Exo 1 (Bleu)

1) a : automne, b : pluie, c : champi

$\boxed{a \wedge b \Rightarrow c}$

Loi de De Morgan :

$\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$

$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}$

2) $\bar{c} \Rightarrow \bar{a} \vee \bar{b}$

3) $\overline{(a \wedge b \Rightarrow c)} \equiv \overline{(\overline{a \wedge b} \vee c)}$

$\equiv \overline{(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)}$

$\equiv \bar{\bar{a}} \wedge \bar{\bar{b}} \wedge \bar{c}$

$\equiv a \wedge b \wedge \bar{c}$: automne, pluie, pas champi

Exo 2. (Rouge)

a : terminer l'assiette

b : avoir bonbon

c : avoir dessert

Formule : $\forall x \in \mathcal{E},\ a(x) \Rightarrow b(x) \vee c(x)$

⚠ "ou" : ou exclusif. soit l'un, soit l'autre

"ou" : inclusif. —— ——, soit les 2

Symbole $\vee \equiv$ inclusif

xor $\equiv$ exclusif

$a \Rightarrow b \vee c \equiv \bar{a} \vee (b \vee c) \equiv \bar{a} \vee b \vee c$

Négation : $\overline{\bar{a} \vee b \vee c} \equiv \bar{\bar{a}} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \equiv a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$

Contraposée : $\overline{b \vee c} \Rightarrow \bar{a} \equiv \bar{b} \wedge \bar{c} \Rightarrow \bar{a}$

Exo 2.2

1) $a \Rightarrow b \vee \bar{c} \equiv \bar{a} \vee (b \vee \bar{c}) \equiv \bar{a} \vee b \vee \bar{c}$

6) $a \wedge c \Rightarrow b \equiv \overline{a \wedge c} \vee b \equiv \bar{a} \vee \bar{c} \vee b$ ///

3) $c \Rightarrow a \vee b \equiv \bar{c} \vee (a \vee b) \equiv \bar{c} \vee a \vee b$ ///

4) $\bar{b} \Rightarrow (a \vee \bar{c}) \equiv \bar{\bar{b}} \vee (a \vee \bar{c}) \equiv b \vee a \vee \bar{c}$

2) $\bar{b} \Rightarrow a \wedge c \equiv \bar{\bar{b}} \vee (a \wedge c) \equiv b \vee (a \wedge c)$

5) $\overline{a \wedge c} \Rightarrow b \equiv \overline{\overline{a \wedge c}} \vee b \equiv (a \wedge c) \vee b$ ///

Exo 3.1 (Magenta)

1) Mq n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Mq $\overline{n \text{ pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ pair}}$

n impair : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1$

alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{N}}) + 1$ (impair)

2) Réciproque : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair ?

Si n est pair, $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$

donc $n^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{N}}$ (pair)

VRAIE

3) Contraposée : n^2 impair $\Rightarrow$ n impair ?

Déjà montrée par contraposée

3.2 Mq $\sqrt{2}$ est irrationnel.

$\nexists\, p,q \in \mathbb{N}^*$ tq $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Alors, $2 = p^2/q^2$ ie $\boxed{2q^2 = p^2}$ (*)

Donc p^2 est pair. Donc p est pair (question 2.1)

On peut écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

(*) devient $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$

donc $q^2 = 2k^2$

q^2 est pair donc q aussi (question 2.1)

q et p sont pairs Absurde

Donc $\nexists\, p,q$, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrationnel)

3.3 Mq $\exists q \in \mathbb{N}^*, m = q^2 \Rightarrow 2m \neq p^2 \ \forall p \in \mathbb{N}$

Supposons que $m = q^2$ et que $2m = p^2$

Alors $m = \frac{p^2}{2} = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2}$

Donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ie $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ Faux (q 3.2)

Absurde

Donc si m est un carré, 2m ne l'est pas.

Suites récurrentes linéaires

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \leftarrow u_n \text{ donnée} \\ u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, \dots, u_0) \end{cases}$$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_n u_0$$

| Substitution.

$$u_n = a \underbrace{u_{n-1}}_{a u_{n-2} + b u_{n-3}} + b \underbrace{u_{n-2}}_{a u_{n-3} + \dots}$$

$\vdots$

u_0

Polynôme carac : $0 = u_n - a u_{n-1} - b u_{n-2}$

$P = X^2 - a X^1 - b X^0 \qquad \Delta : \dots$

Trouver les racines.

