Тема 1.1. Множества и операции над ними

Аннотация: Множества. Способы задания множеств. Операции над множествами, свойства операций. Соответствия между множествами. Прямое произведение множеств. Способы задания соответствий. Композиция соответствий.

Понятие множества. Основные определения

Основные положения теории множеств впервые были разработаны чешским философом и математиком Бернардом Больцано (1781–1848) и немецкими математиками Рихардом Дедекиндом (1831–1916) и Георгом Кантором (1845-1918). Г. Кантор внес значительный вклад в теорию бесконечных множеств, в связи с чем теория множеств тесно связана с его именем. В 1897 г. в своих докладах на Первом международном конгрессе математиков Ж. Адамар (1865–1963) и Гурвиц привели многочисленные примеры применения канторовской теории множеств в различных разделах математики, что привело к официальному признанию теории множеств как раздела математики.

Прежде чем начать изучать теорию множеств хотим попросить вас вспомнить определение прямой! При чтении данного курса мы всегда задаем этот вопрос и, хотя геометрия начинает изучаться в седьмом классе школы, ответы студентов являются весьма забавными. Пожалуй, самое интересное определение прямой, услышанное от студентов следующее: «Прямая, это бесконечная линия, которая видится точкой, если смотреть ей в торец». Почему же такой простой вопрос ставит студентов в тупик? Дело в том, что в математике более сложные объекты определяются, объясняются через более простые. Поэтому некоторые самые основные понятия не определяются, их смысл поясняется на примерах. Вот и определения прямой не существует. Понятия точки, прямой и плоскости являются основными, неопределяемыми понятиями в геометрии.

Также как и понятию прямой, понятию множества невозможно дать точного определения в рамках теории множеств, поскольку оно также является основным и неопределяемым. Когда в науке нет четкого определения пользуются понятиями, поясняющими общий смысл и позволяющими получить общее представление об объекте.

Согласно Кантору «под множеством будем понимать любую совокупность определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое».

Следующие совокупности объектов являются множествами: множество студентов в университете, множества натуральных, целых или действительных чисел, множество корней уравнения $x^{\sin x}=1$.

Всякое множество состоит из элементов. Множества будем обозначать большими латинскими буквами, например *A, B, C*, а элементы – маленькими латинскими буквами, например, *a, b, c*.

Принадлежность элемента *a* множеству *A* записывают так: $a \in A$, если же элемент *a* не принадлежит множеству *A*, то пишут: $a \notin A$.

Множество может содержать любое число элементов, конечное и бесконечное. Множество может содержать один элемент и ни одного. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Способы задания множеств

Рассмотрим основные способы задания множеств:

а) путем прямого перечисления его элементов, заключенных в фигурные скобки. При этом, если элменты *a, b, c, d* принадлежат множеству *A*, то это можно записать так: $A=\{a, b, c, d\}$.

б) указанием свойств, которым элементы множества должны удовлетворять, или заданием порождающей процедуры или с помощью свойства, характеризующего элементы множества: $A=\left\{x \middle| x \text{ обладает свойством } P\right\}$. Вертикальную черту | (как вариант, в записи вместо данной черты может стоять двоеточие «:») в данной записи можно трактовать как сокращение слов «таких, что…», таким образом предыдущая запись читается так: «Множество *A* состоит из всех элементов *x*, таких что *x* обладает свойством *P*. Например:

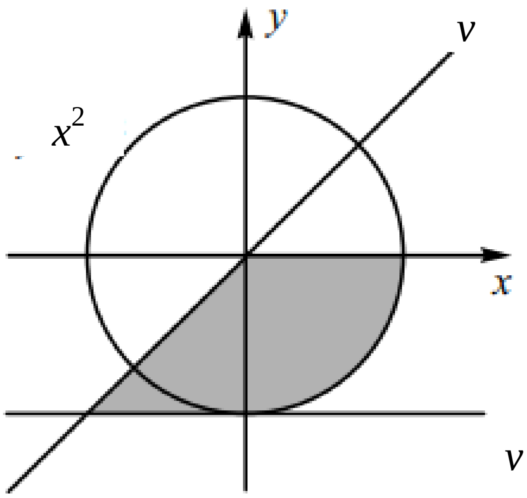
$$A=\left\{x \middle| x \text{ -буква, входящая в слово "студент"}\right\}.$$

Обычно данным способом удобно задавать бесконечные или очень большие множества. Например:

$$A=\left\{x \in R \middle| x \geq 0, x+5<x^2\right\}.$$

При этом необходимо помнить, что запятая выполняет роль союза «и».

