Тема 3.1. Основные понятия теории графов

Аннтоция: Основные понятия теории графов. Ориентированные и неориентированные графы. Элементы графа: вершины, ребра, дуги. Геометрические графы. Числовые характеристики графов. Части графов. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.

Первые задачи теории графов

Графы – это математическая модель, с помощью которой можно представлять и исследовать конечные системы и процессы, связанные между собой определенными зависимостями.

Мало про какой раздел математики можно точно указать дату его рождения. Для теории графов это можно указать точно. Этой датой считают 1736 год, когда была опубликована статья Леонарда Эйлера, посвященная решению головоломки под названием «Задача о кенигсбергских мостах». Первоначально данные методы использовались, в основном, для развлекательных задач. Но в 1847 году Г. Кирхгоф с помощью графов стал описывать электрические цепи, а А. Кэли в 1858 г., занимаясь чисто практическими задачами органической химии, открыл важный класс графов, называемых деревьями. Он стремился перечислить изомеры насыщенных углеводородов, с данным числом атомов углерода.

Сам термин «граф» введен в употребление венгерским математиком Д. Кенингом в 1936 г.

Приведем примеры систем, изучение и практическое использование которых может быть выражено графами:

1. транспортные сети,
2. молекулы химических соединений,
3. электронные и электрические схемы,
4. административная структура управления и др.

Как уже было сказано ранее, первые задачи теории графов были связаны с решением математических головоломок. Среди них важную роль в теории графов сыграли следующие три задачи.

Задача о семи кенигсбергских мостах

Издавна среди жителей Кенигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем городским мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды:

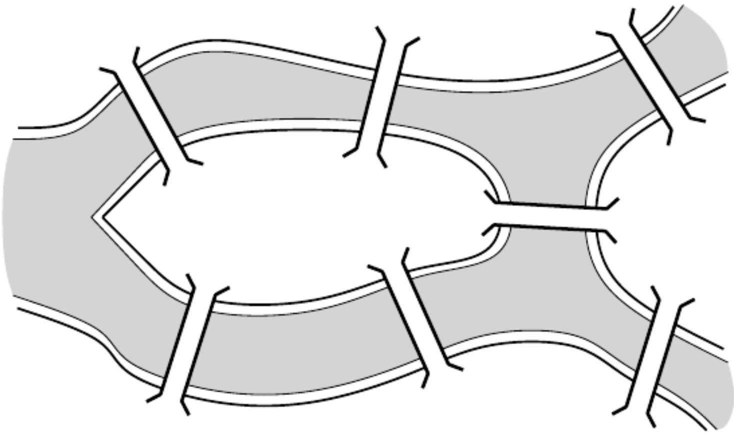


Рисунок 1 Задача о семи кенигсбергских мостах

Задача о трех домах и трех колодцах

Данная задача была сформулирована польским математиком К. Куратовским в 1930 г. и формулируется следующим образом: «На хуторе три дома и три колодца. Требуется провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались»:

