Notes sur le cours 8 : Graphes non orientés

Le cours 8 sur les graphes ne peut avoir lieu. Dans ce document, vous trouverez les démonstrations effectuées normalement en cours.

Ce cours introduit la terminologie habituellement utilisée en théorie des graphes. Il y a également plusieurs propriétés fondamentales sur les graphes non orientés et les arbres qu'il faut savoir démontrer.

Transparent 9 La remarque sera à démontrer en travaux dirigés.

Transparent 10 Le graphe de gauche est connexe. Celui de droite ne l'est pas : il n'y a pas de chaîne élémentaire de 1 à 3.

Transparent 11

Theorem 1. *Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.*

Proof. On peut démontrer cette propriété par récurrence faible sur le nombre d'arêtes du graphe G.

Base Si G est un graphe sans arête, $|E| = 0$ et pour tout sommet $u \in V$, $d(v) = 0$. La propriété est donc vérifiée.

Induction Supposons que la propriété soit vérifiée pour tout graphe de $m-1$ arêtes avec $m-1 \geq 0$. Soit alors $G = (V, E)$ un graphe de m arêtes. Soit $e = \{u, v\}$ une arête de G et $G' = (V, E - \{e\})$. Pour tout sommet $x \in V$, on note respectivement $d_G(x)$ et $d_{G'}(x)$ les degrés de x pour les graphes G et G'. On observe que $d_G(u) = d_{G'}(u) + 1$, $d_G(v) = d_{G'}(v) + 1$ et pour tout $x \in V - \{u, v\}$, $d_G(x) = d_{G'}(x)$. Donc, $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_{G'}(v) + 2$. Or, $\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2|E - \{e\}| = 2m - 2$, donc $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$ et la propriété est vérifiée pour G.

La propriété est donc vérifiée par récurrence faible. □

Transparent 14 Il s'agit de la propriété fondamentale sur les arbres telle que Claude Berge l'a exprimée. Pour la démontrer, on effectue $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Nous présentons ici $1 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 3$. Les deux autres implications seront étudiées en travaux dirigés.

Theorem 2. *Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Si T est un arbre, alors T est minimal connexe.*

Proof. On démontre la contraposée. Supposons que T n'est pas minimal connexe. Si T n'est pas connexe, T n'est pas un arbre, le théorème est alors vérifié. Supposons maintenant que T soit connexe mais non minimal connexe. Alors, il existe une arête $e = \{u, v\} \in E$ tel que $T' = (V, E - \{u, v\})$ soit connexe. On en déduit qu'il existe dans T' une chaîne élémentaire μ de v à u. En rajoutant l'arête e à μ, on obtient un cycle élémentaire, T n'est donc pas un arbre. □

Theorem 3. *Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Si T est minimal connexe, alors T est maximal acyclique.*

Proof. On démontre la contraposée. Supposons que T n'est pas maximal acyclique. Si T n'est pas connexe, alors le théorème est démontré. On suppose donc que T est connexe. On considère alors deux cas :

- Si T contient un cycle élémentaire $c = v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1$, on pose $e = \{v_1, v_2\}$ l'arête correspondante de T. On montre que $T' = (T, E - \{e\})$ est connexe. T est connexe par hypothèse, donc pour tout couple de sommets $\{u, v\} \in V^2$ il existe une chaîne élémentaire $\mu(u, v)$ de u à v. Si cette chaîne passe par l'arête e, on peut remplacer cette arête par la sous-chaîne ν de c de v_2 à v_1. On obtient alors une chaîne de u à v qui est dans T'. On en déduit que T' est connexe, et donc T n'est pas minimal connexe.

- Si T ne contient pas de cycle élémentaire, comme T n'est pas maximal acyclique, alors il existe une arête $e = \{u, v\}$ avec u et v non adjacents dans T tel que $T' = (T, E \cup \{e\})$ ne contient pas de cycle élémentaire. C'est donc qu'il n'y a pas dans T de chaîne de u à v, donc T n'est pas connexe.

□

Transparent 15 Ce transparent est fondamental et relie le nombre de sommets et d'arêtes à des propriétés structurelles sur les graphes.

