

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

Кафедра КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ
ИНЖЕНЕРИИ

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

К.М.Н., доцент

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

М.В.Фаттахова

инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

«Решение задачи многокритериальной оптимизации
средствами Excel»

по курсу: Прикладные модели оптимизации

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР.
№

4936

подпись, дата

М. Р. Назаров

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2021

Условие задачи:

Вариант 14

В мастерской при изготовлении столов, шкафов и тумбочек применяются два вида древесины. На один стол расходуется $0,15 \text{ м}^3$ древесины первого вида и $0,2 \text{ м}^3$ – второго, на один шкаф $0,2 \text{ м}^3$ и $0,1 \text{ м}^3$ соответственно, а на одну тумбочку $0,05 \text{ м}^3$ древесины первого вида. В наличии имеется 60 м^3 древесины первого вида и 40 м^3 второго. Количество выпущенных шкафов должно быть не менее 200. Выпуск столов и тумбочек не запланирован. Прибыль мастерской от производства одного стола составляет 12 руб., шкафа – 15 руб., тумбочки – 3 руб. Требуется составить такой план выпуска изделий, который будет удовлетворять следующим целям:

- Цель 1: максимизировать прибыль.
- Цель 2: максимизировать количество тумбочек.
- Цель 3: минимизировать расход древесины второго вида.

Математическая модель задачи:

Переменными модели являются:

x_1 — количество столов, шт;

x_2 — количество шкафов, шт.

x_3 — количество тумбочек, шт.

Цель 1

Чтобы обеспечить максимальную прибыль, необходимо спланировать объем производства мебели так, чтобы максимизировать прибыль от их продажи.

Суммарная прибыль за продажу мебели составит:

$$L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3, \text{ (руб.)}$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений x_1 , x_2 и x_3 таких, которые максимизируют суммарную прибыль L_1 (целевую функцию).

$$L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

Цель 2

Чтобы обеспечить максимизировать суммарное количество выпускаемых тумбочек, необходимо спланировать объем производства мебели так, чтобы максимизировать количество выпускаемой продукции.

Суммарное количество выпускаемой продукции тумбочек составляет:

$$L_2 = x_3, \text{ (шт)}$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений x_1 , x_2 и x_3 таких, которые максимизируют количество выпускаемой продукции тумбочек L_2 (целевую функцию).

$$L_2 = x_3 \rightarrow \max$$

Цель 3

Чтобы обеспечить минимальный расход древесины 2 типа, необходимо спланировать объем производства мебели так, чтобы минимизировать количество расходуемого сырья (в данном случае, древесины 2 типа).

Суммарное количество расходуемой древесины при реализации всех типов мебели составляет:

$$L_3 = 0,2 x_1 + 0,1 x_2, (\text{м}^3)$$

Целью компании является определение среди всех допустимых значений x_1 , x_2 и x_3 таких, которые минимизируют расход древесины 2 L_3 (целевую функцию).

$$L_3 = 0,2 x_1 + 0,1 x_2 \rightarrow \min$$

Ограничения

Объем производства ни одного вида продукции не может быть отрицательным, поэтому:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Расход сырья на производство мебели таков:

$$0,15 x_1 + 0,2 x_2 + 0,05 x_3 \leq 60 \text{ (Объем древесины 1 типа, м}^3\text{)}$$

$$0,2 x_1 + 0,1 x_2 \leq 40 \text{ (Объем древесины 2 типа, м}^3\text{)}$$

$$x_2 \geq 200 \text{ (Количество выпущенных шкафов, шт.)}$$

Математическая модель многокритериальной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 12 x_1 + 15 x_2 + 3 x_3 \rightarrow \max \\ L_2 = x_3 \rightarrow \max \\ L_3 = 0,2 x_1 + 0,1 x_2 \rightarrow \min \\ 0,15 x_1 + 0,2 x_2 + 0,05 x_3 \leq 60 \\ 0,2 x_1 + 0,1 x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение задачи с целью 1

Математическая модель цели 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение задачи в Excel:

Цель 1					
Входные данные					
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно
	стол	шкаф	тумбочка		
древесина 1	0,15	0,2	0,05	60	60
древесина 2	0,2	0,1	0	40	40
				суммарная прибыль	
Прибыль	12	15	3	4560	
Производственный план	80	240	0		
Ограничение		200			

Решение задачи с целью 2

Математическая модель цели 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = x_3 \rightarrow \max \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение задачи в Excel:

Цель 2					
Входные данные					
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно
	стол	шкаф	тумбочка		
древесина 1	0,15	0,2	0,05	60	60
древесина 2	0,2	0,1	0	20	40
				суммарная прибыль	
Прибыль	12	15	3	4200	
Производственный план	0	200	400		
Ограничение		200			

Решение задачи с целью 3

Математическая модель цели 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 \rightarrow \min \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение задачи в Excel:

Цель 3					
Входные данные					
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно
	стол	шкаф	тумбочка		
древесина 1	0,15	0,2	0,05	40	60
древесина 2	0,2	0,1	0	20	40
				суммарная прибыль	
Прибыль	12	15	3	3000	
Производственный план	0	200	0		
Ограничение		200			

