Тема 3.4. Деревья. Остов графа. Экстремальные графы

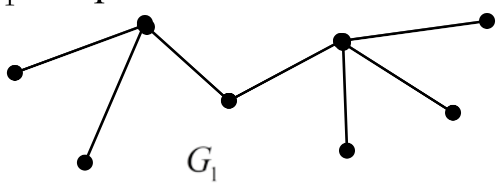
Аннотация: Деревья. Свойства деревьев. Типы вершин дерева и его центры. Корневые деревья. Остов связанного графа. Определение количества различных остовов. Выделение минимального остовного дерева связного графа. Метод ветвей и границ. Экстремальные графы.

Деревья

Связный граф без циклов называется ***деревом***.

Лес - граф, компонентами которого являются деревья.

Пример: Граф G_1 - дерево.



G_1

Следующие утверждения эквивалентны:

1. граф G есть дерево
2. граф G является связным и не имеет элементарных циклов;
3. граф G является связным и число его ребер ровно на единицу меньше числа вершин;
4. любые две различные вершины графа G можно соединить единственной (и притом элементарной) цепью;
5. граф не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один (с точностью до направления обхода и начальной вершины обхода) и притом элементарный цикл (проходящий через добавляемое ребро).

Дерево с выделенной вершиной называется ***корневым деревом***, а выделенная вершина – ***корнем дерева***.

Теорема (характеристическое свойство дерева)

Граф является деревом тогда и только тогда , когда между любыми двумя его различными вершинами существует одна и только одна цепь.

Примем теоремы без доказательства.

Рассмотрим еще несколько очень простых теорем.

Дерево с p *вершинами имеет* p-1 *ребер.*

Теорема

Доказательство очевидно.

Теорема (необходимое и достаточное условие)

Для того чтобы конечный связный граф был деревом, необходимо и достаточно, чтобы число его ребер было на единицу меньше числа его вершин.

Доказательство очевидно.

Остов графа

Если задача состоит в том, чтобы найти экстремум (максимум или минимум) определенной функции от этих значений, то её принято называть экстремальной задачей.

Метод ветвей и границ — общий алгоритмический метод для нахождения оптимальных решений различных задач оптимизации, особенно дискретной и комбинаторной оптимизации. Метод является развитием метода полного перебора, в отличие от последнего — с отсевом подмножеств допустимых решений, заведомо не содержащих оптимальных решений.

Задача построения остова графа возникает при проектировании сети дорог, линий электропередач, трубопроводов и т.д., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой таким образом, чтобы любые две вершины были связаны непосредственно или через другие ребра, и чтобы общая длина (стоимость) каналов связи была минимальной.

Остовом графа называется связный подграф без циклов, содержащий все вершины исходного графа. Остов графа часто обозначают T. Подграф содержит часть или все ребра исходного графа.

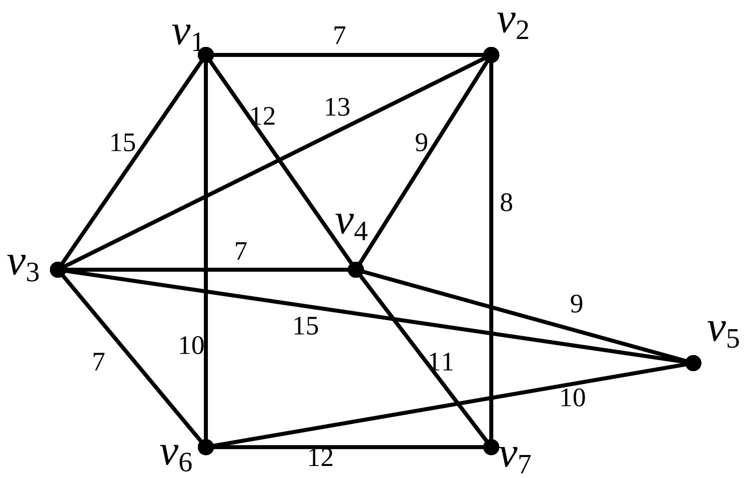
Остов получается из графа разрушением циклов. Число удаляемых при этом ребер: $\gamma(G)$ называется ***цикломатическим числом*** графа.

Задача о минимальном остове формулируется следующим образом: во взвешенном связном графе найти остов минимального веса.

Рассмотрим *алгоритм Краскала* решения этой задачи. В алгоритме используются два правила:

1. Первое ребро остова – ребро минимального веса в исходном графе.
2. Если граф T_i уже построен, то новый граф T_{i+1} получается из графа T_i присоединением ребра, имеющего минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i, и не составляющего циклов с ребрами из T_i.

