# Lois de probabilité continues

## Module 5

# Plan

- Loi exponentielle
- Loi Gamma
- Loi uniforme
- Loi normale

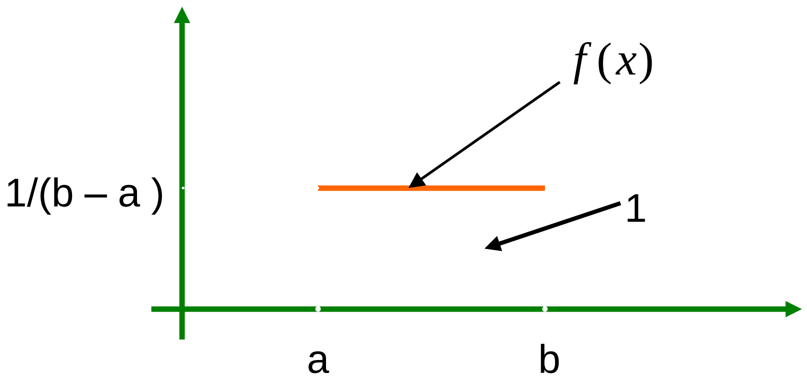
# 1. Loi uniforme

Cette loi est utilisée lorsque aucune information n'est disponible sur la variable.
*X* suit une loi uniforme (loi continue) sur l'intervalle [a, b], où a et b sont des constantes. réelles, avec a < b.

<u>Notation</u> : $X \sim U(a, b)$

Fonction de densité :

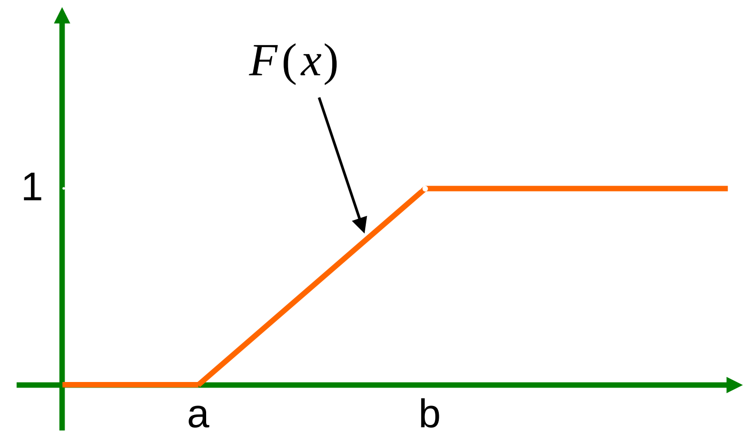
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$




Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \le x < b \\ 1, & \text{si } b \le x \end{cases}$$



Espérance mathématique et variance de la loi uniforme :

$$E(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

***Exemple*** **:** *X* ~ N(0, 1)

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

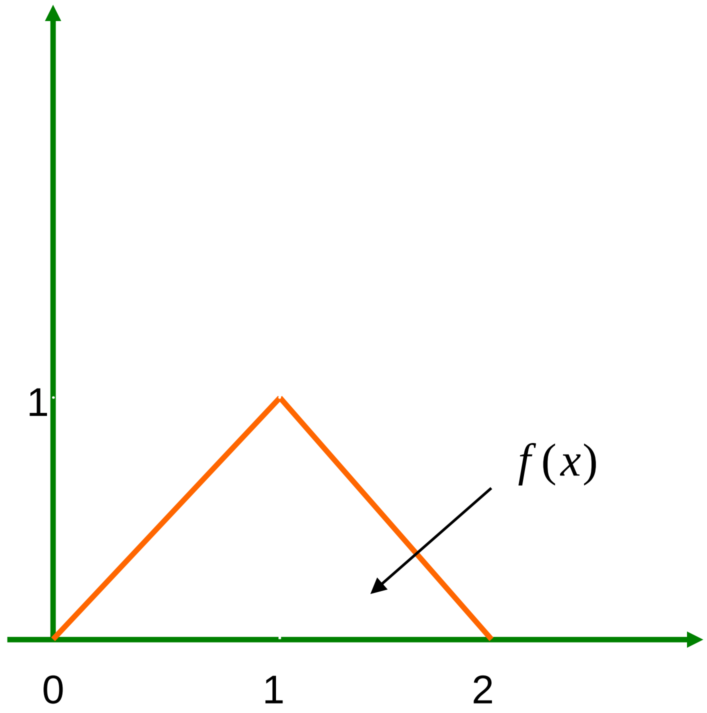
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } 0\le x<1\\ 1, & \text{si } 1\le x\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}$$

$$V(X)=\frac{1}{12}$$

Cas particulier : Considérons les variables aléatoires indépendantes $X_1$ et $X_2$.

