Тема 2.3. Минимизация булевых функций

Аннтоция: Упрощение булевых функций. Графический метод, карты Карно, метод Квайна.

Минимизация нормальных форм

Общая задача минимизации логических функций сводится к построению в булевой функции, содержащей минимально возможное число двоичных переменных.

Исходное выражение логической функции может быть представлено произвольной формулой. Поэтому на первом этапе осуществляется переход к нормальной форме формулы булевой функции, как правило, совершенной. На следующих этапах осуществляется поиск сокращённых нормальных форм булевой функции, среди которых осуществляется выбор её минимальной нормальной формы.

Для булевых функций справедливы следующие формулы:

$$(a \cdot b) \vee (a \cdot b) = a,$$

$$(a \vee b) \cdot (a \vee b) = a,$$

которые позволяют найти более компактные аналитические выражения для заданной функции.

Сокращённая нормальная форма есть результат поиска элементарных конъюнкций (дизъюнкций), равносильных с элементарными конъюнкциями (дизъюнкциями) совершенной нормальной формы, но имеющих меньшее число двоичных переменных.

Минимальная нормальная форма - это сокращенная нормальная форма, имеющая минимальное число двоичных переменных. Любое последующее уменьшение числа двоичных переменных ведёт к разрушению представления булевой функции хотя бы для одного возможного набора двоичных переменных.

Рассмотрим несколько способов минимизации нормальных форм на примере минимизации ДНФ (для КНФ все аналогично).

Метод гиперкубов (графический метод)

Данный метод хорошо работает для функций трех переменных.

Единичный трехмерный куб показан на рисунке ниже.

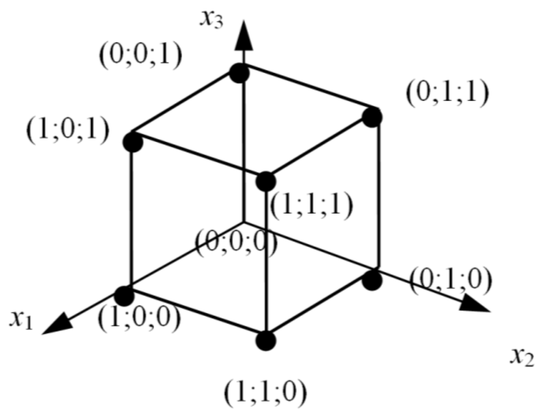


Рисунок 1 Единичный трехмерный куб

В графическом методе значения функции наносятся на куб (кортеж значений переменных считается координатами вершин), а затем пытаемся покрыть выделенные точки, не зацепив невыделенные минимальным количеством сначала граней, затем ребер, затем, если не удалось ничем ранее, отдельными изолированными вершинами. Данные объекты МОГУТ пересекаться.

Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) смотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ.

Пример: Построить минимальную ДНФ для функции f=10011011 графическим способом.

Решение:

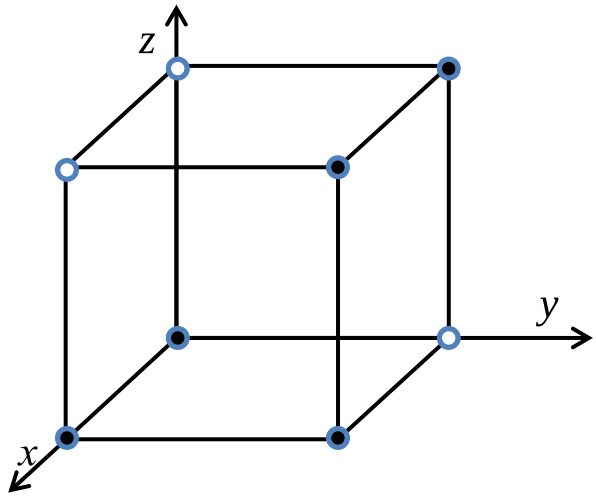
В данной функции восемь бит, т.е. это функция трех переменных. Будем считать этими переменными *x*, *y* и *z*.

