Тема 3.6. Потоки в сетях

Аннотация: Потоки в сетях. Теорема Форда – Фалкерсона; алгоритм Форда – Фалкерсона.

Задача о максимальном потоке

В 1941 году математик Джордж Бернард Данциг возглавил подразделение анализа военных действий (Combat Analysis Branch) отдела статистического управления ВВС США в Вашингтоне. Он решал многие практические задачи с применением аппарата математики. Одной из задач, с которой ему пришлось иметь дело - это задача о максимальном потоке (нахождении такого потока по транспортной сети, что сумма потоков из истока, или, что то же самое, сумма потоков в сток максимальна), которая была впервые решена в ходе подготовки воздушного моста во время блокады Западного Берлина, происходившей в 1948—1949 году.

В 1951 году Джордж Данциг впервые сформулировал задачу в общем виде. В 1955 году, Лестер Форд и Делберт Фалкерсон впервые построили алгоритм, специально предназначенный для решения этой задачи. Их алгоритм получил название алгоритм Форда-Фалкерсона. В дальнейшем решение задачи много раз улучшалось.

Основные понятия

Рассмотрим ориентированный граф $G=\langle V, E\rangle$, в котором каждой дуге (u,v) ставится в соответствие неотрицательное число $c(u,v)$, называемое пропускной способностью. В этом графе выделим две вершины:

- v_0 - ***исток***, обладающую тем свойством, что в нее не входит ни одна дуга (все только выходят) и
- v_n - ***сток***, из которой не выходит ни одна дуга (все только входят.

Транспортной сетью назовем указанный граф с выделенными источником и стоком, также обладающие тем свойством, что любая другая вершина сети лежит на пути из v_0 в v_n.

Транспортная сеть может быть использована для моделирования, например, дорожного трафика.

Потоком транспортной сети называется функция $\varphi(u,v)$ со следующими свойствами для любых вершин u и v:

- ограничение пропускной способности, т.е. $\varphi(u,v) \le c(u,v)$;
- антисимметричность, т.е. $\varphi(u,v) = -\varphi(u,v)$;
- сохранение потока (аналог правила Кирхгофа для токов), т.е. для всех вершин, кроме источника и стока $\sum \varphi(u,v) = 0$.

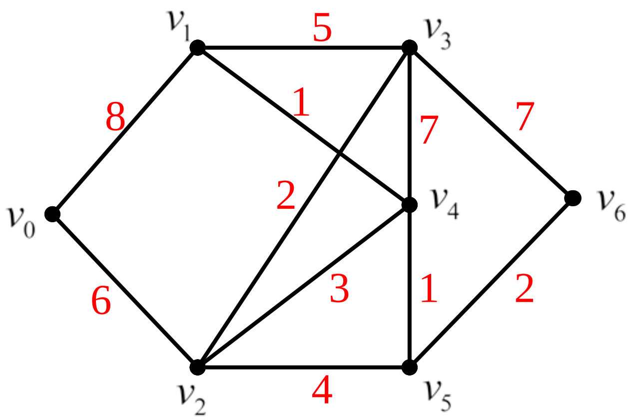
Величиной потока $|\varphi|$ называется сумма потоков по дугам, исходящим из источника (или входящим в сток), т.е. $|\varphi| = \sum_i \varphi(v_0, v_i) = \sum_j \varphi(v_j, v_n)$.

Поток называется ***максимальным***, если его величина не меньше величины любого другого потока этой сети.

Дуга называется насыщенной, если поток по ней равен пропускной способности этой дуги, т.е. $\varphi(u,v) = c(u,v)$.

Разрезом называется множество дуг $E_1 \subseteq E$, для которого любая простая ориентированная цепь, проходящая из источника в сток проходит через E_1.

Пример: Для графа



разрезами, например, будут:

- $E_1 = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2)\}$,
- $E_2 = \{(v_1, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_5)\}$,
- $E_3 = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6)\}$,
- $E_4 = \{(v_0, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3)\}$,
- и др.

Пропускная способность разреза — сумма пропускных способностей всех его дуг. Обозначим пропускную способность разреза $\sum(E)$.

В предыдущем примере $\sum(E_1)=14$, $\sum(E_2)=15$, $\sum(E_3)=9$, $\sum(E_4)=12$.

Минимальный разрез — разрез с минимальной пропускной способностью.

Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема Форда — Фалкерсона — теорема о максимальном потоке в графе, тесно связанная с теоремой Менгера, которая также будет рассмотрена далее.

Теорема (Форда-Фалкерсона)

Величина максимального потока в графе путей равна величине пропускной способности его минимального разреза.

