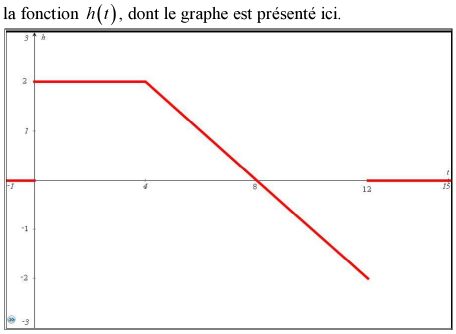
AVERTISSEMENT : Voici un exemple d'examen final basé sur celui de la session HIV-2012. Il est distribué à titre indicatif. L'examen que vous aurez pourra être plus long ou plus court, plus difficile ou plus facile que celui-ci. Il est possible que certains sujets traités ici ne le soient pas dans votre examen. À l'inverse, certains sujets non traités ici pourraient faire l'objet de questions dans votre examen final.

Question 1 (10 points)
Calculez la transformée de Laplace des fonctions qui suivent à l'aide de la table et des propriétés introduites en cours. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

a) $f(t)=(5t+3)\cdot(2t-7)$ **b)** $g(t)=5t^3e^{-2t}+4t\cos(5t)$

Question 2 (10 points)
Considérons la fonction $h(t)$, dont le graphe est présenté ici.



a) Exprimez la fonction $h(t)$ à l'aide de la fonction échelon-unité.

b) Déterminez la transformée de Laplace de $h(t)$ à l'aide de la table de transformées de Laplace. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

Question 3 (10 points)
Déterminez la transformée de Laplace inverse des expressions suivantes en utilisant la table et les propriétés introduites dans le cours. Indiquez quelles propriétés vous utilisez.

a) $F(s)=\dfrac{5s^2+22s-117}{2s^3+13s^2+96s+45}$ **b)** $G(s)=\dfrac{(3s-5)e^{-\pi s/2}}{2s^2(s^2+25)}$

Question 4 (15 points)
Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide des transformées de Laplace.
$y''+9y'+14y=2\delta(t-1)-\delta(t-2)$, avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.
Indiquez quelles propriétés vous utilisez.
Tracez le graphe de la solution $y(t)$.

Question 5 (15 points)
Soit l'équation différentielle $(2x+3)y''-4xy'+5y=0$, avec $y(0)=8$ et $y'(0)=1$, à résoudre par séries de puissances.

a) Donnez l'intervalle de convergence de la série de puissances.
b) Donnez la formule de récurrence de la série.
c) Donnez la solution de l'équation différentielle, avec les 5 premiers termes non nuls.
d) Estimez $y(1)$ avec la solution obtenue en c).

Question 6 (15 points)
Considérons la fonction $f(x)=3-2x$ si $-2<x<2$, périodique, de période 4.

a) Tracez le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-6\,;6[$.
b) Calculez la série de Fourier de $f(x)$ en évaluant les coefficients à l'aide des intégrales.
c) Trouvez encore une fois la série de Fourier de $f(x)$, mais cette fois-ci en utilisant la table des séries de Fourier.

Question 7 (10 points)
Un système masse-ressort conduit à l'équation différentielle suivante :

$$y''+8y'+17y=80\delta(t-1),\text{ avec } y(0)=5 \text{ et } y'(0)=0$$

a) Donnez la position $y(t)$.
b) À quel moment l'écart entre la position et l'équilibre est-il maximal?
Quelle est la position à ce moment-là?
Note : Vous pouvez utiliser l'environnement graphique de votre TI pour trouver ces valeurs. Fournissez alors le graphe.

Question 8 (15 points)
Un circuit électrique est constitué d'un condensateur de $10^{-3}F$, d'une bobine de $15H$, d'une résistance de 10Ω et d'une source de $100\sin(3t)V$.
On considère que $v_C(0)=100$ et $i(0)=0$.

a) Posez l'équation différentielle qui modélise ce circuit, et donnez sa solution $v_C(t)$.
b) Quel est le régime permanent de $v_C(t)$? Quelle est son amplitude?
c) Donnez le courant $i(t)$ dans le circuit.

