$2I003$ TD 1 Rappels mathématiques

Exercice 1 – Logique d'automne

On considère la proposition suivante : « A l'automne, s'il a plu pendant la nuit, je vais toujours ramasser des champignons ».

Question 1

Donnez cette proposition sous la forme logique $(a \text{ et } b) \Rightarrow c$.

Question 2

Donnez « en français »la contraposée de cette proposition.

Question 3

Donnez « en français »la négation de cette proposition.

Exercice 2 – Logique élémentaire

On considère la propriété P suivante : « Tout élève qui finit son assiette aura un dessert ou un bonbon ». Soit également $\mathcal{E}$ l'ensemble des élèves, et les prédicats suivants pour tout $x \in \mathcal{E}$:

— $a(x) = x$ termine son assiette ;
— $b(x) = x$ a un bonbon ;
— $c(x) = x$ a un dessert.

Question 1

Mettre P sous la forme d'une formule logique. Transformez la pour ne plus avoir que les opérateurs $\{\text{non}, \text{et}, \text{ou}\}$. Exprimez la négation et la contraposée sous forme logique et en français.

Question 2

Indiquez parmi les formules suivantes celles qui sont équivalentes :

1. $a(x) \Rightarrow (b(x) \text{ ou } \text{non}(c(x))$;
2. $\text{non}(b(x)) \Rightarrow (a(x) \text{ et } c(x))$;
3. $c(x) \Rightarrow (a(x) \text{ ou } b(x))$;
4. $\text{non}(b(x)) \Rightarrow (a(x) \text{ ou } \text{non}(c(x)))$;
5. $\text{non}(a(x) \text{ et } c(x)) \Rightarrow b(x)$;
6. $((a(x)) \text{ et } c(x)) \Rightarrow b(x)$.

Exercice 3 – Preuve par contraposée, preuve par l'absurde, réciproque

Question 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez par contraposée que, si n^2 est pair, alors n est pair.

2. Quelle est la réciproque ? Est-elle vérifiée ?
3. Quelle est la réciproque de la contraposée ? Est-elle vérifiée ?

Question 2
Démontrez par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Question 3
Soit $n > 0$. Démontrez par l'absurde que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 4 – Preuve par l'absurde

Question 1
On considère n ensembles $E_1, \ldots, E_n$ d'entiers tels que ces ensembles soient distincts deux à deux. Montrez la propriété suivante :
$\mathcal{P} =$« Au moins l'un des ensembles $E_1, \ldots, E_n$ ne contient aucun des $n - 1$ autres ensembles ».

Exercice 5 – Suites récurrentes homogènes

Question 1
Calculer les suites récurrentes :

1. $u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2}$ si $n \geq 2$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$
2. $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ si $n \geq 2$, $u_0 = 1$, $u_1 = 4$
3. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (suite de Fibonacci).
4. $u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}$ si $n \geq 3$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$.

Exercice 6 – Suites récurrentes non homogènes

Question 1
Calculer par substitution les suites récurrentes :

1. $u_n = u_{n-1} + n$ si $n \geq 1$, $u_0 = 0$
2. $u_n = 2u_{n-1} + 1$ si $n \geq 1$, $u_0 = 2$
3. $u_n = 2u_{n-1} + 2^n$ si $n \geq 1$, $u_0 = 3$

Question 2
On considère dans cette question la suite $u_n = u_{\frac{n}{2}} + 5$ pour $n = 2^k, k > 0$ et $u_1 = 3$. Calculer la suite u_n.

Question 3
Soit maintenant $u_n = 2u_{\frac{n}{2}} + 5$ pour $n = 2^k, k > 0$ et $u_1 = 3$. Calculer la suite u_n.

Exercice 7 – Récurrence faible

Question 1
Montrer par récurrence sur n que :

1. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8 – Exponentielle et récurrence faible

Question 1
Démontrez par récurrence faible que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Question 2
Soit maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$: $2^n > n^2$.