Доказательство:

➢ Докажем *достаточность*. Любой поток между вершинами t и s меньше или равен величине любого сечения. Пусть дан некоторый поток и некоторое сечение. Величина данного потока складывается из величин «грузов», перевозимых по всем возможным путям из вершины t в s. Каждый такой путь обязан иметь общее ребро с данным сечением. Так как по каждому ребру сечения суммарно нельзя перевести «груза» больше, чем его пропускная способность, поэтому сумма всех грузов меньше или равна сумме всех пропускных способностей рёбер данного сечения. Утверждение доказано.

Отсюда следует, что любой поток меньше или равен величине минимального сечения, а значит и максимальный поток меньше или равен величине минимального сечения. Теорема доказана. ∢

На этой теореме основан алгоритм Форда — Фалкерсона поиска максимального потока в графе, он же является доказательством *необходимости* данной теоремы, то есть оно является конструктивным.

Алгоритм Форда Фалкерсона

Рассмотрим **алгоритм нахождения максимального потока** (алгоритм Форда – Фалкерсона):

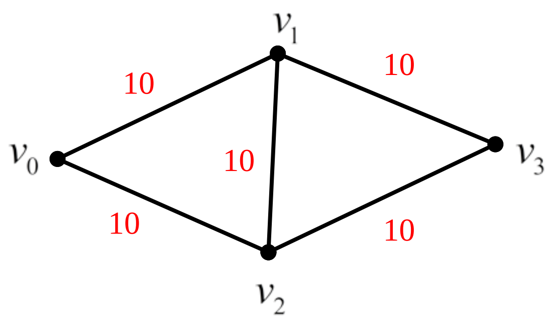
1. Ищем любую цепь из истока графа в сток.
2. Ищем с учётом пропускных способностей отдельных дуг, максимальный поток данной цепи.

3. Приписываем величину данного потока каждой его дуге (записываем через дробь, если потоков несколько, то они складываются, при этом суммарный поток не может превышать пропускную способность дуги, но может стать равной ей) или же вычитаем максимальный поток из каждой дуги (дуга в которой был найден максимальный поток, стирается).
4. Перебираем все возможные цепи, пока не останется путей из истока в сток.

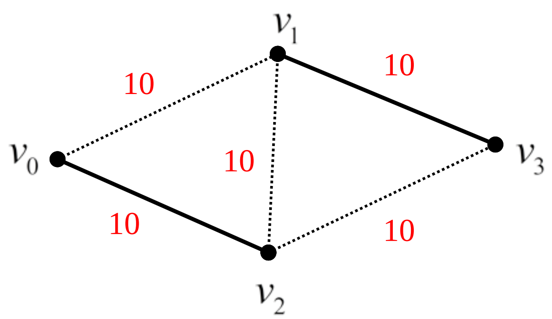
Для удобства предлагаем не записывать потоки через черту, а уменьшать пропускную способность ребер на максимальную величину потока. Кроме того, опять же для удобства, насышенные ребра будем стирать.

Существенное замечание: также, как и в алгоритме Флери стараемся избегать таких цепей (потоков) удаление которых сделает граф не связным, поэтому, желательно, двигаться по «периферии» сети, в противном случае может получиться такая ситуация, которая разобрана в примере ниже.

Пример: Построить максимальный поток для графа:

