Тема 2.5. Полные системы. Полиномы Жегалкина. Классы булевых функций

Аннотация: Полные системы логических функций. Полином Жегалкина. Теорема Поста. Проверка системы функций на полноту.

Полные системы булевых функций

Ранее было доказано, что всякая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции трех булевых функций: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Сейчас рассмотрим представления булевых функций в виде суперпозиций функций из некоторой системы и таких, что всякая булева функция могла быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы.

Система булевых функций называется ***полной***, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы.

Теорема

Следующие системы булевых функций являются полными:

1) $\{\vee, \cdot, '\}$;
2) $\{+, \cdot, '\}$;
3) $\{\vee, '\}$;
4) $\{\cdot, '\}$;
5) $\{\rightarrow, '\}$;
6) $\{\mid\}$;
7) $\{\downarrow\}$.

Доказательство:

➢ Полнота первой системы доказана в теореме (о представлении булевых функций через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание). Это можно использовать для доказательства полноты остальных системы, приведенных в теореме.

В силу полноты системы $\{\vee, \cdot, '\}$ каждая булева функция является суперпозицией дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Если мы сможем выразить дизъюнкцию через функцию $+$, $\cdot$ и $'$, то тем самым докажем, что всякую функцию можно выразить через эти функции, т.е. докажем полноту системы функций $\{+, \cdot, '\}$. Это можно сделать так: $x \vee y = x + y + x \cdot y$.

Аналогично, для проверки полноты системы $\{\vee, '\}$ нужно выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание. Соответствующее тождество известно (см. теорему о выражении одних булевых функций через другие, пункт ***а***: $x \cdot y = \left(x' \vee y'\right)'$).

Полнота системы $\{\cdot,\ '\}$ вытекает из полноты системы $\{\vee,\ \cdot,\ '\}$ и тождества той же теоремы ***б***: $x \vee y = \left(x' \cdot y'\right)'$, выражающего дизъюнкцию через конъюнкцию и отрицание, а полнота системы $\{\longrightarrow,\ '\}$ – из полноты системы $\{\vee,\ '\}$ и тождества ***в***: $x \vee y = \left(x \to y\right) \to y$, выражающего дизъюнкцию через импликацию.

Наконец система $\{\,|\,\}$ полна, потому что каждая функция есть суперпозиция функций $\vee$ и $'$, а обе эти функции могут быть выражены через функцию штрих Шеффера (см. теорему пункт ***ж***: $x' = x \mid x$, и пункт ***и***: $x \vee y = x' \mid y' = \left(x \mid x\right) \mid \left(y \mid y\right)$). Аналогично, система $\{\downarrow\}$ полна, так как полна система $\{\cdot,\ '\}$ и справедливы тождества теоремы ***к***: $x' = x \downarrow x$ и пункт ***м***: $x \cdot y = x' \downarrow y' = \left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)$ выражающие функции $\cdot$ и $'$ через стрелку Пирса $\downarrow$.

Теорема доказана. ≺

Системы булевых функций

Мы рассматривали два способа задания логических функций – табличный и с помощью формул. Способ задания функции при помощи таблиц универсален, т.е. пригоден для любой функции, однако громоздок. Формула – наиболее компактный способ задания функции, однако она задает функцию через другие функции. Поэтому для любой системы функций возникает естественный вопрос: всякая ли логическая функция представима формулой над этой системой?

Введем специальные классы булевых функций и в конце данный главы найдем ответ на этот вопрос.

Множество *M* логических функций называется ***замкнутым классом***, если любая суперпозиция функций из *M* опять принадлежит *M*.

Классы P_0 и P_1 сохраняющие константу

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***сохраняет 0***, если $f(0,0,...,0) = 0$. Обозначим P_0 –класс всех булевых функций, сохраняющих 0.

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***сохраняет 1***, если $f(1,1,...,1) = 1$. Обозначим P_1 – класс всех булевых функций, сохраняющих 1.

Для того, чтобы определить принадлежность функции к классу P_0, достаточно знать значение функции только на одном двоичном наборе: наборе состоящем из всех нулей. Этот набор является самой первой строкой в таблице истинности (или в векторе значений функции). Аналогично, для определения принадлежности функции к классу P_1, достаточно знать значение функции только на одном двоичном наборе: наборе, состоящем из всех единиц – последний в таблице истинности (или в векторе значений функции).

Теорема

Классы P_0 и P_1 являются функционально замкнутыми.

Доказательство:

➢ Очевидно, что $f(x) = x \in P_0$.