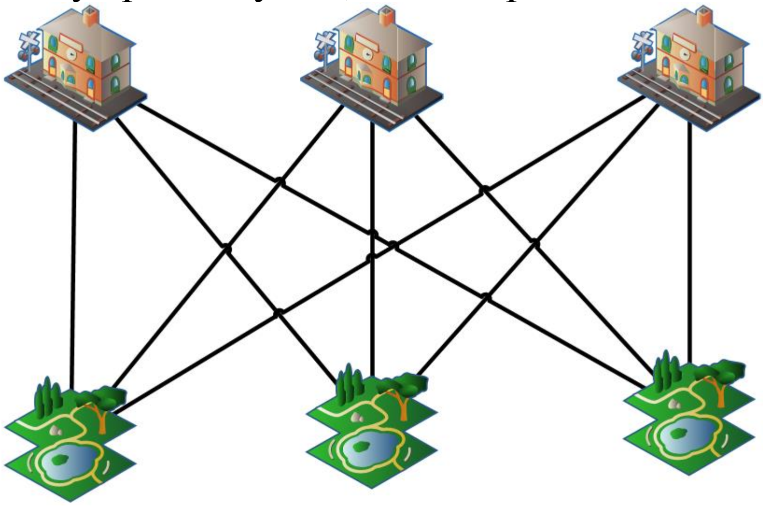


Рисунок 2 Задача о трех домах и трех колодцах

Задача о четырех красках

В 1852 году Фрэнсис Гутри, составляя карту графств Англии, обратил внимание, что для такой цели хватает четырех красок. Его брат, Фредерик, сообщил об этом наблюдении известному математику О. Де. Моргану, а тот — математической общественности. Точную формулировку гипотезы опубликовал упоминавшийся ранее А. Кэли в 1878. В общем случае вопрос формулировался так: какое минимальное количество красок необходимо для раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в разные цвета?

Решение всех этих задач мы рассмотрим в соответствующих параграфах ниже.

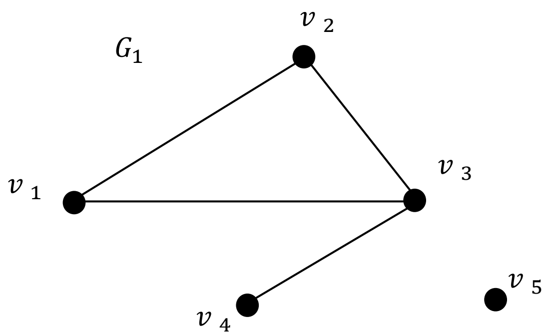
Основные определения

Рассмотрим теперь основные понятия теории графов.

Графом называется упорядоченная пара множеств $G=<V,E>$, где V – непустое конечное множество, элементы которого называются ***вершинами*** графа. $E\subseteq(V\times V)$ - конечное множество пар элементов множества V (не обязательно различных); элементы множества E называются ***ребрами*** графа.

Графу соответствует геометрическая конфигурация. Вершины обозначаются точками, а ребра – линиями (отрезками или стрелками), соединяющими соответствующие вершины.

Пример: Граф $G_1=<V_1,E_1>$, где $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, $E_1=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\}\}$ можно изобразить следующим образом:



Замечание. При изображении графов на рисунках или схемах ребра могут быть прямолинейными или криволинейными, длины ребер и расположение произвольны.

Если $e=\{v_i,v_j\}$ – ребро графа, то вершина v_i и ребро e ***инцидентны.*** Вершина v_j и ребро e также ***инцидентны***.

Вершины, инцидентные одному ребру, называются ***смежными***.

Два ребра ***смежные***, если инцидентны одной вершине.

Число вершин графа называется его ***порядком***.

Число ребер графа, инцидентных данной вершине v_i, называется ***степенью*** $p(v_i)$ ***вершины*** v_i (другое обозначение $\deg(v_i)$). Если $p(v_i)=0$, то v_i – ***изолированная вершина***, если $p(v_i)=1$, то v_i – ***висячая вершина***.

Пример: В предыдущем примере $p(v_1)=2$, $p(v_2)=2$, $p(v_3)=3$, $p(v_4)=1$, $p(v_5)=0$.

Граф $G=<V,E>$, множество E ребер которого является неупорядоченными парами вершин, называется ***неориентированным графом***.

Если в паре вершин v_i и v_j указано направление связи (т.е. множество E ребер является упорядоченным), то ребро $e_k=(v_i,v_j)$ называется ***дугой,*** где v_i – начало дуги, v_j – конец дуги, вершины v_i и v_j, определяющие дугу e_k, – ***концевые вершины,*** а сам граф $G=<V,E>$,называется ***ориентированным графом***.

Если концевые вершины совпадают, то дугу $e=(v_i,v_i)$ называют ***петлей***.

