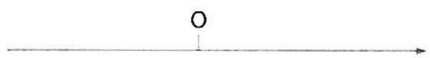
7 | Geometria analitica

7.1 | Coordinate cartesiane e geometria analitica

7.1.1 | Rette e segmenti orientati

Una retta si dice *orientata* quando viene stabilito su di essa un verso positivo, che sarà indicato con una freccia.

Se sulla retta orientata si fissa un punto O, questo divide la retta in due *semirette*: la semiretta positiva di origine O è quella che contiene tutti i punti che si incontrano, a partire da O, percorrendola nel verso della freccia, l'altra è la semiretta negativa.



Fissato sulla retta un secondo punto A, il segmento compreso fra O (chiamato *origine* della semiretta) e A è anch'esso orientato e può essere quindi positivo oppure negativo.

Si dirà **misura del segmento orientato OA**, rispetto ad una unità prefissata *u*, **il numero reale assoluto che esprime il rapporto fra OA e *u***, preso col segno positivo se il verso del segmento coincide con quello della retta, negativo in caso contrario.

7.1.2 | Ascisse sulla retta

Si consideri una retta orientata sulla quale siano stati fissati un'origine O e un secondo punto P (oltre ovviamente all'unità di misura *u*).

La misura del segmento OP (presa col suo segno e indicata con $\overline{OP}$) **prende il nome di ascissa del punto P.**

L'ascissa del punto P è quindi un numero *reale* positivo, negativo o nullo a seconda che il punto P appartenga alla semiretta positiva, alla semiretta negativa oppure coincida con l'origine O: in questo modo **a ogni punto della retta si associa un numero reale.** Viceversa, dato un numero reale *a* (positivo, negativo o nullo), esiste sulla retta *r* un unico punto P tale che la misura del segmento $\overline{OP}$ (rispetto all'unità fissata) sia pari ad *a*, ossia tale che l'ascissa di P sia proprio *a*.

Si è così stabilita **una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta *r* e l'insieme dei numeri reali** $\mathbb{R}$.

In altre parole, è possibile far corrispondere a ogni punto della retta *r* un ben preciso numero reale *a* e, viceversa, a ogni numero reale *a* un ben determinato punto della retta *r*.

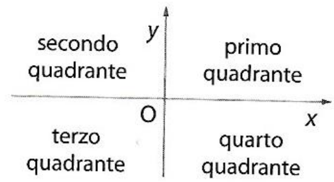
MATEMATICA

7.1.3 | Riferimento cartesiano e coordinate di un punto

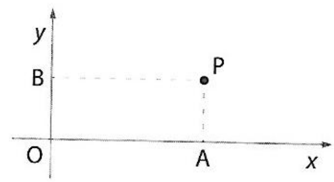
Si fissino ora sul piano **due** rette orientate, fra loro *ortogonali*.

Le due rette orientate prendono il nome di **assi coordinati**: una delle due si chiamerà **asse delle *x*** o **asse delle ascisse**, mentre l'altra **asse delle *y*** o **asse delle ordinate**.

Il punto di intersezione fra i due assi prende il nome di *origine del sistema di riferimento* (generalmente indicata con O). I due assi dividono l'intero piano in quattro parti, convenzionalmente chiamate *quadranti* e numerate in senso antiorario.



Si consideri ora un qualsiasi punto P del piano: da P si conducano le parallele ai due assi coordinati e siano A e B i loro punti di intersezione con l'asse delle x e delle y rispettivamente. Fissata l'usuale unità u su entrambi gli assi, siano a e b rispettivamente le misure dei segmenti orientati OA e OB, ossia:



$$\overline{OA} = a \qquad \overline{OB} = b$$

I due numeri *a* e *b* così trovati prendono il nome di coordinate cartesiane ortogonali del punto P.

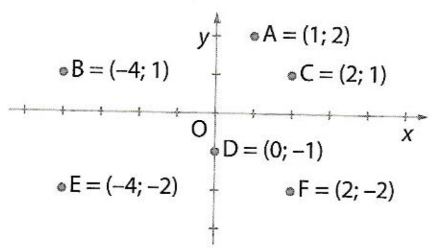
Più precisamente, a prende il nome di **ascissa** di P, b quello di **ordinata** di P.

In questo modo **a ogni punto del piano si associa una coppia di numeri reali.**

Vale anche il viceversa: data una coppia di numeri reali a e b, è sempre possibile determinare uno e un solo punto P che abbia per ascissa a e per ordinata b (si prende sull'asse x il segmento orientato OA di lunghezza a, sull'asse y il segmento orientato OB di lunghezza b e si conduce da A la parallela all'asse y e da B la parallela all'asse x: queste due rette si incontrano nel punto P cercato).

Si è così stabilita **una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali.**

Nel piano cartesiano a lato sono riportati alcuni punti con le corrispondenti coordinate cartesiane.

