TD 1

Exercice 1

À l'automne, s'il a plu pendant la nuit, je vais toujours ramasser des champignons.

1) (a et b) => c

a = « automne »

b = « pluie la nuit »

c = « ramasser des champignons »

2) Rappel : $\boxed{\text{Contraposée de } A \Rightarrow B : \text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)}$

syntaxe : A et B : $A \wedge B$

A ou B : $A \vee B$

non(A) : $\neg A$

Rappel

$\boxed{\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b}$

$\neg c \Rightarrow \neg a$ ou $\neg b$

3) $\neg(a \wedge b \Rightarrow c)$

$a \wedge b \wedge \neg c$

- $A \Rightarrow B : \neg A \vee B$
- $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$

↳ on a A et pourtant on n'a pas B.

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$$
$$\equiv \neg(\neg A) \wedge \neg B$$
$$\equiv A \wedge \neg B$$

Exercice 2

P = Tout élève ($\forall x \in \mathcal{E}$) qui ne finit pas son assiette ($a(x)$) aura un dessert ($c(x)$) ou un bonbon ($b(x)$).

$a(x)$ = x termine son assiette

$b(x)$ = x a un bonbon

$c(x)$ = x a un dessert

$\mathcal{E}$ ensemble des élèves

si... alors... $\Rightarrow$

Q1

$$P = \forall x \in E \quad a(x) \Rightarrow \big(c(x) \vee b(x)\big)$$

⚠ $a(x) \Rightarrow c(x) \vee b(x) \overset{?}{\equiv} \big(a(x) \Rightarrow c(x)\big) \vee b(x)$

$$\neg P \equiv \exists x \in E \quad \neg\big(a(x) \Rightarrow c(x) \vee b(x)\big)$$

$$P = \underbrace{\forall x}\ Q$$

$$\neg P \equiv \exists x \in E \quad a(x) \wedge \neg c(x) \wedge \neg b(x)$$

Rappel

$$\boxed{\neg(\forall x\, Q) \equiv \exists x\ \neg Q}$$

Il existe un étudiant qui finit son assiette et qui n'a pas de dessert ni de bonbon.

Contraposée de P : $\forall x \big(\neg c(x) \wedge \neg b(x)\big) \Rightarrow \neg a(x)$

Tout étudiant qui n'a ni dessert ni bonbon n'a pas fini son assiette.

Q2. Mq 1 et 6 sont équivalents

· Pour le MIo2 : trouver les équivalents parmi 2, 3, 4, 5.

[· Développer les "⇒"
 Développe les "non"

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

1. $a(x) \Rightarrow (b(x) \vee \neg c(x))$

$\equiv \underline{\neg a(x) \vee b(x) \vee \neg c(x)}$

6. $(a(x) \wedge c(x)) \Rightarrow b(x) \equiv \underline{\neg a(x) \vee \neg c(x) \vee b(x)}$

Donc 1. et 6. sont équivalents.

Exercice 3

Q1

X est pair $\Leftrightarrow \exists k \; X = 2k$
X est impair $\Leftrightarrow \exists k \; X = 2k+1$

1) $\underline{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$

Contraposée : $(\neg n \text{ pair}) \Rightarrow (\neg n^2 \text{ pair})$

$\equiv \underline{n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}}$

Rappel : Démontrer $A \Rightarrow B$
Méthode : 1. On suppose A
2. On montre qu'on a B

· Soit n impair $\longrightarrow \exists k \; \underline{n = 2k+1}$

· Mq n^2 impair $\longrightarrow$ Mq $\exists k' \; n^2 = 2k'+1$

$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Conclusion : **Donc** n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Donc, par contraposée,

n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

2) Réciproque de n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

. n pair $\Rightarrow n^2$ pair

. Soit n pair

$\exists k \; n = 2k$

$n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$

Donc l'implication est vérifiée

3) Pour le 11/02

$\boxed{Q2}$ Rappel : montrer par l'absurde A

$\Leftrightarrow$ suppose $\neg A$ et mq on arrive à quelque chose de non vérifié.

