

## Тема 4.2. Самокорректирующиеся коды

**План:** Самокорректирующиеся коды. Коды с исправлением одной ошибки. Верхняя и нижняя оценки мощности максимального кода. Коды Хэмминга, их свойства. Алгоритм декодирования для кодов Хэмминга. Линейные коды.

### Задачи с решением

**Пример:** Для заданного сообщения  $X = 0110101$  построить код Хэмминга, внести одиночную ошибку и произвести декодирование.

Решение:

Построим сначала вспомогательную таблицу:

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

При необходимости ее можно «тянуть» вниз и вправо до бесконечности.

Теперь убираем из рассмотрения первый столбец (он соответствует нулевой позиции, в которой не может быть никаких битов), а те столбцы, которым соответствует **первое** появление единицы в каждой строке выделим – эти биты будут проверочными:

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

Теперь в верхней строке во все не выделенные ячейки внесем наше число (последовательно, слева направо): *0110101*

			0		1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

У нас остались незанятые ячейки – они лишние. Можно убрать их из рассмотрения.

Теперь посчитаем проверочные биты. Для этого выбираем вспомогательную строку и везде, где в этой строке есть единица мы смотрим на строку значений и считаем кол-во единиц на указанных позициях (фактически мы находим конъюнкцию строки значений и соответствующей вспомогательной строки). Для первой вспомогательной строки будет:

			0		1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

Число единиц 3 – нечетно, значит проверочный бит ставим 1 (незаполненная ячейка):

	1		0		1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

Теперь для второй вспомогательной строки:

	1		0		1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

Кол-во единиц в заданных позициях в первой строке (строке значений) – 2 – четное, значит проверочный бит 0:

	1	0	0		1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

Аналогично для третьей вспомогательной строки:

	1	0	0	0	1	1	0		1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

И для четвертой:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1			
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	...

В итоге получили код:

10001100101

Пусть при передаче сообщения  $X'$  произошла ошибка замещения в 7-м разряде, т.е. получено сообщение  $X'' = 10001110101$ . Докажем это, для этого

вычислим также по таблице, но при этом учитываем контрольные значения (т.е. тоже считаем их). По первой вспомогательной строке получим:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

$$\beta_1 = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$$

По второй:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

$$\beta_2 = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 1$$

По третьей и четвертой:

$$\beta_3 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$$

$$\beta_4 = 0 + 1 + 0 + 1 = 0.$$

Запишем полученные значения в обратном порядке. Получим двоичное число. Переведем его в десятичную систему. Разряд, в котором произошла ошибка, равен  $S = 0111_2 = 7$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте код Хемминга для сообщения:

1.1.10010101,

1.2.11010110,

1.3.11100110,

1.4.10110101,

1.5.11111101,

1.6.00101001.

2. Постройте код Хемминга для сообщения:

2.1.11100101000101,

2.2.1001011101000010,

2.3.10001010010000101,

2.4.100010001010100100101010,

2.5.10010010100111101010101010001010,

2.6.1001001001010011101010101010101001010.

3. Было получено сообщение, закодированное по коду Хемминга

(представлено в форме для вспомогательных таблиц). Произошла ли ошибка замены при передаче? Если да, исправьте ее, если это возможно.

3.1.100101010010,

3.2.010010000101,

3.3.00010101001011,

3.4.101001010000101011,

3.5.1001010111101010,

3.6.10100100101010011.