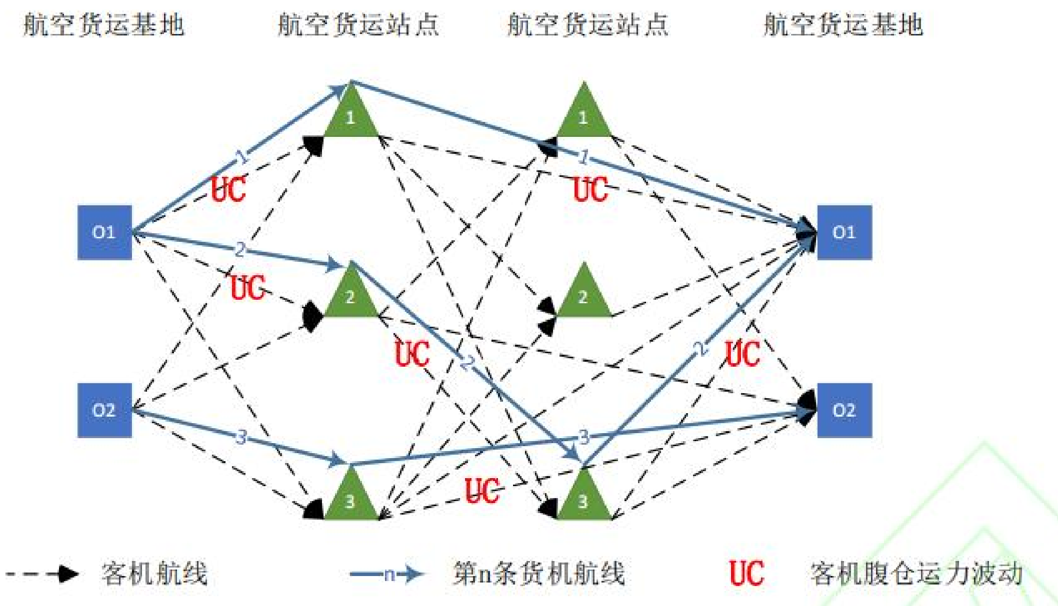
新冠疫情背景下航空物流网络鲁棒优化研究

一、问题描述

在有向图$G=(N,\Omega)$上建模，其中N是节点集，Ω是网络中的弧集。基于多个航空货运基地O的位置，进行航线路径规划。现实航空公司选取客机进行货运作业时，通常选取直达航班，即可理解为由客机腹舱构成点对点式客机腹舱货运网络。而任一货机则具备从航空货运基地经过多个节点经停，最终返回处罚的航空货运基地形成闭合环状航线的特点。考虑疫情发生情景存在不确定性，客机腹舱运力在不同疫情场景下对航线受影响的程度不同，疫情发生后大幅影响的航线数量存在差异，且不同航线发生中断后对航空物流网络的影响程度也存在差异。由于这种不确定性，管理者规划网络时需要采取不同风险态度制定合理的货机航线布局方案及货物配流方案。具体不确定客机腹舱运力情景下货机航线网络优化问题如下图所示。



