

Graphes orientés

Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Sorbonne Université
Paris

2I003 Initiation à l'algorithmique

Plan du cours

- 1 Exemples
- 2 Terminologie et notions de base
- 3 Représentation et primitives de base
- 4 Forte connexité
- 5 Tri topologique

Personnages en relation

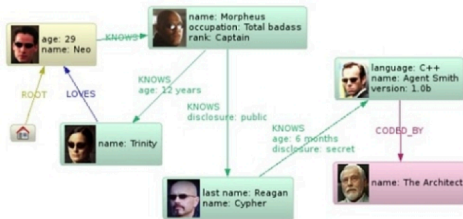


Figure: Graphe $G = (V, A)$. Sommets \leftrightarrow personnages, arc \leftrightarrow relation

Déterminer toutes les personnes que Morpheus connaît ?

Tâches en relation de précédence

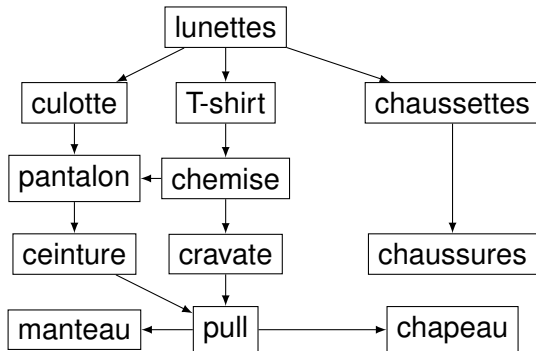


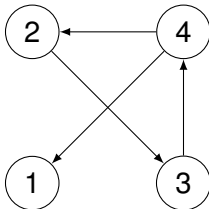
Figure: Sommets \leftrightarrow tâches, arc \leftrightarrow relation de précédence

Peut-on déterminer un ordre (total) des tâches qui respecte les contraintes de précédence ? Est-il unique ?

Définition

Definition

Un *graphe orienté* G est défini par un couple $G = (V, A)$, où V est un ensemble de sommets et A un ensemble d'arcs.
Un graphe orienté est *connexe* si le graphe non orienté obtenue en remplaçant chaque arc par une arête est connexe.



$G = (V, A)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $A = \{(4, 1), (4, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. G est-il connexe ?

Terminologie

Pour tout sommet $u \in V$,

- $\Gamma^+(u) = \{v \in V, (u, v) \in A\}$ est l'ensemble des *successeurs* de u .
- $\Gamma^-(u) = \{v \in V, (v, u) \in A\}$ est l'ensemble des *prédécesseurs* de u .
- Un *chemin* est une séquence de sommets et d'arcs $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$ et $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in A$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Un chemin *élémentaire* est un chemin qui ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un *circuit* est un chemin ν tel que $v_{n+1} = v_1$. Un *circuit élémentaire* est un chemin *élémentaire* ν tel que $v_{n+1} = v_1$

Arborescence

Une arborescence est un graphe orienté $G_r = (V, A)$ construit à partir d'un arbre $T = (V, E)$ et d'un sommet $r \in V$.

- 1 G_r et T ont les mêmes sommets ;
- 2 Les arcs de G_r correspondent aux arêtes de T orientés du sommet r vers les feuilles.

r est *la racine* de G_r . Il s'agit de l'unique sommet de G_r sans prédécesseur.

Degré et $\frac{1}{2}$ -degrés d'un graphe orienté

Definition

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.

- $d^+(u) = |\Gamma^+(u)|$ est le $\frac{1}{2}$ -degré sortant de u .
- $d^-(u) = |\Gamma^-(u)|$ est le $\frac{1}{2}$ -degré entrant de u .
- $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$ est le degré de u .

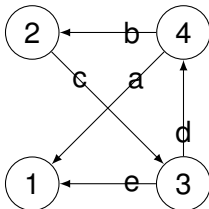
Theorem

Pour tout graphe $G = (V, A)$ orienté,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |A|$$

Par récurrence sur le nombre d'arcs (en TD).

Matrice sommet-arc pour $G = (V, A)$ orienté



M est une matrice $|V| \times |A|$ telle que, $\forall a = (i, j) \in A$

- 1 $M[i, a] = 1, M[j, a] = -1$;
- 2 $\forall k \in V - \{i, j\}, M[k, a] = 0$.

