DA TS10-2022

40 BÀI HÌNH TRỌNG TÂM

Bài 1. **Cho ΔABC nội tiếp (O), có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H.**

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC, ADHE nội tiếp và xác định tâm I, N của các đường tròn ngoại tiếp trên.

Xét tứ giác BEDC, ta có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} \left(= 90^0\right)$

=>Tứ giác BEDC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.

Ta có: $\begin{cases} \Delta BDC \text{ nội tiếp } (BCDE)\ (\text{tg } BCDE \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{BDC} = 90^0\ (BD \perp AC \text{ tại } D) \end{cases}$

=> ΔBDC nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> Tâm I là trung điểm của BC

Hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCDE

Xét Tứ giác ADHE, ta có:

$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0\ (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \widehat{AEH} = 90^0\ (CE \perp AB \text{ tại } E) \end{cases}$

=> $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

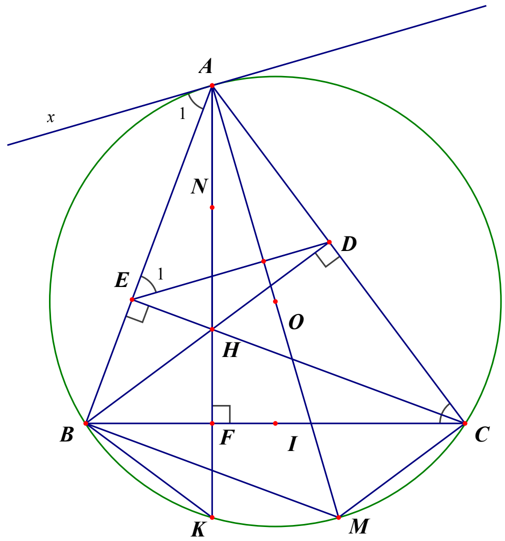
=> Tứ giác ADHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: $\begin{cases} \Delta ADH \text{ nội tiếp } (ADHE)\ (\text{tg } ADHE \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{ADH} = 90^0\ (BD \perp AC \text{ tại } D) \end{cases}$

=> ΔADH nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Tâm N là trung điểm của AH

Hay N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE.



b) Tia AO cắt (O) tại M. Chứng minh: Tứ giác BHCM là hình bình hành.

Ta có: $\widehat{ACM} = 90^0$ $\left(\text{gnt chắn nửa đường tròn } (O) \text{ đk AM}\right)$

$\Rightarrow MC \perp AC$

Mà: $BH \perp AC$ $\left(\text{BD là đường cao } \Delta ABC\right)$

Nên: BH // MC $(\perp AC)$

Ta có: $\widehat{ABM} = 90^0$ $\left(\text{gnt chắn nửa đường tròn } (O) \text{ đk AM}\right)$

$\Rightarrow MB \perp AB$

Mà: $CH \perp AB$ $\left(\text{CE là đường cao } \Delta ABC\right)$

Nên: CH // MB $(\perp AC)$

Lại có: BH // MC (cmt)

Suy ra: Tứ giác BHCM là hình bình hành vì có 2ccđ //, =

c) Tia AH cắt (O) tại K. Chứng minh ΔBHK cân.

Gọi F là giao điểm của AH và BC

Xét ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} \text{BD là đường cao } (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \text{CE là đường cao } (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ \text{BD cắt CE tại H } (gt) \end{cases}$$

=> *H là trực tâm của ΔABC*

=> AH là đường cao thứ ba của ΔABC

=> AH $\perp$ BC tại F.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{KBF} = \widehat{CAF}\left(2g\text{ nt }(O)\text{ cùng chắn }\overset{\frown}{KC}\right) \\ \widehat{HBF} = \widehat{CAF}\left(\text{ phụ }\widehat{ACB}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{KBF} = \widehat{HBF}\left(= \widehat{CAF}\right)$

=> BF là tia phân giác của $\widehat{HBK}$

Mà: BF lại là đường cao của ΔHBK $\left(AH \perp BC \text{ tại } F\right)$

Nên: ΔHBK cân tại B.

d) Chứng minh: AO $\perp$ DE.

Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) tại A

$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tt và dc với gnt (O) chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Mà: $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài = góc trong tg BCDE nội tiếp)

Nên: $\widehat{xAB} = \widehat{AED}\left(= \widehat{ACB}\right)$

Mặt khác: 2g này ở vị trí slt

Do đó: Ax // ED

Lại có: $Ax \perp AO$ (Ax là tt của (O))

Suy ra: $AO \perp ED$.

Bài 2. **Cho ΔABC có 3 góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H.**

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC, AEHD nội tiếp và xác định tâm I, K của các đường tròn ngoại tiếp trên.

Xét tứ giác BEDC, ta có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC}\left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác BEDC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.

Ta có: $\begin{cases} \Delta BDC \text{ nội tiếp } (BCDE)\ (\text{tg } BCDE \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{BDC} = 90^0\ (BD \perp AC \text{ tại } D) \end{cases}$

=> ΔBDC nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> Tâm I là trung điểm của BC

Hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCDE

Xét Tứ giác ADHE, ta có:

$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0\ (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \widehat{AEH} = 90^0\ (CE \perp AB \text{ tại } E) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

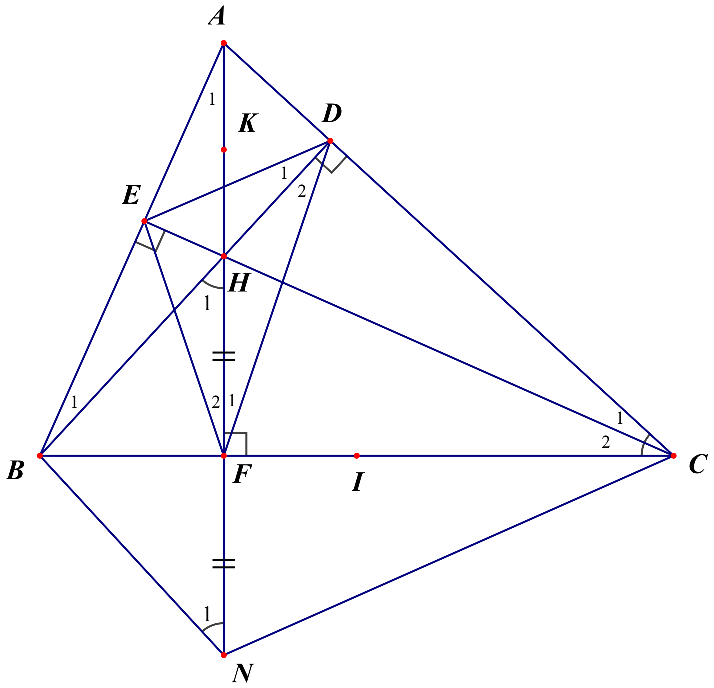
=> Tứ giác ADHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: $\begin{cases} \Delta ADH \text{ nội tiếp } (ADHE) \; (\text{tg } ADHE \text{ nội tiếp}) \\ \widehat{ADH} = 90^0 \; (BD \perp AC \text{ tại } D) \end{cases}$

=> Δ ADH nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Tâm K là trung điểm của AH

Hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE.



b) Gọi F là giao điểm của AH với BC. Chứng minh: Tứ giác CDHF nội tiếp rồi suy ra FA là tia phân giác của $\widehat{EFD}$.

Xét ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} \text{BD là đường cao } (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \text{CE là đường cao } (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ \text{BD cắt CE tại H } (gt) \end{cases}$$

=> *H là trực tâm của ΔABC*

=> AH là đường cao thứ ba của ΔABC

=> AH $\perp$ BC tại F.

Xét Tứ giác CDHF, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CDH} = 90^0 \ (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \widehat{CFH} = 90^0 \ (AH \perp BC \text{ tại } F) \end{cases}$$

=> $\widehat{CDH} + \widehat{CFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác CDHF nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

=> $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (2g nt cùng chắn $\overset{\frown}{HD}$)

Xét Tứ giác BEHF, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BEH} = 90^0 \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ \widehat{BFH} = 90^0 \ (AH \perp BC \text{ tại } F) \end{cases}$$

=> $\widehat{BEH} + \widehat{BFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác BEHF nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

=> $\widehat{F_2} = \widehat{B_1}$ (2g nt cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$)

Mà: $\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \ (\text{phụ } \widehat{BAC}) \\ \widehat{F_1} = \widehat{C_1} \ (cmt) \end{cases}$

Nên: $\widehat{F_2} = \widehat{F_1}$

=> FA là tia phân giác của $\widehat{EFD}$ (tia FA nằm giữa 2 tia FE, FE)

c) Gọi N là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh: Tứ giác ABNC nội tiếp.

Xét ΔHBN, ta có:

$$\begin{cases} \text{BF là đường trung tuyến } (\text{F là trung điểm của HN}) \\ \text{BF là đường cao } (AF \perp BC \text{ tại } F) \end{cases}$$

$$=> \Delta HBN \text{ cân tại } B$$

$$=> \widehat{N_1} = \widehat{H_1}$$

Mà: $\widehat{ACB} = \widehat{H_1}$ (góc trong = góc ngoài tg CDHF nt)

Nên: $\widehat{N_1} = \widehat{ACB} \left(= \widehat{H_1}\right)$

=> Tứ giác ABNC nội tiếp vì có 2g cùng nhìn 1c dưới 2g =.

d) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{D_2} = \widehat{C_2} \left(\text{2g nt của } (CDHF) \text{ cùng chắn } \overparen{HF}\right) \\ \widehat{D_1} = \widehat{C_2} \left(\text{2g nt của } (BCDE) \text{ cùng chắn } \overparen{BE}\right) \end{cases}$

=> $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} \left(\widehat{C_2}\right)$

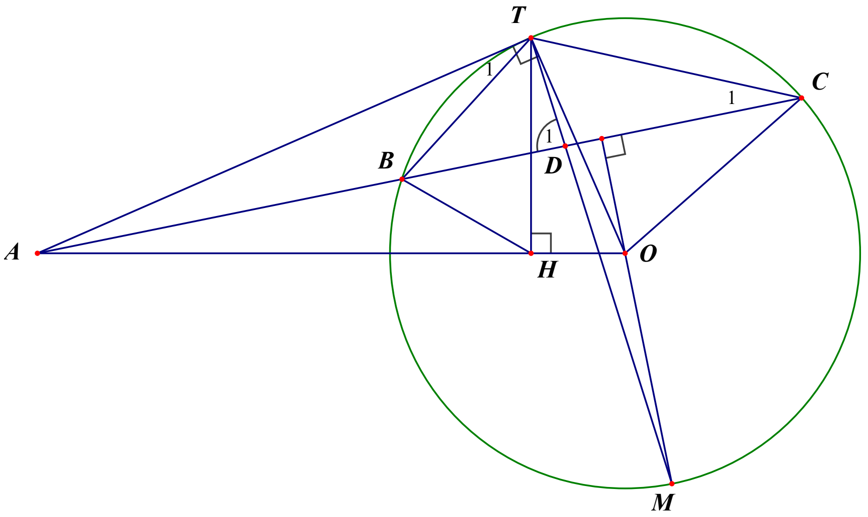
=> DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (tia DH nằm giữa 2 tia DE, DF)

Xét ΔDEF, ta có:

$$\begin{cases} \text{FA là tia phân giác } \widehat{EFD} \text{ (cmt)} \\ \text{DH là tia phân giác } \widehat{EDF} \text{ (cmt)} \\ \text{FA cắt DH tại H (gt)} \end{cases}$$

=> H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

Bài 3. **Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AT và cát tuyến ABC cới đường tròn (B nằm giữa A và C).**



a) Chứng minh: $AT^2 = AB.AC$.

Xét ΔATB và ΔACT, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{TAB} = \widehat{CAT}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{T_1} = \widehat{C_1}\ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BT}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta ATB \sim \Delta ACT\ (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AT}\ (\text{tsđd})$$

$$\Rightarrow AT^2 = AB.AC$$

b) Tia phân giác $\widehat{BTC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại M. Chứng minh: OM $\perp$ BC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{BTM} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BM}\ (gnt\ (O)\ chắn\ \overset{\frown}{BM}) \\ \widehat{CTM} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{CM}\ (gnt\ (O)\ chắn\ \overset{\frown}{CM}) \\ \widehat{BTM} = \widehat{CTM}\ (TM\ là\ tia\ phân\ giác\ của\ \widehat{BTC}) \end{cases}$

=> $sđ\overset{\frown}{BM} = sđ\overset{\frown}{CM}$

=> M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

=> OM $\perp$ BC (qh đường kính và dây cung)

c) Chứng minh: AD = AT.

Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} + \widehat{CTD}$ (góc ngoài ΔCTD tại D)

Mà: $\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{T_1}\ (cmt) \\ \widehat{CTD} = \widehat{BTD}\ (cmt) \end{cases}$

Nên: $\widehat{D_1} = \widehat{T_1} + \widehat{BTD}$

=> $\widehat{D_1} = \widehat{ATD}$

=> ΔATD cân tại A

=> AD = AT

d) Gọi H là hình chiếu của T trên OA. Chứng minh: Tứ giác OHBC nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} \Delta ATO\ vuông\ tại\ T\ (AT\ là\ tt\ của\ (O)\ tại\ A) \\ TH\ là\ đường\ cao\ (H\ là\ hc\ của\ T\ lên\ AO) \end{cases}$

=> $AT^2 = AH.AO$ (HTL)

Mà $AT^2 = AB.AC$ (cmt)

Nên : $AH.AO = AB.AC\ (= AT^2)$

=> $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AO}$

Xét ΔAHB và ΔACO, ta có:

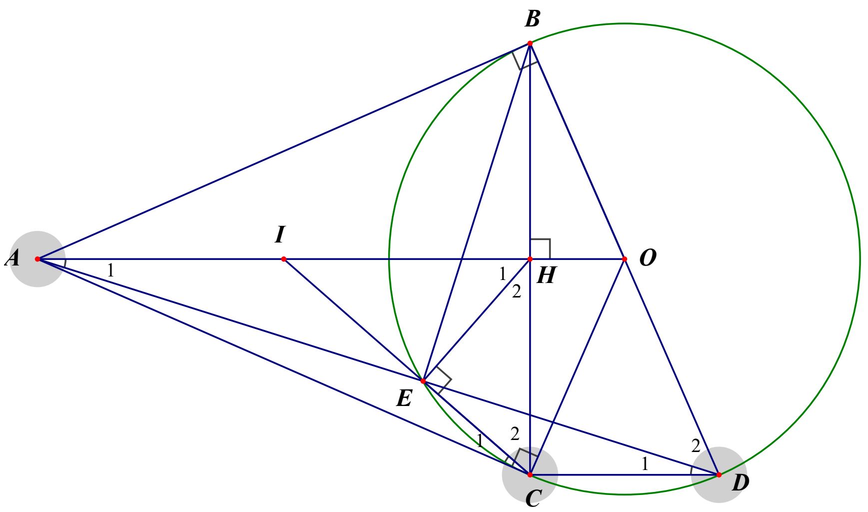
$\begin{cases} \dfrac{AT}{AC} = \dfrac{AB}{AT}\ (cmt) \\ \widehat{HAB} = \widehat{CAO}\ (góc\ chung) \end{cases}$

=> ΔATB ~ ΔACT (g – g)

=> $\widehat{AHB} = \widehat{ACO}$ (2g tương ứng)

=> Tứ giác OHBC nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện.

Bài 4. **Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.**



a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp và OA $\perp$ BC tại H.

Xét Tứ giác ABOC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

$=> \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác ABOC nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} AB = AC \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A}) \\ OB = OC \ (= R) \end{cases}$$

=> OA là trung trực của BC

=> OA $\perp$ BC tại H

b) Kẻ đường kính BD của (O). Chứng minh: DC // OA.

Ta có: $\widehat{BCD} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk BD)

=> CD $\perp$ BC

Mà : OA $\perp$ BC (cmt)

Nên : CD // OA ($\perp$ BC)

c) AD cắt (O) tại điểm thứ 2 là E. Chứng minh: HE $\perp$ CE.

Xét ΔACE và ΔADC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CAE} = \widehat{DAC}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{C_1} = \widehat{D_1}\ \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{CE}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta ACE \sim \Delta ADC$ (g – g)

=> $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$ (tsđd)

=> $AC^2 = AE.AD$

Ta có: $\begin{cases} \Delta ACO \text{ vuông tại C } (AC \text{ là tt của (O) tại C}) \\ CH \text{ là đường cao } (AO \perp BC \text{ tại H}) \end{cases}$

=> $AC^2 = AH.AO$ (HTL)

Mà $AC^2 = AE.AD$ (cmt)

Nên : $AH.AO = AE.AD\ (= AT^2)$

=> $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$

Xét ΔAHE và ΔADO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}\ (\text{cmt}) \\ \widehat{HAE} = \widehat{DAO}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

=> $\Delta AHE \sim \Delta ADO$ (g – g)

=> $\widehat{H_1} = \widehat{D_2}$ (2g tương ứng)

Mà : $\widehat{C_2} = \widehat{D_2}\ \left(\text{2gnt (O) chắn } \overset{\frown}{BE}\right)$

Nên : $\widehat{H_1} = \widehat{C_2}\ (\widehat{D_2})$

Lại có: $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0$ (ΔAHC vuông tại H)

Suy ra: $\widehat{C_2} + \widehat{H_2} = 90^0$

=> ΔCHE vuông tại E

=> $HE \perp CE$ tại E

d) CE cắt AO tại I. Chứng minh: I là trung điểm của AH.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{D_1}\ (\text{2g slt và } AO\ //\ CD) \\ \widehat{C_1} = \widehat{D_1}\ (\text{cmt}) \end{cases}$

=> $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}\ (\widehat{D_1})$

Xét ΔAIE và ΔCIA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIE} = \widehat{CIA} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$=> \Delta AIE \sim \Delta CIA \text{ (g - g)}$

$=> \dfrac{AI}{CI} = \dfrac{EI}{AI} \text{ (tsđd)}$

$=> AI^2 = EI.CI \ (1)$

Ta có: $\begin{cases} \Delta CHI \text{ vuông tại H } (AO \perp BC \text{ tại H}) \\ \text{HE là đường cao } (HE \perp CE \text{ tại E}) \end{cases}$

$=> IH^2 = EI.CI \text{ (HTL)}$

Mà $AI^2 = EI.CI$ (cmt)

Nên : $IH^2 = AI^2 \ (= EI.CI)$

Lại có: I nằm giữa H và A

Suy ra: IH = IA

=> I là trung điểm của AH.

Bài 5. **Cho (O; R), một điểm S nằm ngoài đường tròn. Từ S ta kẻ hai tiếp tuyến SA, SB đến (O) (A, B là hai tiếp điểm).**

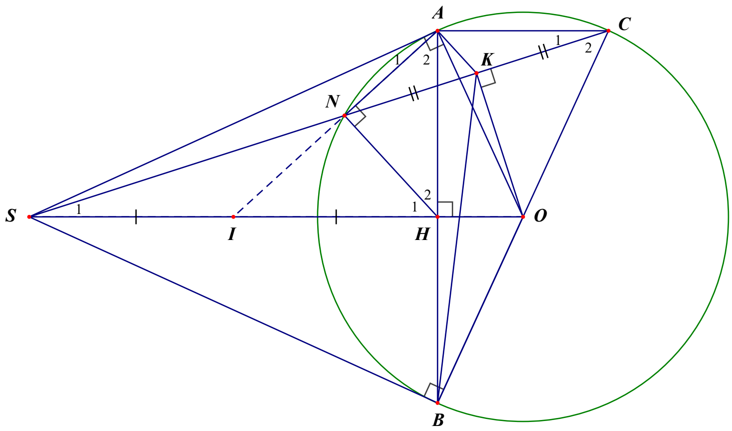
a) Chứng minh: Tứ giác SAOB nội tiếp.

Xét tứ giác SAOB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{SAO} = 90^0 \ (\text{SA là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{SBO} = 90^0 \ (\text{SB là tt của (O) tại B}) \end{cases}$$

$=> \widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác SAOB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau



b) Kẻ đường kính BC, SC cắt (O) tại N (N khác C).

Chứng minh: $SA^2 = SN.SC$.

Xét ΔSAN và ΔSCA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ASN} = \widehat{CSA} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{AN}) \end{cases}$$

$=> \Delta SAN \sim \Delta SCA \ (g-g)$

$=> \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SN}{SA} \ (\text{tsđd})$

$=> SA^2 = SN.SC$

c) Gọi K là trung điểm của NC. Chứng minh: SK là đường phân giác của $\widehat{AKB}$.

Ta có: SB = SC (t/c 2 tt cắt nhau tại S của (O))

$=> \Delta SAB$ cân tại S

$=> \widehat{SAB} = \widehat{SBA}$

Ta có: K là trung điểm của NC (gt)

=> $OK \perp NC$ (qh đường kính và dây cung)

Xét tứ giác SKOB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{SKO} = 90^0 \ (OK \perp NC) \\ \widehat{SBO} = 90^0 \ (SB \text{ là tt của } (O) \text{ tại } B) \end{cases}$$

$$=> \widehat{SKO} + \widehat{SBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác SKOB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Mà: Tứ giác SAOB nt (cmt)

Nên: 5 điểm S, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

$$=> \begin{cases} \widehat{SKB} = \widehat{SAB} \left(2g \text{ nt chắn } \overset{\frown}{SB}\right) \\ \widehat{SKA} = \widehat{SBA} \left(2g \text{ nt chắn } \overset{\frown}{SA}\right) \end{cases}$$

Mà: $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$ (cmt)

Nên: $\widehat{SKB} = \widehat{SKA}$

=> KS là tia phân giác của $\widehat{AKB}$ (tia KS nằm giữa tia KA và KB)

d) Gọi H là giao điểm của AB và SO và I là trung điểm của SH. Chứng minh: I thuộc AN.

Gọi J là giao điểm của AN và SH.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} SA = SB \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại } A) \\ OA = OB \ (= R) \end{cases}$$

=> OS là trung trực của AB

=> OS $\perp$ AB tại H

Ta có: $\widehat{BAC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk BC)

=> $CA \perp AB$

Mà : $OS \perp AB$ (cmt)

Nên : $CA \,//\, OS$ $(\perp AB)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta SAO \text{ vuông tại } A \ (SA \text{ là tt của } (O) \text{ tại } A) \\ AH \text{ là đường cao } (AB \perp OS \text{ tại } H) \end{cases}$$

$=> SA^2 = SH.SO$ (HTL)( )

Mà $SA^2 = SN.SC$ (cmt)

Nên : $SH.SO = SN.SE \ (= SA^2)$

$$=> \frac{SH}{SC} = \frac{SN}{SO}$$

Xét ΔHSN và ΔCSO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{SH}{SC} = \dfrac{SN}{SO} \ (cmt) \\ \widehat{HSN} = \widehat{CSO} \ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$=> \Delta HSN \sim \Delta CSO \ (g-g)$

$=> \widehat{H_1} = \widehat{C_2} \ (\text{2g tương ứng})$

Mà : $\widehat{A_2} = \widehat{C_2} \ (\text{2gnt (O) chắn } \overset{\frown}{BN})$

Nên : $\widehat{H_1} = \widehat{A_2} \ (\widehat{C_2})$

Lại có: $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0$ $(\Delta SAH$ vuông tại H$)$

Suy ra: $\widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90^0$

=> ΔAHN vuông tại N

Ta có: $\begin{cases} \widehat{S_1} = \widehat{C_1} \ (\text{2g slt và } SO \,//\, AC) \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \ (cmt) \end{cases}$

$=> \widehat{S_1} = \widehat{A_1} \ (\widehat{C_1})$

Xét ΔSJN và ΔAJS, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{SJN} = \widehat{AJS} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{S_1} = \widehat{A_1} \ (cmt) \end{cases}$$

$=> \Delta SJN \sim \Delta AJS \ (g-g)$

$=> \dfrac{SJ}{AJ} = \dfrac{JN}{SJ} \ (\text{tsđd})$

$=> SJ^2 = JN.JA$

Ta có: $\begin{cases} \Delta CHJ \text{ vuông tại } H \ (SO \perp AB \text{ tại } H) \\ HN \text{ là đường cao } (\Delta AHN \text{ vuông tại } E) \end{cases}$

$=> JH^2 = JN.JA \ (HTL)$

Mà $SJ^2 = JN.JA \ (cmt)$

Nên : $JH^2 = SJ^2 \ (= JN.JA)$

Lại có: I nằm giữa S và H

Suy ra: JS = JH

=> J là trung điểm của SH

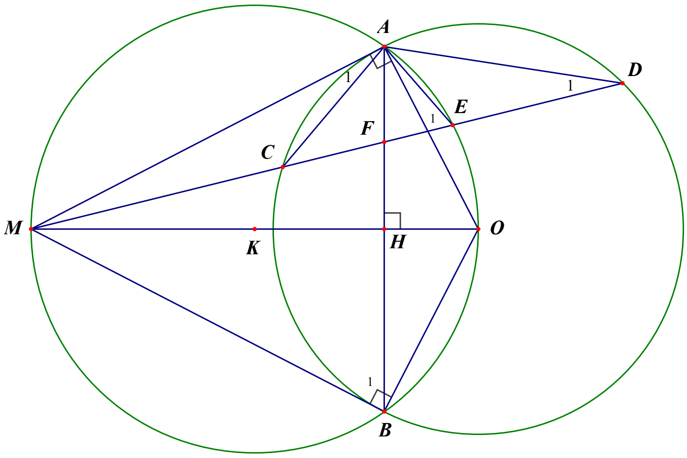
Mà: I là trung điểm của SH (gt)

Nên: $I \equiv J$

=> A, N, I thẳng hàng

Hay I thuộc AN.

