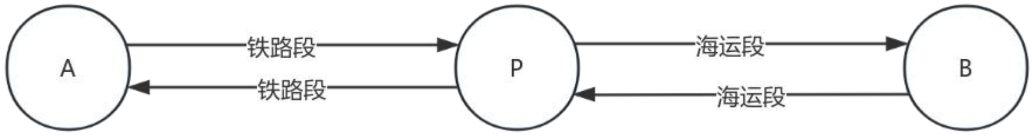
C目录
Contents

一、线路及问题描述

某联运经营人企业经营的单起讫点集装箱海铁联运线路形式如下图所示。A、B两地为海铁联运集装箱货物的起讫点，P为海铁联运的换装港口，假设可以实现无缝衔接。内陆铁路集装箱办理站A与港口P之间形成了铁路段的两点往复式集疏运线路，港口P与另一港口B之间形成了海运段的两港间往复式航线。



联运经营人通过与实际承运人(某铁路运输公司和某班轮公司)签订一定时期的运力承包协议，以较低的承包运价获得了$A-P$间铁路班列和$P-B$间海运班轮上等量的箱位经营权，箱位数量为Q，获得了稳定的运力资源，同时降低了经营成本。在承包合同期内，联运经营人以契约承运人的身份与货主签订海铁联运合同，按单一费率向货主一次收取全程运费，组织集装箱海铁联运。

由于海铁联运货流只有一对起讫点，且A、B两地之间集装箱海铁联运市场的货运需求具有单向性特点，即便双向货流不平衡，联运经营人一样可以采取起始点箱位控制的销售方式，在A、B两地分别单向销售，利用价格策略平衡供需，这样就不需要考虑空箱调运问题。那么，联运经营人的单向箱位销售过程就可以分为面对大货主的协议销售和面对零散货主的自由销售两个阶段。

在第一阶段，联运经营人与大货主签订运输合同将一部分箱位提前销售，由于协议货主的联运运价是较低的协议价且是确定不变的，因此联运经营人需要决定根据协议运价最多可以分配多少箱位给这些协议货主，以达到收入最大的目标。

在第二阶段，联运经营人对剩余的箱位进行自由销售，由于零散货主不能议价，只能按照联运经营人公布的市场运价预定箱位，因此，联运经营人可以将揽货期按周(或天)分为T个时段进行动态定价，越早定舱运价越低，越晚定舱运价越高。联运经营人需要预测出零散货主在每个时段的需求随价格变化规律，据此确定每个时段的海铁联运运价，同时分配相应的箱位数量。

二、模型构建

1.符号说明和模型假设

(1) 相关集合及参数

Q：联运线路的总箱位容量；

D^I：协议货主的箱位随机需求量；

p^I：联运经营人与协议货主签订的协议运价；

$\overline{P}$：联运经营人的自由销售运价上限；

T：联运经营人自由销售揽货期的时段数；

t：联运经营人自由销售的第t个揽货时段。

(2) 决策变量

x^I：分配给协议货主的协议销售箱位数量；

p_t^{II}：自由销售的第t时段的运价。

(3) 因变量

x_t^{II}：自由销售的第t个揽货时段的箱位需求量，且x_t^{II}是运价p_t^{II}的函数$x_t^{II}=x_t^{II}(p_t^{II})$。假设需求函数$x_t^{II}=x_t^{II}(p_t^{II})$的形式是已知的，为最常见的线性函数形式，即

$$x_t^{II}=x_t^{II}(p_t^{II})=\alpha_t-\beta_t\cdot p_t^{II}, t=1,2,\dots,T$$

其中，系数α_t和β_t是对历史数据或新调查的数据使用线性回归技术估计出来的，难免会存在估值误差，即系数取值是不确定的。因此$x_t^{II}=x_t^{II}(p_t^{II})$可以看成是由于需求函数系数$\alpha_t$和$\beta_t$取值不确定而引起的不确定性需求。