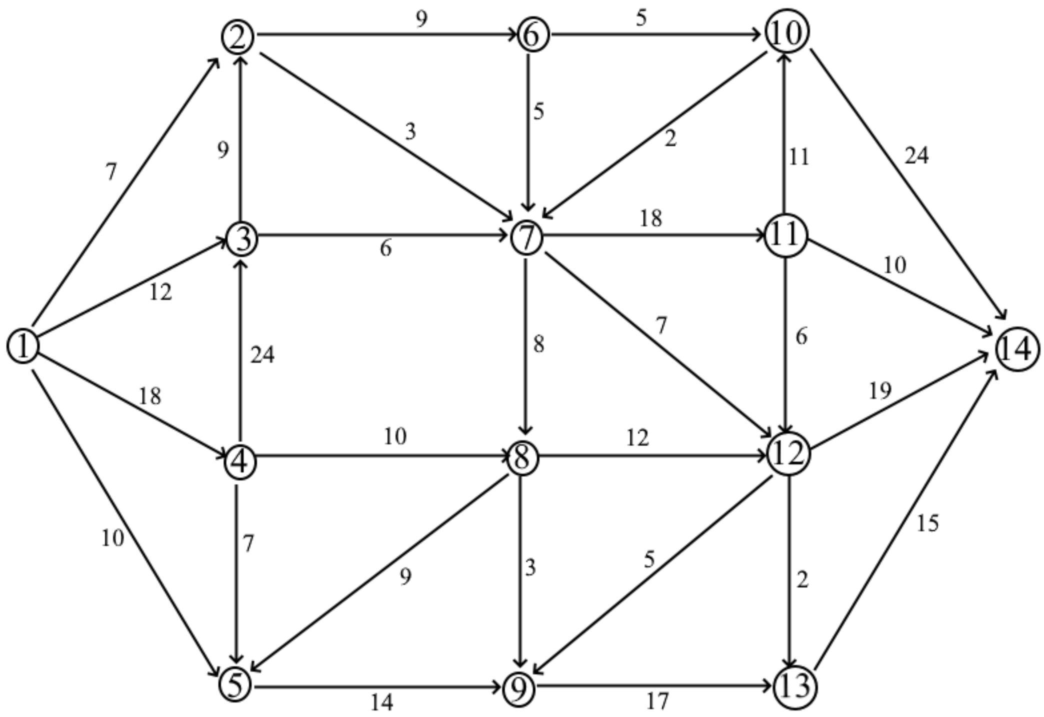


Рассмотрим цепь (здесь и в дальнейшем вершины будем обозначать просто цифрами) 0-1-2-3. Величина максимального потока (максимальная пропускная способность – МПС) по этой цепи – 10, тогда, если мы сотрем эту цепь, то получим граф, который более не является связным:

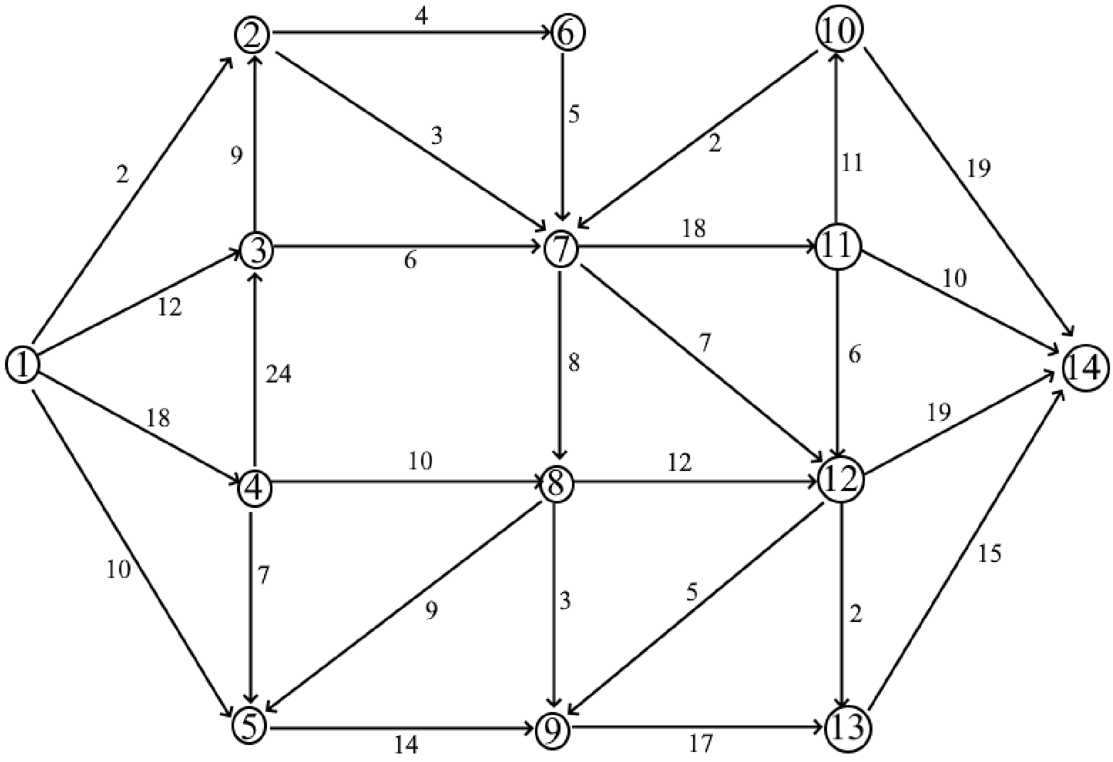


В этой связи, записывание потоков через дробь позволяет, при использовании свойства антисимметричости, восстановить дугу. Однако, при записи потоков через дробь и большом числе дуг, решение несколько усложняется. Вы можете выбрать любой вариант записи решения, но при стирании будьте предельно аккуратны.

