2 поена] Уколико је могуће дати пример модела у коме је реченица тачна и пример модела у коме реченица није тачна:

(1) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\alpha(x, y)$

(2) $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (\exists x)A(x) \Rightarrow (\forall x)B(x)$.