Equazioni e sistemi di equazioni

Un'espressione algebrica assume **valori diversi** a seconda dei valori numerici assegnati alle lettere

Un'eguaglianza tra due espressioni algebriche letterali verificata per ogni valore numerico assonnato alla lettera prende il nome di **identità.**
Es. a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab

Un'eguaglianza tra due espressioni algebriche letterali verificata solo per particolari valori numerici assegnati alle lettere prende il nome di **equazione**

Risolvere un'equazione significa trovare i valori dell'incognita per i quali la relazione di eguaglianza diventa una identità numerica

Equazione impossibile: non ammette nessuna soluzione reale. Es. x^2 = -4
Equazione indeterminata: ammette infinite soluzioni
Equazione determinata: ammette un numero finito di soluzioni

Equazione numerica: se oltre all'incognita non contiene altre lettere
Equazione letterale: se oltre all'incognita contiene altre lettere che si considerano costanti.
Equazione intera: l'incognita con compare al denominatore
Equazione frazionaria: l'incognita compare al denominatore
Equazione irrazionale: l'incognita compare nell'argomento di una radice

Il **grado di un'equazione** è il massimo esponente con cui l'incognita compare nell'equazione ridotta a forma normale

Un'equazione **non indeterminata** di grado **n** ammette al massimo n soluzioni nell'insieme dei numeri reali. Es. x + 1 = 0 -> x = -1,
x^2 = 0 -> x = 0 e x = 0 (sono due soluzioni reali e coincidenti)

Metodo della verifica: consiste nel sostituire nell'equazione le soluzioni proposte e trovare quale tra quelle date la soddisfa, cioè è vera

L'espressione frazionaria **esiste** solo per i valori di x **diversi dagli 0 del denominatore**

Due equazioni sono equivalenti quando ammettono la stessa soluzione. **Aggiungendo** ad entrambi i membri di una equazione la medesima espressione algebrica si ottiene una **equazione equivalente** a quella data. La stessa regola vale anche per la **moltiplicazione e la divisione** (deve essere **definita** e **diversa da 0**)

Passi necessari per portare un'equazione alla sua **forma normale:**
- svolgere le eventuali operazioni indicate nella forma iniziale
- Eliminare gli eventuali denominatori (**m.c.m.**)
- Spostare tutti i termini nel primo membro per sfruttare i principi di equivalenza
- Ridurre i termini simili e ordinare il polinomio secondo le potenze decrescenti della x

Equazioni lineari: sono le equazioni intere di primo grado

La risoluzione delle **equazioni frazionarie di primo grado** bisogna fare attenzione alle condizione di esistenza e al fatto che tutte le soluzioni trovate devono essere confrontate con le condizione poste

Per risolvere l'equazione:

$$\frac{x^2-3}{x+1} = x + \frac{2x}{x+1}$$

si comincia col porre le condizioni di esistenza dei denominatori:

$$\text{C.E.:} \quad x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

a questo punto, calcolando il denominatore comune e riducendo a forma intera (moltiplicando ambo i membri per il denominatore comune che, dopo aver posto le C.E. è sicuramente diverso da zero) si ha:

$$\frac{x^2-3}{x+1} = \frac{x^2+x+2x}{x+1} \rightarrow x^2-3 = x^2+x+2x$$

$$\rightarrow x^2-x^2-3x = 3 \rightarrow -3x = 3$$

per cui, dividendo per il coefficiente della x (ossia -3) si ottiene:

$$-3x = 3 \rightarrow x = -1$$

La soluzione trovata è evidentemente inaccettabile, in quanto contrasta con la condizione di esistenza posta all'inizio. Si conclude quindi che l'equazione data è impossibile.

La **forma normale** di un'equazione di secondo grado è: $ax^2+bx+c = 0$

Se a != 0, l'equazione viene detta incompleta nei seguenti casi:
1° caso: c = 0 -> equazione spuria.

$$ax^2+bx = 0 \xrightarrow[\text{in fattori}]{\text{scomponendo}} x \cdot (ax+b) = 0 \xrightarrow[\text{lamento del prodotto}]{\text{per la legge dell'annul-}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

2° caso: b = 0 -> equazione pura.

$$ax^2+c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \xrightarrow[\text{brica di entrambi i membri}]{\text{estraendo la radice alge-}} x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3° caso: b = 0 e c = 0 -> equazione monomia.

$$ax^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (soluzione doppia)}$$

Equazioni complete di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il segno del radicando $\Delta = b^2 - 4ac$ (detto *discriminante*) influenza la realtà delle radici:

se $\Delta > 0$ $\rightarrow$ le radici sono reali distinte;

se $\Delta = 0$ $\rightarrow$ le radici sono reali e coincidenti;

se $\Delta < 0$ $\rightarrow$ non esistono radici reali.

