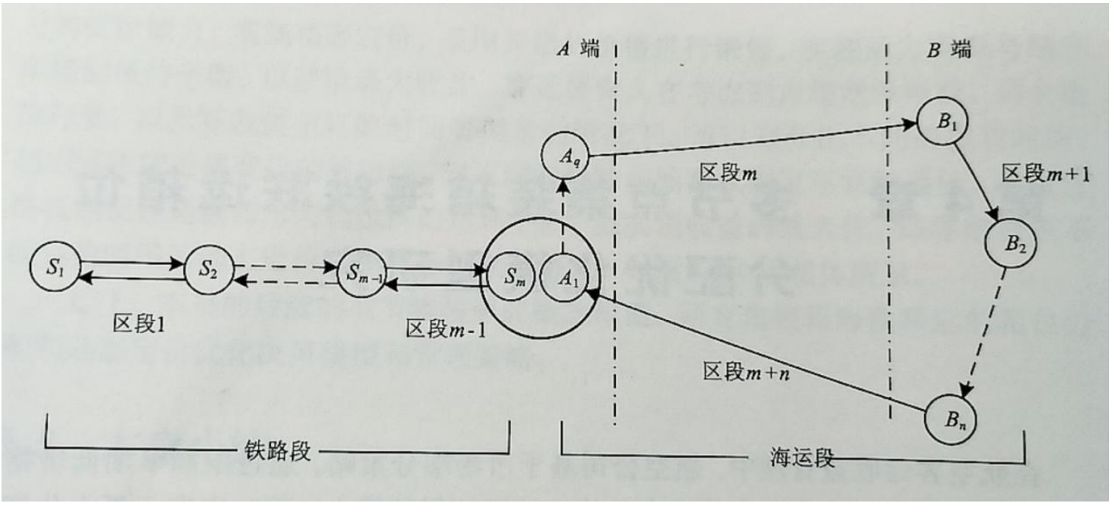
C 目录
ontents

多节点集装箱海铁联运动态定价和箱位分配联合决策优化模型研究

一、线路及问题描述

本章讨论的海铁联运线路仍然是第 4 章讨论的由海运两端港航线和铁路多点汇集式集疏运线组合而成的多节点海铁联运线路形式，如下图所示。



二、模型构建

1.符号说明和模型假设

(1)相关集合及参数

$\Omega_1=\{S_1,S_2,...,S_{m-1}\}$：铁路段前$(m-1)$个节点的集合；

$\Omega_2=\{B_1,B_2,...,B_n\}$：海运段$B$端所有节点的集合；

$\Omega_3=\{S_1,S_2,...,S_m\}$：铁路段所有节点的集合；

$(ij),\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2$：去向的海铁联运重箱 OD 对

$(ji),\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2$：返向的海铁联运重箱 OD 对

$(gh),\forall g,h\in\Omega_3$：空箱调运 OD 对，当$g<h$时$(gh)$表示去向，当$g>h$时$(gh)$表示返向；

p_{ij}^I和p_{ji}^I：分别表示去向 OD 对(ij)和返向 OD 对(ji)上协议货主的协议运价；

p_{gh}：空箱调运 OD 对(gh)上的空箱单位运费率

D_{ij}^I和D_{ji}^I：分别表示去向 OD 对(ij)和返向 OD 对(ji)上协议货主的箱位随机需求量；

E_h：节点h的空箱需求量；

Q_k：联运线路上区段k的总箱位容量，且$Q_k=Q,k=1,2,...,m-1,m,...,m+n$；

T：联运经营人自由销售揽货期的时段数；

t：联运经营人自由销售第t个揽货时段；

$\overline{P}_{ij}$和$\overline{P}_{ji}$：分别表示去向 OD 对(ij)和返向 OD 对(ji)上自由销售的运价上限；

$$A_{ijk}=\begin{cases}1,\text{协议销售的去向 OD 对}(ij)\text{经过区段}k\\0,\text{否则}\end{cases};$$

$$A_{jik}=\begin{cases}1,\text{协议销售的返向 OD 对}(ji)\text{经过区段}k\\0,\text{否则}\end{cases};$$

$$N_{ghk}=\begin{cases}1,\text{空箱运输的节点对}(gh)\text{经过区段}k\\0,\text{否则}\end{cases};$$

$$B_{ijk}=\begin{cases}1,\text{自由销售的去向 OD 对}(ij)\text{经过区段}k\\0,\text{否则}\end{cases};$$

$$B_{jik}=\begin{cases}1,\text{自由销售的返向 OD 对}(ji)\text{经过区段}k\\0,\text{否则}\end{cases}。$$

