

### Тема 3.4. Деревья. Остов графа. Экстремальные графы

**План:** Выделение минимального остовного дерева связного графа. Метод ветвей и границ. Экстремальные графы.

#### Задачи с решением

Для графа  $G$ , заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

#### Решение:

Воспользуемся алгоритмом Краскала. Найдём ребро минимального веса (есть три варианта:  $x_1x_2$ ,  $x_3x_4$  и  $x_3x_6$  имеют вес 7. Выберём, например  $x_3x_4$ ). На каждом следующем шаге будем брать ребро минимального веса, инцидентное вершинам, уже включённым в остов и при этом не образующего цикла.

Покажем последовательно, как добавлялись ребра на матрице графа (Включённые ячейки закрасим черным, добавляемые – серым). Поскольку граф не ориентирован, то его матрица симметрична и мы возьмём только ту часть матрицы, что находится над главной диагональю.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

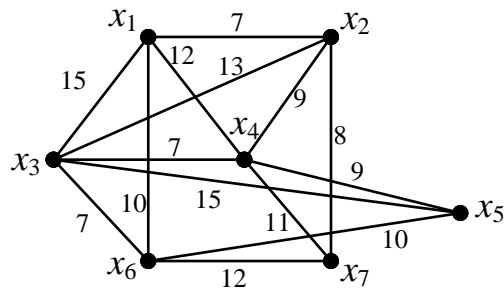
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

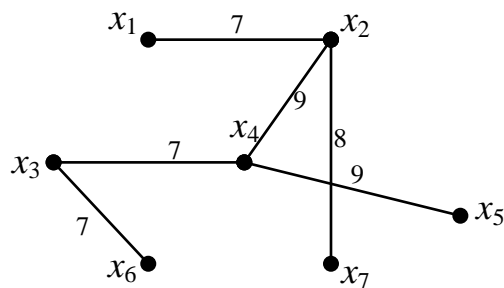
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	7	15	12	$\infty$	10	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	13	9	$\infty$	$\infty$	8
$x_3$	15	13	$\infty$	7	15	7	$\infty$
$x_4$	12	9	7	$\infty$	9	$\infty$	11
$x_5$	$\infty$	$\infty$	15	9	$\infty$	10	$\infty$
$x_6$	10	$\infty$	7	$\infty$	10	$\infty$	12
$x_7$	$\infty$	8	$\infty$	11	$\infty$	12	$\infty$

При таком решении трудно отследить образование циклов. Поэтому предлагаем еще один вариант решения. Построим сначала этот граф (Задание 18 сведется к заданию 17).

Получим:



Теперь, возьмем ребро  $x_3x_4$  и будем последовательно добавлять к нему ребра в соответствии с алгоритмом Краскала, как это указано в таблицах выше.



### Задачи для самостоятельного решения

1. В заданном графе выделить остов

1.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		5	7	5			3		
2				6	4				
3					3	4		6	
4						2	4		
5							8		7
6									6
7								7	
8									5
9									

1.2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4	5	2			7		
2				5	5				
3					5	4		2	
4						3	4		
5							2		7
6									6
7								7	
8									5
9									

1.3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		3	2	5	7				
2				5	6				
3					3	5			
4						6	4		
5							8		7
6								5	6
7								7	
8									3
9									

2. Определить совершенное максимальное паросочетание в двудольном графе.

2.1.

	1	2	3	4	5	6
1	3	5	6	5	2	1
2	2	4	7	6	4	3
3	4	5	4	3	3	4
4	1	2	1	2	3	3
5	2	4	3	4	5	3
6	3	2	3	4	2	2

2.2.

	1	2	3	4	5	6
1	3	5	3	3	2	1
2	2	4	3	6	4	3
3	4	5	2	4	3	4
4	3	2	1	2	2	1
5	3	4	3	4	5	3
6	4	2	2	4	2	2

2.3.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	1	5	2	1
2	2	4	4	6	4	3
3	1	5	4	2	3	4
4	1	2	1	6	3	3
5	2	4	3	1	5	3
6	1	4	3	4	1	2

2.4.

	1	2	3	4	5	6
1	2	5	6	5	2	1
2	1	4	7	6	4	3
3	3	3	6	4	3	4
4	1	2	3	2	3	3
5	3	2	3	4	2	3
	2	4	1	4	5	2

2.5.

	1	2	3	4	5	6
1	3	5	6	5	2	1
2	8	4	7	6	4	3
3	6	5	4	4	3	4
4	1	2	1	2	3	3
5	2	4	3	4	5	3
6	3	6	3	4	2	2