On suppose $\sqrt{2}$ rationnel. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

alors $\exists\, p \geq 0, q > 0$ $pgcd(p,q) = 1$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $p^2 = 2q^2$

donc p^2 est pair donc (Q1) : p est pair $p = 2k$

donc $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2k^2$

donc q^2 est pair donc (Q1) q est pair

$\begin{cases} \text{pgcd}(p,q) = 1 \\ p \text{ est pair} \\ q \text{ est pair} \end{cases} \longrightarrow$ absurde

Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel
$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

$\boxed{Q3}$ Pour le M102   n carré $\Rightarrow$ 2n n'est pas carré

Par l'absurde, Mq $\neg$(n carré $\Rightarrow$ 2n n'est pas carré)
$\equiv$ (n carré) $\wedge$ (2n est carré)

Supposons n tel que $\begin{cases} n \text{ est un carré} \\ 2n \text{ est un carré} \end{cases}$

Exercice 5

Rappel : calcul de u_n lorsque

$$\begin{cases} u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ u_0 \\ u_1 \end{cases}$$

1. Ecrire le polynôme caractéristique :

$$r^2 - \alpha r - \beta$$

2. Calculer ses racines : $\Delta = \frac{\alpha^2 + 4\beta}{2}$

. $\Delta > 0$: 2 racines $r_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$

$r_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$

. $\Delta = 0$: 1 racine
$r = \alpha/2$

. $\Delta < 0$: pas de racine, on ne peut pas conclure

3. . 2 racines r_1 et r_2 : $u_n = A r_1^n + B r_2^n$

. 1 racine : $u_n = A r^n + B \underline{n} r^n$

4. Calculer A et B à partir des conditions initiales

$\boxed{Q1}$ 1) $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2} \quad , n \geq 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$

. Polynôme caractéristique : $r^2 - r - 6$

. racines : $\Delta = (-1)^2 + 4 \times 6 = 25 \geq 0$

donc il y a deux racines : $r_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2}$, $r_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2}$

$\sqrt{25} = 5$

$r_1 = -2$

$r_2 = 3$

. Donc $u_n = A r_1^n + B r_2^n$

i.e. $u_n = A(-2)^n + B . 3^n$

. Conditions initiales :

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2B + 3B = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = 1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{u_n = -1/5 \times (-2)^n + 1/5 \times 3^n}$

2, 3, 4 : pour le M102

Exercice 6

Q 1

Calcul par substitution : à appliquer quand u_n est de cette forme

$$\begin{cases} u_n = \alpha u_{n-1} + \beta_n \quad n \geq 1 \\ u_0 \end{cases}$$

$\leadsto$ on calcule u_n "à la main" en développant tous les termes jusqu'à u_0.

Cas particulier :

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta \longrightarrow$$ suite arithmétique, appliquer le cours pour la calculer

$$= \alpha(\alpha u_{n-2} + \beta) + \beta$$

$$= \alpha^2 u_{n-2} + \alpha\beta + \beta$$

$$= \alpha^2(\alpha u_{n-3} + \beta) + \alpha\beta + \beta$$

$$= \alpha^3 u_{n-3} + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta$$

$$= \alpha^4 u_{n-4} + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta + \alpha^1\beta + \beta\alpha^0$$

$$= \dots$$

$$= \alpha^i u_{n-i} + \alpha^{i-1}\beta + \alpha^{i-2}\beta + \dots + \alpha\beta + \beta$$

$$= \dots$$

$$\overset{i=n}{=} \alpha^n u_{n-n} + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta + \beta$$

→ On va jusqu'à u_0 pour arriver à une formule qui ne dépend plus de u_k.