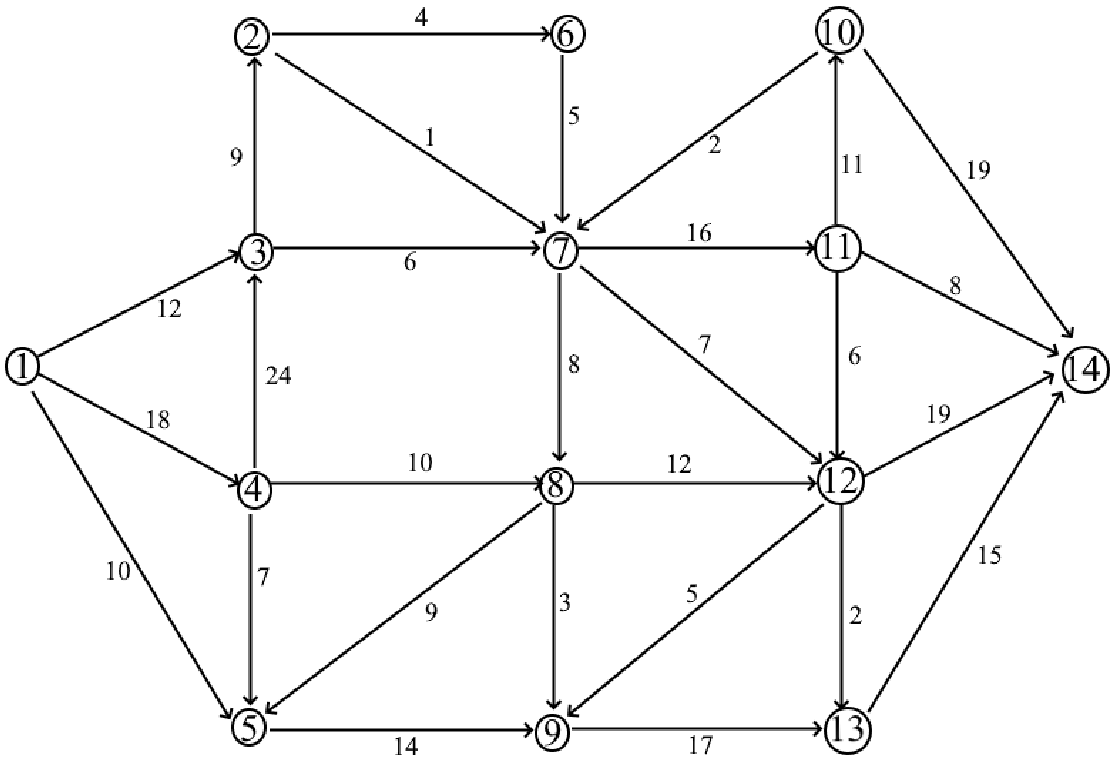
Пример: Построить максимальный поток для графа:



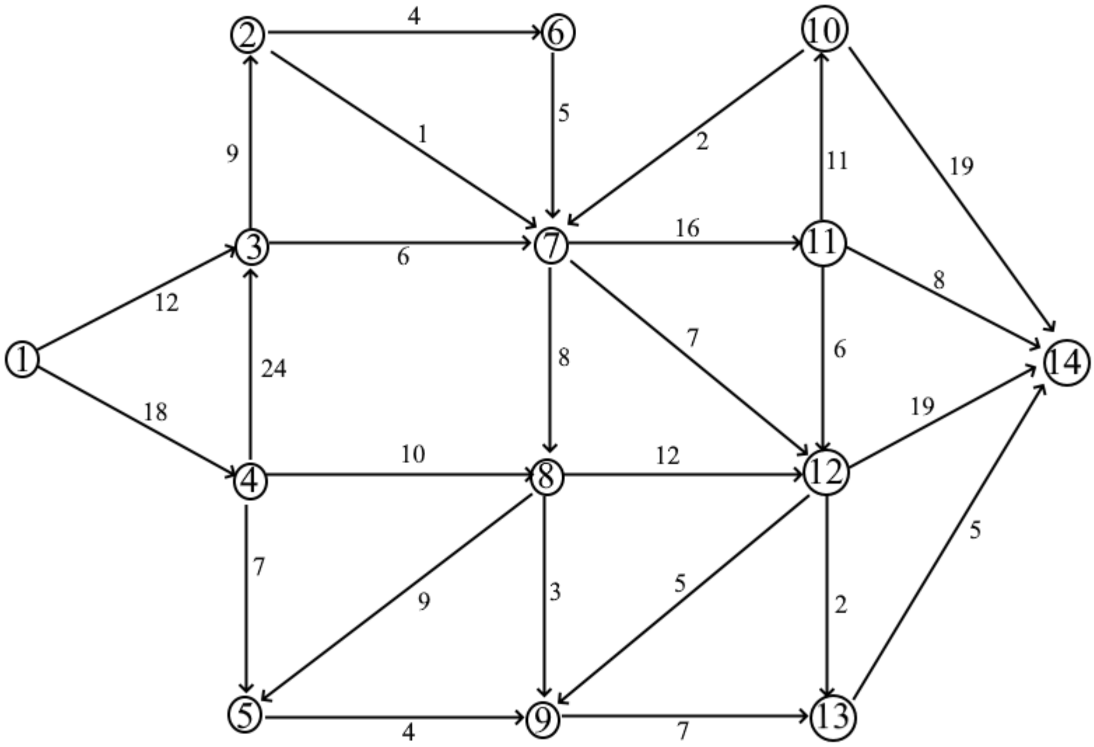
Маршрут: 1-2-6-10-14 Максимальная пропускная способность (МПС) = **5**



