МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Муханов С.А.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Варианты РГР и указания к решению

Москва 2020

Содержание

Выбор варианта

Работа выполняется по вариантам. Вариант определяется по формуле:

Вариант = Последняя цифра номера студента в журнале

Например, если ваш номер по списку 17, то вам необходимо выполнить 7 вариант, если ваш номер 20, то ваш вариант – 0.

Работа может сдаваться в отдельных тетрадях или на отдельных листах, скрепленных степлером. На обложке тетради или на титульном, а также **каждом отдельном листе, <u>если работа выполнена не в тетради</u>**, должна быть следующая информация:

РГР по …, студента (студентки) группа, фамилия и имя,

вариант № … .

Все РГР **с подписью преподавателя и отметкой о допуске на экзамен** должны быть на экзамене. Если вы забираете работу у преподавателя после проверки, то вы должны принести ее на экзамен. **Отсутствие всех РГР на экзамене не является основанием к недопуску к экзамену, но влечет выдачу дополнительных заданий на экзамене!**

В каждом номере обязательно писать задание!

Указания к решению

Ниже приведены решения некоторых заданий РГР

Задание 1

Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D. Вычислить мощность множеств X и Y.

Даны множества A={a,e,f,j,k}, B={ f,i,j,l,y}, C={ j,k,l,y}, D={i,j,s,t,u,y,z}. Вычислить мощность множеств

$$X = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$$

<u>Решение:</u>

1. Определим элементы множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Для этого найдем сначала пересечение множеств $A \cap C$. Элементы j и k одновременно принадлежат множеству A и C. Следовательно, $A \cap C$={ j,k}. Аналогично, $B \cap C$= {j, l, y}. Таким образом, объединение $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ состоит из четырех элементов {j, k, l, y} .

Мощность множества $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ равна 4.

2. Определим элементы множества $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$.

Найдем дополнение B . Универсальное множество по условию задания состоит их 26 букв {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}. Если отсюда исключить 5 элементов множества B, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента {a,b,c,d,e,g,h,k,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,z}.

Пересечение множеств $A \cap \overline{B}$ состоит из элементов {a,e,k}, т.е. всех элементов множества A , которые не принадлежат $\overline{B}$.

Для нахождения разности множеств D \C вычеркнем из множества D={i,j,s,t,u,y,z} элементы {j,y}, принадлежащие C={ j,k,l,y}. Получим

D\C ={i,s,t,u,z}. В итоге

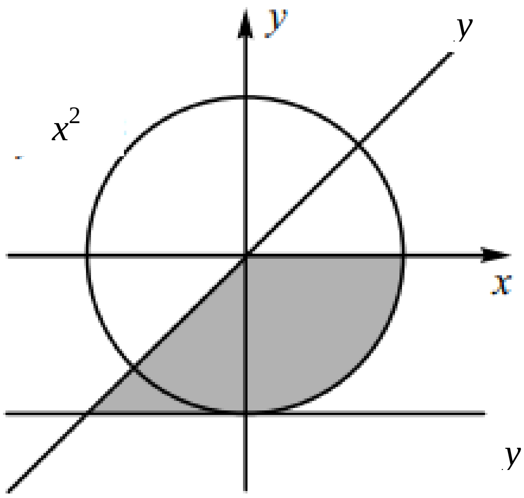
$Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C)$ ={a,e,k,i,s,t,u,z} .

Мощность множества Y равна 8. В данном случае множества D \C и $A \cap \overline{B}$ не пересекаются и мощность объединения равна сумме мощностей слагаемых

Card Y =3+5.

Задание 2

Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



Решение:

Предлагаем вначале выразить это множество через системы и совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le x; \\ y \ge -1; \\ x \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1; \\ y \le 0; \\ x \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь запишем с использованием характеристического свойства множества, используя для систем операцию пересечения множеств, а для совокупности - объединения:

$$X = \{(x; y) | y \le x, y \ge -1, x \le 0 \cup\} \cup \{(x; y) | x^2 + y^2 \le 1, y \le 0, x \ge 0\}.$$

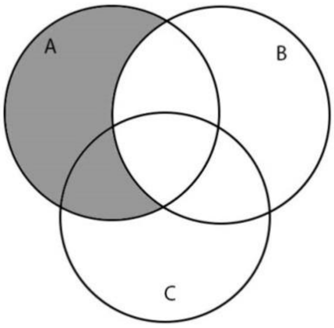
Задание 3.

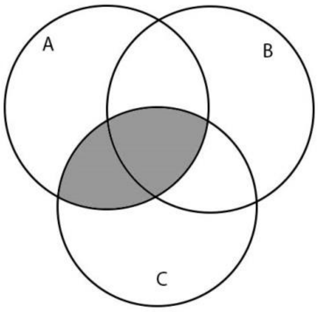
Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: $(A\backslash B) \cap (A \cap C) = (A \cap C) \setminus B$.

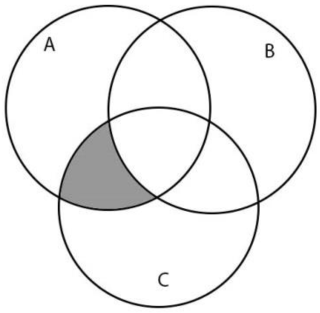
<u>Решение:</u>

Построим последовательно левую часть равенства:

1. $A\backslash B$:
2. $A \cap C$
3. $(A\backslash B) \cap (A \cap C)$

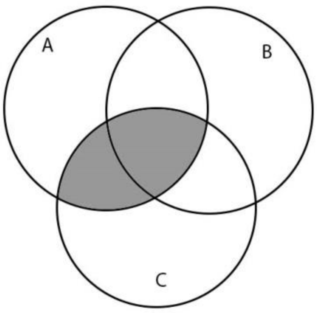


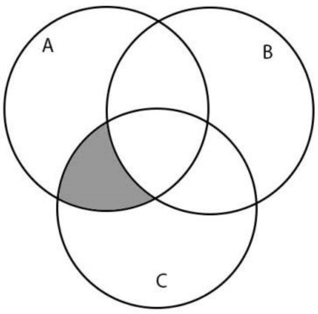




Теперь построим правую часть:

1. $A \cap C$
2. $(A \cap C) \setminus B$





Диаграммы для левой и правой части оказались одинаковы!

Задание 4.

Отношение задано матрицей. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,1) принадлежит данному отношению, а пара (1,2) ему не принадлежит.

2. Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1,\ i \neq j$.

3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4. Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны 1. Данное отношение не является рефлексивным.

5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание данного отношения по алгоритму Уоршолла:

Рассматриваем все внедиагональные $(i \neq j)$ элементы матрицы. Если $m_{ij} = 1,$ то i-ю строку заменяем дизъюнкцией *i*-й и *j*-й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат данному отношению, а пара (1,3) ему не принадлежит.

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом, полученная матрица M_2 является матрицей транзитивного замыкания нашего отношения.

Задание 5.

На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A * B = (a_1 b_1, a_2 b_2)$. Является ли полугруппой структура $(X, *)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

Решение:

Проверим ассоциативность введенного произведения — необходимое свойство для того, чтобы алгебраическая структура была полугруппой. Рассмотрим произведение $A*(B*C)$ трех произвольных пар из X:

$$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2).$$

Найдем сначала произведение $B * C = (b_1 c_1, b_2 c_2)$, затем получим $A*(B*C) = (a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2)$.

Аналогично:

$$\left(A*B\right)*C=\left(a_1b_1,a_2b_2\right)*\left(c_1,c_2\right)=\left(a_1b_1c_1,a_2b_2c_2\right).$$

Очевидно, $A*\left(B*C\right)=\left(A*B\right)*C$, т.е. операция умножения ассоциативна и алгебраическая структура $\left(X,*\right)$ является полугруппой. Составим таблицу Кэли.

Перемножим попарно все элементы множества X. Очевидно, любой элемент $x_k\left(k=0,1,2,3\right)$ умноженный на x_0 даст элемент x_0, а произведение x_k на x_3 не изменит x_k, т.е. $x_0*x_k=x_0$, $x_3*x_k=x_k$. Кроме этого, $x_1*x_2=\left(1,0\right)*\left(0,1\right)=\left(0,0\right)=x_0$, а $x_1*x_1=\left(1,0\right)*\left(1,0\right)=\left(1,0\right)=x_1$ и $x_2*x_2=\left(0,1\right)*\left(0,1\right)=\left(0,1\right)=x_2$.

В итоге запишем таблицу Кэли

*	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$\boldsymbol{x_0}$	x_0	x_0	x_0	x_0
$\boldsymbol{x_1}$	x_0	x_1	x_0	x_1
$\boldsymbol{x_2}$	x_0	x_0	x_2	x_2
$\boldsymbol{x_3}$	x_0	x_1	x_3	x_3

Полугруппа $\left(X,*\right)$ является коммутативным моноидом с единицей x_3. Обратных элементов у x_0, x_1 и x_2 нет, поэтому $\left(X,*\right)$ группой не является.

Задание 6

Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x+y\right)'\vee\left(x+z\right)',\ g\left(x,y,z\right)=xyz+x'y'z'.$$

Решение:

Построим таблицы значений для функций f и g:

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x+y\right)'\vee\left(x+z\right)'$$

x	y	z	$x+y$	$(x+y)'$	$x+z$	$(x+z)'$	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1

$$g(x,y,z) = xyz + x'y'z'$$

x	y	z	xy	xyz	x'	y'	z'	$x'y'$	$x'y'z'$	$g(x,y,z)$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1								

Получили:

$f(0,0,1) \neq g(0,0,1)$, $f(0,1,0) \neq g(0,1,0)$, $f(1,0,1) \neq g(1,0,1)$, $f(1,1,0) \neq g(1,1,0)$.

Следовательно, $f(x,y,z) \neq g(x,y,z)$.

Задание 7.

Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=10011011.

Решение:

В данной функции восемь бит, т.е. это функция трех переменных. Будем считать этими переменными *x*, *y* и *z*.

В данной функции нулей меньше, поэтому быстрее через них. Разряды:

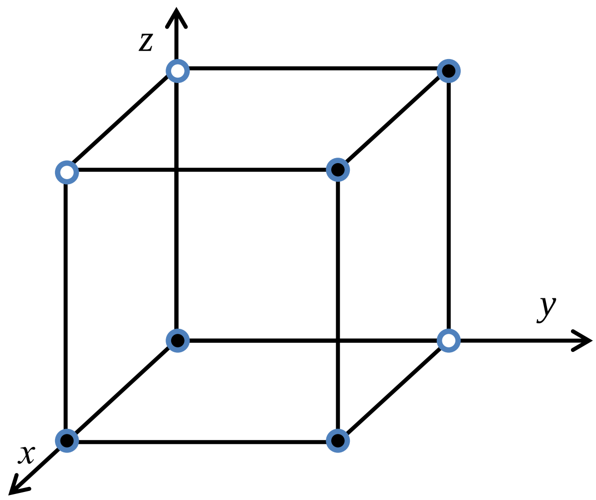
0 1 2 3 4 5 6 7

10011011,

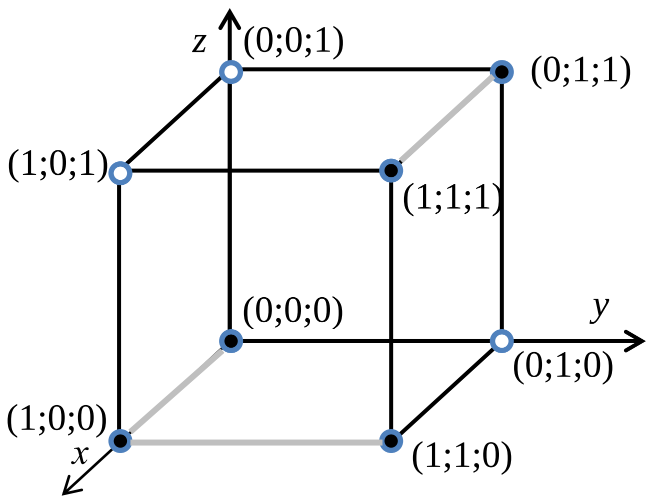
тогда нулям соответствуют наборы переменных 001, 010 и 101, а все остальные наборы – это единицы.

Минимизация графическим способом (метод гиперкубов)

Нарисуем единичный куб в системе координат и выделим его вершины, координаты которых соответствуют наборам переменных, на которых наша функция принимает значения 1, и выколем те вершины, которые соответствуют наборам, на которых принимается значение 0.



Теперь пробуем покрыть выделенные точки, не зацепив невыделенные минимальным количеством сначала граней (у нас это не возможно), затем ребер (у нас все точки покрываются минимально тремя ребрами (выделены на рисунке ниже), затем, если не удалось ничем ранее, отдельными вершинами.



Для каждого из выделенных объектов (граней, ребер или вершин) посмотрим, какие переменные (координаты) не менялись. Для этих переменных составим конъюнктивные одночлены по правилу построения СДНФ. Например, для ребра, соединяющего точки с координатами (1;0;0) и (0;0;0) не меняются вторая (соответствует y) и третья (соответствует z) координаты, и обе они равны нулю, значит соответствующий конъюнктивный одночлен - $y'z'$, а для ребра, соединяющего точки (1;0;0) и (1;1;0) не меняются первая и третья координаты (x и z соответственно), причем x=1, а z=0, тогда получим одночлен xz'. Для третьего ребра посмотрите самостоятельно.

Ответ: $f = y'z' \vee xz' \vee yz$.

Минимизация методом карт Карно

Составим двумерную таблицу значений нашей функции разделив переменные произвольным образом на две группы (предлагаем разделить на x и yz просто из-за того, что такая запись будет более протяженной горизонтально). Сочетания переменных упорядочим по коду Грея. Кодом Грея называется двоичный код, у которого два соседних значения различаются не более чем в одной позиции. Получим:

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

С помощью прямоугольников площадью кратной степени 2, покрываем все единицы, не задевая нули. При этом ячейки, которые находятся на противоположных концах (как по горизонтали, так и по вертикали, но не по диагонали) считаются смежными. Прямоугольники могут пересекаться.

У нас получится:

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

Каждый из прямоугольников описывается в виде конъюнктивного одночлена, как и для графического способа. Получим: $f = y'z' \vee yz \vee xy$.

Обратите внимание, что ответ получился отличным от решения, полученного ранее графическим методом, но, если выбрать другой способ покрытия единиц, то ответ получится абсолютно аналогичным ($f = y'z' \vee xz' \vee yz$):

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

Минимизация методом Квайна

Выписываем все совершенные одночлены, для которых f=1. Во втором столбце для удобства проведем их группировку по числу нулей в их записи.

000	000
011	011
100	110
110	100
111	111

Если в одночленах получается разница ровно в одной позиции, то заменяем «-». Например:

$$\left.\begin{matrix} 0011 \\ 0111 \end{matrix}\right\} 0-11$$

В этом плане группировка удобна тем, что можно проверять только одночлены из соседних групп, например, первый из первой группы и первый из второй, первый из первой группы и второй из второй и т.д.

Помечаем одночлены, которые в этом участвовали. Результаты поместим в третий столбец. Получим:

000	*000	-00
011	*100	1-0
100	*011	-11
110	*110	11-
111	*111	

Для удобства сгруппируем теперь по местоположению «прочерка»:

000	*000	-00	-00
011	*100	1-0	-11
100	*011	-11	1-0
110	*110	11-	11-
111	*111		

Продолжаем этот процесс (объединения) пока возможно, считая прочерк третьим символом. При этом, с учетом последнего разбиения на группы, мы можем работать только в одной группе (нельзя объединить элементы разных групп). Не забывайте ставить пометки тех элементов, которые вы объединяете. Это важно!

В нашем примере никакие больше объединения не возможны.

Строим таблицу, в которой слева, в качестве заголовков строк, ставим все совершенные одночлены, для которых f=1, а в столбцах все непомеченные, полученные в предыдущей таблице (вставляем все непомеченные, на ВСЕХ этапах решения). На пересечении ставим «+», если данный сокращенный одночлен «накрывает» (является шаблоном, где «минус» заменяет любое значения переменной в этой позиции). Для нашего примера:

	-00	-11	1-0	11-
000	+			
011		+		
100	+		+	
110			+	+
111		+		+

Отбираем минимальное число столбцов, с суммарным минимальным числом переменных так, чтобы они покрыли все строки. Для этого вначале определим те одночлены, которые войдут в ядро (в этих строках только один «+», поэтому для них альтернативы нет). У нас это первый и второй столбцы, значит одночлены -00 и -11 обязательно войдут в ответ. В результате получим, что «+», соответствующие выбранным одночленам у нас автоматически будут в 1, 2, 3 и 5 строка. Осталось выбрать столбец с «+» в четвертой строке. В нашем примере мы можем выбрать либо третий, либо четвертый столбцы. Выберем третий. Тогда, для выбранных одночленов (-00, -11, 1-0) составим конъюнктивный одночлены и соберем из них минимальную ДНФ: $f = y'z' \vee yz \vee xz'$.