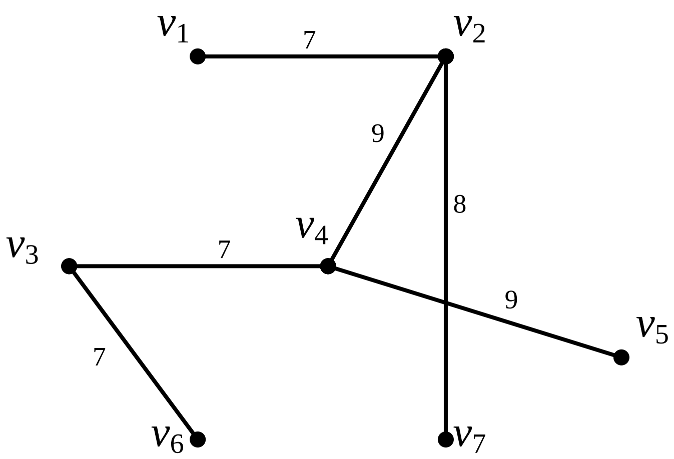
Пример: Найти остов минимального веса графа:



Решение: Возьмем ребро минимального веса (таких несколько), например (v_3, v_4) и будем последовательно добавлять к нему ребра в соответствии с алгоритмом Краскала. Последовательно:

1. (v_3, v_6),
2. (v_3, v_6),
3. (v_4, v_2),
4. (v_2, v_1),
5. (v_2, v_7),
6. (v_4, v_5).

Получим:



Нужно помнить, что не следует добавлять ребра, если образуется цикл (просто берем следующее ребро минимального веса).

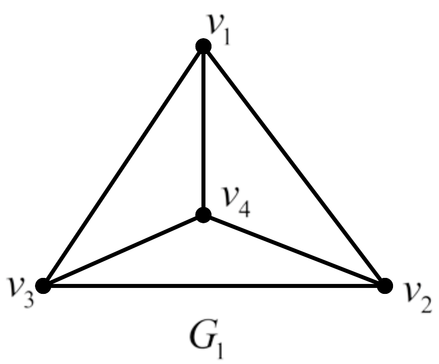
Планарные графы

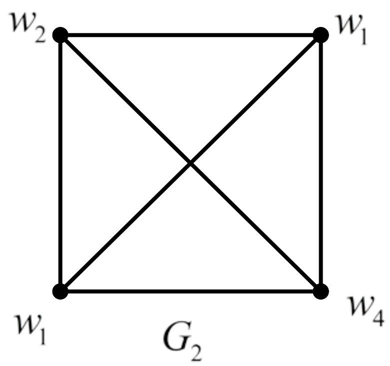
Обычно, поскольку все изображения графа изоморфны, то не имеет значения, как его нарисовать. Однако иногда встречаются и обратные ситуации. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем или печатных плат крайне желательно избежать пересечений проводников или при проектировании дорог, особенно железнодорожных путей, нежелательны переезды из-за их гораздо более высокой стоимости. Т.е. практическая важность представления графов на плоскости связана с задачами, в которых ребра соответствуют физическим связям, не допускающим соприкосновений или наложений.

Граф называется ***плоским***, если он имеет геометрическую реализацию на плоскости, причем его ребра, пересекаются только в точках, соответствующих вершинам графа, т.е. любая точка пересечения таких линий есть вершина, инцидентная ребрам, которые эти линии изображают.

Граф, изоморфный плоскому графу, называют ***планарным***.

Пример: Очевидно, что графы G_1 и G_2 изоморфны, при этом G_1 - плоский, а G_2 - планарный.



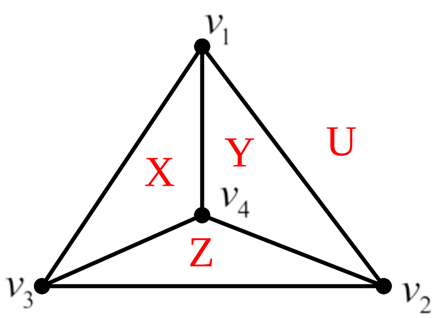


Две задачи о плоских графах

Рассмотрим *задачу о полном графе, имеющем 5 вершин*: Доказать, что любой полный граф, имеющий пять вершин, неплоский.

Решение:

Вершины графа обозначим v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Если по точкам v_1, v_2, v_3 и v_4 построим полный граф, то он будет плоским и разделит плоскость на четыре области:



Обозначим эти области буквами *X*, *Y*, *Z*, *U*. Тогда вершина v_5 будет расположена в одной из этих областей. Пусть, например, она попала в область *X*, тогда ребро (v_2, v_5) невозможно провести без пересечений. Пусть v_5 попала в область *U*, тогда без пересечений нельзя провести ребро (v_4, v_5). Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем, что полный граф с пятью вершинами действительно плоским быть не может.