Dans le cas particulier $\beta_n = \beta$

$$u_n = \alpha^n u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \beta.$$

$\boxed{Q1}$

1) $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + n \text{ si } n \geq 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} u_n &= \underline{u_{n-1}} + n \\ &= \underline{u_{n-2}} + (n-1) + n \\ &= \underline{u_{n-3}} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= u_{n-4} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \dots \\ &= \underline{u_3} + 4 + 5 + \dots + (n-1) + n \\ &= \underline{u_2} + 3 + 4 + 5 + \dots + n \\ &= u_1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \\ &= \underbrace{u_0}_{=0} + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n. \end{aligned}$$

Commence à développer et en déduire la forme finale

Donc $u_n = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$

$S = \sum_{i=1}^{n} i$

$\oplus \begin{array}{l} 1+2+\dots+n \\ n+n-1+\dots+1 \end{array} \Big\} 2S$

$(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)$

$\rightarrow 2S = n(n+1)$

donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$ 1 est constant c'est facile

pour le M102

3) pour le M102

$\boxed{Q2}$

$\begin{cases} u_n = u_{\frac{n}{2}} + 5, \text{ pour } n = 2^k, k > 0 \\ u_1 = 3 \end{cases}$

Méthode : se ramener à une suite indicée "normalement"

On écrit u_n en remplaçant n par 2^k

l'énoncé

$u_n = u_{n/2} + 5$, $n = 2^k$ le changement est naturel

$\underbrace{u_{2^k}}_{v_k} = \underbrace{u_{2^{k-1}}}_{v_{k-1}} + 5$

On pose $\begin{cases} v_k = v_{k-1} + 5 & k \geq 1 \\ v_0 = u_1 = 3 \end{cases}$

Alors $\boxed{v_k = u_{2^k} = u_n \quad , \quad k = \log_2(n)}$

Traduction du problème en un problème qu'on sait résoudre.

→ Calculer v_k ie exprimer v_k en fonction de k.

→ En déduire u_n

pour le 11/02

$\boxed{Q3}$ pour le 11/02

TD 1 suite

Exercice 17

Q1

$f(n) \in O(g(n))$:

- $\exists k \; \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |f(n)| \leq k\, g(n)$

"f est dominée par g"

(i) Mq $n^2 \in O(10^{-5} n^3)$ (connaître cette méthode)

Trouver k et n_0 tq $\forall n \geq n_0 \quad n^2 \leq k\, 10^{-5} n^3$

$n^2 \leq n^3 \quad \forall n \geq 1$

Donc si on pose $k = 10^5$:

$$n^2 \leq \underbrace{k \cdot 10^{-5}}_{1} \cdot n^3 \quad \forall n \geq \underbrace{1}_{n_0}$$

. Autre méthode :

$\exists k \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |f(n)| \leq k\, g(n)$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{f(n)}{g(n)}$ est borné à partir d'un certain rang

Donc :

$$\boxed{\text{Si } \frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R} \quad \text{alors } f(n) \in O(g(n))}$$

/!\ La réciproque est fausse :

exemple | $\cdot f(n) = 1$ si n est pair
2 si n est impair
$\cdot\ g(n) = 1 \ \forall n$

$\frac{f(n)}{g(n)} =$ 1 si n est pair
2 si n est impair } pas de limite

Mais $f(n) = O(g(n))$
Car $\forall n \geq 1 \quad f(n) \leq 2 \times g(n)$.

Si $\frac{f(n)}{g(n)} \to \underline{\underline{\ell \neq 0}}$ alors $f(n) = \underline{\underline{\Theta}}(g(n))$

⚠ la réciproque est fausse. (même exemple)

$\boxed{Q1}$

(i) Mq $n^2 \in O(10^{-5} n^3)$

$$\frac{n^2}{10^{-5} n^3} = \frac{1}{10^{-5} n} \longrightarrow 0$$

donc $n^2 \in O(10^{-5} n^3)$

(ii) $\frac{25n^4 - 13n^3 + 13n^2}{n^4} \longrightarrow 25$

Donc $25n^4 - 13n^3 + 13n^2 \in O(n^4)$

(iii) $\frac{2^{\cancel{n}+100}}{2^{\cancel{n}}} = 2^{100} \longrightarrow 2^{100}$

Donc $2^{n+100} \in O(2^n)$.