Bài 6. **Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm) và kẻ cát tuyến MCD với (O) (C nằm giữa M và D). Gọi H là giao điểm của OM và AB.**



a) Chứng minh: OM $\perp$ AB.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} MA = MB \; (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M}) \\ OA = OB \; (= R) \end{cases}$$

=> OM là trung trực của AB

=> OM $\perp$ AB tại H

b) Chứng minh: Tứ giác OAMB nội tiếp đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn này.

Xét tứ giác OAMB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MAO} = 90^0 \; (\text{MA là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{MBO} = 90^0 \; (\text{MB là tt của (O) tại B}) \end{cases}$$

=> $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác OAMB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: $\begin{cases} \Delta MAO \text{ nội tiếp } (MAOB) \; (\text{tg MAOB nội tiếp}) \\ \widehat{MAO} = 90^0 \; (\text{cmt}) \end{cases}$

=> ΔMAO nội tiếp đường tròn đường kính MO

=> Tâm K là trung điểm của MO

Hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác OAMB

c) Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$.

Xét ΔMAC và ΔMDA, ta có:

$$\begin{cases}\widehat{AMC}=\widehat{DMA}\ (\text{góc chung})\\ \widehat{A_1}=\widehat{D_1}\ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn }\overset{\frown}{AC})\end{cases}$$

=> $\Delta MAC \sim \Delta MDA$ (g – g)

=> $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MA}$ (tsđd)

=> $MA^2 = MC.MD$

d) Đường tròn (K) cắt MD ở E, đoạn thẳng AB, CD cắt nhau ở F. Chứng minh: $MF.ME = MC.MD$.

Ta có: MA = MB (t/c 2 tt cắt nhau tại M của (O))

=> ΔMAB cân tại M

=> $\widehat{MAB}=\widehat{B_1}$

Mà: $\widehat{E_1}=\widehat{B_1}$ (2g nt (K) chắn $\overset{\frown}{MA}$)

Nên: $\widehat{MAB}=\widehat{E_1}$

Xét ΔMAF và ΔMEA, ta có:

$$\begin{cases}\widehat{AMF}=\widehat{EMA}\ (\text{góc chung})\\ \widehat{MAF}=\widehat{E_1}\ (\text{cmt})\end{cases}$$

=> $\Delta MAF \sim \Delta MEA$ (g – g)

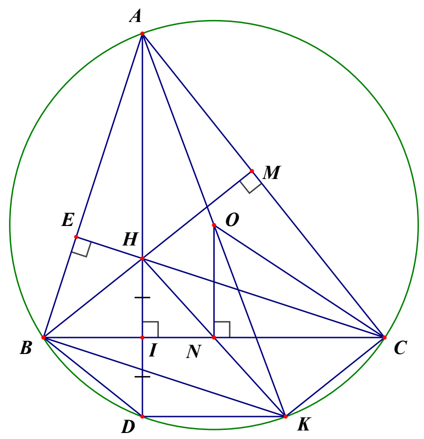
=> $\dfrac{MA}{ME}=\dfrac{MF}{MA}$ (tsđd)

=> $MA^2 = ME.MF$

Mà : $MA^2 = MC.MD$ (cmt)

Nên : $ME.MF = MC.MD$ $(= MA^2)$

Bài 7. **Cho ΔABC có 3 góc nhọn (AB < AC) nội tiếp (O; R) có đường cao AI, BM, CE cắt nhau tại H.**



a) Chứng minh: Tứ giác BEMC nội tiếp. Xác định tâm N của đường tròn này.

Xét tứ giác BEMC, ta có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BMC}\left(=90^0\right)$

=> Tứ giác BEMC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.

Ta có: $\begin{cases} \Delta BMC \text{ nội tiếp } (BEMC)\ (\text{tg BEMC nội tiếp}) \\ \widehat{BMC} = 90^0\ (BM \perp AC \text{ tại } M) \end{cases}$

=> ΔBMC nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> Tâm N là trung điểm của BC

Hay N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEMC

b) Vẽ đường kính AK. Chứng minh: $AB.AC = AI.AK$.

Ta có: $\widehat{ACK} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk AK)

Xét ΔABI và ΔAKC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIB} = \widehat{ACK}\left(=90^0\right) \\ \widehat{ABI} = \widehat{AKC}\ \left(2g \text{ nt (O) chắn } \overset{\frown}{AC}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta ABI \sim \Delta AKC$ (g – g)

=> $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AI}{AC}$ (tsđd)

=> $AB.AC = AI.AK$

c) Gọi D là điểm đối xứng với điểm H qua đường thẳng BC. Chứng minh: Tứ giác BDKC là hình thang cân.

Xét ΔBHD, ta có:

$$\begin{cases} \text{BI là đường trung tuyến } (\text{I là trung điểm của HD}) \\ \text{BI là đường cao } (\text{AI} \perp \text{BC tại I}) \end{cases}$$

=> ΔBHD *cân tại B*

=> $\widehat{BDC} = \widehat{IBH}$

Mà: $\widehat{DAC} = \widehat{IBH}\left(\text{phụ } \widehat{ACB}\right)$

Nên: $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}\ \left(= \widehat{IBH}\right)$

=> Tứ giác ABDC nội tiếp vì có 2g cùng nhìn một cạnh dưới 2g =.
Mặt khác: Tứ giác ABKC nội tiếp (O) (A, B, K, C thuộc (O))
Do đó: Tứ giác BDKC nội tiếp (O)

=> $\widehat{ADK} = 90^0\ \left(\text{gnt chắn nửa (O) đk AK}\right)$

=> $AD \perp DK$

Mà : $AD \perp BC\ \left(AI \perp BC \text{ tại I}\right)$

Nên : $DK\ //\ BC\ \left(\perp AD\right)$

Tứ giác BDKC là hình thang vì có 2c //.
Lại có: Tứ giác BDKC nội tiếp (cmt)
Suy ra: hình thang BDKC là hình thang cân (hình thang nội tiếp)

d) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAME theo R.

Ta có: $\widehat{ACK} = 90^0\ \left(\text{gnt chắn nửa đường tròn } (O) \text{ đk AK}\right)$

=> $KC \perp AC$

Mà: $BH \perp AC\ \left(\text{BM là đường cao } \Delta ABC\right)$

Nên: $BH\ //\ KC\ \left(\perp AC\right)$

Ta có: $\widehat{ABK} = 90^0\ \left(\text{gnt chắn nửa đường tròn } (O) \text{ đk AK}\right)$

=> $KB \perp AB$

Mà: $CH \perp AB\ \left(\text{CE là đường cao } \Delta ABC\right)$

Nên: $CH\ //\ KB\ \left(\perp AC\right)$

Lại có: BH // KC (cmt)
Suy ra: Tứ giác BHCK là hình bình hành vì có 2ccđ //, =
Mặt khác: N là trung điểm của BC (cmt)
Do đó: N là trung điểm của HK

Xét ΔKAH, ta có:

$$\begin{cases} \text{O là trung điểm của AK } (\text{AK là đk (O)}) \\ \text{N là trung điểm của HK } (\text{cmt}) \end{cases}$$

=> ON là đường trung bình của ΔKAH

$$\Rightarrow ON = \frac{AH}{2}$$

Hay $AH = 2ON$

Ta có: $NC = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (N là trung điểm của BC)

Ta có: N là trung điểm của BC (cmt)

=> ON $\perp$ BC tại N (qh đường kính và dây cung)

Xét ΔOCN vuông tại N, ta có:

$$ON^2 + CN^2 = OC^2 \ (\text{Pytago})$$

$$\Rightarrow ON^2 = OC^2 - CN^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow ON = \frac{R}{2}$$

Mà: $AH = 2ON$ (cmt)

Nên: $AH = 2.\frac{R}{2} = R$

Xét Tứ giác AMHE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AMH} = 90^0 \ (BM \perp AC \text{ tại } M) \\ \widehat{AEH} = 90^0 \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác AMHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: $\begin{cases} \Delta AMH \text{ nội tiếp } (AMHE) \ (\text{tg AMHE nội tiếp}) \\ \widehat{AMH} = 90^0 \ (BM \perp AC \text{ tại } M) \end{cases}$

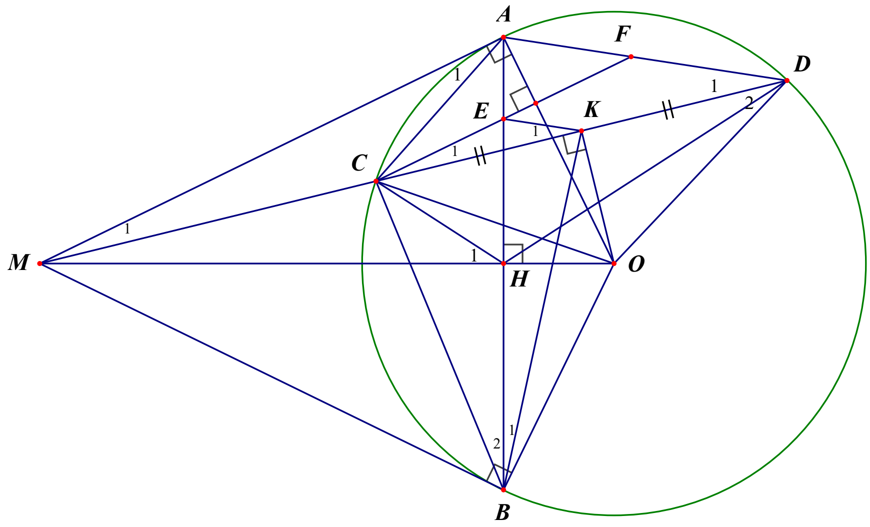
=> ΔAMH nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Tứ giác AMHE nội tiếp đường tròn đường kính AH

Hay ΔAME nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Bán kính đường tròn này: $r = \frac{AH}{2} = \frac{R}{2}$.

Bài 8. **Cho (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD. Gọi H là giao điểm của OM và AB.**



a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp và OM $\perp$ AB tại H.

Xét Tứ giác MAOB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MAO} = 90^0 \ (\text{MA là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{MBO} = 90^0 \ (\text{MB là tt của (O) tại B}) \end{cases}$$

$$=> \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác MAOB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} MA = MB \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M}) \\ OA = OB \ (= R) \end{cases}$$

=> OM là trung trực của AB

=> OM $\perp$ AB tại H

b) Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$.

Xét ΔMAC và ΔMDA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{DMA} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{AC}) \end{cases}$$

$$=> \Delta MAC \sim \Delta MDA \ (g-g)$$

$$=> \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \ (\text{tsđd})$$

$$=> MA^2 = MC.MD$$

c) Chứng minh: Tứ giác CHOD nội tiếp và suy ra:
$\widehat{\mathbf{MHC}} = \widehat{\mathbf{OHD}}$

Ta có: OD = OC (=$R_{(O)}$)

$\Rightarrow$ ΔODC cân tại O

Ta có: $\begin{cases} \Delta MAO \text{ vuông tại } A \ (MA \text{ là tt của } (O) \text{ tại } A) \\ AH \text{ là đường cao } (AB \perp OM \text{ tại } H) \end{cases}$

$\Rightarrow MA^2 = MH.MO\ (HTL)(\ \ )$

Mà $MA^2 = MC.MD\ (cmt)$

Nên : $MH.MO = MC.MD\ (= SA^2)$

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}$

Xét ΔMHC và ΔMDO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}\ (cmt) \\ \widehat{HMC} = \widehat{DMO}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta MHC \sim \Delta MDO\ (g - g)$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{D_2}$ (2g tương ứng)

=> Tứ giác CHOD nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện $\Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{OCD}$ (2g nt chắn $\overset{\frown}{DO}$)

Mà: $\begin{cases} \widehat{ODC} = \widehat{OCD}\ (\Delta ODC \text{ cân tại } O) \\ \widehat{ODC} = \widehat{MHC}\ (cmt) \end{cases}$

Nên: $\widehat{MHC} = \widehat{OHD}$

d) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt tại E, F. Chứng minh: CE = EF.

Gọi K là trung điểm của CD

$\Rightarrow OK \perp CD$ (qh đường kính và dây cung)

Ta có: MA // CE ($\perp$ AO)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$ *(2 góc đồng vị)*

Xét tứ giác MKOB, ta có:

$\begin{cases} \widehat{MKO} = 90^0\ (OK \perp CD) \\ \widehat{MBO} = 90^0\ (MB \text{ là tt của } (O) \text{ tại } B) \end{cases}$

$$=> \widehat{MKO}+\widehat{MBO}=90^0+90^0=180^0$$

=> Tứ giác MKOB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Mà: Tứ giác MAOB nt (cmt)

Nên: 5 điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

$$=> \widehat{B_1}=\widehat{M_1}\left(2g \text{ nt chắn } \overset{\frown}{AK}\right)$$

Mà: $\widehat{C_1}=\widehat{M_1}\ (\text{cmt})$

Nên: $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}\ \left(=\widehat{M_1}\right)$

=>Tứ giác BCEK nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =. => $\widehat{K_2}=\widehat{B_2}$ (2g nt chắn $\overset{\frown}{CE}$)

Mà: $\widehat{D_1}=\widehat{B_2}$ (2g nt (O) chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Nên: $\widehat{K_1}=\widehat{D_1}\ \left(=\widehat{B_2}\right)$

Lại có: 2 góc này ở vị trí đồng vị

Suy ra: KE // DF

Mặt khác: K là trung điểm của CD (gt)

Do đó: E là trung điểm của CF

=> CE = EF.

Bài 9. **Cho (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và một cát tuyến ANM với đường tròn.**

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp và AO $\perp$ BC tại H.

Xét Tứ giác ABOC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

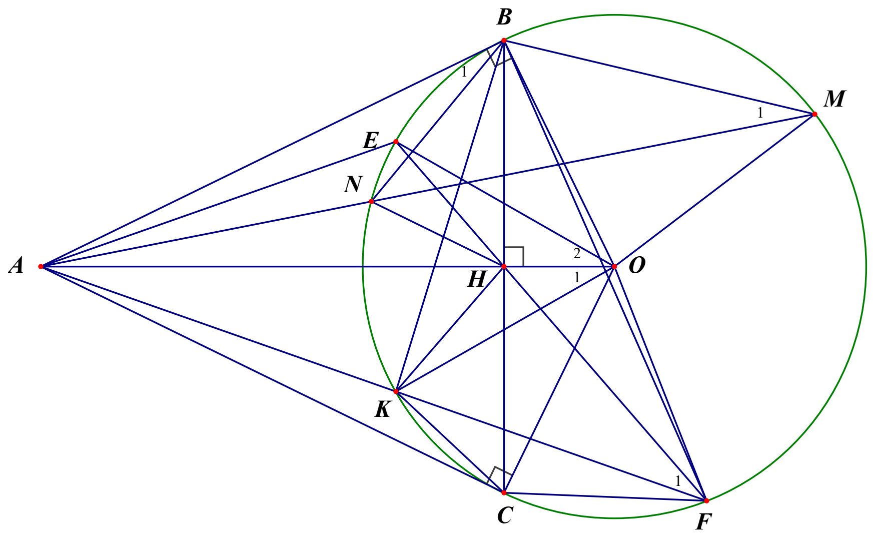
=> Tứ giác ABOC nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} AB = AC \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A}) \\ OB = OC \ (= R) \end{cases}$$

=> OA là trung trực của BC

=> OA $\perp$ BC tại H



b) Chứng minh: $AB^2 = AN.AM$.

Xét ΔABN và ΔAMB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{BMA} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{M_1} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BN}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABN \sim \Delta AMB \ (g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AN}{AB}$ (tsđd)

$\Rightarrow AB^2 = AN.AM$

c) Chứng minh: $\Delta ANH \sim \Delta AMO$.

Ta có: $\begin{cases} \Delta ABO \text{ vuông tại B } (AB \text{ là tt của (O) tại B}) \\ BH \text{ là đường cao } (BC \perp OA \text{ tại H}) \end{cases}$

$=> AB^2 = AH.AO\ (HTL)$

Mà $AB^2 = AN.AM\ (cmt)$

Nên : $AH.AO = AN.AM\ (= AB^2)$

$=> \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AN}{AO}$

Xét ΔAHN và ΔAMO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AN}{AO}\ (cmt) \\ \widehat{BAN} = \widehat{MAB}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$=> \Delta AHN \sim \Delta AMO$ (g – g)

d) Vẽ dây cung EF của (O) đi qua điểm H. Chứng minh: AO là tia phân giác của $\widehat{EAF}$.

Gọi K là giao điểm của AF và (O)

Xét ΔABK và ΔAFB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAK} = \widehat{FAB}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{ABK_1} = \widehat{AFB_1}\ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BK}) \end{cases}$$

$=> \Delta ABK \sim \Delta AFB$ (g – g)

$=> \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AK}{AB}\ (\text{tsđd})$

$=> AB^2 = AK.AF$

Mà $AB^2 = AH.AO(cmt)$

Nên : $AH.AO = AK.AF\ (= AB^2)$

$=> \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AK}{AO}$

Xét ΔAHK và ΔAFO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AK}{AO}\ (cmt) \\ \widehat{HAK} = \widehat{FAO}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$=> \Delta AHK \sim \Delta AFO$ (g – g)

$=> \widehat{AHK} = \widehat{AFO}$ *(2 góc tương ứng)*

=> Tứ giác KHOF nội tiếp vì có góc ngoài bằng góc trong đối diện => $\widehat{F_1} = \widehat{O_1}$ *(2g nt cùng chắn* $\overset{\frown}{HK}$*)*

Mà: $\widehat{F_1} = \dfrac{\widehat{KOE}}{2}$ *(góc nt và góc ở tâm của (O) chắn* $\overset{\frown}{EK}$*)*

Nên: $\widehat{O_1} = \dfrac{\widehat{KOE}}{2}\left(=\widehat{F_1}\right)$

=> Tia OA là tia phân giác của $\widehat{KOE}$ (OA nằm giữa 2 tia OE và OK).

$$=> \widehat{O_2} = \widehat{O_1} = \frac{\widehat{EOK}}{2}$$

$$=> \widehat{O_2} = \widehat{F_1}\left(=\widehat{O_1}\right)$$

=> Tứ giác AEOF nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

$$=> \begin{cases} \widehat{EAO} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{OE}}{1}\left(\text{gnt chắn } \overset{\frown}{OE}\right) \\ \widehat{FAO} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{OF}}{1}\left(\text{gnt chắn } \overset{\frown}{OF}\right) \end{cases}$$

$$\text{Mà : } OE = OF\left(=R_{(O)}\right)$$

$$\text{Nên : } \widehat{EAO} = \widehat{FAO}$$

=> AO là tia phân giác của $\widehat{EAF}$ (tia AO nằm giữa 2 tia AE và AF).

Bài 10. **Cho ΔABC nhọn (AB < AC) nội tiếp (O). Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF.**

a) Chứng minh: Tứ giác DHEC, BFEC nội tiếp.

Xét Tứ giác DHEC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{HEC} = 90^0 \ \left(BE \perp AC \text{ tại } E\right) \\ \widehat{HDC} = 90^0 \ \left(AD \perp BC \text{ tại } D\right) \end{cases}$$

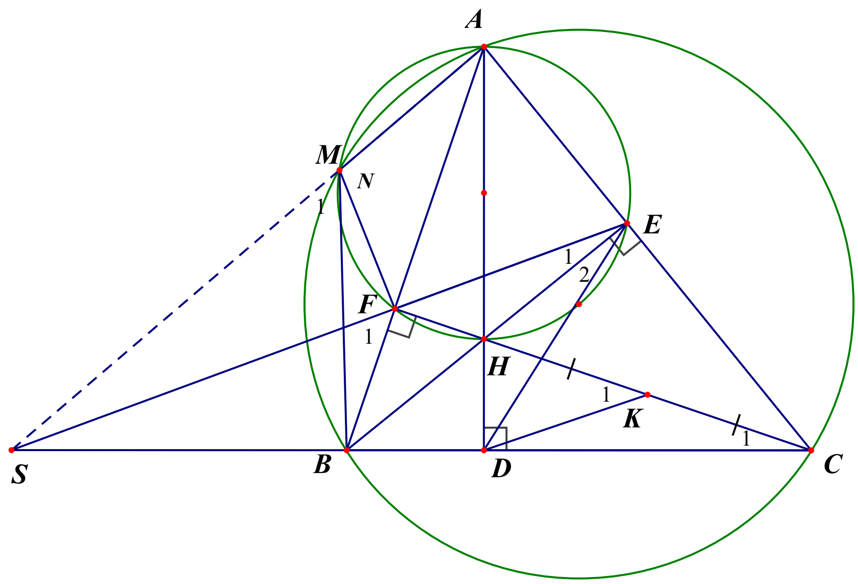
$$=> \widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác DHEC nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Xét tứ giác BFEC, ta có:

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác BFEC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.



b) Chứng minh: $AF.AB = AH.AD$.

Xét ΔAFH và ΔADB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFH} = \widehat{ADB} \left(= 90^0\right) \\ \widehat{FAH} = \widehat{DAB} \left(\text{góc chung}\right) \end{cases}$$

$=> \ \Delta AFH \sim \Delta ADB \ (g-g)$

$=> \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AH}{AB} \left(\text{tsđd}\right)$

=> $AF.AB = AH.AD$

c) Gọi K là trung điểm của HC. Chứng minh: BE là phân giác của $\widehat{FED}$ rồi suy ra: $\widehat{FED} = \widehat{FKD}$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \left(2\text{g nt của } (BFEC) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{BF}\right) \\ \widehat{E_2} = \widehat{C_1} \left(2\text{g nt của } (DHEC) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{DH}\right) \end{cases}$

$=> \ \widehat{E_1} = \widehat{E_2} \left(\widehat{C_1}\right)$

=> EB là tia phân giác của $\widehat{FED}$ (tia EB nằm giữa 2 tia EF, ED)

$=> \widehat{E_2} = \dfrac{\widehat{FED}}{2}$

Ta có: $\begin{cases} \Delta HEC \text{ nội tiếp } (DHEC) \left(\text{tg DHEC nội tiếp}\right) \\ \widehat{HEC} = 90^0 \ \left(BE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$

=> ΔHEC nội tiếp đường tròn đường kính HK

Mà K là trung điểm của HC

Nên K là tâm đường tròn tròn (HEC)

Hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác DHEC

$=> \widehat{E_2} = \dfrac{\widehat{K_1}}{2}$ (gnt và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{HD}$)

Mà: $\widehat{E_2} = \dfrac{\widehat{FED}}{2} \left(\text{cmt}\right)$

Nên: $\widehat{FED} = \widehat{HKD} \left(= \widehat{E_2}\right)$

d) Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại M. Chứng minh: AM, EF, BC đồng qui.

Xét Tứ giác AEHF, ta có:

$\begin{cases} \widehat{AEH} = 90^0 \ \left(BE \perp AC \text{ tại } E\right) \\ \widehat{AFH} = 90^0 \ \left(CF \perp AB \text{ tại } F\right) \end{cases}$

$=> \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác AEHF nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: $\begin{cases} \Delta AEH \text{ nội tiếp } (AEHF) \left(\text{tg AEHF nội tiếp}\right) \\ \widehat{AEC} = 90^0 \ \left(BE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$

=> ΔHEC nội tiếp đường tròn đường kính AH

Hay tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đk AH.

Gọi N là giao điểm của SA và (O)

=> Tứ giác AMBC nội tiếp (O)

Gọi S là giao điểm của EF và BC.

Xét ΔSNB và ΔSCA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{NSB} = \widehat{CSA} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{N_1} = \widehat{SCA} \text{ (góc ngoài = góc trong tứ giác ANBC nt)} \end{cases}$$

$$=> \ \Delta SNB \sim \Delta SCA \ (g-g)$$

$$=> \frac{SN}{SC} = \frac{SB}{SA} \text{ (tsđd)}$$

$$=> SN.SA = SB.SC$$

Xét ΔSFB và ΔSCE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{FSB} = \widehat{CSE} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{F_1} = \widehat{SCE} \text{ (góc ngoài = góc trong tứ giác BFEC nt)} \end{cases}$$

$$=> \ \Delta SFB \sim \Delta SCE \ (g-g)$$

$$=> \frac{SF}{SC} = \frac{SB}{SE} \text{ (tsđd)}$$

$$=> SF.SE = SB.SC$$

Mà: $SN.SA = SB.SC$ (cmt)

Nên: $SF.SE = SN.SA$ $(= SB.SC)$

$$=> \frac{SF}{SA} = \frac{SN}{SE}$$

Xét ΔSNF và ΔSEA, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{SF}{SA} = \dfrac{SN}{SE} \text{ (cmt)} \\ \widehat{NSF} = \widehat{ESA} \text{ (góc chung)} \end{cases}$$

$$=> \Delta SNF \sim \Delta SEA \ (g-g)$$

$=> \widehat{SNF} = \widehat{SEA}$ *(2 góc tương ứng)*

=> *Tứ giác ANFE nội tiếp vì có góc ngoài bằng góc trong đối diện*

Mà: AEHF nội tiếp đường tròn đk AH (cmt)

Nên: N thuộc đường tròn đk AH

Lại có: N là giao điểm của SA và (O) (gt)

Suy ra: N là giao điểm của (O) và đường tròn đk AH

Mặt khác: M là giao điểm của (O) và đường tròn đk AH (gt)

Do đó: $N \equiv M$

Vậy AM, EF, BC đồng qui tại S.

