Тема 1.2. Соответствия и отображения

Аннотация: Отображения, их свойства. Функциональные отображения. Отношения на множестве. Бинарные отношения. Замыкание отношений. Алгоритм Уоршолла. Отношения эквивалентности и порядка.

Отображения

Соответствие $G \subset X \times Y$ называется ***отображением***, если область определения соответствия совпадает с множеством

Сечением соответствия G по элементу x_0 называется множество $G\Big|_{x_0} = \left\{ y \middle| (x_0, y) \in G \right\}$. Аналогично вводится и сечение соответствия G по элементу y_0: $G\Big|_{y_0} = \left\{ x \middle| (x, y_0) \in G \right\}$.

Отображение называется ***функциональным***, если любое сечение содержит только один элемент.

Для функционального отображения обычно вводят следующие обозначения

$$f : X \to Y \text{ или } X \xrightarrow{f} Y\text{, или } y = f(x), x \in Y, y \in Y \text{ или}$$
$$x \mapsto f(x), \quad \mathrm{x} \in X, f(x) \in Y.$$

Если G - некоторое функциональное отображение, то сечение $G|_{x_0}$ называют ***образом*** элемента $X_0 \in X$, а сечение $G|_{y_0}$ называют ***прообразом элемента*** $y_0 \in Y$. Образ элемента $x_0 \in X$ обозначается символом $f\left(x_0\right)$, а прообраз элемента $y_0 \in Y$ – символом $f^{-1}(\mathrm{y}_0)$.

Два функциональных отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ ***равны***, если $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и для $\forall x \in X_1, \quad f_1\left(x\right) = f_2\left(x\right)$.

Функциональное отображение $f : R \to R$ обычно кратко называют ***функцией***. Это то определение функции с которым вы встречались ранее в курсе математического анализа.

Теорема (свойства отображений)

Пусть задано отображение $f : X \to Y$, и подмножества $A_1, A_2 \subset X, \quad B_1, B_2 \subset Y$.

Справедливы следующие соотношения:

1) если $A_1 \subset A_2 \subset X$, то $f\left(A_1\right) \subset f\left(A_2\right)$;

2) $f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$;

3) $f\left(A_1 \cap A_2\right) \subset f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$;

4) *если* $B_1 \subset B_2 \subset Y$, *то* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Доказательство:

➢ Доказательства не представляют особого труда. Докажем, например, последнее:

Пусть $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, тогда это равносильно тому, что $f(x) \in B_1 \cap B_2$ или $f(x) \in B_1$ и $f(x) \in B_2$. Откуда $x \in f^{-1}(B_1)$ и $x \in f^{-1}(B_2)$, тогда $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Что и требовалось доказать.⮜

Виды отображений

Отображение $f : X \to Y$ называется ***сюръективным***, если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***инъективным***, если из условия $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различные элементы множества X переходят в различные образы.

Отображение $f : X \to Y$ называется ***биективным (взаимно-однозначным)***, если оно одновременно сюръективно и инъективно.

Пример: Рассмотрим отображения:

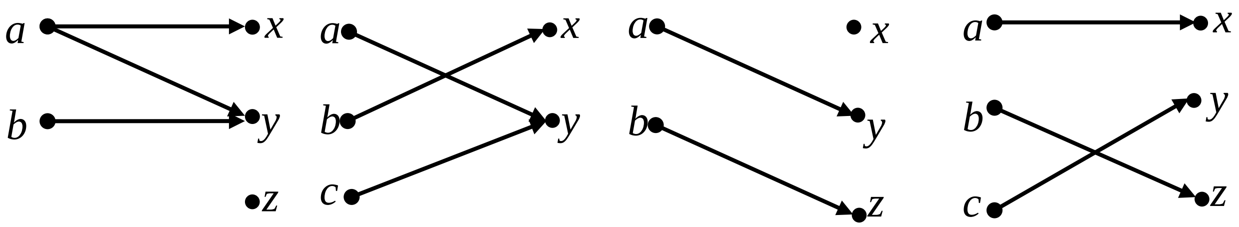

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

На рисунке 1 отображение, которое не является ни сюръективным (у *z* нет прообраза), ни инъективным (*a* и *b* переходят в *y*).

На рисунке 2 отображение, которое является сюръективным но не является инъективным (*a* и *c* переходят в *y*).

На рисунке 3 – инъективное, но не сюръективное.

На рисунке 4 – биективное отображение.

Композицией отображений $f : X \to Y$ ***и*** $g : Y \to Z$ ***(сложным отображением или суперпозицией)*** называют отображение $\varphi : Y \to Z$, определяемое

$$\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in X .$$

Композиция отображений обладаем свойством ассоциативности, т.е. справедливо равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Единичным (тождественным) отображением называется отображение $e: X \to X$, такое что $e(x) = x, \quad \forall x \in X$.