Задание 8.

Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10010111.

Решение:

Метод неопределенных коэффициентов

Сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x_1, x_2.x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, a_1, ...a_{123}$

$$f(0,0,0) = a_0 = 1$$

$$f(0,0,1) = a_0 + a_3 = 0 \Rightarrow 1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$f(0,1,0) = a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow 1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$$

$$f(0,1,1)=a_0+a_2+a_3+a_{23}=0 \Rightarrow 1+1+1+a_{23}=1 \Rightarrow 1+a_{23}=1 \Rightarrow a_{23}=0$$

$$f(1,0,0)=a_0+a_1=0 \Rightarrow 1+a_1=0 \Rightarrow a_1=1$$

$$f(1,0,1)=a_0+a_1+a_3+a_{13}=1 \Rightarrow 1+1+1+a_{13}=1 \Rightarrow 1+a_{13}=1 \Rightarrow a_{13}=0$$

$$f(1,1,0)=a_0+a_1+a_2+a_{12}=1 \Rightarrow 1+1+1+a_{12}=1 \Rightarrow 1+a_{12}=1 \Rightarrow a_{12}=0$$

$$f(1,1,1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_{12}+a_{13}+a_{23}+a_{123}=0 \Rightarrow$$
$$1+1+1+1+0+0+0+a_{123}=1 \Rightarrow a_{123}=1.$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$$f(x_1,x_2,x_3)=1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3.$$

Метод треугольника Паскаля

Построим полином Жегалкина, используя треугольник Паскаля.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2.x_3)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	1	[1] 0 0 1 0 1 1 1	1
0	0	1	1	[1] 0 1 1 1 0 0	x_3
0	1	0	1	[1] 1 0 0 1 0	x_2
0	1	1	0	0 1 0 1 1	x_2x_3
1	0	0	1	[1] 1 1 0	x_1
1	0	1	1	0 0 1	x_1x_3
1	1	0	0	0 1	x_1x_2
1	1	1	0	[1]	$x_1x_2x_3$

Поясним, как заполняется треугольник Паскаля. Верхняя строка треугольника задает вектор значений булевой функции *f=(10010111)*.В каждой строке, начиная со второй, любой элемент такого треугольника вычисляется как сумма по модулю 2 двух соседних элементов предыдущей строки.

Левой стороне треугольника Паскаля соответствует наборы значений переменных исходной функции $f(x_1,x_2.x_3)$. Соединяя знаком конъюнкции переменные значения которых в наборе равны 1, мы получим слагаемое в полиноме Жегалкина. Набору (000) соответствует 1, набору (001) соответствует x_3 и т.д.

Полином Жегалкина:

$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$

Преобразование ДНФ

По таблице истинности построим СДНФ (метод работает только для СДНФ, просто для ДНФ так делать нельзя!):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения СДНФ по таблице истинности выбираем наборы, на которых функция f принимает значение, равное 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то она берется с отрицанием, если значение переменной равно 1, то переменная берется без отрицание. Соединив знаком конъюнкции переменные соответствующего набора, получим элементарную конъюнкцию. Тогда дизъюнкция всех таких элементарных конъюнкций есть СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Теперь просто заменим дизъюнкцию суммой Жегалкина (так можно сделать из-за того, что СДНФ устроена так, что в каждый одночлен входят ВСЕ переменные, т.е. как минимум одна переменная будет входить в данные одночлены как с отрицанием, так и без него, т.е. при применении формулы $a \vee b = a + b + ab$, конъюнкция будет равна 0, например: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3$. Получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3.$$

Теперь, воспользовавшись свойством $\bar{a} = a + 1$ и раскрыв скобки получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) + (x_1 + 1)x_2x_3 + x_1(x_2 + 1)x_3 + x_1x_2(x_3 + 1) + x_1x_2x_3 =$$

$$=\left(x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1+x_2+x_3+1\right)+$$
$$+\left(x_1x_2x_3+x_2x_3\right)+\left(x_1x_2x_3+x_1x_3\right)+\left(x_1x_2x_3+x_1x_2\right)+x_1x_2x_3.$$

И, наконец, воспользуемся свойством $a+a=0$, т.е. уберем все скобки и все члены, встречающиеся ЧЕТНОЕ число раз вычеркнем. Получим:

$$f(x_1,x_2,x_3)=1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$$

Задание 9.

Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'z'\vee\left(x'z\vee xz'\right)y\vee xy'z'.$$

Решение:

Для нахождения полинома Жегалкина нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина (сложение по модулю 2) и конъюнкцию, а затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Проделаем это для данной булевой функции:

$$x'z'\vee\left(x'z\vee xz'\right)y\vee xy'z'=\left(x'\vee xy'\right)z'\vee\left(x'z+xz'\right)y=\left(x'+xy'\right)z'\vee\left(x'yz+xyz'\right)=$$
$$=\left(x'z'+xy'z'\right)\vee\left(x'yz+xyz'\right)=\left(x'z'+xy'z'\right)\left(x'yz+xyz'\right)+x'z'+xy'z'+x'yz+xyz'=$$
$$=x'z'+xy'z'+x'yz+xyz'=\left(x+1\right)\left(z+1\right)+x\left(y+1\right)\left(z+1\right)+\left(x+1\right)yz+xy\left(z+1\right)=$$
$$=xz+x+z+1+xyz+xy+xz+x+xyz+yz+xyz+xy=xyz+yz+z+1.$$

Замечание: можно было воспользоваться предыдущей задачей.

Задание 10.

Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$yz+x+y,\ \ yz+x+z.$$

Решение:

Найдем двойственную функцию для данной функции $f(x,y,z)=yz+x+y$: $f^*=(y'z'+x'+y')'=y'z'+x'+y'+1=$ $=(y+1)(z+1)+(x+1)+(y+1)=yz+y+z+1+x+1+y+1+1=yz+x+z$, что и требовалось доказать.

Задания 11 и 12.

Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

$$\left(x \to \left(y \to z'\right)\right) \vee \left(xy \leftrightarrow z\right).$$

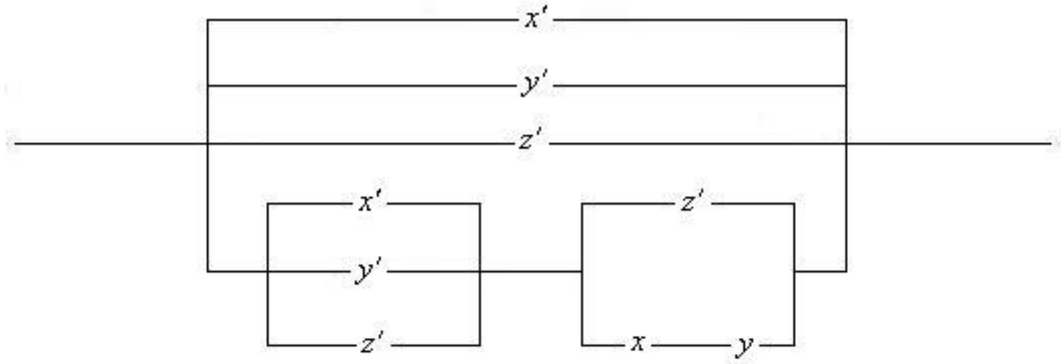
Решение:

Выразим сначала данную функцию через функции ', $\cdot$, $\vee$, причем так, чтобы знак ' стоял бы лишь на переменных и не стоял на скобках:

$$\left(x \to \left(y \to z'\right)\right) \vee \left(xy \leftrightarrow z\right) = \left(x' \vee \left(y \to z'\right)\right) \vee \left(xy \to z\right)\left(z \to xy\right) =$$

$$= x' \vee y' \vee z' \vee \left(x' \vee y' \vee z\right)\left(z' \vee xy\right).$$

Соответствующая схема имеет вид



Обратим внимание, что данную схему можно еще упросить: в самом деле, если, например, сработает x', то ток гарантировано сможет пройти сверху и нижняя часть схемы не имеет смысла.

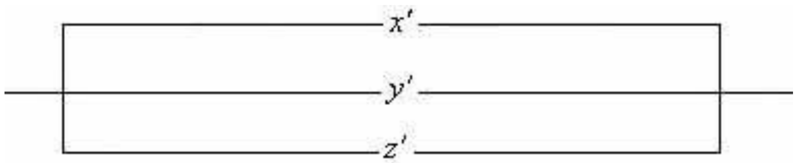
Для упрощения нам проще отталкиваться от полученного выражения:

$$x' \vee y' \vee z' \vee \left(x' \vee y' \vee z\right)\left(z' \vee xy\right).$$

Воспользуемся формулой $a \vee ab = a$, тогда получим:

$$x' \vee y' \vee z' \vee \left(x' \vee y' \vee z\right)\left(z' \vee xy\right) = x' \vee y' \vee z',$$

Тогда схема будет иметь вид:



В общем случае (в том числе и для задания 12), можно построить минимальную ДНФ или КНФ и по ней построить РКС.

Задание 13.

Задана система булевых функций f_1=10010111 и f_2=00110100. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

Решение:

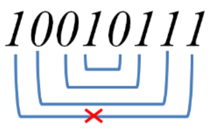
Проверим выполнение теоремы Поста о полноте.

Класс P_0: Первый бит f_1 не 0, эта функция ноль не сохраняет, первый бит функции f_2 – ноль, эта функция ноль сохраняет.

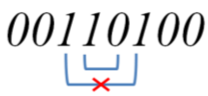
Класс P_1: Последний бит f_1 - 1, эта функция единицу сохраняет, последний бит функции f_2 – ноль, эта функция единицу не сохраняет.

Класс S: Проведем проверку по схеме (делим каждую функцию пополам и, двигаясь от центра проверим что все биты различны):

Для f_1:



Для f_2:



Класс M: Разобьем каждую из функций пополам и проведем побитовое сравнение полученных частей. Если функция монотонна, то каждый бит первой половины должен быть «меньше или равен» соотвествующего бита второй половины. Продолжаем этот процесс до конца.

Для f_1:	Для f_2:
$\underline{1}001$ $\underline{0}111$	$00\underline{11}$ $01\underline{00}$

Не выполняется в подчеркнутой позиции.

Класс L: для каждой функции построим полином Жегалкина (см. задание 8). Получим:

$f_1 = 1 + z + y + x + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии,

$f_2 = y + x + xz + xy + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии.

Сведем все результаты в таблицу:

	P_0	P_1	S	M	L
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	-	-	-	-

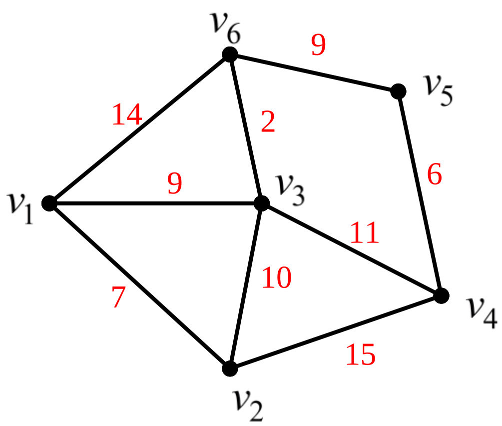
В каждом столбце есть «минус», следовательно условия теоремы Поста выполняются! Данная система функций является полной!

Задание 14.

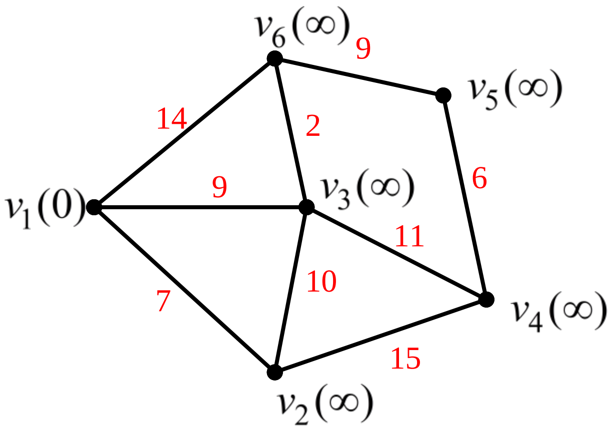
Мы Его идея следующая: перед каждым этапом известно множество **отмеченных вершин** S, для которых кратчайшие пути найдены ранее; тогда на очередном этапе к нему добавляется вершина v, с самым коротким путем из v_0, проходящим по множеству S; после этого пересчитываются длины кратчайших путей из v_0 в оставшиеся вершины из $V \setminus S$ с учетом новой вершины v. Длина текущего кратчайшего пути из v_0 в v, проходящего по множеству S, заносится в строку $D^{(k)}$. В конце работы в этой строке отыскиваются длины соответствующих кратчайших путей.

Рассмотрим графическую реализацию на примере.

Пример: Пусть требуется найти кратчайшие расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



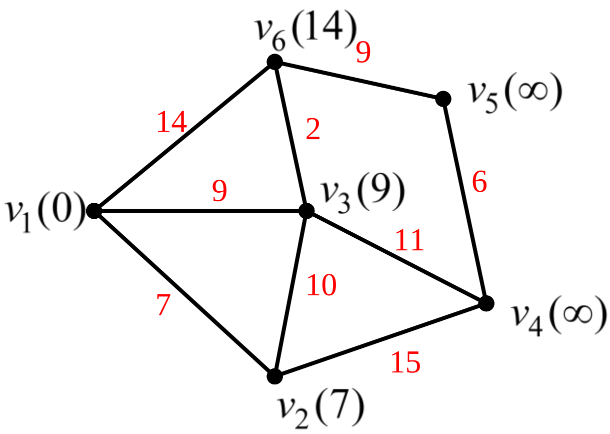
Инициализация: Метка самой вершины 1 полагается равной 0, метки остальных вершин – бесконечность (это вариант для составления программы для компьютера, для решения задачи на графах берут сразу расстояния до соседних вершин, т.е. то, что получится на следующем шаге).



Шаг 1. Соседи вершины с минимальной меткой (вершина v_1 с меткой 0) являются вершины 2, 3 и 6. Обходим соседей вершины по очереди.

Первый сосед v_1 – вершина v_2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути $\rho(v_1, v_2)$ равна сумме кратчайшего расстояния до вершины v_1 (значению её метки, т.е. 0) и длины ребра, (v_1, v_2), то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки v_2 (∞), поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.

Аналогично находим длины пути для всех других соседей (вершины 3 и 6).



Все соседи v_1 проверены. Текущее минимальное расстояние до v_1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вершина v_1 отмечается как посещенная (возьмем ее в квадратные скобки).

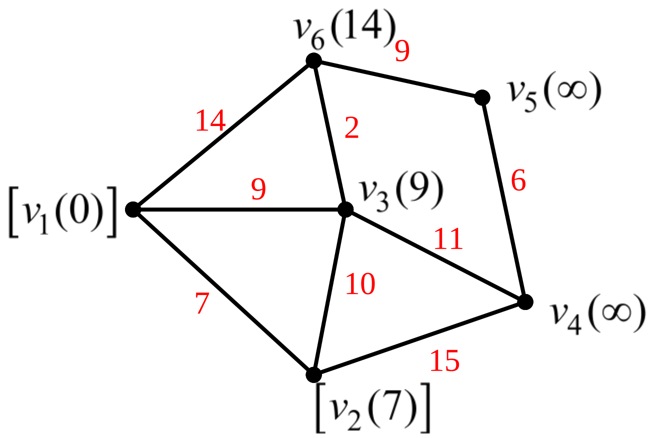
Шаг 2. Шаг 1 алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это v_2 с меткой 7.

Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через v_2. Соседями вершины 2 являются вершины v_1, v_3 и v_4.

