



# 质因数分解

## 方案一

枚举从 2 到  $a$  的每个数，如果  $i$  是  $a$  的一个因数，尝试把他除去并累计幂次。

```
for (int i = 2; i <= a; i++) {
    while (a % i == 0) {
        a /= i;
        mp[i]++;
    }
}
```

## 方案二

在方案一的基础上进行小优化，注意到：

” 引理

如果  $a$  有大于  $\sqrt{a}$  的质因数，那么它一定是唯一的。



证明

反证法，如果有两个大于  $\sqrt{a}$  的质因数，相乘后一定大于  $a$ 。

```
for(int i=2; i*i<=a; i++) {
    while(a%i == 0) {
        a /= i;
        mp[i]++;
    }
}
if(a > 1) mp[a]++; // 处理最后剩下的质因数
```

## 方案三

先打质数表再比较，比较复杂但是快一些。

以下段落为 AI 辅助生成，不保证正确性。

```

const int MAXN = 50000000;
bool is_prime[MAXN + 1];
vector<int> primes;
void sieve() {
    fill(is_prime, is_prime + MAXN + 1, true);
    is_prime[0] = is_prime[1] = false;
    for (int i = 2; i * i <= MAXN; ++i) {
        if (is_prime[i]) {
            for (int j = i * i; j <= MAXN; j += i) {
                is_prime[j] = false;
            }
        }
    }
    for (int i = 2; i <= MAXN; ++i) {
        if (is_prime[i]) {
            primes.push_back(i);
        }
    }
}

```

然后用质数表进行分解：

以下段落为 AI 辅助生成，不保证正确性。

```

for (int prime : primes) {
    if (prime * prime > a) break;
    while (a % prime == 0) {
        a /= prime;
        mp[prime]++;
    }
}
if (a > 1) mp[a]++;

```

`sieve()` 生成质数表后，可多次用于分解多个数，适用于需要频繁分解的场景。

## Application 应用

### 求因数和

#### 公式的展开与推导思路

设  $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots$ , 其中  $p, q, r, \dots$  是不同的质数。

**1. 单个质数幂的情况:**

对于  $p^a$ , 它的所有因数是:  $1, p, p^2, \dots, p^a$ 。

这是一个等比数列, 其和为:

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \dots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

这就是公式中每个因子的来源。

**2. 多个质数幂相乘的情况:**

当  $n = p^a \cdot q^b$  时,  $n$  的每一个因数都可以唯一地写成  $p^x \cdot q^y$  的形式, 其中  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ 。

因此, 所有因数的和就等于:

$$\sigma(n) = (1 + p + p^2 + \dots + p^a) \times (1 + q + q^2 + \dots + q^b)$$

因为第一个括号里的每一项 ( $p$ 的幂) 都要与第二个括号里的每一项 ( $q$ 的幂) 相乘, 从而生成所有可能的因数。

**3. 推广到一般形式:**

对于一般的质因数分解  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ , 其所有正因数的和就是每个质因数幂的 (等比数列) 因数和之乘积:

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}$$