Тема 1.1. Множества и операции над ними

План: Множества. Способы задания множеств. Операции над множествами, свойства операций. Соответствия между множествами. Прямое произведение множеств.

Задания с решением

Пример 1: Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D. Вычислить мощность множеств X и Y.

Даны множества A={a,e,f,j,k}, B={ f,i,j,l,y}, C={ j,k,l,y}, D={i,j,s,t,u,y,z}. Вычислить мощность множеств

$X=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$

Решение:

1. Определим элементы множества $X=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Для этого найдем сначала пересечение множеств $A\cap C$. Элементы j и k одновременно принадлежат множеству A и C. Следовательно, $A\cap C$={ j,k}. Аналогично, $B\cap C$= {j, l, y}. Таким образом, объединение $(A\cap C)\cup(B\cap C)$ состоит из четырех элементов {j, k, l, y} .

Мощность множества $X=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ равна 4.

2. Определим элементы множества $Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$.

Найдем дополнение B . Универсальное множество по условию задания состоит их 26 букв {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}. Если отсюда исключить 5 элементов множества B, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента {a,b,c,d,e,g,h,k,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,z}.

Пересечение множеств $A\cap\overline{B}$ состоит из элементов {a,e,k}, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат $\overline{B}$.

Для нахождения разности множеств D \C вычеркнем из множества D={i,j,s,t,u,y,z} элементы {j,y}, принадлежащие C={ j,k,l,y}. Получим

D\C ={i,s,t,u,z}. В итоге

$Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$={a,e,k,i,s,t,u,z} .

Мощность множества Y равна 8. В данном случае множества D \C и $A \cap \overline{B}$ не пересекаются и мощность объединения равна сумме мощностей слагаемых

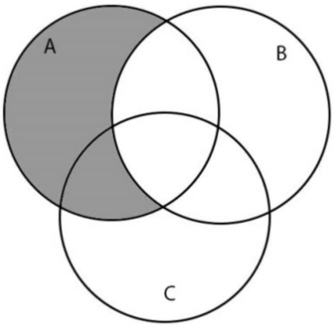
Card Y =3+5.

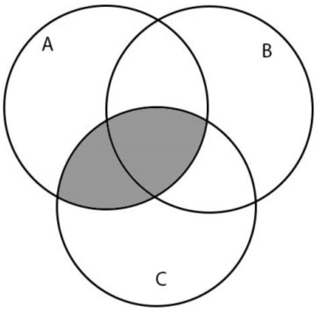
Пример 2: Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\B) ∩ (A∩C) = (A∩C) \ B.

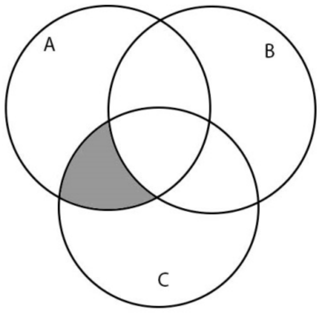
Решение:

Построим последовательно левую часть равенства:

1. A\B: 2. A∩C 3. (A\B) ∩ (A∩C)

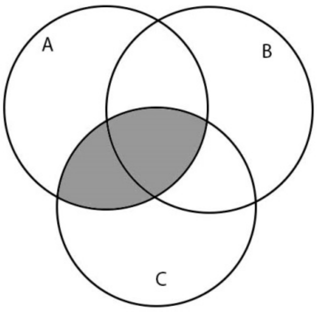


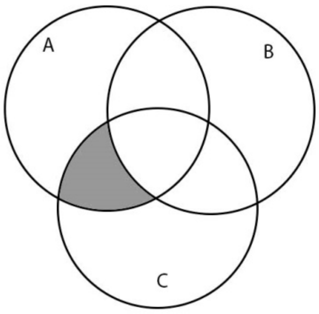




Теперь построим правую часть:

1. A∩C 2. (A∩C) \ B





Диаграммы для левой и правой части оказались одинаковы!

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите элементы множества P, если A={0, 2, 7, 8}; B={1, 2, 3, 6, 7, 9}; C={0, 1, 4, 7, 8, 9}; U={0, 1, 2,…, 9}.

1.1. $P = A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap C$,

1.2. $P = \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B$,

1.3. $P = \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{C} \cup A \cap B$,

1.4. $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup A \cap B$,

1.5. $P = B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup A \cap B$,

1.6. $P = B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B}$,

1.7. $P = B \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B}$,

1.8. $P = \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$,

1.9. $P = B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{A} \cap B$,

1.10. $P = \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B$.

2. Пусть A,B,C – подмножества универсального множества U. Проиллюстрировать на примере конкретных множеств и с помощью диаграммы Венна справедливость следующих соотношений:

2.1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

2.2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

2.3. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

2.4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

2.5. $A \cup (A \cap B) = A$;

2.6. $A \cap (A \cup B) = A$;

2.7. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$;

2.8. $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$.

3. Доказать тождество алгебры множеств:

3.1. $X \cup (X \cap Y) = X$;

3.2. $X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y$;

3.3. $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$;

3.4. $X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$;

3.5. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

3.6. $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$;

3.7. $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$;

3.8. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;

3.9. $X \setminus Y = X \cup (X \cap Y)$;

3.10. $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$.

4. Доказать или опровергнуть соотношение алгебры множеств:

4.1. $(X_1 \subseteq X_2) \wedge (Y_1 \subseteq Y_2) \Leftrightarrow (X_1 \cup Y_1) \subseteq (X_2 \cup Y_2)$;

4.2. $(X \cap Y = \varnothing) \wedge (X \cup Y = U) \Rightarrow Y = \overline{X}$

4.3. $(X_1 \subseteq X_2) \Leftrightarrow (X_1 \cap Y) \subseteq (X_2 \cap Y)$;

4.4. $X \subseteq Y \cup Z \Leftrightarrow X \cap \overline{Y} \subseteq Z$;

4.5. $(X \cap Y) \cup Z = X \cap (Y \cup Z) \Leftrightarrow Z \subseteq X$;

4.6. $(Z \setminus Y) \subseteq (Z \setminus X) \Rightarrow X \subseteq Y$;

4.7. $X \cup Y = Z \Leftrightarrow Y \cup Z = X$;

4.8. $X \cap Y \subseteq Z \Rightarrow (X \subseteq Z) \vee (Y \subseteq Z)$;

4.9. $(X \cap Y = Z) \wedge (X \cup Y = Y) \Rightarrow X = Z$;

4.10. $(Y \setminus X = Z) \wedge (X \setminus Y = \varnothing) \Rightarrow X = Y \setminus Z$.