MAT-265 Solutionnaire pour l'examen final de pratique

AVERTISSEMENT : Il y a souvent plusieurs façons pour résoudre un problème. Nous n'en indiquons qu'une, et ce n'est pas nécessairement la plus facile, ni la plus rapide.

1. a) $f(t)=(5t+3)(2t-7)=10t^2-29t-21$

$$\{10t^2-29t-21\}=10\frac{2}{s^3}-29\frac{1}{s^2}-21\frac{1}{s}=\frac{20}{s^3}-\frac{29}{s^2}-\frac{21}{s}$$ avec P3 n=2, P2 et P1.

b) $g(t)=5t^3e^{-2t}+4t\cos(5t)$

Pour le premier terme, on utilise P20, $n=3$, $f(t)=5e^{-2t}$ puis P4 pour $f(t)$
Pour le deuxième terme, on prendra P11, $\omega=5$.

$$\{g(t)\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{5}{s+2}\right)+4\frac{s^2-5^2}{(s^2+25)^2}$$
$$=\frac{30}{(s+2)^4}+\frac{4(s^2-25)}{(s^2+25)^2}$$

2.a) $h(t)=\begin{cases}2 & \text{si } 0<t<4\\ 4-\dfrac{t}{2} & \text{si } 4<t<12\\ 0 & \text{si } t>12\end{cases}$

Donc $h(t)=2u(t)+\left(2-\frac{t}{2}\right)u(t-4)+\left(\frac{t}{2}-4\right)u(t-12)$

b) Pour le premier terme, on utilisera P1.
Pour les deux autres, ce sera P21.

$\{2u(t)\}=\dfrac{2}{s}$

$a=4,\ g(t)=2-\dfrac{t}{2};\ g(t+4)=-\dfrac{t}{2};$

$$\left\{\left(2-\frac{t}{2}\right)u(t-4)\right\}=e^{-4s}\left(\frac{-1}{2s^2}\right) \text{ avec P2}$$

$a=12,\ g(t)=\dfrac{t}{2}-4;\ g(t+12)=\dfrac{t}{2}+2;$

$$\left\{\left(\frac{t}{2}-4\right)u(t-12)\right\}=e^{-12s}\left(\frac{1}{2s^2}+\frac{2}{s}\right) \text{ avec P2 et P1}$$

Finalement $\{h(t)\}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{e^{-4s}}{2s^2}+e^{-12s}\left(\dfrac{1}{2s^2}+\dfrac{2}{s}\right)$

3.a) $F(s)=\dfrac{5s^2+22s-117}{2s^3+13s^2+96s+45}=\dfrac{4s+18}{s^2+6s+45}-\dfrac{3}{2s+1}$

On complète le carré pour le premier terme : $s^2+6s+45=(s+3)^2+36$

$$F(s)=\frac{4s+18}{(s+3)^2+36}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{2}}=\frac{4(s+3)}{(s+3)^2+36}+\frac{6}{(s+3)^2+36}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

avec P9 et P8 pour les 2 premiers, $a=3$, $\omega=6$; puis P4 pour le dernier $a=\frac{1}{2}$

$$^{-1}\{F(s)\}=4e^{-3t}\cos(6t)+e^{-3t}\sin(6t)-\frac{3}{2}e^{-t/2}$$

b) On utilise P22;

$$a=\frac{\pi}{2};\ F(s)=\frac{(3s-5)}{2s^2(s^2+25)}=\frac{-3s}{50(s^2+25)}+\frac{1}{10(s^2+25)}+\frac{3}{50}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2}$$

