Тема 5.1. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга

План: Машины Тьюринга их применение к словам и конструирование машин Тьюринга.

Задачи с решением

Пример 1: Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом $A=\{a_0,1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7\}$ и с программой (функциональной схемой)

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	$q_4a_0\Pi$	$q_6a_0\Pi$	$q_6a_0\Pi$	q_01	$q_4a_0\Pi$	q_0a_0	$q_6a_0\Pi$
1	$q_21\Lambda$	$q_31\Lambda$	$q_11\Lambda$	q_5a_0	q_5a_0	q_7a_0	q_7a_0

Изобразить получающиеся конфигурации на каждом такте работы машины и определить, в какое слово перерабатывает машина, исходя из начального стандартного начального положения, слово 111.

Решение:

Последовательность конфигураций при переработке машиной слова 111 из начального положения будет следующей:

					q_1		
1)			1	1	1		
				q_2			
2)			1	1	1		
			q_3				
3)			1	1	1		
		q_1					
4)			1	1	1		
			q_4				
5)			1	1	1		
			q_5				
6)				1	1		
			q_4				
7)				1	1		
			q_5				
8)					1		
				q_4			
9)					1		
				q_5			
10)							
					q_4		
11)							
					q_0		
12)						1	

Слово 111 из начального стандартного состояния переработано машиной в слово 1.

П р и м е р 2: Для условий примера 1 записать программу машины Тьюринга в виде последовательности команд.

Р е ш е н и е:

Последовательность команд имеет следующий вид:

$q_1 1 \to q_1 1\Lambda$; $q_2 1 \to q_3 1\Lambda$; $q_3 1 \to q_1 1\Lambda$; $q_1 a_0 \to q_4 a_0 \Pi$; $q_4 1 \to q_5 a_0$; $q_5 a_0 \to q_4 a_0 \Pi$; $q_4 1 \to q_5 a_0$; $q_5 a_0 \to q_4 a_0 \Pi$; $q_4 1 \to q_5 a_0$; $q_5 a_0 \to q_4 a_0 \Pi$; $q_4 a_0 \to q_0 1$.

Договоримся представлять натуральные числа в единичном коде, тогда число x представляется словом $1....1 = 1^x$, состоящим из x единиц. В качестве разделителя слов примем символ *. Тогда сложить два числа a и b означает слово $1^a * 1^b$ переработать в слово 1^{a+b}, т.е. удалить разделитель и сдвинуть одно из слагаемых к другому. Тогда числовая функция $f(x_i, ..., x_n)$ вычислима по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, такая что $q_1 1^{x_1} * 1^{x_2} * ... * 1^{x_n}$ в результате конечного числа шагов приходит в состояние $q_0 1^y$, когда $f(x_1, ..., x_n) = y$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить словесные алгоритмы для решения следующих задач:
   1.1. вычисление скалярного произведения двух векторов;
   1.2. умножение вектора на скаляр;
   1.3. сложение двух матриц;
   1.4. вычисление определителя второго порядка;
   1.5. умножение матрицы на матрицу;
   1.6. вычисление $n!$;
   1.7. транспортирование матрицы;
   1.8. определение множества M, равного пересечению двух множеств M_1 и M_2 ($M = M_1 \cap M_2$);
   1.9. деление комплексных чисел $(a+bi):(c+di) = x + yi$.

1.10. вычисление значения $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$;

2. Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1\}$ и программой

$A \backslash Q$	q_0	q_1
a_0		$q_0 1П$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_1 1П$

Определить, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, если она находится в начальном состоянии q и обозревает указанную ячейку, считая слева:

2.1. $11a_0111a_01$ (обозревается ячейка 2);

2.2. $1a_0a_0111$ (обозревается ячейка 3);

2.3. $1111a_011$ (обозревается ячейка 4);

2.4. $11a_01111$ (обозревается ячейка 3);

2.5. 1111111 (обозревается ячейка 4);

2.6. 11111 (обозревается ячейка 5);

2.7. 111…1 (k единиц, обозревается k-я ячейка);

2.8. $11a_011$ (обозревается ячейка 3).

Изобразите схематически последовательность конфигураций, возникающих на ленте на каждом такте работы машины.

3. Машина Тьюринга задана следующей функциональной схемой:

$A \backslash Q$	q_0	q_1	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
$*$	$q_0 a_0$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

Определить, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного состояния:

3.1.111*111;

3.2.1111*11;

3.3.111*1;

3.4.1*11;

3.5.11*111;

3.6.11111*;

3.7.*1111.

4. Машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_4 a_0 П$	$q_3 a_0 П$	$q_1 a_0 П$	$q_0 a_0 Л$
1	$q_2 \alpha$	$q_1 \beta$	$q_1 1 П$	$q_1 1 Л$
α	$q_1 \alpha Л$	$q_2 \alpha П$	$q_3 1 Л$	$q_4 a_0 П$
β	$q_1 \beta Л$	$q_2 \beta П$	$q_3 a_0 Л$	$q_4 1 П$

Для следующих слов определить, в какое слово перерабатывается каждое из них машиной, исходя из начального положения, при котором машина находится в состоянии q_1 и обозревается указываемая ячейка, считая слева:

4.1. 11111 (обозреваемая ячейка 2);

4.2. 111 (обозреваемая ячейка 1);

4.3. 1111111111 (обозреваемая ячейка 4);

4.4. 111111 (обозреваемая ячейка 2);

4.5. 111111111111111 (обозреваемая ячейка 6).

5. Постройте машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, которая каждое слово в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в пустое слово, исходя из стандартного начального положения.