二、模型假设及建立

2.1.模型假设

(1)运输过程中各航段的全货机单位运输成本相同，全货机的单位运输成本与飞机的类型相关，假设所用的全货机类型一致；

(2)运输过程中客机腹舱的单位租赁成本相同；

(3)货物可以在混合网络中的任何航段进行中转运输；

(4)考虑全货机在每一机场的装卸、等待时间以及全货机航权约束等问题，一般每天全货机可飞行 3 个航段；

(5)航空物流网络正常运行时除少数不支持腹舱运输的航段外，其他航段上都有腹舱运输。

2.2.符号参数说明

(1)集合

O：航空货运基地集合，$o \in O$；

N：节点集合，$i, j \in N$；

Ω：航段集合，$\Omega = \{(ij)|i, j \in N\}$；

L：货机集合，$l \in L$。

(2)参数

W_{ij}：点i到点j的需求量；

d_{ij}：点i到点j的距离；

C_P：表示货机在任一航段的固定飞行成本；

C_o：表示航空货运基地o的建设成本；

C_T：单架货机的单位运输成本；

C_K：客机腹舱单位租赁成本；

q_{ij}：航段$[i, j]$上的最大客机腹舱运力容量；

C_S：未运输货物的单位损失成本；

Q_T：货机最大运载容量；

B：航空基地数量。

(3)决策变量

x_i^l：表示第l架货机是否由i点起飞，货机l由i点起飞则取 1，反之则取 0；

$X_{[i,j]}^l$：表示第l架货机是否经过$[i, j]$航段，货机l经过$[i, j]$航段则取 1，反之则取 0；

Q_{ij}^T：点i到点j上的货机货运量；

Q_{ij}^K：点i到点j上的客机腹舱货运量；

S_{ij}：点i到点j上未运输的需求。

2.3.不确定集合构建

由于需要考虑客机腹舱货运能力减少情形下构建一个鲁棒的航空物流网络，在此情形中正向偏差值对于系统成本几乎不产生影响，即小于客机腹舱运力期望值时才会产生额外的成本。因此研究的不确定客机腹舱运力范围在$\bar{q}_{ij} - \hat{q}_{ij}$到$\bar{q}_{ij}$的区间范围内，即构建的多面体不

确定性集合为

$$q_{ij} \in [\bar{q}_{ij} - \hat{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}]$$

$$U = \{q_{ij} | q_{ij} = \bar{q}_{ij} - \hat{q}_{ij} z_{ij}, \forall (ij) \in \Omega\}$$

$$Z = \{z_{ij} | \sum_{(ij)\in\Omega} z_{ij} \le \Gamma, 0 \le z_{ij} \le 1, \forall (ij) \in \Omega\}$$

式中q_{ij}为航段$[i,j]$上不确定客机腹舱运力参数；$\hat{q}_{ij}$为航段$[i,j]$上疫情发生后客机腹舱运力最大偏离量；$\bar{q}_{ij}$为航段$[i,j]$上正常状态下客机腹舱运力均值；Γ为不确定预算水平，表示决策者对客机腹舱运力不确定性的风险态度，Γ在实证问题中的现实意义可以近似理解为决策者在规划网络过程中预判可能发生客机腹舱运力下降的航段数量，故Γ值的定义区间由网络中航段集合大小决定($0 \le \Gamma \le |\Omega|$)。

2.4.模型建立

目标函数：

$$\min\{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1,j=1}^{N} C_P X_{[i,j]}^{l} + \sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\left(C_T d_{ij} X_{[i,j]}^{l}\right) + C_o B\}$$

$$+ \max_{z} \min_{Q_{ij}^{T}, Q_{ij}^{K}, S_{ij}} \{\sum_{i=1,j=1}^{N}\left(C_K d_{ij} Q_{ij}^{K}\right) + \sum_{i=1,j=1}^{N} C_S S_{ij}\} \tag{1}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{N} X_{[i,j]}^{l} = x_i^l \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_{[i,j]}^{l} \le M \sum_{o=1}^{O} x_o^l \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_{[i,s]}^{l} - \sum_{j=1}^{N} X_{[s,j]}^{l} = 0, \forall s \in N \tag{4}$$

$$\sum_{i=1,j=1}^{N} X_{[i,j]}^{l} \le 3 \tag{5}$$

$$\left(\sum_{l=1}^{L} X_{[i,j]}^{l} - 1\right) Q_T \le Q_{ij}^{T} \le \sum_{l=1}^{L} X_{[i,j]}^{l} Q_T \tag{6}$$

$$Q_{ij}^{K} \le \bar{q}_{ij} - \hat{q}_{ij} z_{ij} \tag{7}$$

$$Q_{ij}^{T} + Q_{ij}^{K} + S_{ij} = W_{ij} \tag{8}$$

$$\sum_{(ij)\in\Omega} z_{ij} \le \Gamma \tag{9}$$

$$0 \le z_{ij} \le 1, \forall (ij) \in \Omega \tag{10}$$

$$X_{[i,j]}^{l} \in \{0,1\}, x_i^l \in \{0,1\} \tag{11}$$

$$Q_{ij}^{T}, Q_{ij}^{K}, S_{ij} > 0 \tag{12}$$

三、模型求解

3.1.模型等价转换

基于模型双层结构特点，将原问题拆分为主问题与子问题，其中，拆分主问题为：

$$\min\{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1,j=1}^{N}C_P X_{[i,j]}^{l}+\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\left(C_T d_{ij}X_{[i,j]}^{l}\right)+C_o B+\theta\} \tag{13}$$