Pour avoir $f(t)$, on passe par P9, P27, P1 et P2 :

$$f(t)=\ ^{-1}\left\{\frac{-3s}{50(s^2+25)}+\frac{1}{10(s^2+25)}+\frac{3}{50}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2}\right\}$$
$$=\frac{-3}{50}\cos(5t)+\frac{1}{50}\sin(5t)+\frac{3}{50}-\frac{t}{10}$$

$$^{-1}\left\{\frac{(3s-5)e^{-\pi s/2}}{2s^2(s^2+25)}\right\}=f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-1}{50}\cos(5t)-\frac{3}{50}\sin(5t)-\frac{1}{10}t+\frac{\pi}{20}+\frac{3}{50}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

4. $y''+9y'+14y=2\delta(t-1)+\delta(t-2)$

$\{y''+9y'+14y\}=\ \{2\delta(t-1)-\delta(t-2)\}$

On pose $\{y\}=Y$, alors $\{y'\}=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y$ par P16, et
$\{y''\}=s^2\cdot Y-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot Y$ par P17.

$\{y''\}+9\ \{y'\}+14\ \{y\}=\ \{2\delta(t-1)\}-\ \{\delta(t-2)\}$

$s^2\cdot Y+9s\cdot Y+14Y=2e^{-s}-e^{-2s}$, avec P15, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$.

$$Y=\frac{2e^{-s}}{s^2+9s+14}-\frac{e^{-2s}}{s^2+9s+14}$$

Avec P22, le premier $a=1$ et le deuxième $a=2$;

pour le premier : $F_1(s)=\dfrac{2}{s^2+9s+14}=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s+7}$

$f_1(t)=\dfrac{2}{5}e^{-2t}-\dfrac{2}{5}e^{-7t}$

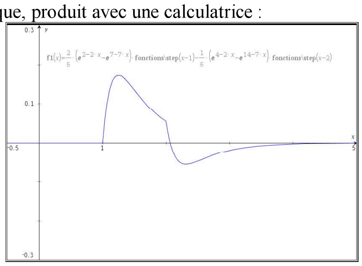
pour le deuxième : $F_2(s)=\dfrac{1}{s^2+9s+14}=\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{s+7}$

$f_2(t)=\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{-7t}$

$y(t)= {}^{-1}\{Y\}=f_1(t-1)\cdot u(t-1)-f_2(t-2)\cdot u(t-2)$

$y(t)=\frac{2}{5}\left(e^{-2t+2}-e^{-7t+7}\right)\cdot u(t-1)-\frac{1}{5}\left(e^{-2t+4}-e^{-7t+14}\right)\cdot u(t-2)$

Voici le graphique, produit avec une calculatrice :



5. $(2x+3)y''-4xy'+5y=0$, avec $y(0)=8$ et $y'(0)=1$

a) Il y a une singularité en $x=-3/2$, alors qu'on développera autour de 0 à cause des conditions initiales. Donc $R=\frac{3}{2}$

L'intervalle de convergence est $\left]-3/2;3/2\right[$.

b) On pose $y=\sum a_n x^n$, avec $a_0=8$ et $a_1=1$.

Alors $y'=\sum a_n n x^{n-1}$ et $y''=\sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2}$.

On substitue dans l'équation différentielle :

$2x\sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2}+3\sum a_n n\cdot(n-1)x^{n-2}-4x\sum a_n n x^{n-1}+5\sum a_n x^n=0$

$\sum 2a_n n\cdot(n-1)x^{n-1}+\sum 3a_n n\cdot(n-1)x^{n-2}-\sum 4a_n n x^n+\sum 5a_n x^n=0$

$\sum 2a_{n+1}(n+1)\cdot n x^n+\sum 3a_{n+2}(n+2)\cdot(n+1)x^n-\sum 4a_n n x^n+\sum 5a_n x^n=0$

$\sum\left(2a_{n+1}(n+1)\cdot n+3a_{n+2}(n+2)\cdot(n+1)-4a_n n+5a_n\right)x^n=0$

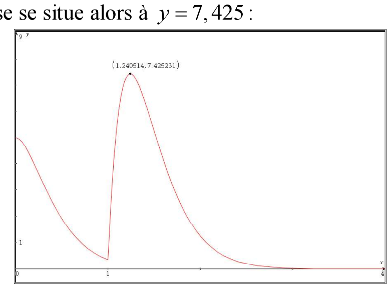
Chaque coefficient doit être égal à 0, et on isole a_{n+2} :