(4) 模型假设

① 假设联运经营人垄断了A、B两地之间的集装箱海铁联运市场，能够通过实施价格策略实现收入最大化目标，且联运经营人持有中立的风险态度；

② 假设货主不会取消已经预定的箱位，也不考虑各类货主的“No Show”问

题，且认为货主所进行的选择行为是短视的；

③假设协议销售阶段的货主需求和空箱调运需求都是正值随机变量，且随机需求的分布函数是可获得的；

④假设自由销售阶段零散货主的需求是随运价变化的，需求函数表达是可获得的，且各个时段的货主需求是相互独立的。

2.第一阶段模型

目标函数：联运经营人销售给协议货主的箱位所带来的收益最大化，即

$$maxz = p^I \cdot x^I$$

约束条件：

①协议销售的箱位数量不能超过协议货主的箱位随机需求量，即

$$x^I \le D^I$$

②协议销售的箱位数量不能大于联运线路的最大箱位容量，即

$$x^I \le Q$$

③决策变量的整数约束，即

$$x^I \in N \cup \{0\}$$

该模型的最优解是x^{I*}。

3.第二阶段模型

目标函数：联运经营人在揽货期内销售给所有订舱时段的零散货主的箱位所带来的总收益最大化，即

$$maxz = \sum_{t=1}^{T} p_t^{II} \cdot x_t^{II} = \sum_{t=1}^{T} p_t^{II} \cdot (\alpha_t - \beta_t \cdot p_t^{II})$$

约束条件：

①协议销售和自由销售的箱位数量的总和不能大于该联运线路的总箱位容量，即

$$\sum_{t=1}^{T} x_t^{II} + x^{I*} = \sum_{t=1}^{T} (\alpha_t - \beta_t \cdot p_t^{II}) + x^{I*} \leq Q$$

②自由销售阶段任何揽货时段的运价不小于协议销售运价，同时不大于一个运价上限$\overline{P}$，即

$$p^I \leq p_t^{II} \leq \overline{P}, \forall t$$

三、模型求解

1. 第一阶段模型求解

由于第一阶段模型中的需求变量D^I不是一个确定的值，而是依据历史数据预测得到的一个随机变量，因此第一阶段模型不是一个随机整数规划模型。由于模型中的随机变量出现在约束条件中，构成了随机约束，因此适合采用随机规划中的机会约束规划方法来求解该模型。

首先，确定置信度为α，将第一阶段模型中的随机约束条件式$x^I \le D^I$转化为机会约束，即

$$\Pr(x^I \le D^I) \ge \alpha$$

然后，假设D^I服从正态分布，其分布函数表示为$\Phi(\cdot)$，则可得机会约束的确定性等价类为

$$x \le K_\alpha = \sup\{K|K = \Phi^{-1}(1-\alpha)\}$$

其中，$\Phi^{-1}(\cdot)$是函数$\Phi(\cdot)$的逆函数。当满足上式的解不唯一时，取其中最大的一个解。

于是，将第一阶段模型转化成为在一定置信度下的确定性整数规划模型，即

$$maxz = p^I \cdot x^I$$

$$s.t.\begin{cases} x^I \le K_\alpha \\ K_\alpha = \sup\{K|K = \Phi^{-1}(1-\alpha)\} \\ x^I \le Q \\ x^I \in N \cup \{0\} \end{cases} \qquad \text{(Model 1)}$$

2. 第二阶段模型求解

第二阶段模型的最优解在很大程度上依赖于需求函数$x_t^{II} = x_t^{II}(p_t^{II}) = \alpha_t - \beta_t \cdot p_t^{II}$的系数，如果系数$\alpha_t$和$\beta_t$的估计不准确，则最优的定价策略可能不满足箱位限制的约束条件或偏离收益最大化的目标。尽管能够借助灵敏度分析来判断解的稳定性，然而这仅仅是一种事后的验证。作为定价决策者的联运经营人更渴望可以通过一种事前控制的方法来适应需求变化规律的不确定性，从而得到稳健的定价策略。为此，采用鲁棒优化的方法求解模型，以适应需求的这种不确定性。

首先，令$\widetilde{\alpha}_t$*和*$\widetilde{\beta}_t$分别表示需求函数系数α_t和β_t的实际值，实际值的取值分别在估计值α_t和β_t的附近，令$\widehat{\alpha}_t > 0$ 和$\widehat{\beta}_t > 0$ 分别表示系数实际值$\widetilde{\alpha}_t$*和*$\widetilde{\beta}_t$的最大变化幅度，则$\widetilde{\alpha}_t \in [\alpha_t - \widehat{\alpha}_t, \alpha_t + \widehat{\alpha}_t]$，$\widetilde{\beta}_t \in [\beta_t - \widehat{\beta}_t, \beta_t + \widehat{\beta}_t]$，那么实际需求量可以表示为

$$\tilde{x}_t^{II} = \tilde{x}_t^{II}(p_t^{II}) = \widetilde{\alpha}_t - \widetilde{\beta}_t \cdot p_t^{II}$$