В данной функции нулей меньше, поэтому быстрее через них. Разряды:

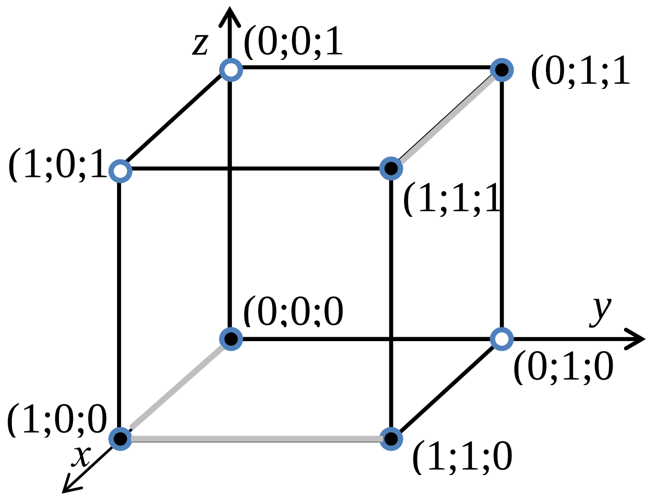
$$\overset{0}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{1}\overset{4}{1}\overset{5}{0}\overset{6}{1}\overset{7}{1},$$

тогда нулям соответствуют наборы переменных 001, 010 и 101, а все остальные наборы – это единицы.

Нарисуем единичный куб в системе координат и выделим его вершины, координаты которых соответствуют наборам переменных, на которых наша функция принимает значения 1, и выколем те вершины, которые соответствуют наборам, на которых принимается значение 0.



Теперь пробуем покрыть выделенные точки, не зацепив невыделенные минимальным количеством сначала граней (у нас это не возможно), затем ребер (у нас все точки покрываются минимально тремя ребрами (выделены на рисунке ниже), затем, если не удалось ничем ранее, отдельными вершинами.



Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) посмотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ. Например, для ребра, соединяющего точки с координатами (1;0;0) и (0;0;0) не меняются вторая (соответствует y) и третья (соответствует z) координаты, и обе они равны нулю, значит соответствующий конъюнктивный одночлен - $y'z'$, а для ребра, соединяющего точки (1;0;0) и (1;1;0) не меняются первая и третья координаты (x и z соответственно), причем x=1, а z=0, тогда получим одночлен xz'. Для третьего ребра посмотрите самостоятельно.

Ответ: $f = y'z' \vee xz' \vee yz$.

Карты Карно

Карты Карно могут быть построены для любого числа переменных, но хорошо работаю для функций с числом переменных не более 4 (для 5 переменных уже придется рассматривать две таблицы, расположенные «одна над другой»).

Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно, физиком из «Bell Labs», и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы. Их можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.

Составим двумерную таблицу значений функции разделив переменные произвольным образом на две группы. Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Кодом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции, например, двухбитовый код Грея будет выглядеть следующим образом: 00, 01, 11, 10 (сравните с обычном двухбитовым двоичным кодом: 00, 01, 10, 11).

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

С точки зрения минимальности число областей должно быть как можно меньше (каждая область представляет собой отдельный одночлен в итоговой записи), а число клеток в области должно быть как можно больше (чем больше клеток в области, тем меньше переменных содержит одночлен).

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа.

Пример: Построить минимальную ДНФ для функции f=10011011 при помощи карт Карно.

Решение:

Составим двумерную таблицу значений нашей функции разделив переменные произвольным образом на две группы (предлагаем разделить на *x* и *yz* просто из-за того, что такая запись будет более протяженной горизонтально). Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Кодом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции. Получим:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

У нас получится:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа. Получим: $f = y'z' \vee yz \vee xz$. Обратите внимание, что ответ получился отличным от решения, полученного ранее графическим методом, но, если выбрать другой способ покрытия единиц, то ответ получится абсолютно аналогичным ($f = y'z' \vee xz' \vee yz$):

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

Метод Квайна

Этот метод самый трудный и долгий, но он работает для любого числа переменных.