Si $X_1 \sim U(0, 1)$ et $X_2 \sim U(0, 1)$, alors $X = X_1 + X_2 \sim$ ?




$$x \in [0, 2]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{si } x \leq 0 \\ x, \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0, \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$X \sim$ Loi triangulaire

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x(2-x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 x^2(2-x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}$$

$$V(X) = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}$$

# 2. Loi exponentielle

Utilité : Pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie

$\lambda$ : nombre moyen de succès par unité de temps

$X$ : « temps entre 2 succès »

Notation : $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

***Exemple*** : Compagnie de téléphonie mobile

La compagnie reçoit en moyenne 17 appels à l'heure pour un abonnement.

$T$ : « la durée en heures entre 2 appels consécutifs »

$T$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 17$.

Ainsi, $T \sim \text{Exp}(17)$

***Exemple* :** Site Web

Un site Web reçoit en moyenne 18 connexions par période de 5 minutes.

Soit $T$ : « la durée en minutes entre 2 connexions consécutives »

$\lambda = 18/5$

$T$ ~ Exp(3.6)

Soit $Y$ : « la durée en secondes entre 2 connexions consécutives »

$$\lambda = 18/(5 \times 60) = 0.06$$

$$Y \sim \mathrm{Exp}(0.06)$$

**Fonction de répartition de la loi exponentielle :**

*T* : durée entre deux événements consécutifs dans la même unité de temps que λ.

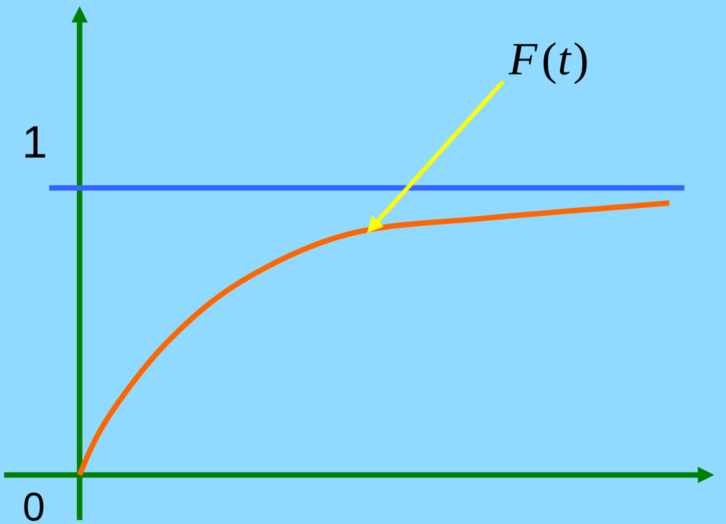
P(*T* > *t*) = P(durée entre deux événements est supérieure à *t*)
= P(aucun événement dans l'intervalle (0, t))

Ainsi :

$$P(T > t) = P(0 \text{ événement dans } (0,t)) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

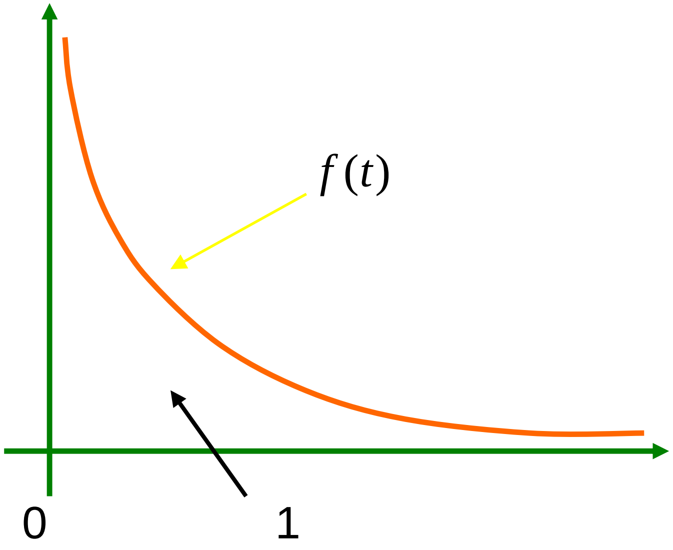
$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, \text{si } t \geq 0 \\ 0, \text{si } t < 0 \end{cases}$$