Пример: Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



Решение:

Предлагаем вначале выразить это множество через системы и совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le x; \\ y \ge -1; \\ x \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1; \\ y \le 0; \\ x \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь запишем с использованием характеристического свойства множества, используя для систем операцию пересечения множеств, а для совокупности - объединения:

$$X = \left\{ (x;y) \middle| y \le x, y \ge -1, x \le 0 \bigcup \right\} \bigcup \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 \le 1, y \le 0, x \ge 0 \right\}.$$

Элементы множества сами могут быть множествами. Например, множество студентов университета можно рассматривать как множество, состоящее из групп (элементы данного множества), которые, в свою очередь, состоят из студентов. Так например, пусть $A=\{a, b, c, d\}$, т.е. это множество состоит из четырех элементов a, b, c и d, но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Пример: Найдем множество всех подмножеств множества $A = \{a,b,c\}$. Всего подмножеств будет 8. В результате получм следующее множество:

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Данное множество называют булеаном множества A или степенью множества A и обозначают $P(A)$ или 2^A (оно соответствует отображению множества A на множество $\{0,1\}$).

В нашем примере мы искали булеан множества из трех элементов и получилось, что мощность булеана $8 = 2^3$. Этот факт не случаен. Справедлива следующая теорема:

Теорема

Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов равно 2^n.

Доказательство:

➢ Докажем методом математической индукции.

1. Для базы индукции рассмотрим пустое множество $\varnothing$. У этого множества нет элементов (т.е. их количество 0). Имеем, что число подмножеств один – только само это множество и $2^0 = 1$. Здесь формула верна.
2. Предположим, что для множеств мощности n теорема верна.
3. Докажем справедливость для множеств мощности n+1:

Зафиксируем некоторый элемент a нашего множества, тогда все подмножества нашего множества разделятся на две группы (множества):

- не содержащие элемент a (тогда количество элементов в них равно $(n+1)-1=n$ и по пункту 2 для них формула верна),
- содержащие элемент a (но их тоже будет ровно n, поскольку такое множество может получиться только добавлением элемента a к одному из n элементных множеств предыдущего шага, а для них также формула верна).

Очевидно, что не существует множества, которое одновременно и содержит a, и не содержит его, поэтому общее количество множеств будет равно сумме количеств множеств первой и второй группе, т.е. $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Теорема доказана.⋞

Способ задания с помощью свойств может привести к противоречию при некорректном задании этого свойства. Наиболее типичным примером здесь является парадокс Рассела. Пусть K -

множество всех множеств, которые не являются своими собственными элементами, т.е. $K = \left\{ M \middle| M \notin K \right\}$. Содержит ли *K* само себя в качестве элемента? Если да, то $K \in K$, что приводит к противоречию, т.к. по характеристическому свойству $K \notin K$. Если же $K \notin K$, то, проверяя свойство, задающее *K*, приходим к тому, что $K \in K$, что опять дает противоречие.

Существует множество формулировок парадокса Рассела:

- парадокс о брадобрее: «В деревне живет брадобрей, который бреет всех жителей этой деревни, которые не бреются сами. Бреет ли брадобрей сам себя?»;
- парадокс о каталогах: «библиографический каталог описывает другие книги. Существуют каталоги, которые описывают другие каталоги, а некоторые из них описывают даже сами себя. Можно ли составить каталог всех каталогов, которые не описывают сами себя?»

В рассматриваемом парадоксе Рассела нет ошибки. Он доказывает противоречивость наивной теории множеств. Для исправления существуют разные способы формализации (аксиоматизации) теории, позволяющие исключить расселовское множество (множества, которые могут содержать сами себя в качестве элемента), таким образом, будет запрещено и множество всех множеств (булеан). Были предложены различные аксиоматизации (теория Цермело-Френкеля, теория Неймана-Бернайса-Геделя и т.д.), однако ни для одной из этих теорий не найдено доказательство непротиворечивости и даже более того, такого доказательства, как показал Гедель, не может существовать (в некотором смысле).

Необходимо также отметить, что с другой стороны, разрешение множествам включать себя в качестве элемента не обязательно приводит к противоречиям. В частности, многие языки программирования позволяют контейнерам включать себя в качестве элемента.

Операции над множествами

Множество *A* называется подмножеством (частью) множества *B*, если каждый элемент *A* принадлежит также и множеству *B*, что обозначается $A \subseteq B$.

Заметим, что само множество тоже является своим подмножеством: $B \subseteq B$.

Множества A и B называются равными (обозначается $A=B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Иными словами, множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если $A \subseteq B$ и при этом $A \neq B$, то говорят, что A есть собственное подмножество B, что обозначается $A \subset B$.

Характеристика множеств, представляющая количество содержащихся в них элементов, называется мощностью множеств или величиной, которую по Г. Кантору называют кардинальным числом. Данную величину для множества A обозначают $Card\ A$ или просто $|A|$.

Например, если $A=\{a,b,c\}$, а $B=\{a,a,b\}$, то $|A|=3$, а $|B|=2$ (элемент a в записи этого множества повторяется, но должен учитываться однократно).

