

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

Кафедра КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ  
ИНЖЕНЕРИИ

ОТЧЕТ  
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

К.М.Н., доцент

\_\_\_\_\_  
должность, уч. степень, звание

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

М.В.Фаттахова

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

«Решение задачи многокритериальной оптимизации  
средствами Excel»

по курсу: Прикладные модели оптимизации

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР.  
№

4936

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Д.В. Петровнина

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2021

## Условие задачи:

### Вариант 17

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при розливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений. Требуется составить такой производственный план работы молочного завода, который будет удовлетворять следующим целям:

- Цель 1: максимизировать прибыль.
- Цель 2: максимизировать суммарный объём выпускаемой продукции.
- Цель 3: минимизировать суммарные затраты времени на расфасовку сметаны.

## Математическая модель задачи:

Переменными модели являются:

$x_1$  — объём произведенного молока, т

$x_2$  — объём произведенного кефира, т

$x_3$  — объём произведенной сметаны, т

### Цель 1

Чтобы обеспечить максимальную прибыль, необходимо спланировать объём производства так, чтобы максимизировать прибыль от его продажи.

Суммарная прибыль за продажу продукции составит:

$$L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3, \text{ (руб.)}$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  таких, которые максимизируют суммарную прибыль  $L_1$  (целевую функцию).

$$L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \rightarrow \max$$

### Цель 2

Чтобы обеспечить максимизировать суммарный объем выпускаемой продукции, необходимо спланировать объем производства так, чтобы максимизировать количество выпускаемой продукции.

Суммарное количество выпускаемой продукции составляет:

$$L_2 = x_1 + x_2 + x_3, \text{ (т)}$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  таких, которые максимизируют количество выпускаемой продукции тумбочек  $L_2$  (целевую функцию).

$$L_2 = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

### ***Цель 3***

Чтобы обеспечить минимизировать суммарные затраты времени на расфасовку сметаны, необходимо спланировать объем производства так, чтобы минимизировать суммарные затраты на упаковку сметаны.

Суммарное количество затрат времени при расфасовке сметаны:

$$L_3 = x_3 * 3.25, \text{ (ч)}$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений  $x_3$  таких, которые минимизируют затраты времени на расфасовку  $L_3$  (целевую функцию).

$$L_3 = x_3 * 3.25 \rightarrow \min$$

### ***Ограничения***

Объем производства ни одного вида продукции не может быть отрицательным, поэтому:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Расходы на производство таковы:

$$1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 \leq 136 \text{ (затраты молока, т)}$$

$$0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 \leq 21,4 \text{ (Затраты времени на расфасовку молока и кефира, ч)}$$

$$3,25 * x_3 \leq 16,25 \text{ (Затраты времени на расфасовку сметаны, ч)}$$

Ограничение на производство молока:

$$x_1 \geq 100 \text{ (Всего произведено молока, л)}$$

***Математическая модель многокритериальной задачи:***

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \rightarrow \max \\ L_2 = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ L_3 = x_3 * 3.25 \rightarrow \min \\ 1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 \leq 136 \\ 0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 * x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

## Решение задачи с целью 1

### Математическая модель цели 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \rightarrow \max \\ 1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 \leq 136 \\ 0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 * x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

### Решение задачи в Excel:

| Тип ресурсов       | Молоко      | Кефир | Сметана    | Всего затрачено | Всего доступно |
|--------------------|-------------|-------|------------|-----------------|----------------|
| Молоко             | 1,01        | 1,01  | 9,45       | 136             | 136            |
| машино-ч           | 0,18        | 0,19  | 0          | 21,4            | 21,4           |
| спец автоматы      | 0           | 0     | 3,25       | 5,475896531     | 16,25          |
| Суммарная прибыль  |             |       |            |                 |                |
| Прибыль            | 30          | 22    | 136        | 3795,811875     |                |
| Объем производства | 118,8888889 | 0     | 1,68489124 |                 |                |
|                    | >=          | >=    | >=         |                 |                |
| Лимит              | 100         | 0     | 0          |                 |                |