实际上，为了得到稳健最优解，无需使得所有系数取值情况下的约束条件都被满足，可以在一定的系数变化范围内获得最优解，这样不仅能满足适应系数变化的稳健要求，同时不会让目标函数值损失过多。为此，假设ξ_t是系数实际值$\widetilde{\alpha}_t$与估计值α_t的偏差程度，即$\widetilde{\alpha}_t = \alpha_t + \widehat{\alpha}_t \xi_t$；$\eta_t$是系数实际值$\widetilde{\beta}_t$与估计值$\beta_t$的偏差程度，即$\widetilde{\beta}_t = \beta_t + \widehat{\beta}_t \eta_t$。$\xi_t$和$\eta_t$都在闭区间$[-1,1]$上取值。由此可得，第$t$时段的实际需求量$\tilde{x}_t^{II} = \widetilde{\alpha}_t - \widetilde{\beta}_t \cdot p_t^{II}$与估计需求量$x_t^{II} = \alpha_t - \beta_t \cdot p_t^{II}$之差的绝对值可以表示为$|\widehat{\alpha}_t \xi_t - \widehat{\beta}_t \eta_t p_t^{II}|$。

然后，引入一个限制系数Γ，代表各时段实际总需求量偏离估计总需求量的程度，即有

$$\left| \sum_{t=1}^{T} \left(\widehat{\alpha}_t \xi_t - \widehat{\beta}_t \eta_t p_t^{II} \right) \right| \le \sum_{t=1}^{T} \left| \widehat{\alpha}_t \xi_t - \widehat{\beta}_t \eta_t p_t^{II} \right| \le \Gamma$$

限制系数Γ是一个给定的非负实数，其单位与需求量的单位一致。Γ可以取区间$[0, \sum_{t=1}^{T} \left(\widehat{\alpha}_t + \widehat{\beta}_t \overline{P} \right)]$上的任意值。在取值范围内，$\Gamma$的数值越大，代表着联运经营人掌握的需求函数信息越少。

第二阶段模型可以转化为对等的动态定价稳健模型，即

$$maxz=\sum_{t=1}^{T}p_t^{II}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})+\min\left[\sum_{t=1}^{T}p_t^{II}\left(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II}\right)\right]$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})+\sum_{t=1}^{T}(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II})+x^{I*}\le Q\\ \left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II}\right)\right|\le\Gamma\\ |\xi_t|\le 1,|\eta_t|\le 1,\forall t\\ p^I\le p_t^{II}\le\overline{P},\forall t\end{cases}$$

接下来，将上式中的$\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})+\sum_{t=1}^{T}(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II})+x^{I*}\le Q$和$\left|\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II}\right)\right|\le\Gamma$进行合并，得到新的约束条件$\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})\le Q-(x^{I*}+\Gamma)$。继而，上述模型可以进一步松弛为下面这个稳健模型，即

$$maxz=\sum_{t=1}^{T}p_t^{II}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})+\min\left[\sum_{t=1}^{T}p_t^{II}\left(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II}\right)\right]$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})\le Q-(x^{I*}+\Gamma)\\ \sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{\alpha}_t\xi_t-\widehat{\beta}_t\eta_t p_t^{II}\right)\ge-\Gamma\\ |\xi_t|\le 1,|\eta_t|\le 1,\forall t\\ p^I\le p_t^{II}\le\overline{P},\forall t\end{cases}\qquad(\text{Model 2})$$

这个模型可以看成是一个双层规划模型，ξ_t和η_t可看作内层规划的决策变量，则内层是最小化的线性规划问题，利用**强对偶定理**可以得到以下定理。

定理 1：动态定价的稳健模型 Model 2 等价于下述凸规划模型 Model 3。

$$maxz=\sum_{t=1}^{T}p_t^{II}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})-\left[\Gamma w+\sum_{t=1}^{T}(\widehat{\alpha}_t-\widehat{\beta}_t p_t^{II})(p_t^{II}-w)\right]$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t-\beta_t p_t^{II})\le Q-(x^{I*}+\Gamma)\\ p^I\le p_t^{II}\le\overline{P},\forall t\\ w\ge 0\end{cases}\qquad(\text{Model 3})$$