Перейдем к определению действий (***операций***) над множествами.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, которые входят и в множество A, и в множество B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Можно записать так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Здесь следует иметь в виду, что в множество $A \cup B$ входят и элементы $A \cap B$.

Разностью $A \setminus B$ называется множество тех элементов A, которые не входят в B:

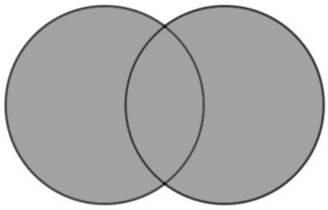
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}.$$

Дополнением к множеству A называется множество $\overline{A}$, состоящее из элементов, не входящих в A:

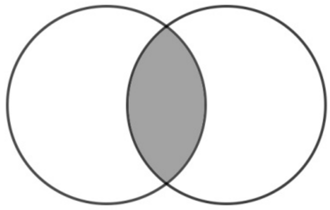
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Конечно, в $\overline{A}$ нельзя включать любые предметы, не являющиеся элементами A, поэтому всегда считают, что все множества, участвующие в решении данной задачи, являются подмножествами некоторого общего, ***универсального*** множества U. Тогда дополнение $\overline{A}$ можно определить так: $\overline{A} = U \setminus A$.

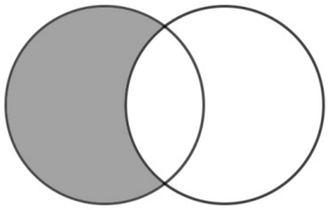
Операции над множествами можно наглядно проиллюстрировать с помощью ***диаграмм Эйлера–Венна***:



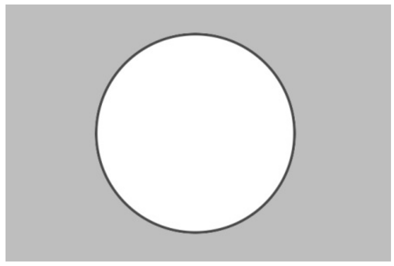
Объединение $A \cup B$.



Пересечение $A \cap B$



Разность $A \setminus B$



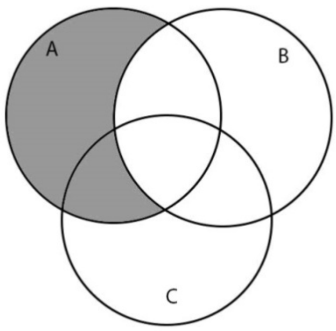
Дополнение $\overline{A}$

Пример: Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\B) ∩ (A∩C) = (A∩C) \ B.

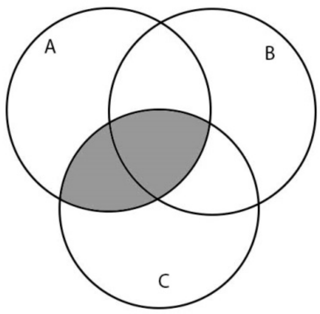
Решение:

Построим последовательно левую часть равенства:

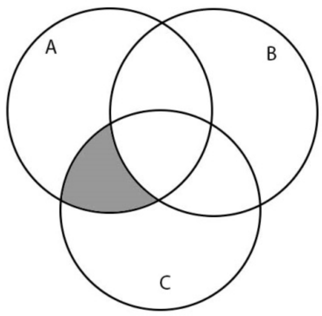
1. A\B:



2. A∩C

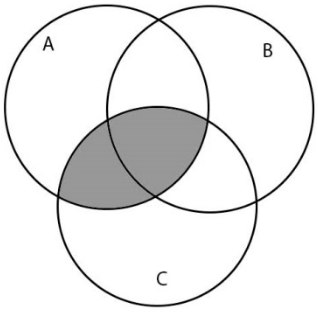


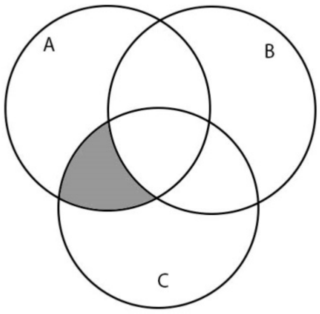
3. (A\B) ∩ (A∩C)



Теперь построим правую часть:

1. $A \cap C$ 2. $(A \cap C) \setminus B$





Диаграммы для левой и правой части оказались одинаковы!

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют (по Г. Кантору) кардинальным числом, показывающим, сколько элементов содержит множество. Обозначать число элементов множества A (кардинальное число) будем Card A или просто $|A|$. Например, если $P=\{a, b, c\}$, то его кардинальное число равно:

$$|P|=|\{a, b, c\}|=3.$$

Пример: Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D. Вычислить мощность множеств X и Y.

