差分约束

定义

差分约束系统 是一种特殊的 n 元一次不等式组，它包含 n 个**变量**以及 m 个**约束条件**，每个约束条件是由两个其中的变量做差构成的，形如 $x_i - x_j \leq c_k$，并且 c_k 为常实数。

解决问题

求出该系统的（任意）一组解，或判断无解。

变形

每个约束条件 $x_i - x_j \leq c_k$ 都可以变形成 $x_i \leq x_j + c_k$，这与单源最短路中的三角形不等式 $dist[y] \leq dist[x] + w$ 非常相似。

建模

因此，我们可以把每个变量 x_i 看做图中的一个结点，对于每个约束条件:

$$x_i - x_j \leq c_k \Leftrightarrow x_i \leq x_j + c_k$$

从结点 j 向结点 i 连一条长度为 c_k 的有向边。

这样跑一遍最短路得出的 `dist[]` 数组就是满足当前约束条件的一组解。

可是最短路总要有个源点，注意到建立的图不一定是连通图，所以使用一个超级源点，向每个节点连一条边权为 0 的边。

> 为什么边权为零?
> 假设超级源点为 0 节点，根据最短路的定义 $dist[0]$，因此对于每个节点连一条边权为 0 的边就相当于添加了 n 个条件 $x_i \leq x_0 + 0 = x_0 = 0$。
>
> > 注意到，如果 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是该差分约束系统的一组解，那么对于任意的常数 d，$\{a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_n + d\}$ 显然也是该差分约束系统的一组解，因为这样做差后 d 刚好被消掉，也就是说，差分约束得到的解是可以在数轴上**任意平移**的。
>
> 因为可行解可以任意平移，这些约束条件使得我们找到的是最大值为 0 的一组解，并不影响解的正确性。由此可知，边权为 0 只是一种被人们广泛接受的习惯，实际上它可以为 **任意实数**。赋值成 0 可以帮助人们理解并且避免解超出范围。

Code

Problem：P5960 【模板】差分约束

Application

P1260 工程规划

Analysis

相较于模版，本题额外要求：

> 对于有解的情况，要使最早进行的那个任务和整个工程的起始时间相同，也就是说，$T_1, T_2, \ldots, T_n$中至少有一个为0。

这就用到了差分约束中**解的平移性**，我们可以设，$M = \min_{1 \le i \le n} T_i$，这样将每个解**同时减去** M，就会得到一组合法的解（最小值等于0）

Code