Bài 11. **Cho ΔABC nhọn (AB < AC). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB tại E và cắt AC tại F.**

a) Chứng minh: CE, BF là hai đường cao của ΔABC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{BEC} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đk BC}) \\ \widehat{BFC} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đk BC}) \end{cases}$

$$=> \begin{cases} CE \perp AB \text{ tại } E \\ BF \perp AC \text{ tại } F \end{cases}$$

=> CE và BF là hai đường cao của ΔABC.

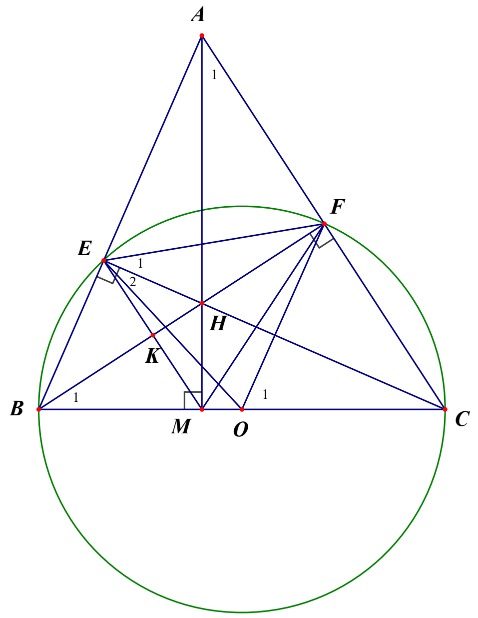
b) CE và BF cắt nhau tại H. Chứng minh: Tứ giác AEHF nội tiếp.

Xét Tứ giác AEHF, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AEH} = 90^0 \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ \widehat{AFH} = 90^0 \ (BF \perp AC \text{ tại } F) \end{cases}$$

=> $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác AEHF nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau



c) Kéo dài AH cắt BC tại M. Gọi K là giao điểm của EM và BH. Chứng minh: $BK.HF = BF.HK$.

Xét ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} BF \text{ là đường cao } (BF \perp AC \text{ tại } F) \\ CE \text{ là đường cao } (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ BF \text{ cắt } CE \text{ tại } H \ (gt) \end{cases}$$

=> H là trực tâm của ΔABC

=> AH là đường cao thứ ba của ΔABC

=> AH $\perp$ BC tại m.

Xét Tứ giác BEHM, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BEH} = 90^0 \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \\ \widehat{BMH} = 90^0 \ (AH \perp BC \text{ tại } M) \end{cases}$$

$=> \widehat{BEH} + \widehat{BMH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác BEHM nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

$=> \widehat{E_2} = \widehat{B_1}$ (2g nt chắn $\overset{\frown}{HM}$)

Mà: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \left(\text{phụ } \widehat{ABC}\right) \\ \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \left(\text{2g nt } (AEHF) \text{ chắn } \overset{\frown}{HF}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{E_2} = \widehat{E_1}$

=> EH là tia phân giác của $\widehat{FEK}$ (tia EH nằm giữa 2 tia EF, EK) $=> \dfrac{HK}{HF} = \dfrac{EK}{EF}$

(t/c đường phân giác) (1)

Ta có: $\begin{cases} \text{EH là tia phân giác của } \widehat{FEK} \ (\text{cmt}) \\ EH \perp BE \text{ tại E của } \Delta FEK \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \end{cases}$

=> BE là tia phân giác ngoại tại đỉnh E của ΔFEK

$=> \dfrac{BK}{BF} = \dfrac{EK}{EF}$ (t/c đường phân giác) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{HK}{HF} = \dfrac{BK}{BF} \left(= \dfrac{EK}{EF}\right)$

$=> HK.BF = BK.HF$

d) Chứng minh: $\widehat{KEO} = \widehat{OFM}$.

Ta có: OB = OF (= $R_{(O)}$)

=> ΔOBF cân tại O

$=> \widehat{B_1} = \widehat{OFB}$

Mà: $\widehat{O_1} = \widehat{B_1} + \widehat{OFB}$ (góc ngoài ΔOBF tại đỉnh O)

Nên: $\widehat{O_1} = \widehat{B_1} + \widehat{B_1} = 2\widehat{B_1}$

Lại có: $\begin{cases} \widehat{MEF} = 2\widehat{E_2} \ \left(\text{EH là tia phân giác } \widehat{FEM}\right) \\ \widehat{B_1} = \widehat{E_2} \ (\text{cmt}) \end{cases}$

Suy ra: $\widehat{O_1} = \widehat{MEF}$

=> Tứ giác OMEF nội tiếp vì có góc ngoài bằng góc trong đối diện.

=> $\widehat{MEO} = \widehat{OFM}$ (2g nt chắn $\overset{\frown}{MO}$)

Hay: $\widehat{KEO} = \widehat{OFM}$

Bài 12. **Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.**

a) Chứng minh: Tứ giác AEHD, BCDE là các tứ giác nội tiếp.

Xét Tứ giác ADHE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0 \ (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ \widehat{AEH} = 90^0 \ (CE \perp AB \text{ tại } E) \end{cases}$$

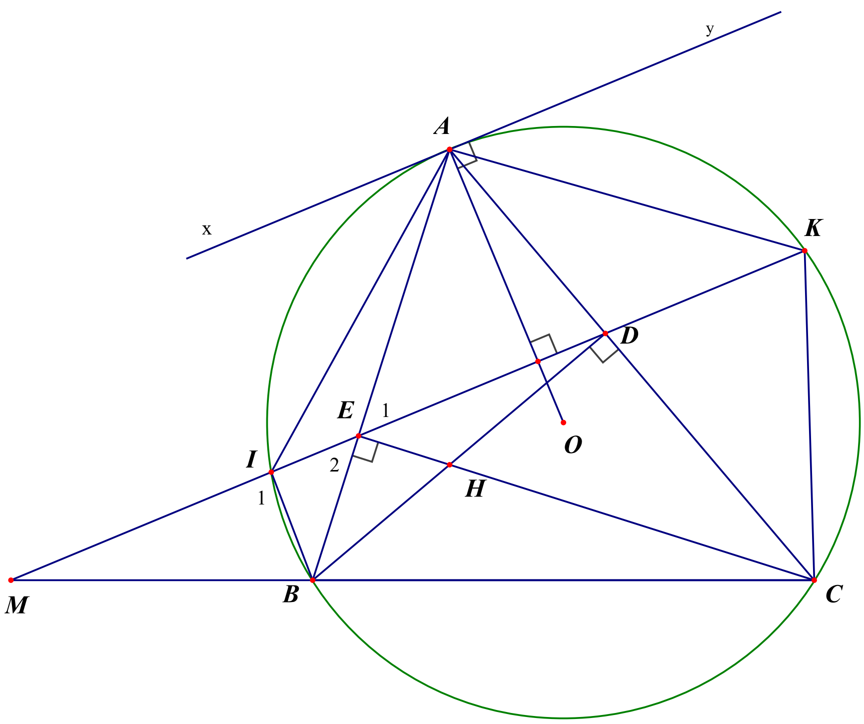
=> $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác ADHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Xét tứ giác BEDC, ta có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} \ (= 90^0)$

=> Tứ giác BEDC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.



b) Đường thẳng DE cắt (O) tại I, K và cắt đường thẳng BC tại M (I nằm giữa M và K). Chứng minh: $MI.MK = MB.MC$.

Xét ΔMIB và ΔMCK, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{IMB} = \widehat{CMK}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{I_1} = \widehat{MCK}\ (\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BMKI nt (O)}) \end{cases}$$

$$=> \ \Delta MIB \sim \Delta MCK\ (g-g)$$

$$=> \frac{MI}{MC} = \frac{MB}{MK}\ (\text{tsđd})$$

$$=> MI.MK = MB.MC$$

Xét ΔMEB và ΔMCD, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{EMB} = \widehat{CMK}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{E_1} = \widehat{SMK}\ (\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BDCE nt}) \end{cases}$$

$$=> \ \Delta MEB \sim \Delta MCD\ (g-g)$$

$$=> \frac{ME}{MC} = \frac{MB}{MD}\ (\text{tsđd})$$

$$=> ME.MD = MB.MC$$

Mà: $MI.MK = MB.MC\ (\text{cmt})$

Nên: $MI.MK = ME.MD\ (= MB.MC)$

c) Kẻ đường thẳng *xy* là tiếp tuyến tại A của (O). Chứng minh *xy* // MK.

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{xAB} = \widehat{ACB}\ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{AB}) \\ \widehat{E_1} = \widehat{ACB}\ (\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BCDE nt}) \end{cases}$$

$$=> \widehat{xAB} = \widehat{E_1}\ (= \widehat{ACB})$$

Mà 2 góc này vị trí slt

Nên xA // ED

=> xA // MK

d) Chứng minh: AI = AK.

Ta có: $\begin{cases} xA \perp OA\ (\text{xA là tt của (O) tại A}) \\ xA \,//\, MK\ (\text{cmt}) \end{cases}$

$$=> OA \perp MK$$

Hay $OA \perp IK$

=> A là điểm chính giữa $\overset{\frown}{IK}$

=> $sđ\overset{\frown}{AI} = sđ\overset{\frown}{AK}$

=> $AI = AK$

Bài 13. **Cho (O; R) đường kính BC và điểm A thuộc đường tròn sao cho AB < AC. Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A.**

a) Chứng minh: AD là tia phân giác của góc BAC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{BAD} = \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{BD} \left(gnt\ (O)\ chắn\ \overset{\frown}{BD}\right) \\ \widehat{CAD} = \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{CD} \left(gnt\ (O)\ chắn\ \overset{\frown}{CD}\right) \end{cases}$

Mà: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ (D là điểm nằm giữa $\overset{\frown}{BC}$)

Nên: $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

=> AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (tia AD nằm giữa aB, AC)

b) Tính DB theo R.

Ta có: D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

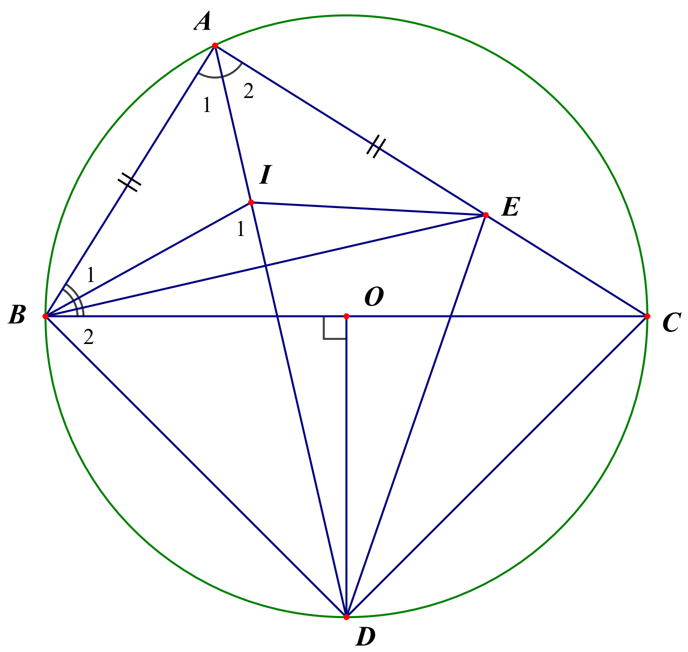
=> $OD \perp BC$ *tại O*

=> Δ *OBD vuông tại O*

=> $BD^2 = BO^2 + DO^2$ (Pytago)

=> $BD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

=> $BD = R\sqrt{2}$



c) Tia phân giác của góc ABC cắt AD tai I. Chứng minh: ΔBDI cân.

Ta có: $\widehat{I_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (góc ngoài ΔABI tại đỉnh I)

Mà: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \left(\text{AD là tia phân giác } \widehat{BAC}\right) \\ \widehat{B_2} = \widehat{A_2} \left(\text{2g nt (O) chắn } \overset{\frown}{DC}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{I_1} = \widehat{B_2} + \widehat{B_1}$

Lại có: $\widehat{B_1} = \widehat{IBC}$ (BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$)

Suy ra: $\widehat{I_1} = \widehat{B_2} + \widehat{IBC}$

=> $\widehat{I_1} = \widehat{IBD}$

=> ΔBDI cân tại D

d) Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Chứng minh: 4 điểm B, I, E,C cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: AE = AB (gt)

=> ΔABE cân tại A

Mà: AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (cmt)

Nên: AD là đường trung trực của BE

=> DB = DE

Ta có: sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{CD}$ (D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$)

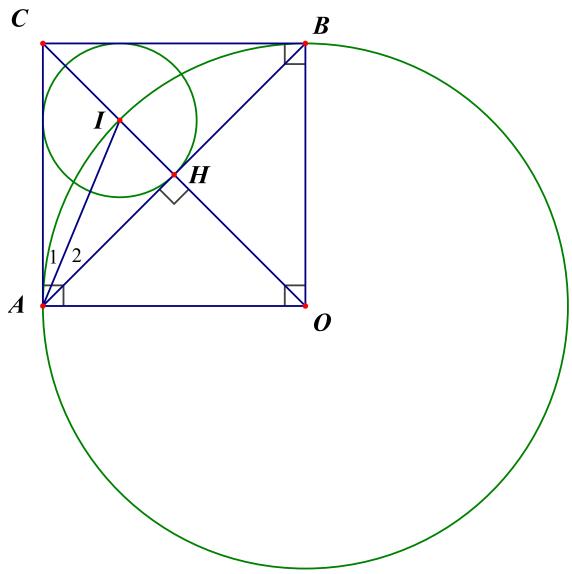
=> DB = DC

Ta có: $\begin{cases} DB = DI \left(\Delta BDI \text{ cân tại I}\right) \\ DB = DE \left(\text{cmt}\right) \\ DB = DC \left(\text{cmt}\right) \end{cases}$

=> DB = DI = DE = DC

=> Tứ giác BIEC nội tiếp vì có 4 đỉnh cách đều 1 điểm.

Bài 14. **Cho đường tròn (O; R) và A, B nằm trên (O) sao cho $\widehat{AOB}=90^0$. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại C.**



a) Tính AB theo R.

Ta có: ΔOAB vuông tại O ($\widehat{AOB}=90^0$)

$$=> AB^2 = AO^2 + BO^2 \left(\text{Pytago}\right)$$
$$=> AB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$
$$=> AB = R\sqrt{2}$$

b) Chứng minh: Tứ giác AOBC là hình vuông.

Xét tứ giác AOBC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CAO} = 90^0 \ (\text{CA là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{AOB} = 90^0 \ (\text{gt}) \\ \widehat{CBO} = 90^0 \ (\text{CB là tt của (O) tại B}) \end{cases}$$

=> *Tứ giác AOBC là chữ nhật vì có 3gv*

Mà: OA = OB ($R_{(O)}$)

Nên: hcn AOBC là hình vuông vì có 2c kề =.

c) OC cắt cung nhỏ AB tại I. Chứng minh: I là tâm đường trò nội tiếp ΔABC và tính bán kính đường tròn đó theo R.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} CA = CB \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại C}) \\ OA = OB \ (= R) \end{cases}$$

=> OC là trung trực của AB

=> OC $\perp$ AB tại H

Xét (O), ta có:

OC là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ (t/c 2 tt cắt nhau tại C)

Mà: OC cắt $\overset{\frown}{AB}$ tại I (gt)

Nên: I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

=> sđ$\overset{\frown}{AI}$ = sđ$\overset{\frown}{BI}$

$$\text{Mà}: \begin{cases} \widehat{A_1} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AI}}{2} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn } \overset{\frown}{AI}) \\ \widehat{A_2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BI}}{2} \ (\text{góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BI}) \end{cases}$$

Nên: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

=> AI là tia phân giác của $\widehat{CAB}$ (tia AI nằm giữa 2 tia AC, AO)

$$\text{Lại có: } \begin{cases} \text{CH là tia phân giác của } \widehat{ACB} \ (\text{cmt}) \\ \text{CH cắt AI tại I (gt)} \end{cases}$$

Suy ra: I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Xét (I), ta có:

AB $\perp$ IH tại H (CO $\perp$ AB tại H)

IH là bán kính (I)

Ta có: $S_{AOB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}OA.OB$

$=> OH=\frac{OA.OB}{AB}=\frac{R.R}{R\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $IH+OH=OI$ (H nằm giữa I và O)

$=> IH=OI-OH=R-\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{2R-R\sqrt{2}}{2}$

d) Tính AI theo R.

Ta có: H là trung điểm của AB (OC là trung trực của AB tại H)

$=> AH=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Ta có: ΔAIH vuông tại H ($OC\perp AB$ tại H)

$=> AI^2=AH^2+HI^2\ (Pytago)$

$=> AI^2=\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(R-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}+R^2-R^2\sqrt{2}+\frac{R^2}{2}$

$=AI^2=2R^2-R^2\sqrt{2}=R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$

$=> AI=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Bài 15. **Cho $\triangle$ABC có 3 góc nhọn (AB < AC) có đường cao AH. Vẽ HD $\perp$ AB tại D và HE $\perp$ AC tại E.**

a) Chứng minh: AD.AB = AE.AC.

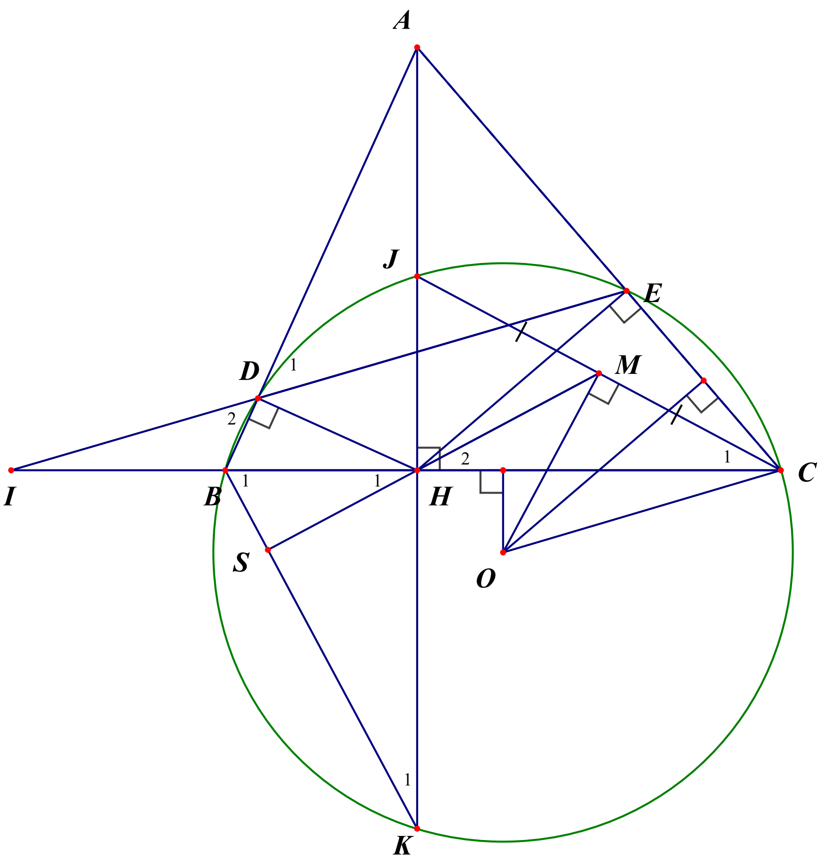
Ta có: $\begin{cases} \triangle ABH \text{ vuông tại } H\left(AH \perp BC \text{ tại } H\right) \\ HD \text{ là đường cao}\left(HD \perp AB \text{ tại } D\right) \end{cases}$

=>$AH^2 = AD.AB$ (HTL) (1)

Ta có: $\begin{cases} \triangle ACH \text{ vuông tại } H\left(AH \perp BC \text{ tại } H\right) \\ HE \text{ là đường cao}\left(HE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$

=>$AH^2 = AE.AC$ (HTL) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AD.AB = AE.AC (= AH^2)



b) Chứng minh: Các tứ giác ADHE và BDEC nội tiếp.

Xét Tứ giác ADHE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0 \left(HD \perp AB \text{ tại } D\right) \\ \widehat{AEH} = 90^0 \left(HE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$$

$$=> \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác ADHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: AD.AB = AE.AC (cmt)

$$=> \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Xét ΔADE và ΔACB, ta có:

$$\begin{cases} \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \left(\text{cmt}\right) \\ \widehat{EAD} = \widehat{BAC} \left(\text{góc chung}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ (g – g)

=> $\widehat{D_1} = \widehat{ACB}$ (2g tương ứng)

=> Tứ giác BCED nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện.

c) DE cắt BC tại I. Chứng minh: ID.IE = IB.IC.

Xét ΔIDB và ΔICE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{DIB} = \widehat{CIE} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{D_1} = \widehat{ICE} \left(\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BCED nt}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta IDB \sim \Delta ICE\ (g-g)$

$$=> \frac{ID}{IC} = \frac{IB}{IE} \left(\text{tsđd}\right)$$

=> ID.IE = IB.IC

d) Gọi (O; R) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác BDEC. Đường thẳng AH cắt (O) tại J và K (J nằm giữa A và H). Gọi M là trung điểm của JC. Tính $MH^2 + MO^2$ theo R và chứng minh MH $\perp$ BK.

Ta có: (O) ngoại tiếp tứ giác BDEC (gt)

=> O là giao điểm hai đường trung trực của BC và CE

Ta có: M là trung điểm của JC (gt)

=> OM $\perp$ JC tại M (qh đường kính và dây cung)

=> ΔOCM vuông tại M

=> $OM^2 + MC^2 = OC^2$ (Pytago)

=> $OM^2 + MC^2 = R^2_{(O)}$

Gọi S là giao điểm của MH và BK

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta\text{CHJ vuông tại H } \left(AH \perp BC\right) \\ \text{HM là đường trung tuyến } \left(\text{M là trung điểm của CJ}\right) \end{cases}$$

$$=> BM = CM = \frac{CJ}{2}$$

=> ΔHMC cân tại M

=> $\widehat{C_1} = \widehat{H_2}$

Mà: $\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{K_1} \left(2\text{g nt (O) chắn } \overset{\frown}{BJ}\right) \\ \widehat{H_2} = \widehat{H_1} \left(\text{đđ}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{K_1} = \widehat{H_2}$

Lại có: $\widehat{K_1} + \widehat{B_1} = 90^0 \left(\Delta\text{BHK vuông tại H}\right)$

Suy ra: $\widehat{H_1} + \widehat{B_1} = 90^0$

=> ΔBHS vuông tại S

=> MH $\perp$ BK tại S.

Bài 16. **Cho (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn AB lấy điểm M (M khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ là N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở P.**

a) Chứng minh: Tứ giác OMNP nội tiếp.

Xét tứ giác OMNP, ta có:

$\widehat{OMP} = \widehat{ONP}\left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác OMNP nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

b) Chứng minh: Tứ giác CMPO là hình bình hành.

Ta có: CO // MP $\left(\perp AB\right)$

=> $\hat{C} = \widehat{M_1}$ (2g đồng vị)

Mà: $\begin{cases} \hat{C} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2} \left(\text{gnt và góc ở tâm (O) chắn } \overset{\frown}{ND}\right) \\ \widehat{M_1} = \widehat{O_1} \left(\text{2g nt chắn } \overset{\frown}{NP} \text{ của tứ giác OMNP nội tiếp}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{O_1} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2}$

=> OP là tia phân giác của $\widehat{NOD}$

=> $\widehat{O_2} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2}$

=> $\widehat{O_2} = \hat{C}\left(= \dfrac{\widehat{NOD}}{2}\right)$

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị

Nên: CM // OP

Lại có: CO // MP (cmt)

Suy ra: Tứ giác CMPO là hình bình hành vì có 2cc //.

c) Chứng minh: Tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Ta có: $\widehat{CND} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk CD)

Xét ΔCOM và ΔCND, ta có:

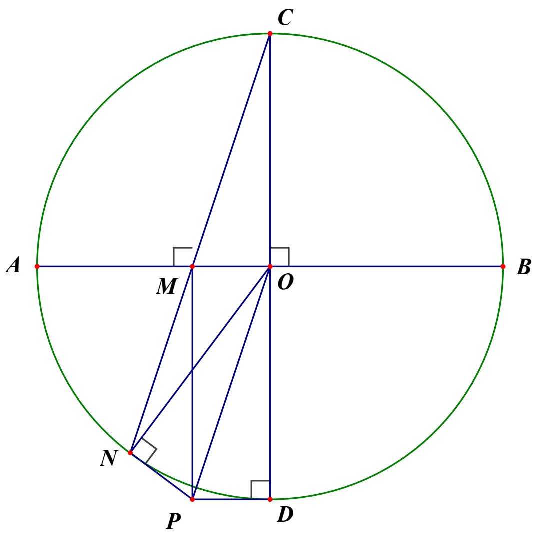
$\begin{cases} \widehat{OCM} = \widehat{NCD} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{COM} = \widehat{CND} \left(= 90^0\right) \end{cases}$

=> $\Delta COM \sim \Delta CND$ (g – g)

=> $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CO}{CN}$ (tsđd)

=> $CM.CN = CO.CD = R.2R = 2R^2 = const$

Vậy tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên AB.



d) Chứng minh: PD là tiếp tuyến của (O).

