# Module LU2IN003 Graphes non orientés semaine 8

## Exercice(s)

### Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |E_0|$.

**Question 1**
Dessiner le graphe $G_0$. Que valent $n_0$ et $m_0$ ?

**Question 2**
Quels sont les sommets adjacents au sommet 3 ? les arêtes incidentes au sommet 3 ?

**Question 3**
Quel est le degré de chacun des sommets de $G_0$ ? Que vaut la somme des degrés ?

**Question 4**
Donner une chaîne élémentaire de $G_0$ et un cycle élémentaire de $G_0$, ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arêtes) respectives.

**Question 5**
Le graphe $G_0$ est-il connexe ? Justifier la réponse.

### Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

**Question 1**
Montrer que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, où $d(v)$ désigne le degré du sommet $v$ dans le graphe $G$.

**Question 2**
Exprimer le nombre maximum d'arêtes de $G$ en fonction de $n$.

**Question 3**

1. Démontrer que tout graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair.
2. Si tous les sommets de $G$ sont de degré 1, que peut-on dire de $n$ ? Caractériser un tel graphe.

**Question 4**
Montrer par l'absurde que tout graphe à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux sommets de même degré.

## Exercice 3 – Séquences graphiques

Soit une séquence de $n$ entiers $D$. On dit que $D$ est *graphique* si il existe un graphe non orienté $G_D = (\{1, \ldots, n\}, E_D)$ dont les $n$ sommets ont exactement les degrés de la séquence. On observe qu'une condition nécessaire est que ces valeurs soient positives ou nulles.

### Question 1

Pour chaque séquence qui suit, dire si elle est graphique ou non. Si la réponse est oui, dessiner un tel graphe. Justifier les réponses négatives.

| | | |
|---|---|---|
| a) $(1; 2; 2; 4; 5; 5)$ | b) $(2; 2; 2; 2; 2; 2)$ | c) $(1; 1; 1; 1; 1; 1)$ |
| d) $(3; 3; 3; 3; 3; 5)$ | e) $(2; 2; 2; 3; 3; 3)$ | f) $(0; 2; 2; 3; 4; 5)$ |
| g) $(5; 5; 5; 5; 2; 2)$ | h) $(6; 2; 2; 2; 2; 2)$ | i) $(5; 1; 1; 1; 1; 1)$ |

### Question 2

On suppose que les valeurs de la séquence $D = (d_1, \ldots, d_n)$ ont été ordonnées de sorte que $d_1 \geq d_2 \geq \ldots d_n$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$, $d(i) = d_i$ pour tout graphe $G$ associé à $D$.

Montrez que, si $D$ est graphique, on peut lui associer un graphe $G = (V, E)$ tel que les sommets adjacents à 1 sont $\Gamma_G(1) = \{2, \ldots, 1 + d_1\}$. Pour cela, on peut imposer que le graphe $G$ associé à $D$ vérifie que la somme $\sum_{j \in \Gamma_G(1)} d_G(j)$ soit maximal et faire un raisonnement par l'absurde.

### Question 3

En déduire que si $D = (d_1, \ldots, d_n)$ est graphique, alors $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ est graphique.

### Question 4

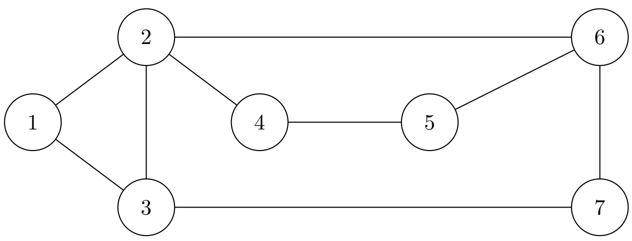
Réciproquement, on suppose que $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ est graphique. Démontrez que $D$ est graphique.

### Question 5

En déduire le principe d'un algorithme récursif qui teste si une liste $D$ est graphique.

## Exercice 4 – Sous-graphe, graphe induit

On considère le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ :




### Question 1

Dessiner trois sous-graphes de $G_1$ différents les uns des autres. Pour chacun d'entre eux, dire s'il est le graphe induit par un sous-ensemble de sommets.

### Question 2

Dessiner le graphe induit par $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 5, 7\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 3, 4, 7\}$. Quel est le graphe induit par $V_1$ ?