Выписываем все совершенные одночлены, для которых *f*=1 (для ДНФ). Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем эту позицию«-». Например:

$$\left.\begin{matrix}0011\\0111\end{matrix}\right\}0-11$$

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец и опять проведем группировку, например, по местоположению «прочерка».

Продолжаем процесс объединения пока это возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). *Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!*

На втором этапе воспользуемся таблицей Квайна по который данный метод и получил название. Строим таблицу, в которой слева, в качестве заголовков строк, ставим все совершенные одночлены, для которых f=1, а в столбцах все непомеченные, полученные в предыдущей таблице (вставляем все непомеченные, на ВСЕХ этапах решения). На пересечении ставим «+», если данный сокращенный одночлен «накрывает» (является шаблоном, где «минус» заменяет любое значения переменной в этой позиции).

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). Помечаем эти плюсы (например, обведя их кружком).

Если вы выбрали какой-то столбец, то считается, что все «+», которые в нем стоят уже также выбраны (их тоже можно как-то пометить). Если есть какие-либо строки, в которых нет ни одного отмеченного «+», вошедшего в ядро, то произвольным образом выбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Например, если имеем вот такую таблицу (x здесь заменяет какие-то символы, не имеющие значение в данном объяснении):

	xxx	xxx	xxx
xxx	+		+
xxx	+	+	
xxx		+	+

В данном случае ни один столбец не входит в ядро (ни в одной строке нет ровно одного «+»). Для того, чтобы выбранные «плюсы» были в каждой строке можно выбрать, например 1 и 3 столбцы (а можно и 1 и 2 или 2 и 3 – по эффективности результаты будут одинаковы).

Пример: Построить минимальную ДНФ для функции f=10011011 при метода Квайна.

Выписываем все совершенные одночлены, для которых f=1. Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

000	000
011	011
100	110
110	100
111	111

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем «-». Например:

$$\left.\begin{matrix}0011\\0111\end{matrix}\right\}0-11$$

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец. Получим:

000	*000	-00
011	*100	1-0
100	*011	-11
110	*110	11-
111	*111	

Для удобства сгруппируем теперь по местоположению «прочерка»:

000	*000	-00	-00
011	*100	1-0	-11
100	*011	-11	1-0
110	*110	11-	11-
111	*111		

Продолжаем этот процесс (объединения) пока возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!

В нашем примере никакие больше объединения не возможны.

Строим таблицу, в которой слева, в качестве заголовков строк, ставим все совершенные одночлены, для которых f=1, а в столбцах все непомеченные, полученные в предыдущей таблице (вставляем все непомеченные, на ВСЕХ этапах решения). На пересечении ставим «+», если данный сокращенный одночлен «накрывает» (является шаблоном, где «минус» заменяет любое значения переменной в этой позиции). Для нашего примера:

	-00	-11	1-0	11-
000	+			
011		+		
100	+		+	
110			+	+
111		+		+

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). У нас это первый и второй столбцы, значит одночлены -00 и -11 обязательно войдут в ответ. В результате получим, что «+», соответствующие выбранным одночленам у нас автоматически будут в 1, 2, 3 и 5 строка. Осталось выбрать столбец с «+» в четвертой строке. В нашем примере мы можем выбрать либо третий, либо четвертый столбцы. Выберем третий. Тогда, для выбранных одночленов (-00, -11, 1-0) составим конъюнктивный одночлены и соберем из них минимальную ДНФ: $f = y'z' \vee yz \vee xz'$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Основные понятия и теоретический базис минимизации нормальных форм (упрощения булевых функций).
2. Графический метод. Алгоритм. Примеры.
3. Карты Карно. Особенность таблицы. Алгоритм. Примеры.
4. Метод Квайна. Алгоритм. Примеры.