Xét ΔPDO và ΔPNO, ta có:

$$\begin{cases} DO = NO\left(=R_{(O)}\right) \\ \widehat{O_2} = \widehat{O_1}\left(\text{OP là tia phân giác của } \widehat{NOD}\right) \\ OP = OP\left(\text{cạnh chung}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta PDO = \Delta PNO$ $(c - g - c)$

=> $\widehat{PDO} = \widehat{PNO}$ (2g tương ứng)

Mà: $\widehat{PNO} = 90^0$ (PN là tiếp tuyến của (O) tại N)

Nên: $\widehat{PDO} = 90^0$

=> $PD \perp OD$ tại $D \in (O)$

=> PD là tiếp tuyến của (O) tại D.

Bài 17. **Cho (O; R) đường kính BC và điểm A thuộc đường tròn sao cho AB < AC. Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A.**

a) Chứng minh: AD là tia phân giác của góc BAC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\ \left(\text{gnt } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{BD}\right) \\ \widehat{CAD} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD}\ \left(\text{gnt } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{CD}\right) \end{cases}$

Mà: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ (D là điểm nằm giữa $\overset{\frown}{BC}$)

Nên: $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

=> AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (tia AD nằm giữa aB, AC)

b) Tính DB theo R.

Ta có: D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

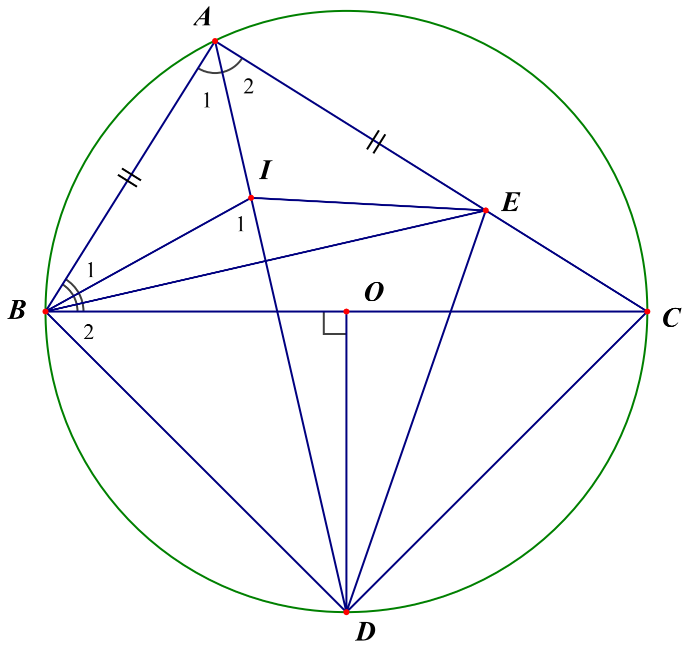
=> $OD \perp BC$ *tại O*

=> Δ *OBD vuông tại O*

=> $BD^2 = BO^2 + DO^2$ (Pytago)

=> $BD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

=> $BD = R\sqrt{2}$



c) Tia phân giác của góc ABC cắt AD tai I. Chứng minh: ΔBDI cân.

Ta có: $\widehat{I_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (góc ngoài ΔABI tại đỉnh I)

Mà: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \left(\text{AD là tia phân giác } \widehat{BAC}\right) \\ \widehat{B_2} = \widehat{A_2} \left(\text{2g nt (O) chắn } \overset{\frown}{DC}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{I_1} = \widehat{B_2} + \widehat{B_1}$

Lại có: $\widehat{B_1} = \widehat{IBC}$ (BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$)

Suy ra: $\widehat{I_1} = \widehat{B_2} + \widehat{IBC}$

=> $\widehat{I_1} = \widehat{IBD}$

=> ΔBDI cân tại D

d) Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Chứng minh: 4 điểm B, I, E,C cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: AE = AB (gt)

=> ΔABE cân tại A

Mà: AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (cmt)

Nên: AD là đường trung trực của BE

=> DB = DE

Ta có: $sđ\overset{\frown}{BD} = sđ\overset{\frown}{CD}$ (D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$)

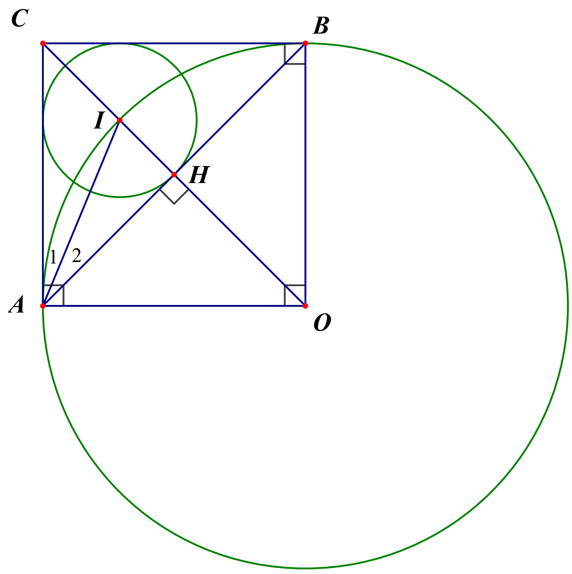
=> DB = DC

Ta có: $\begin{cases} DB = DI\ (\Delta BDI \text{ cân tại I}) \\ DB = DE\ (\text{cmt}) \\ DB = DC\ (\text{cmt}) \end{cases}$

=> DB = DI = DE = DC

=> Tứ giác BIEC nội tiếp vì có 4 đỉnh cách đều 1 điểm.

Bài 18. **Cho đường tròn (O; R) và A, B nằm trên (O) sao cho $\widehat{AOB} = 90^0$. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại C.**



a) Tính AB theo R.

Ta có: ΔOAB vuông tại O ($\widehat{AOB} = 90^0$)

$$=> AB^2 = AO^2 + BO^2 \ (\text{Pytago})$$

$$=> AB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$=> AB = R\sqrt{2}$$

b) Chứng minh: Tứ giác AOBC là hình vuông.

Xét tứ giác AOBC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CAO} = 90^0 \ (\text{CA là tt của (O) tại A}) \\ \widehat{AOB} = 90^0 \ (\text{gt}) \\ \widehat{CBO} = 90^0 \ (\text{CB là tt của (O) tại B}) \end{cases}$$

=> *Tứ giác AOBC là chữ nhật vì có 3gv*

Mà: OA = OB ($R_{(O)}$)

Nên: hcn AOBC là hình vuông vì có 2c kề =.

c) OC cắt cung nhỏ AB tại I. Chứng minh: I là tâm đường trò nội tiếp ΔABC và tính bán kính đường tròn đó theo R.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} CA = CB \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại C}) \\ OA = OB \ (= R) \end{cases}$$

=> OC là trung trực của AB

=> OC $\perp$ AB tại H

Xét (O), ta có:

OC là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ (t/c 2 tt cắt nhau tại C)

Mà: OC cắt $\overset{\frown}{AB}$ tại I (gt)

Nên: I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$

=> $sđ\overset{\frown}{AI} = sđ\overset{\frown}{BI}$

$$\text{Mà}: \begin{cases} \widehat{A_1} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AI}}{2} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn } \overset{\frown}{AI}) \\ \widehat{A_2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BI}}{2} \ (\text{góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BI}) \end{cases}$$

Nên: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

=> AI là tia phân giác của $\widehat{CAB}$ (tia AI nằm giữa 2 tia AC, AO)

$$\text{Lại có: } \begin{cases} \text{CH là tia phân giác của } \widehat{ACB} \ (\text{cmt}) \\ \text{CH cắt AI tại I } (\text{gt}) \end{cases}$$

Suy ra: I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Xét (I), ta có:

$AB \perp IH$ tại H ($CO \perp AB$ tại H)

IH là bán kính (I)

Ta có: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}OA.OB$

$=> OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{R.R}{R\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $IH + OH = OI$ (H nằm giữa I và O)

$=> IH = OI - OH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{2}}{2}$

d) Tính AI theo R.

Ta có: H là trung điểm của AB (OC là trung trực của AB tại H)

$=> AH = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Ta có: ΔAIH vuông tại H ($OC \perp AB$ tại H)

$=> AI^2 = AH^2 + HI^2$ (Pytago)

$=> AI^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} + R^2 - R^2\sqrt{2} + \frac{R^2}{2}$

$= AI^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{2} = R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$

$=> AI = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Bài 19. **Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn (AB < AC) có đường cao AH. Vẽ HD $\perp$ AB tại D và HE $\perp$ AC tại E.**

a) Chứng minh: AD.AB = AE.AC.

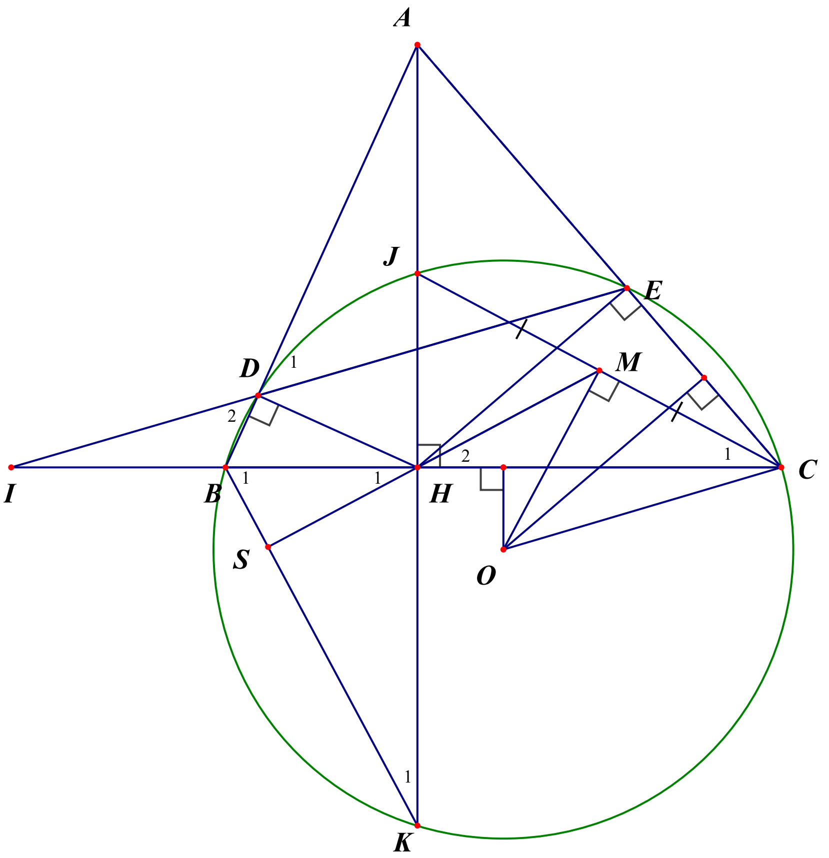
Ta có: $\begin{cases} \triangle ABH \text{ vuông tại } H \left(AH \perp BC \text{ tại } H\right) \\ HD \text{ là đường cao} \left(HD \perp AB \text{ tại } D\right) \end{cases}$

=> $AH^2 = AD.AB$ (HTL) (1)

Ta có: $\begin{cases} \triangle ACH \text{ vuông tại } H \left(AH \perp BC \text{ tại } H\right) \\ HE \text{ là đường cao} \left(HE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$

=> $AH^2 = AE.AC$ (HTL) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AD.AB = AE.AC$ $(= AH^2)$



b) Chứng minh: Các tứ giác ADHE và BDEC nội tiếp.

Xét Tứ giác ADHE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0 \ \left(HD \perp AB \text{ tại } D\right) \\ \widehat{AEH} = 90^0 \ \left(HE \perp AC \text{ tại } E\right) \end{cases}$$

$$=> \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác ADHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

Ta có: AD.AB = AE.AC (cmt)

$$=> \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Xét ΔADE và ΔACB, ta có:

$$\begin{cases} \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \left(\text{cmt}\right) \\ \widehat{EAD} = \widehat{BAC} \left(\text{góc chung}\right) \end{cases}$$

$=> \Delta ADE \sim \Delta ACB$ (g – g)

$=> \widehat{D_1} = \widehat{ACB} \left(\text{2g tương ứng}\right)$

=> Tứ giác BCED nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện.

c) DE cắt BC tại I. Chứng minh: ID.IE = IB.IC.

Xét ΔIDB và ΔICE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{DIB} = \widehat{CIE} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{D_1} = \widehat{ICE} \left(\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BCED nt}\right) \end{cases}$$

$=> \Delta IDB \sim \Delta ICE\ (g - g)$

$$=> \frac{ID}{IC} = \frac{IB}{IE} \left(\text{tsđd}\right)$$

=> ID.IE = IB.IC

d) Gọi (O; R) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác BDEC. Đường thẳng AH cắt (O) tại J và K (J nằm giữa A và H). Gọi M là trung điểm của JC. Tính $MH^2 + MO^2$ theo R và chứng minh MH $\perp$ BK.

Ta có: (O) ngoại tiếp tứ giác BDEC (gt)

=> O là giao điểm hai đường trung trực của BC và CE

Ta có: M là trung điểm của JC (gt)

$=> OM \perp JC$ tại M (qh đường kính và dây cung)

$=> \Delta OCM$ vuông tại M

$=> OM^2 + MC^2 = OC^2 \left(\text{Pytago}\right)$

$=> OM^2 + MC^2 = R^2_{(O)}$

Gọi S là giao điểm của MH và BK

Ta có: $\begin{cases} \Delta CHJ \text{ vuông tại H } \left(AH \perp BC\right) \\ \text{HM là đường trung tuyến } \left(\text{M là trung điểm của CJ}\right) \end{cases}$

$$=> BM = CM = \frac{CJ}{2}$$

$=> \Delta HMC$ cân tại M

$=> \widehat{C_1} = \widehat{H_2}$

Mà: $\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{K_1} \left(2g \text{ nt } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{BJ}\right) \\ \widehat{H_2} = \widehat{H_1} \left(\text{đđ}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{K_1} = \widehat{H_2}$

Lại có: $\widehat{K_1} + \widehat{B_1} = 90^0$ $\left(\Delta BHK \text{ vuông tại } H\right)$

Suy ra: $\widehat{H_1} + \widehat{B_1} = 90^0$

=> ΔBHS vuông tại S

=> MH $\perp$ BK tại S.

Bài 20. **Cho (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn AB lấy điểm M (M khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ là N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở P.**

a) Chứng minh: Tứ giác OMNP nội tiếp.

Xét tứ giác OMNP, ta có:

$\widehat{OMP} = \widehat{ONP}\left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác OMNP nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

b) Chứng minh: Tứ giác CMPO là hình bình hành.

Ta có: $CO \,//\, MP\ \left(\perp AB\right)$

=> $\hat{C} = \widehat{M_1}$ (2g đồng vị)

Mà: $\begin{cases} \hat{C} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2}\left(\text{gnt và góc ở tâm (O) chắn } \overset{\frown}{ND}\right) \\ \widehat{M_1} = \widehat{O_1}\left(\text{2g nt chắn } \overset{\frown}{NP} \text{ của tứ giác OMNP nội tiếp}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{O_1} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2}$

=> OP là tia phân giác của $\widehat{NOD}$

=> $\widehat{O_2} = \dfrac{\widehat{NOD}}{2}$

=> $\widehat{O_2} = \hat{C}\left(= \dfrac{\widehat{NOD}}{2}\right)$

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị

Nên: CM // OP

Lại có: CO // MP (cmt)

Suy ra: Tứ giác CMPO là hình bình hành vì có 2cc //.

c) Chứng minh: Tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Ta có: $\widehat{CND} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk CD)

Xét ΔCOM và ΔCND, ta có:

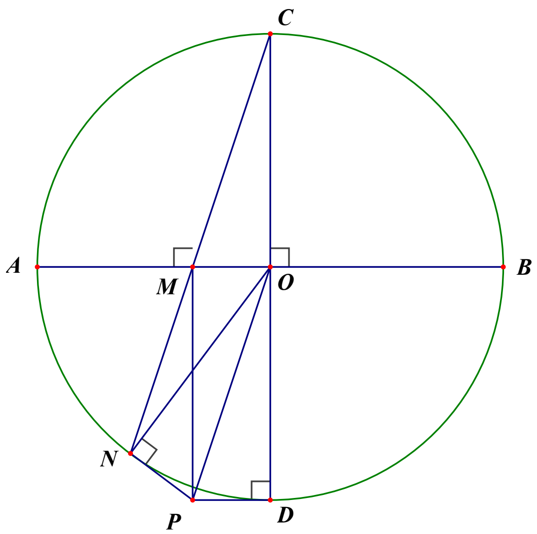
$\begin{cases} \widehat{OCM} = \widehat{NCD}\left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{COM} = \widehat{CND}\left(= 90^0\right) \end{cases}$

=> $\Delta COM \sim \Delta CND$ (g – g)

=> $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CO}{CN}$ (tsđd)

=> $CM.CN = CO.CD = R.2R = 2R^2 = const$

Vậy tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên AB.



d) Chứng minh: PD là tiếp tuyến của (O).

Xét ΔPDO và ΔPNO, ta có:

$$\begin{cases} DO = NO\left(= R_{(O)}\right) \\ \widehat{O_2} = \widehat{O_1}\left(\text{OP là tia phân giác của } \widehat{NOD}\right) \\ OP = OP\left(\text{cạnh chung}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta PDO = \Delta PNO$ (c – g – c)

=> $\widehat{PDO} = \widehat{PNO}$ (2g tương ứng)

Mà: $\widehat{PNO} = 90^0$ (PN là tiếp tuyến của (O) tại N)

Nên: $\widehat{PDO} = 90^0$

=> $PD \perp OD$ tại $D \in (O)$

=> PD là tiếp tuyến của (O) tại D.

Bài 21. **Cho ΔABC nội tiếp (O) và tia phân giác góc A cắt đường tròn (O) tại M. Vẽ đường cao AH cắt đường tròn (O) tại N.**

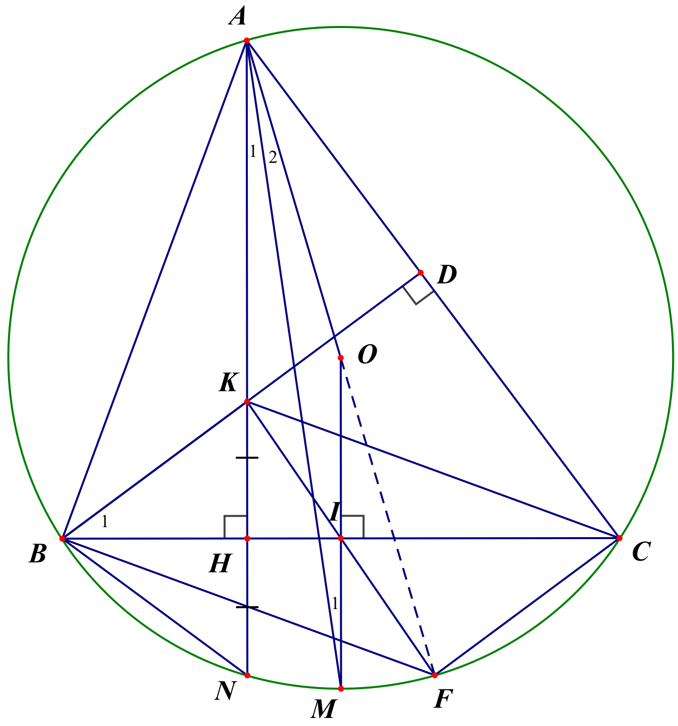
a) Chứng minh: OM đi qua trung điểm I của dây BC.

Ta có: $$\begin{cases} \widehat{BAM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\left(\text{gnt } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{BM}\right) \\ \widehat{CAM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CM}\left(\text{gnt } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{CM}\right) \\ \widehat{BAM} = \widehat{CAM}\left(\text{AM là tia phân giác của } \widehat{BAC}\right) \end{cases}$$

=> $\text{sđ}\overset{\frown}{BM} = \text{sđ}\overset{\frown}{CM}$

=> M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

=> $OM \perp BC$ tại trung điểm I (qh đường kính và dây cung)



b) Chứng minh: AM là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \ (\text{AH là đường cao của } \Delta ABC) \\ OM \perp BC \ (\text{cmt}) \end{cases}$

=> $AM // OM$

=> $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (2g slt)

Ta có: OA = OM ($R_{(O)}$)

=> ΔOAM cân tại O

=> $\widehat{A_2} = \widehat{M_1}$

Mà: $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cmt)

Nên: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ $\left(= \widehat{M_1}\right)$

=> AM là phân giác của $\widehat{OAH}$ (Tia AM nằm giữa 2 tia AK, AO)

c) Gọi K là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh: K là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi D là giao điểm của AK và AC.

Xét ΔBKN, ta có:

$\begin{cases} \text{BH là đường cao } (AH \perp BC \text{ tại H}) \\ \text{BH là đường trung tuyến } (\text{H là trung điểm của KN}) \end{cases}$

=> ΔBKN cân tại B

=> BH là tia phân giác của $\widehat{NBK}$

=> $\widehat{NBH} = \widehat{B_1}$

Mà: $\widehat{NBH} = \widehat{HAC}$ (2 góc nt (O) cùng chắn $\overset{\frown}{NC}$)

Nên: $\widehat{B_1} = \widehat{HAC} \left(= \widehat{NBH}\right)$

Lại có: $\widehat{HAC} + \widehat{ACB} = 90^0$ (ΔACH vuông tại H)

Suy ra: $\widehat{B_1} + \widehat{ACB} = 90^0$

=> ΔBDC vuông tại D

=> $BD \perp AC$ tại D

Xét ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} AH \text{ là đường cao } (AH \perp BC \text{ tại } H) \\ BD \text{ là đường cao } (BD \perp AC \text{ tại } D) \\ AH \text{ cắt } BD \text{ tại } K \ (gt) \end{cases}$$

=> K là trực tâm của ΔABC.

d) KI cắt đường tròn (O) tại F trên cung nhỏ BC. Chứng minh: A, O, F thẳng hàng.

Kẻ đường kính AS của đường tròn (O).

Ta có: $\widehat{ACS} = 90^0$ (gnt chắn nửa đường tròn (O) đường kính AS)

=> $SC \perp AC$ tại C

Mà: BK $\perp$ AC tại D (cmt)

Nên: SC // BK ($\perp$ AC)

Ta có: $\widehat{ABS} = 90^0$ (gnt chắn nửa đường tròn (O) đường kính AS)

=> $SB \perp AB$ tại B

Mà: CK $\perp$ AB (K là trực tâm ΔABC)

Nên: SB // CK ($\perp$ AB)

Lại có: SC // BK (cmt)

Suy ra: Tứ giác BKCS là hình bình hành vì có 2 ccđ //.

Mặt khác: I là trung điểm của đường chéo BC (gt)

Do đó: I trung điểm của KS

=> K, I, S thẳng hàng

=> KI cắt (O) tại S trên cung nhỏ BC

Mà: KI cắt (O) tại F trên cung nhỏ BC (gt)

Nên: S $\equiv$ F

=> A, O, F thẳng hàng.

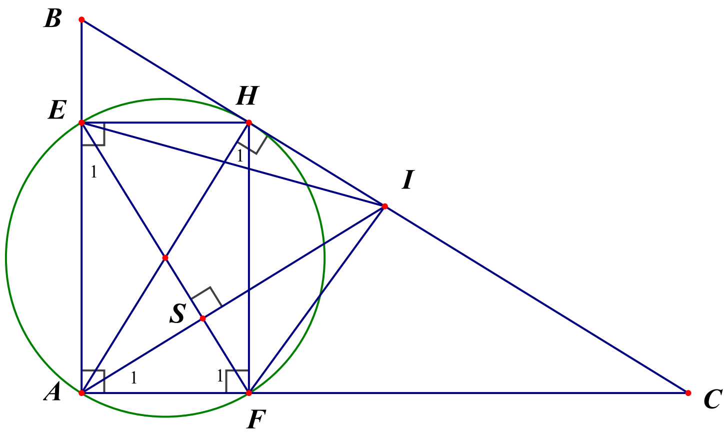
Bài 22. **Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH. Vẽ đường tròn đường kính AH cắt AB tại E và cắt cạnh AC tại F.**

a) Chứng minh: Tứ giác AEHF là hình chữ nhật.

Xét tứ giác AEHF, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{EAF} = 90^0 \ (\Delta ABC \text{ vuông tại A}) \\ \widehat{AEH} = 90 \ (\text{gnt đường tròn đường kính AH}) \\ \widehat{AFH} = 90 \ (\text{gnt đường tròn đường kính AH}) \end{cases}$$

=> Tứ giác AEHF là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.



b) Chứng minh: Tứ giác BEFC nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_1} + \widehat{HAF} = 90^0 \ (\Delta HAF \text{ vuông tại F}) \\ \widehat{C} + \widehat{HAF} = 90^0 \ (\Delta HAC \text{ vuông tại H}) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{C} \ (\text{phụ } \widehat{HAF})$

Mà: $\widehat{H_1} = \widehat{E_1}$ (2gnt đường tròn đường kính AH chắn $\overset{\frown}{AF}$)

Nên: $\widehat{E_1} = \widehat{C} \ (= \widehat{H_1})$

=> Tứ giác BEFC nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh: AI $\perp$ EF.