Очевидно, что для неориентированного графа $\{v_i,v_j\}=\{v_j,v_i\}$, а для ориентированного $(v_i,v_j)\neq(v_j,v_i)$.

Различные ребра вида $\{v_i,v_j\}$, инцидентные одной и той же паре вершин v_i и v_j, называют ***кратными***. Если в графе допускается наличие более одного ребра между двумя вершинами, то она называется ***мультиграфом***.

Граф без петель и кратных ребер называется ***простым***.

При графическом изображении направление дуги ориентированного графа обычно указывают стрелками.

Теорема (Лемма о рукопожатиях)

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер: $\sum_i p(v_i)=2|E|$.

Доказательство:

➢ Так как каждое ребро графа инцидентно двум вершинам (не обязательно различным), степень каждой вершины увеличивается на 1 за счет каждого ребра. Таким образом, в сумму степеней всех вершин каждое ребро вносит 2 единицы, поэтому сумма в 2 раза превышает число ребер.

Теорема доказана.⮘

Следствие: Сумма степеней вершин графа всегда четное число.

Теорема

В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Доказательство:

➢ Воспользуемся методом от противного.

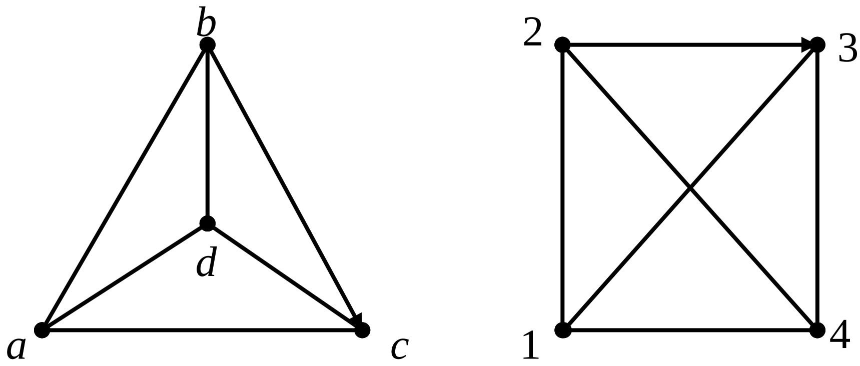
Путь утверждение теоремы не верно, т.е. имеется нечетное количество вершин, с нечетными степенями.

По следствию к предыдущей теореме, сумма степеней вершин с четными степенями четна. Сумма степеней всех вершин графа равна сумме степеней вершин с нечетными степенями плюс сумма степеней вершин с четными степенями. Так как сумма нечетного числа и четного всегда нечетное число, то сумма степеней всех вершин графа – нечетное число, что противоречит следствию к предыдущей теореме.

Теорема доказана.∢

Графы $G_1 =< V_1, E_1 >$ и $G_2 =< V_2, E_2 >$, называется *изоморфными*, если существует такое взаимно-однозначное (биективное) отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $v_i, v_j \in V_1$ число соединяющих их ребер равно числу ребер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(v_i)$ и $\varphi(v_j)$. Отношение изоморфизма графов представляет собой отношение эквивалентности, определенное для графов, и позволяет произвести разбиение исходного класса всех графов на классы эквивалентности.

Пример: Два графа на рисунке ниже изоморфны.



Виды и способы задания графов

Информация о структуре графа может быть задана в виде матрицы.

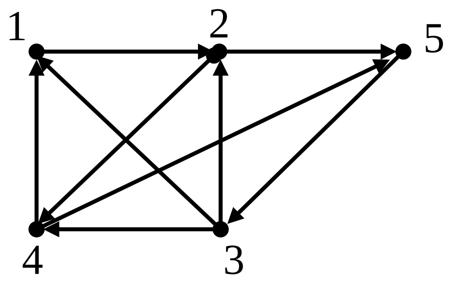
Матрица смежности

Матрицей смежности $A = \left(A_{ij}\right)$ графа G называется матрица порядка n, определенная следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Если G – мультиграф, то в матрице смежности A элемент a_{ij} по определению равен числу дуг, исходящих из вершины v_i и заходящих в вершину v_j.