(2)决策变量

x_{ij}^{I}和x_{ji}^{I}: 分别表示去向 OD 对(ij)上和返向 OD 对上(ji)上在第一阶段分配给协议货主的协议销售箱位数量;

y_{gh}: 在第一阶段分配给 OD 对(gh)上的空箱运输箱位量;

p_{ijt}^{II}和p_{jit}^{II}: 分别表示去向 OD 对(ij)上和返向 OD 对上(ji)上在第二阶段的第t个揽货时段的自由销售运价。

(3)因变量

x_{ijt}^{II}和x_{jit}^{II}: 分别表示去向 OD 对(ij)上和返向 OD 对上(ji)上在第二阶段的第t个揽货时段的箱位随机需求量。虽是不确定性需求，但可以预测到需求随运价变化的规律。假设需求x_{ijt}^{II}和x_{jit}^{II}分别是运价p_{ijt}^{II}和p_{jit}^{II}的函数，即$x_{ijt}^{II}=x_{ijt}^{II}(p_{ijt}^{II})$，$x_{jit}^{II}=x_{jit}^{II}(p_{jit}^{II})$。关于自由销售各时段不确定性需求的函数表达，本章将讨论两种形式。

①需求函数形式I:

需求函数$x_{ijt}^{II}(p_{ijt}^{II})$和$x_{jit}^{II}(p_{jit}^{II})$是最常见的线性函数形式，即

$$x_{ijt}^{II}=x_{ijt}^{II}\left(p_{ijt}^{II}\right)=\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}, t=1,2,\ldots,T$$
$$x_{jit}^{II}=x_{jit}^{II}\left(p_{jit}^{II}\right)=\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}, t=1,2,\ldots,T$$

式中α_{ijt}、β_{ijt}、α_{jit}、β_{jit}需要对历史数据或新调查的数据使用线性回归技术估计出来。由于系数估计值难免会存在误差，因此x_{ijt}^{II}和x_{jit}^{II}可以看成是由于需求函数取值不确定而引起的不确定性需求。

②需求函数形式II:

在线性需求函数基础上再附加一个随机误差项，从而组合成非泊松型加性随机需求形式，即

$$x_{ijt}^{II}=x_{ijt}^{II}\left(p_{ijt}^{II}\right)=\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}+\epsilon_{ijt}, t=1,2,\ldots,T$$
$$x_{jit}^{II}=x_{jit}^{II}\left(p_{jit}^{II}\right)=\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}+\epsilon_{jit}, t=1,2,\ldots,T$$

式中α_{ijt}、β_{ijt}、α_{jit}、β_{jit}需要对历史数据或新调查的数据使用线性回归技术来获得其估计值，不考虑其估值误差，通过附加随机需求误差项ϵ_{ijt}和ϵ_{jit}来表达需求x_{ijt}^{II}和x_{jit}^{II}的不确定性，ϵ_{ijt}和ϵ_{jit}是期望值为 0 的随机变量。

(4)假设条件

①假设联运经营人垄断了该联运线路 OD 对上的集装箱海铁联运市场，能够通过实施灵活的价格策略实现收入最大化的目标，且联运经营人持有中立的风险态度；

②假设货主不会取消已经预定的箱位，也不考虑各 OD 对上各类货主的“No Show”问题，且认为货主所进行的选择行为是短视的；

③假设协议货主和空箱需求都是服从正态分布的整值随机变量，需求分布函数可获得且各 OD 对上的需求是相互独立的；

④假设零散货主在不同时段的需求是随运价变化的，需求函数表达是可获得的，且各 OD 对上各个时段的货主需求是相互独立的。

2.第一阶段模型

目标函数：

$$\max \sum_{(ij),(ji)} (x_{ij}^I p_{ij}^I + x_{ji}^I p_{ji}^I) - \sum_{(gh)} y_{gh} p_{gh}$$

约束条件：

①$\sum_{(ij)} A_{ijk} x_{ij}^I + \sum_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh} \leq Q_k, k = 1,2,\dots,m-1$

