Lösungen Kapitel 1

Yannick Zelle

16. Oktober 2021

Exercise 1

First we will assign values to $p(M), p(m), p(e), P(n \mid M), P(n \mid m), P(n \mid e)$, so that $p(M) + p(m) + p(e) = 1$ and $P(n \mid M) + P(n \mid m) + P(n \mid e) = 1$:

$$p(M) := 0.01$$
$$p(m) := 0.1$$
$$p(e) := 0.89$$

$$p(n \mid M) = 0.9$$
$$p(n \mid m) = 0.08$$
$$p(n \mid e) = 0.02$$

The next step to apply Bayes' rule is now to calculate the probability of a noise:

$$p(n) = p(M) \cdot p(n \mid M) + p(m) \cdot p(n \mid m) + p(e) \cdot p(n \mid e)$$

$$= 0.01 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.08 + 0.89 \cdot 0.02$$

$$= 0.0348$$

We can now calculate the probability of a monster given noise by applying Bayes' rule:

$$p(M \mid n) = \frac{p(n \mid M) \cdot p(M)}{p(n)}$$
$$= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.034}$$
$$\approx 0.265$$

Lösung Aufgabe 1

Das obenbeschrieben vorgehen lässt sich als das aufeinanderfolgende durchführen von 2 Zufallsexperimenten verstehen. Wobei :

$$\Omega_1 = \{R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, S_4\}$$
$$\Omega_2 = \{R_1, R_2, W_1, W_2, S_1, S_2, S_3\}$$

Die Ergebnismenge des gesamten Experimentes lässt sich dann beschrieben als :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

Wir bemerken dass, $card(\Omega) = card(\Omega_1) \cdot card(\Omega_2) = 7 \cdot 7 = 49$ Betrachten wir das gefragte Ereignis $(\omega_i, \omega_j) \in A$. Hierzu benötigen wir alle Fälle bei denen ω_i und ω_j die gleiche Farbe haben. Es gibt 3 rote Kugeln in Ω_1 und 2 in $Omega_2$. Demnach gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten 2 rote Kugeln zu ziehen. Für Schwarz folgen nach der selben Argumentation $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Demnach gilt $card(A) = 6 + 12 = 18$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p((\omega_i, \omega_j)) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{18}{49}$$

1 Aufgabe 2

Ein Würfel wird 7 mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der Zahlen 1-6 einmal unter den Wurfergebnissen vorkommt.

2 Lösung Aufgabe 2

Der Einfachheit halber können wir das durchgeführte Experiment, als eine Stichprobe ohne Reihenfolge mit Rücklegen verstehen. Wir würden also den Wurf $(1, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, genauso aufschreiben wie den Wurf $(6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, nämlich als $\{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Demnach ist unser Stichpropbenraum Ω_{IV} mit:

$$card(\Omega_{IV}) = \binom{N + n - 1}{n} = \binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$$

Weiter überlegen wir uns, dass in unserem Ergebnisraum A jeweils ein Element doppelt vorkommen kann. Also ist

$$card(A) = 6$$

Insgesamt gilt dann:

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega_{IV})} = \frac{1}{154}$$

3 Aufgabe 3

Unter 32 Karten befinden sich 4 Asse. Die Karten werden gemischt und nacheinander aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die neunte aufgedeckte Karte das zweite aufgedeckte Ass ist?

4 Lösung Aufgabe 3

Es handelt sich bei diesem Experiment um eine Stichprobe in Reihenfolge ohne Zurüclegen mit $N = 32$ und $n = 9$. Daher ist :

$$card(\Omega) = (N)_n = N(N-1) \cdot ... \cdot (N-n+1) = 32 \cdot 31 \cdot ... \cdot 22$$

Für die größe des uns interessierendes Ereignis A lässt sich Argumentieren, dass wir 4 Asse haben, die jeweils an 8 Positionen seien können. An der 9. Position bleiben noch 3 Asse übrig. Übrig bleiben 7 Positionen, die sich als Permutation der 28 Karten verstehen lassen, die keine Asse sind. Insgesamt ergibt sich also:

$$card(A) = 4 * 3 * 8 * (28)_7$$

Demnach können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen mit:

$$p(A) = \frac{card(A)}{card\Omega} = \frac{4 * 3 * 8 * (28)_7}{(32)_9}$$

5 Aufgabe 4

Die Ecken eines Wiirfels sind gleichm?Big schr?g abgeschliffen worden, so dass der Wiirfel auch auf jeder dieser Ecken liegen bleiben kann. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit jeder Ecke nur 1/4 so groB wie die jeder Seite. Wie groB ist die Wahrscheinlichkeit einer Sechs?

6 Lösung Aufgabe 4

Da ein Würfel 6 Seiten und 8 Ecken hat Enthält Ω Insgesamt 14 Elemente. Wit bezeichnen in der Folge Ecken mit e und Seiten mit s. Da alle Ecken und alle Seiten jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und $P(\Omega) = 1$ gilt:

$$6 \cdot p(s) + 8 \cdot p(e) = 1$$

Zusätzlich wissen wir aus der Aufgabenstellung, dass:

$$4 \cdot p(e) = p(s)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot p(s) = p(e)$$

Setzen wir dies oben ein ergibt sich :

$$p(s) = \frac{1}{8} = p(6)$$