Пусть функции $f, f_1, f_2, ... f_m \in P_0$. Докажем, что любая суперпозиция функций $f_1, f_2, ... f_m$ также принадлежит этому классу, то есть $F = f\left(f_1, f_2, ... f_m\right) \in P_0$.

Поскольку $f_1, f_2, ... f_m \in P_0$, то

$$f_1\left(0,0,...,0\right) = f_2\left(0,0,...,0\right) = ... = f_m\left(0,0,...,0\right) = 0$$

Найдем значение функции F на наборе, состоящем из нулей:

$$F = f\left(f_1\left(0,0,...,0\right), f_2\left(0,0,...,0\right), ..., f_m\left(0,0,...,0\right)\right) = f\left(0,0,...,0\right) = 0$$

Мы получили, что функция F на наборе, состоящем из всех нулей, принимает значение 0, то есть $F \in P_0$.

Аналогично доказывается и для класса P_1.

Теорема доказана. ≺

Двойственность функций. Класс S самодвойственных функций

Напомним, что булева функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***двойственной*** функцией для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f'(x_1', x_2', ..., x_n')$ для любых $x_1, x_2, ..., x_n$.

Булева функция f называется ***самодвойственной***, если $f^* = f$. Класс всех самодвойственных булевых функций обозначим S.

Свойства самодвойственных функций:

1. Самодвойственная функция полностью определяется своим видом на верхней половине таблицы истинности. Действительно, если, например, значение функции на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ равно 0, то значение функции на инверсном (противоположном) наборе $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n)$ должно быть равно 1.

2. Из первого свойства вытекает, что число различных функций от n переменных равно 2^{n-1}.

3. СДНФ самодвойственной функции будет иметь ровно 2^{n-1} конъюнкций.

4. Суперпозиция самодвойственных функций будет функция самодвойственная.

<u>Рассмотрим несколько алгоритмов определения самодвойственной функции:</u>

Алгоритм 1:

1. Вычислить вектор значения функции, двойственной к данной.
2. Сравнить полученный вектор с вектором значений исходной функции. Если оба вектора тождественно совпали (абсолютно во всех строках/значениях), то функция является самодвойственной.

Алгоритм 2:

1. Находим середину вектора значений функции.
2. Сравниваем значения функции на наборах симметричных относительно середины.
3. Если при таком сравнении все полученные значения функции противоположны, то функция является самодвойственной. В противном случае функция не самодвойственная.

Теорема

Класс S является функционально замкнутым.

Примем эту теорему без доказательства.

Полином Жегалкина. Класс L линейных функций

<u>Полином Жегалкина</u>

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берётся конъюнкция, а в качестве сложения исключающее ИЛИ. Полином был предложен в 1927 году

И.И. Жегалкиным в качестве средства для представления функций булевой логики.

Полином Жегалкина трех переменных в общем виде имеет следующий вид:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3.$$

Коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{123} \in \{0;1\}$, то есть могут принимать значения либо 0 или 1 в зависимости от того, какое значение принимает булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ на том или ином наборе значений переменных.

Теорема (Жегалкина)

Каждая булева функция единственным образом представляется в виде полинома Жегалкина.

Доказательство:

➢ Ранее было доказано, что различных булевых функций от n переменных 2^{2^n} штук. При этом конъюнкций вида $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ существует ровно 2^n, так как из n возможных сомножителей каждый или входит в конъюнкцию, или нет. В полиноме у каждой такой конъюнкции стоит 0 или 1, то есть существует 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина от n переменных.

Теперь достаточно лишь доказать, что различные полиномы реализуют различные функции.

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что это не так, тогда приравняв два различных полинома и перенеся один из них в другую часть равенства, получим полином, тождественно равный нулю и имеющий нулевые коэффициенты.

Рассмотрим слагаемое с единичным коэффициентом наименьший длины, то есть с наименьшим числом переменных, входящих в него (любой один, если таких несколько). Подставив единицу на места этих переменных, и нули на места остальных, получим, что на этом наборе только одно это слагаемое принимает единичное значение, то есть нулевая функция на одном из наборов принимает значение 1.

Получили противоречие. Значит, наше предположение не верно и каждая булева функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом.

Теорема доказана. ⮜

Алгоритмы построения полиномов Жегалкина

1. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода в том, что последовательно подставляются все наборы значений переменных из таблицы истинности в полином Жегалкина общего вида и каждое такое значение приравнивается соответствующему значению функции. В результате получим систему, решив которую сможем найти значения коэффициентов полинома Жегалкина.

