TP Chaines de Markov

8 octobre 2019

1 M. Shadock

M. Shadock peut être dans trois états : 1 (bonne santé), 2 (enrhumé), 3 (malade). Son état le jour $n + 1$ dépend de son état au jour n et pas des jours précédents : s'il est en bonne santé, il le reste le lendemain avec probabilité $\frac{5}{6}$, il devient malade avec probabilités $\frac{1}{12}$. S'il est malade, il le reste avec probabilité $\frac{3}{4}$ et devient en bonne santé avec probabilité $\frac{1}{4}$. S'il est enrhumé, il guérit avec probabilité $\frac{1}{4}$ et devient malade avec probabilité $\frac{1}{4}$.

Q 1 – Écrire la matrice de transition de la chaîne qui peut modéliser la situation. La chaîne est-elle *fortement connexe* ? *apériodique* ?

Q 2 – Implémenter une routine qui vérifie si une matrice donnée en argument est bien une matrice *stochastique*. Vérifier avec cette routine la matrice saisie.

Q 3 – Existe-t-il un état absorbant (puits) dans le graphe associé ? Comment se manifeste un tel état (puits) dans la matrice de transition ? Ecrire une fonction qui vérifie, sur la matrice, si un état donné (en indice) est un état puits.

Q 4 – Afficher les probabilités dans le temps $\pi_i(t)$. Vous pouvez utiliser la commande `plot(t, pi)`. Vous pouvez utiliser la fonction simulation (disponible sur whippet), `[t, pi] = simulation(P, pi0, duree)` qui prend en entrée la matrice stochastique P, le vecteur stochastique *initial* $\pi(0)$, la durée totale de la simulation (un entier) et renvoie le couple `[t, pi]`. Le vecteur `t` contient tous les entiers $0 \leq n \leq$ `duree` et la matrice `pi` contient, pour pour tous ces instants n, le vecteur (ligne) stochastique $\pi(n)$.

Q 5 – Déterminer la probabilité invariante (stationnaire) π^* en résolvant l'équation linéaire $\pi = \pi\, P$, autrement dit, $(\mathrm{Id} - P')\, \pi' = 0$, où P' désigne la matrice transposée de P et π' le vecteur (colonne) transposé de π.

Vous pouvez utiliser

— la fonction `eye(n)` de la bibliothèque numpy qui retourne la matrice *identité* de taille n.

2 M. Shadock : ergodicité

On souhaite tester numériquement la propriété d'ergodicité d'une chaine de Markov : il existe une unique distribution stationnaire π^* telle que

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi^* ,$$

et cela pour tout vecteur initial $\pi(0)$.

Pour calculer $\pi(n) := \pi(0)\, P^n$ pour de grandes valeurs de l'entier n, on utilise la fonction `[V, D] = eig(P)` qui retourne

— la matrice *diagonale* $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Les nombres complexes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont appelés les *valeurs propres* de P.

— les colonnes de la matrice V sont les *vecteurs propres* de P. Rappelons que v est un vecteur propre de la matrice P associé à la valeur propre λ si et seulement si $P = \lambda v$.

Q 6 – Vérifier que la matrice V est invertible et que $P = V.D.V^{-1}$. En déduire que $P^n = V.D^n.V^{-1}$ avec $D^n := \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$.

Q 7 – Vérifier que $\lambda = 1$ est une valeur propre et que les autres valeurs propres sont des nombres dont le module $0 \leq |\lambda| < 1$. Que devient la matrice diagonale D^n lorsque l'entier $n \to \infty$? Calculer la matrice $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Q 8 – On suppose que le premier janvier M. Shadock est en bonne santé. Quel vecteur π_0 correspond à cette loi initiale ? Prendre un vecteur π_0 de votre choix pour la loi initiale (la somme des probabilités doit quand même faire 1 !) Calculer le vecteur $\pi(n)$ au n^{eme} jour pour $n = 5$; 10 ; 50 ; 100. Que peut-on déduire sur limite $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$?

Q 9 – Recommencer avec une loi π_0 différente et montrer que le vecteur $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$ ne dépend pas de $\pi(0)$.

Q 10 – Pour étudier la rapidité de la convergence, il suffit d'ordonner les modules des valeurs propres par ordre décroissant et d'observer la 2ème valeur propre. Plus le module de la 2^{eme} valeur propre est petit, plus la convergence est rapide. Pour observer ce phénomène, choisir différentes matrices P (voir les exercices du TD et le fichier `exemple.m`) et afficher, pour chaque exemple, l'évolution dans le temps t du vecteur $\pi(t)$ et le module de la 2^{eme} plus grande valeur propre en module (après la valeur propre 1).