②$\sum_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^I + \sum_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh} \leq Q_k, k = 1,2,\dots,m-1$

③$\sum_{(ij),(ji)} (A_{ijk} x_{ij}^I + A_{jik} x_{ji}^I) \leq Q_k, k = m, m+1, \dots, m+n$

④$x_{ij}^I \leq D_{ij}^I$

⑤$x_{ji}^I \leq D_{ji}^I$

⑥$\sum_{g\in\Omega_3, g\neq h} y_{gh} \geq E_h, \forall h \in \Omega_3$

⑦$y_{hl} = 0$, 当 $E_h > 0$ 时, $\forall h, l \in \Omega_3$

⑧$x_{ij}^I, x_{ji}^I, y_{gh} \in N \cup \{0\}$

第一阶段箱位分配模型 Model 1 可以表示为:

$$\max \sum_{(ij),(ji)} (x_{ij}^{I} p_{ij}^{I} + x_{ji}^{I} p_{ji}^{I}) - \sum_{(gh)} y_{gh} p_{gh}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{(ij)} A_{ijk} x_{ij}^{I} + \sum_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh} \le Q_k, k = 1,2,\dots,m-1 \\ \sum_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^{I} + \sum_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh} \le Q_k, k = 1,2,\dots,m-1 \\ \sum_{(ij),(ji)} (A_{ijk} x_{ij}^{I} + A_{jik} x_{ji}^{I}) \le Q_k, k = m, m+1, \dots, m+n \\ x_{ij}^{I} \le D_{ij}^{I} \\ x_{ji}^{I} \le D_{ji}^{I} \\ \sum_{g \in \Omega_3, g \ne h} y_{gh} \ge E_h, \forall h \in \Omega_3 \\ y_{hl} = 0, \text{当} E_h > 0 \text{ 时}, \forall h, l \in \Omega_3 \\ x_{ij}^{I}, x_{ji}^{I}, y_{gh} \in N \cup \{0\} \end{cases}$$

模型 Model 1 的最优解表示为x_{ij}^{I*}、x_{ji}^{I*}和y_{gh}^{*}。

3.第二阶段模型

目标函数:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} (x_{ijt}^{II} p_{ijt}^{II} + x_{jit}^{II} p_{jit}^{II})$$

约束条件:

①$\sum_{(ij)} A_{ijk} x_{ij}^{I*} + \sum_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh}^{*} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij)} B_{ijk} x_{ijt}^{II} \le Q_k$

②$\sum_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^{I*} + \sum_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh}^{*} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ji)} B_{jik} x_{jit}^{II} \le Q_k$

③$\sum_{(ij),(ji)} (A_{ijk} x_{ij}^{I*} + A_{jik} x_{ji}^{I*}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} (B_{ijk} x_{ijt}^{II} + B_{jik} x_{jit}^{II}) \le Q_k$

④$p_{ij}^{I} \le p_{ijt}^{II} \le \overline{P}_{ij}$

⑤$p_{ji}^{I} \le p_{jit}^{II} \le \overline{P}_{ji}$

第二阶段的动态定价模型 Model 2 可以表示为:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} (x_{ijt}^{II} p_{ijt}^{II} + x_{jit}^{II} p_{jit}^{II})$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{(ij)} A_{ijk} x_{ij}^{I*} + \sum_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh}^{*} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij)} B_{ijk} x_{ijt}^{II} \le Q_k \\ \sum_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^{I*} + \sum_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh}^{*} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ji)} B_{jik} x_{jit}^{II} \le Q_k \\ \sum_{(ij),(ji)} (A_{ijk} x_{ij}^{I*} + A_{jik} x_{ji}^{I*}) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} (B_{ijk} x_{ijt}^{II} + B_{jik} x_{jit}^{II}) \le Q_k \\ p_{ij}^{I} \le p_{ijt}^{II} \le \overline{P}_{ij} \\ p_{ji}^{I} \le p_{jit}^{II} \le \overline{P}_{ij} \end{cases}$$