## Fonction de densité :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$




$f(t) \geq 0$

$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ -e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 + 1 = 1$

$f(t)$ est donc une fonction de densité

## Espérance mathématique et variance :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t\, \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ \left( -t - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\lambda} e^0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ (-t^2 - \frac{2}{\lambda} t - \frac{2}{\lambda^2}) e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{2}{\lambda^2} e^0 = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(T) = E(T^2) - E^2(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

***Exemple* :** Site Web

Un site Web reçoit en moyenne 18 connexions par période de 5 minutes.
Soit *T* : « la durée en minutes entre 2 connexions consécutives »

$$T \sim \mathrm{Exp}(3.6) \quad ; \quad F(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1-e^{-3.6\,t} & \text{si } t\geq 0\end{cases} \quad ; \quad f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 3.6\,e^{-3.6\,t} & \text{si } t\geq 0\end{cases}$$

a) Quelle est la probabilité que la durée entre 2 connexions est moins de 1 minute ?

$$\mathrm{P}(T<1)=\int_0^1 3.6\,e^{-3.6\,t}dt=-e^{-3.6\times 1}+e^{0}=0.97$$

b) Quelle est la probabilité que la durée entre 2 connexions dépasse 30 secondes ?

$$\mathrm{P}(T>½)=\int_{0.5}^{+\infty} 3.6\,e^{-3.6\,t}dt=-e^{-\infty}+e^{-3.6\times 0.5}=0+0.16=0.16$$

c) Quelle est la moyenne et la variance de la durée entre deux connexions ?

$$E(T)=1/3.6=0.277\,\text{minute}$$

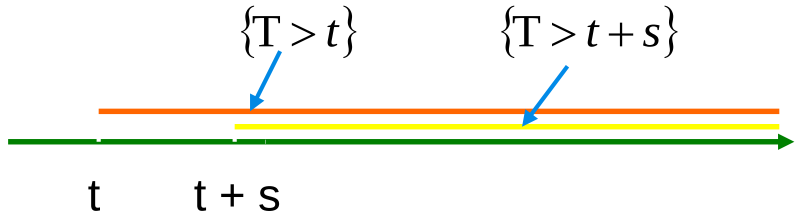
$$V(T)=1/(3.6)^2=0.077\,\text{minute}^2$$

**Propriété d'absence de mémoire :**

$$P(T > t + s \mid T > t) = \frac{P(\{T > t + s\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

La probabilité ne dépend pas de *t.*




***Exemple*** : Durée de vie d'un ordinateur

Le temps d'utilisation d'un ordinateur est en moyenne 5 années.

Soit *T* : « durée en années de l'utilisation d'un ordinateur »

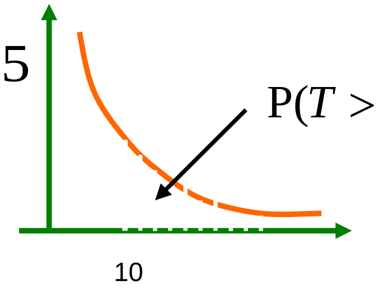
$$E(T) = 1/\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1/5$$

$$F(t) = 1 - e^{-t/5} \qquad t \geq 0$$

$$f(t) = \tfrac{1}{5} e^{-t/5} \qquad t \geq 0$$

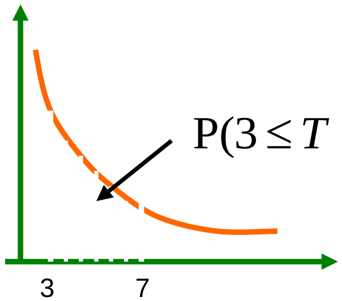
a) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur soit utilisé plus de 10 ans ?

$$\mathrm{P}(T > 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-0.2\times 10}) = e^{-2} = 0.135$$




b) Quelle est la probabilité que la durée de l'utilisation soit entre 3 et 7 ans ?

