



# 强联通分量 (SCC) —— Tarjan

## 定义

1. 强连通： 在一个有向图  $G = (V, E)$  中，如果对于图中的任意两个顶点  $u$  和  $v$  ( $u$  和  $v$  可以是同一个顶点)，都存在一条从  $u$  到  $v$  的路径，同时也存在一条从  $v$  到  $u$  的路径，那么我们就称这个有向图  $G$  是强连通图。
2. 强连通分量： 一个有向图的强连通分量是其最大的强连通子图。
3. “最大”意味着：你无法再向这个子图中添加任何该图中的其他顶点，同时还能保持子图的强连通性。

一个顶点自身（没有自环边）也构成一个强连通分量（因为从自己到自己的路径可以认为是空路径或长度为0的路径）。

一个有向图不是强连通图时，它可以被分解成若干个极大强连通子图，这些子图就是该图的强连通分量。

## 应用

常被用来简化图的结构，使用 SCC 缩点来创造 DAG（有向无环图），为其他各种依赖于 DAG 的算法实现创造条件

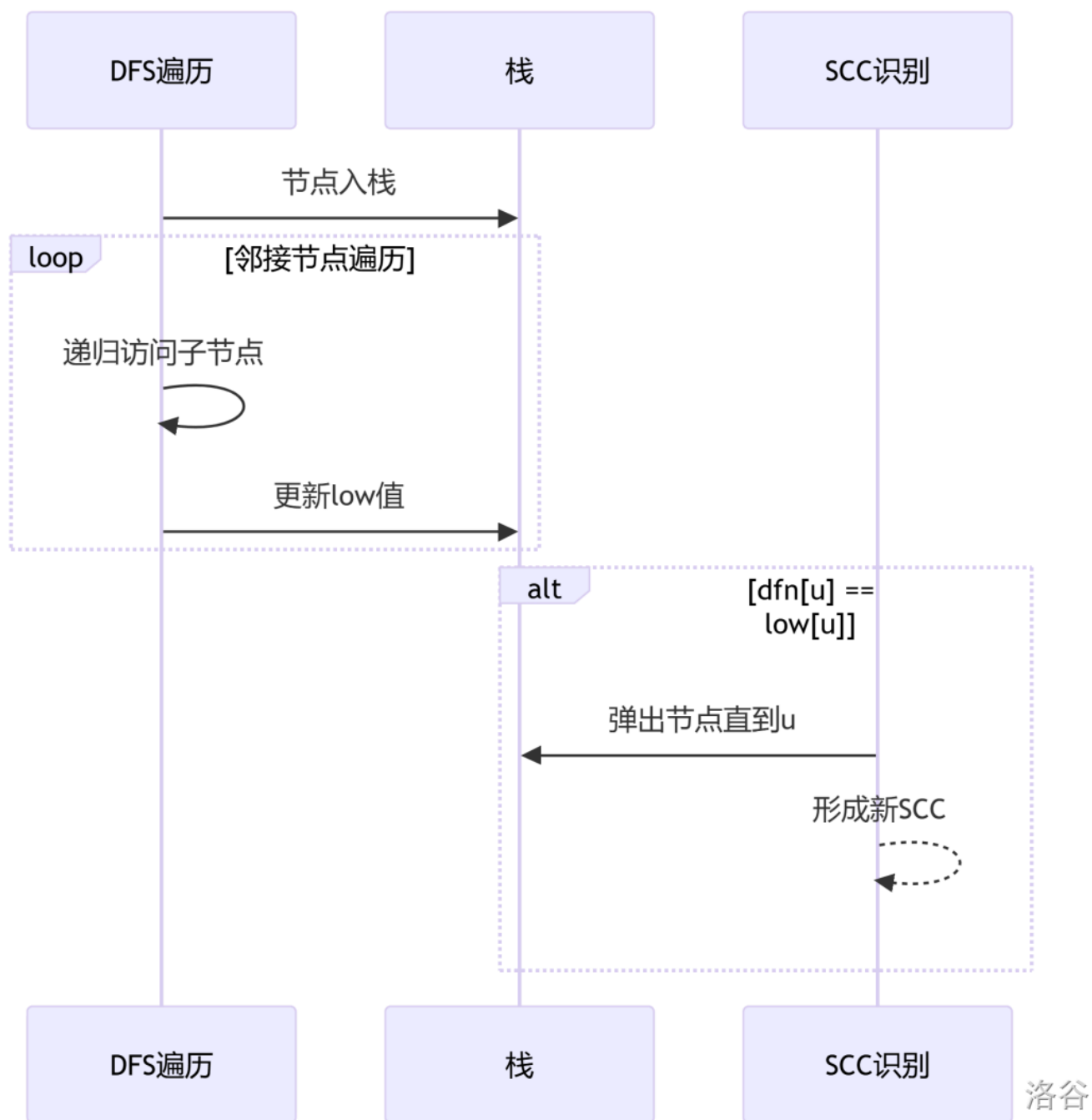
## 算法流程 (Tarjan)