式中，w为模型 Model 2 内层规划的对偶规划中的决策变量。

证明：模型 Model 2 内层规划问题可以提炼为

$$\min \sum_{t=1}^{T} p_t^{II}(\widehat{\alpha}_t \xi_t - \widehat{\beta}_t \eta_t p_t^{II})$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} (\widehat{\alpha}_t \xi_t - \widehat{\beta}_t \eta_t p_t^{II}) \geq -\Gamma \\ -1 \leq \xi_t \leq 1 \\ -1 \leq \eta_t \leq 1 \end{cases}$$

求解该内层规划的对偶问题可得

$$\max \left[-\Gamma w - \sum_{t=1}^{T} (u_t^+ + u_t^-) - \sum_{t=1}^{T} (v_t^+ + v_t^-) \right]$$

$$s.t. \begin{cases} \widehat{\alpha}_t w - u_t^+ + u_t^- = \widehat{\alpha}_t p_t^{II}, \forall t \\ -\widehat{\beta}_t p_t^{II} w - v_t^+ + v_t^- = -\widehat{\beta}_t {p_t^{II}}^2, \forall t \\ w, u_t^+, u_t^-, v_t^+, v_t^- \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s.t. \begin{cases} u_t^+ + u_t^- = \widehat{\alpha}_t (p_t^{II} - w) + 2u_t^+ \\ v_t^+ + v_t^- = -\widehat{\beta}_t p_t^{II} (p_t^{II} - w) + 2v_t^+ \\ w, u_t^+, u_t^-, v_t^+, v_t^- \geq 0 \end{cases}$$

将约束条件代入目标函数，上述对偶问题可以等价写为

$$\max \left[-\Gamma w - \sum_{t=1}^{T} \widehat{\alpha}_t (p_t^{II} - w) + \sum_{t=1}^{T} \widehat{\beta}_t p_t^{II} (p_t^{II} - w) - 2 \sum_{t=1}^{T} (u_t^+ + v_t^+) \right]$$

$$s.t. \;\; w, u_t^+, v_t^+ \geq 0$$

由于u_t^+和v_t^+都是非负变量，只有在u_t^+和v_t^+都取 0 时才能使得目标函数值最大，所以目标函数值中的最后一项$-2\sum_{t=1}^{T}(u_t^+ + v_t^+)$可以省去。

又由于模型 Model 2 的内层规划存在可行解而且是有界的，按照强对偶定理，它的对偶问题也是可行且有界的，并且两者具有相等的目标函数值。将上述内层规划对偶问题简化后的形式代入模型 Model 2 中即可得到等价的凸规划模型 Model 3。

附 1：对偶理论

考虑一个（标准形式的）线性规划问题：

$$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t. \begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{cases}$$

可以使用拉格朗日乘子将上述问题写成：

$$g(\boldsymbol{p}) = \min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

令 $\boldsymbol{x}^*$为线性规划的最优解，则有

$$g(p) \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*, \forall \boldsymbol{p}$$

也就是说，$g(\boldsymbol{p})$是最优目标函数$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$的一个下界。为了使这个下界尽可能紧一些，想要求得$\max_{\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{p})$，而

$$g(\boldsymbol{p}) = \min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{b} + \min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{x}$$

对于上式的第二项，有

$$\min_{\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{x} = \begin{cases}0, \text{如果}\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0} \\ -\infty, \text{否则}\end{cases}$$

于是推出了原问题的对偶形式：

$$\max \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{b}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{c}$$

关于原问题和对偶问题的关系，有弱对偶和强对偶两个定理。其中弱对偶表述的是：当$\boldsymbol{x}$是原问题的可行解且$\boldsymbol{p}$是对偶问题的可行解时，一定有

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

也就是说原问题（min）的最优目标函数都要比对偶问题（max）最优目标函数要大。由此定理可知，如果能找到一组可行解$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$使得$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$，那么$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{p}$就一定分别是原问题和对偶问题的最优解。而强对偶表述的是：当线性规划有一个最优解时，那么它的对偶问题也有最优解，且两个问题的最优目标函数值相同。