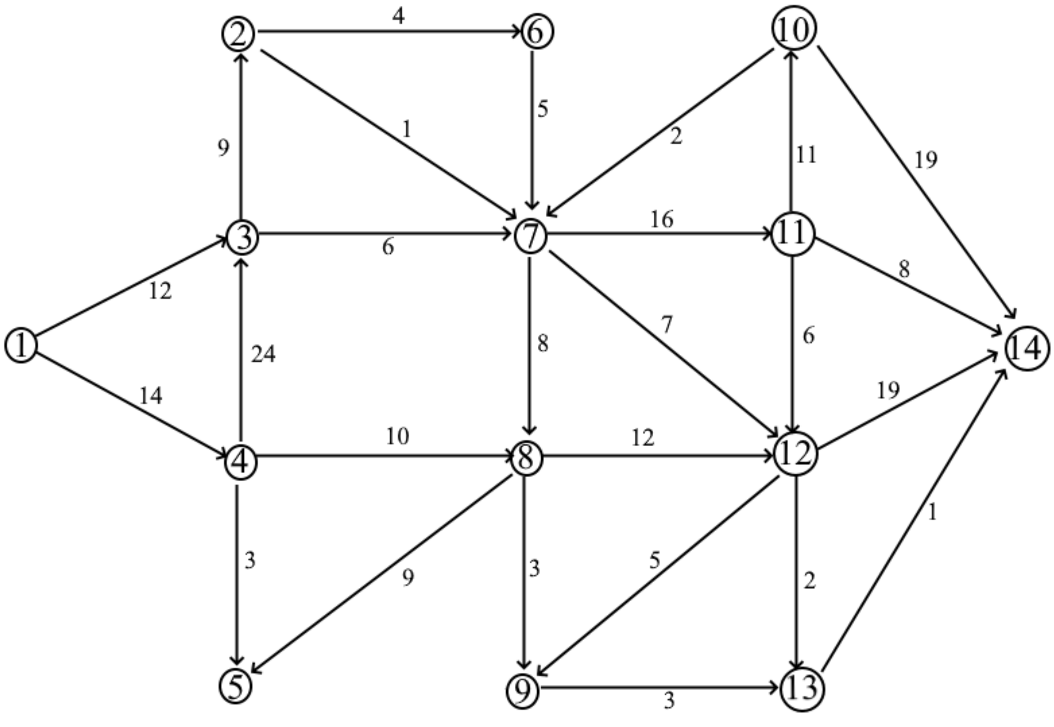
Маршрут: 1-2-7-11-14 МПС = **2**



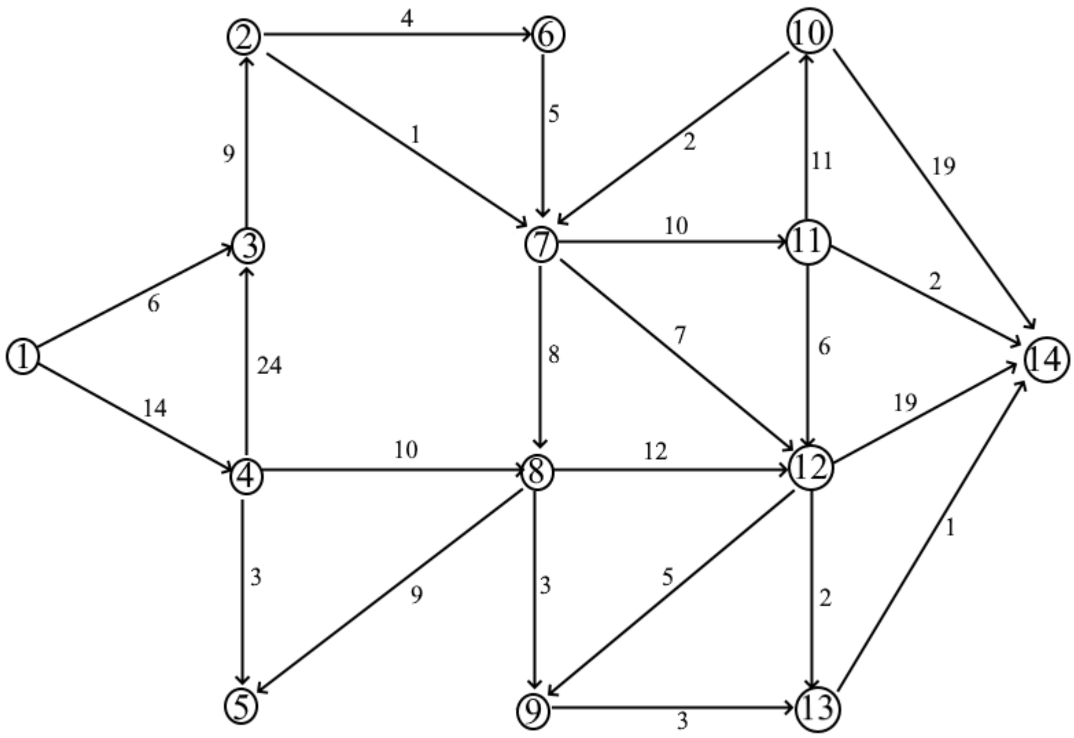
Маршрут: 1-5-9-13-14 МПС = **10**



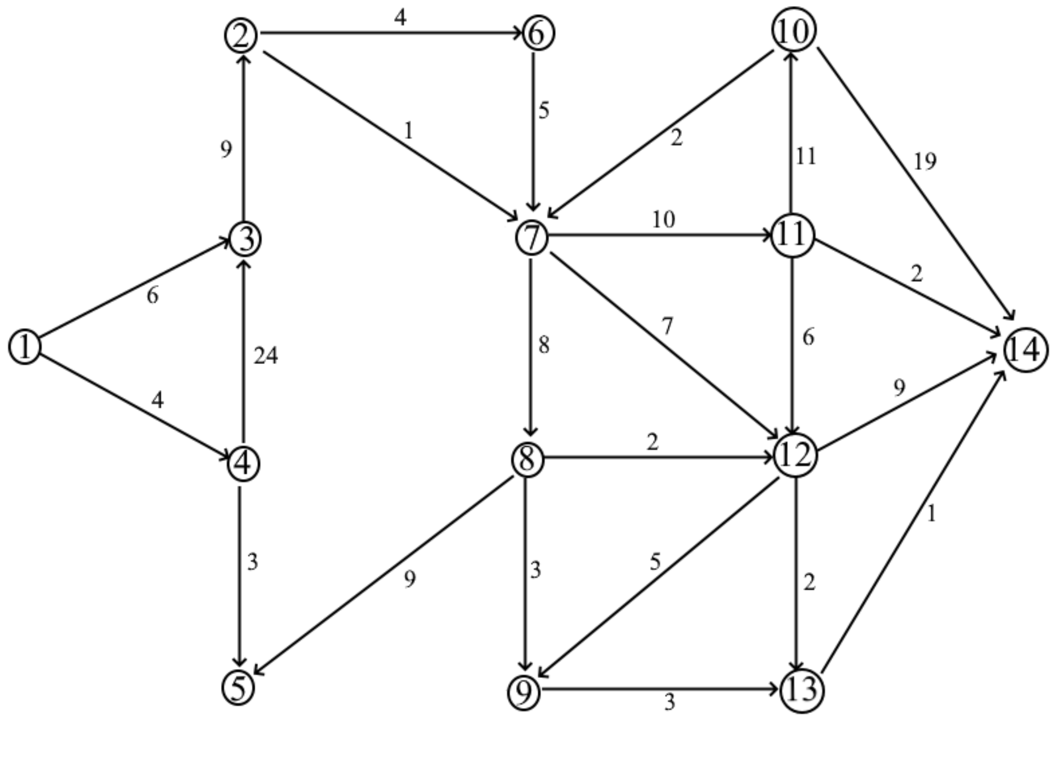