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3 \le T \le 7) &= \mathrm{P}(T \le 7) - \mathrm{P}(T < 3) = F(7) - F(3)\\ &= \left(1 - e^{-7/5}\right) - \left(1 - e^{-3/5}\right) = e^{-3/5} - e^{-7/5}\\ &= 0.302\end{aligned}$$




c) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur soit utilisé plus de 10 ans sachant qu'il a déjà été utilisé 7 ans ?

$$\mathrm{P}(T > 10 \mid T > 7) = \mathrm{P}(T > 3) = e^{-0.2\times 3} = e^{-0.6} = 0.55$$

# 3. Loi Gamma

Soit $X$ : le temps jusqu'au $r$ *ième* événement.

<u>Notation</u> : $X \sim$ Gamma ($r$, $\lambda$), où $\lambda$ est défini par le nombre moyen d'événements par unité de temps.

***Exemple* :**

Une bibliothèque offre au public abonné la possibilité d'accès à des ordinateurs à la seule condition de réserver à l'avance. Le nombre moyen de réservations à l'heure est 5.

$X_{12}$ : « la durée en heures entre la 1ère et la 2e réservation », $X_{12} \sim$ Exp(5)
$X_{23}$ : « la durée en heures entre la 2e et la 3e réservation », $X_{23} \sim$ Exp(5)
$X_{13}$ : « la durée en heures entre la 1ère et la 3e réservation », $X_{13} \sim$ ?

Nous avons : $X_{13} = X_{12} + X_{23} \sim$ Gamma (2, 5)

<u>En général</u> :

Soient $X_1$, $X_2$, …, $X_r$ , des variables aléatoires indépendantes et de même loi Exp($\lambda$).

Ainsi :

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \text{Gamma}(r\,,\lambda)}$$

**Fonction de densité de la loi Gamma :** Soit *X* ~ Gamma (*r*, *λ*)

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt = \begin{cases} (r-1)! & \text{si } r = 1, 2, 3, \ldots \text{ entier} \\ (r-1)\Gamma(r-1) & \text{si } r \text{ est un réel} \end{cases}$$

***Exemple* :**

si $r$ est un entier :

$\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$

$\Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

$\Gamma(5) = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

etc...

si $r$ est un réel :

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(3/2) = (\frac{3}{2} - 1)\Gamma(\frac{3}{2} - 1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\Gamma(5/2) = (\frac{5}{2} - 1)\Gamma(\frac{5}{2} - 1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

etc...

**Espérance et variance de la loi Gamma :**

$$X = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \text{Gamma}(r\ ,\ \lambda)$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda} = \frac{r}{\lambda}$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} V(\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

***Exemple*** **:** Réservations à la bibliothèque

a) Quelle est la durée moyenne et la variance entre la 1ère et la 3e réservation ?

$T_{13}$ : durée entre la 1ère et la 3e réservation $\quad$ $T$ ~ Gamma (2, 5)

$E(T_{13})$ = 2/5 = 0.4 heures = 24 minutes

$V(T_{13})$ = 2/(5²) = 0.08 minute²

b) Quelle est la durée moyenne et la variance entre la 2e et la 7e réservation ?

$T_{27}$ : durée entre la 2e et la 7e réservation $\quad$ $T$ ~ Gamma (5, 5)

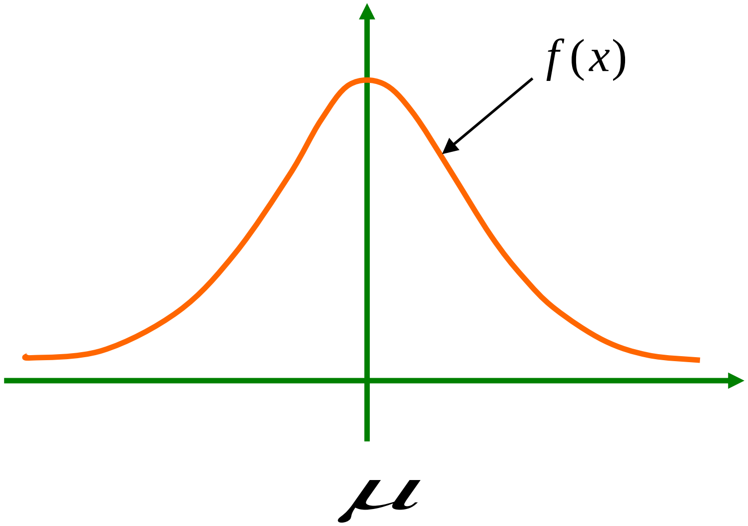
$E(T_{27})$ = 5/5 = 1 heure = 60 minutes