Ta có: $\begin{cases} \Delta ABC \text{ vuông tại A (gt)} \\ \text{AI là trung tuyến (I là trung điểm của BC)} \end{cases}$

$\Rightarrow AI = CI = \dfrac{BC}{2}$

=> Δ AIC cân tại I

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$

Mà: $\begin{cases} \widehat{C} + \widehat{B} = 90^0 \ (\Delta ABC \text{ vuông tại A}) \\ \widehat{F_1} = \widehat{B} \ (\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BEFC nội tiếp}) \end{cases}$

Nên: $\widehat{A_1} + \widehat{F_1} = 90^0$

=> Δ ASF vuông tại S

=> AI $\perp$ EF.

d) Cho AB = 3cm, AC = 4cm. Tính diện tích tứ giác IEAF.

Ta có: Δ ABC vuông tại A (gt)

$$=> BC^2 = AB^2 + AC^2 \ (Pytago)$$
$$=> BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$
$$=> BC = 5cm$$

Mà: $AI = \frac{BC}{2}(cmt)$

Nên: $AI = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}(cm)$

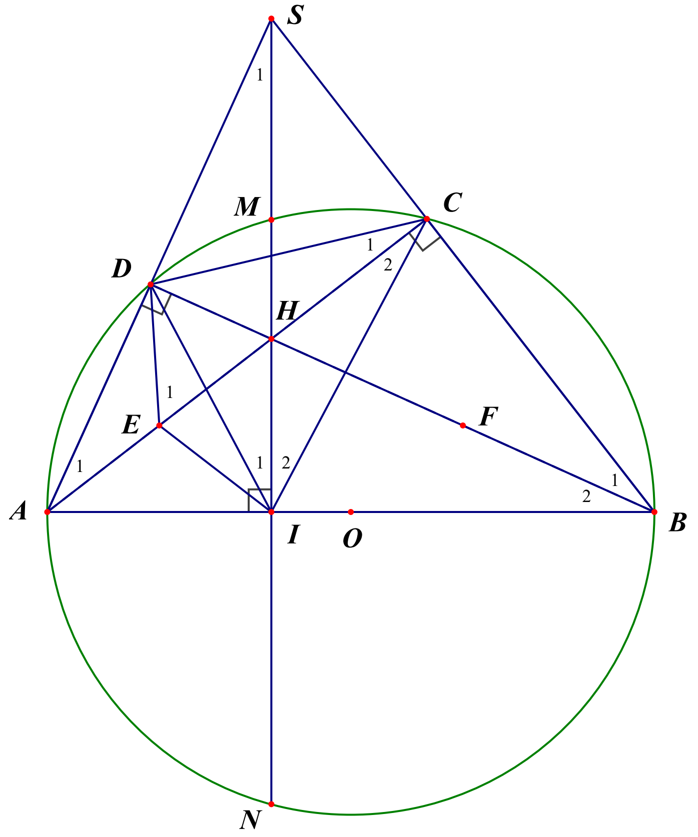
Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC$

$$=> AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$$

Tứ giác IEAF có hai đường chéo AI $\perp$ EF (cmt)

Nên: $S_{IEAF} = \frac{1}{2}AI.EF = \frac{1}{2}.\frac{5}{2}.\frac{12}{5} = 3(cm^2)$.

Bài 23. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có đường kính AB, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại H. Dựng HI vuông góc với AB tại I.



a) Chứng minh: Các tứ giác ADHI và BCHI nội tiếp. Xác định tâm E và F của các đường tròn.

Xét tứ giác ADHI, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0 \left(\text{gnt chắn nửa (O) đường kính AB}\right) \\ \widehat{AIH} = 90^0 \left(HI \perp AB\right) \end{cases}$$

$$=> \widehat{ADH} + \widehat{AIH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=>Tứ giác ADHI nội tiếp vì có 2g đối bù nhau.

Ta có: $\begin{cases} \Delta ADH \text{ nội tiếp } (ADHI) \left(\text{tg ADHI nội tiếp}\right) \\ \widehat{ADH} = 90^0 \ (\text{cmt}) \end{cases}$

=> Δ ADH nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Tâm E là trung điểm của đường kính AH

Hay E là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHI

Xét tứ giác BCHI, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BCH} = 90^0 \left(\text{gnt chắn nửa (O) đường kính AB}\right) \\ \widehat{BIH} = 90^0 \left(HI \perp AB\right) \end{cases}$$

$$=> \widehat{BCH} + \widehat{BIH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=>Tứ giác BCHI nội tiếp vì có 2g đối bù nhau.

Ta có: $\begin{cases} \Delta BCH \text{ nội tiếp } (BCHI) \left(\text{tg BCHI nội tiếp}\right) \\ \widehat{BCH} = 90^0 \ (\text{cmt}) \end{cases}$

=> Δ BCH nội tiếp đường tròn đường kính BH

=> Tâm F là trung điểm của đường kính BH

Hay F là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHI

b) Chứng minh: HI là tia phân giác của góc DIC. Suy ra: H là tâm của đường tròn nội tiếp ΔDIC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{I_1} = \widehat{A_1} \left(\text{2gnt } (ADHI) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{DH}\right) \\ \widehat{I_2} = \widehat{B_1} \left(\text{2gnt } (BCHI) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{CH}\right) \\ \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \left(\text{2gnt } (O) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{DC}\right) \end{cases}$

=> $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$

=> IH là tia phân giác của $\widehat{DIC}$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{B_2} \left(\text{2gnt } (O) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{AD}\right) \\ \widehat{C_2} = \widehat{B_2} \left(\text{2gnt } (BCHI) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{CH}\right) \end{cases}$

=> $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}\left(= \widehat{B_2}\right)$

=> CH là tia phân giác của $\widehat{DCI}$.

Xét ΔDCI, ta có:

$$\begin{cases} \text{IH là tia phân giác } \widehat{DIC}\ (\text{cmt}) \\ \text{CH là tia phân giác } \widehat{DCI}\ (\text{cmt}) \\ \text{IH cắt CH tại H } (\text{gt}) \end{cases}$$

=> H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDCI

c) Chứng minh: Tứ giác DEIC nội tiếp.

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{E_1} = 2\widehat{A_1} \; \left(\text{góc ở tâm và gnt của } (ADHI) \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{DH}\right) \\ \widehat{DIC} = 2\widehat{I_1} \; \left(\text{IH là tia phân giác của } \widehat{DIC}\right) \\ \widehat{A_1} = \widehat{I_1} \; (\text{cmt}) \end{cases}$$

=> $\widehat{E_1} = \widehat{DIC}$

=> Tứ giác DEIC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=.

d) AD cắt BC tại S. Tia SH cắt (O) tại M và N.

Chứng minh: $SM.SN = SH.SI$.

Xét ΔABS, ta có:

$$\begin{cases} \text{AC là đường cao } \left(\widehat{ACB} = 90^0\right) \\ \text{BD là đường cao } \left(\widehat{BDA} = 90^0\right) \\ \text{AC cắt BD tại H } (\text{gt}) \end{cases}$$

=> H là trực tâm của ΔABS.

=> SH là đường cao thứ 3 của ΔABS

=> $SH \perp AB$

Mà: $HI \perp AB$ (gt)

Nên: $SH \equiv HI$ ($\perp AB$)

=> S, H, I thẳng hàng.

Ta có: $OI \perp MN \; (HI \perp AB)$

=> I là trung điểm của MN (qh đường kính và dây cung)

=> IM = IN.

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AB)

=> ΔAMB vuông tại M

Mà: MI là đường cao ($OI \perp MN$)

Nên: $MI^2 = AI.BI \quad (\text{HTL})$.

Xét ΔSAI và ΔBHI, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{SIA} = \widehat{BIH} \left(= 90^0\right) \\ \widehat{S_1} = \widehat{B_2} \left(\text{phụ } \widehat{BAS}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta SAI \backsim \Delta BHI$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{SI}{BI} = \frac{AI}{HI} \quad (\text{tsđd})$$

$$\Rightarrow SI.HI = BI.AI$$

$$\Rightarrow SI(SI - SH) = MI^2 \ (MI^2 = AI.BI)$$

$$\Rightarrow SI^2 - SH.SI = MI^2$$

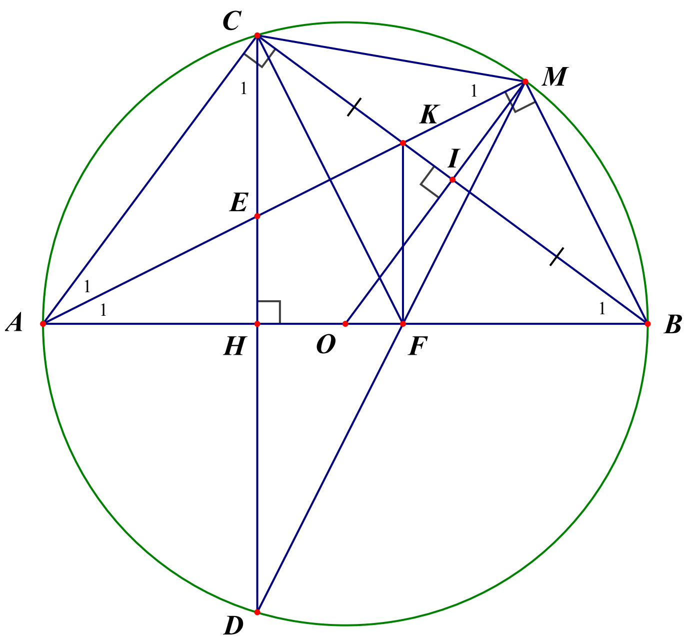
$$\Rightarrow SI^2 - MI^2 = SH.SI$$

$$\Rightarrow (SI - MI)(SI + MI) = SH.SI$$

$$\Rightarrow SM.(SI + NI) = SH.SI \quad (IM = NI)$$

$$\Rightarrow SM.SN = SH.SI$$

Bài 24. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của BC. Tia OI cắt đường tròn (O) tại M.



a) Chứng minh: Tứ giác OICH nội tiếp.

Xét (O), ta có:

I là trung điểm của BC (gt)

=> $OI \perp BC$ tại I (qh đường kính và dây cung)

Xét Tứ giác OICH, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{OIC} = 90^0 \ (OI \perp BC \text{ tại } I) \\ \widehat{OHC} = 90^0 \ (AB \perp CD \text{ tại } H) \end{cases}$$

=> $\widehat{OIC} + \widehat{OHC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác OICH nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

b) Gọi E là giao điểm của AM và CD.

Chứng minh: $AC^2 = AE.AM$.

Xét (O), ta có:

$OA \perp CD$ tại H (gt)

=> A là điểm chính giữa $\overset{\frown}{CD}$

=> sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{AD}$

Xét ΔACE và ΔAMC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{M_1} \ (\text{2gnt (O) chắn 2 cung AD, AC có số đo = nhau}) \\ \widehat{CAE} = \widehat{MAC} \ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

=> $\Delta ACE \backsim \Delta AMC$ (g – g)

=> $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC}$ (tsđd)

=> $AC^2 = AE.AM$

c) Gọi K là giao điểm của AM và BC, F là giao điểm của DM với AB. Chứng minh: KF // CD.

Xét tứ giác BMKF, ta có:

$\widehat{KMF} = \widehat{KBF}$ (2gnt (O) chắn 2 cung AD và AC có số đo = nhau)

=> Tứ giác BMKF nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=.

=> $\widehat{KFM} = \widehat{KBM}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{KM}$)

Mà: $\widehat{CDM} = \widehat{KBM}$ (2gnt (O) cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$)

Nên: $\widehat{KFM} = \widehat{CDM} \ (= \widehat{CBM})$

Mặt khác: 2 góc này ở vị trí đồng vị

Do đó: KF // CD.

d) Cho $\widehat{ABC} = 30^0$. Tính KC theo R.

Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AB)

=> Δ ABC vuông tại C

Suy ra:

- $AC = AB.\sin\widehat{ABC} = 2R.\sin 30^0 = 2R.\frac{1}{2} = R \ (ts\lg)$
- $BC = AB.\cos\widehat{ABC} = 2R.\cos 30^0 = 2R.\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \quad (ts\lg)$

Xét (O), ta có:

OM $\perp$ BC tại I (cmt)

=> M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

=> $sđ\overset{\frown}{MC} = sđ\overset{\frown}{MB}$

Mà: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MC} \left(gnt \ (O) \ chắn \ \overset{\frown}{MC}\right) \\ \widehat{A_2} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MB} \left(gnt \ (O) \ chắn \ \overset{\frown}{MB}\right) \end{cases}$

Nên: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

=> AK là tia phân giác của $\widehat{CAB}$ (tia AK nằm giữa tia AC, AB)

=> $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ (t/c đường phân giác)

=> $\frac{KC}{1} = \frac{KB}{2} = \frac{KC+KB}{1+2} = \frac{BC}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

=> $KC = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

Bài 25. **Cho điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB. AC (B, C là hai tiếp điểm). OA cắt BC tại H.**

a) Chứng minh: $OA \perp BC$ **tại H và** $AB^2 = AH.AO$.

Xét (O), ta có:

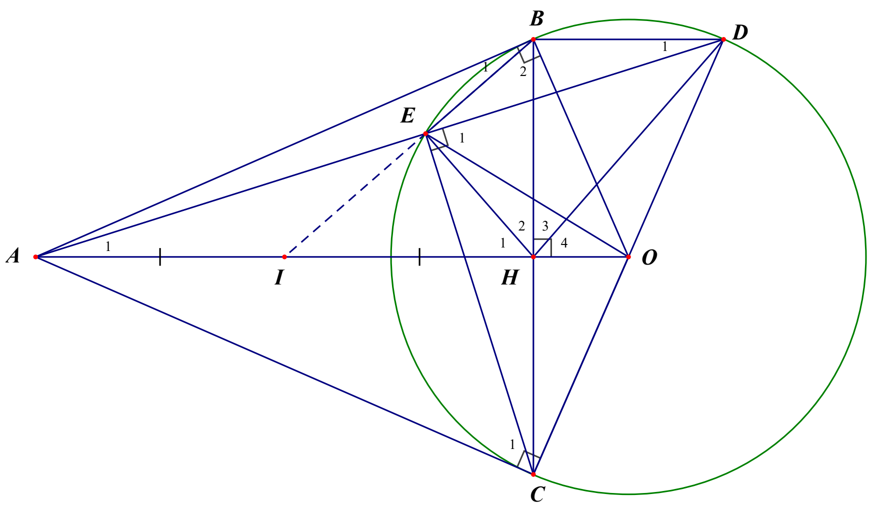
$$\begin{cases} AB = AC \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A}) \\ OB = OC \ (= R) \end{cases}$$

=> OA là trung trực của BC

=> OA $\perp$ BC tại H

Ta có: $\begin{cases} \Delta ABO \text{ vuông tại B } (\text{AB là tiếp tuyến của (O) tai B}) \\ \text{BH là đường cao } (AO \perp BC \text{ tại H}) \end{cases}$

=> $AB^2 = AH.AO$ (HTL)



b) Kẻ đường kính CD của đường tròn (O), đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh: CHEA nội tiếp.

Ta có: $\widehat{CED} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính CD)

=> CE $\perp$ AD tại E

Xét tứ giác CHEA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AEC} = 90^0 \ (CE \perp AD) \\ \widehat{AHC} = 90^0 \ (AO \perp BC) \end{cases}$$

=> $\widehat{AEC} + \widehat{AHC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác CHEA nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

c) Chứng minh: HB là tia phân giác của $\widehat{DHE}$.

Ta có: OD = OE (= R(O))

=> ΔODE cân tại O

=> $\widehat{E_1} = \widehat{EDO}$

Ta có: Tứ giác CHEA nội tiếp (cmt)

=> $\widehat{H_1} = \widehat{C_1}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Mà: $\widehat{EDO} = \widehat{C_1}$ (gnt với góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn $\overset{\frown}{CE}$)

Nên: $\widehat{H_1} = \widehat{EDO}\left(=\widehat{C_1}\right)$

=> Tứ giác EHOD nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện

=> $\widehat{H_4} = \widehat{E_1}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{DO}$)

Mà: $\begin{cases} \widehat{EDO} = \widehat{E_1}\ (\text{cmt}) \\ \widehat{EDO} = \widehat{H_1}\ (\text{cmt}) \end{cases}$

Nên: $\widehat{H_1} = \widehat{H_4}$.

Mặt khác: $\begin{cases} \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0\ (AO \perp BH) \\ \widehat{H_4} + \widehat{H_3} = 90^0\ (AO \perp BH) \end{cases}$

Do đó: $\widehat{H_2} = \widehat{H_3}$

=> HB là phân giác của $\widehat{DHE}$ (tia HB nằm giữa 2 tia HE, HD)

d) Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh: B, I, E thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_1} = \widehat{EDO}\,(\text{cmt}) \\ \widehat{B_2} = \widehat{EDO}\,\left(\text{2gnt (O) cùng chắn } \overset{\frown}{CE}\right) \end{cases}$

$=> \widehat{H_1} = \widehat{B_2}\,\left(= \widehat{EDO}\right)$

Mà: $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0\,(AO \perp BH)$

Nên: $\widehat{B_2} + \widehat{H_2} = 90^0$

=> ΔBEH vuông tại E

Ta có: $\widehat{CBD} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính CD)

=> $BC \perp BD$ tại B

Mà: $BC \perp AO$ (cmt)

Nên: BD // AO

$=> \widehat{A_1} = \widehat{D_1}\,(\text{2g slt})$

Lại có: $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}\,(\text{cmt})$

Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}\,\left(\widehat{D_1}\right)$

Xét ΔAIE và ΔBIA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AIE} = \widehat{BIA}\,(\text{góc chung}) \\ \widehat{A_1} = \widehat{B_1}\,(\text{cmt}) \end{cases}$$

=> $\Delta AIE \sim \Delta BIA$ (g – g)

$=> \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{EI}{AI}\,(\text{tsđd})$

$=> AI^2 = EI.BI\ (1)$

Ta có: $\begin{cases} \Delta BHI \text{ vuông tại H } (AO \perp BC \text{ tại H}) \\ \text{HE là đường cao } (HE \perp BE \text{ tại E}) \end{cases}$

$=> IH^2 = EI.BI\,(\text{HTL})$

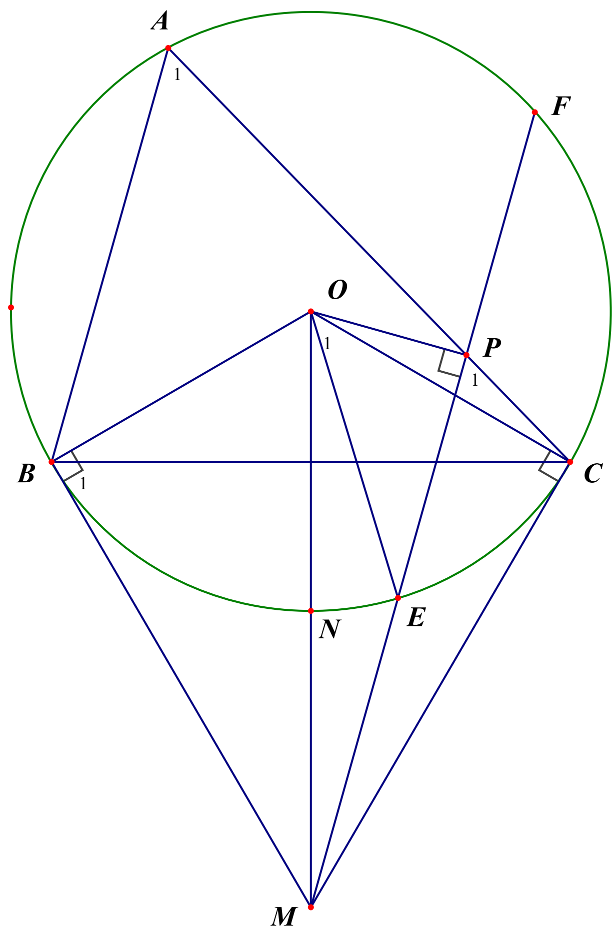
Mà $AI^2 = EI.BI\,(\text{cmt})$

Nên : $IH^2 = AI^2\,(= EI.BI)$

=> $IH = IA$

=> I là trung điểm của AH (I nằm giữa A và H)

Bài 26. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Tiếp tuyến tại B và tại C của (O) cắt nhau tại M. Gọi N là điểm chính giữa cung nhỏ BC.



a) Chứng minh: Tứ giác MCOB nội tiếp.

Xét Tứ giác MCOB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MBO} = 90^0 \ (\text{MB là tiếp tuyến của (O) tại B}) \\ \widehat{MCO} = 90^0 \ (\text{MC là tiếp tuyến của (O) tại C}) \end{cases}$$

=> $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác MCOB nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

b) Chứng minh: 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

Ta có: N là điểm chính giữa cung nhỏ BC (gt)

=> ON $\perp$ BC (qh đường kính và dây cung)

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} MB = MC \ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M}) \\ OB = OC \ (= R) \end{cases}$$

=> OM là trung trực của BC

=> OM $\perp$ BC

Mà: ON $\perp$ BC (cmt)

Nên: OM $\equiv$ ON ($\perp$ BC)

=> M, O, N thẳng hàng.

c) Vẽ cát tuyến MEF song song với AB cắt AC tại P. Chứng minh: OP $\perp$ EF.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{P_1} = \widehat{A_1} \ (\text{2g đv và MF // BA}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với gnt (O) chắn } \overset{\frown}{BC}) \end{cases}$

=> $\widehat{P_1} = \widehat{B_1} \ (= \widehat{A_1})$

=> Tứ giác MBPC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

Mà: Tứ giác MCOB nội tiếp (cmt)

Nên: 5 điểm M, C, P, O, B cùng thuộc một đường tròn

=> $\widehat{MPO} = \widehat{MCO}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{OM}$)

Lại có: $\widehat{MCO} = 90^0$ (MC là tiếp tuyến của (O) tại C)

Suy ra: $\widehat{MPO} = 90^0$

=> OP $\perp$ MP

Hay: OP $\perp$ EF

d) Cho $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính $MP^2 - PE^2$ theo R.

Ta có: OM là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ (t/c 2 tt (O) cắt nhau tại M)

=> $\widehat{O_1} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

Mà: $\widehat{A_1} = \dfrac{\overset{\frown}{BOC}}{2}$ (gnt với góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Nên: $\widehat{O_1} = \widehat{A_1}\left(= \dfrac{\overset{\frown}{BOC}}{2}\right)$

$=> \widehat{O_1} = 60^0 \left(\widehat{A_1} = 60^0\right)$

Ta có: ΔMOC vuông tại C (MC là tiếp tuyến của (O))

$=> \cos\widehat{O_1} = \dfrac{OC}{MO} \qquad (ts\lg)$

$=> MO = \dfrac{OC}{\cos 60^0} = \dfrac{R}{\frac{1}{2}} = 2R$

Ta có: ΔMOP vuông tại P ($OP \perp MP$)

$=> MP^2 + OP^2 = MO^2 \qquad (\text{Pytago})$

$=> MP^2 = MO^2 - OP^2$

Ta có: ΔOPE vuông tại P ($OP \perp MP$)

$=> EP^2 + OP^2 = EO^2 \quad (\text{Pytago})$

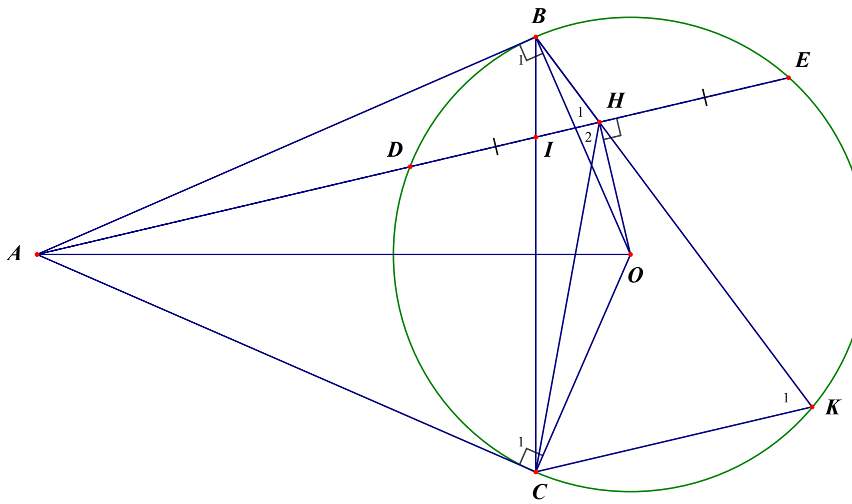
$=> EP^2 = EO^2 - OP^2$

Ta có: $MP^2 - PE^2 = MO^2 - OP^2 - \left(EO^2 - OP^2\right)$

$= MO^2 - OP^2 - EO^2 + OP^2$

$= MO^2 - EO^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Bài 27. **Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE. H là trung điểm của DE.**



a) Chứng minh: Tứ giác BHOC nội tiếp.