Q2

ordre à connaître par coeur :

$$n \leq n^2 \leq n^3 \leq 2^n \quad \forall n \geq 1$$

Donc $O(n) \subseteq O(n^2) \subseteq O(n^3) \subseteq O(2^n)$

$$\frac{\log(n)}{n} \longrightarrow 0$$

Donc $O(\log(n)) \subseteq O(n)$

$$\frac{n\log(n)}{n^2} \longrightarrow 0 \text{ donc } O(n\log(n)) \subseteq O(n^2)$$

$$\frac{n}{n\log(n)} \longrightarrow 0 \text{ donc } O(n) \subseteq O(n\log(n))$$

Donc :

$$\boxed{O(\log(n)) \subseteq O(n) \subseteq O(n\log(n)) \subseteq O(n^2) \subseteq O(n^2) \subseteq O(2^n)}$$

Q3

$$f(n) \in \underbrace{\Omega(g(n))}_{\text{ensemble des fonctions qui dominent } g(n)} \iff g(n) \in O(f(n))$$

Définition : cf cours (à connaître !)

Condition suffisante :

$$\boxed{\text{Si } \frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow l \in \mathbb{R} \text{ alors } f(n) \in \Omega(g(n))}$$

(ii) $\frac{n^4}{3n^4-5n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$ donc $3n^4-5n^3 \in \Omega(n^4)$

et même, vu que $\frac{1}{3} \neq 0$, $3n^4-5n^3 \in \Theta(n^4)$

(iii) $\frac{n^2}{2^n} \longrightarrow 0$ donc $2^n \in \Omega(n^2)$

$\boxed{Q4}$ $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$

Donc les inclusions sont inversées :

$$\boxed{\Omega(2^n) \subseteq \Omega(n^3) \subseteq \Omega(n^2) \subseteq \Omega(n\log(n)) \subseteq \Omega(n) \subseteq \Omega(\log(n))}$$

$\boxed{Q5}$ pour le 18/02

Exercice 18

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\boxed{Q1}$ Mq $f(n)+g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$

⚠ On ne peut pas calculer la limite du quotient

→ Donc il faut se ramener à la définition de Θ.

Donc Mq $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$k_1 \max(f(n), g(n)) \underset{(1)}{\leq} f(n)+g(n) \underset{(2)}{\leq} k_2 \max(f(n), g(n))$$

(1) Majorer $\max(f(n), g(n))$ en fonction de $f(n)+g(n)$

$$\max(f(n), g(n)) \leq f(n)+g(n) \quad \forall n \geq 1$$

$$\boxed{\max(X, Y) \leq X+Y}$$

On pose $k_1 = 1$

(2) Majorer $f(n)+g(n)$ en fonction de $\max(f(n), g(n))$

$$\underbrace{f(n)}_{\leq \max(f(n), g(n))} + \underbrace{g(n)}_{\leq \max(f(n), g(n))} \leq 2\max(f(n), g(n))$$

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \max(f(n), g(n)) \leq f(n)+g(n) \leq 2\max(f(n), g(n))}$$

Donc $f(n)+g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Q2

Mq $O(f(n)+g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

Méthode : Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$

→ Pour montrer que 2 ensembles sont égaux, montrer les 2 inclusions est souvent plus facile.

* Mq $O(f(n)+g(n)) \subseteq O(\max(f(n), g(n)))$

Soit $h \in O(f(n)+g(n))$, mq $h \in O(\max(f(n), g(n)))$

made with ZITEBOARD

$h \in O(f(n)+g(n))$ $\quad (h(n) \geq n)$

Donc (définition) $\exists k_1 \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ h(n) \leq f(n)+g(n)$

alors $\forall n \geq n_0 \quad h(n) \leq 2\max(f(n), g(n))$

Donc par définition $h(n) \in O(\max(f(n), g(n)))$

Donc $\underline{O(f(n)+g(n)) \subseteq O(\max(f(n), g(n)))}$

De même, $O(\max(f(n), g(n))) \subseteq O(f(n)+g(n))$

car $\max(f(n), g(n)) \leq f(n)+g(n)$

Exercice 19

Q1 et Q3 pour le 18/02

$\boxed{Q2}$ $\begin{cases} u_n = u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 5 & \text{si } n = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ u_1 = 3 \end{cases}$

cf exercice 6 : $\underline{u_n = 3 + 5\log_2(n)}$ pour $n = 2^k$.

