Тема 2.2. Булевы функции. Нормальные формы

Аннтоция: *Булевы функции. Теорема о числе булевых функций. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные формы.*

Булевы функции от одного аргумента

Булевы функции получили свое название по имени замечательного английского математика Джорджа Буля (1815—1864), который первым начал применять математические методы в логике.

Булевой функцией от одного аргумента называется функция f заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.

Элементы двухэлементного множества будем обозначать 0 и 1. Таким образом, $f:\{0,1\}\to\{0,1\}$. Нетрудно перечислить все булевы функции от одного аргумента:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таким образом, получили, что всего имеется четыре различных булевых функций от одного аргумента:

$f_0(x)=0$— функция, тождественно равная 0 (тождественный нуль);

$f_1(x)=x$ — тождественная функция;

$f_2(x)=x'$ — функция, называемая отрицанием;

$f_3(x)=1$ — функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

Булевы функции двух аргументов

Булевой функцией от двух аргументов называется функция g, заданная на множестве $\{0;1\}\times\{0;1\}$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$. Другими словами, булева функция от двух аргументов сопоставляет любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), либо 0, либо 1.

Перечислим все возможные булевы функции от двух аргументов в форме следующей таблицы:

		0	$\bullet$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

В данной таблице функции пронумерованы так, что номер функции, записанный в двоичной системе счисления, дает последовательность значений соответствующей функции. Например, двоичная запись числа 13 имеет вид: 1101 и эти значения записываются столбцом.

Многие функции здесь вам знакомы либо по булевым функциям одного аргумента, либо из школьного курса информатики. Так, например, $g_0(x,y)=0$ — ***тождественный ноль,*** а $g_1(x,y)$ - ***конъюнкция*** и (обозначается $x \cdot y$ или xy).

Некоторые функции не имеют названия. Рассмотрим важные функции, которые необходимо знать. Отрицание конъюнкции, функция $g_{14}(x, y)$, называется ***штрихом Шеффера*** и обозначается $x|y$. Таким образом, $g_{14}(x,y)=(x\cdot y)'=x|y$. Эта функция принимает значение 0 в том и только в том случае, когда функция $g_1(x,y)$ принимает значение 1, т.е. в случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1.

Функция $g_7(x,y)$ называется ***дизъюнкцией*** и обозначается $x\vee y$. Таким образом, $g_7(x,y)=x\vee y$. Функция $g_8(x,y)$, являющаяся отрицанием функции $g_7(x,y)$, носит название ***стрелка Пирса*** (или ***Функция Вебба)*** и обозначается $x\downarrow y$. Итак, $g_8(x, y) = (x\vee y)' = x\downarrow y$.

Функция $g_{13}(x, y)$ называется ***импликацией*** и обозначается $x\to y$, т.е. $g_{13}\left(x,y\right)=x\to y$. Аргумент x в этой функции называется посылкой импликации, а аргумент y — ее следствием.

Функция $g_9(x, y)$ называется ***эквивалентностью*** и обозначается $x\equiv y$ (или, в некоторых учебниках $x\leftrightarrow y$). Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают одинаковые значения. Функция $g_6(x, y)$, являющаяся отрицанием функции $g_9(x, y)$, называется ***сложением по модулю два***, или ***суммой Жегалкина,*** и обозначается $x+y$.

Две булевы функции *f(x, y)* и *g(x,* y) называются ***равными,*** если каждому набору значений аргументов *x, y* обе функции сопоставляют один и тот же элемент из множества {0, 1}, т.е. *f(a, b) = g(a, b)* для любых *a, b* $\in$ {0, 1}. Например, $x \vee y = y \vee x$.

Из введенных простейших булевых функций можно строить с помощью суперпозиций более сложные булевы функции. Например, если в функцию $x \vee t$ вставить вместо аргумента *t* функцию $y \cdot z$, то получим следующую сложную функцию: $x \vee (y \cdot z)$.

Число булевых функций

Теорема (о числе булевых функций от *n* аргументов)

Число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}

Доказательство:

- Чтобы задать булеву функцию $f(x_1,...,x_n)$ от *n* аргументов, нужно перечислить все наборы $(a_1,...,a_n)$ из нулей и единиц значений, которые могут принимать ее аргументы, и для каждого такого набора указать значение функции f, которое она понимает на этом наборе.