Маршрут: 1-4-5-9-13-14 МПС = **4**



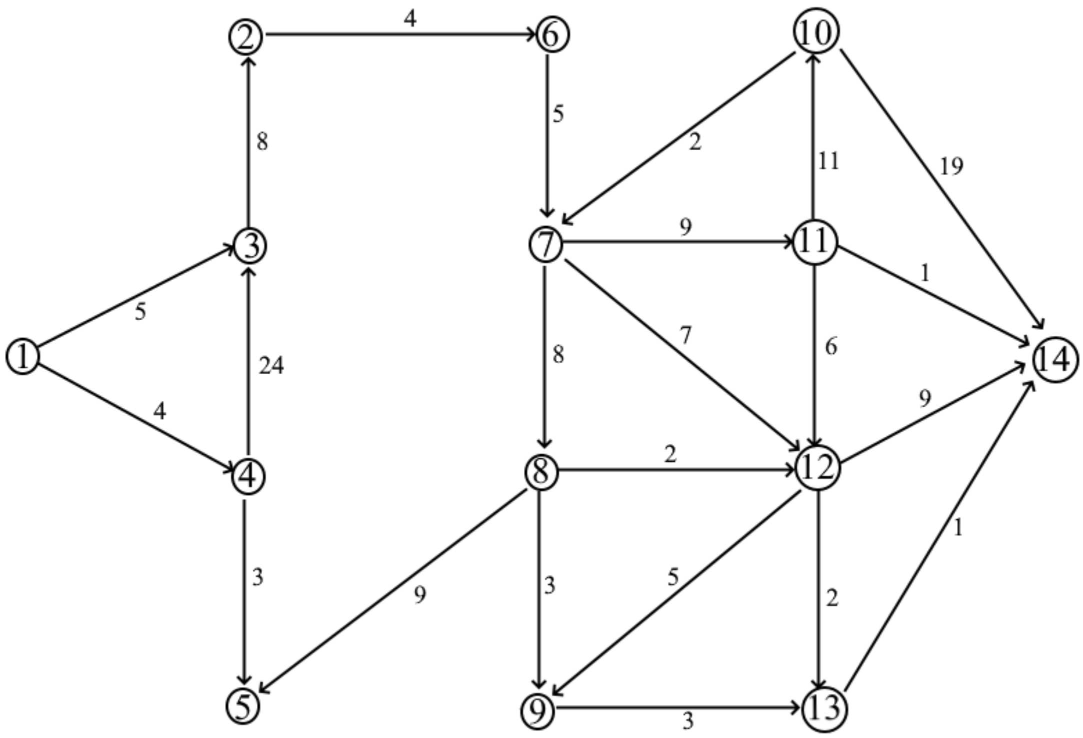
Маршрут: 1-3-7-11-14 МПС = **6**



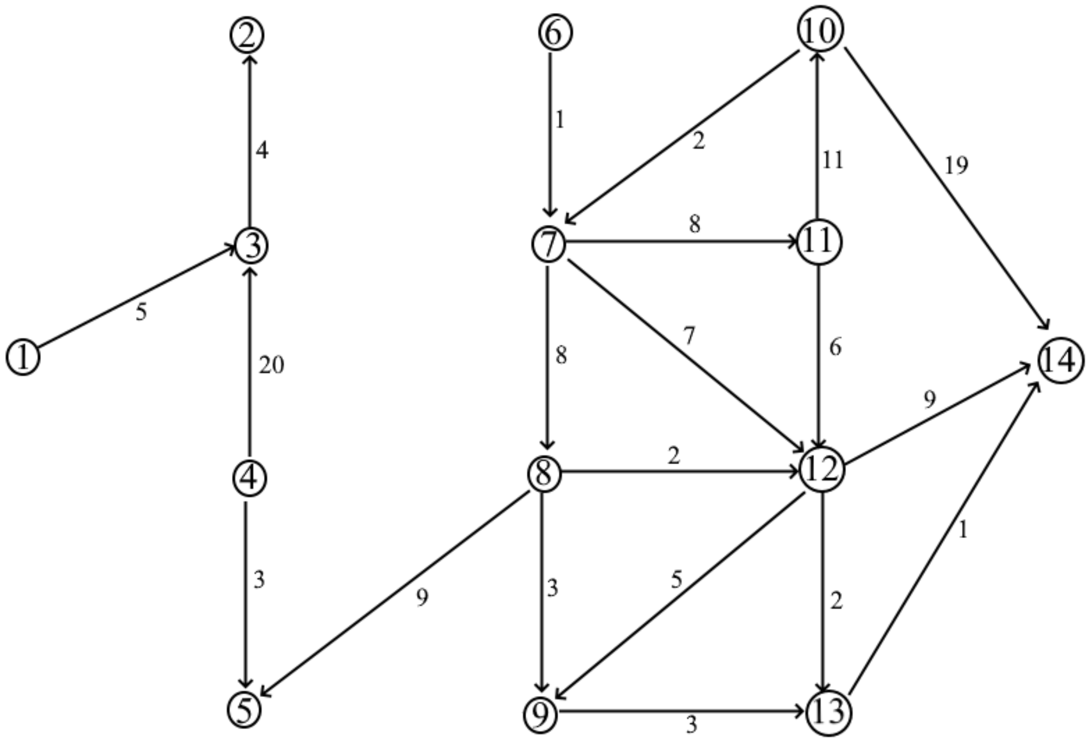
Маршрут: 1-4-8-12-14 МПС = **10**



Маршрут: 1-3-2-7-11-14 МПС = **1**



Маршрут: 1-4-3-2-6-7-11-10-14 МПС = **4**



При выполнении последнего маршрута, цепей, которые бы шли от истока к стоку не остаётся, ответом будет считаться сумма всех полученных МПС, а так же перечень маршрутов.