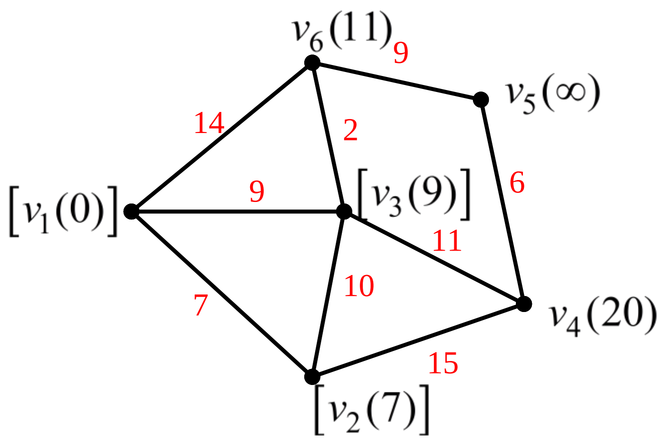
Вершина v_1 уже посещена. Следующий сосед вершины v_2 — вершина v_3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а 9 < 17, поэтому метка не меняется.

Ещё один сосед v_2 — вершина v_4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна 22 (7 + 15 = 22). Поскольку $22 < \infty$, устанавливаем метку v_4 равной 22.

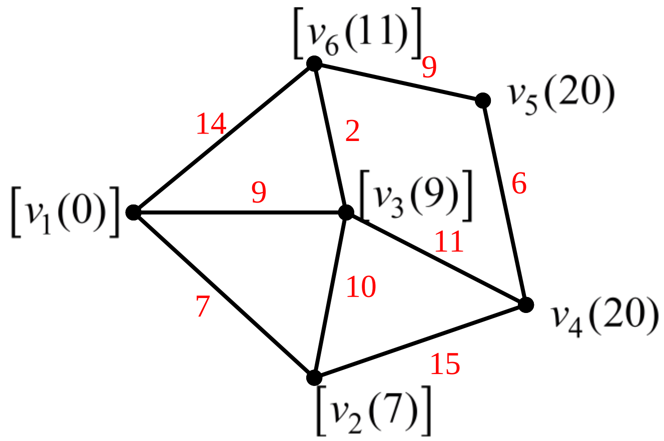
Все соседи вершины 2 просмотрены, помечаем её как посещенную.



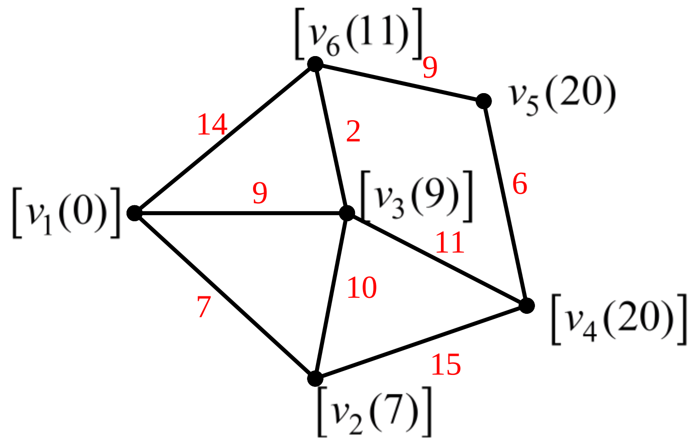
Шаг 3. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину v_3. Получим:



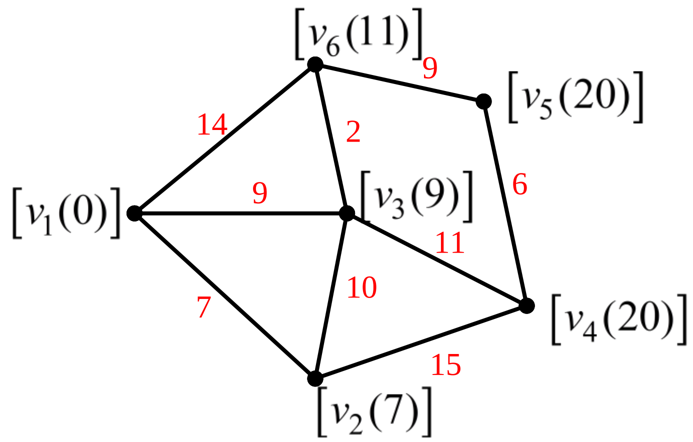
Шаг 4:



Шаг 5:



Шаг 6:



Таким образом, кратчайшие пути из вершины 1: (0,7,9,20,20,11).

Задание 15.

По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 *до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	11	∞	14	15	∞
x_2	∞	0	13	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	0	∞	∞	15
x_4	8	7	11	0	9	∞
x_5	∞	12	10	∞	0	14
x_6	∞	∞	9	∞	∞	0

Решение:

Алгоритм Дейкстры является более эффективным, чем алгоритм Форда-Беллмана, но используется только для взвешенных графов, в которых веса всех дуг не отрицательны.

Матрица весов дана в условии.

Построим строку $T_1 = \{2,3,4,5,6\}$ - номера вершин до которых нужно вычислить длину пути и $D^{(1)} = (0,\underline{11},\infty,14,15,\infty)$ - расстояния от x_1 до этих вершин (первоначально совпадает с первой строкой матрицы весов). Находим минимальный элемент (подчеркнут) и удаляем его номер из строки T. Пересчитываем D по правилу: $D^{(s)} = (d_1^{(s)},\ldots d_n^{(s)})$, где $d_k^{(s+1)} = \min\left\{d_k^{(s)}, d_j^{(s)} + w_{jk}\right\}$, (т.е., если мы считаем k-ый элемент в строк D, то мы выбираем минимальное значение среди того элемента, который занимал эту позицию в предыдущей строке D, а также среди всех сумм элементов столбца с номером k матрицы весов и соответствующих, по порядку следования, значений предыдущей строки D) если $a_k \in T_{s+1}$, и $d_k^{(s+1)} = d_k^{(s)}$, если $a_k \notin T_{s+1}$. Получим:

$T_2 = \{3,4,5,6\}$.

$D^{(3)} = (0,11,24,\underline{14},15,29)$.

$T_3 = \{3,5,6\}$.

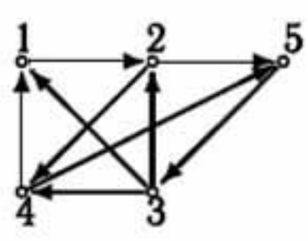
$D^{(4)} = (0,11,24,14,15,29)$.

Строка $D^{(4)}$ не отличается от $D^{(3)}$, поэтому решение закончено даже несмотря на то, что в строке Т остались элементы.

Ответ: минимальные расстояния от вершины 1 до всех остальных: $(0,11,24,14,15,29)$.

Задание 16.

Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 2 в № 4, число маршрутов в графе длины 3:



<u>Решение:</u>

Построим матрицу смежности данного графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме о числе маршрутов длины n их количество находится как A^n. Тогда, число маршрутов длины 2 и 3 соответственно:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

По матрице A^2 найдем число маршрутов длины 2 из вершины № 2 в № 4 – это элемент a_{24}, т.е. 0.

Общее число маршрутов длины 3 – это сумма всех элементов матрицы A^3, т.е. 26.

Число маршрутов длины 4 находятся аналогично (по матрице A^4).

Ответ: число маршрутов длины 2 из вершины 2 в 4 равно 0, общее число маршрутов длины 3 – 26.

Задания 17 и 18.

Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

Решение:

Воспользуемся алгоритмом Краскала. Найдем ребро минимального веса (есть три варианта: x_1x_2, x_3x_4 и x_3x_6 имеют вес 7. Выберем, например x_3x_4). На каждом следующем шаге будем брать ребро минимального веса, инцидентное вершинам, уже включенным в остов и при этом не образующего цикла.

Покажем последовательно, как добавлялись ребра на матрице графа (Включенные ячейки закрасим черным, добавляемые – серым). Поскольку граф не ориентирован, то его матрица симметрична и мы возьмем только ту часть матрицы, что находится над главной диагональю.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

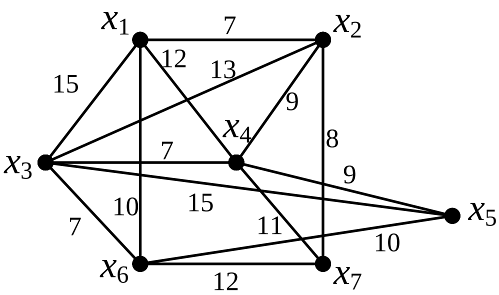
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

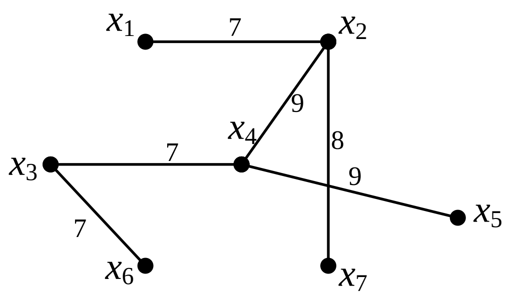
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

При таком решении трудно отследить образование циклов. Поэтому предлагаем еще один вариант решения. Построим сначала этот граф (Задание 18 сведется к заданию 17).

Получим:



Теперь, возьмем ребро x_3x_4 и будем последовательно добавлять к нему ребра в соответствии с алгоритмом Краскала, как это указано в таблицах выше.



Задание 19.

Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

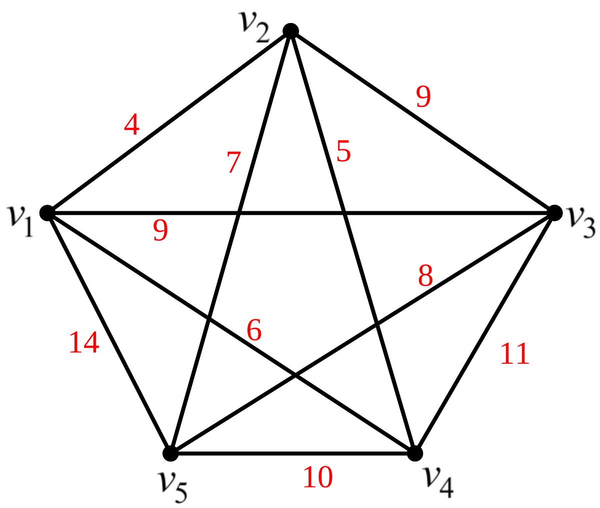
	1	2	3	4	5
1	0	4	9	6	14
2		0	9	5	7
3			0	11	8
4				0	10
5					0

Решение:

Есть несколько алгоритмов решения данной задачи. Использование жадного алгоритма (двигаться в ближайшую вершину) может дать катастрофически плохой результат. Между тем, единственный алгоритм, дающий оптимальное решение – метод полного прямого перебора.

Рассмотрим алгоритм, дающий решение не хуже, чем в раза чем оптимальное (метод самой близкой вставки).

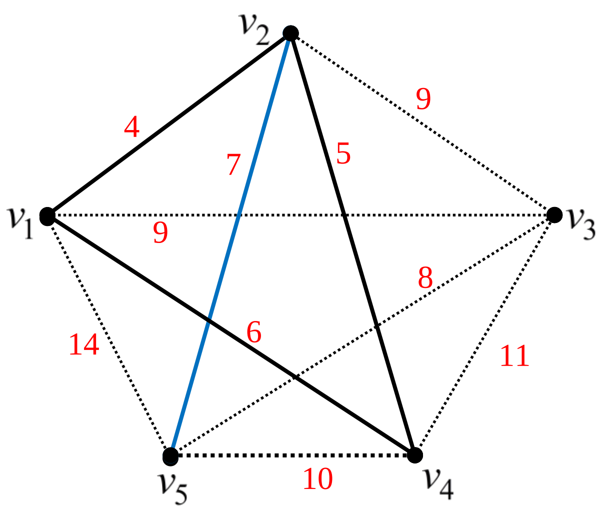
Пример: решить задачу коммивояжера для графа:



Решение:

Шаг 1. Ребро минимального веса (v_1,v_2) весом 4. Добавляем его. Среди ребер, инцидентных вершинам v_1 и v_2 минимальный вес у ребра (v_2,v_3). Добавляем его. Теперь нужно замкнуть цикл. Добавляем ребро (v_1,v_3). Получили начальный цикл.

Шаг 2. Среди ребер, инцидентных вершинам v_1, v_2 и v_3, включенным в цикл, минимальный вес имеет ребро (v_2,v_5). Добавляем его:



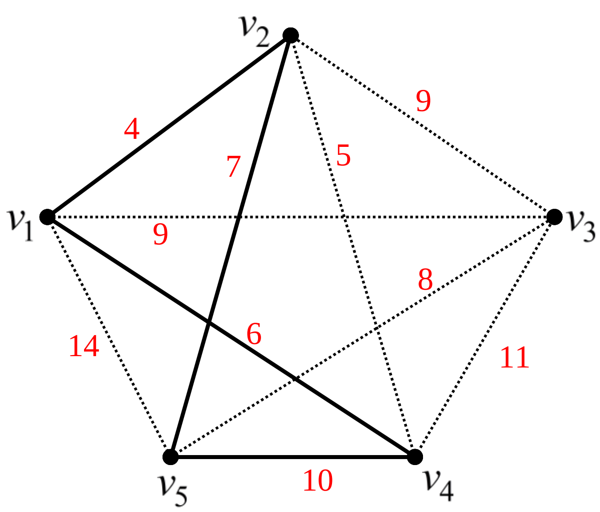
У вершины v_2 степень 3, значит одно из ребер (v_2,v_1) или (v_2,v_4) нужно исключить. Определим какое:

-(v_2,v_1): -4+14=10,

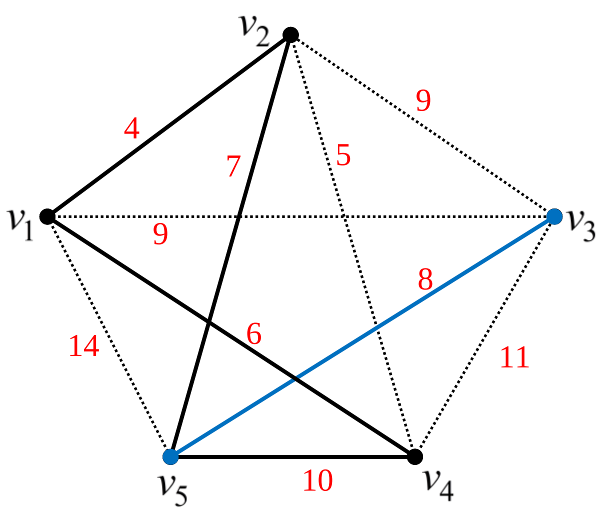
-(v_2, v_4): -5+10=5.

Это означает, что если мы убираем ребро (v_2, v_1), то из нашего цикла мы должны убрать вес этого ребра (-4) и тогда у нас получится незамкнутый цикл (висящие вершины v_1 и v_5), следовательно нужно добавить ребро (v_1, v_5) весом 14. Если же убираем ребро (v_2, v_4), то убираем его вес (-5) и добавляем ребро (v_4, v_5) весом 10.

Более эффективна вторая схема. Получим:



Не включена вершина v_3. Повторим шаг 2. Минимальный вес у ребра (v_3, v_5) - добавляем его.



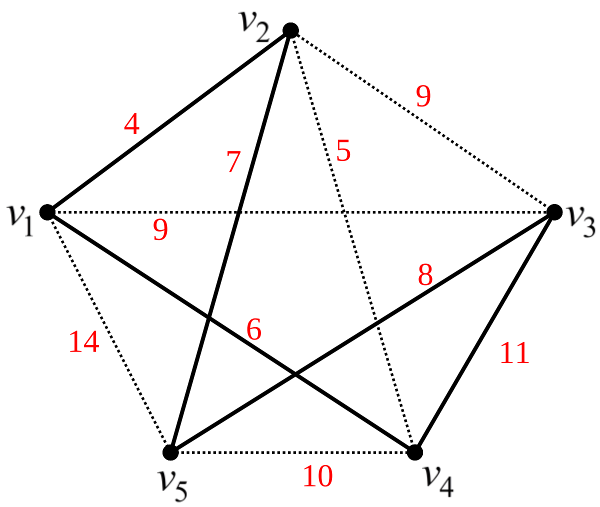
Степень вершины v_5 стала 3, значит нужно исключить либо (v_2,v_5), либо (v_4,v_5). Выполним проверку:

-(v_2,v_5): -7+9=2,

-(v_4,v_5): -10+11=1.

