I Généralités

A Quantificateurs

Dans ce cours, nous allons utiliser des *quantificateurs*. Leur rôle en mathématiques est d'énoncer et de formaliser des propriétés.

- Le quantificateur *universel* $\forall$ permet d'énoncer une propriété commune à tous les objets, il se lit "pour tout". Par exemple, pour exprimer le fait que le carré d'un nombre est toujours positif, on écrit :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geqslant 0$$

- Le quantificateur *existentiel* $\exists$ permet d'affirmer l'existence d'un objet, il se lit "il existe". Ainsi, pour exprimer le fait qu'un nombre positif a est le carré d'un réel, on pourra écrire :

$$(\exists\, \alpha \in \mathbb{R})\ \alpha^2 = a$$

  Remarquer que la phrase énoncée ne dit pas comment trouver un tel α, elle ne dit pas non plus combien de tels α existent (il peut y en avoir un, plusieurs, une infinité, tous les réels peuvent convenir, ou bien cela peut-il dépendre de a...).

On prendra bien garde à ne pas utiliser ces quantificateurs dans des phrases en français : ce ne sont pas des abréviations[1].

La partie de la logique qui combine le calcul des propositions aux quantificateurs s'appelle la *logique du premier ordre*. Une proposition contenant un ou plusieurs paramètres s'appelle un *prédicat*. Nous aurons l'occasion d'en reparler, ces notions sont importantes en informatique lorsqu'on veut vérifier ou garantir le bon fonctionnement d'un programme.

B Notion d'ensemble

Un ensemble est une collection d'objets possédant des propriétés communes. On peut par exemple parler de l'ensemble de tous les nombres entiers naturels, ou bien de l'ensemble des participants à une compétition sportive.

Un ensemble peut être déterminé par la liste de ses éléments, écrits entre des accolades et séparés par des virgules (ou des points-virgules lorsqu'il peut y avoir ambiguïté) :

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Par exemple :

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et 5, ensemble qui peut être considéré aussi comme l'ensemble des restes possibles lors d'une division euclidienne par 6 ;
- $\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, clubsuit\}$ est l'ensemble des couleurs d'un jeu de cartes.

On peut aussi définir un ensemble par une propriété caractéristique de ses éléments, sous la forme :

$$E = \{x \ / \ p\,(x)\}$$

où p est un prédicat à une variable. Il faut alors bien comprendre qu'on définit cet ensemble comme un *sous-ensemble* d'un ensemble déjà défini (autrement dit, les x mentionnés dans la définition ne viennent pas de nulle part !). Par exemple :

- l'intervalle $]4; +\infty[$ est l'ensemble des réels x strictement plus grands que 4 ; on peut écrire cette définition sous la forme :

$$]4; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 4\}$$

  qui se lit : $]4; +\infty[$ est l'ensemble des x *réels* qui sont strictement plus grand que 4 ;

[1] Par contre, rien n'interdit de les utiliser dans la prise de note !

- l'ensemble des entiers pairs, qu'on peut noter $2\mathbb{Z}$, est défini par :

$$2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; (\exists\, k \in \mathbb{Z})\; x = 2k\}$$

qui se lit : $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs x tels qu'il existe un entier relatif k tel que $x = 2k$; plus simplement : c'est l'ensemble des doubles des entiers relatifs.

II Sous-ensembles

A Parties d'un ensemble

On dit qu'un ensemble A est *une partie* (ou un *sous-ensemble*) d'un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E. On note alors : $A \subset E$, ce qui se lit : "A est *inclus* dans E". Ainsi :

$$A \subset E \iff (\forall x)\; x \in A \Longrightarrow x \in E$$

En particulier, pour tout ensemble E :

- $E \subset E$, car $(\forall x)\; x \in E \Longrightarrow x \in E$
- $\varnothing \subset E$, car $(\forall x)\, x \in \varnothing \Longrightarrow x \in E$ (en effet, dans ce dernier cas, $x \in \varnothing$ est faux pour tout élément x, et on sait que $A \Longrightarrow B$ est vrai lorsque A est faux).