对偶理论网址推荐：

【运筹学】对偶理论总结(对称性质 ｜ 弱对偶定理 ｜ 最优性定理 ｜ 强对偶性 ｜ 互补松弛定理)

附 2：鲁棒优化(Robust Optimization)

1. 鲁棒优化概念：

鲁棒优化的目的是求得这样一个解，对于可能出现的所有情况，约束条件均满足，并且使得**最坏情况下的目标函数的函数值最优**。其核心思想是将原始问题以一定的近似程度转化为一个具有多项式计算复杂度的凸优化问题。（来源：百度百科）

2. 鲁棒优化文献

2.1. 文献来源

[刘超毅，段刚，李清悦．考虑碳排放的海洋垃圾收集船路径鲁棒优化[J]．上海海事大学学报，2024，45(03)：31-39+74．DOI：10．13340/j．jsmu．202307140163．]

2.2. 文献简介

海洋垃圾不仅危害海洋生物，而且会对人类经济和安全构成重大威胁。收集近海垃圾是减少海洋垃圾最有效的方法之一，但直接收集海洋垃圾的成本高。对海洋垃圾收集路径进行优化不仅节约能源和保护环境，还使得海洋垃圾收集具有可持续性。

考虑到海上垃圾为固体废物，垃圾种类多，自然环境对数据影响较大，相关技术支持不足等原因，为有效收集近海漂浮垃圾，将垃圾质量视为不确定参数，同时考虑船舶载质量、时间窗等约束，以绿色运输成本最低为目标，构建具有时间窗的鲁棒船舶路径优化模型。

2.3. 问题描述

一支船队从港口出发，被派往某个海域的一些垃圾点执行垃圾收集任务。每个垃圾点的垃圾都必须被收集且只能由一艘船收集，垃圾收集任务完成后船队返回港口。为使成本最低或时间最短，对每艘船的路径进行规划。与陆地收集垃圾不同，海洋垃圾会因洋流、风的影响而不断移动。因此，需要采用卫星遥感、航空摄影等方式获取垃圾点的初始位置，然后使用 GNOME 软件预测海洋垃圾轨迹。根据预测的海洋垃圾轨迹为每个垃圾点设定时间窗，将移动垃圾收集问题转化为

固定位置垃圾收集问题。考虑时间窗口和容量约束，对垃圾收集路径进行优化，最后有效收集海洋垃圾。

目前，一般采用通量估测海洋垃圾质量，但准确率较差。文章将垃圾质量视为不确定因素，采用 Bertsimas 鲁棒优化方法对垃圾质量不确定情况下的船舶路径进行优化。

建模前做如下假设：

① 根据垃圾点的初始位置、风流和洋流等数据，GNOME 可以预测出垃圾点的位置。

② 同质船队。每艘船的载质量相同，且船速恒定。

③ 每个垃圾点垃圾的最大质量都小于船的最大载质量。

④ 每艘船可以对多个垃圾点进行服务，但每个垃圾点有且仅有一艘船为其服务。

⑤ 考虑温室气体排放时，CO_2排放量是唯一需要考虑的因素。

2.4.符号说明

文章定义完全图$G=(N,A)$，其中N为所有的点集合，A为所有的弧集合。点集合$N=N_0\cup N_1\cup N_2$。弧集合$A=A_0\cup A_1\cup A_2$。

N_0：出发港 0；

N_1：预测的海洋垃圾点位置集合；

N_2：目的港$n+1$；

A_0：从出发港到垃圾点的弧，$A_0=\{(i,j)|i\in N_0,j\in N_1\}$；

A_1：任意两个垃圾点之间的连接弧，$A_1=\{(i,j)|i\in N_1,j\in N_1\}$；

A_2：垃圾点与目的港之间的连接弧，$A_2=\{(i,j)|i\in N_1,j\in N_2\}$；

K：执行收集作业的所有船舶的集合；

Q^*：每艘船的轻载排水量；

m_0：额定载质量；

b_1：航速为v时船舶发动机每小时耗油量；

b_2：单位油耗的碳排放因子；

f_c：碳税率；

d_{ij}：垃圾点i到垃圾点j的距离；

每个垃圾点位置$i(i \in N_1)$具有收集时间t_i、垃圾质量m_i和时间窗$[t_{ei}, t_{li}]$等信息，其中，t_{ei}和t_{li}分别表示最早和最迟到达时间。