Это означает, что если мы убираем ребро (v_2,v_5), то из нашего цикла мы должны убрать вес этого ребра (-7) и тогда у нас получится незамкнутый цикл (висящие вершины v_2 и v_3), следовательно нужно добавить ребро (v_2,v_3) весом 9. Если же убираем ребро (v_4,v_5), то убираем его вес (-10) и добавляем ребро (v_3,v_4) весом 11.

Вторая схема эффективнее. Выберем ее получим:



Все вершины включены в цикл. Это ответ!

Задание 20.

Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

а) нарисовать граф;

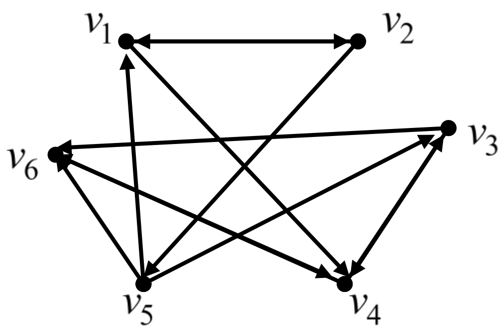
б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число

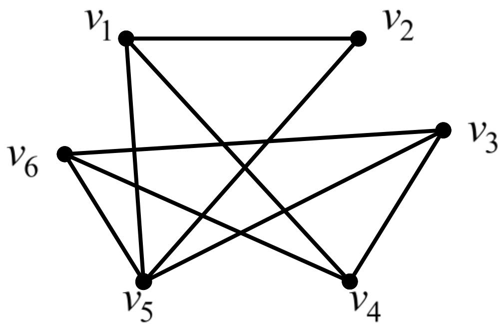
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0

Решение:

а) Нарисуем граф:



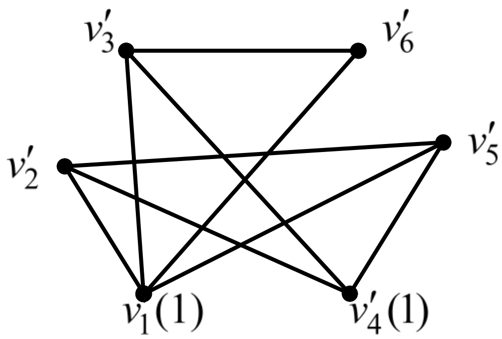
б) Заменим все дуги ребрами. Получим:



В полученном графе степень вершины v_1 - три, поэтому эйлерового цикла нет. Проверим, есть ли эйлерова цепь (может быть максимум две вершины нечетной степени). Это условие не выполняется, т.к. нечетные степени у вершин с номерами 1, 3, 4, 6, следовательно и эйлеровой цепи нет.

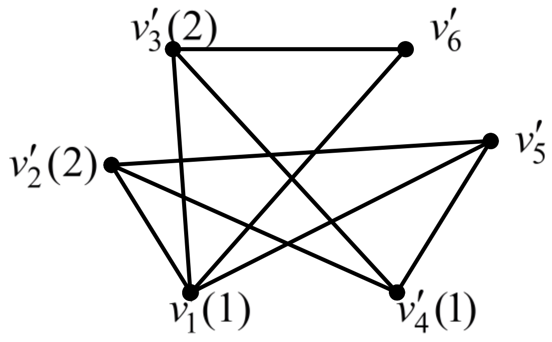
Проведем раскраску графа.

Переупорядочим вершины в невозрастающем порядке по локальной степени вершины. Получим:

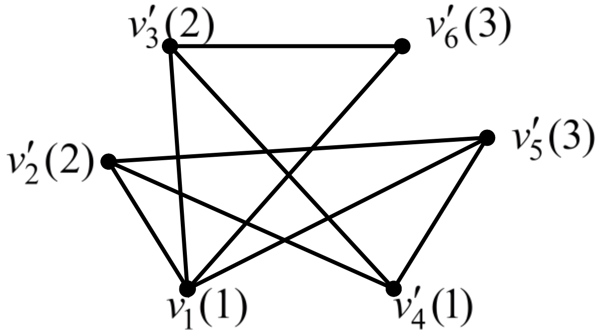


Берем первую вершину (с самой большой локальной степенью вершины) – это v_1'. Ее покрасим в цвет 1. В этот же цвет покрасим и все вершины, которые не являются смежными с первой вершиной, а также между собой (это только вершина v_4'). Эти вершины уберем из рассмотрения.

Повторяем предыдущий шаг для нового списка вершин. Берем первую вершину из не рассмотренных (с самой большой локальной степенью вершины) – это v_2'. Ее покрасим в цвет 2. В этот же цвет покрасим и все вершины, которые не являются смежными с этой вершиной, а также между собой - это только вершина v_3' (или вместо нее можно взять v_6'). Эти вершины уберем из рассмотрения.



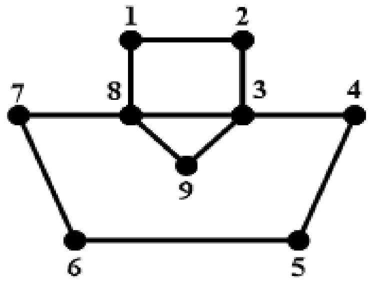
Еще раз повторяем: берем первую вершину из не рассмотренных – это v_5'. Ее покрасим в цвет 3. В этот же цвет покрасим и v_6' (поскольку эти вершины несмежные). Раскраска завершена:



Хроматическое число $\chi(G) = 3$, поскольку использовались только три цвета.

Задание 21.

Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



Решение:

Степени всех вершин графа четные, значит эйлеров цикл есть.

Начнем строить цикл с любой вершины, например построим: 1-2-3-9-8-1. Циклом охвачены не все ребра. Найдем вершину, уже включенную в наш цикл и которая также инцидентна ребрам, не включенным в цикл (например вершина 3). Из этой вершины построим цикл по ребрам, не вошедшим в цикл (3-4-5-6-7-8-3). А теперь объединим данные циклы «встроив» второй цикл в «вершину» 3 первого: 1-2-(3-4-5-6-7-8-3)-9-8-1. Получим: 1-2-3-4-5-6-7-8-3-9-8-1.

Задание 22.

При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C=\begin{pmatrix}19 & 11 & 12 & 14\\ 4 & 15 & 5 & 11\\ 6 & 5 & 3 & 8\\ 15 & 4 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

Поскольку решается задача на максимум, то нам потребуется сделать один дополнительный шаг: найдем максимальный элемент – 9 и отнимем каждый элемент от него. Получим:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 8 & 7 & 5\\ 15 & 4 & 14 & 8\\ 13 & 14 & 16 & 11\\ 4 & 15 & 13 & 19\end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению задачи на минимум.

Теперь проведем редукцию по строкам (найдем в каждой строке наименьший элемент и вычтем его из всех элементов данной строки):

$$C=\begin{pmatrix}0 & 8 & 7 & 5\\ 11 & 0 & 10 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 11 & 9 & 15\end{pmatrix}.$$

Теперь проведем редукцию по столбцам:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 8 & 2 & 5\\ 11 & 0 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 4 & 15\end{pmatrix}.$$

Цель редукции по строка м столбцам – сделать хотя бы один ноль в каждой строке и каждом столбце.

Теперь нам нужно выбрать в каждой строке или каждом столбце ровно один ноль. Но здесь это сделать не возможно, т.к., например в последней строке можно выбрать только один ноль (в первом столбце), но он блокирует ноль в первой строке, а больше нулей в ней нет (аналогичная ситуация, например и с нулями в третьей строке).

Поскольку нули выбрать не получается нам нужно вычеркнуть **все** нули **минимальным** (это важно!) количеством горизонтальных и/или горизонтальных линий:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Среди всех невычеркнутых элементов находим минимальный. Отнимаем его от всех невычеркнутых элементов и прибавляем в местах пересечения линий, те элементы, через которые проходит только одна линия не трогаем. Получим:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Теперь смотрим, можно ли здесь выбрать нули (в каждой строке или каждом столбце ровно один ноль). Такое возможно:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \boxed{0} & 3 \\ 11 & \boxed{0} & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 11 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Тогда ответ:

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 11 & \boxed{12} & 14 \\ 4 & \boxed{15} & 5 & 11 \\ 6 & 5 & 3 & \boxed{8} \\ \boxed{15} & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 23.

а) *Закодировать по Фано сообщения, имеющие следующие вероятности:*

символ	1	2	3	4	5	6	7
вероятность	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Проверим выполнимость необходимого условия:

0,4 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,1+ 0,05 + 0,05 = 1.

Расположим элементы в порядке убывания вероятностей. Затем будем последовательно делить, не меняя порядка, все элементы на две группы, максимально близкие по суммарной вероятности (т.е. модуль разности сумм вероятностей первой и второй группы должен быть минимальных из всех возможных разбиений на группы). Для «верхней» группы будем ставить значение 0, «нижней» - 1:

<table>
<tr><th>Символ</th><th>Вероятность</th><th>Шаг 1</th><th>Шаг 2</th><th>Шаг 3</th><th>Шаг 4</th><th>Полученный код</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,4</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,2</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td></td><td>100</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,1</td><td>1</td><td></td><td>101</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,1</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>1100</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,1</td><td>1</td><td>1101</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,05</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,05</td><td>1</td><td>1111</td></tr>
</table>

Найдем стоимость кода (средняя длина кодового слова). Он является критерием степени оптимальности кодирования. Вычислим ее в нашем случае.

$$l = \sum_{i=1}^{7} l_i \cdot p_i = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot \left(0,1 \cdot 2 + 0,05 \cdot 2\right) = 2,5.$$

б) *Закодировать по Хаффману сообщения, имеющие следующие вероятности:*

символ	1	2	3	4	5	6	7
вероятность	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Решение.

сообщения	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4
3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	
4	0,1	0,1	0,1	0,2		
5	0,1	0,1	0,1			
6	0,05	0,1				
7	0,05					

Вторым шагом производим кодирование, «проходя» по таблице справа налево (обычно это проделывается в одной таблице):

	A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6 0
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4 00	0,4 1
3	0,1	0,1	0,2	0,2 000	0,2 01	
4	0,1	0,1	0,1 0010	0,2 001		
5	0,1	0,1 0000	0,1 0011			
6	0,05 00010	0,1 0001				
7	0,05 00011					

Найдем стоимость кода (средняя длина кодового слова). Он является критерием степени оптимальности кодирования.

$$l = \sum_{i=1}^{7} l_i \cdot p_i = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot (0,1 \cdot 3) + 5 \cdot (0,05 \cdot 2) = 2,5.$$

в) *Для заданного сообщения X = 0110101 построить код Хэмминга, внести одиночную ошибку и произвести декодирование.*

Решение:

Построим сначала вспомогательную таблицу:

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	…

При необходимости ее можно «тянуть» вниз и вправо до бесконечности.

Теперь убираем из рассмотрения первый столбец (он соответствует нулевой позиции, в которой не может быть никаких битов), а те столбцы, которым соответствует **первое** появление единицы в каждой строке выделим – эти биты будут проверочными:

0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

Теперь в верхней строке во все не выделенные ячейки внесем наше число (последовательно, слева направо):*0110101*

			0		1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

У нас остались незанятые ячейки – они лишние. Можно убрать их из рассмотрения.

Теперь посчитаем проверочные биты. Для этого выбираем вспомогательную строку и везде, где в этой строке есть единица мы смотрим на строку значений и считаем кол-во единиц на указанных позициях (фактически мы находим конъюнкцию строки значений и соотвествующей вспомогательной строки). Для первой вспомогательной строки будет:

			0		1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…

0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

Число единиц 3 – нечетно, значит проверочный бит ставим 1 (незаполненная ячейка):

	1		0		1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

Теперь для второй вспомогательной строки:

	1		0		1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

Кол-во единиц в заданных позициях в первой строке (строке значений) – 2 – четное, значит проверочный бит 0:

	1	0	0		1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

Аналогично для третьей вспомогательной строки:

	1	0	0	0	1	1	0		1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

И для четвертой:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1			
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1	1	…
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	…

В итоге получили код:

10001100101

Пусть при передаче сообщения $X^{/}$ произошла ошибка замещения в 7–м разряде, т.е. получено сообщение $X^{//}$ = 10001110101. Докажем это, для этого вычислим также по таблице, но при этом учитываем контрольные значения (т.е. тоже считаем их). По первой вспомогательной строке получим:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1

$\beta_1 = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$

По второй:

	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	**1**	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1

$\beta_2 = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 1$

По третьей и четвертой:

$\beta_3 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$

$\beta_4 = 0 + 1 + 0 + 1 = 0.$

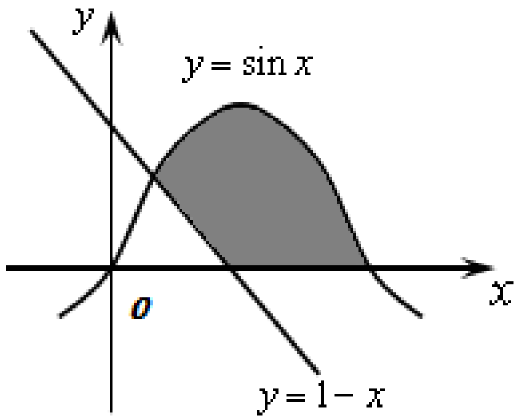
Запишем полученные значения в обратном порядке. Получим двоичное число. Переведем его в десятичную систему. Разряд, в котором произошла ошибка, равен $S = 0111_2 = 7$.

Задания расчетно-графической работы

Вариант 1

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: $(A\backslash B) \cap (A\backslash C) = A \setminus (B\cup C)$.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A * B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x, y, z) = (x \to y) \to z, \quad g(x, y, z) = x \to (y \to z)$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=10011111.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10110011.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$(x+1)(y+1)z' \vee yz$$

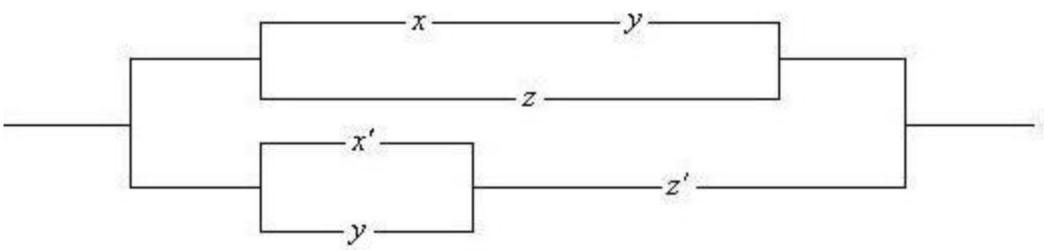
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz + x + z, \quad xyz + xy + xz + yz + y$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

$$(x \to y) \to x'(y \vee z)$$

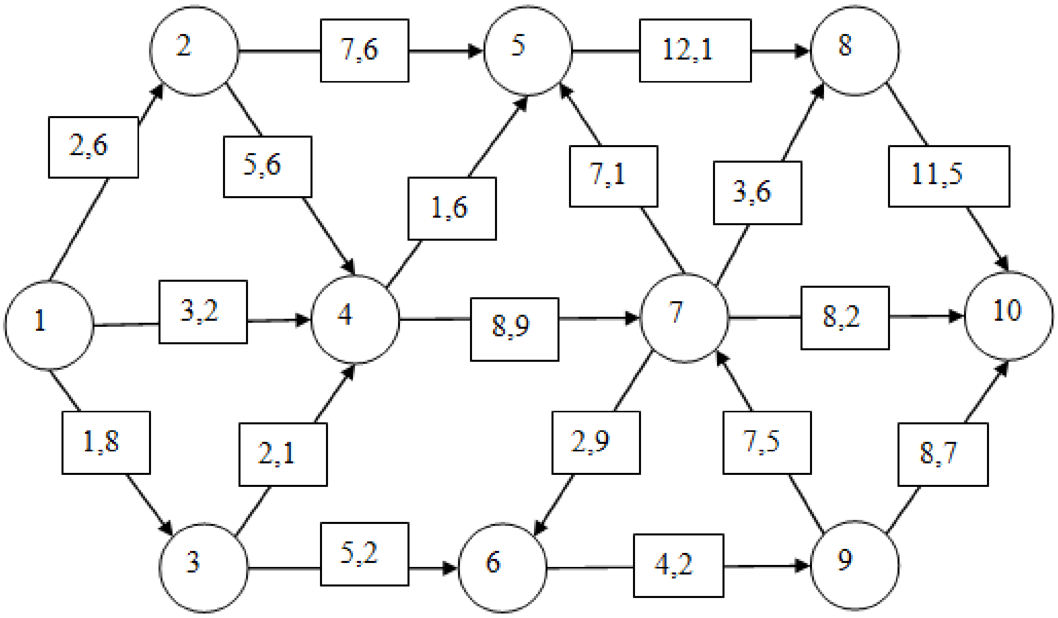
12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=10010110 и f_2=00110111. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Компания оптовой продажи продуктов питания имеет разветвленную дилерскую сеть. На рис. дилерская сеть представлена в виде ориентированного графа с 10 узлами. Вес дуги ориентированного графа –

