Module LU2IN003 Graphes orientés 9

Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_0 = (V_0, A_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A_0 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 7)\}$.
On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |A_0|$.

Question 1

Dessiner le graphe G_0. Que valent n_0 et m_0 ?

Question 2

Pour chaque sommet x de G_0, donner l'ensemble des successeurs de x, l'ensemble de ses prédecesseurs, son demi-degré sortant et son demi-degré entrant. Que vaut la somme des demi-degrés sortants ? des demi-degrés entrants ?

Question 3

Donner un chemin élémentaire de G_0 et un circuit élémentaire de G_0, ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arcs) respectives.

Question 4

Représenter le graphe non orienté G'_0 associé à G_0 en enlevant l'orientation des arcs. Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Question 5

Le graphe G_0 est-il fortement connexe ? Donner ses composantes fortement connexes.

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe orienté

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |A|$.

Question 1

Montrer que $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m$.

Question 2

Exprimer le nombre maximum d'arcs de G en fonction de n :
– si G est sans boucle
– si G est avec boucles.

Question 3

1. On suppose $n > 2$ et on pose $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
   Calculer $d^+(x)$ et $d^-(x)$ pour tout $x \in V$ dans chacun des cas suivants :
   (a) G est composé uniquement d'un chemin élémentaire $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ passant par tous les sommets
   (b) G est composé uniquement d'un circuit élémentaire $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ passant par tous les sommets
   (c) G est composé uniquement d'un chemin $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_j)$, avec $2 \leq j < n$ passant par tous les sommets.

2. Caractériser, sans preuve, les graphes orientés $G = (V, A)$ tels que $d^+(x) = d^-(x) = 1$ pour tout $x \in V$.

   Facultatif : prouver le résultat trouvé.

Exercice 3 – Graphe tournoi et roi

On appelle *graphe tournoi* un graphe orienté sans boucle tel que, entre deux sommets, il y a toujours exactement un arc. On dit qu'un sommet x d'un graphe tournoi G *domine* un sommet y de G si l'arc (x, y) existe. On dit qu'un sommet x est un roi si, pour tout autre sommet y, alors
– ou bien x domine y ;
– ou bien il existe un sommet z tel que x domine z et z domine y.

Question 1

Soit $G_1 = (V_1, A_1)$ avec $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A_1 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (3, 2), (2, 5), (3, 5), (5, 1), (4, 5)\}$. G_1 est-il un graphe tournoi ?

Question 2

Soit $G_2 = (V_2, A_2)$ avec $V_2 = \{1, 2, 3\}$ et $A_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$. G_2 est-il un graphe tournoi ?

Question 3

Soit $G_1 = (V_3, A_3)$ avec $V_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5), (4, 5), (3, 6)\}$. G_3 est-il un graphe tournoi ?

Question 4

1. Quel est le nombre d'arcs d'un graphe tournoi ayant n sommets ?
2. Un graphe tournoi est-il toujours connexe ? fortement connexe ?

Question 5

Démontrer que, dans un graphe tournoi, tout sommet de degré sortant maximum est un roi.

Exercice 4 – Représentation d'un graphe orienté

Question 1

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes orientés sans arc double ni boucle.

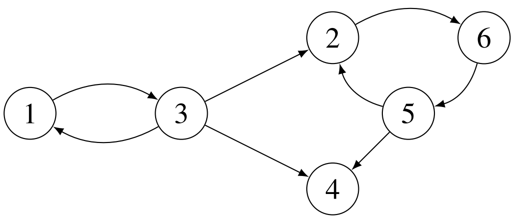
Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arc	Liste d'adjacence
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{(1,2),(2,3),$ $(3,1),(2,4),(3,4)\}$			
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	
			$-1 \to \quad [4,5]$ $-2 \to \quad [3]$ $-3 \to \quad [2]$ $-4 \to \quad []$ $-5 \to \quad []$

Question 2
Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe orienté ? Même question pour une matrice R sommet-arc ou une liste d'adjacence L.

Exercice 5 – Forte connexité, relation d'équivalence et graphe réduit

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On définit la relation $\mathcal{R}_{FC}$ sur V par : pour tout couple de sommets $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}_C v$ si il existe un chemin dans G entre u et v et un chemin de v à u.

Question 1
On considère dans cette question le graphe orienté $G = (V, A)$ représenté par la figure suivante :



1. Donnez les composantes fortement connexes de G.
2. Que vaut $\mathcal{R}_{FC}$ pour cet exemple. $\mathcal{R}_{FC}$ peut être représentée par la matrice carrée R_{FC} tel que $R_{FC}[u, v] = 1$ si $u\mathcal{R}_{FC}v$, 0 sinon.
3. Vérifiez sur la matrice R_{FC} que $\mathcal{R}_{FC}$ est une relation d'équivalence
4. Représentez $\mathcal{R}_{FC}$ par un graphe non orienté G_R ? A quoi correspondent les composantes connexes de G_R ?