`dfn[u]`：DFS 访问节点  $u$  的时间戳（发现顺序）

`low[u]`：节点  $u$  通过 DFS 树边和后向边能回溯到的最早祖先节点的 `dfn` 值

栈结构：存储当前 DFS 路径上的节点

流程示意图：



## 核心代码

```
void Tarjan(int u) {
    dfn[u] = low[u] = ++timestamp;
    s.push(u);
    ins[u] = true;
    for (auto v : g[u]) {
        if (!dfn[v]) {
            Tarjan(v);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
        } else if (ins[v]) { // 子树内查询
            low[u] = min(low[u], dfn[v]);
        }
    }
    if (dfn[u] == low[u]) {
        ++cnt_col;
    }
}
```

```

    int t;
    do {
        t = s.top();
        s.pop();
        ins[t] = false;
        col[t] = cnt_col; // 染色代替并查集
    } while (t != u);
}
}

```

## 例题1

### P3387 【模板】缩点

如题，这是一道板子题，不做赘述。

```

#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int maxn = 1e5+5, maxm = 3e5+5;
int n, m, u, v, ta, tb, timestamp, ans;
int dfn[maxn], low[maxn], a[maxn], in[maxn], dis[maxn];
vector<int> e[maxn], e2[maxn];
stack<int> s;
bool ins[maxn];
void Tarjan(int u) {
    dfn[u] = low[u] = ++timestamp;
    s.push(u);
    ins[u] = true;
    for (auto v : g[u]) {
        if (!dfn[v]) {
            Tarjan(v);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
        } else if (ins[v]) {
            low[u] = min(low[u], dfn[v]);
        }
    }
    if (dfn[u] == low[u]) {
        cnt_col++;
        int t;
        do {
            t = s.top();
            s.pop();
            ins[t] = false;
            col[t] = cnt_col; // 染色代替并查集
        } while (t != u);
    }
}
void topo(){
    queue<int> q;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        if(!in[i]){
            q.push(i);

```

```

        dis[i] = a[i];
    }
}
while(!q.empty()){
    u = q.front();q.pop();
    while(!e2[u].empty()){
        int v = e2[u].back();e2[u].pop_back();
        dis[v] = max(dis[v],dis[u] + a[v]);
        if(--in[v] == 0)q.push(v);
    }
}
}

signed main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++)scanf("%d",&a[i]);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        e[u].push_back(v);
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
        if(!dfn[i])tarjan(i);//未被访问
    for(int i=1;i<=n;i++){
        ta = col[i];
        for(auto p:e[i]){
            tb = col[p];
            if(ta != tb){
                e2[ta].push_back(tb);
                in[tb]++;
            }
        }
    }

    }
    topo();
    for(int i = 1;i <= n;i++)ans = max(ans,dis[i]);
    cout<<ans;
    return 0;
}