расстояние в тысячах километрах. Определить кратчайшие пути между узлами 1 и всеми остальными узлами орграфа.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	11	∞	14	15	∞
x_2	∞	∞	13	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	∞	∞	13
x_4	∞	7	11	∞	9	∞
x_5	∞	11	10	∞	∞	14
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа *G*, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	10	∞	5	∞	∞	14
x_2	10	0	6	2	4	8	∞
x_3	∞	6	0	3	1	1	∞
x_4	5	2	3	0	6	∞	3
x_5	∞	4	1	6	0	5	∞
x_6	∞	8	1	∞	5	0	2
x_7	14	∞	∞	3	∞	2	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	19	25	11	2	35
2		0	26	58	21	43
3			0	39	22	3
4				0	38	45
5					0	2
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

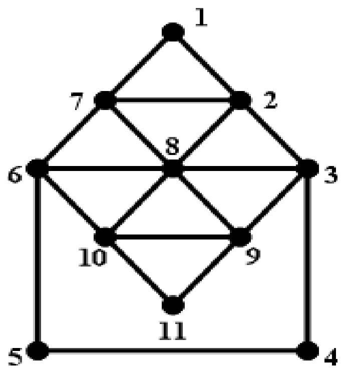
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

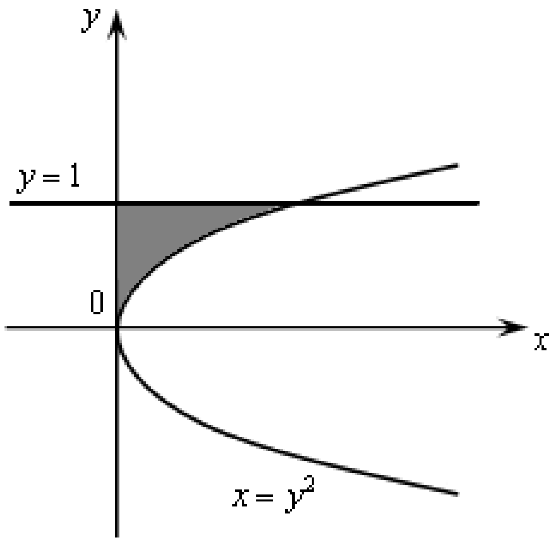
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,02	0,25	0,15	0,08	0,15	0,1	0,1

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11001010. Внести ошибку в 6 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 2

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A∩B) \ (A∩C) = (A∩B) \C.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x, y, z) = (x + z')'(y + x'z)', \quad g(x, y, z) = y + (z \to x)'$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=01011101.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10111011.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$xz \vee (x+z)y \vee x'z'$$

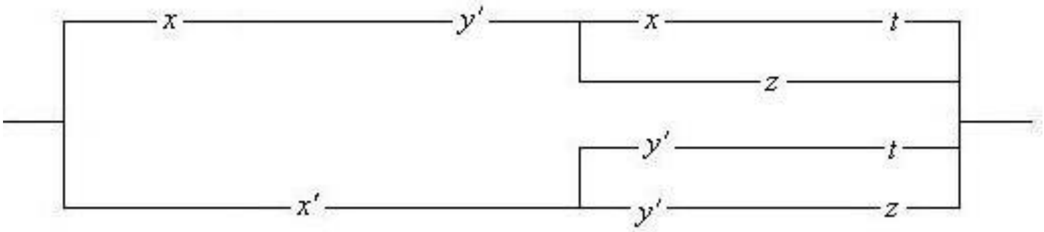
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz + xy + xz + y + 1, \quad xyz + yz + x + y$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

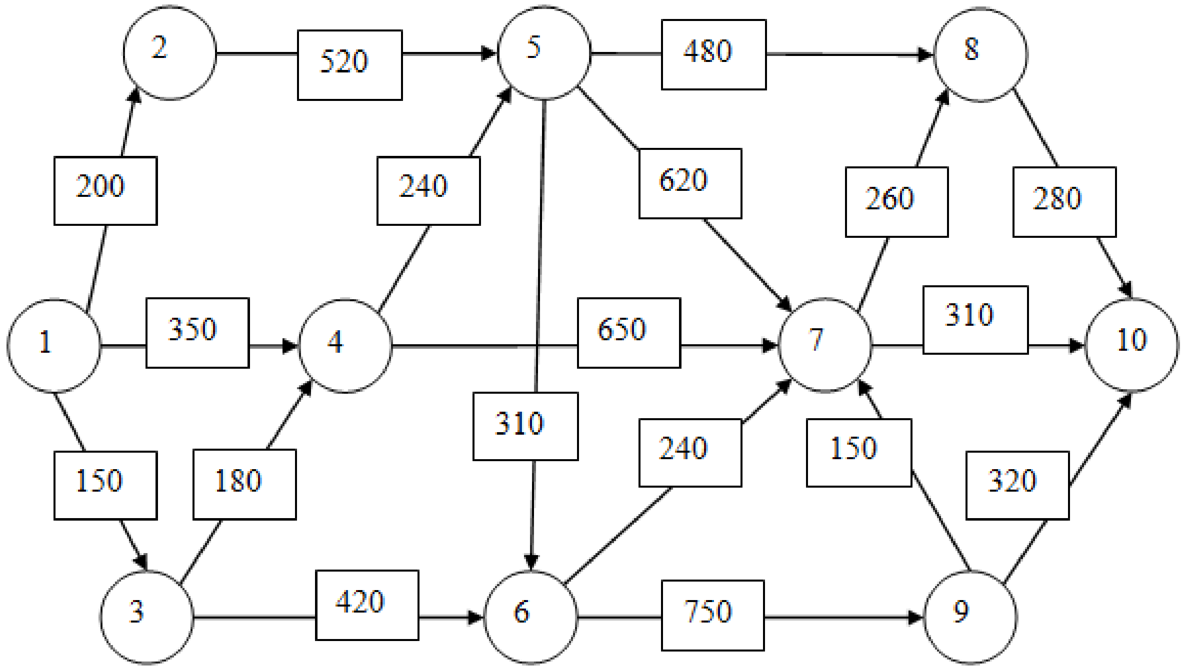
$$(x + y') \vee (x+z)(y' + z')$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=10110010 и f_2=00111111. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Логистическая компания проектирует (нефтепровод) газопровод между 10 населенными пунктами. Транспортная сеть показана на рис. Расстояния указаны в километрах. Определить кратчайший путь между узлами 1 и всеми остальными узлами.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	15	10	∞	∞	∞
x_2	∞	0	∞	∞	12	18
x_3	∞	10	0	9	12	19
x_4	∞	∞	∞	0	∞	13
x_5	3	∞	∞	11	0	14
x_6	∞	∞	4	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_1	0	3	8	12	7	∞	16
x_2	3	0	4	∞	9	∞	∞
x_3	8	4	0	5	7	11	∞
x_4	12	∞	5	0	10	6	4
x_5	7	9	7	10	0	5	∞
x_6	∞	∞	11	6	5	0	5
x_7	16	∞	∞	4	∞	5	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	39	45	2	51	33
2		0	20	33	40	35
3			0	55	22	56
4				0	18	43
5					0	25
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

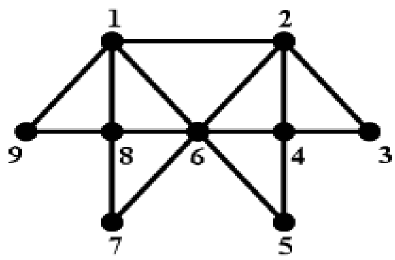
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

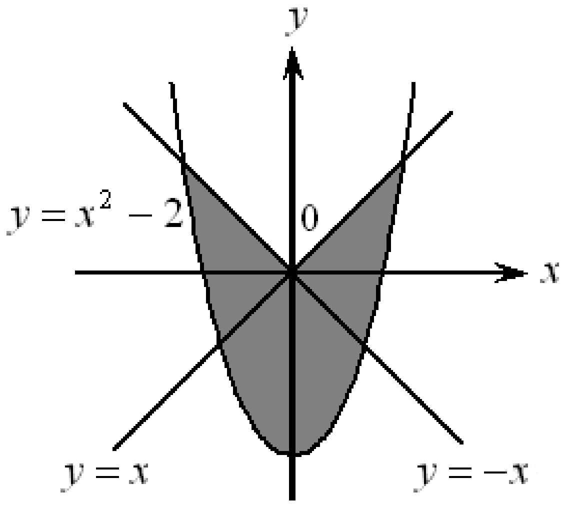
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,1	0,15	0,15	0,1	0,1	0,15	0,1

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11001011. Внести ошибку в 6 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 3

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\B) ∪ (C\B) = (A∪C) \ B.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z) = ((y' + x) + z(x + y'))', \quad g(x,y,z) = z' \to (y \to x)'$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=11011001.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=00111011.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'y'z \vee xz'$$

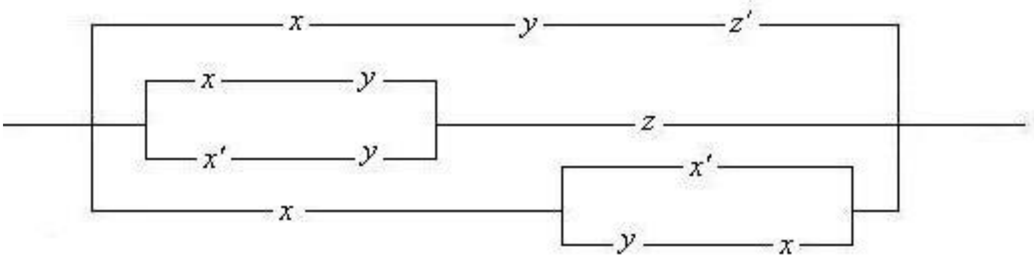
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xy + yz + x + 1, \quad xy + yz + z + 1$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

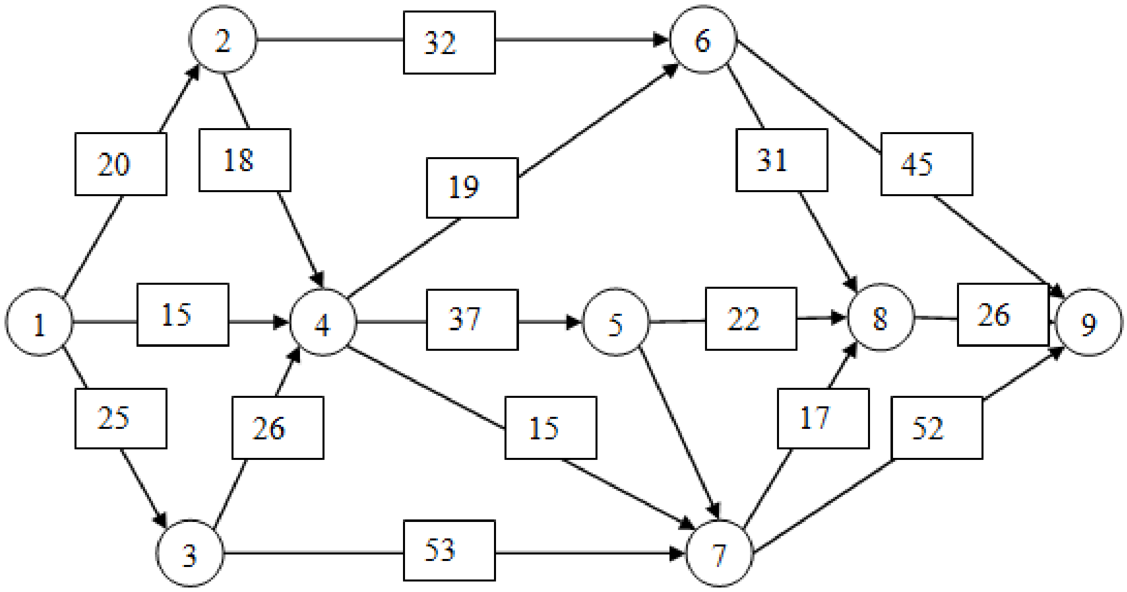
$$\left(x \mid \left(x \downarrow y'\right)\right) \mid \left(x' \downarrow \left(y \vee z'\right)\right)$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=10110110 и f_2=00010111. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Торговая компания имеет филиалы в 9 населённых пунктах. Сеть филиалов представлена в виде ориентированного графа. Вес дуги ориентированного графа расстояние в километрах. Определить кратчайшие пути между узлом 1 и всеми остальными узлами графа



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	12	10	∞	11	∞
x_2	∞	0	∞	10	7	15
x_3	5	8	0	7	10	∞
x_4	∞	∞	∞	0	∞	11
x_5	∞	∞	∞	6	0	12
x_6	∞	7	∞	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа *G*, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	∞	11	∞	8	∞	10

x_2	∞	0	∞	12	5	8	∞
x_3	11	∞	0	∞	6	4	3
x_4	∞	12	∞	0	5	∞	7
x_5	8	5	6	5	0	7	4
x_6	∞	8	4	∞	7	0	∞
x_7	10	∞	3	7	4	∞	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	56	35	48	29
2		0	46	46	55	26
3			0	32	13	42
4				0	17	7
5					0	47
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

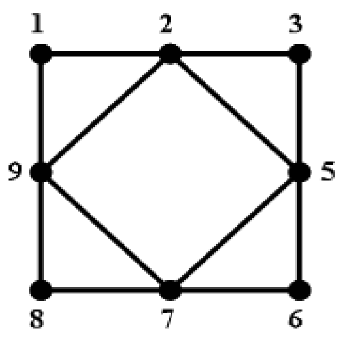
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

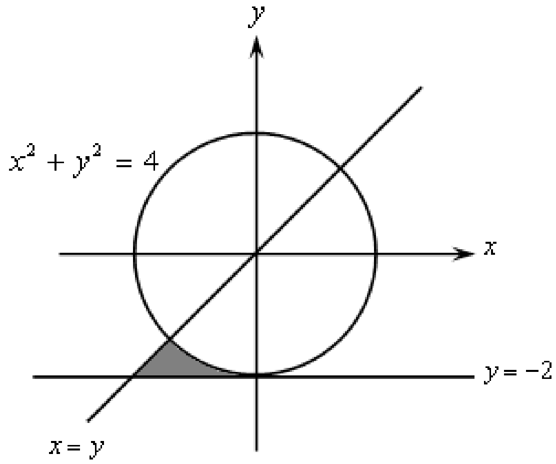
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,05	0,15	0,15	0,1	0,1	0,15	0,15

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11001110. Внести ошибку в 5 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 4

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\C) \ (B\C) = (A\B)\C.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A * B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z) = ((x \vee y')z) \vee (xz') \vee (z(y \vee z')), \quad g(x,y,z) = x \vee z$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=01011101.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10110000.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'z' \vee (x'y \vee xy')z$$

