Тема 2.1. Высказывания и формулы алгебры логики. Нормальные формы алгебры высказываний

План: Высказывания и логические связки (дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция). Формулы логики высказываний. Общезначимые, выполнимые и противоречивые формулы.

Задания с решением

Пример: Высказывание «*Волга впадает в Каспийское море, а Нил впадает в Белое море*» есть конъюнкция двух высказываний ($A \wedge B$, где высказывание *A* – «*Волга впадает в Каспийское море*», а высказывание *B* - «*Нил впадает в Белое море*»). Высказывание *B* ложно, поэтому и вся конъюнкция ложна.

Пример: Пусть *A* обозначает: «На улице тепло»; *B* – «Светит солнце». Что будет обозначать $A \vee B$? Это составное высказывание: «На улице тепло или светит солнце». Оно истинно, если *A*=1, или *B*=1, или *A*=*B*=1.

Пример: В лекциях был приведен пример с импликацией. Рассмотрим его еще раз.

Однажды одна из студенток Бертрана Рассела спросила: «Что, неужели из того, что 2х2=5 можно доказать, что Вы – Папа Римский?» - «Да!», ответил Рассел и провел несложное доказательство. Давайте рассмотрим похожий **пример:** докажем, что мы сейчас с вами в Нью-Йорке.

Рассмотрим две переменные *a* и *b*, и пусть они будут равными. Проведем несложные математические преобразования:

$$a = b.$$

Умножим обе части равенства на одно и то же число (*a*):

$$a^2 = ab.$$

Отнимем от обеих частей равенства одно и то же число (b^2):

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Воспользуемся формулами, известными с седьмого класса:

$$(a-b)(a+b) = b(a-b).$$

Разделим обе части равенства на одно и то же число $(a-b)$:

$$a+b=b.$$

Поскольку $a=b$, то

$$b+b=b \text{ или } 2b=b.$$

Опять поделим обе части равенства на одно и то же число (b):

2=1.

Москва и Нью-Йорк это два города, но поскольку 2=1, то это один и тот же город, т.е. мы с вами в Нью-Йорке!

Безусловно, в данном доказательстве есть ошибка (в четвертой строке нельзя делить на $(a-b)$, поскольку это ноль, а делить на ноль нельзя)! Но если мы с вами примем, что на ноль делить можно, то мы с вами в Нью-Йорке!

Самостоятельно проведите доказательство, аналогичное проведенному Расселом.

Пример: Построить таблицу истинности для формулы $(X \vee Y) \to X$.

X	Y	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \to X$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Формула не является тавтологией (тождественно истинной), не является тождественно ложной, она выполнима (есть единицы) и опровержима (есть нули).

Пример: Найти области истинности предикатов

а) $P(x)$: $x+3>0$.

Область определения – множество действительных чисел R. Очевидно, что $J_P=(-3,\infty)$. Предикат $P(x)$ является и выполнимым, и опровержимым.

б) $P(x)$: $\sin x+\cos x=3,\ x\in R$.

Ясно, что $J_P=\varnothing$. Т.е. $P(x)$ – тождественно ложный предикат.

Пример: Найти области истинности предиката $P(x)\colon \exists y\left(e^y \le 3x-12\right)$.

Решение:

Областью истинности этого предиката являются значения переменной x, при которых существует такое значение y, что выполняется неравенство $e^y \le 3x-12$. Так как при любом y $e^y > 0$, причём e^y может быть как угодно маленьким положительным числом, то только при условии $3x-12>0$ можно найти значение y, которое обращает выражение $e^y \le 3x-12$ в верное неравенство. Т. е. должно выполняться $3x>12$. Следовательно, область истинности данного предиката: $\{x \mid x>4\} = (4, +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

   1.1. Москва – столица России;

   1.2. треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$;

   1.3. 2+2-5;

   1.4. кислород – газ;

   1.5. каша – вкусное блюдо;

   1.6. картины Пикассо слишком абстрактны;

   1.7. треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны;

   1.8. если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

Какие из высказываний истинные, а какие ложные?

2. Следующие составные высказывания расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:

   2.1. если число делится на 2 и не делится на три, то оно не делится на 6.

   2.2. произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю;

   2.3. если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции;

2.4. если какие-либо два из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны, то их смешанное произведение равно нулю.

3. На основании таблиц истинности доказать равносильность формул:

3.1. $X \leftrightarrow Y = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$;

3.2. $X \mid Y = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$;

3.3. $X \downarrow Y = \neg X \wedge \neg Y$.