Ta có: H là trung điểm của DE (gt)

=> $OH \perp DE$ (qh đường kính và dây cung)

Xét tứ giác ABHO, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \widehat{AHO} = 90^0 \ (OH \perp AH \text{ tại H}) \end{cases}$$

=> $\widehat{ABO} = \widehat{AHO} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác ABHO nội tiếp vì 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

Xét tứ giác ABOC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

=> $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác ABOC nội tiếp vì có 2 đối bù nhau.

Mà: Tứ giác ABHO nội tiếp (cmt)

Nên: 5 điểm A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn

=> Tứ giác BHOC nội tiếp.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của góc BHC.

Ta có: AB = AC (t/c 2tt của (O) cắt nhau tại A)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_1} = \dfrac{sđ\overparen{AB}}{2} \left(gnt\left(ABHC\right) \text{ chắn } \overparen{AB}\right) \\ \widehat{H_2} = \dfrac{sđ\overparen{AC}}{2} \left(gnt\left(ABHC\right) \text{ chắn } \overparen{AC}\right) \\ sđ\overparen{AB} = sđ\overparen{AC} \left(AB = AC\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2}$

=> HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$ (tia HA nằm giữa tia HB, HC)

c) Gọi I là giao điểm của BC và DE.

Chứng minh: $AB^2 = AI.AH$.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_1} = \dfrac{sđ\overparen{AB}}{2} \left(gnt\left(ABHC\right) \text{ chắn } \overparen{AB}\right) \\ \widehat{B_1} = \dfrac{sđ\overparen{AC}}{2} \left(gnt\left(ABHC\right) \text{ chắn } \overparen{AC}\right) \\ sđ\overparen{AB} = sđ\overparen{AC} \left(AB = AC\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{B_1}$

Xét ΔABI và ΔAHB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAI} = \widehat{HAB} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{B_1} = \widehat{H_1} \left(cmt\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABI \backsim \Delta AHB$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AI}{AB} \left(tsđd\right)$$
$$\Rightarrow AB^2 = AI.AH$$

d) BH cắt đường tròn tại K. Chứng minh: AE // CK.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_1} = \widehat{C_1} \left(2gnt\left(ABHC\right) \text{ cùng chắn } \overparen{AB}\right) \\ \widehat{K_1} = \widehat{C_1} \left(\text{gnt với góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn } \overparen{BC}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_1} \left(= \widehat{C_1}\right)$

Mà: 2 góc này ở vị trí đồng vị

Nên: AE // CK

Bài 28. **Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC (AB < AC). Vẽ đường cao AH, gọi M là trung điểm AC.**

a) Chứng minh: Tứ giác AHOM nội tiếp.

Ta có: M là trung điểm của AC (gt)

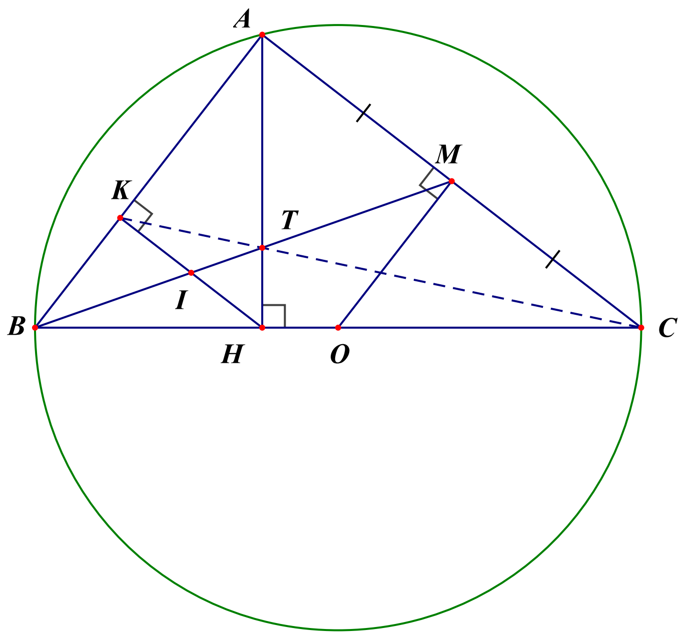
=> $OM \perp AC$ (qh đường kính và dây cung trong (O))

Xét tứ giác AHOM, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AMO} = 90^0 \ (OM \perp AC) \\ \widehat{AHO} = 90^0 \ (AH \perp BC) \end{cases}$$

=> $\widehat{AMO} + \widehat{AHO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác AHOM nội tiếp vì có 2g đối bù nhau.



b) Chứng minh: $CH.CO = CM.CA$.

Xét ΔCHA và ΔCMO, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ACH} = \widehat{OCM} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{CHA} = \widehat{MCO} \ (\text{cmt}) \end{cases}$$

=> $\Delta CHA \backsim \Delta CMO$ (g – g)

=> $\dfrac{CH}{CM} = \dfrac{CA}{CO}$ (tsđd)

=> $CH.CO = CM.CA$

c) Từ H vẽ HK vuông góc với AB tại K, BM cắt HK và AH lần lượt tại I và T. Chứng minh: IH = IK.

Ta có: $\widehat{BAC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính BC)

=> AB $\perp$ AC tại A

Mà: AB $\perp$ KH (gt)

Nên: AC // KH ($\perp$ AB)

Xét ΔBAM, ta có:

KI // AM (KH // AM)

$$=> \frac{KI}{AM} = \frac{BI}{BM} (\text{HQ Talet}) \quad (1)$$

Xét ΔBCM, ta có:

HI // CM (KH // AM)

$$=> \frac{HI}{CM} = \frac{BI}{BM} (\text{HQ Talet}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{KI}{AM} = \frac{HI}{CM} \quad \left(= \frac{BI}{BM}\right)$

Mà: AM = CM (M là trung điểm của AC)

Nên: KI = HI

=> I là trung điểm của KH (I nằm giữa K, H).

d) Chứng minh: C, T, K thẳng hàng.

Xét ΔATM, ta có:

HI // AM (KH // AM)

$$=> \frac{HI}{AM} = \frac{IT}{MT} (\text{HQ Talet})$$

Mà: $\begin{cases} HI = IK \ (\text{I là trung điểm của KH}) \\ AM = MC \ (\text{M là trung điểm của AC}) \end{cases}$

Nên: $\frac{IK}{MC} = \frac{IT}{MT}$

Xét ΔIKT và ΔMCT, ta có:

$$\begin{cases} \frac{IK}{MC} = \frac{IT}{MT} \ (\text{cmt}) \\ \widehat{TIK} = \widehat{TMC} \ (\text{2g slt và HK // AC}) \end{cases}$$

=> ΔIKT $\backsim$ ΔMCT (c – g – c)

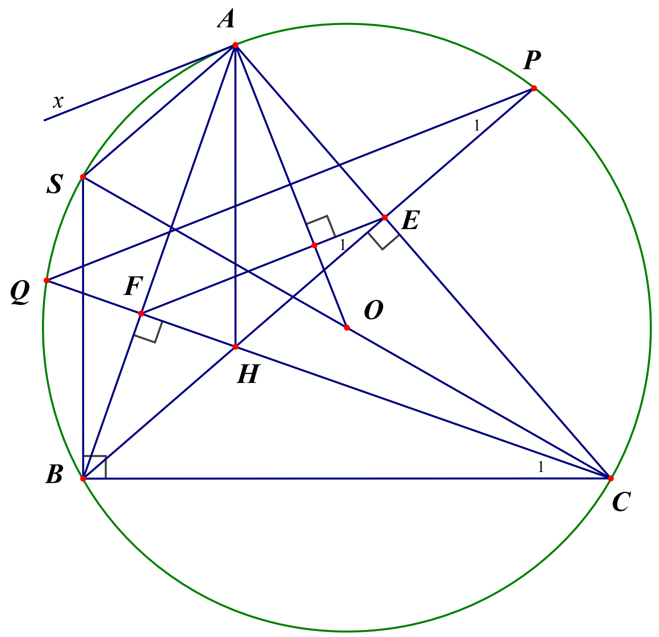
=> $\widehat{KTI} = \widehat{CTM}$ (2g tương ứng)

Mà: $\widehat{KTI}+\widehat{KTM}=180^0$ (I, T, M thẳng hàng)

Nên: $\widehat{CTM}+\widehat{KTM}=180^0$

=> C, T, K thẳng hàng.

Bài 29. **Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp (O; R). Hai đường cao BE và CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H.**



a) Chứng minh: Tứ giác BFEC nội tiếp.

Xét tứ giác BFEC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BFC} = 90^0 \ (\text{CF là đường cao của } \Delta ABC) \\ \widehat{BEC} = 90^0 \ (\text{BE là đường cao của } \Delta ABC) \end{cases}$$

=> $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác BFEC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=.

b) Hai đường cao BE và CF cắt đường tròn (O) tại P và Q.
Chứng minh: EF // PQ.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \left(\text{2gnt (BFEC) cùng chắn } \overset{\frown}{BF}\right) \\ \widehat{P_1} = \widehat{C_1} \left(\text{2gnt (O) cùng chắn } \overset{\frown}{BQ}\right) \end{cases}$

=> $\widehat{E_1} = \widehat{P_1} \left(= \widehat{C_1}\right)$

Mà: 2 góc này ở vị trí đồng vị

Nên: EF // PQ.

c) Chứng minh: OA $\perp$ EF.

Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) tại A

=> $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tt và dc với gnt (O) chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Mà: $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài = góc trong đối diện của tg BFEC nội tiếp)

Nên: $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}\left(=\widehat{ACB}\right)$

Lại có: 2 góc này ở vị trí slt
Suy ra: xA // EF
Mặt khác: xA ⊥ OA (xA là tiếp tuyến của (O))
Do đó: OA ⊥ EF

d) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp Δ AEF theo R.

Xét tứ giác AEHF, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFH} = 90^0 \ (\text{CF là đường cao của } \Delta ABC) \\ \widehat{AEF} = 90^0 \ (\text{BE là đường cao của } \Delta ABC) \end{cases}$$

=> $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác AEHF nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau.

Ta có: $\begin{cases} \Delta AEH \text{ nt } (AEHF) \ (\text{tg } AEHF \text{ nt}) \\ \widehat{AEH} = 90^0 \ (\text{cmt}) \end{cases}$

Nên: Δ AEH nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH

=> Δ AEF nội tiếp đường tròn đường kính AH

Xét Δ ABC, ta có:

$$\begin{cases} \text{BE là đường cao (gt)} \\ \text{CF là đường cao (gt)} \\ \text{BE cắt CF tại H (gt)} \end{cases}$$

=> H là trực tâm của Δ ABC.

=> AH là đường cao thứ 3 của Δ ABC

=> AH ⊥ BC

Kẻ đường kính CS của (O)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CBS} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đường kính CS}) \\ \widehat{CAS} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đường kính CS}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} SB \perp BC \\ SA \perp CA \end{cases}$$

Xét tứ giác AHBS, ta có:

$$\begin{cases} AS\ //\ BH\ (\perp AC) \\ AH\ //\ BS\ (\perp BC) \end{cases}$$

=> Tứ giác AHBS là hình bình hành vì có 2ccđ //
=> AH = BS

Ta có: ΔBSC vuông tại B (gt)

$=> BS^2 + BC^2 = CS^2 \quad (\text{Pytago})$

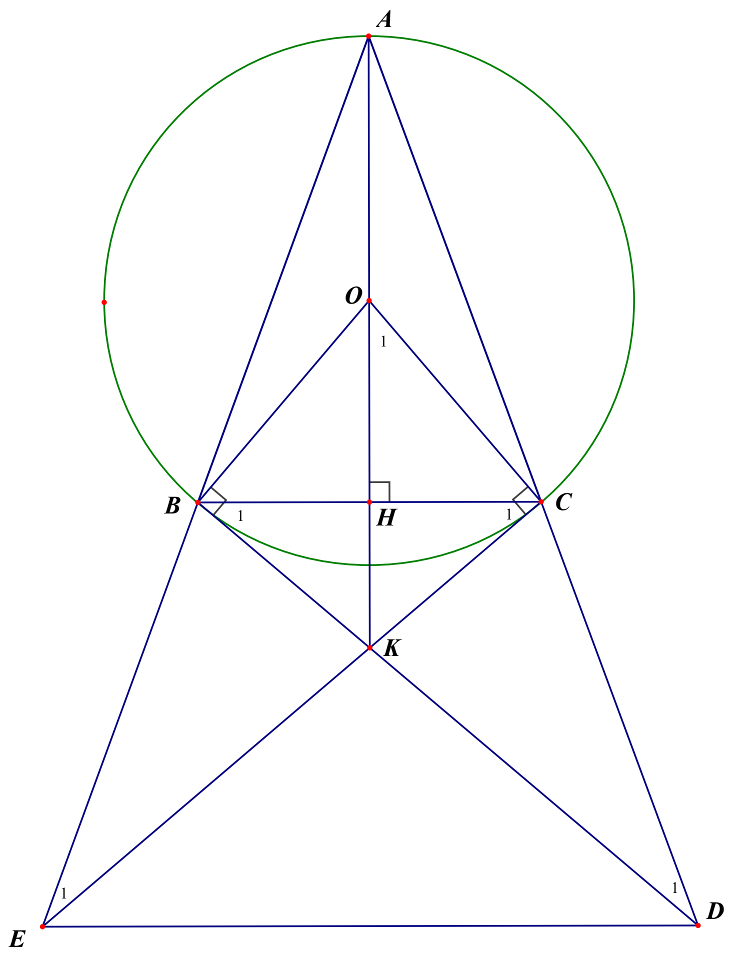
$=> BS^2 = CS^2 - BC^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 3R^2 = R^2$

$=> BS = R$

Mà: AH = BS (cmt)
Nên: AH = R

Chu vi đường tròn ngoại tiếp ΔAEF: $2\pi r = \pi AH = \pi R$

Bài 30. Cho ΔABC cân tại A có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn lần lượt cắt tia AC và AB ở D và E.



a) Chứng minh: $BD^2 = AD.CD$.

Xét ΔDBC và ΔDAB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BDC} = \widehat{ADB} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{DAB} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BC}) \end{cases}$$

$$=> \Delta DBC \backsim \Delta DAB \ (g-g)$$

$$=> \frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DB} \ (\text{tsđd})$$

$$=> BD^2 = AD.CD$$

b) Chứng minh: Tứ giác BCDE là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{C_1} + \widehat{E_1} \ (\text{góc ngoài } \Delta BCE \text{ tại đỉnh B}) \\ \widehat{ACB} = \widehat{B_1} + \widehat{D_1} \ (\text{góc ngoài } \Delta BCE \text{ tại đỉnh C}) \end{cases}$

Mà: $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \ (\Delta ABC \text{ cân tại A}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \ (\text{2g tạo bởi tt và dc cùng chắn } \overset{\frown}{BC}) \end{cases}$

Nên: $\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$

=> Tứ giác BCDE nội tiếp vì có 2đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g =.

c) Chứng minh: EC = BD.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180^0 \ (\text{A, B, E thẳng hàng}) \\ \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 180^0 \ (\text{A, C, D thẳng hàng}) \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \ (\Delta ABC \text{ cân tại A}) \end{cases}$

$$=> \widehat{CBE} = \widehat{BCD}$$

Xét ΔCBE và ΔBCD, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{B_1} \ (\text{cmt}) \\ BC = BC \ (\text{cạnh chung}) \\ \widehat{CBE} = \widehat{BCD} \ (\text{cmt}) \end{cases}$$

$=> \Delta CBE = \Delta BCD \ (g-c-g)$

=> EC = BD (2 cạnh tương ứng)

d) Biết $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Tính diện tích hình giới hạn bởi BK, CK và cung nhỏ BC.

Gọi H là giao điểm của OK và BC

Ta có: $\begin{cases} KB = KC \left(\text{t/c 2tt của (O) cắt nhau tại K}\right) \\ OB = OC\left(= R_{(O)}\right) \end{cases}$

=> KO là trung trực của BC

=> KO $\perp$ BC tại H

Ta có: OK là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ (t/c 2 tt (O) cắt nhau tại K)

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

Mà: $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$ (gnt và góc ở tâm (O) chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Nên: $\widehat{O_1} = \widehat{A_1}\left(= \frac{\widehat{BOC}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = 30^0 \left(\widehat{BAC} = 30^0\right)$$

Ta có: ΔCOH vuông tại H (KO $\perp$ BC)

$\Rightarrow KC = OC.\tan\widehat{O_1} = R.\tan 30^0 = R\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad(\text{ts lg})$

Ta có: $S_{OBKC} = S_{OBK} + S_{OCK}$

$= \frac{1}{2}OB.BK + \frac{1}{2}OC.CK$

$= \frac{1}{2}OC.CK + \frac{1}{2}OC.CK$

$= OC.CK = R.\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3}$ (đvdt)

Diện tích hình quạt BOC: $S_{q(BOC)} = \frac{120^0.\pi.R}{136^0} = \frac{\pi R}{3}$ (đvdt)

Vậy diện tích hình giới hạn bởi BK, CK và cung nhỏ BC là:

$S_{OBKC} - S_{q(BOC)} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi R}{3}$ (đvdt) .

Bài 31. **Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) và cát tuyến AMN với (O) (B, C là hai tiếp điểm và điểm O nằm trong góc BAN).**

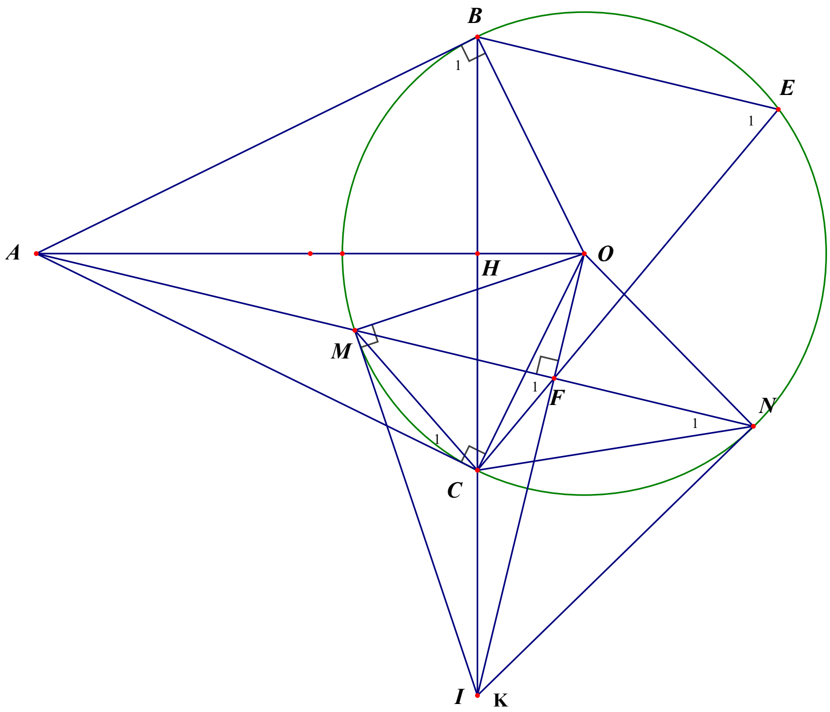
a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp.

Xét tứ giác ABOC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác ABOC nội tiếp vì có 2 đối bù nhau.



b) Chứng minh: $AM.AN = AB.AC$.

Xét ΔACM và ΔANC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CAM} = \widehat{NAC} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{C_1} = \widehat{N_1} \text{ (góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{CM}\text{)} \end{cases}$$

$$=> \Delta ACM \backsim \Delta ANC \ (g-g)$$

$$=> \frac{AC}{AN} = \frac{AM}{AC} \text{ (tsđd)}$$

$$=> AC^2 = AM.AN$$

Mà: AB = AC (t/c 2 tt của (O) cắt nhau tại A)

Nên: $AC^2 = AC.AB = AM.AN$

c) Vẽ dây BE của đường tròn (O) sao cho BE song song với MN, CE cắt MN tại F. Chứng minh: FM = FN.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{F_1} = \widehat{E_1} \text{ (2g slt và AN // BE)} \\ \widehat{B_1} = \widehat{E_1} \text{ (góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BC}\text{)} \end{cases}$

$$=> \widehat{F_1} = \widehat{B_1} \ (= \widehat{E_1})$$

=> Tứ giác ABFC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

Mà: tứ giác ABOC nội tiếp (cmt)

Nên: 5 điểm A, B, O, F, C cùng thuộc 1 đường tròn

$$=> \widehat{AFO} = \widehat{ACO} \text{ (2gnt cùng chắn } \overset{\frown}{AO}\text{)}$$

Lại có: $\widehat{ACO} = 90^0$ (AC là tiếp tuyến của (O) tại C)

Suy ra: $\widehat{AFO} = 90^0$

=> $OF \perp AF$

Hay: $OF \perp MN$

=> F là trung điểm của MN (qh đường kính và dây cung)

=> FM = FN.

d) Tiếp tuyến tại M của (O) cắt BC tại I. Chứng minh: IN là tiếp tuyến của (O).

Gọi K là giao điểm của OF và BC.

Họi H là giao điểm của BC và AO

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} AC = AB\ (\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A}) \\ OC = OB\ (= R) \end{cases}$$

=> OA là trung trực của BC

=> $OE \perp BC$ tại H

Ta có: $\begin{cases} \Delta ABO \text{ vuông tại B } (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \text{BH là đường cao } (AO \perp BC \text{ tại H}) \end{cases}$

=> $BO^2 = OH.OA\ (\text{HTL})\quad (1)$

Xét ΔAOF và ΔKOH, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFO} = \widehat{MHO}\ (= 90^0) \\ \widehat{AOF} = \widehat{KOH}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

=> $\Delta AOF \backsim \Delta KOH\ (g-g)$

=> $\dfrac{AO}{KO} = \dfrac{FO}{HO}$ (tsđd)

=> $OH.OA = OF.OK\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $BO^2 = OF.OK\ (= OH.OA)$

Mà: OM = ON = OB (=R(O))

Nên: $OM^2 = ON^2 = OF.OK$

$$=> \begin{cases} \dfrac{OM}{OF} = \dfrac{OK}{OM} \\ \dfrac{ON}{OF} = \dfrac{OK}{ON} \end{cases}$$

Xét ΔOMK và ΔOFM, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{OM}{OF} = \dfrac{OK}{OM}\ (\text{cmt}) \\ \widehat{MOK} = \widehat{FOM}\ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

=> $\Delta OMK \backsim \Delta OFM$ $(c-g-c)$

=> $\widehat{OMK} = \widehat{OFM}$ *(2 góc tương ứng)*

Mà: $\widehat{OFM} = 90^0$ *(* $OF \perp MN$ *tại F)*

Nên: $\widehat{OMK} = 90^0$

=> KM $\perp$ OM tại M thuộc (O)

=> KM là tiếp tuyến của (O) tại M.

Mặt khác: $\begin{cases} \text{IM là tt của } (O) \text{ tại M } (gt) \\ \text{I, K cùng } \in BC(gt) \end{cases}$

Do đó: IM $\equiv$ KM

=> I, F, O thẳng hàng.

Xét ΔONI và ΔOFN, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{ON}{OF} = \dfrac{OI}{OM} \ (cmt) \\ \widehat{NOK} = \widehat{FON} \ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

=> $\Delta ONI \backsim \Delta OFN$ $(c-g-c)$

=> $\widehat{ONI} = \widehat{OFN}$ *(2 góc tương ứng)*

Mà: $\widehat{OFN} = 90^0$ *(* $OF \perp MN$ *tại F)*

Nên: $\widehat{ONI} = 90^0$

=> IN $\perp$ ON tại N thuộc (O)

=> IN là tiếp tuyến của (O) tại N.

Bài 32. **Cho ΔABC nhọn (AB < AC) nội tiếp (O; R). Gọi H là giao điểm của 3 đường cao AD, BE và CF.**

a) Chứng minh: Tứ giác AFHE, BFEC nội tiếp.

Xét Tứ giác AFHE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AEH} = 90^0 \ (BE \perp AC \text{ tại } E) \\ \widehat{AFH} = 90^0 \ (CF \perp AB \text{ tại } F) \end{cases}$$

=> $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

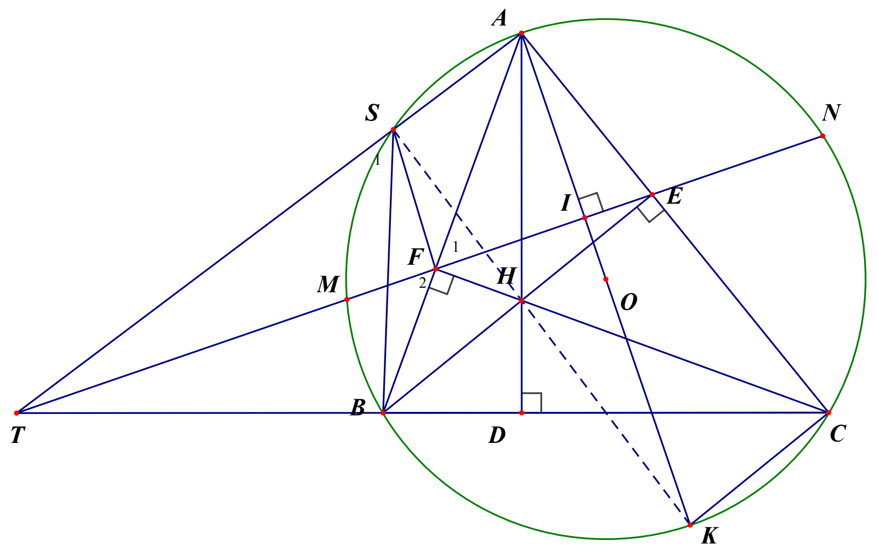
=> Tứ giác AFHE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau.

