Règles de la Déduction Naturelle

Axiome

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A$
montrons A
$\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

Axiome

$\langle j \rangle$ supposons $h'_1 : A'_1, \cdots, h'_k : A'_k, h : A$
montrons B
$\ldots$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons A
> $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

$\ldots$
$\langle j \rangle$ CQFD (Nom)

Introduction du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$

> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

Introduction du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \wedge B$

> $\langle i+1 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_{\wedge}$)

Affaiblissement

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : B$
montrons A

> $\langle i+1 \rangle$ montrons A sans utiliser h
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Af)

Introduction de true

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons true
$\langle i \rangle$ CQFD ($I_{\top}$)

Elimination de false

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h :$ false
montrons B
$\langle i \rangle$ CQFD ($E_{\perp}$ avec h)

Elimination du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_{\Rightarrow}$)

Elimination gauche du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_{\wedge}$)

Elimination droite du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E^d_{\wedge}$)

Introduction gauche du connecteur $\vee$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \vee B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons A
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I^g_\vee)$

Introduction droite du connecteur $\vee$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \vee B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons B
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I^d_\vee)$

Introduction du connecteur $\neg$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $\neg A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> > montrons false
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

Elimination du connecteur $\vee$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons C
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> > montrons C
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> > montrons C
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+3 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_\vee)$

Elimination du connecteur $\neg$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons false
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ montrons A
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_\neg)$

Introduction du quantificateur $\forall$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $\forall x\, A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y
> > $(y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i))$
> > montrons $A[x := y]$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_\forall)$

Elimination du quantificateur $\forall$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A[x := t]$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $\forall x\, A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_\forall)$

Introduction du quantificateur $\exists$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $\exists x\, A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A[x := t]$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_\exists)$

Elimination du quantificateur $\exists$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons B
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $\exists x\, A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ soit une nouvelle variable y
> > $(y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i))$
> > supposons $h : A[x := y]$
> > montrons B
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_\exists)$

Raisonnement par l'absurde

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons A
>
> > $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
> > montrons false
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

Règles supplémentaires pour le connecteur $\Leftrightarrow$

Introduction du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Leftrightarrow B$
  $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+1 \rangle$ CQFD

  $\langle i+2 \rangle$ montrons $B \Rightarrow A$
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD $(I_{\Leftrightarrow})$

Elimination gauche du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$
  $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD $(E^g_{\Leftrightarrow})$

Elimination droite du connecteur $\Leftrightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $B \Rightarrow A$
  $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD $(E^d_{\Leftrightarrow})$

Règles Dérivées

Elimination gauche directe du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
montrons A
$\langle i \rangle$ CQFD $(D^g_{\wedge}$ avec $h)$

Introductions du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, \cdots, h_m : F_m$
montrons $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\cdots (A_n \Rightarrow A_{n+1}) \cdots))$
  $\langle i+1 \rangle$ supposons $h'_1 : A_1, \cdots, h'_n : A_n$
  montrons A_{n+1}
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD $(I^n_{\Rightarrow})$

Hypothèses contradictoires

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
montrons B
$\langle i \rangle$ CQFD $(D^1_{\perp}$ avec $h'_1, h'_2)$

Elimination droite directe du connecteur $\wedge$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
montrons B
$\langle i \rangle$ CQFD $(D^d_{\wedge}$ avec $h)$

Elimination directe du connecteur $\Rightarrow$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n,$
$h'_1 : A \Rightarrow B, h'_2 : A$
montrons B
$\langle i \rangle$ CQFD $(D_{\Rightarrow}$ avec $h'_1, h'_2)$

Hypothèses contradictoires

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B
  $\langle i+1 \rangle$ montrons A
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+1 \rangle$ CQFD

  $\langle i+2 \rangle$ montrons $\neg A$
  $\boxed{\cdots}$
  $\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD $(D^2_{\perp})$

Elimination directe du connecteur $\neg$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
	montrons false
$\langle i \rangle$	CQFD ($D_\neg$ avec h'_1, h'_2)

Elimination directe du connecteur $\vee$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \vee B$
montrons C

> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec h)

Elimination directe du quantificateur $\forall$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \forall x\ A$
	montrons $A[x := t]$
$\langle i \rangle$	CQFD ($D_\forall$ avec h)

Elimination directe du quantificateur $\exists$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \exists x\ A$
montrons B

> $\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y
> ($y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$)
> supposons $h' : A[x := y]$
> montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h)

Double négation

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($R^1_\neg$)

Double négation

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\neg\neg A$

> $\langle i+1 \rangle$ montrons A
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($R^2_\neg$)

Tiers exclu

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \vee \neg A$
$\langle i \rangle$	CQFD (TE)

Elimination du tiers exclu

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B

> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h'_1 : A$, montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h'_2 : \neg A$
> montrons B
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (D_{TE})