三、模型求解

1.第一阶段模型求解

首先确定置信度μ_{ij}和μ_{ji}，将 Model 1 中的需求$x_{ij}^I \le D_{ij}^I$和$x_{ji}^I \le D_{ji}^I$转化为机会约束，即

$$\Pr\left(x_{ij}^I \le D_{ij}^I\right) \ge \mu_{ij}$$

$$\Pr\left(x_{ji}^I \le D_{ji}^I\right) \ge \mu_{ji}$$

假设D_{ij}^I和D_{ji}^I服从正态分布，其分布函数分别为$\Phi_{ij}(\cdot)$和$\Phi_{ji}(\cdot)$，则可以得到机会约束的确定性等价为

$$x_{ij}^I \le K_{\mu_{ij}} = \sup\{K|K = \Phi_{ij}^{-1}(1-\mu_{ij})\}$$

$$x_{ji}^I \le K_{\mu_{ji}} = \sup\{K|K = \Phi_{ji}^{-1}(1-\mu_{ji})\}$$

其中，$\Phi_{ij}^{-1}(\cdot)$和$\Phi_{ji}^{-1}(\cdot)$分别为函数$\Phi_{ij}(\cdot)$和$\Phi_{ji}(\cdot)$的逆函数，当上面两式的解不唯一时，分别取其中最大的解。

然后将模型 Model 1 转化为一定置信度下的确定性整数规划模型 Model 3。

$$\max \sum_{(ij),(ji)} (x_{ij}^I p_{ij}^I + x_{ji}^I p_{ji}^I) - \sum_{(gh)} y_{gh} p_{gh}$$

$$s.t.\begin{cases}
\sum\limits_{(ij)} A_{ijk} x_{ij}^I + \sum\limits_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh} \le Q_k, k = 1,2,\dots,m-1 \\
\sum\limits_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^I + \sum\limits_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh} \le Q_k, k = 1,2,\dots,m-1 \\
\sum\limits_{(ij),(ji)} (A_{ijk} x_{ij}^I + A_{jik} x_{ji}^I) \le Q_k, k = m, m+1, \dots, m+n \\
x_{ij}^I \le K_{\mu_{ij}} = \sup\{K|K = \Phi_{ij}^{-1}(1-\mu_{ij})\} \\
x_{ji}^I \le K_{\mu_{ji}} = \sup\{K|K = \Phi_{ji}^{-1}(1-\mu_{ji})\} \\
\sum\limits_{g\in\Omega_3, g\ne h} y_{gh} \ge E_h, \forall h \in \Omega_3 \\
y_{hl} = 0, \text{当} E_h > 0 \text{ 时}, \forall h, l \in \Omega_3 \\
x_{ij}^I, x_{ji}^I, y_{gh} \in N \cup \{0\}
\end{cases}$$

模型 Model 3 的最优解表示为x_{ij}^{I*}、x_{ji}^{I*}和y_{gh}^*。

2.第二阶段模型求解

(1)需求函数I下的模型求解

首先，令$\widetilde{\alpha}_{ijt} \in [\alpha_{ijt} - \widehat{\alpha}_{ijt}, \alpha_{ijt} + \widehat{\alpha}_{ijt}]$，$\widetilde{\beta}_{ijt} \in [\beta_{ijt} - \widehat{\beta}_{ijt}, \beta_{ijt} + \widehat{\beta}_{ijt}]$

$\widetilde{\alpha}_{jit} \in [\alpha_{jit} - \widehat{\alpha}_{jit}, \alpha_{jit} + \widehat{\alpha}_{jit}]$，$\widetilde{\beta}_{jit} \in [\beta_{jit} - \widehat{\beta}_{jit}, \beta_{jit} + \widehat{\beta}_{jit}]$

其中，$\widetilde{\alpha}_{ijt}$、$\widetilde{\beta}_{ijt}$表示需求函数系数α_{ijt}、β_{ijt}的实际值，$\alpha_{ijt} > 0$，$\widehat{\beta}_{ijt} > 0$ 表示系数$\widetilde{\alpha}_{ijt}$、$\widetilde{\beta}_{ijt}$的变化幅度。$\widetilde{\alpha}_{jit}$、$\widetilde{\beta}_{jit}$之类同理。