Очевидно, что выполняются равенства $f \circ e = f$ и $e \circ f = f$, т.е. единичные отображения играют роль нейтральных элементов в композиции отображений.

Отображение g называется ***обратным*** к отображению f , если одновременно выполняются два условия: $g \circ f = e$ и $f \circ g = e$. Обычно обратное отображение обозначают символом f^{-1}.

Бинарные отношение

Бинарным отношением на множестве X называется любое подмножество $T \subset X \times X$ прямого произведения. Отличие от соответствия здесь в том, что соответствие – это подмножество $A \times B$, а отношение - подмножество $X^2 = X \times X$.

Свойства бинарных отношений:

1. Отношение T в множестве A называется ***рефлексивным***, если для $\forall a \in A$ справедливо $(a,a) \in T$. Рефлексивность T всегда означает, что T содержит тождественное отношение (e) в качестве подмножества $e \subseteq T$, а в если отношение T задается матрицей M, то на главной диагонали этой матрицы стоят только единицы.
2. Отношение T в множестве A называется ***антирефлексивным***, если для $\forall a \in A$ справедливо $(a,a) \notin T$ (на главной диагонали матрицы M стоят только нули).
3. Отношение T в множестве A называется ***симметричным***, если из $(a,b) \in T \;\Rightarrow\; (b,a) \in T$ при $a \neq b$. Симметричное отношение можно задать равенством $T = T^{-1}$, и, конечно, матрица симметричного отношения также симметрична, т.е., если матрица отношения T – это матрица M, то $M = M^T$, где M^T - транспонированная матрица M.
4. Отношение T в множестве A называется ***транзитивным***, если из $(a,b) \in T$ и $(b,c) \in T \;\Rightarrow\; (a,c) \in T$ при $a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$.
5. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношения на множестве A называются отношениями ***эквивалентности***.

Отношение эквивалентности в некотором смысле обобщает понятие равенства.

6. Отношение T в множестве A называется ***антисимметричным***, если для $\forall a$ и b имеет место: если $(a,b) \in T$ и $(b,a) \in T$, то $a = b$. В матрицах это будет выглядеть так: $M \cap M^T \subseteq e$.

7. Отношение T называется сильно антисимметричным (асимметричным), если для любой упорядоченной пары из условия $(a,b) \in T$ следует, что пара $(b,a) \notin T$ ($M \cap M^T = \varnothing$).

Бинарное отношение *T*, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется ***отношением упорядоченности*** или ***отношением порядка*** и обозначается «≤».

Замыкание отношений

Пусть отношение *T* на множестве *A* не обладает каким-либо свойством (рефлексивностью, симметричностью или транзитивностью). Будем считать, что в результате присоединение к этому подмножеству *T* некоторых упорядоченных пар получим новые подмножества $\tilde{T}$, которые уже будут обладать указанным свойством. Минимальное по числу элементов подмножество $\tilde{T}$ с выделенным свойством, которое получено путем присоединения к исходному отношению *T* новых элементов, называется замыканием *T* относительно данного свойства.

Рассмотрим один из алгоритмов, позволяющих построить транзитивное замыкание отношения.

<u>*Алгоритм Уоршолла построения транзитивного замыкания*</u>

Пусть бинарное отношение *T* задано булевой матрицей *M*.

Алгоритм:

1) просматривают последовательно все недиагональные элементы m_{ij} матрицы *M* (можно и диагональные, но для них дальнейшие действия просто не имеют смысла и это лишняя трата времени);

2) если $m_{ij} = 1$, то все элементы *i*-ой строки матрицы заменяют дизъюнкциями соответствующих элементов *i*-ой и *j*-ой строк матрицы;

3) процедуру повторяют до тех пор, пока не прекратятся изменения элементов матрицы.

Пример: Отношение задано матрицей *M*. Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Вначале имеет смысл найти $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична ($M \neq M^T$.). Например, пара (4,3) принадлежит данному отношению, а пара (3,4) ему не принадлежит.

2. Отношение антисимметрично, так как $M \cap M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq e$.

3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1 (или $M \cap M^T \neq \varnothing$).

4. Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны 1. Данное отношение не является рефлексивным.

5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание данного отношения по алгоритму Уоршолла:

Рассматриваем все внедиагональные $(i \neq j)$ элементы матрицы.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат данному отношению, а пара (1,3) ему не принадлежит.

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом, полученная матрица M_2 является матрицей транзитивного замыкания нашего отношения.