Решение многокритериальной задачей методом главного критерия (где главный критерий – первый)

Выбранная точка SQ (4365, 165, -27):

Исходная задача с главным первым критерием					
Входные данные					
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно
	стол	шкаф	тумбочка		
древесина 1	0,15	0,2	0,05	59,75	60
древесина 2	0,2	0,1	0	27	40
				суммарная прибыль	Количество тумбочек
Прибыль	12	15	3	4365	165
Производственный план	10	250	165	Точка SQ	
Ограничение		200		4365	165
					Количество древесины 2 (обратная функция)
					-27

Постановка задачи при избранной точке SQ:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ L_2 = x_3 \geq 165 \\ L_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq -27 \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение задачи в Excel:

Исходная задача с главным первым критерием						
Входные данные						
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно	
	стол	шкаф	тумбочка			
древесина 1	0,15	0,2	0,05	60	60	
древесина 2	0,2	0,1	0	27	40	
				суммарная прибыль	Количество тумбочек	Количество древесины 2 (обратная функция)
Прибыль	12	15	3	4383	165	-27
Производственный план	9	252	165		Точка SQ	
Ограничение		200		4365	165	-27

Решение многокритериальной задачей методом Нэша

Исходная задача с главным первым критерием						
Входные данные						
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно	
	стол	шкаф	тумбочка			
древесина 1	0,15	0,2	0,05	59,75	60	
древесина 2	0,2	0,1	0	27	40	
				суммарная прибыль	Количество тумбочек	Количество древесины 2 (обратная функция)
Прибыль	12	15	3	4365	165	-27
Производственный план	10	250	165		Точка SQ	
Ограничение		200		4365	165	-27

Выбранная точка SQ (4365, 165, -27):

Постановка задачи при избранной точке SQ :

$$\begin{cases}
 H^N = (12x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 4365) * (x_3 - 165) * (0,2x_1 + 0,1x_2 + 27) \rightarrow \max \\
 L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \geq 4365 \\
 L_2 = x_3 \geq 165 \\
 L_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq -27 \\
 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\
 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\
 x_2 \geq 200 \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{cases}$$

Решение задачи в Excel:

формула Нэша						
Входные данные						
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно	
	стол	шкаф	тумбочка			
древесина 1	0,15	0,2	0,05	60	60	
древесина 2	0,2	0,1	0	25,9	40	
				суммарная прибыль	Количество тумбочек	Количество древесины 2 (обратная функция)
Прибыль	12	15	3	4371	174	-25,9
Производственный план	2	255	174		Точка SQ	
Ограничение		200		4365	165	-27
				Значение формулы Нэша		
				59,4		

Решение многокритериальной задачи методом минимизации расстояния до «утопической точки»

Утопическая точка - (4560, 400, 20)

Постановка задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2(x) = (12x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 4560)^2 + (x_3 - 400)^2 + (0,2x_1 + 0,1x_2 - 20)^2 \rightarrow \min \\ L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \geq 4365 \\ L_2 = x_3 \geq 165 \\ L_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq -27 \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение в Excel:

Утопичная точка						
Входные данные						
ресурс	Тип мебели			Всего затрачено	Всего доступно	
	стол	шкаф	тумбочка			
древесина 1	0,15	0,2	0,05	59,75	60	
древесина 2	0,2	0,1	0	27	40	
				суммарная прибыль	Количество тумбочек	Количество древесины 2 (обратная функция)
Прибыль	12	15	3	4365	165	-27
Производственный план	10	250	165			Точка SQ
Ограничение		200		4365	165	-27
						Утопичная точка
				4560	400	20
				Расстояние до утопичной точки		
				93299		

Эффективная кривая в пространстве критериев в задаче с двумя целями – Целью 1 и Целью 3

$$\Delta = \frac{\max L_3 - \min L_3}{10} = \frac{40 - 20}{10} = 2$$

Математическая модель задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 12x_1 + 15x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ L_3 = 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq k * (-\Delta) \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,05x_3 \leq 60 \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Вычисленные значения точек эффективной прямой:

k	Прибыль	Затрачено древесины 2(kΔ)
10	4200	20
11	4260	22
12	4320	24

13	4380	26
14	4440	28
15	4500	30
16	4512	32
17	4524	34
18	4536	36
19	4548	38
20	4560	40

График эффективной кривой:



Сводная таблица:

Решение	x_1	x_2	x_3	H1	H2	H3
Оптимальное для цели 1	80	240	0	4560	0	-40
Оптимальное для цели 2	0	200	400	4200	400	-20
Оптимальное для цели 3	0	200	0	3000	0	-20
Точка SQ				4365	165	-27
Метод главного критерия	9	252	165	4383	165	-27
Метод Нэша	2	255	174	4371	174	-25,9
Метод минимизации	10	250	165	4365	165	-27
Расстояние до утопичной точки	93299					

Вывод:

На мой взгляд, оптимальными решениями являются решения методом главного критерия (где главный критерий – первый) и Нэша, так как они позволяют выбрать варианты использования ресурсов с наибольшей

прибылью и наименьшей разницей между этими двумя методами использования.