每艘船的 4 种相关成本被定义为单位油耗成本c_1、每日人工成本c_2、每日租金费用c_3、每日保险费用c_4。

假设垃圾点的垃圾质量满足$m_i \in [\overline{m}_i - \widehat{m}_i, \overline{m}_i + \widehat{m}_i]$，$\overline{m}_i$为理想值或均值，$\widehat{m}_i$为绝对偏差。引入总鲁棒控制参数$\Gamma$来限制不确定参数的变动个数(允许一部分不确定变量偏离其确定理想值)。Γ的取值范围为$[0, |N_1|]$，文章的Γ只取整数。

S_k：垃圾质量偏离其理想值的垃圾点位置集合；

Γ_k：船k的垃圾质量不确定水平；

t_{aik}：船k到达点$i(i \in N_1)$的时间；

m_{ik}：船k在到达点$i(i \in N_1)$前累计收集的垃圾质量，

x_{ijk}：0-1 型决策变量，当船k经过A中的弧时为 1，否则为 0。

除此之外，当转化为鲁棒模型时需加入两个对偶变量w_k和h_{ik}。

2.5.鲁棒模型的建立

船舶排水量、发动机功率与航速之间的关系可表示为

$$P_e = 0.7355Q^{\frac{2}{3}}v^3/a$$

式中P_e为船舶功率(kW)，Q为船舶排水量(t)，v为船舶航行速度(kn)，a为海军部系数(远洋船约为 200～300)。船舶航行期间每小时油耗可表示为

$$b_1 = 10^{-3}g_eP_e$$

式中g_e为船舶发动机燃油消耗率(g/(kW·h))。

在垃圾收集过程中，从一个垃圾点到另一个垃圾点，船舶收集的垃圾质量会不断增加，因此船舶的排水量是分段线性函数。构建船舶路径优化鲁棒模型C_1：

$$minC|C = 0.7355c_1(1+b_2f_c)\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\frac{g_e d_{ij} v^2}{a}\times 10^{-3}\left(Q^* x_{ijk}+m_{jk}\right)^{\frac{2}{3}} + \sum_{j\in N_1}\sum_{k\in K}(c_2+c_3+c_4)x_{0jk}$$

约束条件：

①$\sum_{j\in N_1} x_{0jk} \le 1$

②$\sum_{j\in N_1\cup N_2} x_{ijk} = \sum_{j\in N_0\cup N_1} x_{jik}, i\in N_1$

③$\sum_{j\in N_1} x_{0jk} = \sum_{j\in N_1} x_{j,n+1,k}$

④$\sum_{i\in N_0\cup N_1}\sum_{k\in K} x_{ijk} \le 1, j\in N_1$

⑤$m_{ik} + m_i \le m_{jk} + \left(1-x_{ijk}\right)m_0, (i,j)\in A$

⑥$m_{jk} \le m_0, j\in N$

⑦$m_{0k} = 0$

⑧$t_{aik} + t_i + \frac{d_{ij}}{v} \le t_{ajk} + \left(1-x_{ijk}\right)M_{ij}, (i,j)\in A$

⑨$M_{ij} = t_{li} + t_i + \frac{d_{ij}}{v}$

⑩$t_{ej} \le t_{ajk} \le t_{lj}, j\in N$

⑪$\sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\overline{m}_i x_{ijk} + \max_{\{S_k|S_k\subseteq N_1,|S_k|=|\Gamma_k|\}}\{\sum_{i\in S_k}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i x_{ijk}\} \le m_{0k}$

⑫$\Gamma_k \le \sum_{i\in N_0\cup N_1}\sum_{j\in N_1\cup N_2} x_{ijk}$

⑬$\sum_{k\in K}\Gamma_k = \Gamma$

⑭$\Gamma_k \ge 0$

⑮$x_{ijk}\in\{0,1\}, (i,j)\in A$

⑯$t_{aik} \ge 0, i\in N$

2.6. 鲁棒模型的转化

在式⑪中，$\max\limits_{\{S_k|S_k\subseteq N_1,|S_k|=|\Gamma_k|\}}\{\sum_{i\in S_k}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i\, x_{ijk}\}$项是为了计算每艘船上不确定的$\Gamma_k$个垃圾点质量的最大波动项，$\Gamma_k$个垃圾点质量变化幅度为$\sum_{k\in K}\Gamma_k\widehat{m_i}\,(i\in S_k)$，该项不便直接求解，需要等价转换为混合整数线性规划模型。