假设ξ_{ijt}、η_{ijt}、ξ_{jit}、η_{jit}都在闭区间$[-1,1]$上取值，ξ_{ijt}是实际值$\widetilde{\alpha}_{ijt}$与估计值α_{ijt}的偏差程度，η_{ijt}是实际值$\widetilde{\beta}_{ijt}$与估计值β_{ijt}的偏差程度。ξ_{jit}、η_{jit}同理。则有

$$\widetilde{\alpha}_{ijt} = \alpha_{ijt} + \widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}$$
$$\widetilde{\beta}_{ijt} = \beta_{ijt} + \widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}$$
$$\widetilde{\alpha}_{jit} = \alpha_{jit} + \widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}$$
$$\widetilde{\beta}_{jit} = \beta_{jit} + \widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}$$

由此可得第t时段的实际需求量可以表示为

$$\tilde{x}_{ijt}^{II} = \widetilde{\alpha}_{ijt} - \widetilde{\beta}_{ijt}p_{ijt}^{II} = (\alpha_{ijt} + \widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}) - (\beta_{ijt} + \widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt})p_{ijt}^{II}$$
$$\tilde{x}_{jit}^{II} = \widetilde{\alpha}_{jit} - \widetilde{\beta}_{jit}p_{jit}^{II} = (\alpha_{jit} + \widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}) - (\beta_{jit} + \widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit})p_{jit}^{II}$$

易得第t时段实际需求量$\tilde{x}_{ijt}^{II}$与估计需求量x_{ijt}^{II}相差的绝对值为$|\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt} - \widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}|$，实际需求量$\tilde{x}_{jit}^{II}$与估计需求量$x_{jit}^{II}$相差的绝对值为$|\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit} - \widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}|$。

然后，引入限制系数Γ_{ij}和Γ_{ji}，用来约束去向 OD 对(ij)和返向 OD 对(ji)上实际各时段总需求量偏离估计总需求量的程度，有

$$\left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt} - \widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)\right| \le \sum_{t=1}^{T}\left|\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt} - \widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right| \le \Gamma_{ij}$$

$$\left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit} - \widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right| \le \sum_{t=1}^{T}\left|\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit} - \widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right| \le \Gamma_{ji}$$

Γ_{ij}和Γ_{ji}都是非负实数，且$\Gamma_{ij} \in [0, \sum_{t=1}^{T}(\widehat{\alpha}_{ijt} + \widehat{\beta}_{ijt}\overline{P}_{ij})]$，$\Gamma_{ji} \in [0, \sum_{t=1}^{T}(\widehat{\alpha}_{jit} + \widehat{\beta}_{jit}\overline{P}_{ji})]$。在取值范围内，$\Gamma_{ij}$和$\Gamma_{ji}$的数值越大则代表联运经营人掌握的信息越少，反之则代表联运经营人掌握的信息越多。

在上述实际需求量不确定的情况下，模型 Model 2 的目标函数总收入也会产生变化。为此，得到了 Model 4，即

$$\max z=\sum_{t=1}^{T}\left[\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]$$

$$+\min\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]\right\}$$

约束条件有:

①$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II})+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II})\le Q_k-\sum_{(ij)}A_{ijk}x_{ij}^{I*}-\sum_{(gh),g<h}N_{ghk}y_{gh}^{*}$, $k=1,2,\dots,m-1$

②$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II})+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II})\le Q_k-\sum_{(ji)}A_{jik}x_{ji}^{I*}-\sum_{(gh),g>h}N_{ghk}y_{gh}^{*}$, $k=1,2,\dots,m-1$

③$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right]+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II})\right]\le Q_k-\sum_{(ij),(ji)}\left(A_{ijk}x_{ij}^{I*}+A_{jik}x_{ji}^{I*}\right)$,

$k=m,m+1,\dots,m+n$

④$\left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)\right|\le\Gamma_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑤$\left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right|\le\Gamma_{ji},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑥$\left|\xi_{ijt}\right|\le 1,\left|\eta_{ijt}\right|\le 1,\left|\xi_{jit}\right|\le 1,\left|\eta_{jit}\right|\le 1,\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑦$p_{ij}^{I}\le p_{ijt}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑧$p_{ji}^{I}\le p_{jit}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

将 Model 4 中的约束条件④代入①和③，将约束条件⑤代入②和③，经过合并将模型 Model 4 进一步松弛为稳健模型 Model 5，即

$$\max z=\sum_{t=1}^{T}\left[\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]$$
$$+\min\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]\right\}$$