```

## 例题2

[P4819 \[中山市选\] 杀人游戏](#)

注意：这里可以使用排除法优化一次（有且仅有一次）的查询次数

具体来说：

### 基本思路

在缩点后的 DAG 中，通常需要查证所有入度为 0 的强连通分量（SCC）。

查证次数 = 入度为 0 的 SCC 数量（设为  $k$ ）。

安全概率  $= 1 - k/n$ 。

## 为什么需要特殊检查

存在一种特殊情况：可以通过排除法确定最后一个SCC的身份，从而减少一次查证

这需要满足特定条件，使得某个入度为0的SCC不需要实际查证

下面我们来讨论这个条件

## 特殊分量的条件

一个入度为 0 的SCC满足以下条件时可优化：

大小为 1：该SCC只包含单个节点

所有后继的入度  $\geq 2$ ：该SCC指向的所有节点在DAG中的入度  $\geq 2$

即每个后继节点至少要有两条独立的路径可以到达

## 为什么可以优化

当满足上述条件时：

警察先查证其他所有入度为 0 的SCC

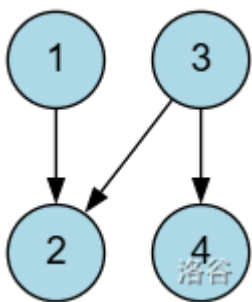
如果这些查证的都是平民，就能推断出整个图中除该SCC外的所有身份

根据"只有一个杀手"的条件，剩下的唯一未查证SCC必然是杀手

因此不需要实际查证该SCC，避免可能的危险

## 举个例子

考虑下面这张图：



我们只需要查询 3 号节点。

原因如下：

1. 查询 3 号节点  $\Rightarrow$  知道 2, 3, 4 号节点的身份。
2. 若 2, 3, 4 号节点的身份均为平民，则 1 号节点一定为杀手。

## Code

```

#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int maxn = 1e5+5, maxm = 3e5+5;
int n,m,u,v,ta,tb,timestamp,cnt;
int dfn[maxn],low[maxn],a[maxn],in[maxn],dis[maxn];
vector<int>e[maxn],e2[maxn];
stack<int>s;
bool ins[maxn];
void Tarjan(int u) {
    dfn[u] = low[u] = ++timestamp;
    s.push(u);
    ins[u] = true;
    for (auto v : g[u]) {
        if (!dfn[v]) {
            Tarjan(v);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
        } else if (ins[v]) {
            low[u] = min(low[u], dfn[v]);
        }
    }
    if (dfn[u] == low[u]) {
        cnt_col++;
        int t;
        do {
            t = s.top();
            s.pop();
            ins[t] = false;
            col[t] = cnt_col; // 染色代替并查集
            if(t!=u)a[col[s.top]]++;
        } while (t != u);
    }
}
signed main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++){
        a[i]=1;//记录scc的大小
    }
    for(int i=1;i<=m;i++){
        scanf("%d%d",&u,&v);
        e[u].push_back(v);
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
        if(!dfn[i])tarjan(i);
    for(int i=1;i<=n;i++){
        ta = dsu::find(i);
        for(auto p:e[i]){
            tb = dsu::find(p);
            if(ta != tb){
                e2[ta].push_back(tb);
                in[tb]++;
            }
        }
    }
}

```

```
    }  
}  
bool flag=false;  
for(int i=1;i<=n;i++){  
    if(dsu::find(i) == i && in[i]==0){//找到一个scc  
        cnt++;  
        if(a[i]==1 && !flag){  
            flag = true;  
            for(auto p:e[i]){  
                if(in[p]<2)flag=false;  
            }  
        }  
    }  
}  
}  
double Ex = 1-((double)cnt-(flag?1:0))/n;  
printf("%.6f",Ex);  
return 0;  
}
```