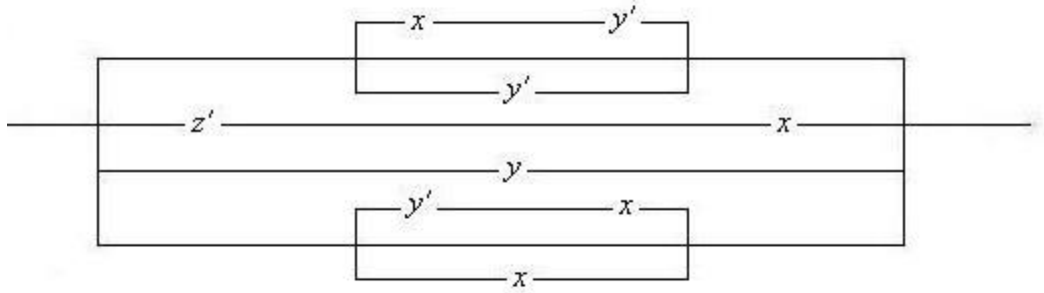
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz + x + 1, \quad xyz + xy + xz + yz + y + z$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

$$(z \downarrow xy)((x \vee z') \downarrow yz)$$

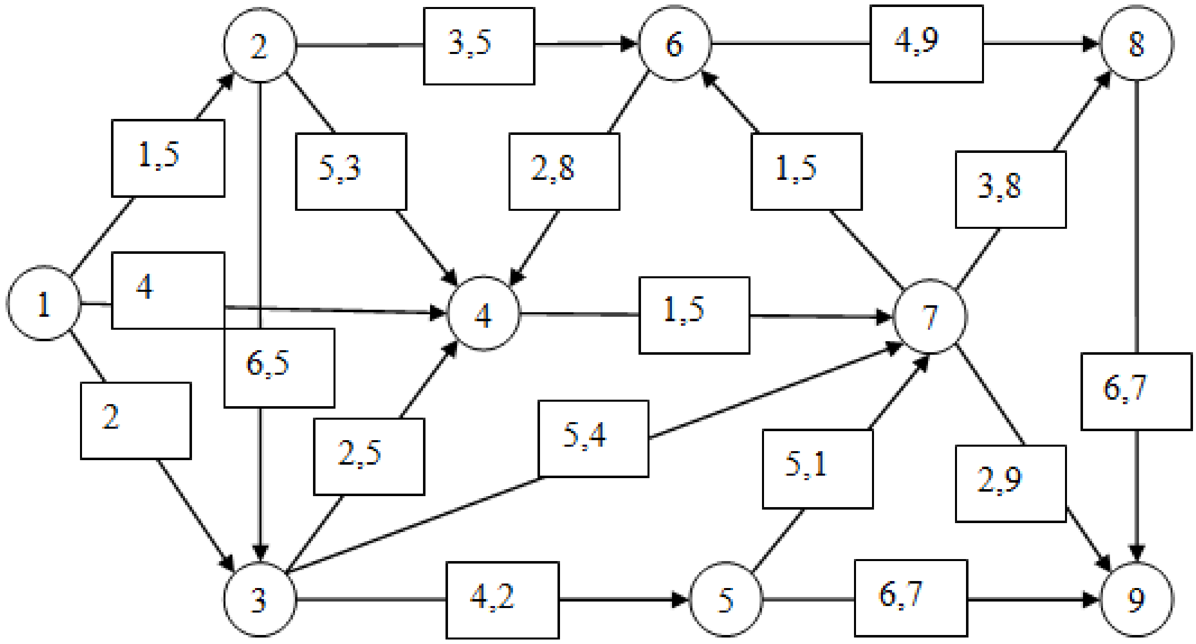
12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=00010111 и f_2=10110100. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Железнодорожная компания выполняет перевозку грузов в 9 городов страны. Транспортная сеть маршрутов перевозок грузов представлена на рис. в виде ориентированного графа. Расстояния указаны в тысячах

километров. Определить кратчайшие пути между узлом 1 и всеми остальными узлами графа.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	4	8	∞	∞	∞
x_2	∞	0	∞	3	∞	10
x_3	∞	3	0	4	3	∞
x_4	9	∞	∞	0	∞	4
x_5	∞	2	∞	5	0	7
x_6	∞	∞	8	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	5	4	11	∞	6	∞
x_2	5	0	8	9	∞	9	∞
x_3	4	8	0	∞	5	∞	7
x_4	11	9	∞	0	∞	5	3
x_5	∞	∞	5	∞	0	7	8
x_6	6	9	∞	5	7	0	6
x_7	∞	∞	7	3	8	6	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	14	40	33	16	51
2		0	34	4	11	24
3			0	24	38	52
4				0	9	31
5					0	30
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

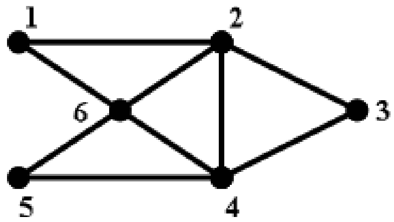
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$
\begin{matrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{matrix}
$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

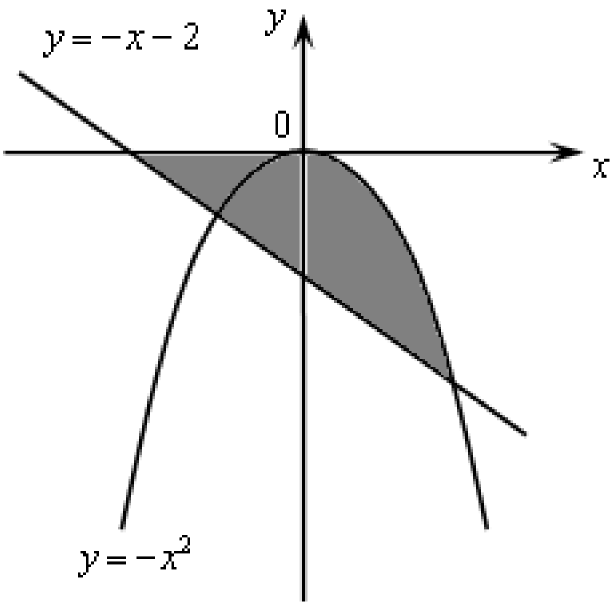
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,1	0,1	0,2	0,1	0,01	0,15	0,19

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11101010. Внести ошибку в 4 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 5

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: $(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap C)=(A\bigcap\overline{C})\bigcup(\overline{A}\bigcap B)$.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0=(0,0)$, $x_1=(1,0)$,$x_2=(0,1)$, $x_3=(1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z)=(x'\vee y)(y\vee z),\quad g(x,y,z)=(x\vee y\vee z)(x'\vee y\vee z)(x'\vee y\vee z')$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=00111110.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10010111.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$(x'\vee y\vee z)(x\vee y\vee z')(x'\vee y'\vee z)$$

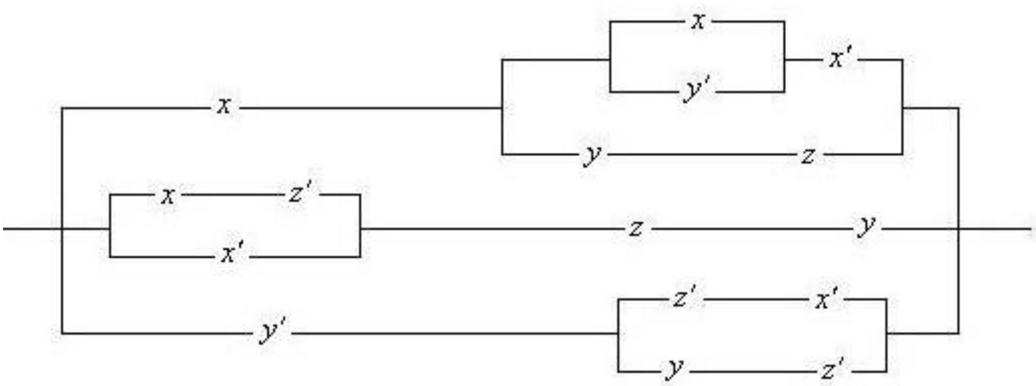
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xy+x+y+z+1,\quad xy+z$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

$$xy\,|\,(x'\to x(y\vee z))$$

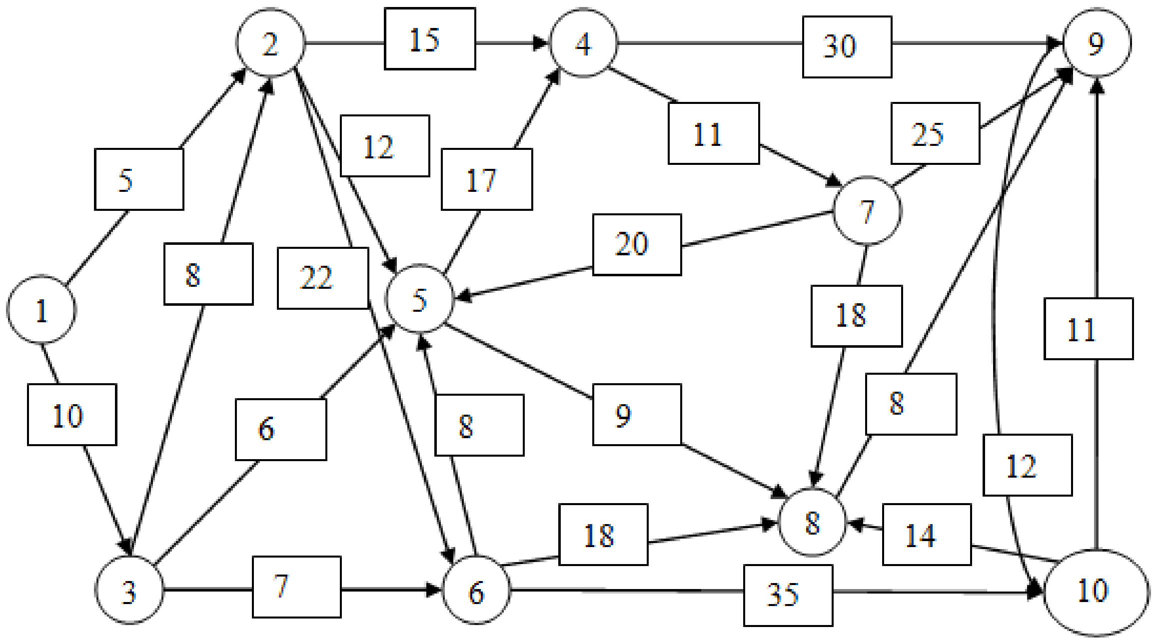
12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=10010110 и f_2=01110011. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Компания по перевозке пассажиров осуществляет поездки в 10 населенных пунктов района. На рис. представлены маршруты перевозки

пассажиров с указанием расстояния в километрах. Определить кратчайшие пути между узлом 1 и всеми остальными узлами ориентированного графа.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	11	14	∞	∞	∞
x_2	∞	0	8	10	15	∞
x_3	∞	∞	0	11	16	20
x_4	10	∞	∞	0	∞	12
x_5	∞	7	∞	11	0	14
x_6	∞	∞	6	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	6	5	∞	10	9	∞
x_2	6	0	4	5	3	∞	6
x_3	5	4	0	6	7	∞	8
x_4	∞	5	6	0	3	6	∞
x_5	10	3	7	3	0	8	7
x_6	9	∞	∞	6	8	0	5
x_7	∞	6	8	∞	7	5	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	57	27	17	1	49
2		0	17	46	13	48
3			0	23	34	50
4				0	44	14
5					0	5
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

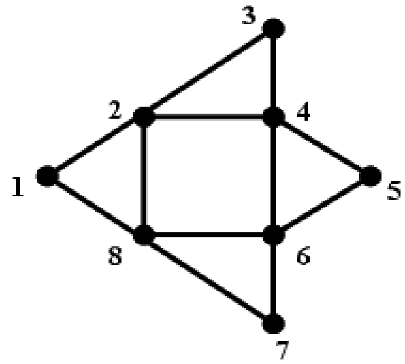
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

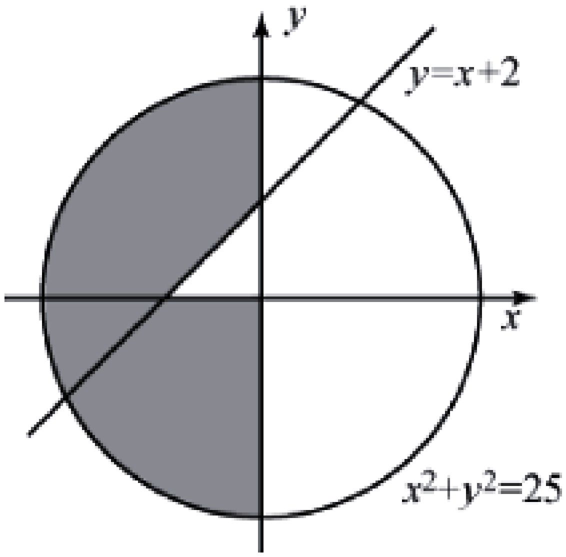
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,1	0,15	0,15	0,1	0,01	0,15	0,19

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11000010. Внести ошибку в 7 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 6

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A * B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X, *)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z)=x'y'z'\vee x'yz\vee xyz\vee xy'z,\quad g(x,y,z)=(x\to yz)(y\leftrightarrow z)\vee(y\to xz)(x\leftrightarrow z)$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=11011101.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=00110111.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x(y\to z)\vee(x'y\vee xy')(z+1)$$

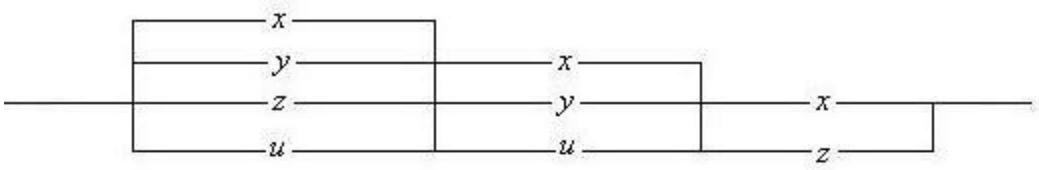
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz+xy+x+y,\quad xyz+xz+yz+x+y+z+1$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

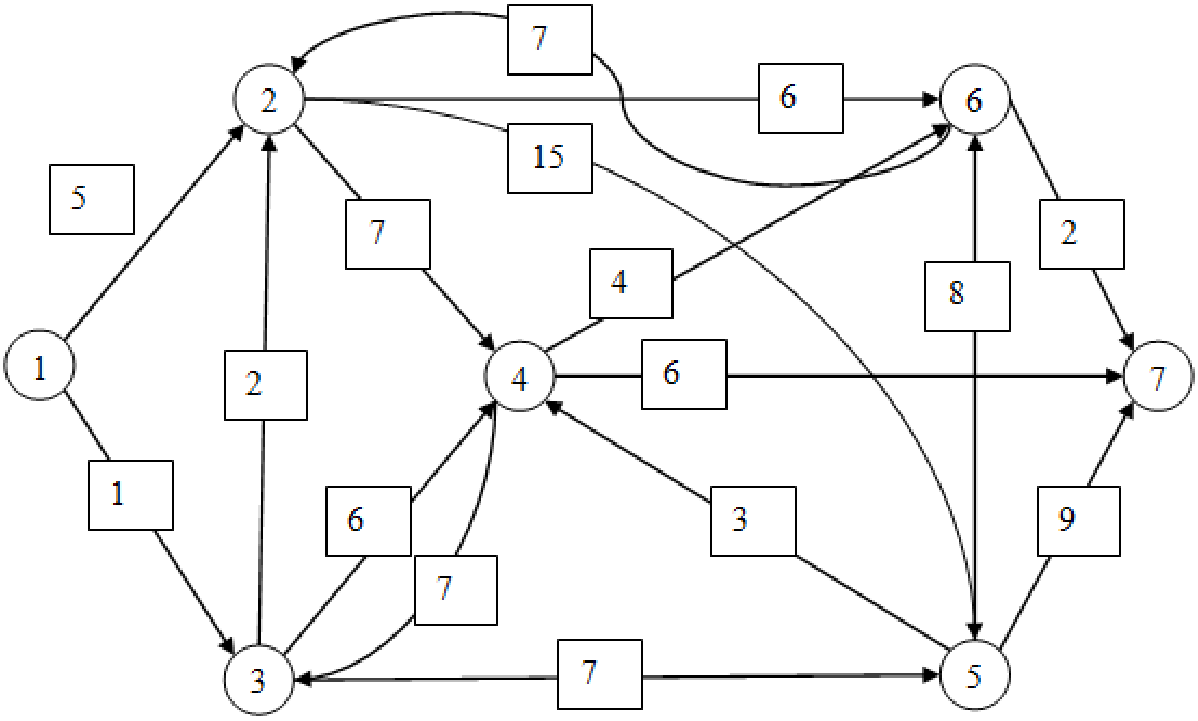
$$(x'+y')(x\leftrightarrow y)$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=00001111 и f_2=10101010. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Авиакомпания осуществляет перевозку грузов. На рис. представлена транспортная сеть перевозок с указанием расстояний в тысячах километров. Определить кратчайшие расстояния между узлом 1 и всеми остальными узлами транспортной сети.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	8	10	∞	∞	∞
x_2	∞	0	10	9	12	∞
x_3	∞	∞	0	10	12	7
x_4	8	∞	∞	0	9	13
x_5	∞	5	∞	∞	0	11
x_6	∞	∞	7	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	5	8	∞	∞	8	∞
x_2	5	0	7	10	∞	8	∞
x_3	8	7	0	4	7	7	∞
x_4	∞	10	4	0	6	9	4
x_5	∞	∞	7	6	0	3	5
x_6	8	8	7	9	3	0	6
x_7	∞	∞	∞	4	5	6	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	15	43	38	10	45
2		0	18	6	49	40
3			0	19	1	48
4				0	20	21
5					0	15
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

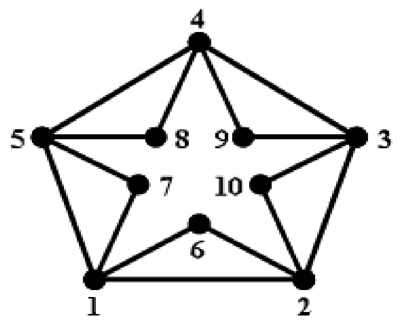
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

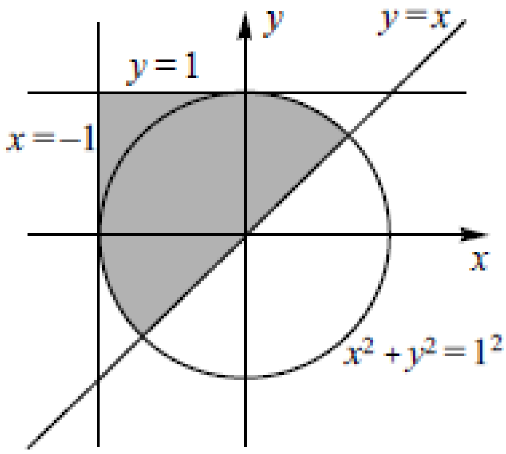
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,25	0,07	0,15	0,13	0,05	0,08	0,17	0,1

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11001010. Внести ошибку в 6 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 7

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\B) ∪ (A∩C) = A\(B\C).