Xét Tứ giác BFEC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BEC} = 90^0 \ (BE \perp AC \text{ tại } E) \\ \widehat{BFC} = 90^0 \ (CF \perp AB \text{ tại } F) \end{cases}$$

=> $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác BFEC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=



b) Vẽ đường kính AK của (O). Cm: $AB.AC = AD.AK$.

Ta có: $\widehat{ACK} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk AK)

Xét ΔABD và ΔAKC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{ACK} \left(= 90^0\right) \\ \widehat{ABD} = \widehat{AKC} \left(2g \text{ nt (O) chắn } \overset{\frown}{AC}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g – g)

$$=> \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC} \left(\text{tsđd}\right)$$

$=> AB.AC = AD.AK$

c) Đường thẳng EF cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ BA) và cắt BC tại T. Chứng minh: AM = AN.

Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) tại A

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{xAB} = \widehat{ACB} \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{AB}\right) \\ \widehat{F_1} = \widehat{ACB} \left(\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BFEC nt}\right) \end{cases}$$

$$=> \widehat{xAB} = \widehat{F_1} \left(= \widehat{ACB}\right)$$

Mà 2 góc này vị trí slt

Nên xA // ED

Lại có: $xA \perp OA$ tại $A \in (O)$

Suy ra: $OA \perp EF$

Hay: $OA \perp MN$

=> A là điểm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$

$=> \text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \text{sđ}\overset{\frown}{AN}$

$=> AM = AN$

d) AT cắt (O) tại S. Chứng minh: K, H, S thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{KSA} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AK)

$=> KS \perp AS$ tại S.

Xét ΔTSB và ΔTCA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{STB} = \widehat{CTA} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{S_1} = \widehat{TCA} \left(\text{góc ngoài = góc trong tứ giác ASBC nt (O)}\right) \end{cases}$$

$$=> \Delta TSB \backsim \Delta TCA \ (g-g)$$

$$=> \frac{TS}{TC} = \frac{TB}{TA} \left(\text{tsđd}\right)$$

$=> TS.TA = TB.TC$

Xét ΔTFB và ΔTCE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{FTB} = \widehat{CTE} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{F_2} = \widehat{TCE} \left(\text{góc ngoài = góc trong tứ giác BFEC nt}\right) \end{cases}$$

$$=> \Delta TFB \backsim \Delta TCE \ (g-g)$$

$$=> \frac{TF}{TC} = \frac{TB}{TE} \left(\text{tsđd}\right)$$

$$=> TF.TE = TB.TC$$

Mà: $TS.TA = TB.TC \left(\text{cmt}\right)$

Nên: $TF.TE = TS.TA \left(= TB.TC\right)$

$$=> \frac{TF}{TA} = \frac{TS}{TE}$$

Xét ΔTFS và ΔTAE, ta có:

$$\begin{cases} \frac{TF}{TA} = \frac{TS}{TE} \left(\text{cmt}\right) \\ \widehat{STF} = \widehat{ETA} \left(\text{góc chung}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta TFS \backsim \Delta TAE$ (g – g)

=> $\widehat{TSF} = \widehat{TEA}$ *(2 góc tương ứng)*

=> *Tg ASFE nội tiếp vì có góc ngoài bằng góc trong đối diện*

Mà: AFHE nội tiếp (cmt)

Nên: 5 điểm A, S, F, H, E cùng thuộc 1 đường trò

=> $\widehat{ASH} = \widehat{AFH}$ (2ngt cùng chắn $\overset{\frown}{AH}$)

Lại có: $\widehat{AFH} = 90^0$ (CF $\perp$ AB tại F)

Suy ra: $\widehat{ASH} = 90^0$

=> $HS \perp AS$ tại S

Mặt khác: $KS \perp AS$ tại S (cmt)

Do đó: HS $\equiv$ KS

=> K, H, S thẳng hàng.

Bài 33. **Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Từ A vẽ tiếp tuyến Ax với (O), Trên tia Ax lấy điểm C sao cho AC = 2R. Qua C vẽ cát tuyến CDE (D nằm giữa C và E), cát tuyến này cắt đoạn OB. Gọi H là trung điểm của DE.**

a) Chứng minh: $CA^2 = CD.CE$.

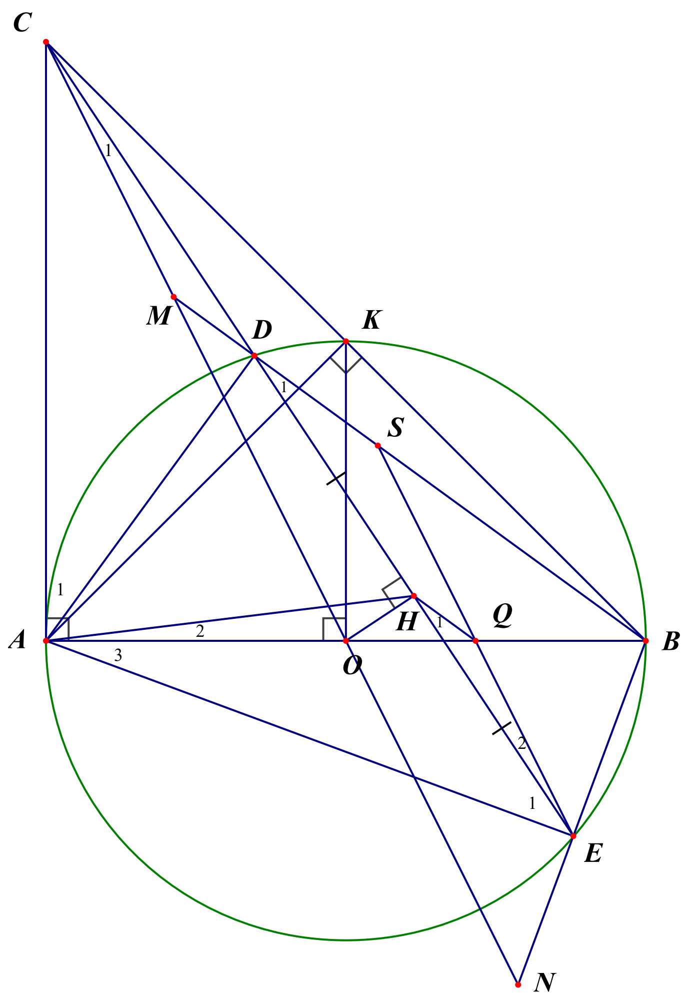
Xét ΔCAD và ΔCEA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ACD} = \widehat{ECA} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \ \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overparen{AD}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CEA \ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CD}{CA} \ (\text{tsđd})$

$\Rightarrow CA^2 = CD.CE$



b) Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.

Ta có: H là trung điểm của DE (gt)

$\Rightarrow OH \perp DE$ (qh đường kính và dây cung)

Xét tứ giác AOHC, ta có:

$$\begin{cases}\widehat{CHO}=90^0\ (OH\perp CD)\\ \widehat{CAO}=90^0\ (CA \text{ là tt của } (O) \text{ tại } A)\end{cases}$$

$=> \widehat{CHO}+\widehat{CAO}=90^0+90^0=180^0$

=> Tứ giác AOHC nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

c) Đoạn CB cắt (O) tại K. Tính số đo $\widehat{AOK}$ và diện tích quạt AOK theo R và π.

Ta có: $\widehat{AKB}=90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AB)

=> $AK\perp BC$ tại K.

Ta có: AC = AB (= 2R)

=> ΔBAC cân tại A

Mà: AK là đường cao của ΔBAC ($AK\perp BC$)

Nên: AK là đường trung tuyến của ΔBAC

$=> AK=BK=\dfrac{BC}{2}$

$=> sđ\overset{\frown}{AK}=sđ\overset{\frown}{BK}$

=> K là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

=> $OK\perp AB$ tại O

$=> \widehat{AOK}=90^0$

Diện tích quạt AOK: $S_{q(AOK)}=\dfrac{90^0.\pi.R}{360^0}=\dfrac{\pi R}{4}$ (đvdt).

d) Đường thẳng CO cắt BD, BE lần lượt tại M và N. Chứng minh: O là trung điểm của MN.

Qua E kẻ đường thẳng ES // NM, ES cắt BD tại S, cắt BO tại Q.

$=> \widehat{E_1}=\widehat{C_1}$ (2g slt)

Mà: $\widehat{A_2}=\widehat{C_1}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{OH}$ của tứ giác SOHC nội tiếp)

Nên: $\widehat{E_1}=\widehat{A_2}\left(=\widehat{C_1}\right)$

=> Tứ giác AHQE nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

$=> \widehat{H_1}=\widehat{A_3}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{QE}$)

Mặt khác: $\widehat{D_1}=\widehat{A_3}$ (2gnt (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Do đó: $\widehat{H_1}=\widehat{D_1}\left(=\widehat{A_3}\right)$

Lại có: 2 góc này ở vị trí slt

Suy ra: HQ // DS

Mà: H là trung điểm của ED (gt)

Nên: Q là trung điểm của ES

Xét ΔBNO, ta có: EQ // NO (ES // NM)

$$=> \frac{QE}{ON} = \frac{BQ}{BO} \quad \text{(Hệ quả Talet)} \quad (1)$$

Xét ΔBMO, ta có: SQ // MO (ES // NM)

$$=> \frac{QS}{OM} = \frac{BQ}{BO} \quad \text{(Hệ quả Talet)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{QE}{ON} = \frac{QS}{OM} \quad \left(= \frac{BQ}{BO}\right)$

Mà: QE = QS (Q là trung điểm của ES)

Nên: ON = OM

=> O là trung điểm của MN (O nằm giữa M, N).

Bài 34. **Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE.**

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp và xác định tâm I.

Xét tứ giác BEDC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BEC} = 90^o \ (CE \perp AB) \\ \widehat{BDC} = 90^o \ (BD \perp AC) \end{cases}$$

$$=> \widehat{BEC} = \widehat{BDC} \ (= 90^0)$$

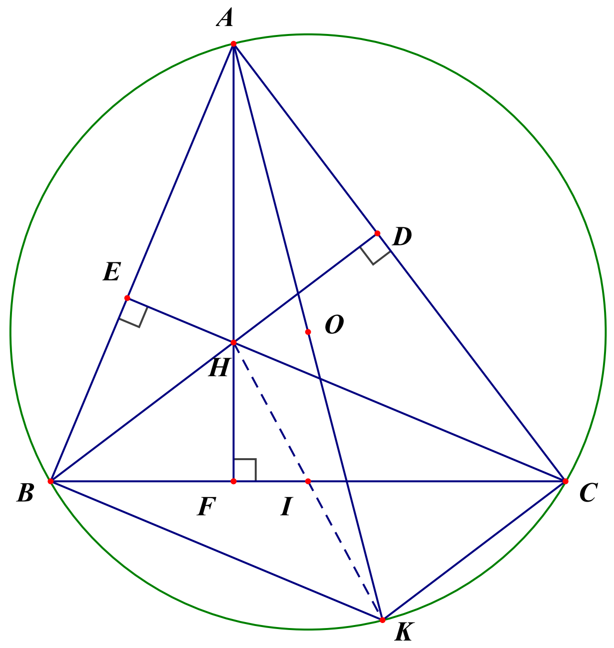
=> Tứ giác BEDC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2 góc =.

Ta có: $\begin{cases} \Delta BDC \text{ nội tiếp } (BEDC) \ (\text{tg BEDC nội tiếp}) \\ \widehat{BDC} = 90^0 \ (BD \perp AC \text{ tại D}) \end{cases}$

=> ΔBDC nội tiếp đường tròn đường kính BC

=> Tâm I là trung điểm của đường kính BC

Hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEDC.



b) Gọi F là giao điểm của AH và BC. Vẽ đường kính AOK của (O). Chứng minh: $AF.AK = AB.AC$**.**

Xét ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} BD \text{ là đường cao } (gt) \\ CE \text{ là đường cao } (gt) \\ BD \text{ cắt } CE \text{ tại } H \ (gt) \end{cases}$$

=> H là trực tâm của ΔABC

=> AH là đường cao thứ 3

=> $AH \perp BC$ tại F

Ta có: $\widehat{ACK} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đk AK)

Xét ΔABF và ΔAKC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFB} = \widehat{ACK} \left(= 90^0\right) \\ \widehat{ABF} = \widehat{AKC} \left(2g \text{ nt (O) chắn } \overset{\frown}{AC}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta ABF \backsim \Delta AKC$ (g – g)

=> $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AF}{AC}$ (tsđd)

=> $AB.AC = AF.AK$

c) Chứng minh: H, I, K thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{ACK} = 90^0$ (gnt chắn nửa đường tròn (O) đk AK)

=> $KC \perp AC$

Mà: $BH \perp AC$ (BH là đường cao ΔABC)

Nên: $BH \ // \ KC$ $(\perp AC)$

Ta có: $\widehat{ABK} = 90^0$ $\left(\text{gnt chắn nửa đường tròn } (O) \text{ đk AK}\right)$

=> $KB \perp AB$

Mà: $CH \perp AB$ $\left(\text{CH là đường cao } \Delta ABC\right)$

Nên: CH // KB $\left(\perp AC\right)$

Lại có: BH // KC (cmt)

Suy ra: Tứ giác BHCK là hình bình hành vì có 2ccđ //, =

Mặt khác: I là trung điểm của đường chéo BC (cmt)

Do đó: I là trung điểm của đường chéo HK

=> $I \in HK$

=> H, I, K thẳng hàng.

d) Cho $BC = \frac{3}{4}AK$**. Tính** $AB.CK + AC.BK$ **theo R.**

Ta có: $\Delta ABF \backsim \Delta AKC$ (cmt)

$$=> \frac{AB}{AK} = \frac{BF}{KC} \ (\text{tcđd})$$

$$=> AB.CK = AK.BF \quad (1)$$

Xét ΔACF và ΔAKB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFC} = \widehat{ABK} \ (= 90^0) \\ \widehat{ACF} = \widehat{AKB} \ \left(\text{2g nt (O) chắn } \overset{\frown}{AB}\right) \end{cases}$$

$$=> \Delta ACF \backsim \Delta AKB \ (g - g)$$

$$=> \frac{AC}{AK} = \frac{CF}{KB} \ (\text{tsđd})$$

$$=> AC.BK = AK.CF \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} AB.CK + AC.BK &= AK.BF + AK.CF \\ &= AK\left(BF.CF\right) \\ &= AK.BC \\ &= AK.\frac{3}{4}AK \\ &= \frac{3}{4}AK^2 = \frac{3}{4}(2R)^2 = 3R^2 \end{aligned}$$

Vậy: $AB.CK + AC.BK = 3R^2$

Bài 35. **Cho hình vuông ABCD cạnh a. M là điểm chuyển động trên BC (M khác B, C). Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với đường thẳng DM tại H và cắt DC tại K.**

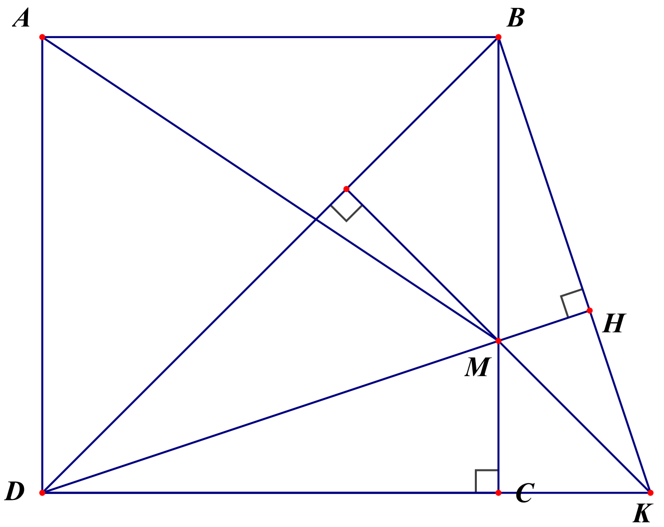
a) Chứng minh: Tứ giác BHCD là tứ giác nội tiếp.

Xét Tứ giác AHCD, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BHD} = 90^0 \ (BK \perp DM \text{ tại } H) \\ \widehat{BCD} = 90^0 \ (ABCD \text{ là hcn}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AEH} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác AHCD nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=



b) Chứng minh: KM $\perp$ BD.

Xét ΔBDK, ta có:

$$\begin{cases} \text{BC là đường cao } (BC \perp DK) \\ \text{DH là đường cao } (DH \perp BK) \\ \text{BC cắt DH tại M } (gt) \end{cases}$$

=> M là trực tâm của ΔBDK

=> KM là đường cao thứ 3

=> KM $\perp$ BD

c) Chứng minh: $KC.KD = KH.KB$.

Xét ΔBKC và ΔDKH, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BKC} = \widehat{DKH} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{BCK} = \widehat{DKH} \ (= 90^0) \end{cases}$$

=> $\Delta BKC \backsim \Delta DKH \ (g-g)$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KD} = \frac{KC}{KH} \ (\text{tsđd})$$

$$\Rightarrow KB.KH = KC.KD$$

d) Ký hiện S_1, S_2 lần lượt là diện tích của ΔABM và ΔDCM. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để $S_1^2 + S_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo a.

Ta có: $S_1^2 + S_2^2 = (S_1 - S_2)^2 + 2S_1S_2 \geq 2S_1S_2 \quad \forall S_1, S_2$

Dấu "=" xảy ra khi: $S_1 - S_2 = 0$

$\Leftrightarrow S_1 = S_2$

$=> \frac{1}{2}AB.BM = \frac{1}{2}DC.CM$

$=> BM = CM$

=> M là trung điểm của BC (M nằm nữa B, C).

Ta có: $S_1^2 + S_2^2 \geq 2S_1S_2 = 2.\frac{1}{2}AB.BM.\frac{1}{2}CD.CM$

$= \frac{1}{2}AB.CD.\frac{BC}{2}.\frac{BC}{2} = \frac{1}{2}a.a.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^4}{8}$

Vậy GTNN của $S_1^2 + S_2^2$ là $\frac{a^4}{8}$

Lưu ý: Có thể dùng cách gọi BM = *x*, suy ra: CM = *a* – *x*

Bài 36. **Cho (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho OA = 3R. Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O).**

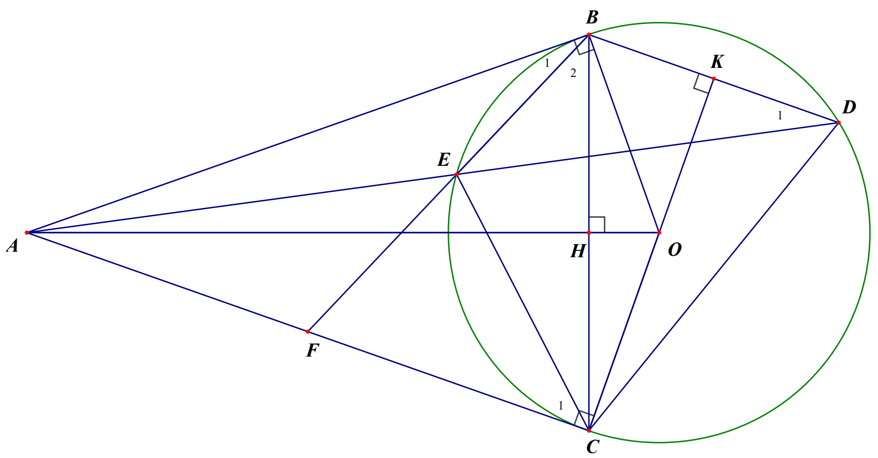
a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp.

Xét Tứ giác OBAC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ABO} = 90^0 \ (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

$$=> \widehat{ABO} = \widehat{ACO} \left(= 90^0\right)$$

=> Tứ giác OBAC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=



b) Từ B vẽ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại D. AD cắt (O) tại E. Tính AD.AE theo R.

Ta có: ΔABO vuông tại B (AB là tt của (O) tại B)

$$=> AB^2 + OB^2 = AO^2 \ (\text{Pytago})$$

$$=> AB^2 = AO^2 - OB^2 = (3R)^2 - R^2$$

$$= 9R^2 - R^2 = 8R^2$$

$$=> AB = 2R\sqrt{2}$$

Xét ΔABE và ΔADB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAE} = \widehat{DAB} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BE}) \end{cases}$$

$$=> \Delta ABE \backsim \Delta ADB \ (g - g)$$

$$=> \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \ (\text{tsđd})$$

$$=> AD.AE = AB^2 = \left(2R\sqrt{2}\right)^2 = 8R^2$$

c) Tia BE cắt AC tại F. Chứng minh: F là trung điểm của AC.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{FAE} = \widehat{D_1} \left(2g\ \text{slt và } AC // BD\right) \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với gnt (O) chắn } \overset\frown{BE}\right) \end{cases}$

$=> \widehat{FAE} = \widehat{B_1} \left(= \widehat{D_1}\right)$

Xét ΔAFE và ΔBFA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFE} = \widehat{BFA} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{FAE} = \widehat{B_1} \left(\text{cmt}\right) \end{cases}$$

$=> \Delta AFE \backsim \Delta BFA\ (g-g)$

$=> \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{FE}{FA} \left(\text{tsđd}\right)$

$=> AF^2 = FE.FB\ \left(1\right)$

Xét ΔCFE và ΔBFC, ta có:

$\begin{cases} \widehat{CFE} = \widehat{BFC} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{C_1} = \widehat{B_2} \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với gnt (O) chắn } \overset\frown{CE}\right) \end{cases}$

$=> \dfrac{CF}{BF} = \dfrac{FE}{FC} \left(\text{tsđd}\right)$

$=> CF^2 = FE.FB \left(\text{HTL}\right)$

Mà $AF^2 = FE.FB \left(\text{cmt}\right)$

Nên : $CF^2 = AF^2 \left(= FE.FB\right)$

$=> CF = AF$

=> F là trung điểm của AC (F nằm giữa A và C).

d) Tính diện tích tam giác BDC theo R.

Gọi H là giao điểm của BC và AO

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} AB = AC \left(\text{t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A}\right) \\ OB = OC \left(= R\right) \end{cases}$$

=> OA là trung trực của BC

$=> OA \perp BC$ tại H

Ta c ó: $\begin{cases} \Delta ABO \text{ vuông tại B } (AB \text{ là tt của } (O)) \\ BH \text{ là đường cao } (BC \perp AO \text{ tại H}) \end{cases}$

Suy ra:

- $BH.AO = AB.BO \ (HTL)$

$$=> BH = \frac{AB.BO}{AO} = \frac{2R\sqrt{2}.R}{3R} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

$$=> BC = 2.BH = \frac{4R\sqrt{2}}{3}$$

- $AB^2 = AH.AO \ (HTL)$

$$=> AH = \frac{AB^2}{AO} = \frac{\left(2R\sqrt{2}\right)^2}{3R} = \frac{8R}{3}$$

Ta có: $\begin{cases} \widehat{DBC} = \widehat{BCD} \ (2g \text{ slt và } BD // AC) \\ \widehat{BDC} = \widehat{BCD} \ (\text{gnt với góc tạo bởi tt và dc chắn } \overset{\frown}{BC}) \end{cases}$

$=> \widehat{DBC} = \widehat{BDC} \ \left(= \widehat{BCD}\right)$

$=> \Delta CBD$ cân tại C

$=> CB = CD$

Mà: $OB = OC \ \left(= R_{(O)}\right)$

Nên : CO là trung trực của BD

$=> CO \perp BD$ tại K

Ta có: ΔABH vuông tại B ($BH \perp AO$)

$$=> \begin{cases} \cos\widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\frac{2R\sqrt{2}}{3}}{2R\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3} \\ \sin\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\frac{8R}{3}}{2R\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Ta có: ΔCBK vuông tại K ($CK \perp BD$)

$$=> \begin{cases} BK = BC.\cos\widehat{CBD} = \dfrac{4R\sqrt{2}}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{4R\sqrt{2}}{9} \ \left(\widehat{CBD} = \widehat{ABH} = \widehat{BDC}\right) \\ CK = BC.\sin\widehat{CBK} = \dfrac{4R\sqrt{2}}{3}.\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8R\sqrt{6}}{9} \ \left(\widehat{CBD} = \widehat{ABH} = \widehat{BDC}\right) \end{cases}$$

Vậy: $S_{CBD} = \frac{1}{2}CK.BD = \frac{1}{2}CK.2BK$

$$= \frac{1}{2}\frac{8R\sqrt{6}}{9}.\frac{2.4R\sqrt{2}}{9} = \frac{64R^2\sqrt{3}}{9} \ (\text{đvdt})$$

Bài 37. **Cho ΔABC vuông tại A, tia phân giác của góc B cắt AC tại M, vẽ đường tròn tâm O đường kính MC, tia BM cắt (O) tại H.**

a) Chứng minh: Tứ giác BAHC nội tiếp.