命题 1 给定模型的任意可行解$x_{ijk}^{'}$和$\Gamma_k^{'}$，则最大波动项等价于如下非线性规划的目标函数：

$$\max_{\{S_k|S_k\subseteq N_1,|S_k|=|\Gamma_k|\}}\{\sum_{i\in S_k}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i\, x_{ijk}\}=\max\sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i x_{ijk}^{'} z_{ik}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum\limits_{i\in N_1} z_{ik}\le\Gamma_k^{'}\\ 0\le z_{ik}\le 1, i\in N_1\end{cases}$$

上述模型的最优解是船k有$|\Gamma_k^{'}|$个鲁棒对等转换的辅助参数z_{ik}取值为 1，其余的z_{ik}取值为 0. 等价于在垃圾点集合N_1中找到有$|\Gamma_k^{'}|$个元素的子集S_k使得$\sum_{i\in S_k}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i x_{ijk}$达到最大。

命题 2 命题 1 中模型的对偶问题为

$$\min\sum_{i\in N_1} h_{ik}+\Gamma_k^{'} w_k$$

$$s.t.\begin{cases}w_k+h_{ik}\ge\sum\limits_{j\in N_1\cup N_2}\widehat{m}_i x_{ijk}^{'}, i\in N_1\\ h_{ik}\ge 0, i\in N_1\\ w_k\ge 0\end{cases}$$

于是在完成转化后，完整的鲁棒模型为：

$$minC|C=0.7355c_1(1+b_2f_c)\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\frac{g_e d_{ij}v^2}{a}\times 10^{-3}\left(Q^* x_{ijk}+m_{jk}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$+\sum_{j\in N_1}\sum_{k\in K}(c_2+c_3+c_4)x_{0jk}$$

约束条件：

①$\sum_{j\in N_1}x_{0jk}\le 1$

②$\sum_{j\in N_1\cup N_2}x_{ijk}=\sum_{j\in N_0\cup N_1}x_{jik}, i\in N_1$

③$\sum_{j\in N_1}x_{0jk}=\sum_{j\in N_1}x_{j,n+1,k}$

④$\sum_{i\in N_0\cup N_1}\sum_{k\in K}x_{ijk}\le 1, j\in N_1$

⑤$m_{ik}+m_i\le m_{jk}+\left(1-x_{ijk}\right)m_0,(i,j)\in A$

⑥$m_{jk}\le m_0, j\in N$

⑦$m_{0k}=0$

⑧$t_{aik}+t_i+\frac{d_{ij}}{v}\le t_{ajk}+\left(1-x_{ijk}\right)M_{ij},(i,j)\in A$

⑨$M_{ij}=t_{li}+t_i+\frac{d_{ij}}{v}$

⑩$t_{ej}\le t_{ajk}\le t_{lj}, j\in N$

⑫$\Gamma_k\le\sum_{i\in N_0\cup N_1}\sum_{j\in N_1\cup N_2}x_{ijk}$

⑬$\sum_{k\in K}\Gamma_k=\Gamma$

⑭$\Gamma_k\ge 0$

⑮$x_{ijk}\in\{0,1\},(i,j)\in A$

⑯$t_{aik}\ge 0, i\in N$

⑰$\sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_1\cup N_2}\overline{m}_i x_{ijk}+\sum_{i\in N_1}h_{ik}+\Gamma'_k w_k\le m_{0k}$

子问题的对偶问题可写为：

$$\min \sum_{i \in N_1} h_{ik} + \Gamma_k^{'} w_k$$

$$s.t.\begin{cases} w_k + h_{ik} \geq \sum_{j \in N_1 \cup N_2} \widehat{m}_i x_{ijk}^{'}, i \in N_1 \\ h_{ik} \geq 0, i \in N_1 \\ w_k \geq 0 \end{cases}$$