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z) = xy' \vee x'y \vee x'z', \quad g(x,y,z) = (x' \vee y')(x \vee y \vee z')$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=10111010.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=01110010.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'y'z' \vee x'yz' \vee x'yz \vee xy'z \vee xyz'$$

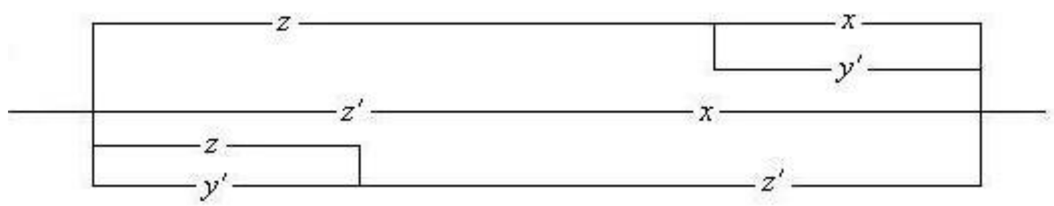
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xy + yz + x + y + z + 1, \quad xy + yz + y + 1$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

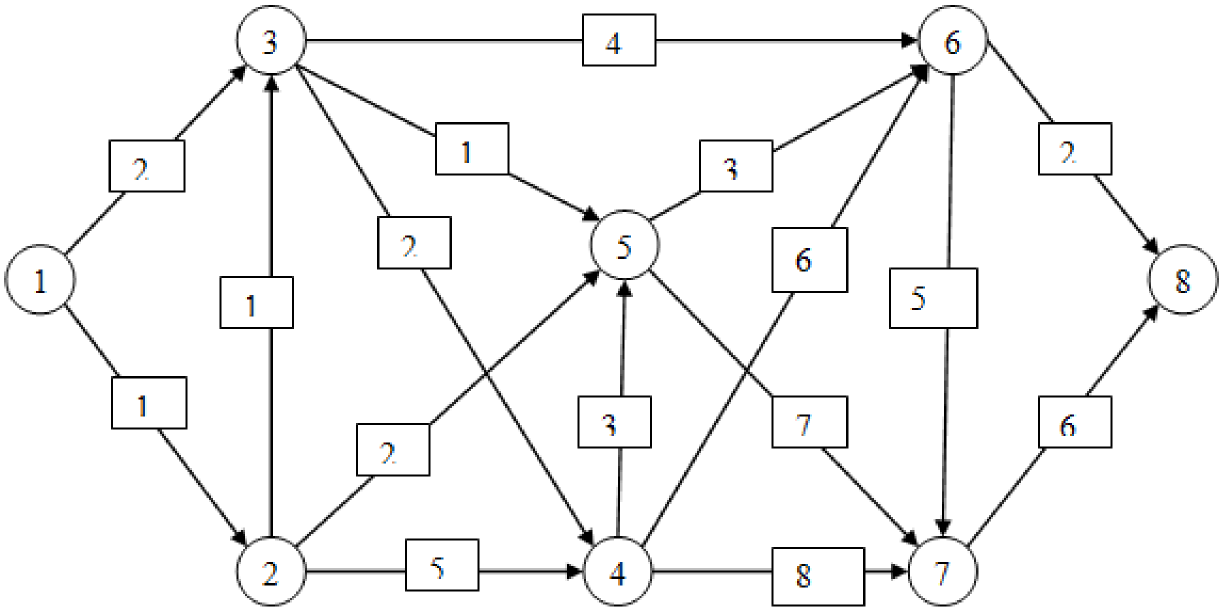
$$(x \to (y \to z)) \to (y \to x')$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=10110110 и f_2=00110011. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Торговая компания имеет филиалы в 8 точках города. Транспортная сеть с указанием расстояний в километрах представлена на рис. Определить кратчайшие пути между узлом 1 и всеми остальными узлами транспортной сети.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	4	9	8	∞	∞
x_2	∞	0	2	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	0	∞	∞	3
x_4	8	2	4	0	6	∞
x_5	∞	2	∞	∞	0	3
x_6	∞	∞	∞	9	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	8	9	∞	∞	∞	6

x_2	8	0	7	6	9	∞	∞
x_3	9	7	0	6	10	5	∞
x_4	∞	6	6	0	8	7	∞
x_5	∞	9	10	8	0	4	5
x_6	∞	∞	5	7	4	0	6
x_7	6	∞	∞	∞	5	6	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	58	56	13	21	54
2		0	58	43	56	14
3			0	38	7	22
4				0	6	60
5					0	17
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

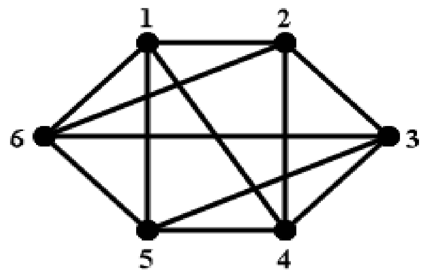
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

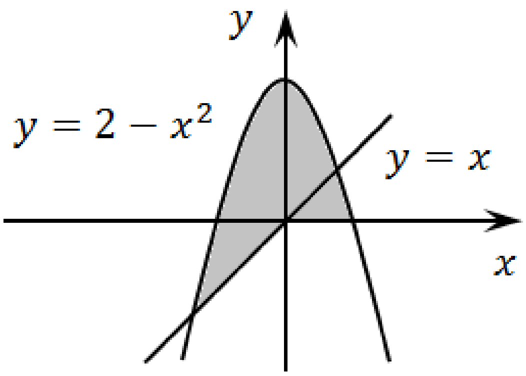
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,1	0,15	0,14	0,11	0,08	0,15	0,12

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11011010. Внести ошибку в 7 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 8

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: A \ (B∪C) = (A\B) \ C.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x, y, z) = ((x + y) \to (x \vee y))((x' \to y) \to (x + y)), \quad g(x, y, z) = x \mid y$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=11011100.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=00011011.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$(x \to (y \to z'))(yz' \to x)$$

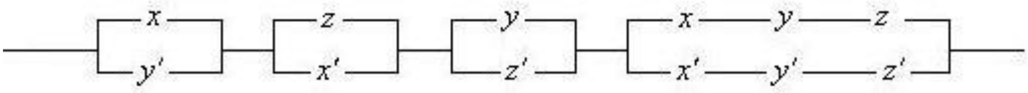
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz + xy + z, \quad xyz + xz + yz$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

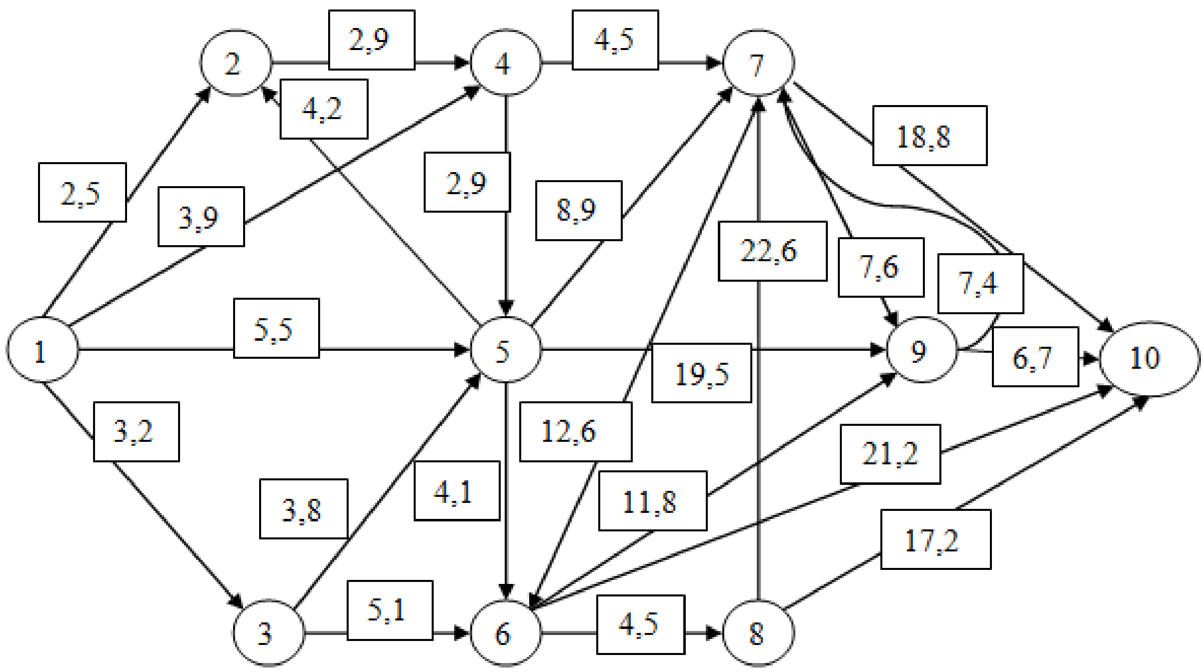
$$(x \mid y') \to ((x \vee y) \mid (x \vee z))$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=00110010 и f_2=10110110. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Частное охранное предприятие осуществляет доставку денежных сумм из магазинов в банк. Транспортная сеть представлена в виде ориентированного графа с 10 узлами. Вес дуги – расстояние в километрах. Определить кратчайшие пути из узла 1 ко всем узлам транспортной сети.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	10	12	∞	∞	∞
x_2	∞	0	11	9	∞	19
x_3	∞	∞	0	∞	10	∞
x_4	∞	∞	13	0	11	10
x_5	11	∞	∞	∞	0	6
x_6	∞	∞	7	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_1	0	8	4	9	∞	6	∞
x_2	8	0	11	6	10	∞	8
x_3	4	11	0	7	∞	9	∞
x_4	9	6	7	0	5	6	∞
x_5	∞	10	∞	5	0	7	6
x_6	6	∞	9	6	7	0	8
x_7	∞	8	∞	∞	6	8	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	50	33	18	5	44
2		0	19	24	20	32
3			0	42	14	25
4				0	48	5
5					0	1
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

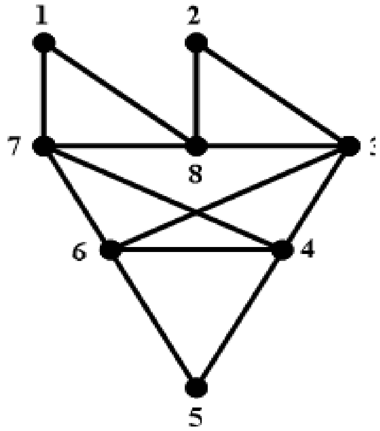
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

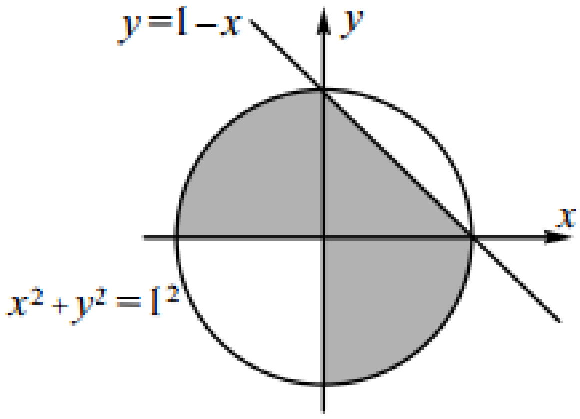
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,02	0,25	0,04	0,01	0,4	0,1	0,03	0,15

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 10001010. Внести ошибку в 6 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 9

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A∪B) \ (A∩C) = (B\A) ∪ (A\C).

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0=(0,0)$, $x_1=(1,0)$,$x_2=(0,1)$, $x_3=(1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z)=((x\vee y)\vee z)\to((x\vee y)(x\vee z)),\quad g(x,y,z)=x\vee(y\leftrightarrow z)$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=11111010.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=00111001.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'(yz' \vee y'z)$$

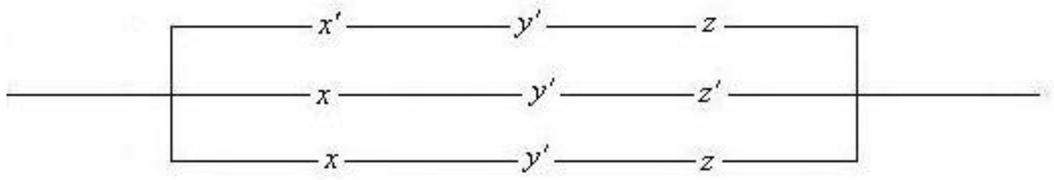
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xy + xz + x + y + z, \quad xy + xz + x$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

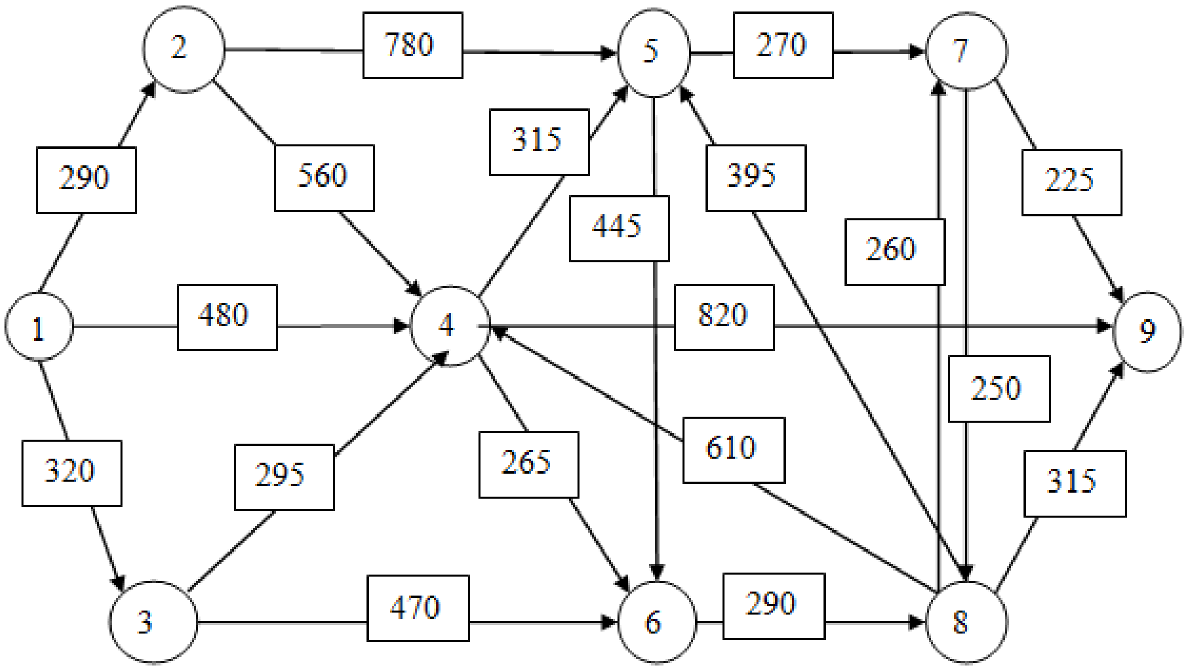
$$(xy + z) \to x'z$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=01010110 и f_2=10110111. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Транспортная компания осуществляет перевозку автомобилей. На рис. представлена транспортная сеть в виде ориентированного графа с 9 узлами. Вес дуги – расстояние в километрах. Определить кратчайшее расстояние между узлом 1 и всеми остальными узлами транспортной сети.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	7	9	∞	11	∞
x_2	∞	0	∞	6	∞	13
x_3	∞	6	0	5	6	∞
x_4	8	∞	∞	0	∞	7
x_5	∞	4	∞	6	0	8
x_6	∞	9	∞	4	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

x_1	0	3	8	∞	3	6	∞
x_2	3	0	7	6	∞	∞	4
x_3	8	7	0	4	6	∞	10
x_4	∞	6	4	0	5	7	∞
x_5	3	∞	6	5	0	8	9
x_6	6	∞	∞	7	8	0	∞
x_7	∞	4	10	∞	9	∞	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	20	28	12	39	32
2		0	15	9	17	27
3			0	45	29	47
4				0	15	1
5					0	34
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

