Тема 2.4. Булева алгебра и теория множеств

План: Булева алгебра и теория множеств. Двойственные логические функции.

Задачи с решениями

Пример 1: Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$yz + x + y, \;\; yz + x + z.$$

Решение:

Найдем двойственную функцию для данной функции $f(x, y, z) = yz + x + y$: $f^* = (y'z' + x' + y')' = y'z' + x' + y' + 1 =$ $= (y+1)(z+1) + (x+1) + (y+1) = yz + y + z + 1 + x + 1 + y + 1 + 1 = yz + x + z$, что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельного решения

1. Приведите формулу к КНФ и ДНФ, приравняйте их и докажите это тождество с использованием тождеств алгебры логики в алгебре $(A, \wedge, \vee, \neg)$, а затем, проиллюстрировав равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна в алгебре $(B(U), \cap, \cup, \neg)$, показать изоморфность данных алгебр.

1.1. $\left(\left((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R)\right) \vee \neg R\right) \vee Q$,

1.2. $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow \left((\neg X \rightarrow Z) \rightarrow \neg Y\right)$,

1.3. $\left((X \vee \neg Z) \wedge Y\right) \equiv \neg\left((Y \vee \neg X) \wedge Z\right)$,

1.4. $\left((P \wedge \neg Q) \rightarrow Q\right) \rightarrow (P \rightarrow Q)$,

1.5. $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \leftrightarrow Z)$,

1.6. $P \wedge \left(Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)\right)$,

1.7. $(X \leftrightarrow Y) \wedge \left(\neg Z \rightarrow (T \wedge \neg X)\right)$,

1.8. $\left(P \wedge (Q \vee \neg P)\right) \wedge \left((\neg Q \rightarrow P) \vee Q\right)$,

1.9. $\left(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)\right) \rightarrow \left((X \rightarrow \neg Z) \rightarrow (X \rightarrow \neg Y)\right)$, 1.10. $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$.

2. Избавьтесь от операций импликации и эквиваленции и покажите в алгебре $(A, \wedge, \vee, \neg)$, а затем, проиллюстрировав равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна в алгебре $(B(U), \bigcap, \bigcup, \neg)$, что данные формулы являются тавтологиями.

2.1. $P \to (Q \to ((P \vee Q) \to (P \wedge Q)))$,

2.2. $(\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P$,

2.3. $((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P$,

2.4. $((P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)) \to (P \to Q)$,

2.5. $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$,

2.6 $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$,

2.7. $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \to R)$.