Graphes non orientés

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Sorbonne Université
Paris

LU2IN003 Initiation à l'algorithmique

Plan du cours

Problème d'Euler

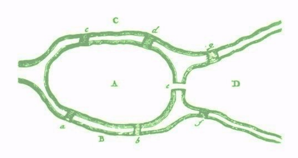


Figure: Plan des 7 ponts de Konigsberg

Peut-on trouver un itinéraire qui passe exactement une fois par chaque pont ?

Modélisation par un graphe non orienté

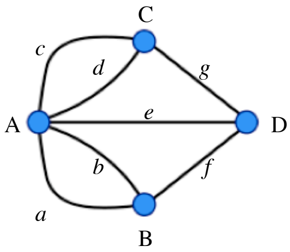


Figure: Graphe $G = (V, E)$. Sommets$\leftrightarrow$quartiers, arêtes$\leftrightarrow$ponts

Peut-on trouver une chaîne qui passe par toutes les arêtes pour le graphe $G = (V, E)$?

Recherche d'un itinéraire

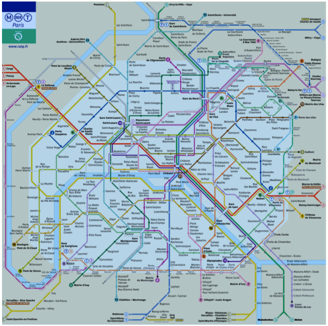


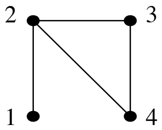
Figure: Plan du métro parisien

Quel est le chemin le plus court (en nombre de stations) pour aller de République à Monparnasse ?

Définition

Definition

Un *graphe non orienté* G est défini par un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes.



$V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$.

Définition

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
Une *boucle* est une arête $\{u, u\}$ avec $u \in V$
Une arête $e = \{u, v\}$ est *multiple* si il existe au moins deux arêtes $\{u, v\}$ dans E.

Definition

Un graphe non orienté *simple* G est un graphe sans boucle ni arête multiple.

Dans ce cours, on suppose a priori que tous les graphes non orientés sont simples.

Terminologie pour les graphes non orientés

- Pour tout sommet $u \in V$, $\Gamma(u) = \{v \in V, \{u, v\} \in E\}$ est l'ensemble des sommets *adjacents* à u (ou les voisins de u).
- Toute arête $e = \{u, v\} \in E$ est *incidente* à u et v.
- Un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subset V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.
- Le *sous-graphe induit* par un ensemble de sommets $V' \subset V(G)$ est le sous-graphe $G' = (V', E')$ avec $E' = \{e = \{u, v\} \in E, u \in V', v \in V'\}$.

Terminologie pour les graphes non orientés (suite)

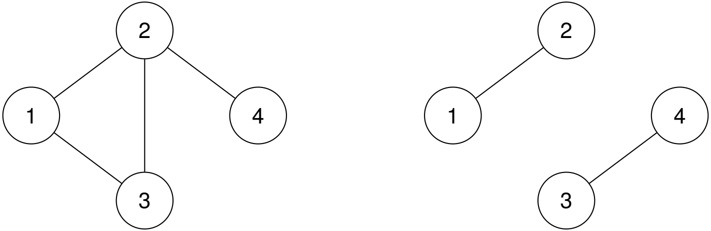
- Une *chaîne*(walk) est une séquence de sommets et d'arêtes $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ et $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- Une *chaîne simple*(trail) est une chaîne ne passant pas deux fois par la même arête.
- Une *chaîne élémentaire*(path) est une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet.

Remarque

Tout chaîne contient une chaîne élémentaire.

Terminologie pour les graphes non orientés (fin)

- Un *cycle* est une chaîne fermée (*i.e.* telle que $v_{n+1} = v_1$).
- Un *cycle élémentaire* est une chaîne élémentaire fermée.
- Un graphe *connexe* est tel que, pour tout couple $(u, v) \in V^2$, il existe une chaîne élémentaire entre u et v.



Est-ce que ces deux graphes sont connexes ?

Degré d'un graphe

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré de tout sommet $v \in V$ est égal à $d(v) = |\Gamma(v)|$.

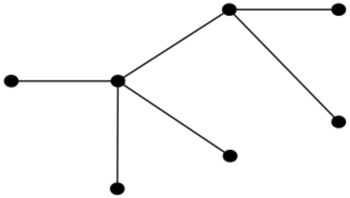
Theorem

Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Définition d'un arbre

Definition

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. T est un arbre si T est connexe sans cycle élémentaire.



Minimal connexe, maximum acyclique

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est minimal connexe si, G est connexe et pour tout $e \in E$, $G' = (V, E - \{e\})$ n'est pas connexe.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est maximal acyclique si, G est sans cycle élémentaire et pour tout couple de sommets $\{x, y\}$ non adjacents dans G, $G' = (V, E \cup \{\{x, y\}\})$ contient un cycle élémentaire.

Caractérisation d'un arbre

Theorem

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *T est un arbre.*
2. *T est minimal connexe.*
3. *T est maximal acyclique.*
4. *Entre deux sommets quelconques, il existe une chaîne élémentaire unique.*

Relation entre $|E|$ et $|V|$

Theorem

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| \geq |V|$, alors G contient un cycle élémentaire.

Theorem

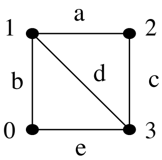
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| < |V|$-1, alors G n'est pas connexe.

Theorem

Si $T = (V, E)$ est un arbre, alors $|E| = |V| - 1$.

Que pensez-vous de la réciproque ?

Matrice sommet-arête pour $G = (V, E)$ non orienté

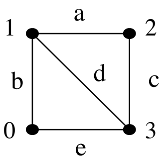


Pour tout couple $(i, j) \in V \times E$,

1. $M[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $M[i, j] = 1$ ssi i est incident à j.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice sommet-sommet pour $G = (V, E)$ non orienté

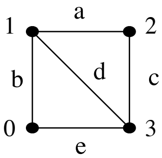


Pour tout couple $(i, j) \in V \times V$,

1. $R[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $R[i, j] = 1$ ssi i est adjacent à j.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes d'adjacence pour $G = (V, E)$ non orienté



Pour $i \in V$, $L[i]$ est la liste des sommets adjacents à i.

$$\begin{aligned} L[0] &= [1, 3] \\ L[1] &= [0, 2, 3] \\ L[2] &= [1, 3] \\ L[3] &= [0, 1, 2] \end{aligned}$$

Taille en mémoire des deux représentations

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

	Taille mémoire
Matrice sommet-arête	$\Theta(\lvert V\rvert \times \lvert E\rvert)$
Matrice sommet-sommet	$\Theta(\lvert V\rvert^2)$
Listes d'adjacence	$\Theta(\max(\lvert V\rvert, \lvert E\rvert))$

Complexité des primitives d'accès aux arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

1. `G.existeArete(i,j)` : pour tout couple $(i, j) \in V^2$, *True* ssi $\{i, j\} \in E$;
2. `G.adjacents(i)` : pour $i \in V$, $\Gamma(i)$.

Représentation	`G.existeArete(i,j)`	`G.adjacents(i)`
Matrice som-a	$\mathcal{O}(m)$	$\mathcal{O}(m \times n)$
Matrice som-som	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Matrice Adj.	$\mathcal{O}(d(i))$	$\Theta(1)$

$n = |V|$, $m = |E|$.