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble est noté $\mathscr{P}(E)$.
Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments. Cela se traduit par la double inclusion :

$$(E = F) \iff ((E \subset F) \wedge (F \subset E))$$

Attention enfin à ne pas confondre :

- $\in$ et $\subset$,
- x et $\{x\}$,
- E et $\mathscr{P}(E)$.

B Opérations usuelles

1 Complémentaire

Si A est une partie de E, on appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$, ou $\complement_E A$. Ainsi :

$$\complement_E A = \{x \in E \;/\; x \notin A\}$$

Par exemple, $\complement_E \varnothing = E$, et $\complement_E E = \varnothing$.

2 Union, intersection

Étant données deux parties A et B d'un ensemble E, on définit deux nouveaux ensembles :

- la *réunion* (ou *l'union*) de A et B, noté $A \cup B$; c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à *au moins l'une* des deux parties A ou B :

  $$A \cup B = \{x \in E \;/\; x \in A \vee x \in B\}$$

  (on se souviendra que ce "ou" ($\vee$) n'est pas exclusif) ;

- l'*intersection* de A et B, noté $A \cap B$; c'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent *aux deux* parties A et B :
$$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$$

On dit que deux parties A et B sont *disjointes* si leur intersection est vide ($A \cap B = \varnothing$), autrement dit si A et B n'ont aucun élément commun.

Voici quelques propriétés de ces constructions. Pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E :

- Commutativité :
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A$$

- Double distributivité :
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Éléments neutres :
$$A \cup \varnothing = A \quad \text{et} \quad A \cap E = A$$

- Complément :
$$A \cup \complement_E A = E \quad \text{et} \quad A \cap \complement_E A = \varnothing$$

C Lien avec la logique

On peut constater l'existence de liens étroits entre le langage de la logique et le langage de la théorie des ensembles. On pourra souvent, pour simplifier un raisonnement, transposer dans l'un ou l'autre monde à l'aide du dictionnaire suivant :

$\Longleftrightarrow$	$\Longrightarrow$	$/$	$\vee$	$\wedge$	$\mathscr{V}$	$\mathscr{F}$
$=$	$\subset$	$\complement_E$	$\cup$	$\cap$	E	$\varnothing$

Ces liens permettent de démontrer très simplement les propriétés énoncées précédemment.

III Cardinal d'un ensemble fini

Si E est un ensemble *fini*, on appelle **cardinal** de E, et on note $\operatorname{card}(E)$, le nombre d'éléments de E.

Par exemple, le cardinal de l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$ est 6, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Il existe des ensembles qui n'ont pas de cardinal : ce sont les ensembles qui ne sont pas *finis* (au sens où ils n'ont pas un nombre fini d'éléments). Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas des ensembles finis.

Remarquons au passage que si un ensemble est fini, tous ses sous-ensembles ont finis, de cardinal inférieur au cardinal de l'ensemble.

Une relation permet de calculer le cardinal d'une réunion de parties d'un ensemble : le *principe d'inclusion-exclusion*. Sa version à deux parties s'écrit et se démontre simplement :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

En effet, si l'on compte les éléments de A puis les éléments de B, on compte deux fois les éléments de leur intersection.

Dans le cas particulier où A et B sont *disjoints* ($A \cap B = \varnothing$), on a plus simplement $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$.

IV Produit cartésien

À partir de deux ensembles E_1 et E_2, on peut en construire un troisième dont les éléments sont les *couples* (x_1, x_2), avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On nomme ce nouvel ensemble **produit cartésien** de E_1 et E_2, et on le note $E_1 \times E_2$. Ainsi :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \ / \ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Si E_1 et E_2 sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2$ l'est aussi, et

$$\text{card}\,(E_1 \times E_2) = \text{card}\,(E_1) \times \text{card}\,(E_2)$$

Par exemple, si l'on lance une pièce de monnaie, puis un dé, les issues possibles de cette expérience peuvent être notées sous forme de couples (x, y), avec $x \in \{P, F\}$ et $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le couple $(P, 3)$ représentent l'issue “obtenir pile avec la pièce, et 3 avec le dé”.

