## Тема 2.3. Минимизация булевых функций

**План:** Упрощение булевых функций. Графический метод, карты Карно, метод Квайна.

### Задания с решением

*Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=10011011.*

Решение:

В данной функции восемь бит, т.е. это функция трех переменных. Будем считать этими переменными *x*, *y* и *z*.

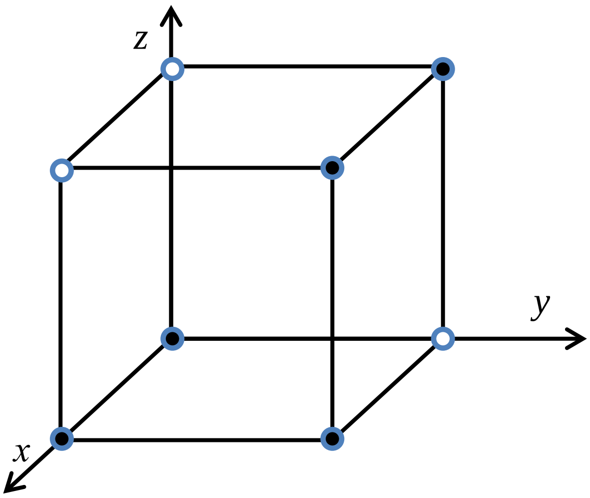
В данной функции нулей меньше, поэтому быстрее через них. Разряды:

$$\overset{0}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{1}\overset{4}{1}\overset{5}{0}\overset{6}{1}\overset{7}{1},$$

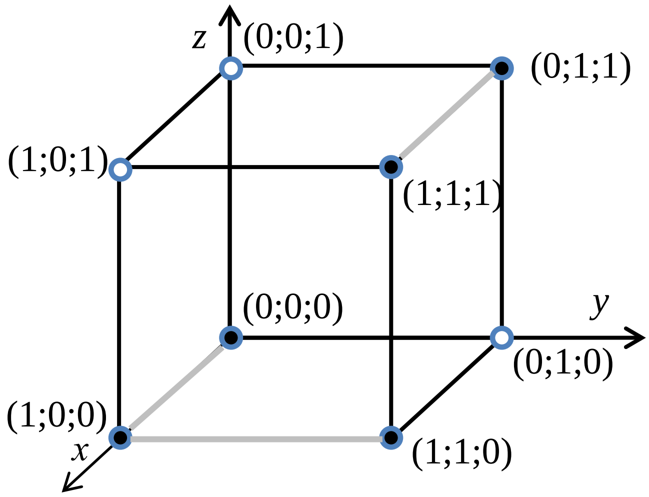
тогда нулям соответствуют наборы переменных 001, 010 и 101, а все остальные наборы – это единицы.

*Минимизация графическим способом (метод гиперкубов)*

Нарисуем единичный куб в системе координат и выделим его вершины, координаты которых соответствуют наборам переменных, на которых наша функция принимает значения 1, и выколем те вершины, которые соответствуют наборам, на которых принимается значение 0.




Теперь пробуем покрыть выделенные точки, не зацепив невыделенные минимальным количеством сначала граней (у нас это не возможно), затем ребер (у нас все точки покрываются минимально тремя ребрами (выделены на рисунке ниже), затем, если не удалось ничем ранее, отдельными вершинами.




Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) посмотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ. Например, для ребра, соединяющего точки с координатами (1;0;0) и (0;0;0) не меняются вторая (соответствует $y$) и третья (соответствует $z$) координаты, и обе они равны нулю, значит соответствующий конъюнктивный одночлен - $y'z'$, а для ребра, соединяющего точки (1;0;0) и (1;1;0) не меняются первая и третья координаты ($x$ и $z$ соответственно), причем $x$=1, а $z$=0, тогда получим одночлен $xz'$. Для третьего ребра посмотрите самостоятельно.

Ответ: $f = y'z' \vee xz' \vee yz$.

*Минимизация методом карт Карно*

Составим двумерную таблицу значений нашей функции разделив переменные произвольным образом на две группы (предлагаем разделить на $x$ и $yz$ просто из-за того, что такая запись будет более протяженной горизонтально). Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Кодом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции. Получим:

| $x$ \ $yz$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

У нас получится:

| $x$ \ $yz$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа. Получим: $f = y'z' \vee yz \vee xy$. Обратите внимание, что ответ получился отличным от решения, полученного ранее графическим методом, но, если выбрать другой способ покрытия единиц, то ответ получится абсолютно аналогичным ( $f = y'z' \vee xz' \vee yz$ ):

| $x$ \ $yz$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

*Минимизация методом Квайна*

Выписываем все совершенные одночлены, для которых $f$=1. Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

| | |
|---|---|
| 000 | 000 |
| 011 | 011 |
| 100 | 110 |
| 110 | 100 |
| 111 | 111 |

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем «-». Например:

$$\left.\begin{matrix}0011\\0111\end{matrix}\right\}0-11$$

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец. Получим:

| | | |
|---|---|---|
| 000 | *000 | -00 |
| 011 | *100 | 1-0 |
| 100 | *011 | -11 |
| 110 | *110 | 11- |
| 111 | *111 | |

Для удобства сгруппируем теперь по местоположению «прочерка»:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 000 | *000 | -00 | -00 |
| 011 | *100 | 1-0 | -11 |
| 100 | *011 | -11 | 1-0 |
| 110 | *110 | 11- | 11- |
| 111 | *111 | | |

Продолжаем этот процесс (объединения) пока возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!

В нашем примере никакие больше объединения не возможны.

Строим таблицу, в которой слева, в качестве заголовков строк, ставим все совершенные одночлены, для которых $f$=1, а в столбцах все непомеченные, полученные в предыдущей таблице (вставляем все непомеченные, на ВСЕХ этапах решения). На пересечении ставим «+», если данный сокращенный одночлен «накрывает» (является шаблоном, где «минус» заменяет любое значения переменной в этой позиции). Для нашего примера:

| | -00 | -11 | 1-0 | 11- |
|---|---|---|---|---|
| 000 | + | | | |
| 011 | | + | | |
| 100 | + | | + | |
| 110 | | | + | + |
| 111 | | + | | + |

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). У нас это первый и второй столбцы, значит одночлены -00 и -11 обязательно войдут в ответ. В результате получим, что «+», соответствующие выбранным одночленам у нас автоматически будут в 1, 2, 3 и 5 строка. Осталось выбрать столбец с «+» в четвертой строке. В нашем примере мы можем выбрать либо третий, либо четвертый столбцы. Выберем третий. Тогда, для выбранных одночленов (-00, -11, 1-0) составим конъюнктивный одночлены и соберем из них минимальную ДНФ: $f = y'z' \vee yz \vee xz'$.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Для функций, заданных в ДНФ, получить СДНФ и минимизировать, используя три метода.

   1.1. $xz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{z}$;

   1.2. $xy \vee \bar{x}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$;

   1.3. $xz \vee yz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}$

   1.4. $\bar{x}y \vee xz \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{z}x$

   1.5. $xy \vee xz \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}$.

2. Минимизировать функции, заданные в векторном виде:

   2.1. 10010111;

   2.2. 11101101;

   2.3. 11011110;

   2.4. 11111000;

   2.5. 10101101;

   2.6. 11001110;

   2.7. 1111000111011010;

   2.8. 1011110100101001;

   2.9. 1111011110111010;

   2.10. 1111111011011110;

   2.11. 1000011111011110;

   2.12. 1010101111011111;

   2.13. 11110011001101011111011110111010;

   2.14. 10110101010010101011101010110101.