Тема 2.5. Полные системы. Полиномы Жегалкина. Классы булевых функций

План: Полные системы логических функций. Полином Жегалкина. Проверка системы функций на полноту в соответствии с теоремой Поста.

Задачи с решениями

Пример 1: Для функции, заданной в векторном виде постройте полином Жегалкина тремя разными способами (методом неопределенных коэффициентов, преобразованием СДНФ, с использованием треугольника): f=10010111.

Решение:

Метод неопределенных коэффициентов

Сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x_1, x_2.x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, a_1, ...a_{123}$

$$f(0,0,0) = a_0 = 1$$

$$f(0,0,1) = a_0 + a_3 = 0 \Rightarrow 1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$$

$f(0,1,0)=a_0+a_2=0 \Rightarrow 1+a_2=0 \Rightarrow a_2=1$

$f(0,1,1)=a_0+a_2+a_3+a_{23}=0 \Rightarrow 1+1+1+a_{23}=1 \Rightarrow 1+a_{23}=1 \Rightarrow a_{23}=0$

$f(1,0,0)=a_0+a_1=0 \Rightarrow 1+a_1=0 \Rightarrow a_1=1$

$f(1,0,1)=a_0+a_1+a_3+a_{13}=1 \Rightarrow 1+1+1+a_{13}=1 \Rightarrow 1+a_{13}=1 \Rightarrow a_{13}=0$

$f(1,1,0)=a_0+a_1+a_2+a_{12}=1 \Rightarrow 1+1+1+a_{12}=1 \Rightarrow 1+a_{12}=1 \Rightarrow a_{12}=0$

$f(1,1,1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_{12}+a_{13}+a_{23}+a_{123}=0 \Rightarrow$
$1+1+1+1+0+0+0+a_{123}=1 \Rightarrow a_{123}=1.$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$f(x_1,x_2,x_3)=1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3.$

Метод треугольника Паскаля

Построим полином Жегалкина, используя треугольник Паскаля.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2.x_3)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	1	[1] 0 0 1 0 1 1 1	1
0	0	1	1	[1] 0 1 1 1 0 0	x_3
0	1	0	1	[1] 1 0 0 1 0	x_2
0	1	1	0	0 1 0 1 1	x_2x_3
1	0	0	1	[1] 1 1 0	x_1
1	0	1	1	0 0 1	x_1x_3
1	1	0	0	0 1	x_1x_2
1	1	1	0	[1]	$x_1x_2x_3$

Поясним, как заполняется треугольник Паскаля. Верхняя строка треугольника задает вектор значений булевой функции *f=(10010111).*В каждой строке, начиная со второй, любой элемент такого треугольника вычисляется как сумма по модулю 2 двух соседних элементов предыдущей строки.

Левой стороне треугольника Паскаля соответствует наборы значений переменных исходной функции $f(x_1,x_2.x_3)$. Соединяя знаком конъюнкции переменные значения которых в наборе равны 1, мы получим слагаемое в полиноме Жегалкина. Набору (000) соответствует 1, набору (001) соответствует x_3 и т.д.

Полином Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2x_3$$

Преобразование ДНФ

По таблице истинности построим СДНФ (метод работает только для СДНФ, просто для ДНФ так делать нельзя!):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2.x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения СДНФ по таблице истинности выбираем наборы, на которых функция f принимает значение, равное 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то она берется с отрицанием, если значение переменной равно 1, то переменная берется без отрицание. Соединив знаком конъюнкции переменные соответствующего набора, получим элементарную конъюнкцию. Тогда дизъюнкция всех таких элементарных конъюнкций есть СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Теперь просто заменим дизъюнкцию суммой Жегалкина (так можно сделать из-за того, что СДНФ устроена так, что в каждый одночлен входят ВСЕ переменные, т.е. как минимум одна переменная будет входить в данные одночлены как с отрицанием, так и без него, т.е. при применении формулы $a \vee b = a + b + ab$, конъюнкция будет равна 0, например: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3$. Получим:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2x_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2\overline{x}_3+x_1x_2x_3.$$

Теперь, воспользовавшись свойством $\overline{a}=a+1$ и раскрыв скобки получим:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2x_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2\overline{x}_3+x_1x_2x_3=$$
$$=(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)+(x_1+1)x_2x_3+x_1(x_2+1)x_3+x_1x_2(x_3+1)+x_1x_2x_3=$$
$$=(x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1+x_2+x_3+1)+$$
$$+(x_1x_2x_3+x_2x_3)+(x_1x_2x_3+x_1x_3)+(x_1x_2x_3+x_1x_2)+x_1x_2x_3.$$