Comme il y a deux issues possibles pour le lancer de la pièce, et six pour le lancer du dé, le nombre d'issues possibles pour cette expérience est $2 \times 6 = 12$.

Si les ensembles E_1 et E_2 sont égaux à un même ensemble E, on notera E^2 plutôt que $E \times E$.

Enfin, si l'on dispose de plus de deux ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on peut considérer leur produit cartésien : c'est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $x_i \in E_i$ pour tout i. Si les n ensembles sont tous égaux à E, on notera ce produit cartésien E^n.

Cette construction est intensivement utilisée pour comprendre le mode de fonctionnement des bases de données.

Feuille d'exercices n°5 – Ensembles

1) **Prédicats, quantificateurs**

a) *Prédicats*
Traduire en écriture symbolique les propositions suivantes, et déterminer leurs valeurs de vérité :
- tout nombre réel a un carré positif
- il existe un nombre réel dont le carré est positif
- toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres
- il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces nombres.

Écrire aussi la négation de chacune de ces propositions, et en déterminer la valeur de vérité.

b) *Caractérisation de E et $\varnothing$*
Démontrer les implications suivantes :

$$\{(\forall A \subset E)\ A \cup B = E\} \Longrightarrow (B = E)$$
$$\{(\forall A \subset E)\ A \cap B = \varnothing\} \Longrightarrow (B = \varnothing)$$

c) *Ordre des quantificateurs*
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

i. Quelle propriété de A la proposition suivante exprime-t-elle ?

$$(\exists\, M \in \mathbb{R})\,(\forall x \in A)\ x \leqslant M$$

ii. Donner un exemple d'une partie A possédant cette propriété.

iii. Écrire la négation de cette propriété, et donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle cette négation est vraie.

iv. Pouvez-vous expliquer pourquoi la proposition suivante n'a absolument aucun intérêt ?

$$(\forall x \in A)\,(\exists\, M \in \mathbb{R})\ x \leqslant M$$

2) **Simplification d'égalités ensemblistes**

a) Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$, mais $A \neq B$.

b) Mêmes questions en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

c) À l'aide de diagrammes, montrer les identités suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d) Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. À l'aide de diagrammes, simplifier : $(A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup E)$.

3) **Égalité d'ensembles**

Soit A, B et C trois ensembles, on suppose que $A \subset B$, $B \subset C$ et $C \subset A$. Que peut-on en déduire ?

4) **Partitions**

Dire que n sous-ensembles *non vides* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E forment une **partition** de E revient à dire que chaque élément de E appartient à *exactement* un A_i. Ceci est équivalent à :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour tout } i \neq j$$

a) Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, et

$$A = \{a, c, f\}\,,\ B = \{b, g\}\,,\ C = \{d, h\}$$

Représenter ces ensembles à l'aide d'un diagramme.

b) Même question avec A, B et C', où $C' = \{d, e, f, h\}$.

c) Même question avec A, B' et C, où $B' = \{b, e, g\}$.

d) Trouver toutes les partitions de $F = \{1, 2, 3\}$, puis de $G = \{1, 2, 3, 4\}$.

5) **Produit cartésien**

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Montrer que $E \times F$ et $F \times E$ ont même cardinal, mais que ce sont deux ensembles différents.

b) Que vaut le cardinal de E^3 ? En donner les éléments.

6) **Différence symétrique**

A et B étant deux sous-ensembles d'un ensemble E, on définit leur *différence symétrique* $A\Delta B$ par

$$A\Delta B = \{x \in E \ / \ x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

a) Représenter $A\Delta B$ à l'aide d'un diagramme.

b) Montrer que $A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$, et que les deux parties de cette réunion sont disjointes.

c) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta E$, $A\Delta\varnothing$.

d) Démontrer que pour tous sous-ensembles A et B de E, $A\Delta B = B\Delta A$.

e) On se place dans le cas particulier où

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, \ A = \{a, b, c, d, e, f\}, \ B = \{b, c, e, g, i\} \text{ et } C = \{c, d, e, h\}$$

Comparer $(A\Delta B)\,\Delta C$ et $A\Delta\,(B\Delta C)$.