Пример: Для графа, изображенного на рисунке



матрица смежности будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если G – неориентированный граф, то матрица смежности A симметрична, т.е. не меняется при транспонировании: $A^T = A$.

Если G - граф без петель, то в матрице смежности A по главной диагонали стоят нулевые элементы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * \\ * & 0 & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & 0 & * \\ * & * & \dots & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т.е. одновременно с перестановкой i-й и j-й строк переставляются i-й и j-й столбцы).

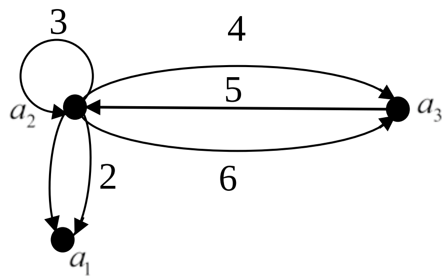
Примем эту теорему без доказательства.

Матрица инцидентности

Матрицей инцидентности $B=\left(b_{ij}\right)$ мультиграфа $G=<V,E>$, называется матрица размера $|V|\times|E|$, определяемая по следующему правилу:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } a_i, \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } a_i \\ \qquad\qquad \text{и не является петлей}, \\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Пример: Мультиграф *G*, изображенный на рисунке



имеет матрицу инцидентности:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Теорема

Мультиграфы G и G' изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга некоторыми перестановками строк и столбцов.

Также примем эту теорему без доказательства.

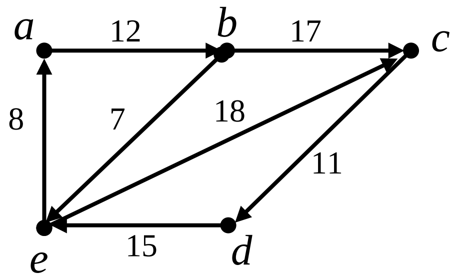
Представления графов с помощью матриц могут использоваться для хранения и обработки графов при решении задач с помощью ЭВМ.

Во многих прикладных задачах требуется дополнительная информация о вершинах и ребрах, например, о стоимости проезда между населенными пунктами или расстояниях между ними в случае, когда граф представляет собой сеть дорог и т.д. В таких задачах используются взвешенные графы.

Пусть s_V, s_E - множества меток. ***Пометкой или распределением*** меток графа $G = \langle V, E \rangle$ называется пара функций $f : V \to s_V$ (распределение меток вершин), $g : E \to s_E$ (распределение меток дуг). Структура $\langle V, E, f, g \rangle$ называется взвешенным или помеченным графом. Для вершины $a \in V$ элемент $f(a)$ называется весом вершины a, а для дуги $u \in E$ элемент $g(u)$ - весом дуги u. Часто бывают помеченными только вершины (в этом случае $g = const$) или дуги (в этом случае $f = const$).

В матричном виде взвешенный граф можно представлять в виде матрицы весов $w = (\omega_{ij})$, где ω_{ij} - вес дуги (a_i, a_j), если дуга (a_i, a_j) существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞ в зависимости от приложений.

Пример: для графа



матрица весов будет иметь вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 17 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 15 \\ 8 & \infty & 18 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Основные понятия теории графов.
2. Ориентированные и неориентированные графы.
3. Элементы графа: вершины, ребра, дуги.
4. Геометрические графы.
5. Числовые характеристики графов. Части графов.
6. Теоремы о сумме степеней всех вершин графа и числе вершин нечетной степени.

7. Виды и способы задания графов. Матрицы смежности и инцидентности.
8. Изоморфизм и гомеоморфизм графов.