

# Règles de la Déduction Naturelle

#### Axiome

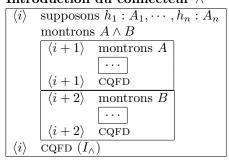
- $\langle i \rangle$  supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n, h: A$  montrons A
- $\langle i \rangle$  CQFD (Ax avec h)

## Axiome

 $\langle j \rangle$  supposons  $h'_1: A'_1, \cdots, h'_k: A'_k, h: A$  montrons B ...  $\langle i \rangle$  supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n$  montrons A  $\langle i \rangle$  CQFD (Ax avec h) ...  $\langle j \rangle$  CQFD (Nom)

#### Introduction du connecteur $\Rightarrow$

# Introduction du connecteur $\wedge$



# Affaiblissement

 $\langle i \rangle$  supposons  $h_1:A_1,\cdots,h_n:A_n,h:B$  montrons A  $\begin{array}{c|c} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \text{ sans utiliser } h \\ \hline \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \\ \hline \langle i \rangle & \text{CQFD (Af)} \end{array}$ 

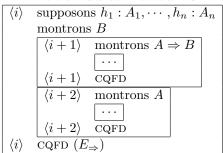
# Introduction de true

 $\langle i \rangle$  supposons  $h_1:A_1,\cdots,h_n:A_n$  montrons true  $\langle i \rangle$  CQFD  $(I_{\top})$ 

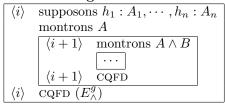
#### Elimination de false

 $\langle i \rangle$  supposons  $h_1:A_1,\cdots,h_n:A_n,h:$  false montrons B  $\langle i \rangle$  CQFD  $(E_\perp \text{ avec } h)$ 

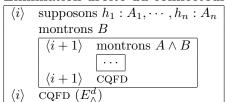
#### Elimination du connecteur $\Rightarrow$



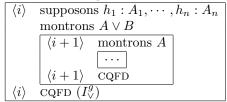
### Elimination gauche du connecteur $\wedge$



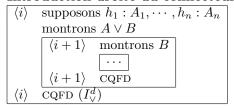
# Elimination droite du connecteur $\wedge$



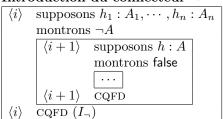
# Introduction gauche du connecteur ∨



# Introduction droite du connecteur $\lor$



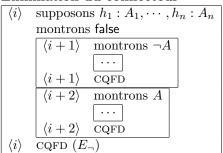
# Introduction du connecteur ¬



#### Elimination du connecteur $\vee$

```
supposons h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n
      montrons C
                   montrons A \vee B
       \langle i+1 \rangle
                    . . .
        \langle i+1 \rangle
                   CQFD
                   supposons h_A:A
                   montrons C
                   CQFD
                   supposons h_B: B
                   montrons C
                    . . .
       \langle i+3 \rangle
                   CQFD
      CQFD (E_{\vee})
\langle i \rangle
```

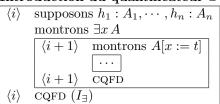
#### Elimination du connecteur ¬



# Introduction du quantificateur $\forall$

```
supposons h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n
montrons \forall x A
               soit une nouvelle variable y
                (y \notin \operatorname{Free}(A) \cup \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Free}(A_i))
               montrons A[x := y]
  \langle i+1 \rangle
               CQFD
CQFD (I_{\forall})
```

# Introduction du quantificateur $\exists$



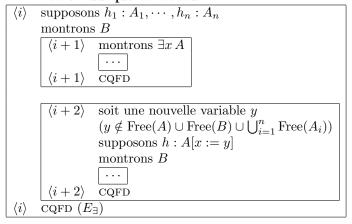
# Raisonnement par l'absurde

```
\langle i \rangle supposons h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n
      montrons A
       \langle i+1 \rangle
                  supposons h: \neg A
                   montrons false
        \langle i+1 \rangle
                   CQFD
    cqfd (Abs)
```

# Elimination du quantificateur $\forall$

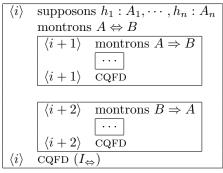
```
supposons h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n
montrons A[x := t]
 \langle i+1 \rangle montrons \forall x A
 \langle i+1 \rangle
              CQFD
CQFD (E_{\forall})
```

# Elimination du quantificateur ∃

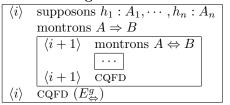


# Règles supplémentaires pour le connecteur $\Leftrightarrow$

#### Introduction du connecteur $\Leftrightarrow$



#### Elimination gauche du connecteur $\Leftrightarrow$



## Elimination droite du connecteur $\Leftrightarrow$

# Règles Dérivées

# Elimination gauche directe du connecteur A

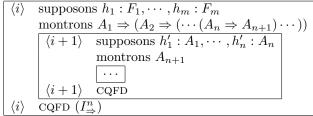
supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n, h: A \wedge B$ montrons ACQFD  $(D^g_{\wedge} \text{ avec } h)$ 

#### Introductions du connecteur $\Rightarrow$

```
\langle i \rangle supposons h_1: F_1, \cdots, h_m: F_m
       montrons A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\cdots (A_n \Rightarrow A_{n+1}) \cdots))
         \langle i+1 \rangle supposons h'_1:A_1,\cdots,h'_n:A_n
                      montrons A_{n+1}
                      ...
        \langle i+1 \rangle CQFD
```

# Elimination droite directe du connecteur $\wedge$

supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n, h: A \wedge B$ montrons BCQFD  $(D^d_{\wedge} \text{ avec } h)$ 



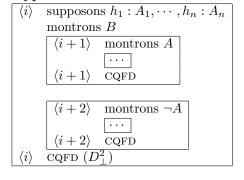
# Elimination directe du connecteur $\Rightarrow$

 $\langle i \rangle$  supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n$ ,  $h'_1: A \Rightarrow B, h'_2: A$ montrons BCQFD  $(D_{\Rightarrow} \text{ avec } h'_1, h'_2)$ 

#### Hypothèses contradictoires

supposons  $h_1: A_1, \dots, h_n: A_n, h'_1: A, h'_2: \neg A$ montrons BCQFD  $(D^1_{\perp} \text{ avec } h'_1, h'_2)$ 

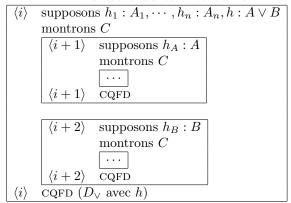
#### Hypothèses contradictoires



# Elimination directe du connecteur $\neg$

- $\langle i \rangle$  supposons  $h_1:A_1,\cdots,h_n:A_n,h'_1:A,h'_2:\neg A$  montrons false
- $\langle i \rangle$  CQFD  $(D_{\neg} \text{ avec } h'_1, h'_2)$

#### Elimination directe du connecteur $\lor$



# Elimination directe du quantificateur $\forall$

- $\langle i \rangle$  supposons  $h_1: A_1, \cdots, h_n: A_n, h: \forall x A$ montrons A[x:=t] $\langle i \rangle$  CQFD  $(D_{\forall} \text{ avec } h)$
- Elimination directe du quantificateur  $\exists$

# Double négation

#### Double négation

$$\begin{array}{c|c} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } \neg A \\ \hline & \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \\ \hline & \langle i+1 \rangle & \text{cqfd} \\ \hline \langle i \rangle & \text{cqfd} & (R_{\neg}^2) \\ \end{array}$$

## Tiers exclu

#### Elimination du tiers exclu