## Решение задачи с целью 2

### Математическая модель цели 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ 1,01 \cdot x_1 + 1,01 \cdot x_2 + 9,45 \cdot x_3 \leq 136 \\ 0,18 \cdot x_1 + 0,19 \cdot x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 \cdot x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

*Решение задачи в Excel:*

| Тип ресурсов       | Молоко      | Кефир | Сметана    | Всего затрачено              | Всего доступно |
|--------------------|-------------|-------|------------|------------------------------|----------------|
| Молоко             | 1,01        | 1,01  | 9,45       | 136                          | 136            |
| машино-ч           | 0,18        | 0,19  | 0          | 21,4                         | 21,4           |
| спец автоматы      | 0           | 0     | 3,25       | 5,475896531                  | 16,25          |
|                    |             |       |            | Суммарная прибыль            |                |
| Прибыль            | 30          | 22    | 136        | 3795,811875                  |                |
|                    |             |       |            | Суммарный объем производства |                |
| Объем производства | 118,8888889 | 0     | 1,68489124 | 120,5737801                  |                |
|                    | >=          | >=    | >=         |                              |                |
| Лимит              | 100         | 0     | 0          |                              |                |

## Решение задачи с целью 3

*Математическая модель цели 3:*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3 = x_3 \cdot 3.25 \rightarrow \min \\ 1,01 \cdot x_1 + 1,01 \cdot x_2 + 9,45 \cdot x_3 \leq 136 \\ 0,18 \cdot x_1 + 0,19 \cdot x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 \cdot x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

*Решение задачи в Excel:*

| Тип ресурсов | Молоко | Кефир | Сметана | Всего затрачено | Всего доступно |
|--------------|--------|-------|---------|-----------------|----------------|
| Молоко       | 1,01   | 1,01  | 9,45    | 101             | 136            |
| машино-ч     | 0,18   | 0,19  | 0       | 18              | 21,4           |

|                    |                              |    |      |                                       |       |
|--------------------|------------------------------|----|------|---------------------------------------|-------|
| спец автоматы      | 0                            | 0  | 3,25 | 0                                     | 16,25 |
|                    | Суммарная прибыль            |    |      |                                       |       |
| Прибыль            | 30                           | 22 | 136  | 3000                                  |       |
|                    | Суммарный объем производства |    |      |                                       |       |
| Объем производства | 100                          | 0  | 0    | 100                                   |       |
|                    | >=                           | >= | >=   | Суммарные затраты на упаковку сметаны |       |
| Лимит              | 100                          | 0  | 0    | 0                                     |       |

## Решение многокритериальной задачей методом главного критерия (где главный критерий – первый)

Выбранная точка  $SQ$  (3540, 109, -9,75):

| Тип ресурсов       | Молоко | Кефир | Сметана | Всего затрачено                       | Всего доступно |
|--------------------|--------|-------|---------|---------------------------------------|----------------|
| Молоко             | 1,01   | 1,01  | 9,45    | 135,41                                | 136            |
| машино-ч           | 0,18   | 0,19  | 0       | 19,14                                 | 21,4           |
| спец автоматы      | 0      | 0     | 3,25    | 9,750000                              | 16,25          |
|                    |        |       |         | Текущие значения                      | Точка SQ       |
|                    |        |       |         | Суммарная прибыль                     |                |
| Прибыль            | 30     | 22    | 136     | 3540                                  | 3540           |
|                    |        |       |         | Суммарный объем производства          |                |
| Объем производства | 100    | 6     | 3       | 109                                   | 109            |
|                    | >=     | >=    | >=      | Суммарные затраты на упаковку сметаны |                |
| Лимит              | 100    | 0     | 0       | -9,75                                 | -9,75          |

## Постановка задачи при избранной точке $SQ$ :

$$\begin{cases}
 L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \rightarrow \max \\
 L_2 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 109 \\
 L_3 = -(x_3 * 3.25) \geq -9.75 \\
 1.01 * x_1 + 1.01 * x_2 + 9.45 * x_3 \leq 136 \\
 0.18 * x_1 + 0.19 * x_2 \leq 21.4 \\
 3.25 * x_3 \leq 16.25 \\
 x_1 \geq 100 \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{cases}$$