主问题约束条件为(2)~(5)、(11)。其中θ表示子问题最优目标函数值，子问题为：

$$\max_{z}\min_{Q_{ij}^{T},Q_{ij}^{K},S_{ij}}\{\sum_{i=1,j=1}^{N}\left(C_K d_{ij}Q_{ij}^{K}\right)+\sum_{i=1,j=1}^{N}C_S S_{ij}\} \tag{14}$$

子问题约束条件为(6)~(10)、(12)。子问题根据对偶理论，可转化为如下形式(DRO)：

$$\max_{\alpha,\beta,\lambda,\rho}\{-\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}Q_T\alpha_{ij}+\left(\sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}-1\right)Q_T\beta_{ij}$$

$$-\sum_{i=1,j=1}^{N}\left(\bar{q}_{ij}-\hat{q}_{ij}z_{ij}\right)\rho_{ij}+\sum_{i=1,j=1}^{N}W_{ij}\lambda_{ij}\} \tag{15}$$

$$-\alpha_{ij}+\beta_{ij}+\lambda_{ij}\le 0 \tag{16}$$

$$-\rho_{ij}+\lambda_{ij}\le C_K d_{ij} \tag{17}$$

$$\lambda_{ij}\le C_S \tag{18}$$

$$\alpha_{ij},\beta_{ij},\rho_{ij}\ge 0 \tag{19}$$

由于这个对偶问题(DRO)内存在线性决策变量的乘积，是个 NP-hard 问题，难以直接求解。若$\Gamma\in Z^{+}$，那么这个对偶问题存在最优解$(\alpha^*,\beta^*,\lambda^*,\rho^*,z^*)$且$z^*\in\{0,1\}$。引入连续辅助变量$\omega_{ij}=z_{ij}\rho_{ij}\ge 0$及足够大的常数$M$线性化目标函数中线性决策变量的乘积，则可得以下推论模型(DRO-MIP)：

$$DR\left(\bar{\bar{x}}\right)=\max_{\alpha,\beta,\lambda,\rho}\{-\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}Q_T\alpha_{ij}+\left(\sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}-1\right)Q_T\beta_{ij}$$

$$-\sum_{i=1,j=1}^{N}\left(\bar{q}_{ij}\rho_{ij}-\hat{q}_{ij}\omega_{ij}\right)+\sum_{i=1,j=1}^{N}W_{ij}\lambda_{ij}\} \tag{20}$$

约束条件为(16)~(19)及下列(21)~(25)：

$$z_{ij}\in\{0,1\},\forall(ij)\in\Omega \tag{21}$$

$$\omega_{ij}\le\rho_{ij} \tag{22}$$

$$\omega_{ij}+\left(1-z_{ij}\right)M\ge\rho_{ij},\forall(ij)\in\Omega \tag{23}$$

$$\omega_{ij}\le Mz_{ij},\forall(ij)\in\Omega \tag{24}$$

$$\omega_{ij}\ge 0,,\forall(ij)\in\Omega \tag{25}$$

3.2.求解算法流程

(1)令$UB=+\infty$，$LB=-\infty$，$m=0$，σ为足够小的正数；

(2)求解以下主问题：

$$\min\{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1,j=1}^{N}C_P X_{[i,j]}^{l}+\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\left(C_T d_{ij}X_{[i,j]}^{l}\right)+C_o B+\theta\}$$

该主问题的约束有约束(2)~(5)以及:

$$\theta \ge \sum_{i=1,j=1}^{N}\left(C_K d_{ij}Q_{ij}^{Kr}\right)+\sum_{i=1,j=1}^{N}C_S S_{ij}^{r}, \forall r=1.\dots,m \tag{26}$$

$$\left(\sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}-1\right)Q_T \le Q_{ij}^{Tr}\le \sum_{l=1}^{L}X_{[i,j]}^{l}Q_T, \forall r=1.\dots,m \tag{27}$$

$$Q_{ij}^{Kr}\le \bar{q}_{ij}-\hat{q}_{ij}z_{ij}^{r}, \forall r=1.\dots,m \tag{28}$$