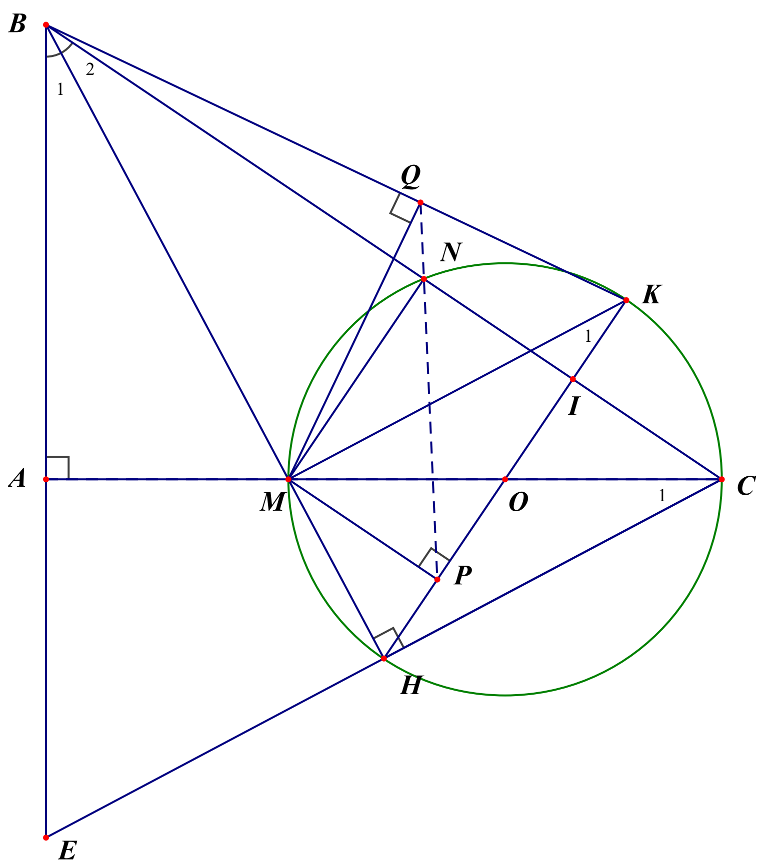
Ta có: $\widehat{MHC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính MC)

Xét tứ giác BAHC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = 90^0 \ (\Delta ABC \text{ vuông tại A}) \\ \widehat{BHC} = 90^0 \ \left(\widehat{MHC} = 90^0\right) \end{cases}$$

=> $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác BAHC nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=



b) Chứng minh: $HB.HM = HC^2$.

Ta có: $$\begin{cases} \widehat{C_1} + \widehat{CMH} = 90^0 \ (\Delta CMH \text{ vuông tại H}) \\ \widehat{B_1} + \widehat{AMB} = 90^0 \ (\Delta ABM \text{ vuông tại A}) \\ \widehat{CMH} = \widehat{CMB} \ (\text{đđ}) \end{cases}$$

=> $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$

Mà: $\widehat{B_2} = \widehat{B_1}$ (BM là phân giác của $\widehat{ABC}$)

Nên: $\widehat{C_1} = \widehat{B_2}\ \left(= \widehat{B_1}\right)$

Xét ΔCHM và ΔBHC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CHM} = \widehat{BHC}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{C_1} = \widehat{B_2}\ (\text{cmt}) \end{cases}$$

=> $\Delta CHM \backsim \Delta BHC$ (g – g)

=> $\dfrac{CH}{BH} = \dfrac{HM}{HC}\ (\text{tsđd})$

=> $CH^2 = BH.HM$

c) Gọi E là giao điểm của BA và CH. Cho AB = 5cm, HC = $3\sqrt{2}$ cm. Tính độ dài BC.

Gọi BE = x $(x > 0)$

Xét ΔBCE, ta có:

$$\begin{cases} \text{BH là phân giác (gt)} \\ \text{BH là đường cao } (BH \perp CE) \end{cases}$$

=> ΔBCE cân tại B

=> BH là đường trung tuyến của ΔBCE

=> H là trung điểm của CE

=> $CH = EH = \dfrac{CE}{2}$

Xét ΔBEH và ΔCEA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BEH} = \widehat{CEA}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{BHE} = \widehat{CAE}\ \left(= 90^0\right) \end{cases}$$

=> $\Delta BEH \backsim \Delta CEA$ (g – g)

$$=> \frac{BE}{CE} = \frac{EH}{AE} \left(\text{tsđd}\right)$$
$$=> BE.AE = EH.CE$$
$$=> x\left(x - AB\right) = CH.2CH$$
$$=> x\left(x - 5\right) = 2.\left(3\sqrt{2}\right)^2$$
$$=> x^2 - 5x - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 4x - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x - 9\right) + 4\left(x - 9\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - 9\right)\left(x + 4\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 9 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \ \left(\text{nhận}\right) \\ x = -4 \ \left(\text{loại}\right) \end{array}\right.$$

=> BE = 9cm

Mà: BE = BC (ΔBCE cân tại B)

Nên: BC = 9cm.

d) Tia HO cắt đường thẳng BC và đường tròn (O) lần lượt tại I và K. Vẽ MP ⊥ KH, MQ ⊥ KB, đoạn thẳng BC cắt (O) tại N. Chứng minh: P, N, Q thẳng hàng.

Xét Tứ giác MPKQ, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MPK} = 90^0 \ (MP \perp KH \text{ tại } P) \\ \widehat{MQK} = 90^0 \ (MQ \perp BK \text{ tại } Q) \end{cases}$$

=> $\widehat{MPK} + \widehat{MQK} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác MPKQ nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

=> $\widehat{MQP} = \widehat{K_1}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{MP}$)

Mà: $\widehat{C_1} = \widehat{K_1}$ (2gnt (O) cùng chắn $\overset{\frown}{MH}$)

Nên: $\widehat{MQP} = \widehat{C_1} \left(= \widehat{K_1}\right)$

Ta có: $\widehat{MNC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính MC)

=> $MN \perp NC$

Xét Tứ giác MNQB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MNB} = 90^0 \ (MN \perp NC \text{ tại } N) \\ \widehat{MQB} = 90^0 \ (MQ \perp BK \text{ tại } Q) \end{cases}$$

=> $\widehat{MNB} = \widehat{MQB} \left(= 90^0\right)$

=> Tứ giác MNQB nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

=> $\widehat{MQN} = \widehat{B_2}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{MN}$)

Mà: $\widehat{C_1} = \widehat{B_2}$ (cmt)

Nên: $\widehat{MQN} = \widehat{C_1} \left(= \widehat{B_2}\right)$

Lại có: $\widehat{MQP} = \widehat{C_1}$ (cmt)

Suy ra: $\widehat{MQP} = \widehat{MQN} \left(= \widehat{C_1}\right)$

=> QN ≡ QP (hai tia QN, QP nằm cùng 1 nửa mp bờ MQ)

=> Q, N, P thẳng hàng.

Bài 38. **Cho đường tròn (O; R) đường kính AC. Lấy điểm B thuộc đường tròn (O) sao cho CB = R. Tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O) cắt nhau ở M.**

a) Chứng minh: MO ⊥ AB tại H, từ đó suy ra: OM // BC.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} MA = MB \left(\text{t/c 2 tt cắt nhau tại M}\right) \\ OA = OB \left(= R\right) \end{cases}$$

=> MO là trung trực của AB

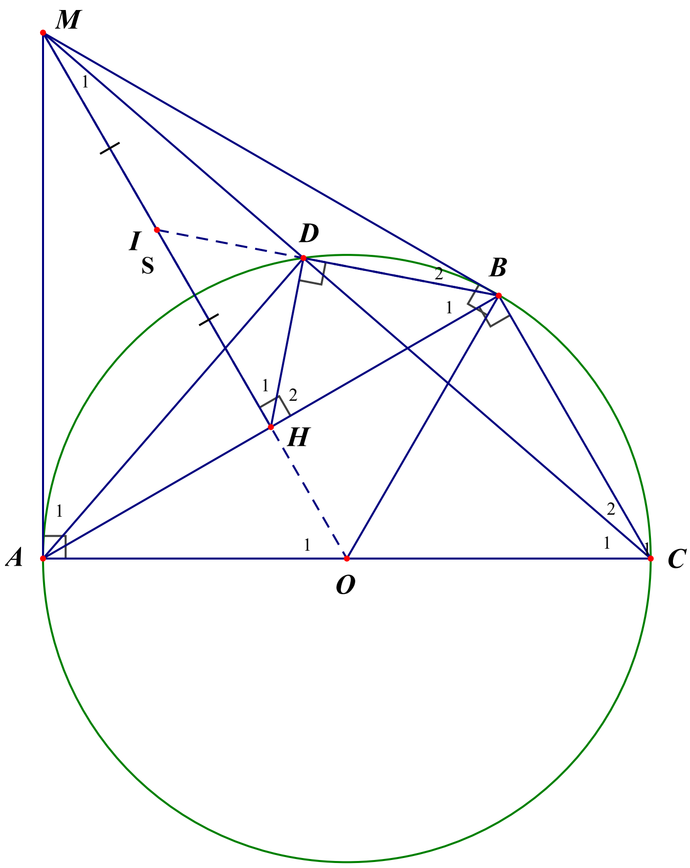
=> $MO \perp AB$ tại H

Ta có: $\widehat{ABC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AC)

=> $CB \perp AB$

Mà: $MO \perp AB$ (cmt)

Nên: MO // BC.



b) Cho MC cắt (O) tại D. Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$ **và tứ giác AHDM nội tiếp.**

Xét ΔMAD và ΔMCA, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AMD} = \widehat{CMA} \left(\text{góc chung}\right) \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{AD}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta MAD \backsim \Delta MCA$ (g – g)

$$=> \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \text{ (tsđd)}$$
$$=> MA^2 = MC.MD$$

c) Gọi I là trung điểm của HM. Chứng minh: 3 điểm B, D, I thẳng hàng.

Gọi S là giao điểm của BD và MH

Ta có: $\widehat{ADC} = 90^0$ (gnt chắn nửa (O) đường kính AC)

$=> AD \perp DC$

Xét tứ giác AHDM, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AHM} = 90^0 \ (OM \perp AB \text{ tại } H) \\ \widehat{ADM} = 90^0 \ (AD \perp DC \text{ tại } D) \end{cases}$$

$$=> \widehat{AHM} = \widehat{ADM} \left(= 90^0\right)$$

=> Tứ giác AHDM nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

$=> \widehat{H_1} = \widehat{A_1}$ (2gnt cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$)

Mà: $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (gnt với góc tạo bởi tt và dc của (O) chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Nên: $\widehat{H_1} = \widehat{B_1} \left(= \widehat{A_1}\right)$

Lại có: $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0 \ (AB \perp MO \text{ tại } H)$

Nên: $\widehat{B_1} + \widehat{H_2} = 90^0$

$=> \Delta BDH$ vuông tại D

$$\text{Ta có:} \begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{C_2} \ (\text{2g slt và } MO \parallel BC) \\ \widehat{B_2} = \widehat{C_2} \ (\text{góc tạo bởi tt và dc với gnt của (O) chắn } \overset{\frown}{BD}) \end{cases}$$

$$=> \widehat{M_1} = \widehat{B_2} \left(\widehat{C_2}\right)$$

Xét ΔMSD và ΔBSM, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{MSD} = \widehat{BSM} \ (\text{góc chung}) \\ \widehat{M_1} = \widehat{B_2} \ (\text{cmt}) \end{cases}$$

$$=> \Delta MSD \backsim \Delta BSM \ (g-g)$$

$$=> \frac{MS}{BS} = \frac{DS}{MS} \text{ (tsđd)}$$

$$=> MS^2 = BS.DS \ (1)$$

Ta có: $\begin{cases} \Delta BHS \text{ vuông tại H } (AB \perp AB \text{ tại H}) \\ HD \text{ là đường cao } (HD \perp BD \text{ tại D}) \end{cases}$

$\Rightarrow HS^2 = BS.DS \ (HTL)$

Mà: $MS^2 = BS.DS \ (cmt)$

Nên: $HS^2 = MS^2 \ (= EI.BI)$

$\Rightarrow HS = MS$

=> S là trung điểm của MH (S nằm giữa M và H)

Lại có: I là trung điểm của MH (gt)

Suy ra: $S \equiv I$

=> B, D, I thẳng hàng

d) Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHDM theo R.

Ta có: ΔABC vuông tại B (cmt)

$\Rightarrow \cos\widehat{ACB} = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 60^0$

Ta có: ΔAOM vuông tại A (MA là tt của (O))

$\Rightarrow AM = AO.\tan\widehat{O_1} \ (ts\lg)$

Mà: $\widehat{O_1} = \widehat{ACB}$ (2g đv và MO // BC)

Nên: $AM = AO.\tan\widehat{ACB} = R.\tan 60^0 = R\sqrt{3} \quad (ts\lg)$

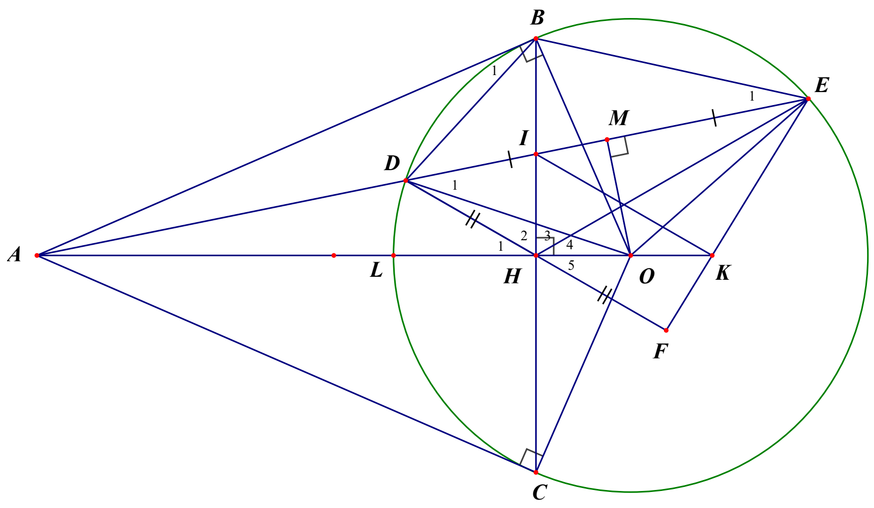
Ta có: $\begin{cases} \Delta AHM \text{ nt } (AHDM) \ (\text{tg AHDM nt}) \\ \widehat{AHM} = 90^0 \ (AB \perp MO \text{ tại H}) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AHM$ nội tiếp đường tròn đường kính AM

Diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác AHDM:

$$S = \pi.r^2 = \pi.\left(\frac{AM}{2}\right)^2 = \pi.\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi R}{4} \text{ (đvdt)}$$

Bài 39. **Cho (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Qua A vẽ cát tuyến ADE của (O) (D nằm giữa A và E) sao cho đường thẳng AE cắt đoạn thẳng HB tại I. Gọi M là trung điểm của dây cung DE.**



a) Chứng minh: $AB^2 = AD.AE$.

Xét ΔABD và ΔAEB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{EAB}\ (\text{góc chung}) \\ \widehat{B_1} = \widehat{E_1}\ \left(\text{góc tạo bởi tt và dc với góc nt (O) chắn } \overset{\frown}{BD}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AEB\ (g-g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}\ (\text{tsđd})$$

$$\Rightarrow AB^2 = AD.AE$$

b) Chứng minh: 5 điểm A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: M là trung điểm của DE (gt)

$\Rightarrow OM \perp DE$ (qh đường kính và dây cung)

Xét tứ giác ABMO, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CMO} = 90^0\ (OM \perp DE) \\ \widehat{ABO} = 90^0\ (AB \text{ là tt của } (O) \text{ tại } B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{ABO}\ (= 90^0)$$

=> Tứ giác ABMO nội tiếp vì có 2 đỉnh cùng nhìn 1c dưới 2g=

Xét tứ giác AMOC, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{CMO} = 90^0 \ (OM \perp DE) \\ \widehat{ACO} = 90^0 \ (\text{AC là tt của (O) tại C}) \end{cases}$$

$$=> \widehat{CMO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

=> Tứ giác AMOC nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau.

Mà: Tứ giác ABMO nội tiếp (cmt)

Nên: 5 điểm A, B, M, O, C cùng thuộc 1 đường tròn.

c) Chứng minh: Tứ giác OHDE nội tiếp.

Ta có: $\begin{cases} \Delta ABO \text{ vuông tại B } (\text{AB là tt của (O) tại B}) \\ \text{BH là đường cao } (BC \perp AO \text{ tại H}) \end{cases}$

$$=> AB^2 = AH.AO \ (HTL)$$

$$\text{Mà } AB^2 = AD.AE \ (cmt)$$

$$\text{Nên}: AH.AO = AD.AE \ (= AB^2)$$

$$=> \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$$

Xét ΔAHD và ΔAEO, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO} \ (cmt) \\ \widehat{HAD} = \widehat{EAO} \ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$$=> \Delta AHD \backsim \Delta AEO \ (g-g)$$

$$=> \widehat{AHD} = \widehat{AEO} \ (\text{2g tương ứng})$$

=> Tứ giác OHDE nội tiếp vì có góc ngoài = góc trong đối diện.

d) Trên tia đối của tia HD lấy điểm F sao cho H là trung điểm của DF. Tia AO cắt đường thẳng EF tại K. Chứng minh: IK // DF.

Ta có: OD = OE (= $R_{(O)}$)

$=> \Delta ODE$ cân tại O

Ta có: $\begin{cases} \widehat{H_4} = \widehat{D_1} \ (\text{2g nt của (OHDE) cùng chắn } \overset{\frown}{OE}) \\ \widehat{OED} = \widehat{D_1} \ (\Delta ODE \text{ cân tại O}) \\ \widehat{OED} = \widehat{H_1} \ (cmt) \end{cases}$

$$=> \widehat{H_4} = \widehat{H_1}$$

Mà: $\begin{cases} \widehat{H_4} + \widehat{H_3} = 90^0 \ (BH \perp AO) \\ \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^0 \ (BH \perp AO) \end{cases}$

Nên: $\widehat{H_3} = \widehat{H_4}$

=> Tia HI là phân giác của $\widehat{DHE}$

=> $\frac{ID}{IE}=\frac{HD}{HE}$ (t/c đường phân giác) (1)

Ta có: $\begin{cases} \text{HI là phân giác trong của } \Delta HDE \text{ tại H } (\text{cmt}) \\ HI \perp HK \text{ tại H } (BH \perp AO) \end{cases}$

=> HK là phân giác ngoài của ΔHDE tại H

=> HK là phân giác của ΔHEF tại H

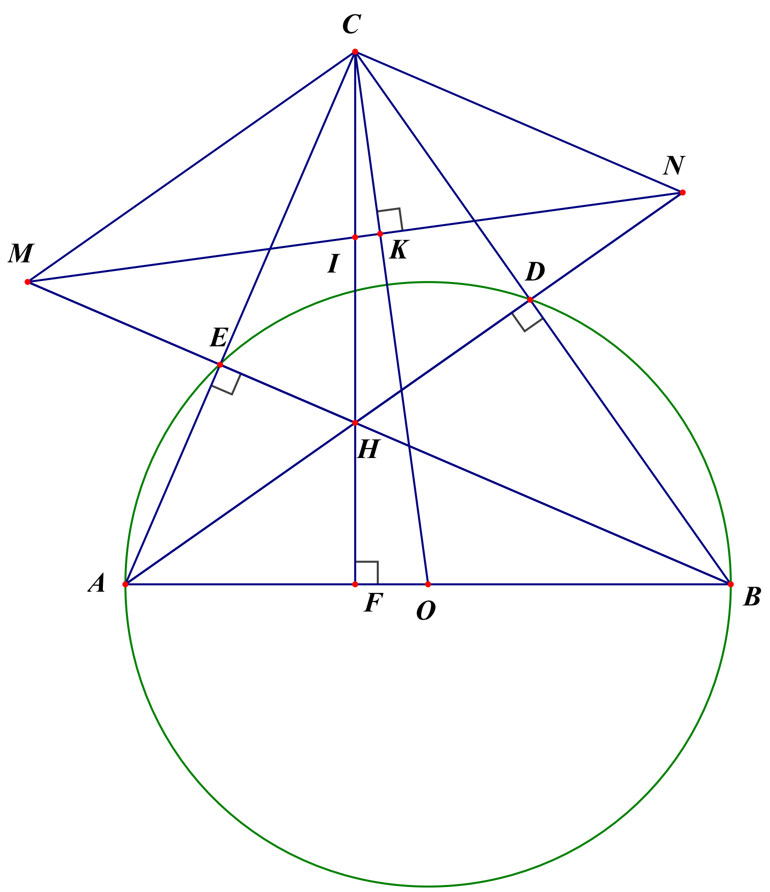
=> $\frac{KF}{KE}=\frac{HF}{HE}$ (t/c đường phân giác)

=> $\frac{KF}{KE}=\frac{HD}{HE}$ $(HF = HD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{ID}{IE}=\frac{KF}{KE}\left(=\frac{HD}{HE}\right)$

=> IK // DF (Talet đảo trong ΔEDF.

Bài 40. **Cho ΔABC nhọn (AB > AC). Vẽ đường tròn (O) đường kính AB cắt các cạnh BC, AC lần lượt tại D và E. Gọi H là giao điểm của hai cạnh AD và BE.**



a) Chứng minh: $CE.CA = CD.CB$.

Xét (O), ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đường kính AB}) \\ \widehat{ADB} = 90^0 \ (\text{gnt chắn nửa (O) đường kính AB}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BE \perp AE \\ AD \perp BD \end{cases}$$

Xét ΔACD và ΔBCE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ADC} = \widehat{BEC} \ (= 90^0) \\ \widehat{ACD} = \widehat{BCE} \ (\text{góc chung}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BCE$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CE}$ (tsđd)

$\Rightarrow AC.CE = BC.CD$

b) Chứng minh: Tứ giác HDCE nội tiếp.

Xét tứ giác HDCE, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{HDC} = 90^0 \ (CD \perp BC) \\ \widehat{HEC} = 90^0 \ (BD \perp AC) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> Tứ giác HDCE nội tiếp vì có 2 góc đối bù nhau

c) Đường thẳng CH cắt cạnh AB tại F. Với FA = 6cm, FB = 15cm, FH = 5cm. Tính diện tích ΔABC.

Xét ΔCAB, ta có:

$$\begin{cases} \text{AD là đường cao } (AD \perp BC) \\ \text{BE là đường cao } (BE \perp AC) \\ \text{AD cắt BE tại H } (gt) \end{cases}$$

=> H là trực tâm của ΔCAB

=> CH là đường cao thứ 3 của ΔCAB

=> $CH \perp AB$ tại F.

Xét ΔAFH và ΔCFB, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{AFH} = \widehat{CFB} \left(= 90^0\right) \\ \widehat{HAF} = \widehat{BCF} \left(\text{Phụ } \widehat{ABC}\right) \end{cases}$$

=> $\Delta AFH \backsim \Delta CFB$ (g – g)

=> $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{FH}{FB}$ (tsđd)

=> $CF = \dfrac{AF.FB}{FH} = \dfrac{6.15}{5} = 18cm$

Ta có: $AB = AF + BF = 6 + 15 = 21cm$

Diện tích tam giác ABC:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CF = \dfrac{1}{2}21.18 = 189cm$.

d) Từ C vẽ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng BE tại M, từ C tiếp tục vẽ đường thẳng song song với BE cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh: MN $\perp$ CO.

Gọi I và K lần lượt là giao điểm của MN với CF và CO.

Ta có: $\begin{cases} CN//BE\ (gt) \\ AC \perp BE\ (cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow CN \perp AC$

Xét tứ giác HMCN, ta có:

$\begin{cases} CN\ //\ MH\ (gt) \\ CM\ //\ NH\ (gt) \end{cases}$

=>Tứ giác HMCN là hình bình hành vì có 2ccd //

=> I là trung điểm của 2 đường chéo CH và MN

Xét ΔCAB và ΔNCH, ta có:

$\begin{cases} \widehat{NHC} = \widehat{CBA}\ (\text{Phụ } \widehat{BCF}) \\ \widehat{NCH} = \widehat{CAB}\ (\text{Phụ } \widehat{ACF}) \end{cases}$

=> $\Delta CAB \backsim \Delta NCH$ (g – g)

=> $\dfrac{CA}{NC} = \dfrac{AB}{CH}$ (tsđd)

Mà : $\begin{cases} AB = 2AO\ (\text{AB là đường kính của (O)}) \\ CH = 2CI\ (\text{I là trung điểm của CH}) \end{cases}$

Nên : $\dfrac{CA}{NC} = \dfrac{AO}{CI}$

Xét ΔCAO và ΔNCI, ta có:

$\begin{cases} \dfrac{CA}{NC} = \dfrac{AO}{CI}\ (cmt) \\ \widehat{NCI} = \widehat{CAO}\ (\text{Phụ } \widehat{ACF}) \end{cases}$

=> $\Delta CAO \backsim \Delta NCI$ (c – g – c)

=> $\widehat{ACO} = \widehat{CNI}$ (2g tương ứng)

Mà: $\widehat{ACO} + \widehat{NCK} = 90^0$ ($CN \perp AC$)

Nên: $\widehat{CNI} + \widehat{NCK} = 90^0$

=> ΔCNK vuông tại K

=> MN $\perp$ CO tại K.