Выясним сначала, сколько существует различных наборов $(a_1,...,a_n)$, составленных из нулей и единиц, значений для *n* аргументов $x_1,...,x_n$. Доказательство будем вести методом математической индукции по числу *n*.

В самом деле, для *n*=1 имеется всего два набора значений переменного x_1. Это 0 и 1. Так что для *n*=1 число наборов равно 2^1.

Предположим, что для *k* аргументов имеется точно 2^k различных наборов $(a_1,...,a_k)$, составленных из 0 и 1, значений для *k* аргументов. Тогда среди возможных различных наборов $(a_1,...,a_k,a_{k+1})$ значений для *k*+1 аргумента имеется, согласно предположению индукции, точно 2^k наборов вида $(a_1,...,a_k,0)$ и точно 2^k наборов вида $(a_1,...,a_k,1)$. Следовательно, всего будет $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ различных наборов. Тем самым доказано с помощью индукции утверждение о числе различных наборов.

Таким образом, для задания функции f от *n* аргументов нужно указать ее значение для каждого из 2^n различных наборов значений ее аргументов. Сколько же их существует всего? Ровно столько, сколько имеется разных наборов длины 2^n, составленных из нулей и единиц.

Разных наборов длин 2^n, составленных из нулей и единиц, как показано в начале доказательства теоремы, имеется 2^q, где $q = 2^n$ – длина набора. Таким образом, число разных булевых функций от n аргументов равно точно 2^{2^n}.

Теорема доказана.∢

Свойства булевых функций

Рассмотрим серию теорем, задающих свойства булевых функций.

Теорема (Свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания)

Для булевых функций выполняются следующие равенства:

а) $x \vee x = x, x \cdot x = x$ *(идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции);*

б) $x \vee y = y \vee x, x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность дизъюнкции и конъюнкции);*

в) $\left(x \vee y\right) \vee z = x \vee \left(y \vee z\right), \left(x \cdot y\right) \cdot z = x \cdot \left(y \cdot z\right)$ *(ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции);*

г) $x \vee 1 = 1, x \cdot 1 = x$;

д) $x \vee 0 = x, x \cdot 0 = 0$;

е) $x \vee \left(y \cdot z\right) = \left(x \vee y\right) \cdot \left(x \vee z\right), x \cdot \left(y \vee z\right) = \left(x \cdot y\right) \vee \left(x \cdot z\right)$ *(дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкций);*

ж) $x \vee \left(y \cdot x\right) = x, x \cdot \left(y \vee x\right) = x$ *(законы поглощения);*

з) $\left(x \vee y\right)' = x' \cdot y', \left(x \cdot y\right)' = x' \vee y'$ *(законы де Моргана);*

и) $x \vee x' = 1, x \cdot x' = 0$;

к) $x'' = x$.

Доказательство очевидно, например, при помощи таблиц истинности.

Теорема (Свойства эквивалентности, импликации и отрицания)

Для булевых функций справедливы следующие равенства:

а) $x \leftrightarrow x = 1, x \leftrightarrow x' = 0$;

б) $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$ *(коммутативность* *эквивалентности)',*

в) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ *(ассоциативность эквивалентности)',*

г) $1 \leftrightarrow x = x, 0 \leftrightarrow x = x'$;

д) $x' \leftrightarrow y' = x \leftrightarrow y$;

е) $x' \to y' = y \to x$;

ж) $x \to x = 1$;

з) $x \to x' = x'$;

и) $x' \to x = x$;

к) $1 \to x = x$;

л) $0 \to x = 1$;

м) $x \to 1 = 1$;

н) $x \to 0 = x'$.

Доказательство этих соотношений не представляет труда. Предлагается проделать их самостоятельно с помощью таблиц истинности.

Теорема (о выражении одних булевых функций через другие)

Справедливы следующие равенства, выражающие одни булевы функции через другие'.

а. $x \cdot y = (x' \vee y')'$;

б. $x \vee y = (x' \cdot y')'$;

в. $x \vee y = (x \to y) \to y$;

г. $x \vee y = x' \to y$;

д. $x \to y = x' \vee y$;

е. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$;

ж. $x' = x \mid x$;

з. $x \mid y = (x \cdot y)'$;

и. $x \vee y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$;

к. $x' = x \downarrow x$;

л. $x \downarrow y = (x \vee y)'$;

м. $x \cdot y = x' \downarrow y' = \left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)$.