约束条件:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)\le Q_k-A_{ijk}x_{ij}^{I*}-\sum_{(gh),g<h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ij)}B_{ijk}\Gamma_{ij}$$
$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\le Q_k-\sum_{(ji)}A_{jik}x_{ji}^{I*}-\sum_{(gh),g>h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ji)}B_{jik}\Gamma_{ji}$$
$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right]$$
$$\le Q_k-\sum_{(ij),(ji)}\left(A_{ijk}x_{ij}^{I*}+A_{jik}x_{ji}^{I*}\right)-\sum_{(ij),(ji)}\left(B_{ijk}\Gamma_{ij}+B_{jik}\Gamma_{ji}\right),$$
$$k=m,m+1,\dots m+n$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{ijt}\xi_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}\eta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)\ge-\Gamma_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_{jit}\xi_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}\eta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\ge-\Gamma_{ji},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$\left|\xi_{ijt}\right|\le 1,\left|\eta_{ijt}\right|\le 1,\left|\xi_{jit}\right|\le 1,\left|\eta_{jit}\right|\le 1,\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$p_{ij}^{I}\le p_{ijt}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$p_{ji}^{I}\le p_{jit}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

模型 Model 5 是一个包含内层最小化的双层规划模型，其内层规划是以ξ_{ijt}、η_{ijt}、ξ_{jit}、η_{jit}为决策变量的线性规划，利用强对偶定理可以得到以下定理。

定理 1 动态定价的稳健模型 Model 5 等价于下述凸规划模型 Model 6。

$$\max z=\sum_{t=1}^{T}\left[\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]-\sum_{(ij),(ji)}\left(\Gamma_{ij}w_{ij}+\Gamma_{ji}w_{ji}\right)$$

$$-\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[\left(\widehat{\alpha}_{ijt}-\widehat{\beta}_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)\left(p_{ijt}^{II}-w_{ij}\right)+\left(\widehat{\alpha}_{jit}-\widehat{\beta}_{jit}p_{jit}^{II}\right)\left(p_{jit}^{II}-w_{ji}\right)\right]$$

约束条件:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II})\le Q_k-A_{ijk}x_{ij}^{I*}-\sum_{(gh),g<h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ij)}B_{ijk}\Gamma_{ij}\,,$$

$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II})\le Q_k-\sum_{(ji)}A_{jik}x_{ji}^{I*}-\sum_{(gh),g>h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ji)}B_{jik}\Gamma_{ji}\,,$$

$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right]$$

$$\le Q_k-\sum_{(ij),(ji)}\left(A_{ijk}x_{ij}^{I*}+A_{jik}x_{ji}^{I*}\right)-\sum_{(ij),(ji)}\left(B_{ijk}\Gamma_{ij}+B_{jik}\Gamma_{ji}\right),$$

$$k=m,m+1,\dots m+n$$

$$p_{ij}^{I}\le p_{ijt}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$p_{ji}^{I}\le p_{jit}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$w_{ij}\ge 0,w_{ji}\ge 0,\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

式中，w_{ij}和w_{ji}是模型 Model 5 内层规划的对偶问题的决策变量。最后，求解鲁棒优化模型 Model 6，则可获得第二阶段的最有定价策略，从而能求出相应 OD 对上各时段的箱位分配策略。

(2)需求函数II下的模型求解

在需求函数II下，$x_{ijt}^{II}=x_{ijt}^{II}\left(p_{ijt}^{II}\right)=\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}+\epsilon_{ijt}$和$x_{jit}^{II}=x_{jit}^{II}\left(p_{jit}^{II}\right)=\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}+\epsilon_{jit}$中的随机误差项$\epsilon_{ijt}$和$\epsilon_{jit}$是需求函数的不确定性因素，模型最优解对$\epsilon_{ijt}$和$\epsilon_{jit}$的分布估计依赖性很强。实际上，$\epsilon_{ijt}$和$\epsilon_{jit}$的分布情况很难准确估计出来。

在只知道ϵ_{ijt}和ϵ_{jit}的期望都为 0 而未知其分布函数的情况下，为了得到稳健最优解，无需满足所有随机取值情境下的约束条件，只需在随机项变化范围缩小后求出最优解。这样做不仅适应随机项变化的稳健性要求仍然得到满足，而且目标函数值也不会损失过多。

