Тема 2.6. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Аннотация: Применение булевых функций к РКС. Некоторые логические элементы микросхем.

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), при исследование некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Идея применения

Под релейно-контактной схемой понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключён к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов – как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт.

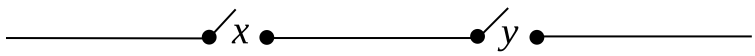
Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся одному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, что размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная, $x_1,\ x_2 \ldots,\ x_n$ которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием x'. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты x' не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты x' замкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (другими словами, переменная x'принимает) значение 1.

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2 ..., x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1, x_2 ..., x_n$ (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, остальные отключены, т.е. «обесточены») вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная y принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний реле $x_1, x_2 ..., x_n$ схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная y принимает значение 0. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2 ..., x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим длину n, то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функции yот n аргументов. Она принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2 ..., x_n$, которые соответствует тем состояниям реле $x_1, x_2 ..., x_n$, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется функцией проводимости данной релейно-контактной схемы.

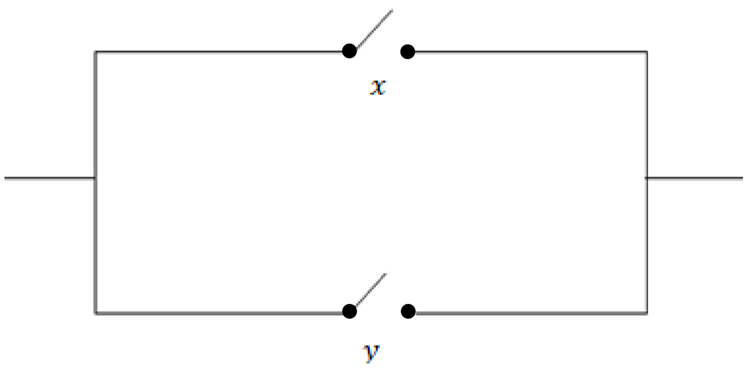
Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно-контактных схем.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Первая схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y, т.е. контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y, каждое из которых срабатывает независимо от другого:



Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, т.е. только тогда, когда оба переменных x и y принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов $x, y,$ удовлетворяющая такому условию, нам хорошо известна. Это конъюнкция $x \bullet y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y, является конъюнкция $x \bullet y$. Говорят, что последовательное соединение двух контактов реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Вторая схема релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y:

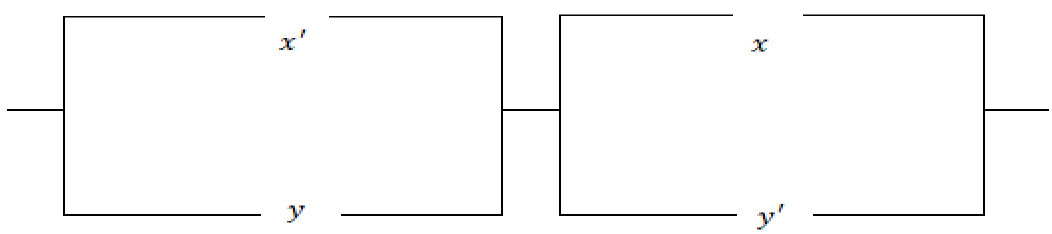


Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов (x или y) замкнут, т.е. лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных (x или y) принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y, удовлетворяющая этому условию, также хорошо нам известна. Это дизъюнкция $x \vee y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух параллельно соединенных контактов x и y, является дизъюнкция $x \vee y$. Говорят, что параллельное соединение двух контактов реализует дизъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Итак, с помощью релейно-контактных схем можно реализовать булевы функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Возможна ли аналогичная реализация и других булевых функций? Ответ на поставленный вопрос позволяет дать теорема выражении любой булевой функции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Поскольку всякая булева функция на основании этой теоремы может быть выражена через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицанием, причем отрицание стоит лишь непосредственно около переменных и не стоит ни около каких внутренних скобок, а конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, как показано только что, реализуется на релейно-контактных схемах, то и всякая булева функция может быть реализована с помощью релейно-контактной схемы, т.е. может быть построена такая схема, для которой данная булева функция служит функцией проводимости.

Реализуем, например, в виде релейно-контактных схем булевы функции – импликацию и эквивалентность. Для этого выразим их через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Такие выражения известны:

$$x \to y = x' \vee y, x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x) = (x' \vee y) \cdot (y' \vee x).$$



Две основные задачи теории релейно-контактных схем

Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется задачей синтеза релейно-контактных схем и является первой важной задачей, состоящей в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях.