$$Q_{ij}^{Tr}+Q_{ij}^{Kr}+S_{ij}^{r}=W_{ij}^{r}, \forall r=1.\dots,m \tag{29}$$

$$X_{[i,j]}^{l}\in\{0,1\}, x_i^l\in\{0,1\} \tag{30}$$

$$Q_{ij}^{Tr},Q_{ij}^{Kr},S_{ij}^{r}>0, \forall r=1.\dots,m \tag{31}$$

求解主问题得到的最优解为

$$\left(x_i^{l(m+1)},{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l},\theta^{m+1},Q_{ij}^{K1},\dots,Q_{ij}^{Km},Q_{ij}^{T1},\dots,Q_{ij}^{Tm},S_{ij}^{1},\dots,S_{ij}^{m}\right)^*$$

同时更新主问题的最优目标函数至下界

$$LB=\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1,j=1}^{N}C_P {X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}+\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\left(C_T d_{ij}{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}\right)+\theta^{m+1}$$

(3)将$\left(x_i^{l(m+1)},{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}\right)^*$代入对应的相关子问题 DRO-MIP 以得到最坏情景下的$\bar{Z}^{m+1}$以及其目标函数值 $\mathrm{opt}(Q_{ij}^{T(m+1)},Q_{ij}^{K(m+1)},S_{ij}^{(m+1)})$，同时更新上界

$$\min\{UB,\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1,j=1}^{N}C_P {X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}+\sum_{i=1,j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\left(C_T d_{ij}{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}\right)+C_o B$$
$$+\mathrm{opt}(Q_{ij}^{T(m+1)},Q_{ij}^{K(m+1)},S_{ij}^{(m+1)})\} \tag{32}$$

(4)如果$gap=\frac{UB-LB}{LB}\le\sigma$时输出

$$\left(x_i^{l(m+1)},{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l},\theta^{m+1},Q_{ij}^{K1},\dots,Q_{ij}^{Km},Q_{ij}^{T1},\dots,Q_{ij}^{Tm},S_{ij}^{1},\dots,S_{ij}^{m}\right)^*$$

并终止算法；否则，更新$m=m+1$ 并创建新变量$(Q_{ij}^{T(m+1)},Q_{ij}^{K(m+1)},S_{ij}^{(m+1)})$并将子问题求得的最坏情景$\bar{Z}^{m+1}$对应约束作为一个紧约束加到主问题中，并重新开始步骤(2)。

其中，所得的$\left(x_i^{l(m+1)},{X^{(m+1)}}_{[i,j]}^{l}\right)^*$为鲁棒物流网络下的最优全货机航线布局方案，而$(Q_{ij}^{K1},\dots,Q_{ij}^{Km},Q_{ij}^{T1},\dots,Q_{ij}^{Tm},S_{ij}^{1},\dots,S_{ij}^{m})$为面对不同情景$\bar{Z}^{1}\cdots\bar{Z}^{m}$时的最有配流情况。

附：含乘积形式的线性化

(1)第 1 种情况：

$$\min \quad x_1x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \in \{0,1\} \\ x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$\downarrow\downarrow$$

令$y = x_1x_2$,有

$$\min y$$

$$s.t.\begin{cases} y \le x_1 \\ y \le x_2 \\ y \ge x_1 + x_2 - 1 \\ x_1, x_2, y \in \{0,1\} \end{cases}$$

(2)第 2 种情况：

$$\min \quad x_1x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \in \{0,1\} \\ x_2 \in [0, u] \end{cases}$$

$$\downarrow\downarrow$$

令$y = x_1x_2$,有

$$\min y$$

$$s.t.\begin{cases} y \le ux_1 \\ y \le x_2 \\ y \ge x_2 - u(1 - x_1) \\ x_1 \in \{0,1\}, x_2, y \in [0, u] \end{cases}$$

(3)第 3 种情况：

$$\min \quad x_1x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \in \{0,1\} \\ x_2 \in [l, u] \end{cases}$$

$$\downarrow\downarrow$$

令$y = x_1x_2$,有

$$\min y$$

$$s.t.\begin{cases} y \le x_2 \\ y \ge x_2 - u(1 - x_1) \\ lx_1 \le y \le ux_1 \\ x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in [l, u], y \in [0, u] \end{cases}$$

(4)第 4 种情况：

当x_1和x_2都是连续变量时，无法等价线性化，只能给出一个较紧的近似。