Доказательство и здесь очевидно.

Нормальные формы

Прежде чем сформулировать и доказать основную теорему этого пункта, обратимся к следующей важной лемме.

Лемма (о разложении функции по переменной)

Для произвольной булевой функции $f(x_1,...,x_n)$ справедливы следующие формулы, называемые формулами разложения этой функции по переменной x_1:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \left(x_1 \cdot f(1,x_2,...,x_n)\right) \vee \left(x_1' \cdot f(0,x_2,...,x_n)\right),$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \left(x_1 \vee f(0,x_2,...,x_n)\right) \cdot \left(x_1' \vee f(1,x_2,...,x_n)\right).$$

Доказательство:

➢ Докажем справедливость первой формулы. Воспользуемся определением равенства функций.

Рассмотрим сначала всевозможные наборы значений аргументов следующего вида $(0,a_2,...,a_n)$. Получим:

$$f(0,a_2,...,a_n) = \left(0 \cdot f(1,a_2,...,a_n)\right) \vee \left(0' \cdot f(0,a_2,...,a_n)\right) =$$
$$= 0 \vee \left(1 \cdot f(0,a_2,...,a_n)\right) = f(0,a_2,...,a_n).$$

Теперь подставим наборы вида $(1,a_2,...,a_n)$. Получим:

$$f(1,a_2,...,a_n) = \left(1 \cdot f(1,a_2,...,a_n)\right) \vee \left(1' \cdot f(1,a_2,...,a_n)\right) =$$
$$= \left(1 \cdot f(1,a_2,...,a_n)\right) \vee 0 = f(1,a_2,...,a_n).$$

Итак, функции из обеих частей равенства принимают одинаковые значения при одинаковых значениях их аргументов. Следовательно, эти функции равны и доказываемая формула справедлива. Совершенно аналогично доказывается вторая формула.

Лемма доказана. ≺

Подобным образом могут быть записаны формулы разложения булевой функции по любой ее переменной, не обязательно первой.

Теорема (о представлении булевых функций через конъюнкцию, дизъюнкцию и

Всякая булева функция $f(x_1,...,x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции, и отрицания; причем знак отрицания стоит только непосредственно около переменной и не стоит ни перед одной из внутренних скобок.

отрицание)

Доказательство:

➢ Доказательство будем вести методом математической индукции по числу n аргументов функции f.

Ранее нами были рассмотрены все булевы функции от одного аргумента. Их всего четыре. Покажем, как их можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$f_0(x) = 0 = x \cdot x'$,

$f_1(x) = x$,

$f_2(x) = x'$,

$f_3(x) = 1 = x \vee x'$.

Это означает, что утверждение теоремы справедливо при n=1.

Предположим, что теорема верна для всех функций от k аргументов. Докажем ее для функций от k+1 аргумента. Для этого воспользуемся леммой, например соотношением

$$f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = \left(x_1 \cdot f(1, x_2, ..., x_{k+1})\right) \vee \left(x_1' \cdot f(0, x_2, ..., x_{k+1})\right).$$

Фиксирование в булевой функции одного аргумента приводит к булевой функции с числом аргументов на единицу меньшим, т.е. в правой части данного равенства стоят функции от k аргументов, но согласно предположению индукции, все такие функции выражаются через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, причем знак отрицания стоит только непосредственно около переменных и не стоит ни перед одной из внутренних скобок. Принимая это во внимание, видим, что правая часть последнего равенства представляет собой суперпозицию лишь трех функций – конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Это и доказывает окончательно теорему. ⮜

Очевидно, что данная теорема задает возможность построения булевой функции в виде КНФ или ДНФ. Совершенные формы определеяются строятся абсолютно аналогично тому, как они строились в алгебре высказываний.

Вопросы для самоконтроля:

1. Булевы функции одного аргумента.
2. Булевы функции двух аргументов. Таблица функций.
3. Выражение одних функций через другие. Примеры.
4. Теорема о числе булевых функций.
5. Некоторые свойства булевых функций.

6. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Лемма о разложении. Теорема о представлении булевой функции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.
7. Совершенные формы.