$\boxed{Q1}$

Donner l'ordre de grandeur de u_n

= trouver $u_n \in \Theta(\underbrace{\ldots}_{\text{à déterminer}})$

$u_n = 3 + 5\log_2(n)$ donc $u_n \in \Theta(\log_2(n))$ (pour $n = 2^k$)

car $5\log_2(n) \leq u_n \leq \underbrace{3\log_2(n) + 5\log_2(n)}_{8\log_2(n)}$

(définition de Θ)

De manière générale, une somme est du même ordre de grandeur que son terme dominant ♡

↳ utile pour résoudre Q1.

<u>autre méthode</u> $\dfrac{u_n}{\log_2(n)} = \dfrac{3+5\log_2(n)}{\log_2(n)}$

donc $\dfrac{u_n}{\log_2(n)} \longrightarrow 5 \neq 0$ donc $u_n \in \Theta(\log_2(n))$

2) $\boxed{(u_n) \text{ est croissante } \Leftrightarrow \forall\, u_{n+1} \geq u_n}$

$P(n) = u_{n+1} \geq u_n$

Mq $\forall n \geq 1$ $P(n)$ par récurrence forte sur n

$u_n = u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 5$.

- <u>Base</u> : $n = 1$, $u_2 = u_{\lceil \frac{2}{2} \rceil} + 5 = \underbrace{u_1}_{3} + 5 = \underbrace{8}_{>3}$

  $u_2 > u_1$ donc $P(1)$ est vérifiée.

- <u>Induction</u> : Soit $n \geq 2$

  On suppose $\forall k \leq n-1$ $P(k)$ est vérifié

  → récurrence forte

Montrons $P(n)$ i.e. $u_{n+1} \geq u_n$

$u_{n+1} = u_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + 5$, $u_n = u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 5$

Hypothèse de récurrence : $u_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} \geq u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ récurrence forte

Donc $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : $\begin{cases} \mathcal{P}(1) \text{ est vérifiée} \\ \forall n \geq 2 \ (\forall k \leq n-1 \ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n) \end{cases}$

donc $\forall n \geq 1 \ \mathcal{P}(n)$

donc (u_n) est croissante

Rappel : récurrence forte

- Base
- Induction : on suppose la propriété vraie jusqu'à $n-1$, on la démontre pour n
- Conclusion

3) $\begin{cases} u_n = 3 + 5\log_2(n) \text{ si } n = 2^k \\ (u_n) \text{ est croissante} \end{cases}$

On cherche à encadrer u_n.

Si $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ alors $2^k \leq n < 2^{k+1}$

Comme (u_n) est croissante.

$$u_{2^k} \leq u_n \leq u_{2^{k+1}}$$

$$3 + 5\log_2\left(2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}\right) \leq u_n \leq 3 + 5\log_2\left(2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1}\right)$$

$$\log_2(n) - 1 \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor \leq \log_2(n)$$

ne pas le "$\lfloor \ \rfloor$"

donc $\underbrace{3+5\log_2(\underbrace{2^{\log_2(n)-1}}_{n/2})}_{=3+5\log(1/2)+5\log(n)} \leq u_n \leq \underbrace{3+5\log_2(\underbrace{2^{\log_2(n)}}_{n})}_{=3+5\log(n)}$

donc $\boxed{u_n = \Theta(\log_2(n))}$

Car $\boxed{\frac{u_n}{\log_2(n)} \text{ est bornée}}$ ✓.