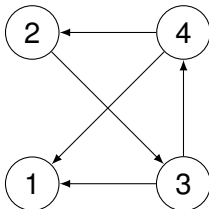
étudié la matrice colonne par

arrivé

départ

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice sommet-sommet pour $G = (V, A)$ orienté



R est une matrice $|V| \times |V|$ telle que, $\forall (i, j) \in V^2$

1 $R[i, j] \in \{0, 1\}$;

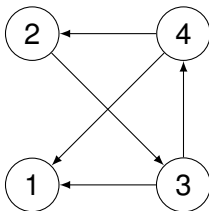
2 $R[i, j] = 1$ ssi $a = (i, j) \in A$.

Etudié le graphe
ligne puis colonne

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il y existe un arc qui va de
« ligne » à « colonne »

Listes de successeurs pour $G = (V, A)$ orienté



Pour $i \in V$, $L[i]$ est la liste des sommets successeurs de i .

$$\begin{aligned} L[1] &= [] \\ L[2] &= [3] \\ L[3] &= [1, 4] \\ L[4] &= [1, 2] \end{aligned}$$

Taille en mémoire des trois représentations

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté :

| | Taille mémoire |
|-----------------------|--------------------------|
| Matrice sommet-arcs | $\Theta(V \times A)$ |
| Matrice sommet-sommet | $\Theta(V ^2)$ |
| Listes de successeurs | $\Theta(\max(V , A))$ |

Complexité des primitives d'accès aux arcs

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté :

- 1 $G.\text{existeArc}(i, j) : \text{True}$ ssi $(i, j) \in A$;
- 2 $G.\text{listeSuccesseurs}(i) : \text{pour } i \in V, \Gamma^+(i)$;
- 3 $G.\text{listePredecesseurs}(i) : \text{pour } i \in V, \Gamma^-(i)$.

| Num. primitives | 1 | 2 | 3 |
|-----------------|-----------------------|---------------------------|---------------------------|
| Matrice som-a | $\mathcal{O}(m)$ | $\mathcal{O}(m \times n)$ | $\mathcal{O}(m \times n)$ |
| Matrice som-som | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| Liste de Succ. | $\mathcal{O}(d^+(i))$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(m)$ |

$n = |V|, m = |A|$.

Rappels sur les relations d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation définie dans un ensemble A .

Definition

\mathcal{R} est une *relation d'équivalence* sur A si

- \mathcal{R} est *réflexive* : $x\mathcal{R}x$,
- \mathcal{R} est *symétrique* : si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,
- \mathcal{R} est *transitive* : si $x\mathcal{R}y$ et si $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Par exemple, pour $A = \mathbb{Z}$, soit \mathcal{R}_5 telle que pour tout $(x, y) \in A^2$, $x\mathcal{R}_5 y$ si $x = y \pmod{5}$.

On peut vérifier que \mathcal{R}_5 est une relation d'équivalence.

Rappels sur les relations d'équivalence (suite)

Definition

Soit \mathcal{R} une *relation d'équivalence* sur A , la *classe d'équivalence* d'un élément x de A est l'ensemble des éléments y de A qui sont en relation avec x .

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in A, x\mathcal{R}y\}$$

Theorem

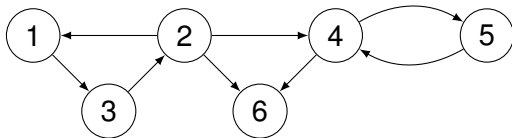
Les classes d'équivalence forment une partition de A .

A quoi correspondent les classes d'équivalence pour \mathcal{R}_5 ?

Une classe d'équivalence liée aux graphes orientés

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté connexe et la relation \mathcal{R}_{FC} définie sur V^2 par :

$u\mathcal{R}_{FC}v$ si il existe un chemin dans G de u à v et de v à u .



$$\mathcal{R}_{FC} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)\}$$

Forte connexité et composantes fortement connexes

Theorem

\mathcal{R}_{FC} est une relation d'équivalence sur V .

Definition

Les classes d'équivalence de la relation \mathcal{R}_{FC} sont désignées par les *composantes fortement connexes* de G .

Un graphe est *fortement connexe* si la relation \mathcal{R}_{FC} ne possède qu'une seule classe d'équivalence.

Forte connexité et composantes fortement connexes (suite)

Les classes d'équivalence pour \mathcal{R}_{FC} forment une partition des sommets telle que, pour tout couple de sommets (u, v) dans une même composante, $u\mathcal{R}_{FC}v$, *i.e.* il existe un chemin de u à v et de v à u .