Пример: Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов: f=10010111.

Решение:

Сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x_1, x_2.x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, a_1, ...a_{123}$

$f(0,0,0) = a_0 = 1$

$f(0,0,1) = a_0 + a_3 = 0 \Rightarrow 1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$

$f(0,1,0) = a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow 1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$

$f(0,1,1) = a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} = 0 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + a_{23} = 1 \Rightarrow 1 + a_{23} = 1 \Rightarrow a_{23} = 0$

$f(1,0,0) = a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow 1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

$f(1,0,1) = a_0 + a_1 + a_3 + a_{13} = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + a_{13} = 1 \Rightarrow 1 + a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 0$

$f(1,1,0) = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + a_{12} = 1 \Rightarrow 1 + a_{12} = 1 \Rightarrow a_{12} = 0$

$f(1,1,1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 0 \Rightarrow$

$1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + a_{123} = 1 \Rightarrow a_{123} = 1.$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3.$$

2. Метод преобразования СДНФ

Суть метода в том, что по таблице истинности построим СДНФ. Метод работает только для СДНФ, для обычной (не совершенной) ДНФ <u>так делать нельзя</u>!

Теперь просто заменим дизьюнкцию суммой Жегалкина (так можно сделать из-за того, что СДНФ устроена так, что в каждый одночлен входят ВСЕ переменные, т.е. как минимум одна переменная будет входить в данные одночлены как с отрицанием, так и без него, т.е. при применении формулы $a \vee b = a + b + ab$, конъюнкция будет равна 0, например:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_1x_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3.$$

Воспользовавшись свойством $\overline{a} = a + 1$ раскроем скобки.

И, наконец, воспользуемся свойством $a + a = 0$, т.е. уберем все скобки и все члены, встречающиеся ЧЕТНОЕ число раз вычеркнем.

Пример: Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина методом преобразования СДНФ: f=10010111.

Решение:

По таблице истинности построим СДНФ:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения СДНФ по таблице истинности выбираем наборы, на которых функция f принимает значение, равное 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то она берется с отрицанием, если значение переменной равно 1, то переменная берется без отрицания. Соединив знаком конъюнкции переменные соответствующего набора, получим элементарную конъюнкцию. Тогда дизъюнкция всех таких элементарных конъюнкций есть СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Теперь заменим дизъюнкцию суммой Жегалкина. Получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2\overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3.$$

Воспользовавшись свойством $\overline{a} = a + 1$ и раскрыв скобки получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2\overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3 =$$
$$= (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) + (x_1 + 1)x_2 x_3 + x_1(x_2 + 1)x_3 +$$
$$+ x_1 x_2 (x_3 + 1) + x_1 x_2 x_3 =$$
$$= (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1) +$$
$$+ (x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3) + (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3) + (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3.$$

И, наконец, воспользуемся свойством $a + a = 0$, т.е. уберем все скобки и все члены, встречающиеся ЧЕТНОЕ число раз вычеркнем. Получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3$$

3. Метод треугольника Паскаля

Строим по вектору функции так называемый треугольник Паскаля. Верхняя строка треугольника задает вектор значений булевой функции. В каждой строке, начиная со второй, любой элемент такого треугольника вычисляется как сумма по модулю 2 двух соседних элементов предыдущей строки.

Аналогично вычисляются элементы других строк.

Левой стороне треугольника Паскаля соответствует наборы значений переменных исходной функции $f(x_1, x_2 . x_3)$. Соединяя знаком конъюнкции переменные значения которых в наборе равны 1, мы получим слагаемое в полиноме Жегалкина. Набору (000) соответствует 1, набору (001) соответствует x_3 и т.д.

Пример: Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина методом треугольника Паскаля: f=10010111.

Решение:

Построим полином Жегалкина, используя треугольник Паскаля.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2 . x_3)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	1	[1] 0 0 1 0 1 1 1	1
0	0	1	1	[1] 0 1 1 1 0 0	x_3
0	1	0	1	[1] 1 0 0 1 0	x_2
0	1	1	0	0 1 0 1 1	$x_2 x_3$
1	0	0	1	[1] 1 1 0	x_1

1	0	1	1	0 0 1	x_1x_3
1	1	0	0	0 1	x_1x_2
1	1	1	0	[1]	$x_1x_2x_3$

Полином Жегалкина:
$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$

<u>*Линейные функции. Класс L*</u>

Функция f называется ***линейной***, если её полином Жегалкина не содержит конъюнкций.

Пример: Функция $f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$ не является линейной, а $f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_3$ - линейная.