## Exercice 5 – Chaînes et cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

**Question 1**
Montrer que si il existe une chaîne entre deux sommets $u$ et $v$, alors il existe une chaîne élémentaire entre $u$ et $v$ (Lemme de Koenig).

**Question 2**
On suppose que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V$. Montrer par une preuve directe et constructive que $G$ contient un cycle élémentaire.

**Question 3**
Soit $k \leq n - 1$. On suppose que $d(v) \geq k$ pour tout $v \in V$. Montrer que $G$ contient une chaîne élémentaire de longueur $k$.

**indication :** faire une récurrence sur k.

**Question 4**
On suppose que $G$ contient exactement deux sommets $x$ et $y$ de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans $G$ entre $x$ et $y$.

**indication :** faire une récurrence sur m.

## Exercice 6 – Connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

**Question 1**
On suppose que $G$ contient un sommet de degré $n - 1$. Montrer que $G$ est connexe.

**Question 2**
Montrer que deux chaînes de longueur maximale dans un graphe connexe ont au moins un sommet en commun.

**Question 3**
Montrer que si $G$ est connexe et contient un sommet $x$ de degré 1 alors le graphe induit par $V' = V \setminus \{x\}$ est connexe.

**Question 4**
Montrer que si $G$ est connexe et contient un cycle élémentaire $\mathcal{C}$ et si $e$ est une arête de $\mathcal{C}$ alors le sous-graphe $G' = (V, E \setminus \{e\})$ est connexe.

**Question 5**
Montrer que si $m > (n - 1)(n - 2)/2$ alors $G$ est connexe.

**indication :** faire une récurrence sur n.

**Question 6**
On suppose que $d(v) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ pour tout $v \in V$. Montrer que $G$ est connexe.

**indication :** faire un raisonnement par l'absurde.

## Exercice 7 – Complémentaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
Le *complémentaire* du graphe $G$ est le graphe $G_C = (V, E_C)$, avec $E_C = \{\{x, y\} \mid x \in V, y \in V \text{ et } \{x, y\} \notin E\}$.
Deux graphes sont *isomorphes* s'ils sont identiques, à une renumérotation près des sommets.
Un graphe est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complémentaire.

### Question 1

On considère le graphe $G_0$ de l'exercice 1 : $G_0 = (V_0, E_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.

Représenter le complémentaire de $G_0$. Le graphe $G_0$ est-il auto-complémenaire ?

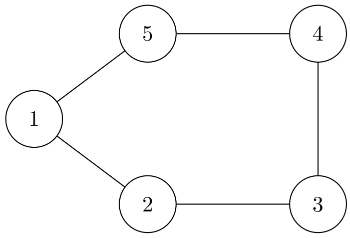
### Question 2

On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

1. Combien $G_C$ a-t-il d'arêtes ?
2. En déduire que, si $G$ est auto-complémentaire alors $n$ ou $n - 1$ est un multiple de 4 et $m = n(n - 1)/4$.

### Question 3

On considère le graphe $G_2$ :



Le graphe $G_2$ est-il auto-complémentaire ?
Le graphe $G_2$ et son complémentaires sont isomorphes. $G_2$ est auto-complémentaire.

### Question 4

Montrer que l'un au moins des deux graphes, $G$ ou son complémentaire, est connexe.

## Exercice 8 – Nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple

### Question 1

Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple à 4 sommets ? 5 sommets ? Justifiez votre réponse.

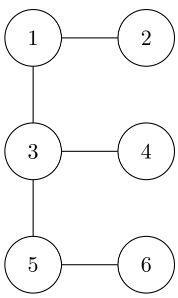
### Question 2

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple à $n$ sommets. Démontrez par récurrence sur $n \geq 1$ que le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple de $n$ sommets est $m(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

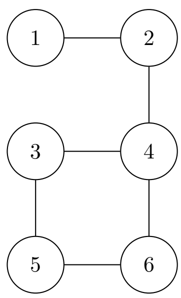
## Exercice 9 – Quelques exemples et propriétés autour des arbres

### Question 1

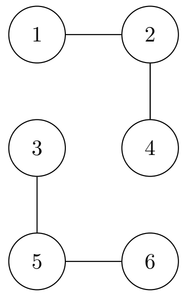
Est-ce que les graphes non orientés suivants sont des arbres ? Justifiez vos réponses. Dans la négative, quelle(s) arête(s) doit on enlever/rajouter pour obtenir un arbre ?