Theorem 4. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| \geq |V|$, alors G contient un cycle élémentaire.*

Proof. On montre la contraposée par récurrence sur le nombre de sommets du graphe. Pour tout $k \geq 1$, $\Pi(k)$: pour tout graphe $G = (V, E)$ de k sommets, si G ne contient pas de cycle él'ementaire, alors $|E| < |V|$.

Base : Pour $k = 1$, $|E| = 0$ et $|V| = 1$. Donc, la propriété est vérifiée.

Induction : Soit $k \geq 1$. Supposons par récurrence forte que la propriété est vérifiée pour tout graphe de k sommets ou moins. Soit maintenant un graphe $G = (V, E)$ de $k + 1$ sommets. Soit un sommet $x \in V$. Le sous-graphe induit $G' = (V - \{x\}, E)$ est composé d'une ou plusieurs sous-graphes partiels connexes $G_1 = (V_1, E_1), \cdots, G_p = (V_p, E_p)$, chacune étant sans circuit élémentaire. Donc, par hypothèse de récurrence, $|E_i| < |V_i|$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, soit $|E_i| + 1 \leq |V_i|$.

Comme G est sans circuit élémentaire, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, il y a au plus une arête $\{x, y_i\}$ dans E avec $y_i \in V_i$. Donc,

Objectif : montrer qu'un graphe de k+1 sommet vérifie la proposition à partir de sommet plus petits

$$|E| \leq p + \sum_{i=1}^{p} |E_i| \leq \sum_{i=1}^{p} |V_i| = |V| - 1.$$

Determine un graphe de k+1 sommet
On le prive d'un sommet t on utilise l'hypothèse de récurence
C'est une récurence forte donc l'hypothèse est valide pour tout les sommet précedant
Puis lon obtient la formule en vert

Soit, $|E| < |V|$.

Ainsi, $\Pi(1)$ et vérifiée et, pour tout $k \geq 1$, $\Pi(r), \forall r \leq k \Rightarrow \Pi(k + 1)$. Donc, la propriété est vérifiée par récurrence forte. □

Theorem 5. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| < |V| - 1$, alors G n'est pas connexe.*

Proof. On montre la contraposée par récurrence sur le nombre de sommets du graphe. Pour tout $k \geq 1$, $\Pi(k)$: pour tout graphe $G = (V, E)$ de k sommets, si G est connexe, alors $|E| \geq |V| - 1$.

Base : Pour $k = 1$, $|E| = 0$ et $|V| = 1$. Donc, la propriété est vérifiée.

Induction : Soit $k \geq 1$. Supposons par récurrence forte que la propriété est vérifiée pour tout graphe de k sommets ou moins. Soit maintenant un graphe $G = (V, E)$ de $k + 1$ sommets. Soit un sommet $x \in V$. Le sous-graphe $G' = (V - \{x\}, E)$ est composé d'un ou plusieurs sous-graphes partiels connexes $G_1 = (V_1, E_1), \cdots, G_p = (V_p, E_p)$. Donc, par hypothèse de récurrence, $|E_i| \geq |V_i| - 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$.

Comme G est connexe, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, il y a au moins une arête $\{x, y_i\}$ dans E avec $y_i \in V_i$. Donc,

$$|E| \geq p + \sum_{i=1}^{p} |E_i| \geq \sum_{i=1}^{p} |V_i| = |V| - 1.$$

Soit, $|E| \geq |V| - 1$.

pour chaque noeud enlevé
deux arrête supprimé et 2 sous graphe connexe créer
Donc

Ainsi, $\Pi(1)$ et vérifiée et, pour tout $k \geq 1$, $\Pi(r), \forall r \leq k \Rightarrow \Pi(k + 1)$. Donc, la propriété est vérifiée par récurrence forte. □

Theorem 6. *Si $T = (V, E)$ est un arbre, $|E| = |V| - 1$.*

Proof. Si T est un arbre, T est connexe et sans cycle. Comme T est sans cycle, $|E| < |V|$. Comme T est connexe, $|E| \geq |V| - 1$. Donc, $|E| = |V| - 1$. □