TD 1 suite

Exercice 6

2) $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 1 \text{ si } n \geq 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
u_n &= 2u_{n-1} + 1 \\
&= 2(2u_{n-2} + 1) + 1 \\
&= 2^2 u_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2u_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\
&= 2^3 u_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^3(2u_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^4 u_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \dots \\
&= 2^i u_{n-i} + 2^{i-1} + \dots + 2 + 1 \\
&= \dots \\
&\underset{i=n}{=} 2^n \underbrace{u_0}_{2} + \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k}
\end{aligned}$$

garder $2 \times 2 = 2^2$ au lieu d'écrire 4 permet de généraliser la multiplication.

Rappel $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$= \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

donc $u_n = 2^{n+1} + 2^n - 1$

$$= 2^n(2 + 1) - 1$$

donc $\boxed{u_n = 3 \times 2^n - 1}$

3) $\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 2^n, & n \geq 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

$$u_n = 2u_{n-1} + 2^n$$
$$= 2(2u_{n-2} + 2^{n-1}) + 2^n$$
$$= 2^2 u_{n-2} + 2^n + 2^n$$
$$= 2^2(2u_{n-3} + 2^{n-2}) + 2^n + 2^n$$
$$= 2^3 u_{n-3} + \underbrace{2^n + 2^n + 2^n}_{3\times}$$
$$= \dots$$
$$= 2^n \underbrace{u_0}_{3} + n \times 2^n$$

$$\boxed{u_n = (3+n)\,2^n}$$

Exercice 5

2) $u_n = (n+1) \times 2^n$

3) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Exercice 2

1 et 6 / 2 et 5 / 3 et 4

sont équivalents

TD 1 suite

Exercice 3

Q3 $n > 0$

Mq (n carré d'un entier $\Rightarrow$ $2n$ pas le carré d'un entier)

Par l'absurde, on suppose n carré d'un entier et $2n$ est le carré d'un entier.

- n carré d'un entier : $\exists p \in \mathbb{N}$ $n = p^2$
- $2n$ carré d'un entier : $\exists q \in \mathbb{N}$ $2n = q^2$

Donc $\frac{2n}{n} = \frac{q^2}{p^2}$ donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ absurde d'après la Q2.

Exercice 6

Q3 $\begin{cases} u_n = 2u_{\frac{n}{2}} + 5 \text{ pour } \underline{n = 2^k} \\ u_1 = 3 \end{cases}$ $\hookrightarrow k = \log_2(n)$

(u_n) n'est pas définie pour tout n

$\rightarrow$ se ramener à une suite définie pour tout n.

On pose $v_k = u_{2^k}$. Alors $\begin{cases} v_k = \underline{2} v_{k-1} + \underline{5} \\ v_{\underline{0}} = 3 \end{cases}$

$v_k = ?$ calculer v_k par substitution.

$$v_k = 2\underline{v_{k-1}} + 5$$
$$= 2\times(2v_{k-2}+5)+5$$
$$= 2^2\,\underline{v_{k-2}} + 2\times 5 + 5$$
$$= 2^2(2v_{k-3}+5) + 2\times5+5$$
$$= 2^3 v_{k-3} + 2^2\times 5 + 2\times 5 + 5$$
$$= \cdots$$
$$= 2^k v_0 + 5\times\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} 2^i}$$
$$= \frac{1-2^k}{1-2} = 2^k - 1$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Donc $v_k = 3\times 2^k + 5\times(2^k - 1)$

Donc $v_k = 8\times 2^k - 5.$

Or $v_k = u_{2^k}$

Donc $\boxed{u_n = 8n - 5}$ pour $n = 2^k$.

Exercice 8

$\boxed{Q2}$ $P(n) : 2^n > n^2$

1) Soit $n \geq 3$. Supposons $P(n)$.

ie $2^n > n^2$. Mq $\underbrace{2^{n+1} > (n+1)^2}$ se ramener à l'HR.