Pour l'exemple, il y a 3 classes d'équivalence

$\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{FC}}(1) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{FC}}(4) = \{4, 5\}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{FC}}(6) = \{6\}$. Elles constituent les composantes fortement connexes de G . G n'est donc pas fortement connexe.

CRFC (i) : l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir de i qui peuvent atteindre i un graphe fortement connexe est un caractéristique propre au graphe orienté :
- il faut qu'à partir de n'importe quel sommet on puisse atteindre tout les autres

Quel(s) arcs(s) faut-il rajouter au minimum pour obtenir un graphe fortement connexe ?

Rappels sur les relations d'ordre

Soit \mathcal{R} une relation définie dans un ensemble V .

Definition

\mathcal{R} est une *relation d'ordre* sur V si

- \mathcal{R} est *réflexive*,
- \mathcal{R} est *antisymétrique* : si $x\mathcal{R}y$ et si $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$,
- \mathcal{R} est *transitive*.

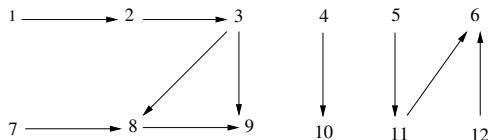
Un ordre est *total* si tous les éléments sont comparables, *i.e.* pour tout couple $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}v$ ou $v\mathcal{R}u$.

Un ordre partiel *partiel* est un ordre qui n'est pas total.

Ordre associé à un graphe orienté sans circuit

Definition

Pour tout graphe orienté sans circuit $G = (V, A)$, on peut associer la relation \leq définie par : pour tout couple de sommets $(u, v) \in V^2$, $u \leq v$ si il existe un chemin de u à v dans G .



$1 \leq 1$ $1 \leq 9$ $5 \leq 6$
5 et 12 sont incomparables

Ordre associé à un graphe orienté sans circuit

Theorem

Si $G = (V, A)$ est un graphe orienté sans circuit alors la relation \leq est une relation d'ordre.

Remarque

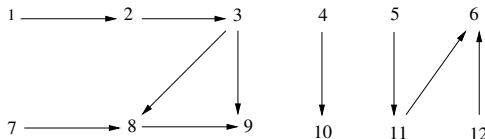
- il est nécessaire que le graphe soit sans circuit pour que la relation soit antisymétrique,*
- l'ordre \leq peut être total ou partiel.*

Tri (ou ordre) topologique

Definition

Soit G un graphe orienté sans circuit. Un *tri topologique* de G est une liste (u_1, \dots, u_n) des sommets de G telle que :

$i < j \Rightarrow$ **u_j n'est l'ancêtre d'aucun élément le précédant**
il n'y a pas de chemin de u_j à u_i .



$(1, 7, 4, 10, 2, 5, 12, 11, 6, 3, 8, 9)$ est un tri topologique

$(1, 7, 4, 10, 2, 5, 8, 12, 11, 6, 3, 9)$ n'en est pas un.

Rang d'un sommet

Definition

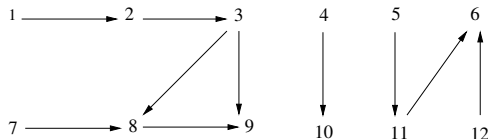
Soit G un graphe orienté sans circuit. Le *rang* d'un sommet u est défini récursivement :

$$\text{rang}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \text{ n'a pas de prédécesseur} \\ 1 + \max\{\text{rang}(v) \mid v \text{ prédécesseur de } u\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Cette définition a un sens car le graphe est sans circuit.

Exemple du rang d'un sommet



| u | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| rang(u) | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 |

Existence d'un tri topologique

Theorem

Si un graphe orienté est sans circuit alors il admet un tri topologique.

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemma

Si G est un graphe orienté sans circuit ayant n sommets alors :

- il existe u_1, \dots, u_n tels que $\text{rang}(u_1) \leq \dots \leq \text{rang}(u_n)$*
- si $\text{rang}(u_1) \leq \dots \leq \text{rang}(u_n)$ alors (u_1, \dots, u_n) est un tri topologique.*

Principe de calcul d'un tri topologique

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans circuit.

Initialement L est une liste vide et tous les sommets sont à traiter.

- Pour tout sommet u on pose $\Delta(u) = d^-(u)$ (demi-degré entrant de u).
- On choisit un sommet u tel que $\Delta(u) = 0$:
 - on ajoute u à L ,
 - pour chaque successeur v de u on pose $\Delta(v) = \Delta(v) - 1$,
 - le sommet u n'est plus à traiter.
- On réitère l'étape précédente tant qu'il y a des sommets à traiter.