$V(T_{27})$ = 5/(5²) = 0.20 minute²

# 4. Loi normale

Il s'agit de la loi qui décrit les erreurs de mesure, d'ajustement ou le comportement des êtres humains.
Une variable aléatoire, *X*, suit une loi normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$,
si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$




Espérance mathématique et variance :

$$\boxed{E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2}$$

La loi normale centrée et réduite :
Soit *Z* qui suit une loi normale centrée et réduite: *Z* ~ N(0, 1).

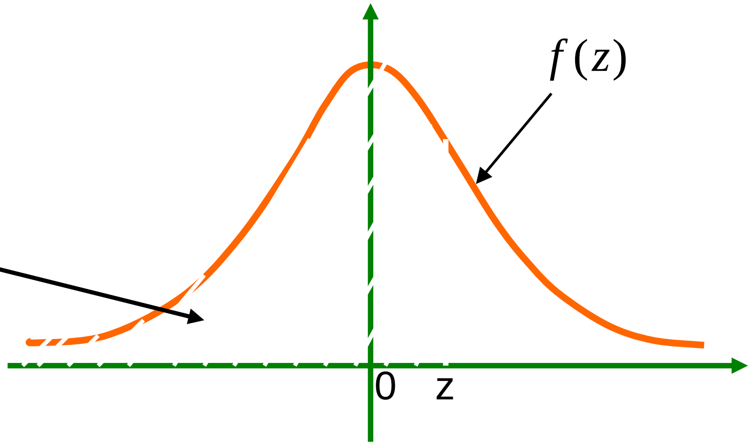
*E*(*Z*) = 0 et *V*(*Z*) = 1

**Fonction de densité :**

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty$$

**Fonction de répartition :**

$$F(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z)$$



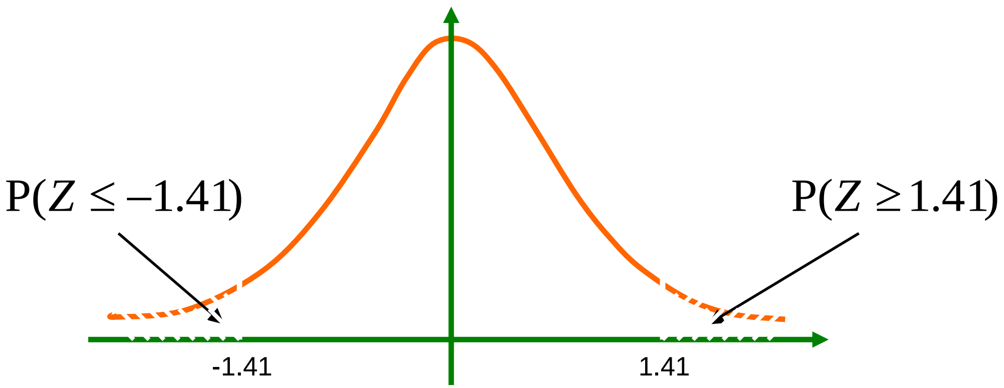

Il n'est pas facile de calculer cette intégrale. Par conséquent, on utilise les valeurs tabulées de la **loi normale centrée réduite** (voir dans le livre à la page 547-548).

***Exemple* :** $Z \sim N(0, 1)$

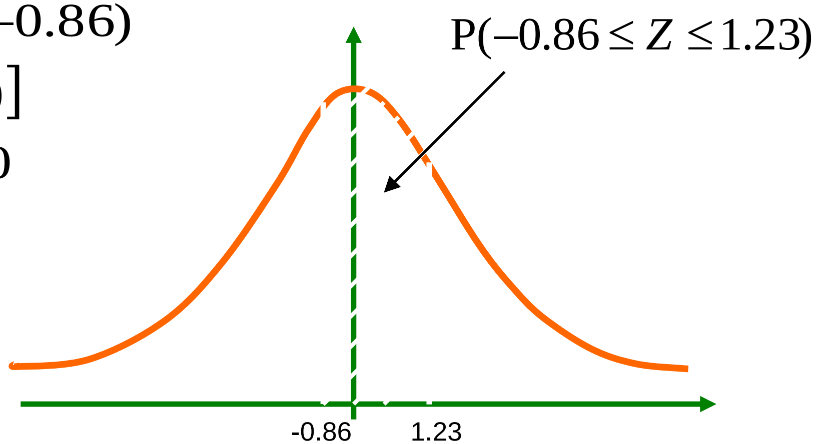
$$P(Z \le 1.72) = \Phi(1.72) = 0.95728$$