1. Montrez que, pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ est-elle vérifiée ?

Exercice 9 – Géométrie et récurrence
On considère un polygone (convexe) à n cotés. Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs.

Question 1
Montrer que le nombre de diagonale d'un polygone à n côtés, $n \geq 4$, est donné par la formule $d(n) = \frac{n^2-3n}{2}$.

Exercice 10 – Importance de la base

Question 1
On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: toute application f de $\{0, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie $f(0) = 0$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad [\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]$.

Peut-on en déduire que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Question 2
On considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$: toute application définie sur un ensemble à n éléments est constante.

Le raisonnement suivant est-il correct ? Pourquoi ?

"$\mathcal{Q}(1)$ est vraie car toute application définie sur un singleton est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Soit $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble ayant $n+1$ éléments et f une application de E dans un ensemble F. La restriction de f à $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ est une application définie sur un ensemble à n éléments donc elle est constante : $\exists a \in F$ tel que $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_{n-1}) = a$. La restriction de f à $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est une application définie sur un ensemble à n éléments donc elle est constante : $\exists b \in F$ tel que $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = b$. Comme $f(x_1) = a$ et $f(x_1) = b$, on obtient $a = b$. Par conséquent, $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = a$ et f est constante sur E.

On a donc montré que : $\forall n \geq 1 \quad [\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1)]$.

On en conclut que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$."

Exercice 11 – Cherchez l'erreur !

Question 1
Nous allons "démontrer" dans le texte suivant que tous les chevaux sont de la même couleur sur Terre !

Base : Supposons que la planète Terre ne contienne qu'un seul cheval : donc l'hypothèse de couleur unique pour tous les chevaux est bien vérifiée pour un cheval.

Induction : Supposons que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour un nombre $n \geq 1$ de chevaux : c'est-à-dire que tout ensemble de n chevaux sont tous de la même couleur.
Considérons un ensemble E de $n+1$ chevaux.
Soient deux chevaux distincts, nommés c_1 et c_2 dans cet ensemble E de $n+1$ chevaux (il en existe bien deux distincts car $n \geq 1$). Posons alors

$$F_1 = E \setminus \{c_1\} \quad \text{et} \quad F_2 = E \setminus \{c_2\}.$$

On peut remarquer que ces deux ensembles F_1 et F_2 contiennent tous deux n chevaux : donc tous les chevaux de F_1 sont d'une même couleur, notons-la o_1, et tous les chevaux de F_2 sont d'une même couleur, notons-la o_2. Or le cheval c_1 est dans F_2 donc $o_1 = o_2$. Donc l'ensemble E contient des chevaux tous de la même couleur.

Conclusion : En utilisant cette propriété de récurrence pour l'ensemble des chevaux de toute la planète, on vient donc de prouver que tous les chevaux sont de la même couleur !

Étant donné qu'il est bien connu que les chevaux ont des couleurs bien différentes sur la planète... Où est l'erreur du raisonnement précédent ?

Exercice 12 – Récurrence forte

On considère la suite G_n définie par $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + 1$ si $n \geq 2$, $G_0 = 0$, $G_1 = 0$.

Question 1
La suite de Fibonacci F_n a été définie en cours et dans l'exercice 5. Montrer par récurrence forte la propriété $\Pi(n)$: $G_n = F_{n+1} - 1$ pour $n \geq 0$. En déduire la valeur de G_n.

Question 2
Montrez que tout entier peut s'écrire comme une somme finie de puissances de 2 toutes distinctes.

Question 3
Montrer par récurrence forte sur n que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Question 4
Montrer l'unicité du couple (p, q) tel que $n = 2^p(2q+1)$, en faisant un raisonnement par l'absurde (et non par récurrence).

Exercice 13 – Preuve par l'absurde, récurrence faible et forte

On rappelle que un nombre premier est un entier $n > 1$ qui admet admet exactement deux diviseurs : 1 et lui même n.

Question 1
Démontrez par récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier (qui peut être lui même).

Question 2
Démontrez qu'il existe une infinité de nombres premiers en faisant une preuve par l'absurde.