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n^2 \ (*) \ \underbrace{\geq (n+1)^2}_{?}$$

Mq $2n^2 \geq (n+1)^2$

Mq $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$ → on étudie le signe et donc les racines de $2n^2-(n+1)^2$ → factorise

$$2n^2-(n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1$$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\Delta = 4 + 4 = 8$ $r_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2}$ $r_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2}$

Donc $2n^2-(n+1)^2 = (n - (\underbrace{1+\sqrt{2}}_{\simeq 2,4}))(n - (\underbrace{1-\sqrt{2}}_{<0}))$

$\sqrt{2} \simeq 1,4$

Donc $\underline{\underline{\forall n \geq 3}}$ $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$

Donc $2n^2 \geq (n+1)^2$

Donc d'après $(*)$ $2^{n+1} > (n+1)^2$

Donc $\boxed{\forall n \geq 3 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

$\boxed{Q2}$ $\left.\begin{array}{l} 2^3 = 8 \\ \cdot\ 3^2 = 9 \end{array}\right\}$ $2^3 \leq 3^2$ donc $P(3)$ est fausse

$\left.\begin{array}{l} 2^4 = 16 \\ \cdot\ 4^2 = 16 \end{array}\right\}$ $P(4)$ est faux

$\cdot\ 2^5 = 32$ $\left.\right\}$ $P(5)$ est vraie
$\cdot\ 5^2 = 25$ $\qquad \forall n \geq 5 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Donc La propriété est vraie pour $n \geq 5$

⚠ au cas de base

L'hérédité peut être vraie sans que la propriété ne le soit.

Exercice 17

$\boxed{Q5}$ (i) $\Theta(n^3)$ $\quad \Omega(n^2)$

(1). $f \in \Theta(n^3)$ $\quad \exists k_1 k_2 \quad \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad k_1 n^3 \leq f(n) \leq k_2 n^3$

(2) $f \in \Omega(n^2)$ $\quad \exists k_3 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \quad k_3 n^2 \leq f(n)$

$(1) \Rightarrow (2)$ Donc $\Theta(n^3) \subseteq \Omega(n^2)$

Les fonctions qui sont du même ordre de grandeur que n^3 dominent n^2.

(ii) $O(n^2)$ $\quad \Omega(n^3)$ $\qquad f \in O(n^2) \quad f(n) \leq k_1 n^2$
$\qquad f \in \Omega(n^3) \quad k_2 n^3 \leq f(n)$

n^3 domine n^2 donc si f domine n^3 alors elle domine n^2.

Donc si $f \in \Omega(n^3)$, alors $f \notin O(n^2)$

$\Omega(n^3) \cap O(n^2) = \emptyset$.

(iii) $O(n^2)$ et $\Omega(n^2)$

$f \in O(n^2)$ $\exists k_1$ $\exists n_1$ $\forall n \geq n_1$ $f(n) \leq k_1 n^2$

$f \in \Omega(n^2)$ $\exists k_2$ $\exists n_2$ $\forall n \geq n_2$ $k_2 n^2 \leq f(n)$

$k_2 n^2 \leq f(n) \leq k_1 n^2$

. $O(n^2) \subseteq \Omega(n^2)$? non

$n \in O(n^2)$

$n \notin \Omega(n^2)$

. $\Omega(n^2) \subseteq O(n^2)$? non

$n^3 \in \Omega(n^2)$

$n^3 \notin O(n^2)$

. Mais $\boxed{O(n^2) \cap \Omega(n^2) = \Theta(n^2)}$

Exercice 19

$\boxed{Q1}$

1) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $u_n \in \Theta(n^2)$

$= n^2 + n + 2$

$\boxed{\text{Une somme est du même ordre de grandeur que son terme dominant}}$

2) $u_n = 3 \times 2^n - 1$, $u_n \in \Theta(2^n)$

3) $u_n = (n+3)\, 2^n = n\, 2^n + 3\, 2^n$ $u_n \in \Theta(n.2^n)$