$$P(Z \ge 1.78) = 1 - P(Z < 1.78) = 1 - P(Z \le 1.78) = 1 - \Phi(1.78) = 1 - 0.96246 = 0.03754$$

$$\begin{aligned} P(Z \le -1.41) &= P(Z \ge 1.41) \\ &= 1 - P(Z < 1.41) \\ &= 1 - \Phi(1.41) \\ &= 1 - 0.92073 \\ &= 0.07927 \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} P(-0.86 \le Z \le 1.23) &= P(Z \le 1.23) - P(Z \le -0.86) \\ &= \Phi(1.23) - [1 - \Phi(0.86)] \\ &= 0.89065 - 1 + 0.80510 \\ &= 0.6957 \end{aligned}$$



***Notes importantes :***

$Z \sim \mathrm{N}(0\,,1)$ ; $a$ et $b$ des nombres réels $a < b$

$$P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

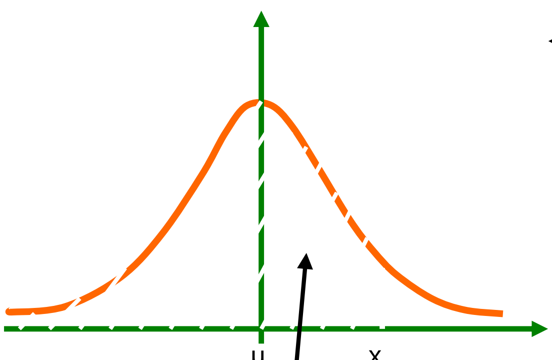
$$P(Z > a) = 1 - P(Z \le a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(Z \le -a) = P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(-a \le Z \le a) = P(Z \le a) - P(Z \le -a) = 2\Phi(a) - 1$$

<u>Transformation linéaire</u> :

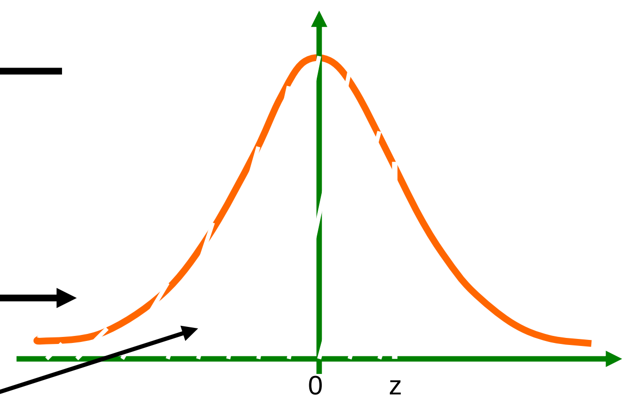
$X \sim \mathrm{N}(\mu\,,\,\sigma^2)$




$$X = \mu + \sigma Z$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$Z \sim \mathrm{N}(0\,,1)$




$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \le \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$$

***Exemple*** **:**

La longueur d'une certaine catégorie de clavier d'ordinateur suit une loi normale d'espérance mathématique 35 cm et de variance 1.96cm$^2$.

Soit $X$ : « la longueur d'un clavier choisi au hasard »

$X \sim N(35, 1.96)$

a) Quelle est la probabilité que la longueur d'un clavier soit supérieure à 37 cm ?

