Mathematische Grundlagen(1141) WS 2022/23

Kurseinheit 1:

Lösungsvorschläge zu den Einsendeaufgaben

Aufgabe 1.1

In den drei linken Spalten stehen die möglichen wahr-falsch-Kombinationen der Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Rechts des zweiten Doppelstriches finden Sie die Wahrheitswerte der zu untersuchenden Aussage.

1. Die Wahrheitstafel für $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	f	w	w

Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

Wenn wir die mittleren Spalten zwischen den Doppelstrichen als Nebenrechnungen interpretieren (was sie ja auch sind), so sind die verbleibenden Spalten der Wahrheitstafeln gleich. Die Aussagen sind somit logisch äquivalent.

2. Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w
f	f	f	w	f

Die Wahrheitstafel für $((\neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ ist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\neg\mathcal{A}$	$(\neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$((\neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	w	f	f
w	f	w	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	f

Wieder interpretieren wir die mittleren Spalten zwischen den Doppelstrichen als Nebenrechnungen. Die verbleibenden Spalten der Wahrheitstafeln sind gleich, und es folgt, dass die Aussagen logisch äquivalent sind.

Aufgabe 1.2

1. **Induktionsanfang:** Sei $n = 2$. Dann gilt $2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$, es gilt also der Induktionsanfang.

   Induktionsannahme: Sei $n \geq 2$, und sei $n^2 > n + 1$.

   Induktionsschritt:
$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &> n + 1 + 2n + 1 \\ &= 3n + 2 \\ &> n + 2 \\ &= (n+1) + 1.\end{aligned}$$

   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $n^2 > n + 1$ für alle $n \geq 2$.

2. **Induktionsanfang:** Sei $n = 3$. Es ist $3^2 = 9 = 2 \cdot 3 + 3$, es gilt also der Induktionsanfang.

   Induktionsannahme: Sei $n \geq 3$, und es gelte $n^2 \geq 2n + 3$.

   Induktionsschritt:
$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\geq 2n + 3 + 2n + 1 \\ &= 2(n+1) + 2n + 2 \\ &> 2(n+1) + 3, \text{ da } n \geq 3.\end{aligned}$$

   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $n^2 \geq 2n + 3$ für alle $n \geq 3$.

Aufgabe 1.3

1. Wir suchen eine Matrix $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, sodass gilt:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2d & b + 2e & c + 2f \\ 3a + 6d & 3b + 6e & 3c + 6f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Wir setzen $a = 2$, und es folgt $d = -1$. Dann ist die erste Spalte des Produktes Null. Jetzt setzen wir $b = 4$, und es folgt $e = -2$. Damit ist auch die zweite Spalte Null.

Schließlich setzen wir $c = 6$, und es folgt $f = -3$. Mit $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ haben wir eine Matrix mit verschiedenen Einträgen gefunden, die $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt.

2. Beide Produkte können gebildet werden. Dabei ist AB eine 3×3-Matrix und BA ist eine 2×2-Matrix. Es sind

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.4

1. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x) = 1$, falls x eine ungerade natürliche Zahl ist, und $f(x) = \frac{x}{2}$, falls x eine gerade natürliche Zahl ist. Jeder Zahl $x \in \mathbb{N}$ wird auf diese Weise genau eine natürliche Zahl $f(x)$ zugeordnet. Somit ist f eine Abbildung.

   Da alle ungeraden Zahlen auf 1 abgebildet werden, ist die zweite Anforderung an f erfüllt, die besagt, dass das Element 1 unendlich viele Urbilder besitzen muss. Es bleibt zu zeigen, dass f surjektiv ist.

   Dazu sei $y \in \mathbb{N}$. Setze $x = 2y$. Dann ist x eine gerade Zahl, und es folgt $f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$. Da jedes $y \in \mathbb{N}$ ein Urbild unter f hat, ist f surjektiv.

2. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Das Bild von g sind alle geraden natürlichen Zahlen. Somit ist $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Bild}(g)$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, und diese Menge hat unendlich viele Elemente. Es bleibt zu zeigen, dass g injektiv ist.

   Seien $x, x' \in \mathbb{N}$ mit $g(x) = g(x')$. Es folgt $2x = 2x'$, also $x = x'$. Es folgt, dass g injektiv ist.

Aufgabe 1.5

Sei $XA = 0$ für alle Matrizen $X \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$. Dann gilt diese Gleichung insbesondere für die Matrizen $E_{ii} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, die an der Stelle (i, i) eine 1 haben, und deren übrige Einträge 0 sind. Wie im Studienbrief gezeigt wurde, ist $E_{ii}A$ diejenige Matrix, deren i-te Zeile die i-te Zeile von A ist, und deren übrige Einträge 0 sind. Wenn wir jetzt $E_{ii}A$ für alle $1 \leq i \leq m$ berechnen, und die Gleichung $XA = 0$ (für alle $X \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$) benutzen, folgt, dass alle Zeilen von A nur aus Nullen bestehen. Somit ist A die Nullmatrix, wie behauptet.

Eine elegantere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, ist, für X die Matrix $X = I_m$ zu nehmen. Laut Voraussetzung gilt dann $I_mA = 0$, und da $I_mA = A$, folgt $A = 0$.