Question 2
On souhaite démontrer que les composantes fortement connexes de G coincident avec les composantes connexes de G_R. On rappelle que les composantes fortement connexes de G_R correspondent aux classes d'équivalence de la relation R_{FC}.

1. Démontrez que si x et y sont dans une même composante fortement connexe de G, alors ils sont dans une même composante connexe de G_R.

2. Démontrez ensuite la réciproque.

Question 3

A tout graphe orienté $G = (V, A)$, on peut associer un graphe réduit $H_R = (V_H, A_H)$ qui est un graphe orienté défini de la manière suivante :

— Les sommets V_H sont les composantes fortement connexes de G ;

— A tout arc $(x, y) \in A$ avec x et y dans des composantes fortement connexes $C(x)$ et $C(y)$ différentes, on associe un arc $(C(x), C(y))$ dans A_H.

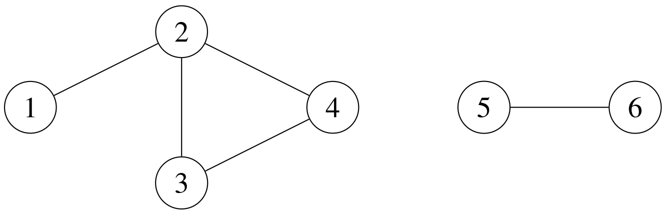
1. Construire le graphe réduit associé au graphe de la question 1.
2. Démontrez par l'absurde que, dans le cas général, H_R est un graphe sans circuit.

Exercice 6 – Connexité et relation d'équivalence

On suppose dans cet exercice que $G = (V, E)$ est un graphe non orienté. On définit la relation $\mathcal{R}_C$ sur V par : pour tout couple de sommets $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}_C v$ si il existe une chaîne dans G entre u et v.

Question 1

Soit le graphe $G = (V, E)$ représenté par la figure suivante :



1. Que vaut $\mathcal{R}_C$ pour cet exemple. $\mathcal{R}_C$ peut être représentée par la matrice carrée R_C tel que $R_C[u, v] = 1$ si $u\mathcal{R}_C v$, 0 sinon.
2. Est-ce-que pour l'exemple, on peut construire un graphe non orienté associé à R_C ? Justifiez votre réponse.

Question 2

On suppose que $G = (V, E)$ est un graphe non orienté quelconque.

1. Démontrez que $\mathcal{R}_C$ est une relation d'équivalence.
2. Que peut-on en déduire sur la structure de la matrice R_C associée ? Est-ce-que on peut toujours associer un graphe non orienté G_R à R_C ?

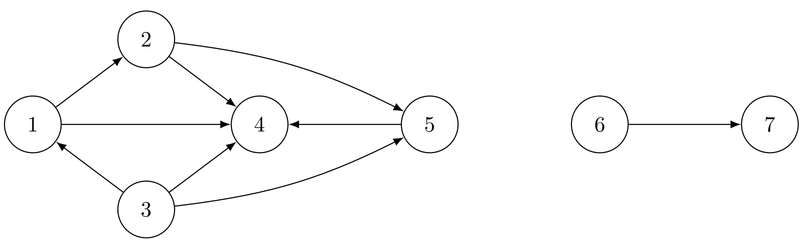
Question 3

Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, on définie les composantes connexes de G comme les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_C$.

1. Quelles sont les composantes connexes du graphe de la question 1 ?
2. Dans le cas général, comment caractérise t'on les composantes connexes de G en fonction de la matrice R_C ?

Exercice 7 – Tri topologique

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_5 = (V_5, A_5)$ suivant :



Question 1
Calculer $\mathrm{rang}\,(x)$ pour tout $x \in V_5$.

Question 2
En déduire un tri topologique de G_5.

Question 3
Un tri topologique est-il nécessairement rangé en ordre croissant des rangs ?

On rappelle l'algorithme de calcul d'un tri topologique d'un graphe orienté sans circuit.

Algorithm 1 Calcul d'un tri topologique pour un graphe orienté sans circuit

Require: Un graphe orienté sans circuit $G = (V, A)$
Ensure: Un ordre topologique L
  $L := (), T := V, \Delta(u) := d^-(u), \forall u \in V$
  while $T \neq \emptyset$ **do**
    Choisir un sommet $u \in T$ tel que $\Delta(u) = 0$
    $L := L + (u), T := T - \{u\}$
    $\forall v \in \Gamma^+(u), \Delta(v) := \Delta(v) - 1$
  end while

Question 4
Appliquer cet algorithme au graphe G_5. Pour cela, vous préciserez à la fin de chaque itération les valeurs de u, L, T et Δ. Quand plusieurs sommets sont possibles pour u, vous sélectionnerez le sommet de numéro minimal.

Question 5
En supposant que les listes sont représentées par des listes circulaires doublement chaînées, calculer la complexité de cet algorithme lorsque les graphes sont représentés par :
(a) des matrices sommets-arcs
(b) des matrices sommets-sommets
(c) des listes de successeurs.