Тема 2.4. Булева алгебра и теория множеств

Аннтоция: Булева алгебра и теория множеств. Двойственные логические функции.

Булева алгебра и теория множеств

Алгеброй называют систему, включающую в себя некоторое непустое множество объектов с заданными на нем функциями (операциями), результатами применения которых к объектам данного множества являются объекты того же множества.

Рассмотрим непустое множество $A=\{0;1\}$ с двумя бинарными операциями $\wedge$ (конъюнкция или ее аналог), $\vee$ (дизъюнкция или ее аналог), одной унарной операцией $\neg$ (отрицание или его аналог).

Указанное множество и выделенные операции называются ***булевой алгеброй*** если выполняются следующие аксиомы:

1. Ассоциативности:
   $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$,
   $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$.
2. Коммутативности:
   $x \wedge y = y \wedge x$,
   $x \vee y = y \vee x$.
3. Законы поглощения:
   $x \wedge (x \vee y) = x$,
   $x \vee (x \wedge y) = x$.
4. Дистрибутивности:
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
5. Дополнительности:
   $x \wedge \overline{x} = 0$,
   $x \vee \overline{x} = 1$.

Любые алгебры с данным набором операций называются ***булевыми алгебрами***.

В целом можно показать, что в алгебре логики имеют место следующие равносильности, часть которых была рассмотрена выше:

Закон	**Формула**
Идемпотентность дизъюнкции	$x \vee x = x$
Идемпотентность	$x \wedge x = x$

конъюнкции	
Коммутативность конъюнкции	$x \wedge y = y \wedge x$
Коммутативность дизъюнкции	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность дизъюнкции	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$
Ассоциативность конъюнкции	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$
Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Правила де Моргана	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
Блейка-Порецкого	$x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$ $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$
Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$ $x \vee (x \wedge y) = x$
Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{x}} = x$
Свойства констант 0 и 1	$x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$ $x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$
Закон противоречия	$x \wedge \overline{x} = 0$
Закон исключенного третьего	$x \vee \overline{x} = 1$
Закон импликации	$x \to y = \overline{x} \vee y$

Отметим, что свойства, выделенные как аксиомы будут выполняться и для операций объединения, пересечения и дополнения множеств, если сопоставить

- объединение – дизъюнкции;
- пересечение – конъюнкции;

- дополнение – отрицанию, а вместо x, y, z подставить некоторые множества *A, B* и *C* из *U* (универсального множества).

Алгебра $(B(U), \bigcap, \bigcup, \neg)$, где $B(U)$ - булеан, являющийся несущим множеством, а операциями – пересечение, объединение и дополнение множеств, называется ***булевой алгеброй множества U*** или ***алгеброй Кантора.***

Общий термин «булева алгебра» для алгебр множеств и логических функций не случаен.

В алгебре множеств элементами являются подмножества фиксированного («универсального») множества *U*, операции $\wedge$ соответствует пересечение $\bigcap$, операции $\vee$ – объединение $\bigcup$, операции $\neg$ (отрицание) соответствует дополнение; единицей является само множество *U*, нулем - $\varnothing$. Справедливость соотношений 1-5 для алгебры множеств можно доказать непосредственно их проверкой. Для этого нужно рассмотреть переменные в них как множества с введенными выше операциями, и показать, что, если какой-либо элемент принадлежит множеству из левой части равенства, то он принадлежит и правой части, и наоборот.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема (об изоморфизме булевых алгебр)

Алгебра высказываний $(A, \wedge, \vee, \neg)$, где $A = \{0;1\}$ и алгебра множеств $(B(U), \bigcap, \bigcup, \neg)$, где $B(U)$ – булеан множества U изоморфны.

Примем без строгого доказательства, но отметим, что в самом деле эти две алгебры изоморфны, т. е. между ними существует взаимнооднозначное соответствие как для элементов носителей, так и для сигнатур.

Если $\Gamma : A \to B$ – изоморфизм, то алгебры A и B называют изоморфными и обозначают так: $A \overset{\Gamma}{\sim} B$.

Теорема

Отношение изоморфизма на множестве однотипных алгебр является эквивалентностью.

Доказательство:

➢ Проверим рефлексивность, симметричность и транзитивность:

1. Рефлексивность. Очевидно, что $A\overset{\Gamma}{\sim}A$ - выполняется.

2. Симметричность. $A\overset{\Gamma}{\sim}B \Rightarrow B\overset{\Gamma^{-1}}{\sim}A$ - выполняется.

3. Транзитивность. $A\overset{\Gamma_1}{\sim}B \wedge B\overset{\Gamma_2}{\sim}C \Rightarrow A\overset{\Gamma_1\circ\Gamma_2}{\sim}C$ - выполняется.

Таким образом, данное отношение является отношением эквивалентности. Что и требовалось доказать.∢

Пусть однотипные алгебры *A* и *B* изоморфны и, пусть в алгебре *A* установлено свойство $F_1 = F_2$, где F_1 и F_2 – некоторые формулы, записанные с помощью операций алгебры *A*. Тогда, из-за изоморфизма немедленно следует, что в алгебре *B* выполняется свойство $G_1 = G_2$, где G_1 и G_2 – формулы, полученные из F_1 и F_2 заменой операций из алгебры *A* на соответствующие операции алгебры *B*.

Алгебраические структуры принято рассматривать с точностью до изоморфизма, т. е. рассматривать классы эквивалентности однотипных алгебр по отношению изоморфизма.

Изоморфизм булевых алгебр широко используется в компьютерных вычислениях. Например, поразрядные операции над двоичными векторами легко реализуются на компьютере, и их используют вместо выполнения операций над множествами или логическими функциями.

Принцип двойственности и двойственные функции

В булевых алгебрах существуют двойственные утверждения, они либо одновременно верны, либо одновременно неверны. Именно, если в формуле, которая верна в некоторой булевой алгебре, поменять все конъюнкции на дизъюнкции, 0 на 1, $\le$ на $>$ и наоборот или $<$ на $\ge$ и наоборот, то получится формула, также истинная в этой булевой алгебре. Это следует из симметричности аксиом относительно таких замен.

Булева функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***двойственной*** функцией для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f'(x_1', x_2', ..., x_n')$ для любых $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример: Докажите, что одна из функций двойственна другой:

$$yz + x + y,\ \ yz + x + z.$$

Решение:

Найдем двойственную функцию для данной функции $f(x, y, z) = yz + x + y$: $f^* = (y'z' + x' + y')' = y'z' + x' + y' + 1 =$

$= (y+1)(z+1)+(x+1)+(y+1) = yz + y + z + 1 + x + 1 + y + 1 + 1 = yz + x + z$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самоконтроля:

1. Булева алгебра (аксиоматика).
2. Связь булевой алгебры и теории множеств. Теорема об изоморфизме.
3. Эквивалентность отношения изоморфизма на множестве однотипных алгебр.
4. Принцип двойственности и двойственные функции.