Отношение эквивалентности

Как было сказано ранее, рефлексивное, симметричное и транзитивное отношения на множестве A называются отношениями ***эквивалентности***. Для отношения эквивалентности наряду с записью (a,b) обычно используют обозначение $a \sim b$.

Пример: На множестве целых чисел Z рассмотрим отношение сравнения по модулю m>1 $(x \equiv y \bmod m)$, которое строится по принципу: для любых двух целых чисел x и y полагаем, что $x \sim y$, если их разность делится без остатка на m, т.е. $(x - y) = mk, k \in Z$.

Заданное отношение, очевидно, рефлексивно ($x \sim x$, т.к. $(x-x)=m\cdot 0$) и симметрично (если $x \sim y$, т.е. $(x-y)=mk, k\in Z$, то $y \sim x$, т.е. $(y-x)=-mk, -k\in Z$).

Проверим транзитивность отношения сравнения, т.е. условие, что если пары $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

В самом деле, поскольку $x \sim y$, то $(x-y)=mk_1$, а поскольку $y \sim z$, то $(y-z)=mk_2$, тогда

$$(x-z)=\left((x-y)+(y-z)\right)=mk_1+mk_2=m(k_1+k_2),(k_1+k_2)\in Z.$$

Множество элементов из *A*, эквивалентных некоторому элементу $a\in A$, называется ***классом эквивалентности*** (или ***классом смежности***) элемента $a\in A$ по отношению *T*. Класс эквивалентности элемента $a\in A$ обозначим символом $[a]$.

Для заданного отношения эквивалентности *T* на *A* множество всех классов эквивалентности называется ***фактор-множеством*** множества *X* по отношению эквивалентности Т. Фактор-множество обычно **обозначают** A/a.

Пример: Рассмотрим отношение сравнения по модулю 4 $(x\equiv y \bmod 4)$.

Для этого отношения эквивалентности перечислим все классы эквивалентности:

[0]={…, -12,-8,-4,0,4,8,12,…},
[1]={…,-11,-7,-3,1,5,9,13,…},
[2]={…,-10,-6,-2,2,6,10,14,…},
[3]={…,-9,-5,-1,3,7,11,15,…}.

Указанные классы эквивалентности обычно называют ***классами вычетов по модулю*** 4. Фактор-множество $Z/\equiv$, обозначим Z_4 содержит ровно четыре элемента: $Z_4=\{[0],[1],[2],[3]\}$

Заметим, что каждый из перечисленных классов эквивалентности однозначно задается *любым* своим элементом, например, [1]=[-3]=[5] и т.д. Кроме этого, указанные классы не пересекаются, а их объединение представляет собой *разбиение* множества целых чисел: $Z=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$.

Теорема

Любое отношение эквивалентности на A порождает разбиение множества A: $A=\bigcup\limits_{a\in A}[a]$.

Доказательство:

➢ Очевидно, что для любого элемента $a \in A$ выполняется условие $a \in [a]$ и поэтому $[a] \neq \varnothing$.

Докажем сначала, что любые два класса эквивалентности $[a]$ и $[b]$ либо совпадают, либо имеют пустое пересечение. Предположим противное, т.е. что $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, тогда найдется элемент $c \in A$ такой, что $c \in [a] \cap [b]$, и, следовательно, $c \sim a$ и $c \sim b$, а в силу симметричности получим $c \sim a$, следовательно $a \sim c$. В силу транзитивности из $a \sim c$ и $c \sim b$ получим, что $a \sim b$.

В результате для любого элемента $x \in a$ получим $x \sim a \sim b$, значит, $x \in [b]$, и справедливо вложение $[b] \subseteq [a]$. Аналогично можно доказать, что $[a] \subseteq [b]$. Таким образом, если $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, то $[a] = [b]$.

Поскольку $a \in [a]$, множество $\{a\} \subset [a]$ и тогда $A = \bigcup\limits_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} [a]$.

С другой стороны, любой класс эквивалентности $[a] \subseteq A$, а значит, справедливо и соотношение $\bigcup\limits_{a \in A} [a] \subseteq A$.

Такое возможно только если $A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]$.

Теорема доказана.≺

Теорема

Любое разбиение множества А порождает соответствующее отношение эквивалентности на этом множестве.

Доказательство этой теоремы достаточно очевидно.

Рассмотренные выше две теоремы позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема

Любое разбиение множества X порождает соответствующее отношение эквивалентности на этом множестве.

Вопросы для самоконтроля:

1. Отображения, их свойства и виды.
2. Сюръективное, инъективное и биективное отображения.
3. Функциональные отображения.
4. Отношения на множестве.
5. Бинарные отношения и их свойства.
6. Замыкание отношений. Алгоритм Уоршолла. Пример.
7. Отношения эквивалентности и порядка. Примеры.
8. Разбиение множества.