$G_1$



$G_2$




$G_3$

### Question 2
Donnez tous les arbres différents à 1, 2, 3, 4 ou 5 sommets.

### Question 3

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est connexe sans être minimal connexe. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est connexe mais qui n'est pas minimal connexe contient au moins un cycle élémentaire.

### Question 4

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique n'est pas connexe.

## Exercice 10 – Propriétés sur les arbres

Le but de cet exercice est de démontrer des propriétés classiques sur les arbres.

### Question 1
Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe $G$ connexe.
2. Montrez par l'absurde que si $T$ est connexe avec $m = n - 1$, alors $T$ est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que $T$ n'est pas minimal connexe.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

### Question 2
Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe $G$ sans cycle élémentaire.
2. Montrez par l'absurde que si $T$ est sans cycle élémentaire avec $m = n - 1$, alors $T$ est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que $T$ n'est pas maximal acyclique.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

### Question 3
Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si $T$ est maximal acyclique, alors entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique (il s'agit de l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème général sur les arbres).

### Question 4

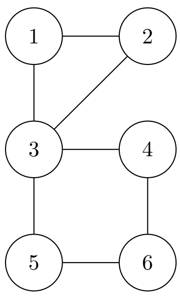
Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique, alors $T$ est un arbre (il s'agit de l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème général sur les arbres).

## Exercice 11 – Arbres couvrants

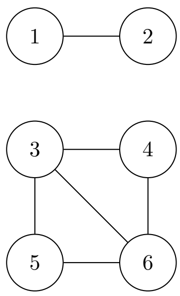
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un arbre couvrant $T = (V, F)$ est un sous-graphe de $G$ qui est un arbre.

### Question 1

Donnez si c'est possible, un arbre couvrant des graphes $G_1$ et $G_2$.




$G_1$




$G_2$

### Question 2

Démontrez que si $G$ possède un arbre couvrant, alors $G$ est connexe.

### Question 3

Soit $C$ un cycle élémentaire d'un graphe connexe $G = (V, E)$ et $e = \{x, y\}$ une arête de $C$. Montrez que le sous-graphe partiel $G' = (V, E - \{e\})$ est connexe.

### Question 4

Soient $G$ un graphe connexe $H = (V, F)$ un sous-graphe de $G$ connexe avec un nombre minimum d'arêtes. Démontrez par l'absurde que $H$ ne contient pas de cycle élémentaire en utilisant la question précédente. En déduire que si $G$ est connexe, alors $G$ possède un arbre couvrant.

## Exercice 12 – Représentation d'un graphe non orienté simple

### Question 1

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes non orientés simples.

| Définition ensembliste | Matrice sommet-sommet | Matrice sommet-arête | Liste d'adjacence |
|---|---|---|---|
| $V = \{1, 2, 3, 4\}$ <br> $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\},$ <br> $\{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$ | | | |
| | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | | |
| | | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | |
| | | | $-1 \to \ [2]$ <br> $-2 \to \ [1, 3]$ <br> $-3 \to \ [2, 4, 5]$ <br> $-4 \to \ [3]$ <br> $-5 \to \ [3]$ |

### Question 2
Que doit vérifier une matrice carrée $M$ pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe non orienté ? Même question pour une matrice $R$ sommet-arête ou une liste d'adjacence $L$.

## Exercice 13 – Primitives d'un graphe non orienté
Le but de cet exercice est d'évaluer la complexité de primitives sur des graphes non orientés simples en fonction de leur représentation en mémoire (matrice sommet-sommet, matrice sommet-arête ou listes d'adjacence). Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté simple. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

### Question 1
Décrire en une ou deux phrases le principe d'un algorithme qui, pour tout sommet $x$ en paramètre, renvoie le degré $d(x)$ en fonction de la représentation. Evaluez sa complexité.

### Question 2
Décrire en deux phrases le principe d'un algorithme qui construit la liste des arêtes d'un graphe en fonction de la représentation utilisée. La liste obtenue est stockée dans une liste doublement chaînée, ce qui permet d'insérer en fin de liste en $\Theta(1)$.