Решение задачи в Excel:

| Тип ресурсов       | Молоко      | Кефир | Сметана    | Всего затрачено                       | Всего доступно |
|--------------------|-------------|-------|------------|---------------------------------------|----------------|
| Молоко             | 1,01        | 1,01  | 9,45       | 136,00                                | 136            |
| машино-ч           | 0,18        | 0,19  | 0          | 21,40                                 | 21,4           |
| спец автоматы      | 0           | 0     | 3,25       | 5,475897                              | 16,25          |
|                    |             |       |            | Текущие значения                      | Точка SQ       |
|                    |             |       |            | Суммарная прибыль                     |                |
| Прибыль            | 30          | 22    | 136        | 3795,811877                           | 3540           |
|                    |             |       |            | Суммарный объем производства          |                |
| Объем производства | 118,8888888 | 0     | 1,68489128 | 120,5737801                           | 109            |
|                    | >=          | >=    | >=         | Суммарные затраты на упаковку сметаны |                |
| Лимит              | 100         | 0     | 0          | -5,475896656                          | -9,75          |

## Решение многокритериальной задачей методом Нэша

| Тип ресурсов       | Молоко | Кефир | Сметана | Всего затрачено                       | Всего доступно |
|--------------------|--------|-------|---------|---------------------------------------|----------------|
| Молоко             | 1,01   | 1,01  | 9,45    | 135,41                                | 136            |
| машино-ч           | 0,18   | 0,19  | 0       | 19,14                                 | 21,4           |
| спец автоматы      | 0      | 0     | 3,25    | 9,750000                              | 16,25          |
|                    |        |       |         | Текущие значения                      | Точка SQ       |
|                    |        |       |         | Суммарная прибыль                     |                |
| Прибыль            | 30     | 22    | 136     | 3540                                  | 3540           |
|                    |        |       |         | Суммарный объем производства          |                |
| Объем производства | 100    | 6     | 3       | 109                                   | 109            |
|                    | >=     | >=    | >=      | Суммарные затраты на упаковку сметаны |                |
| Лимит              | 100    | 0     | 0       | -9,75                                 | -9,75          |

Выбранная точка SQ (3540, 109, -9,75):

**Постановка задачи при избранной точке SQ:**

$$\begin{aligned}
 H^N &= (30x_1 + 22x_2 + 136x_3 - 3540) * (x_1 + x_2 + x_3 - 109) * (x_3 + 9,75) \rightarrow \max \\
 L_1 &= 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \geq 3540 \\
 L_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \geq 109 \\
 L_3 &= -(x_3 * 3,25) \geq -9,75 \\
 1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 &\leq 136 \\
 0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 &\leq 21,4 \\
 3,25 * x_3 &\leq 16,25 \\
 x_1 &\geq 100 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Решение задачи в Excel:

| Тип ресурсов       | Молоко      | Кефир | Сметана   | Всего затрачено                       | Всего доступно |              |        |
|--------------------|-------------|-------|-----------|---------------------------------------|----------------|--------------|--------|
| Молоко             | 1,01        | 1,01  | 9,45      | 134                                   | 136            |              |        |
| машино-ч           | 0,18        | 0,19  | 0         | 21,400                                | 21,4           |              |        |
| спец автоматы      | 0           | 0     | 3,25      | 4,918548048                           | 16,25          |              |        |
|                    |             |       |           | Текущие значения                      | Точка SQ       |              |        |
|                    |             |       |           | Суммарная прибыль                     |                | Формула Нэша |        |
| Прибыль            | 30          | 22    | 136       | 3772,488985                           | 3540           |              | 12 808 |
|                    |             |       |           | Суммарный объем производства          |                |              |        |
| Объем производства | 118,8888889 | 5E-09 | 1,5133994 | 120,4022883                           | 109            |              |        |
|                    | >=          | >=    | >=        | Суммарные затраты на упаковку сметаны |                |              |        |
| Лимит              | 100         | 0     | 0         | -4,918548048                          | -9,75          |              |        |

## Решение многокритериальной задачи методом минимизации расстояния до «утопической точки»

Утопическая точка - (3795,8, 120,6, 0)