首先，令$\epsilon_{ijt}\in[-\hat{\epsilon}_{ijt},\hat{\epsilon}_{ijt}]$，$\epsilon_{jit}\in[-\hat{\epsilon}_{jit},\hat{\epsilon}_{jit}]$，其中$\hat{\epsilon}_{ijt}>0$，$\hat{\epsilon}_{jit}>0$ 表示随机项ϵ_{ijt}和ϵ_{jit}的变化幅度，假设λ_{ijt}和λ_{jit}的取值范围都在闭区间$[-1,1]$上，λ_{ijt}和λ_{jit}分别表示随机项ϵ_{ijt}和ϵ_{jit}的实际值与期望值的偏离程度，则第t时段的实际需求可以表示为

$$x_{ijt}^{II}=x_{ijt}^{II}\left(p_{ijt}^{II}\right)=\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}+\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}$$
$$x_{jit}^{II}=x_{jit}^{II}\left(p_{jit}^{II}\right)=\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}+\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}$$

然后，引入限制系数Δ_{ij}和Δ_{ji}，用来约束去向 OD 对(ij)上和返向 OD 对(ji)上实际各时段总需求量偏离期望总需求量的程度，即有

$$\left|\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}\right|\le\Delta_{ij}$$

$$\left|\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}\right|\le\Delta_{ji}$$

在这里，Δ_{ij}和Δ_{ji}都是非负实数，$\Delta_{ij}\in[0,\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{ijt}]$，$\Delta_{ji}\in[0,\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{jit}]$。在取值范围内，$\Delta_{ij}$和$\Delta_{ji}$的数值越大，则意味着联运经营人掌握的需求函数信息越少，反之则意味着联运经营人掌握的需求函数信息越少。

于是 Model 2 可以近似转化为动态定价稳健模型 Model 7，即

$$\max z=\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]$$

$$+\min\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left(\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}p_{ij}^{II}+\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}p_{ji}^{II}\right)\right]$$

约束条件：

①$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}\le Q_k-\sum_{(ij)}A_{ijk}x_{ij}^{I*}-\sum_{(gh),g<h}N_{ghk}y_{gh}^{*},k=1,2,\ldots,m-1$

②$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}\le Q_k-\sum_{(ji)}A_{jik}x_{ji}^{I*}-\sum_{(gh),g>h}N_{ghk}y_{gh}^{*},k=1,2,\ldots,m-1$

③$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right]+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left(B_{ijk}\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}+B_{jik}\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}\right)\le Q_k-\sum_{(ij),(ji)}\left(A_{ijk}x_{ij}^{I*}+A_{jik}x_{ji}^{I*}\right),k=m,m+1,\ldots,m+n$

④$\left|\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{ijt}\lambda_{ijt}\right|\le\Delta_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑤$\left|\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_{jit}\lambda_{jit}\right|\le\Delta_{ji},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑥$\left|\lambda_{ijt}\right|\le 1,\left|\lambda_{jit}\right|\le 1,\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑦$p_{ij}^{I}\le p_{ijt}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$

⑧$p_{ji}^{I}\le p_{jit}^{II}\le\overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$'

将模型 Model 7 中约束条件④代入①和③，将约束条件⑤代入②和③，经过约束条件的合并，将模型 Model 7 进一步松弛为等价的稳健模型 Model 8：

$$\max z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} \left[\left(\alpha_{ijt} - \beta_{ijt} p_{ijt}^{II}\right) p_{ijt}^{II} + \left(\alpha_{jit} - \beta_{jit} p_{jit}^{II}\right) p_{jit}^{II}\right]$$

$$+ \min \left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} \left(\hat{\epsilon}_{ijt} \lambda_{ijt} p_{ij}^{II} + \hat{\epsilon}_{jit} \lambda_{jit} p_{ji}^{II}\right)\right]$$