В процессе выполнения алгоритма, не нужно строить граф для каждого маршрута, достаточно использовать исходный граф и проводить все необходимые правки при помощи карандаша и ластика.

Ответ: потоки:

1-2-6-10-14
1-2-7-11-14
1-5-9-13-14
1-4-5-9-13-14
1-3-7-11-14
1-4-8-12-14
1-3-2-7-11-14
1-4-3-2-6-7-11-10-14

∑ МПС = 42

Обобщения, сводящиеся к исходной задаче

Некоторые обобщения задачи о максимальном потоке легко сводятся к исходной задаче:

1. Если источников больше одного, добавляем новую вершину, которую делаем единственным источником, а уже от нее добавляем ребра с бесконечной пропускной способностью к каждому из старых источников.
2. Аналогично, если стоков больше одного, добавляем новую вершину, которую делаем единственным стоком, а от нее добавляем ребра с бесконечной пропускной способностью от каждого из старых стоков.
3. Если в задаче рёбра графа неориентированы, то каждое неориентированное ребро (u,v) заменяем на пару ориентированных рёбер (u,v) и (v,u).
4. Если имеется ограничение на пропускную способность вершин, которая не учитывалась в основной задаче, то каждую вершину v с ограниченной пропускной способностью $c(v)$ представляем в виде двух вершин $v_{вход}$ и $v_{исход}$. Все рёбра, ранее входящие в v, теперь входят в $v_{вход}$, а исходящие - исходят из $v_{исход}$. Вершины $v_{вход}$ и $v_{исход}$ соединяем ребром с пропускной способностью $c(v)$.

Теоремы Менгера

Теорема Менгера — основной результат о связности в конечном неориентированном графе, которая была сформулирована и доказана в 1927 году Карлом Менгером.

Лемма

Если пропускные способности всех ребер целочисленные (сеть целочислена), то существует максимальный поток, целочисленный на каждом ребре..

Доказательство очевидно следует из алгоритма Форда-Фалкерсона.

Две (u,v)-цепи графа G называют ***непересекающимися***, если у них нет общих вершин, за исключением u и v, и ***реберно-непересекающимися***, если у них нет общих ребер.

Очевидно, что если в сети, где все пропускные способности ребер равны 1, существует целочисленный поток величиной L то существует и L реберно непересекающихся путей.

Теорема (Менгера о реберной связности)

Между вершинами v_i и v_j существует L реберно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых (L−1) ребер существует путь из v_i в v_j.

Доказательство:

➢ Назначим каждому ребру пропускную способность 1. Тогда существует максимальный поток, целочисленный на каждом ребре (по лемме).

По теореме Форда-Фалкерсона для такого потока существует разрез с пропускной способностью равной потоку. Удалим в этом разрезе $L-1$ ребер, и тогда, раз v_i и v_j находятся в разных частях разреза и, существует путь из v_i в v_j, то в разрезе останется хотя бы еще одно ребро. Это значит, что пропускная способность разреза и вместе с ним величина потока не меньше L. А так как поток целочисленный, то это и означает, что найдется L реберно непересекающихся путей.

Существует L реберно непересекающихся путей, а значит, удалив любые $L-1$ ребер хотя бы один путь останется не тронутым. Это и означает, что существует путь из v_i в v_j.

Теорема доказана. ➢

Альтернативная формулировка этой теоремы звучит следующим образом: Пусть G — конечный неориентированный граф и v_i и v_j — различные вершины. v_i и v_j реберно k-отделимы тогда и только тогда, когда v_i и v_j реберно k-соединимы.

Теорема (Менгера о вершинной связности)

Между вершинами v_i и v_j существует L вершинно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых (L−1) вершин существует путь из v_i в v_j.

Возьмем эту теорему без доказательства.

Альтернативная формулировка этой теоремы звучит следующим образом: Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины графа v_i и v_j, равно наибольшему числу попарно непересекающихся простых $\left(v_i, v_j\right)$-цепей этого графа.

Вопросы для самоконтроля:

1. Задача о максимальном потоке.
2. Основные понятия транспортных сетей.
3. Теорема Форда-Фалкерсона.
4. Алгоритм Форда Фалкерсона.
5. Теоремы Менгера.