- Deux. r_1, r_2. $\qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$

Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 \end{cases}$

- Une seule, r. $\qquad u_n = \alpha r^n + \beta r^n \cdot n$

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \alpha + \beta r \end{cases}$$

<u>Exo 5.1</u>

1) $u_n = u_{n-1} + 6 u_{n-2} \qquad u_0 = 0, \quad u_1 = 1$

$P = X^2 - X - 6 \qquad r_1 = 3 \qquad r_2 = -2$

$u_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-2)^n = \boxed{\frac{1}{5}\left(3^n - (-2)^n\right)}$

2) $u_n = 4 u_{n-1} - 4 u_{n-2} \qquad u_0 = 1, \quad u_1 = 4$

$P = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2 \qquad r_1 = 2 = r_2 =$

$u_n = a\, 2^n + b\, n\, 2^n = (n+1) \cdot 2^n$

$u_0 = a + 0$
$u_1 = 2a + 2b$
$= 2u_0 + 2b$

3) Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_0 = 0, \; F_1 = 1$

$P = X^2 - X - 1$

$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \phi_- \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi_+$

$F_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^n - \phi_-^n\right)}$

4) $u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}$ $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ $u_2 = 2$

$P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ $r_1 = 1$ $r_2 = 2 = r_3 = 2$

$u_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta \cdot r_2^n + \gamma \cdot r_2^n \cdot n = \alpha + \beta 2^n + \gamma n 2^n$

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha + 2\beta + 2\gamma \\ u_2 = \alpha + 4\beta + 8\gamma \end{cases}$$

$\alpha = -\beta$

$1 = \cancel{-\beta} + \cancel{2}\beta + 2\gamma$, $\beta = 1 - 2\gamma$

$2 = (-1 + 2\gamma) + 4(1 - 2\gamma) + 8\gamma$

$= -1 + 2\gamma + 4 - \cancel{8\gamma} + \cancel{8\gamma}$

$\gamma = \frac{-1}{2}$, $\beta = 2$; $\alpha = -2$

$u_n = -2 + 2 \cdot 2^n + \frac{-1}{2} n 2^n$

$= 2^n \left(2 - \frac{n}{2}\right) - 2$

Racines. on essaye 1. ça marche

$\frac{P}{x-1} = (x-2)^2$ donc 2 est racine double

<u>Exo 6.1</u>

1) $u_n = u_{n-1} + n = (u_{n-2} + (n-1)) + n$

$= ((\underbrace{u_{n-3}}_{u_0 = 0} + \underbrace{n-2) + n-1) + n}_{\vdots\ 1}$

$= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=0}^{n} k$

2) $u_n = 2u_{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^n - 1$

3) $u_n = 2u_{n-1} + 2^n = (n+3) \cdot 2^n$

$2u_{n-2} + 2^{n-1}$

$2u_{n-3} + 2^{n-2}$

$\vdots$

$u_n = 2\left(2 \times (2u_{n-3} + 2^{n-2}) + 2^{n-1}\right) + 2^n$

$= 2\left(4u_{n-3} + 2^n\right) + 2^n$

Récurrence Mq $\Pi(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Base : $\Pi(0)$ est vraie

Induction : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Pi(n) \Longrightarrow \Pi(n+1)$

faible

forte : $\Pi(m)$ $\Longrightarrow \Pi(n_0+$
$\forall m < n$

Ex. 8

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{2^{n-1} \leq n! \leq n^n}$

Base : $n=1$, $\left.\begin{array}{l} 2^{n-1} = 1 \\ n! = 1 \\ n^n = 1 \end{array}\right\}$ ok

Induction : Supposons que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

Mq $2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$

- $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot n! \leq \underbrace{(n+1)}_{\geq 2} \cdot n! = (n+1)!$

- $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \leq (n+1) \cdot n^n \leq (n+1)(n+1)^n$
$= (n+1)^{n+1}$

2) $P(n)$: " $2^n > n^2$ "

- Mq $\forall n \geq 3$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Supposons que $2^n > n^2$.

Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$

Mq $2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

ie $n^2 - 2n - 1 \geq 0$

Racines : $1 \pm \sqrt{2}$

Pour $n \geq 3$, ce polynôme est positif.

Donc $2^{n+1} > (n+1)^2$: l'implication est vraie.

- $\underline{n=0}$: Vrai, $\underline{n=1}$: Vrai, $\underline{n=2}$: faux, $\underline{n=3}$: faux

$\underline{n=4}$: faux, $\underline{n=5}$ $2^5 = 32$. $5^2 = 23$. Vrai

$\Rightarrow$ Par récurrence (faible),

$P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 5$

$$G_0 = G_1 = 0$$

Exo 12.1

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$$

1) Mq $\boxed{G_n = F_{n+1} - 1}$ par rec forte.

Base : $G_0 = \underbrace{F_1}_{=1} - 1$

Induction $G_{n+1} \overset{\circ}{=} \underbrace{G_n}_{F_{n+1}-1} + \underbrace{G_{n-1}}_{F_n - 1} + 1 = \underbrace{F_{n+1} + F_n}_{} - 2 + 1$

donc l'implication est vraie $\overset{\circ}{=} F_{n+2} - 1$

2) Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \exists i_1, \dots, i_k, n = \sum_{j=1}^{k} 2^{i_j}$

$$7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 16 + 2 + 1$$

Base : $1 = 2^0$.

Induction:

$n = \underbrace{n - 2^k}_{\alpha} + 2^k$ tq $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$$\alpha = n - 2^k < 2^{k+1} - 2^k = 2^k + \cancel{2^k} - \cancel{2^k} \leq n$$

Comme $\alpha < n$, par hypothèse, $\alpha = \sum 2^{i_j}$

D'où $n = 2^k + \sum 2^{i_j} \neq k$