Question 3
Démontrez qu'il existe une infinité de nombres premiers en faisant une preuve directe utilisant une récurrence faible.

Exercice 14 – Récurrence faible ou récurrence forte ?

Question 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer par récurrence forte sur n que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 2$, exprimer u_n en fonction du seul u_{n-1} et montrer par récurrence faible sur n que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Question 2

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \prod_{i=0}^{n-1} v_i$ si $n \geq 1$ et $v_0 = 2$.

1. Montrer par récurrence forte sur n que $v_n = 2^{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 2$, exprimer v_n en fonction du seul v_{n-1} et montrer par récurrence faible sur n que $v_n = 2^{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 15 – Un autre exercice sur récurrence faible/forte

Question 1

Montrer par récurrence faible sur n que : $\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+1)! = (n+1)! - 2$ si $n \geq 1$.

Question 2

0n considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer par récurrence forte sur n que $u_n = \frac{(n+1)!}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $n \geq 2$, exprimer u_n en fonction du seul u_{n-1} et montrer par récurrence faible sur n que $u_n = \frac{(n+1)!}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 16 – Récurrence forte

La suite de Fibonacci F_n a été définie et calculée dans l'exercice 5.

Question 1

Montrer par récurrence sur n que

$$1 + \sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

Question 2

On considère la suite u_n définie par $u_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)u_i$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 1$.

Montrer que $u_n = F_{2n}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 17 – Ordre de grandeur en O, Ω et Θ

Question 1
Démontrer que

(i) $n^2 \in O(10^{-5}n^3)$

(ii) $25n^4 - 19n^3 + 13n^2 \in O(n^4)$

(iii) $2^{n+100} \in O(2^n)$

Question 2
Donner les relations d'inclusion entre les ensembles suivants : $O(n \log n)$, $O(2^n)$, $O(\log n)$, $O(1)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$ et $O(n)$.

Question 3
Démontrer que

(i) $3n^4 - 5n^3 \in \Omega(n^4)$

(ii) $2^n \in \Omega(n^2)$

Question 4
Donner sans démonstration les relations d'inclusion entre les ensembles suivants : $\Omega(n \log n)$, $\Omega(2^n)$, $\Omega(\log n)$, $\Omega(1)$, $\Omega(n^2)$, $\Omega(n^3)$ et $\Omega(n)$.

Question 5

Quelles sont les relations éventuelles d'inclusion entre les ensembles suivants ? Justifiez votre réponse sans démonstration.

(i) $\Theta(n^3)$ et $\Omega(n^2)$

(ii) $O(n^2)$ et $\Omega(n^3)$

(iii) $O(n^2)$ et $\Omega(n^2)$

Exercice 18 – Ordre de grandeur et maximum

Soient $f, g, : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Question 1
Montrer que $f(n) + g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$.

Question 2
Montrer que $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$.

Exercice 19 – Suites récurrentes et ordres de grandeur

Le but de cet exercice est de reprendre les suites étudiées dans l'exercice 6 pour en étudier leur ordre de grandeur quand n tend vers l'infini.

Question 1
A partir de la résolution des trois suites suivantes, indiquez leur ordre de grandeur quand n tend vers l'infini :

1. $u_n = u_{n-1} + n$ si $n \geq 1$, $u_0 = 0$
2. $u_n = 2u_{n-1} + 1$ si $n \geq 1$, $u_0 = 2$

3. $u_n = 2u_{n-1} + 2^n$ si $n \geq 1$, $u_0 = 3$

Question 2
On considère dans cette question la suite $u_n = u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 5$ et $u_1 = 3$.

1. Quel est l'ordre de grandeur de u_n pour si n est une puissance de 2 ?
2. Démontrez par récurrence forte que la suite u_n est croissante.
3. En déduire l'ordre de grandeur de u_n dans tous les cas.

Question 3
Reprendre la question précédente pour la suite $u_n = 2u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 5$ pour $n = 2^k, k > 0$ et $u_1 = 3$.