Тема 1.2. Соответствия и отображения

План: Отображения, их свойства. Функциональные отображения. Отношения на множестве. Бинарные отношения. Замыкание отношений. Алгоритм Уоршолла.

Задания с решением

Пример 1: Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$.

Тогда $A \times B = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$.

Пример 2: Пусть $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ и $B = \{y \mid 2 \le y \le 3\}$

Тогда $A \times B = \{< x, y >, \mid 0 \le x \le 1 \text{ и } 2 \le y \le 3\}$.

Пример 3:

$\rho_1 = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$.

$\rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>\}$.

$\rho_1 \cup \rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$.

$\rho_1 \cap \rho_2 = \{<1, 2>\}$.

$\rho_1 \setminus \rho_2 = \{<2, 3>, <3, 4>\}$.

Пример 4:

Пусть R – множество действительных чисел. Рассмотрим на этом множестве следующие отношения:

ρ_1 – " $\le$ "; ρ_2 – " = "; ρ_3 – " < "; ρ_4 – " $\ge$ "; ρ_5 – " > ".

Тогда

$\rho_1 = \rho_2 \cup \rho_3$;

$\rho_2 = \rho_1 \cap \rho_4$;

$\rho_3 = \rho_1 \setminus \rho_2$;

$\rho_1 = \overline{\rho_5}$.

Пример 5: Отношение задано матрицей. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,1) принадлежит данному отношению, а пара (1,2) ему не принадлежит.

2. Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1,$ $i \neq j$.

3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4. Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны 1. Данное отношение не является рефлексивным.

5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание данного отношения по алгоритму Уоршолла:

Рассматриваем все внедиагональные $(i \neq j)$ элементы матрицы. Если $m_{ij} = 1,$ то i-ю строку заменяем дизъюнкцией *i*-й и *j*-й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат данному отношению, а пара (1,3) ему не принадлежит.

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом, полученная матрица M_2 является матрицей транзитивного замыкания нашего отношения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из множеств $\{a,b,c,d\}$ и $\{2,3\}$ составить кортежи.

2. Даны множества:

2.1. $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{x,y\}$;

2.2. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$;

2.3. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,2,4\}$;

2.4. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,2,3\}$.

Выписать все элементы декартова произведения $A \times B$ и $B \times A$.

3. Пусть дано множество $A = \{a,b,c\}$. Выписать все элементы декартова произведения $A \times A$.

4. Пусть T – отношение на N: $T = \{(a,b): a > b\}$ – «быть больше». Выполнить операции над T: $T \cup T$; $T \cap T$; $T \backslash T$; T^{-1}; $\overline{T}$; $T \circ T$; T^*.

5. Дано множество чисел $M = \{2,4,6,8,10\}$. Для этого множества задано отношение $T: (a,b) \in T$, где b делится без остатка на a. Построить матрицу смежности для T. Определить свойства T.

6. Найти образ отрезка $[0,3]$ при отображении $y = 3x^2$. Построить график функции. Найти область её определения и значений.

7. Найти образ отрезка $[1,3]$ при отображении $y = \frac{1}{x^2}$. Построить график функции, найти область ее определения и значений.

8. Найдите |B(A×C)|, если A={m, n, k}; C={2, 4}, где B(A×C) – булеан множества A×C.

9. Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что:

$$A=\{a, b, c\};\ A \cap B = \varnothing.$$

Найдите число собственных подмножеств множества B.

10. Определите |T|, если T – множество двухбуквенных слогов, где первая буква согласная, а вторая – гласная.

11. Укажите отношения эквивалентности:

11.1. быть попутчиком в одном вагоне пассажирского поезда;

11.2. a+b=100, где a, b□{1, 2,..., 100};

11.3. a=b, где a, b□{1, 4, 8, 9};

11.4. прямая a перпендикулярна прямой b;

11.5. треугольник a подобен треугольнику b;

11.6. Сидоров живет двумя этажами выше Михайлова;

11.7. a сердит на b.

12. Укажите номера свойств, которыми обладает отношение сравнимости целых чисел по модулю натурального числа:

12.1. симметричность;

12.2. несимметричность;

12.3. асимметричность;

12.4. рефлексивность;

12.5. транзитивность;

12.6. нетранзитивность;

13. Заданное бинарное отношение R доопределите минимальным образом до отношения эквивалентности R\` и выпишите классы эквивалентности для вариантов:

13.1. R={ (1,3),(2,2),(2,7), (1,5),(5.5),(7,10),(4,6),(8,8),(2,9)};

13.2. R={(1,1),(1,6),(2,7),(9,10),(4,5),(6,3),(7,9),(8,8)};

13.3. R={(1,2),(3,5),(7,4),(2,6),(2,2),(5,9)(4,10),(10,10)};

13.4. R={(4,1),(3,2),(1,5),(6,8),(9,10),(7,7),(10,6)};

13.5. R={(7,9),(8,8),(4,5),(6,3),(1,1),(9,10),(2,7),(1,6)};

13.6. R={(3,1),(2,4),(5,8),(6,2),(10,7),(9,1),(8,11)};

13.7. R={(7,3),(4,2),(8,9),(9,4),(1,5),(6,11),(10,7),(9,9)};

13.8. R={(1,1),(8,8),(7,9),(4,5),(6,3),(10,9),(7,2),(1,6)};

13.9. R={(1,3),(2,2),(2,7),(1,5),(5,5),(10,7),(4,6),(8,8),(9,2)};

13.10. R={(2,2),(1,5),(1,3),(7,2),(6,4),(10,7),(5,5),(7,7),(9,2)}.

14. Каждому отношению эквивалентности однозначно сопоставляется разбиение множества на классы и, наоборот, каждому разбиению однозначно сопоставляется отношение эквивалентности. Каково должно быть разбиение конечного множества на два класса, чтобы их декартово произведение имело наибольшее число элементов?

15. Пусть N – множество всех вещественных функций, заданных на всей вещественной оси; γ - отображение N в себя, ставящее в соответствие каждой функции f(x) из N функцию f(x)=(x2 -1)f(x). Будет ли γ взаимно однозначным? Является ли оно отображением N на себя?

16. Каждому треугольнику Т, длины сторон которого равны а ,в и с, сопоставим треугольник со сторонами (а+в)/2, (а+с)/2, (в+с)/2. Будет ли это отображение множества всех треугольников в себя взаимнооднозначным? Будет ли оно отображением на себя? Какие треугольники будут неподвижными точками этого отображения?

17. Отношение задано матрицей. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

17.1. $$M=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

17.2. $$M=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

17.3. $$M=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

17.4. $$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

17.5. $$M=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$