Символом *L* обозначим класс всех линейных булевых функций.

Теорема

Класс L является функционально замкнутым.

Доказательство данной теоремы достаточно элементарно. Достаточно просто рассмотреть композицию линейных функций.

Монотонность функции. Класс M

Введем на множестве $\{0,1\}$ отношение порядка (предшествования), полагая, что $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$.

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \{0;1\}$ из $\alpha_1 \leq \beta_1$, $\alpha_2 \leq \beta_2$, …, $\alpha_n \leq \beta_n$ немедленно следует, что $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Класс всех монотонных функций обозначим M.

Замечание: обратите внимание, что проводится побитовое сравнение, а не числовое. Например, если рассматривать наборы $\widetilde{\alpha} = (010)$, $\widetilde{\beta} = (101)$, то для них не выполнено отношение предшествования $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta}$ (так как $\alpha_2 = 1 > 0 = \beta_2$).

Алгоритм определения монотонности булевой функции

1. Делим вектор значений функции f пополам на две равные части. Получаем два набора $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$.

2. Если отношение предшествования $\widetilde{\alpha}_0 \leq \widetilde{\alpha}_1$ для полученных векторов $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$ не выполнено, то функция не является монотонной.

3. В противном случае каждый из векторов $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$ опять делим на две равные части для которых также выполняем проверку и так далее. Алгоритм прекращает свою работу в двух случаях: либо для полученных наборов не выполнено отношение предшествования, либо длина всех векторов стала равна 1. Если отношение предшествования выполняется для всех пар наборов (включая наборы единичной длины), функция монотонна.

Пример: Проверить на монотонность функцию $f = 0011\,0111$.

Решение:

<table>
<tr><td rowspan="8">00110111</td><td rowspan="4">0011</td><td rowspan="2">00</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0111</td><td rowspan="2">01</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

На каждом шаге отношение предшествования выполняется, т.е. функция монотонна.

Теорема

Класс M является функционально замкнутым.

Примем без доказательства.

Теорема Поста о полноте

Введенные классы булевых функций P_0, P_1, S, M, L играют главную роль при описании полных систем булевых функций. В следующей теореме устанавливаются два важных свойства этих классов и одновременно рассматриваются примеры функций, принадлежащих и не принадлежащих каждому из них.

Рассмотрим теорему, доказанную американским математиком Э. Постом в 1921г.

Теорема (Поста о полноте системы булевых функций)

Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из основных замкнутых классов P_0, P_1, S, L и M.

Примем данную теорему без доказательства.

Данная теорема позволяет проводить проверку систем функций на полноту.

Пример: Задана система булевых функций f_1=10010111 и f_2=00110100. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

Решение:

Проверим выполнение теоремы Поста о полноте.

Класс P_0: Первый бит f_1 не 0, эта функция ноль не сохраняет, первый бит функции f_2 – ноль, эта функция ноль сохраняет.

Класс P_1: Последний бит f_1 - 1, эта функция единицу сохраняет, последний бит функции f_2 – ноль, эта функция единицу не сохраняет.

Класс S: Проведем проверку по схеме (делим каждую функцию пополам и, двигаясь от центра проверим что все биты различны):

Для f_1: Для f_2:

10010111

Класс M: Разобьем каждую из функций пополам и проведем побитовое сравнение полученных частей. Если функция монотонна, то каждый бит первой половины должен быть «меньше или равен» соотвествующего бита второй половины. Продолжаем этот процесс до конца.

Для f_1:	Для f_2:
$\underline{1}001$ $\underline{0}111$	$00\underline{11}$ $01\underline{00}$

Не выполняется в подчеркнутой позиции.

Класс L: для каждой функции построим полином Жегалкина (см. задание 8). Получим:

$f_1 = 1 + z + y + x + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии,

$f_2 = y + x + xz + xy + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии.

Сведем все результаты в таблицу:

	P_0	P_1	S	M	L
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	-	-	-	-

В каждом столбце есть «минус», следовательно условия теоремы Поста выполняются! Данная система функций является полной!

Вопросы для самоконтроля:

1. Полные системы булевых функций. Теорема. Доказательство полноты конкретной системы.
2. Системы булевых функций. Классы булевых функций P_0, P_1, L, M, S.
3. Полином Жегалкина. Алгоритмы получения полинома. Проверка принадлежности функции классу L.
4. Проверка функции на монотонность (класс M).
5. Двойственность и самодвойственность функций. Класс S. Алгоритм проверки.
6. Теорема Поста. Проверка системы функций на полноту.