Даны множества A={a,e,f,j,k}, B={f,i,j,l,y}, C={j,k,l,y}, D={i,j,s,t,u,y,z}. Вычислить мощность множеств

$$X = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$$

<u>Решение:</u>

1. Определим элементы множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Для этого найдем сначала пересечение множеств $A \cap C$. Элементы j и k одновременно принадлежат множеству A и C. Следовательно, $A \cap C$={ j,k}. Аналогично, $B \cap C$= {j, l, y}. Таким образом, объединение $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ состоит из четырех элементов {j, k, l, y} .

Мощность множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ равна 4.

2. Определим элементы множества $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$.

Найдем дополнение B . Универсальное множество по условию задания состоит их 26 букв {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}. Если отсюда исключить 5 элементов множества B, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента {a,b,c,d,e,g,h,k,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,z}.

Пересечение множеств $A \cap \overline{B}$ состоит из элементов {a,e,k}, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат $\overline{B}$.

Для нахождения разности множеств D \C вычеркнем из множества D={i,j,s,t,u,y,z} элементы {j,y}, принадлежащие C={ j,k,l,y}. Получим

D\C ={i,s,t,u,z}. В итоге

$Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$={a,e,k,i,s,t,u,z} .

Мощность множества Y равна 8. В данном случае множества D \C и $A \cap \overline{B}$не пересекаются и мощность объединения равна сумме мощностей слагаемых

Card Y =3+5.

Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар (a,b), где $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \left\{ (a,b) \middle| a \in A;\, b \in B \right\}.$$

Декартово произведение n равных множеств *A* и будет называться n-й декартовой степенью множества *A* и обозначаться A^n.

Свойства прямого произведения:

1. По определению полагают, что $A \times \varnothing = \varnothing$.
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
4. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Пример: Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ тогда

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Из определения декартова произведения очевидно, что $A \times B \neq B \times A$ и $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Соответствия

Соответствием между множествами *A* и *B* называют любое подмножество *G* их прямого произведения: $G \subset A \times B$.

Соответствие может быть задано:

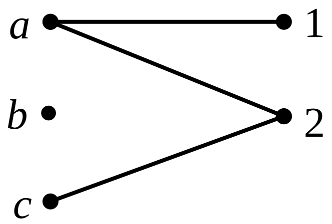
- перечислением элементов соответствия,
- в виде графа,
- булевой матрицей.

Рассмотрим на примере, как можно задать одно и то же соответствие.

Пример: Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$ и соответствие G имеет вид $G = \{(a,1), (a,2), (c,2)\}$ изобразить его в виде графа и в виде булевой матрицы.

Решение:

Граф соответствия будет иметь вид:



А булева матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Фактически, матрица заполняется как таблица:

	1	2
a	1	1
b	0	0
c	0	1

В которой элементы первого множества стоят в столбце заголовков, элементы второго – заголовки столбцов, а на пересечении стоит 1, если эта пара входит в соответствие и 0 – если не входит.

Пусть заданы три множества *X*, *Y* и *Z* и соответствия – $G_1 \subset X \times Y$ и $G_2 \subset Y \times Z$. ***Композицией соответствий*** G_1 и G_2 называется подмножество G_3 прямого произведения $X \times Z$: $G_3 = G_2 \circ G_1 = \{(x,z) | (x,y) \in G_1, (y,z) \in G_2\}$.

Композицию соответствий удобно искать, если они заданы своими булевыми матрицами. В этом случае достаточно перемножить соответствующие булевы матрицы по правилам, известным из линейной алгебры, только вместо сложения используем дизъюнкцию ($\vee$), а вместо умножения – конъюнкцию ($\wedge$). Напомним:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Пример: товары из пяти стран поставляются на три оптовых базы (соответствие G_1), а потом с этих баз развозятся по четырем магазинам (соответствие G_2). Определить, товары какой страны попадают в какой магазин (композиция соответствий $G_3 = G_1 \circ G_2$):

G_1	База 1	База 2	База 3
Страна 1	1	0	1
Страна 2	0	0	1
Страна 3	1	1	0
Страна 4	1	1	1
Страна 5	1	0	0

G_2	Маг. 1	Маг. 2	Маг. 3	Маг. 4
База 1	1	0	1	0
База 2	1	1	0	1
База 3	0	0	1	1

Тогда получим:

$$G_3 = G_1 \circ G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Областью определения соответствия называется множество $DomG = \{x | (x, y) \in G\}$.

Областью значений соответствия называется множество $\mathrm{Im}\, G = \{y | (x, y) \in G\}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Понятие множества.
2. Назовите способы задания множеств. Приведите примеры.
3. Что такое булеан? Теорема о числе элементов булеана.
4. В чем суть парадокса Рассела?
5. Операции над множествами. Примеры.
6. Декартово произведение и его свойства.
7. Соответсвия и способы их задания. Примеры.