Естественно было бы выбирать для каждой булевой функции самую простую или одну из самых простых реализующих ее релейно-контактных схем. Поэтому упрощение релейно-контактных схем называется задачей анализа таких схем и является второй важной задачей теории релейно-контактных схем. Две релейно-контактные схемы, составленные из одних и тех же реле, называется равносильными, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток. Другими слова, две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если они обладают одинаковыми функциями и проводимости, зависящие из одних и тех же переменных. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Задача упрощения релейно-контактной схемы состоит в нахождении более простой ей схемы. Обычно она решается следующим образом. Для данной релейно-контактной схемы записывается ее функция проводимости. Затем эта функция с помощью тождественных преобразований, использующих известные функции булевых функций, упрощается, т.е. сводится к функции, имеющей меньшее число вхождений переменных, нежели исходная функция. Наконец строится релейно-контактная схема, отвечающая упрощенной булевой функции.

Релейно-контактные схемы в ЭВМ

Первая электронно-вычислительная машина была создана в 1964 г. в США. Впервые предположение о возможности применение алгебры логики в технике было высказано в 1910 г. известным физиком П. Эренфестом (1880-1933). Булевы функции стали математическим аппаратом для исследования релейно-контактных схем (эта связь окончательно была осознана в 1930-х гг.), а сами схемы к середине XX в. нашли многочисленные применения в автоматической технике – в телефонии, железнодорожной сигнализации, централизации и блокировке, релейной защите, телемеханике и, наконец, - при проектировании быстродействующих ЭВМ. О некоторых простых, но очень важных релейно-контактных схемах, используемых в ЭВМ, и пойдет речь в настоящем параграфе.

Двоичный полусумматор

Числа в ЭВМ хранятся в двоичной системе в ячейках памяти поразрядно. С технической точки зрения в двоичной системе оказалось удобно не только хранить числа, но и выполнять над ними различные действия. Так, сложение двоичных чисел осуществляется на основе следующих правил: $0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10$. Сложение по этим правилам делается по каждому разряду двух ячеек, в которых хранятся слагаемые. Если же происходит переполнение данного разряда (что возможна только при сложении $1+1$), то происходит перенос единицы в следующий разряд. Таким образом, процесс сложения в одном разряде может быть охарактеризован двумя булевыми функциями: $S(x,y)$ и $P(x,y)$ зависящими от складываемых чисел x и y. Первая функция $S(x,y)$ представляет собой значение суммы, записываемое в тот же разряд соответствующей ячейки, в котором происходит сложение. Вторая функция – функция переноса $P(x,y)$ – дает значение числа, переносимого в следующий, более старший разряд при переполнении разряда, в котором происходит сложение. Таблица истинности этих функций, следующая:

x	y	$S(x,y)$	$P(x,y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Используя СДН-формы, выписываем для них выражения, по которым легко построить соответствующие релейно-контактные схемы: $P(x,y) = x'y \vee xy', P(x,y) = xy$.

Одноразрядный двоичный сумматор

При сложении двух чисел описанные в предыдущем пункте действия совершаются лишь в первом (самом младшем) разряде ячеек, хранящих слагаемые. Во всех остальных разрядах, начиная со второго, в процессе сложения участвуют уже не два слагаемых x_k и y_k но еще и число, переносимое из предыдущего разряда и равное значению функции переноса $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ в этом разряде. Таким образом, функция сумма S_k в k -м разряде $(k \geq 2)$ зависит от трех аргументов, т.е. $S_k = S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$. От этих же аргументов зависит и функция переноса из k-го разряда $P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$. Составим таблицу значений этих функций:

x_k	y_k	P_{k-1}	$S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$	$P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Используя СДН-формы, найдем для них выражения, которые затем упростим, преобразую тождественным образом:

$$S(x, y, p) = \vee x^{\alpha} y^{\beta} p^{\gamma} =$$
$$= x^0 y^0 p^1 \vee x^0 y^1 p^0 \vee x^1 y^0 p^0 \vee x^1 y^1 p^1 = S(\alpha, \beta, \gamma) = 1$$
$$= x'y'p' \vee x'yp' \vee xy'p' \vee xyp = (x'y' \vee xy)\, p' \vee (x'y \vee xy')\, p';$$
$$S(x, y, p) = \vee x^{\alpha} y^{\beta} p^{\gamma} =$$
$$= x^0 y^1 p^1 \vee x^1 y^0 p^1 \vee x^1 y^1 p^0 \vee x^1 y^1 p^1 = S(\alpha, \beta, \gamma) = 1$$
$$x'yp \vee xy'p \vee xyp' \vee xyp = (x'yp \vee xyp) \vee (xy'p \vee xyp) \vee (xyp' \vee xyp) =$$
$$= (x' \vee x)yp \vee (y' \vee y)xp \vee (p' \vee p)xy = xp \vee yp \vee xy.$$

Соответствующие схемы предлагается нарисовать самостоятельно. Построив такие схемы для каждого разряда и обеспечив их надлежащее соединение, можно получить схему многоразрядно двоичного сумматора, осуществляющее сложение двоичных чисел в ЭВМ.