约束条件：

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij)} B_{ijk}\left(\alpha_{ijt} - \beta_{ijt} p_{ijt}^{II}\right) \le Q_k - A_{ijk} x_{ij}^{I*} - \sum_{(gh),g<h} N_{ghk} y_{gh}^{*} - \sum_{(ij)} B_{ijk} \Delta_{ij},$$
$$k = 1,2,\ldots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{(ji)} B_{jik}\left(\alpha_{jit} - \beta_{jit} p_{jit}^{II}\right) \le Q_k - \sum_{(ji)} A_{jik} x_{ji}^{I*} - \sum_{(gh),g>h} N_{ghk} y_{gh}^{*} - \sum_{(ji)} B_{jik} \Delta_{ji},$$
$$k = 1,2,\ldots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{(ij),(ji)} \left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt} - \beta_{ijt} p_{ijt}^{II}\right) + B_{jik}\left(\alpha_{jit} - \beta_{jit} p_{jit}^{II}\right)\right]$$
$$\le Q_k - \sum_{(ij),(ji)} \left(A_{ijk} x_{ij}^{I*} + A_{jik} x_{ji}^{I*}\right) - \sum_{(ij),(ji)} \left(B_{ijk} \Delta_{ij} + B_{jik} \Delta_{ji}\right),$$
$$k = m, m+1, \ldots m+n$$

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_{ijt} \lambda_{ijt} \ge -\Delta_{ij}, \forall i \in \Omega_1, \forall j \in \Omega_2, \forall t$$

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_{jit} \lambda_{jit} \ge -\Delta_{ji}, \forall i \in \Omega_1, \forall j \in \Omega_2, \forall t$$

$$\left|\lambda_{ijt}\right| \le 1, \left|\lambda_{jit}\right| \le 1, \forall i \in \Omega_1, \forall j \in \Omega_2, \forall t$$

$$p_{ij}^{I} \le p_{ijt}^{II} \le \overline{P}_{ij}, \forall i \in \Omega_1, \forall j \in \Omega_2, \forall t$$

$$p_{ji}^{I} \le p_{jit}^{II} \le \overline{P}_{ij}, \forall i \in \Omega_1, \forall j \in \Omega_2, \forall t$$

同(1)一样，模型 Model 8 是一个双层规划问题，其内层规划是以λ_{ijt}和λ_{jit}为决策变量的线性规划，利用强对偶定理可以得到以下定理。

定理 2 动态定价的稳健模型 Model 8 等价于下述凸规划模型 Model 9。

$$\max z=\sum_{t=1}^{T}\left[\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)p_{ijt}^{II}+\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)p_{jit}^{II}\right]-\sum_{(ij),(ji)}\left(\Delta_{ij}z_{ij}+\Delta_{ji}z_{ji}\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[\hat{\epsilon}_{ijt}\left(p_{ijt}^{II}-z_{ij}\right)+\hat{\epsilon}_{jit}\left(p_{jit}^{II}-z_{ji}\right)\right]$$

约束条件：

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij)}B_{ijk}(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II})\le Q_k-A_{ijk}x_{ij}^{I*}-\sum_{(gh),g<h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ij)}B_{ijk}\Delta_{ij}\,,$$

$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ji)}B_{jik}(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II})\le Q_k-\sum_{(ji)}A_{jik}x_{ji}^{I*}-\sum_{(gh),g>h}N_{ghk}y_{gh}^{*}-\sum_{(ji)}B_{jik}\Delta_{ji}\,,$$

$$k=1,2,\dots,m-1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{(ij),(ji)}\left[B_{ijk}\left(\alpha_{ijt}-\beta_{ijt}p_{ijt}^{II}\right)+B_{jik}\left(\alpha_{jit}-\beta_{jit}p_{jit}^{II}\right)\right]$$

$$\le Q_k-\sum_{(ij),(ji)}\left(A_{ijk}x_{ij}^{I*}+A_{jik}x_{ji}^{I*}\right)-\sum_{(ij),(ji)}\left(B_{ijk}\Delta_{ij}+B_{jik}\Delta_{ji}\right),$$

$$k=m,m+1,\dots m+n$$

$$p_{ij}^{I}\le p_{ijt}^{II}\le \overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$p_{ji}^{I}\le p_{jit}^{II}\le \overline{P}_{ij},\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

$$z_{ij}\ge 0,z_{ji}\ge 0,\forall i\in\Omega_1,\forall j\in\Omega_2,\forall t$$

式中，z_{ij}和z_{ji}是模型 Model 8 内层规划的对偶问题的决策变量。最后，求解鲁棒优化模型 Model 9，则可获得第二阶段的最有定价策略，从而能求出相应 OD 对上各时段的箱位分配策略。