Теперь давайте вспомним задачу *о трех домах и трех колодцах*: «На хуторе три дома и три колодца. Требуется провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались». Эту задачу решал в 1930 году Казимир Куратовский.

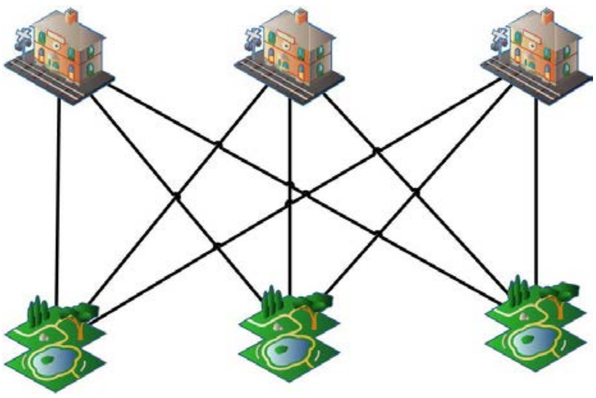
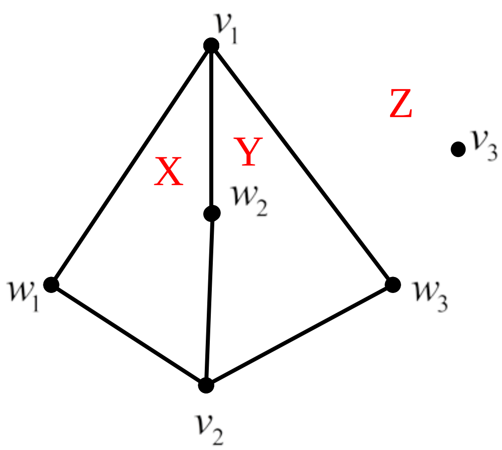


Рисунок 1 Задача о трех домах и трех колодцах

Для решения проведем рассуждения, аналогичные предыдущей задаче.

Дома обозначим вершинами v_1, v_2, v_3, а колодцы вершинами w_1, w_2, w_3. Построим сначала следующий граф:



Полученный граф разделит плоскость на части: *X*, *Y*, *Z*. Легко заметить, что дом v_3 может находиться в одной из этих областей. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Если v_3 попало в область *Z* (на рисунке), тогда от него невозможно провести тропинку к w_2, которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведённых тропинок.

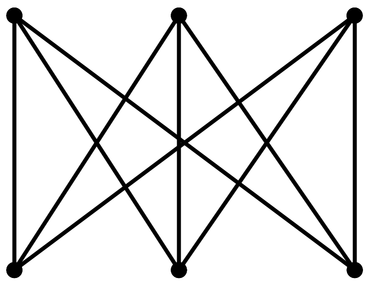
2. Если дом v_3 находится в области *Y*, то от него невозможно провести тропинку к w_1.

3. Если v_3 находится в области *X*, то от него невозможно провести тропинку к w_3, которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведённых.

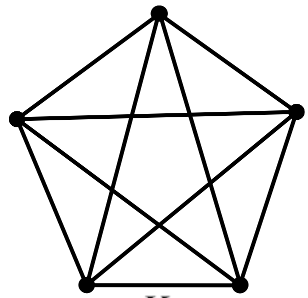
Итак, получается, что граф, выражающий ситуацию данной задачи, плоским быть не может. А это значит, что задача неразрешима.

Критерии планарности

Рассмотрим два графа, играющие фундаментальную роль в теории планарности графов и называемых графами Куратовского (Понтрягина-Куратовского). Граф K_5 - это полный (полносвязный) граф наименьшего порядка, который, как мы доказали ранее не является планарным, и двудольный граф $K_{3,3}$ про который мы тоже доказали, что он не является планарным:



$K_{3,3}$



K_5

Теорема

Графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются плоскими.

Доказательство было получено нами при решении предыдущих задач.

В определенном смысле графы $K_{3,3}$ и K_5 являются каноническими непланарными графами. Оказывается, что все другие непланарные графы содержат в себе фрагменты, подобные либо графу $K_{3,3}$, либо графу K_5.

Графы G_1 и G_2 называются ***гомеоморфными***, если существуют такие их разбиения, которые являются изоморфными. Можно взять еще и такое определение: Граф G_1 называют ***гомеоморфным*** графу G, если он может быть получен из G заменой некоторых цепей на ребра.