4. Построить таблицу истинности, определить тип формулы алгебры высказываний:

4.1. $\left(B \to \left(A \wedge C\right)\right) \wedge \neg\left(\left(A \vee C\right) \to B\right)$;

4.2. $\left(\left(A \vee B\right) \vee C\right) \to \left(\left(A \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right)\right)$;

4.3. $\left(B \to C\right) \to \left(\left(A \vee B\right) \to \left(A \vee C\right)\right)$;

4.4. $\left(A \leftrightarrow B\right) \leftrightarrow \left(\left(\neg A \wedge \neg B\right) \vee \left(A \wedge B\right)\right)$;

4.5. $\left(A \vee \left(B \wedge C\right)\right) \leftrightarrow \left(\left(A \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right)\right)$;

4.6. $\left(A \to \left(B \wedge C\right)\right) \to \left(\left(A \to B\right) \wedge \left(A \to C\right)\right)$;

4.7. $\left(\left(A \leftrightarrow C\right) \wedge B\right) \vee \left(A \to \left(A \vee B\right)\right)$;

4.8. $\left(A \wedge B \wedge C\right) \leftrightarrow \left(\neg\left(A \wedge C\right) \vee \neg B\right)$;

4.9. $\left(A \vee C\right) \to \left(\neg C \equiv B\right)$;

4.10. $\left(\left(A \to B\right) \vee \left(A \to \neg B\right)\right) \to \left(\left(A \wedge C\right) \to C\right)$.

5. Преобразовать формулу алгебры высказываний в дизъюнкцию элементарных конъюнкций (ДНФ):

5.1. $\neg\left(A \to \neg\left(A \wedge B\right)\right) \to \left(A \vee C\right)$;

5.2. $\left(B \to \left(A \wedge C\right)\right) \wedge \neg\left(\left(A \vee C\right) \to B\right)$;

5.3. $\left(\left(A \vee B\right) \vee C\right) \to \left(\left(A \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right)\right)$;

5.4. $\left(\left(A \to B\right) \to C\right) \to \neg A$;

5.5. $\left(A \to \neg C\right) \equiv \left(\neg A \vee B\right)$;

5.6. $((A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A)) \to A$;

5.7. $\neg((A \wedge B) \to A) \vee (A \wedge (B \vee C))$;

5.8. $\neg(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$;

5.9. $((A \vee C) \to (B \vee \neg C)) \to (A \vee B)$;

5.10. $(A \wedge B) \to ((\neg A \vee \neg C) \to B)$.

6. Найти области истинности предикатов. Предметные переменные принимают значения из множества действительных чисел. В пункте б) изобразить область истинности на плоскости.

6.1. а) $P(x)$: $\exists y\,(\sin y \le 3x+4)$; б) $Q(x,y)$: $(x-y<2)\,\&\,(x>y-4)$.

6.2. а) $P(x)$: $\exists y\,(e^y \le 5x-20)$; б) $Q(x,y)$: $\dfrac{2x+y}{y-x} \in [-1,1]$.

6.3. а) $P(x)$: $\exists y\,(e^y \ge 2x+6)$;

б) $Q(x,y)$: $(4 \ge x-y)\,\&\,(2y \ge -x)\,\&\,(x>0)\,\&\,(y>0)$.

6.4. а) $P(x)$: $\exists y\,(y^2+xy+9=0)$;

б) $Q(x,y)$: $(y^2>x-4)\,\&\,(x^2+y^2<225)$.

6.5. а) $P(x)$: $\forall y\,(\ln(y^2+1) \ge x^2-4)$; б) $Q(x,y)$: $\exists z\,((x-z)^2+y^2 \le 4)$.

6.6. а) $P(x)$: $\exists y\,(\ln(y^2+1) \ge x^2+1)$; б) $Q(x,y)$: $(y^2+x^2 \ge 2y)$.

6.7. а) $P(x)$: $\exists y\,(x \ge y \vee x \le y^2)$; б) $Q(x,y)$: $(x+y \le 1) \vee (x+y \ge 5)$.

6.8. а) $P(x)$: $\exists y\,(xy^2+6y+1 \le 0)$; б) $Q(x,y)$: $(\ \ )$.

6.9. а) $P(x)$: $\forall y\,(x \le y \to x^2 \le y^2)$;

б) $Q(x,y)$: $((x^2+y^2 \le 1)\,\&\,(x-y \le 0)) \vee (2 \le x \le 4)$.

6.10. а) $P(x)$: $\forall y\,(xy+9=3x+3y)$; б) $Q(x,y)$: $\exists z\,((xz=3)\,\&\,(yz=6))$.