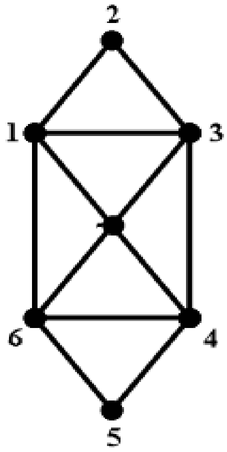
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

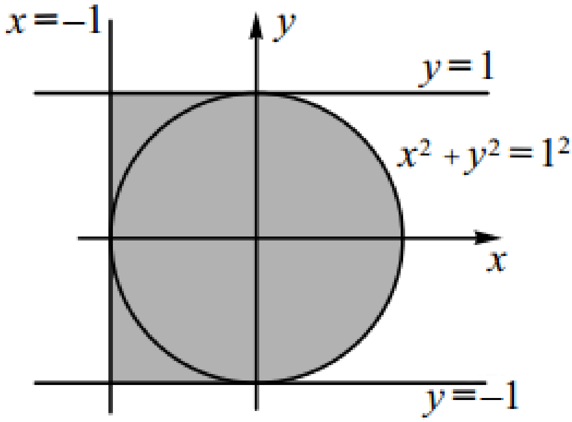
S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,15	0,1	0,15	0,2	0,05	0,1	0,18	0,07

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11101010. Внести ошибку в 5 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Вариант 0

1. Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D (Приложение 1). Вычислить мощность множеств X и Y.

2. Задайте множество, указанное на рисунке с использованием характеристического свойства множества:



3. Проиллюстрировать равенство при помощи диаграмм Эйлера-Венна: (A\B) \ C = (A\C) \ B.

4. Отношение задано матрицей (Приложение 2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

5. На множестве упорядоченных пар $x_0=(0,0)$, $x_1=(1,0)$,$x_2=(0,1)$, $x_3=(1,1)$ задана бинарная мультипликативная операция. Произведение задано по правилу $A*B$, записанному в таблице (Приложение 3). Является ли полугруппой структура $(X,*)$, где $X=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

6. Построив соответствующую таблицу значений, выясните, равны ли следующие булевы функции

$$f(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz,\quad g(x,y,z)=(x+y)z\vee zy$$

7. Постройте минимальную ДНФ для функции тремя разными способами (графическим способом, картами Карно, методом Квайна): f=11010110.

8. Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=00001011.

9. Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$(x' \to y)(yz' \vee (y|z))$$

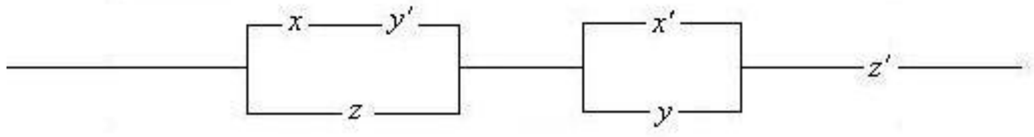
10. Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$xyz + yz + y + 1, \quad xyz + xy + xz + x + y + 1$$

11. Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

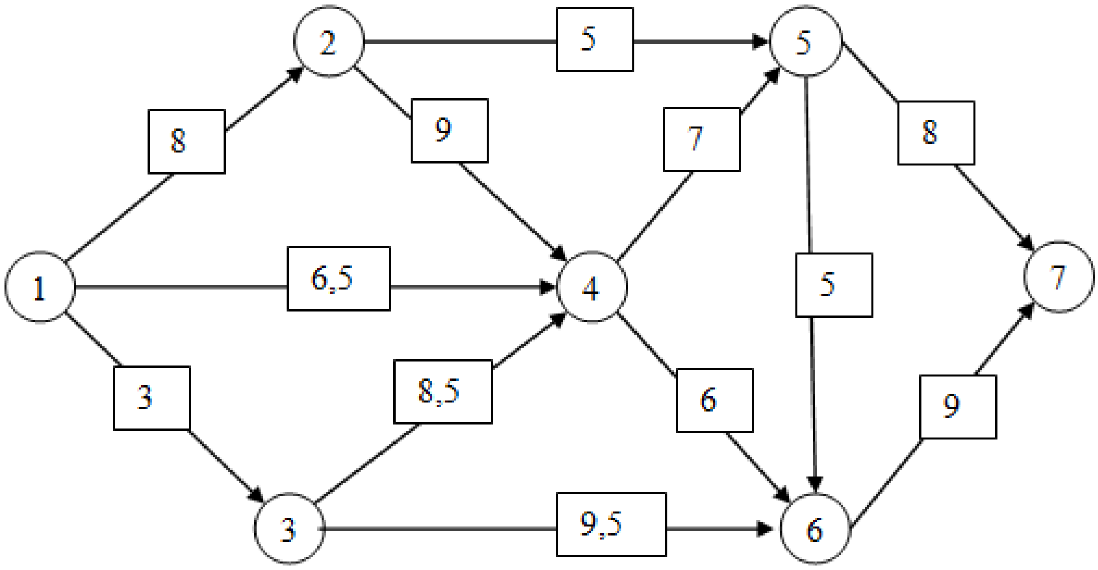
$$(xy \to x'y)(x \vee zy)$$

12. Упростите релейно-контактную схему:



13. Задана система булевых функций f_1=00111100 и f_2=10110111. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

14. Компания Bell Electric Company построила коммуникационную сеть между двумя приемно-передающими станциями 1 и 7. На рис. коммуникационная сеть представлена в виде ориентированного графа. Вес дуги – расстояние в километрах. Определить кратчайшее расстояние между узлом 1 и всеми остальными узлами коммуникационной сети.



15. По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути от вершины x_1 до каждой из вершин по алгоритму Дейкстры (в матричном виде):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	5	6	9	∞	∞
x_2	∞	0	∞	3	∞	14
x_3	∞	3	0	3	4	16
x_4	9	∞	∞	0	∞	4
x_5	∞	∞	∞	3	0	8
x_6	7	∞	5	∞	∞	0

16. Дан орграф. Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4 (Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 4»).

17. Дан взвешенный граф. Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Задание в соответствии с вариантом возьмите в «Приложение 5».

18. Для графа *G*, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	8	∞	10	13	∞	11

x_2	8	0	7	8	∞	15	∞
x_3	∞	7	0	∞	19	10	15
x_4	10	8	∞	0	9	∞	6
x_5	13	∞	19	9	0	8	∞
x_6	∞	15	10	∞	8	0	12
x_7	11	∞	15	6	∞	12	0

19. Найти гамильтонов цикл наименьшей длины (решить задачу коммивояжера):

	1	2	3	4	5	6
1	0	9	37	28	52	53
2		0	25	48	27	48
3			0	23	47	58
4				0	8	60
5					0	46
6						0

20. Орграф задан матрицей смежности. Необходимо:

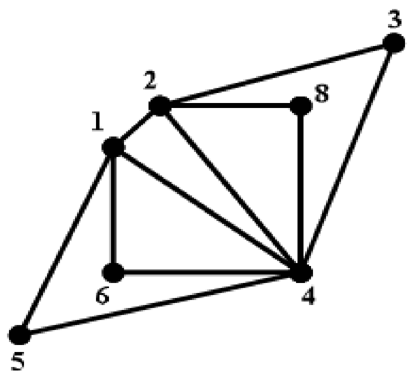
а) нарисовать граф;

б) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл);

в) провести раскраску графа и найти его хроматическое число.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

21. Для данного графа определить, есть ли в нем эйлеров цикл и, если есть, найти его.



22. При помощи венгерского алгоритма решите задачу на максимум для двудольного графа, заданного матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. а) Построить код Фано и Хаффмана для списка сообщений с заданным распределением частот. Определить стоимость кода.

S	T	U	V	W	X	Y	Z
0,17	0,08	0,15	0,15	0,04	0,16	0,15	0,1

б) Построить код Хэмминга для заданного сообщения 11001110. Внести ошибку в 6 разряд, и проведя декодирование, подтвердить место ошибки.

Приложения

Приложение 1

Вариант	Задание
1	A={ a,e,f,k,t}, B={ f,i,j,p,y}, C={ j,k,l,y}, D={i,j,s,t,u,y,z} $X=(A\cap B)\cup(D\cap C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
2	A={ b,h,m,o,r}, B={j,k,o,u,y}, C={g,h,j}, D={g,j,q} $X=(A\cap C)\cup(B\cap D),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
3	A={ c,m,n,o,q}, B={c,d,m,w}, C={m,n,q}, D={c,m,p}, $X=(A\cup B)\cap C,\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
4	A={ b,d,l,p}, B={b,d,e,l,p,x}, C={k,l,p,t}, D={d,k,o,p,q,u,v}, $X=(A\setminus B)\cap(D\cap C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
5	A={ c,e,h,n}, B={e,f,k,n,x}, C={b,c,h,p,r,s}, D={b,e,g}, $X=(A\setminus B)\cap(D\cap C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
6	A={a,b,f,g,i}, B={c,f,g,i,s,v}, C={a,g,h,i}, D={f,w,x}, $X=(A\cap B)\cup C,\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
7	A={b,f,g,m,o}, B={b,g,h,l,u}, C={e,f,m}, D={e,g,l,p,q,u,v}, $X=(A\setminus C)\cup(B\cap C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
8	A={b,c,h,i,j}, B={e,h,i,s,w}, C={a,b,j,k,l,m}, D={a,h,i,w,x}, $X=(A\cap C)\cup(D\setminus C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
9	A={a,e,f,i}, B={a,b,k,n}, C={e,f,n,o,w,x}, D={a,d,e,o,p,t,u}, $X=(A\cap C)\cap\overline{B},\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$
0	A={a,b,h,j,l}, B={b,c,h,l,r,v}, C={j,k,n,t,z}, D={b,i,k,v,w}, $X=(A\cap\overline{C})\cup(B\setminus C),\ \ Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$

Приложение 2

1
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

7
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

8
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

9
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

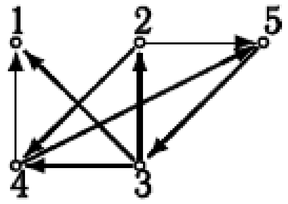
10
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Приложение 3

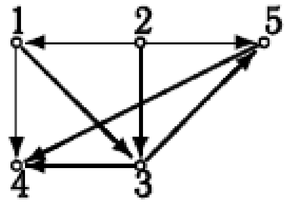
1	$A*B=(a_2b_1, a_1b_2)$	2	$A*B=(a_1b_2, a_2b_1)$
3	$A*B=(a_1b_2, a_2b_2)$	4	$A*B=(a_1b_1, a_2b_1)$
5	$A*B=(a_2b_1, a_2b_2)$	6	$A*B=(a_2b_2, a_1b_1)$
7	$A*B=(a_2b_2, a_1b_2)$	8	$A*B=(a_2b_1, a_1b_1)$
9	$A*B=(a_1b_1, a_2)$	0	$A*B=(a_1b_1, b_2)$

Приложение 4

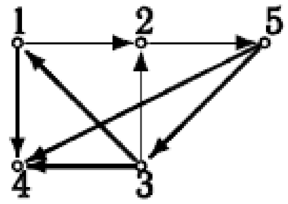
1



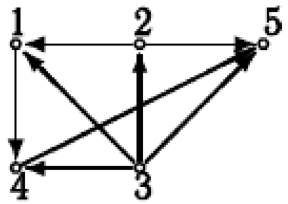
2



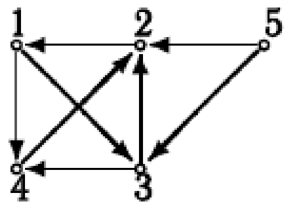
3



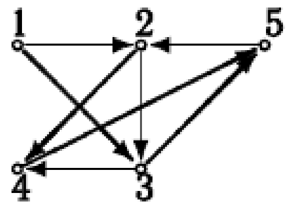
4



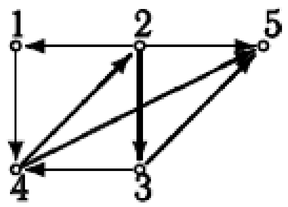
5



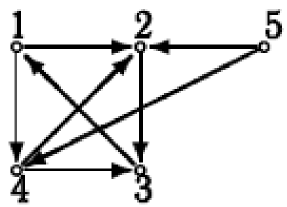
6



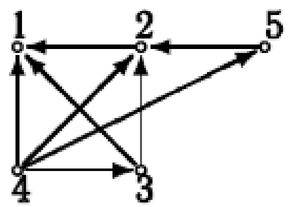
7



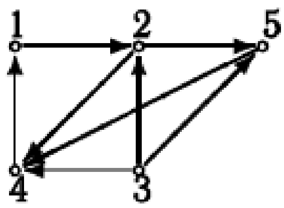
8



9

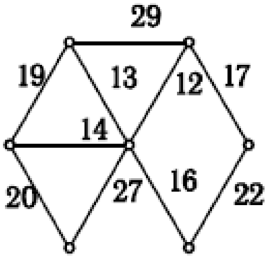


.0

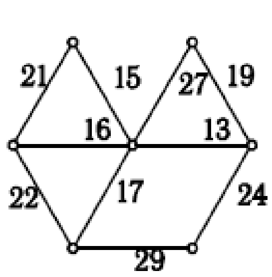


Приложение 5

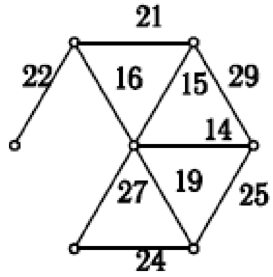
1



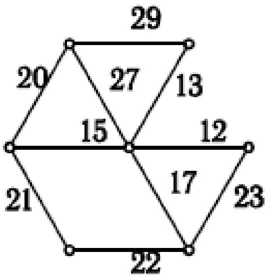
2



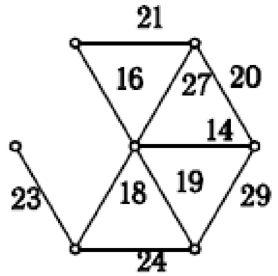
3



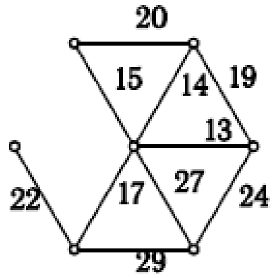
4



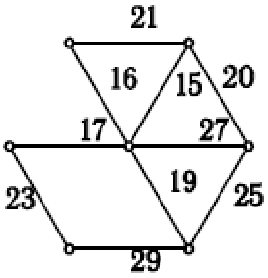
5



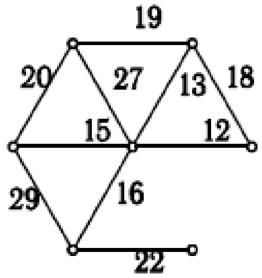
6



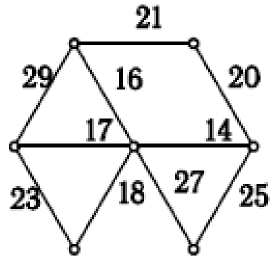
7



8



9



10