Рассмотрим теорему, которая была доказана в 1930 году польским математиком Казимиром Куратовским и в 1927 году советским математиком Львом Семёновичем Понтрягиным, который не опубликовал своё доказательство.

Теорема (Критерий планарности Понтрягина-Куратовского)

Граф G является плоским или планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам $K_{3,3}$ или K_5.

Примем эту теорему без доказательства.

Следовательно, планарность или непланарность произвольного графа G зависит от того, содержится ли в G подграф, стягиваемый к $K_{3,3}$ и K_5 или нет.

Для каждого графа G существует ровно две альтернативы:

1) граф имеет плоскую реализацию;

2) граф содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5.

Поэтому решение вопроса о планарности произвольного графа G всегда может быть получено либо построением плоской реализации G, либо нахождением такого подграфа G, который гомеоморфен одному из графов $K_{3,3}$ или K_5.

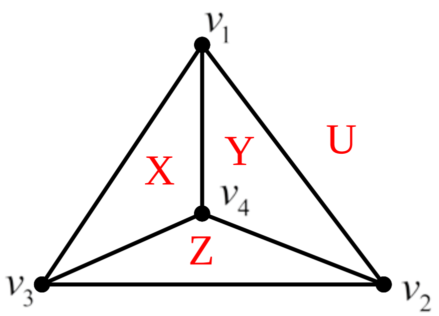
При этом проверить наличие или отсутствие в G подграфов, стягиваемых к $K_{3,3}$ или K_5, можно путем перебора всех подграфов этого графа.

Однако такой метод требует проверки слишком большого числа вариантов уже для небольших по размерам графов и поэтому может считаться практически неприменимым.

Формула Эйлера для многогранников

Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

Пример: В графе ниже гранями являются: (v_1, v_4, v_3), (v_1, v_2, v_4) и (v_2, v_3, v_4), обозначенные на рисунке также *X*, *Y* и *Z*. Часть плоскости *U*, ограниченная простым циклом (v_1, v_2, v_3) гранью не является, так как содержит внутри себя другие циклы.



Простой цикл, ограничивающий грань, назовём ***границей грани***. Две грани будем называть ***соседними***, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную «вне» плоского представления графа; ограничена «изнутри» простым циклом и не содержит в себе других циклов. Эту часть плоскости называют ***бесконечной гранью***.

Всякое плоское представление графа либо не имеет бесконечной грани, либо имеет в точности одну бесконечную грань.

Для плоских многогранников можно рассмотреть интересное соотношение, известное под названием *формулы Эйлера для многогранников*. Она справедлива для всякого связного плоского графа.

Эйлеровой характеристикой связного плоского графа G называется число $\chi(G) = B - P + \Gamma$, где B – число вершин, P – число ребер, а Γ – число граней данного графа.

Теорема (формула Эйлера для многогранников)	*Эйлерова характеристика любого плоского связного графа равна двум, т.е.* $\chi(G) = B - P + \Gamma = 2$.

Доказательство:

➢ Для доказательства справедливости этой формулы в общем случае воспользуемся методом математической индукции по количеству граней.

Формула Эйлера очевидна в простейшем случае, когда рассматривается только один многоугольник, имеющий n рёбер. В этом случае $B = P = n$, а граней всего две (внутренняя и бесконечная «внешняя»), т.е. $\Gamma = 2$, и тогда $\chi(G) = B - P + \Gamma = 2$.

Предположим, что формула справедлива для графов, имеющих Γ граней. Докажем ее справедливость для графов, имеющих $\Gamma + 1$ грань.

Многоугольные графы можно строить, последовательно добавляя по одной грани. Предположим, что G произвольный граф, имеющий B вершин, P рёбер и Γ граней, и для этого графа справедлива формула Эйлера.

Добавим новую грань, проводя внутри бесконечной грани Γ_∞ некоторую элементарную цепь, соединяющую 2 вершины максимального цикла графа G. Если эта элементарная цепь имеет k рёбер, то нам придётся добавить $k-1$ новых вершин и одну новую грань. Но тогда ясно, что формула Эйлера останется справедливой и для нового графа, так как

$$\chi(G) = B' - P' + \Gamma' = (B+1-1) - (P+1) + (\Gamma+1) = B - P + \Gamma = 2.$$

Теорема доказана. ∢

Вопросы для самоконтроля:

1. Деревья. Свойства деревьев. Типы вершин дерева и его центры. Корневые деревья.
2. Остов связанного графа. Алгоритм Краскала.
3. Планарные графы. Основные понятия и примеры.
4. Две задачи о плоских графах.
5. Критерии планарности.
6. Формула Эйлера для многогранников (эйлерова характеристика плоского графа).