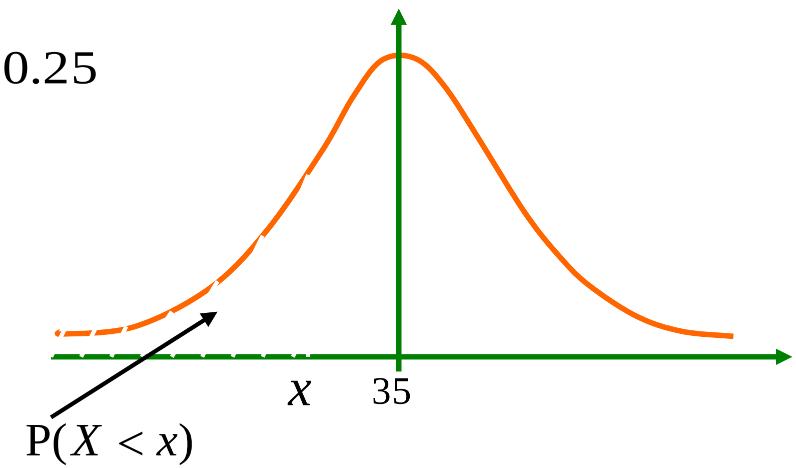
$$P(X > 37) = P\left(\frac{X-35}{\sqrt{1.96}} > \frac{37-35}{\sqrt{1.96}}\right) = P(Z > 1.43) = 1 - P(Z < 1.43) = 1 - 0.9236 = 0.0764$$

b) Quelle est la longueur du clavier dont 25% de l'ensemble sont plus courts que lui ?
Soit $x$ : la longueur du clavier.

$$P(X < x) = 0.25 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-35}{\sqrt{1.96}} < \frac{x-35}{\sqrt{1.96}}\right) = 0.25$$

$$\Rightarrow \frac{x-35}{\sqrt{1.96}} = -0.675$$

$$\Rightarrow x = 34.055\,\text{cm}$$



## Propriétés de la loi normale

Soient $X_1$, $X_2$, …, $X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale :

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i\ ,\ \sigma_i^2) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots.., n$$

Propriétés d'additivité :

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

où $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ sont des nombres réels.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Toute combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes suit également une loi normale.

***Exemple* :**

Soit $X_1$ : Poids en kg d'un ordinateur de type A. $X_1 \sim N(15, 8)$

Soit $X_2$ : Poids en kg d'un ordinateur de type B. $X_2 \sim N(17, 10)$

a) Quelle est la probabilité que le poids total des deux types d'ordinateurs excède 35 kg ?

$X = X_1 + X_2$ (somme des deux poids)

$a_1 = 1$ et $a_2 = 1$

Alors, nous avons :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 15 + 17 = 32$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 8 + 10 = 18$$

$$X \sim N(32, 18)$$

$$P(X > 35) = P\left(\frac{X-32}{\sqrt{18}} > \frac{35-32}{\sqrt{18}}\right) = P(Z > 0.71)$$

$$= 1 - P(Z \le 0.71) = 1 - \Phi(0.71)$$

$$= 1 - 0.7611 = 0.2389$$

b) Quelle est la probabilité que leur poids moyen soit inférieur à 16.5 kg ?

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{où } a_1 = \tfrac{1}{2} \text{ et } a_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\times 15 + \frac{1}{2}\times 17 = 16$$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{4}\times V(X_1) + \frac{1}{4}\times V(X_2) = \frac{1}{4}\times 8 + \frac{1}{4}\times 10 = 4.5$$

$$\Rightarrow \overline{X} \sim \mathrm{N}(16\ ,\ 4.5)$$

$$\mathrm{P}(\overline{X} < 16.5) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - 16}{\sqrt{4.5}} < \frac{16.5 - 16}{\sqrt{4.5}}\right) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{16.5 - 16}{\sqrt{4.5}}\right) = \mathrm{P}(Z < 0.23) = 0.591$$

c) Quelle est la probabilité que le poids de l'ordinateur de type A dépasse celui de type B ?

$X_1 > X_2$ : Le poids de l'ordinateur de type A dépasse celui de type B, i.e. $X_1 - X_2 > 0$

Posons $Y = X_1 - X_2$ et $a_1 = 1$, $a_2 = -1$

$$E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 15 - 17 = -2$$

$$V(Y) = (1)^2 \times V(X_1) + (-1)^2 \times V(X_2) = 1\times 8 + 1\times 10 = 18$$

$$X \sim N(-2\ ,\ 18) \Rightarrow \mathrm{P}(X_1 > X_2) = \mathrm{P}(X_1 - X_2 > 0) = P(Y > 0) = \mathrm{P}\left(\frac{Y - (-2)}{\sqrt{18}} > \frac{0 - (-2)}{\sqrt{18}}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z > 0.47) = 1 - \mathrm{P}(Z \le 0.47) = 1 - 0.6808 = 0.3192$$