Equazioni frazionari di secondo grado
Come le equazioni frazionarie di primo grado, bisogna porre attenzione alle condizioni di esistenza

Per risolvere l'equazione:

$$\frac{3x-1}{x+1} - x = 0$$

si calcola il denominatore comune, si pone la condizione di esistenza (ossia C.E.: $x \neq -1$) e si riduce a forma intera:

$$\frac{3x-1}{x+1} - x = 0 \rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$$

l'equazione ha dunque due radici reali coincidenti: la soluzione è accettabile in quanto non contrasta con la condizione di esistenza.

Somma e prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado

Data l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se $\Delta \geq 0$

La somma si calcola -> $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

La differenza si calcola -> $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Scomposizione di un trinomio di secondo grado in fattori
Il trinomio ax^2 + bx + c è scomponibile tramite la relazione sottostante dove x1 e x2 sono le die radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Esempio:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

Regola di Cartesio
Questa regola consente di trovare il segno delle radici di un’equazione di secondo grado senza dover risolvere l’equazione stessa.
Tre coefficienti a, b e c (ax^2+ bx + c = 0) presentano una **permanenza** ogni volta che due coefficienti hanno lo stesso segno, mentre presentano una **variazione** ogni voltata che due coefficienti consecutivi hanno due segni opposti.
A ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa, mentre a ogni variazione corrisponde una soluzione positiva

$2x^2+3x+1 = 0 \xrightarrow{\text{Cartesio}}$ due permanenze $\rightarrow$ due radici negative.
Infatti le due radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$$

Equazioni di grado superiore la secondo
In genere bisogna scomporre in fattori per poi sfruttare la regola dell’annullamento del prodotto

$$x \cdot (x^2-5x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2-5x+4=0 \xrightarrow{\text{applicando la formula}} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

In altri casi può essere utile un cambio di variabili

$$x^4-5x^2-36 = 0 \xrightarrow{\text{ponendo } t=x^2} t^2-5t-36 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \text{nessuna radice reale in } x \\ t_2 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

Proporzioni
L’uguaglianza tra due rapporti è detta proporzione $a:b=c:d$

a e c = *antecedenti* $\qquad$ b e d = *conseguenti*

a e d = *estremi* $\qquad$ b e c = *medi*

Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi $a \cdot d = b \cdot c$

$a:c=b:d$	Proprietà del permutare
$b:a=d:c$	Proprietà dell’invertire
$a \cdot n:b=c \cdot n:d \quad \frac{a}{n}:\frac{b}{n} = c:d \quad (n \neq 0)$	Proprietà invariantiva
$(a \pm b):(c \pm d)=a:c=b:d$	Proprietà del comporre/scomporre

Sistemi di equazioni
Un'equazione in **due o più incognite** ammette in generale **infinite soluzioni** ciascuna delle quali rappresentata da una coppia di valori.

Se consideriamo due equazioni ci si può porre il problema di trovare una soluzione comune.
L'insieme di due o più equazioni delle quali si voglia trovare una soluzione comune prende il nome di **sistema di equazioni.** Risolvere questo sistema significa trovare la soluzione comune.
L'insieme di copie di valori numerici che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni contenuti nel sistema prende il nome di **soluzione del sistema.**

Il grado di un sistema è il **prodotto dei gradi delle equazioni** che lo costituiscono. I sistemi di primo grado vengono anche chiamati **lineari**.

$$\begin{cases} 3x+y=1 & 1° \text{ grado} \\ 2xy+x=0 & 2° \text{ grado} \end{cases} \rightarrow \text{è un sistema di } 2° \text{ grado.}$$

Metodi di risoluzione dei sistemi lineari
Esistono 3 metodi di risoluzione dei sistemi di equazioni:
- **Sostituzione:** ricavare da una delle equazioni una delle incognite e quindi sostituirla nell'atra

$$\begin{cases} x=2y \\ 3x+2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 3\cdot(2y)+2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 8y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

- **Confronto:** risolvere entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita e poi confrontare le due espressioni trovate

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x/2 \\ y=\dfrac{8-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x/2 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{8-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x/2 \\ 4x=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=x/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

- **Riduzione:** consiste nel sommare o dividere membro a membro le due equazioni in modo da scoprire una delle due incognite

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$$

$$4x+0=8 \rightarrow \begin{cases} 4x=8 \\ x-2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=x/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Un sistema lineare può essere:

- possibile → determinato ⟷ una soluzione
- possibile → indeterminato ⟷ infinite soluzioni
- impossibile ⟷ nessuna soluzione

Non esiste un sistema lineare con due o più soluzioni

Dato un sistema lunare di due equazioni in due incognite è possibile stabilire il catare (determinato, indeterminato o impossibile) ancora prima di risolverlo**.**
Questi sono i tre casi:

1. $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ → il sistema è determinato (quindi risolubile tramite uno dei metodi mostrati nel paragrafo precedente);
2. $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ → il sistema è indeterminato;
3. $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ → il sistema è impossibile.