### Постановка задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2(x) = (30x_1 + 22x_2 + 136x_3 - 3795,8)^2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 120,6)^2 + (x_3 * 3.25)^2 \rightarrow \min \\ L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \geq 3540 \\ L_2 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 109 \\ L_3 = -(x_3 * 3.25) \geq -9,75 \\ 1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 \leq 136 \\ 0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 * x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

### Решение в Excel:

| Тип ресурсов       | Молоко      | Кефир | Сметана    | Всего затрачено                       | Всего доступно |                 |
|--------------------|-------------|-------|------------|---------------------------------------|----------------|-----------------|
| Молоко             | 1,01        | 1,01  | 9,45       | 119                                   | 136            |                 |
| машино-ч           | 0,18        | 0,19  | 0          | 21,240                                | 21,4           |                 |
| спец автоматы      | 0           | 0     | 3,25       | 0,001701084                           | 16,25          |                 |
|                    |             |       |            | Текущее значение                      | Точка SQ       | Утопичная точка |
| Прибыль            | 30          | 22    | 136        | Суммарная прибыль                     | 3540           | 3795,811875     |
|                    |             |       |            | Суммарный объем производства          | 117,9981506    | 109             |
| Объем производства | 117,9976272 | 0     | 0,00052341 | Суммарные затраты на упаковку сметаны | -0,001701084   | -9,75           |
| Лимит              | 100         | 0     | 0          |                                       |                |                 |

## Эффективная кривая в пространстве критериев в задаче с двумя целями – Целью 1 и Целью 3

$$\Delta = \frac{\max L_3 - \min L_3}{10} = \frac{5,475896656 - 0}{10} = 0,5475896656$$

### Математическая модель задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \rightarrow \max \\ L_3 = x_3 * 3.25 \geq k \Delta \\ 1,01 * x_1 + 1,01 * x_2 + 9,45 * x_3 \leq 136 \\ 0,18 * x_1 + 0,19 * x_2 \leq 21,4 \\ 3,25 * x_3 \leq 16,25 \\ x_1 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Вычисленные значения точек эффективной прямой:



|          |          |                                |
|----------|----------|--------------------------------|
| <i>k</i> | прибыль  | Время на расфасовку сметаны кД |
| 10       | 3795,812 | 5,475896656                    |
| 9        | 3772,897 | 4,928306991                    |
| 8        | 3749,983 | 4,380717325                    |
| 7        | 3727,068 | 3,83312766                     |
| 6        | 3704,154 | 3,285537994                    |
| 5        | 3681,239 | 2,737948328                    |
| 4        | 3658,325 | 2,190358663                    |
| 3        | 3635,41  | 1,642768997                    |
| 2        | 3612,496 | 1,095179331                    |
| 1        | 3589,581 | 0,547589666                    |

График эффективной кривой:



Сводная таблица:

|                               | x_1         | x_2     | x_3      | H1       | H2       | H3       |
|-------------------------------|-------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Оптимальное для цели 1        | 118,8889    | 0       | 1,684891 | 3795,812 | 120,5738 | 5,475897 |
| Оптимальное для цели 2        | 118,8889    | 0       | 1,684891 | 3795,812 | 120,5738 | 5,475897 |
| Оптимальное для цели 3        | 100         | 0       | 0        | 3000     | 100      | 0        |
| Точка SQ                      |             |         |          | 3540     | 109      | -9,75    |
| Метод главного критерия       | 118,8889    | 0       | 1,684891 | 3795,812 | 120,5738 | -5,4759  |
| Метод Нэша                    | 118,8889    | 5,5E-09 | 1,513399 | 3772,489 | 120,4023 | -4,91855 |
| Метод минимизации             | 117,9976    | 0       | 0,000523 | 3540     | 117,9982 | -0,0017  |
| Расстояние до утопичной точки | 65446,34945 |         |          |          |          |          |

**Вывод:**

На мой взгляд, оптимальными решениями являются решения методом главного критерия (где главный критерий – первый) и Нэша, так как они позволяют выбрать варианты использования ресурсов с наибольшей прибылью и наименьшей разницей между этими двумя методами использования.