И, наконец, воспользуемся свойством $a+a=0$, т.е. уберем все скобки и все члены, встречающиеся ЧЕТНОЕ число раз вычеркнем. Получим:

$$f(x_1,x_2,x_3)=1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$$

Пример 2: Для булевой функции найдите представляющий ее полином Жегалкина:

$$x'z'\vee(x'z\vee xz')y\vee xy'z'.$$

Решение:

Для нахождения полинома Жегалкина нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму Жегалкина (сложение по модулю 2) и конъюнкцию, а затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Проделаем это для данной булевой функции:

$$x'z'\vee(x'z\vee xz')y\vee xy'z'=(x'\vee xy')z'\vee(x'z+xz')y=(x'+xy')z'\vee(x'yz+xyz')=$$
$$=(x'z'+xy'z')\vee(x'yz+xyz')=(x'z'+xy'z')(x'yz+xyz')+x'z'+xy'z'+x'yz+xyz'=$$
$$=x'z'+xy'z'+x'yz+xyz'=(x+1)(z+1)+x(y+1)(z+1)+(x+1)yz+xy(z+1)=$$
$$=xz+x+z+1+xyz+xy+xz+x+xyz+yz+xyz+xy=xyz+yz+z+1.$$

Замечание: можно было воспользоваться предыдущей задачей.

Пример 3: Задана система булевых функций f1=10010111 и f2=00110100. Проверьте данную систему на полноту. Выполнить полную проверку для обеих функций.

Решение:

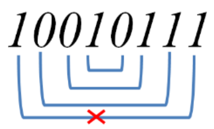
Проверим выполнение теоремы Поста о полноте.

Класс P_0: Первый бит f_1 не 0, эта функция ноль не сохраняет, первый бит функции f_2 – ноль, эта функция ноль сохраняет.

Класс P_1: Последний бит f_1 - 1, эта функция единицу сохраняет, последний бит функции f_2 – ноль, эта функция единицу не сохраняет.

Класс S: Проведем проверку по схеме (делим каждую функцию пополам и, двигаясь от центра проверим что все биты различны):

Для f_1: Для f_2:



Класс M: Разобьем каждую из функций пополам и проведем побитовое сравнение полученных частей. Если функция монотонна, то каждый бит первой половины должен быть «меньше или равен» соотвествующего бита второй половины. Продолжаем этот процесс до конца.

Для f_1:	Для f_2:
$\underline{1}001$ $\underline{0}111$	$00\underline{11}$ $01\underline{00}$

Не выполняется в подчеркнутой позиции.

Класс L: для каждой функции построим полином Жегалкина (см. задание 8). Получим:

$f_1 = 1 + z + y + x + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии,

$f_2 = y + x + xz + xy + xyz$ - не линейна, т.к. есть конъюнкии.

Сведем все результаты в таблицу:

	P_0	P_1	S	M	L
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	-	-	-	-

В каждом столбце есть «минус», следовательно условия теоремы Поста выполняются! Данная система функций является полной!

Задачи для самостоятельного решения

1. Являются ли монотонными функции:

1.1. $f(x,y,z)=(xz+y\overline{z})\to(yz\vee x\overline{z})$;

1.2. $f(x,y,z)=\overline{((x\downarrow y)\to z)}\to(y\vee\overline{x})z$;

1.3. $f(x,y,z)=(x\to(\overline{z}\,|\,(y\vee x)))\overline{z}$;

1.4. $f(x,y,z)=\overline{(xyz\to z)}\to(z+y)$;

1.5. $f(x,y,z)=((x\to z)(y\to z))\to(x\,|\,(y\vee z))$;

1.6. $f(x,y,z)=(y\vee xz)\downarrow\left(x\to\overline{(y\vee z)}\right)$;

1.7. $f(x,y,z)=((zy\to\overline{x})\downarrow(x\vee z))\vee y$;

1.8. $f(x,y,z)=(\overline{x}\vee\overline{y})(z\to\overline{y})\to(z\,|\,y)$;

1.9. $f(x,y,z)=(y\leftrightarrow(xz\vee y))\to(y\,|\,(xz))$;

1.10. $f(x,y,z)=(yz\to x(y\vee\overline{z}))+xz$.

2. Проверьте, являются ли самодвойственными функции задачи 1.

3. Постройте полиномы Жегалкина для функций задачи 1.

4. Проверить, является ли полной система функций (провести полную проверку):

4.1. f_1=01101001; f_2=00010011;

4.2. f_1=11101001; f_2=00110111;

4.3. f_1=11011000; f_2=00110010;

4.4. f_1=01111010; f_2=10011011;

4.5. f_1=0110100100010010;

4.6. f_1=1110100100111010;

4.7. f_1=1011100110010010;

4.8. f_1=1110100000010110.