$a_{n+2}=\frac{-\left(2a_{n+1}\cdot n\cdot(n+1)-a_n\cdot(4n-5)\right)}{3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$; c'est la formule de récurrence.

c) On a que $a_0=8$ et $a_1=1$ et on calcule que $a_2=\frac{-20}{3}$, $a_3=\frac{77}{54}$, $a_4=\frac{-167}{162}$, ce qui nous donne 5 coefficients non nuls.

$y=8+x-\frac{20}{3}x^2+\frac{77}{54}x^3-\frac{167}{162}x^4+\ldots$

b) On trace le graphe de $y(t)$ et on voit clairement que l'écart maximal se produit à $t=1,24$; la masse se situe alors à $y=7,425$:



8.a) On a $C=10^{-3}$, $L=15$, $R=10$ et $V=100\sin(3t)$

$15\times10^{-3}\frac{d^2v_c}{dt^2}+10\times10^{-3}\frac{dv_c}{dt}+v_c=100\sin(3t)$, avec $v_c(0)=100$ et $v_c'(0)=0$

$v_c(t)=104e^{-t/3}\cos(8.158t)-38.21e^{-t/3}\sin(8.158t)-4.005\cos(3t)+115.468\sin(3t)$

b) $v_{c_{PERM}}(t)=-4.005\cos(3t)+115.468\sin(3t)$

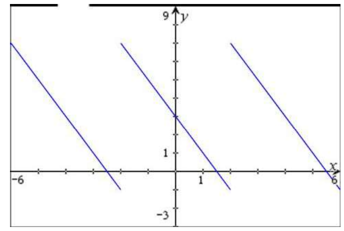
Son amplitude est 115.537 volts.

c) $i(t)=10^{-3}vc'(t)$

$i(t)=e^{-t/3}\left(-0.346\cos(8.158t)-0.836\sin(8.158t)\right)+0.346\cos(3t)+0.012\sin(3t)\,\text{A}$

d) $1\in\left]-3/2;3/2\right[$, donc on peut utiliser la série trouvée pour évaluer $y(1)\approx 2,7284$

6.a) Voici le graphe de $f(x)$, tracé avec une calculatrice :



b) Si on translate notre fonction de 3 unités vers le bas, elle devient impaire ; les a_n sont donc tous nuls. Il faut compter $\frac{a_0}{2}$ (qui sera égal à 3) et les b_n.

$\omega=\frac{\pi}{2}$

$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}3-2x\,dx=3$

$b_n=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(3-2x)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{8\cdot(-1)^n}{n\pi}$

$f(x)=3-\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{4}{\pi}\sin(\pi x)-\frac{8}{3\pi}\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right)+\ldots$

c) On prend T_4, qui est semblable à la nôtre si on la multiplie par -1, pour inverser l'inclinaison, et qu'on la monte ensuite de 3 unités.

$P_T=2\pi$, $P_f=4$; $A_T=2\pi$, $A_f=8$.

Réflexion puis translation verticale de 3 unités vers le haut.

$f(x)=3-\frac{8}{2\pi}T_4\left(\frac{2\pi}{4}x\right)=3-\frac{4}{\pi}T_4\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f(x)=3-\frac{4}{\pi}\cdot2\left(\frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}x\right)+\ldots\right)$

$=3-\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}x\right)-\ldots\right)$

7.a) On résout l'équation différentielle $y''+8y'+17y=80\delta(t-1)$ avec la calculatrice (Laplace) et on obtient

$y(t)=80e^{4-4t}\sin(t-1)u(t-1)+5e^{-4t}\cos(t)+20e^{-4t}\sin(t)$

Chantal Trottier
AUT-2012
Révisé décembre 2017