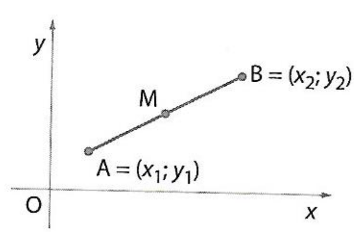


7.1.4 | Distanza tra due punti e coordinate del loro punto medio

Dati due punti A e B, di coordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ rispettivamente, valgono le seguenti relazioni per calcolare la loro distanza e le coordinate del loro punto medio (ossia il punto medio del segmento avente A e B come estremi).

$$\overline{AB} = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{se } x_1 = x_2 \\ |x_2 - x_1| & \text{se } y_1 = y_2 \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \text{in generale} \end{cases}$$

$$\text{Punto medio: } M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



PARTE TERZA

7.2 | Curve nel piano

L'utilità della geometria analitica non è quella di riscrivere la geometria in termini algebrici, bensì quella di rappresentare graficamente entità algebriche che non siano necessariamente funzioni. Come si è visto (§ 4.4.1), una generica equazione in due incognite $F(x, y) = 0$ è soddisfatta da infinite coppie di valori, ciascuna nella forma (x,y), ossia come coppia ordinata di numeri reali, e come tale può essere rappresentata in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (in quanto alla coppia ordinata corrisponde uno e un solo punto del piano).

Rappresentando sul piano cartesiano gli infiniti punti $(x; y)$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$ si ottiene una **curva**.

Ogni equazione del tipo $F(x, y) = 0$ può quindi essere rappresentata graficamente nel piano cartesiano: per questo motivo vale la seguente definizione.

Qualsiasi equazione in due incognite $F(x, y) = 0$ è detta anche **curva**.

Tale rappresentazione è basata sui seguenti due punti:

- le coordinate dei punti della curva soddisfano l'equazione $F(x, y) = 0$;
- ogni coppia di numeri che soddisfa l'equazione $F(x, y) = 0$ rappresenta le coordinate di un punto appartenente alla curva.

7.2.1 | Condizione di appartenenza

Un punto P di coordinate $(x_0; y_0)$ appartiene quindi alla curva $F(x, y) = 0$ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva, ossia se e solo se vale la seguente relazione:

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Il punto $P = (2; 3)$ appartiene alla curva di equazione $4y - 5x - 2 = 0$ in quanto:

$$4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$$

7.2.2 | Curve del piano come luoghi geometrici

È utile ricordare che con il termine **luogo geometrico** si indica l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà.

La circonferenza di raggio *r* è il luogo geometrico dei punti del piano distanti *r* da un punto fisso detto centro.

Risulta ora possibile condensare la definizione di curva (come diagramma di una equazione) e la condizione di appartenenza in un'unica definizione.

La curva di equazione $F(x, y) = 0$ è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa.

7.2.3 | Curve algebriche e curve trascendenti

$F(x, y) = 0$ è una **curva algebrica** se $F(x, y)$ è un polinomio nelle variabili *x* e *y*: l'*ordine* della curva algebrica è il grado del polinomio $F(x, y)$.

$F(x, y) = x - 2y + 1 = 0$ è una curva algebrica del primo ordine.
$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$ è una curva algebrica del secondo ordine.

Se $F(x, y)$ non può essere rappresentato in forma polinomiale, la **curva** si dirà **trascendente**: le curve trascendenti che occorre conoscere verranno trattate nel § 8.1.5 e nel § 9.2.

$F(x, y) = y - \log x = 0$ è una curva trascendente.

7.3 | Curve algebriche del primo ordine: le rette

7.3.1 | Equazione generale della retta

La forma più generale di una equazione di primo grado in due incognite (detta anche equazione *lineare*) è la seguente:

$$ax + by + c = 0 \qquad [12]$$

Il diagramma cartesiano di una equazione lineare è una retta.

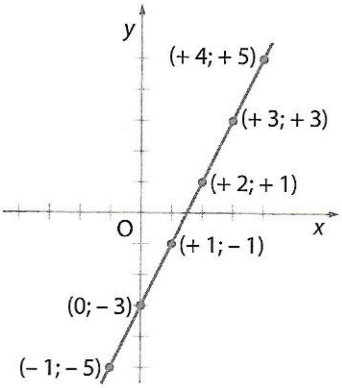
Infatti si consideri l'equazione lineare:

$$F(x, y) = 2x - y - 3 = 0$$

scegliendo arbitrariamente alcuni valori per la x si possono determinare le seguenti coppie ordinate:

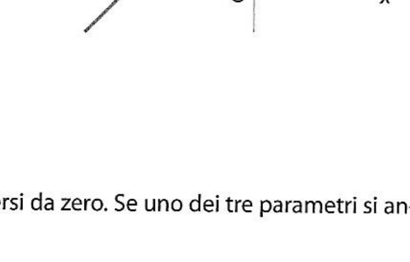
per $x = -1$ si ha $y = -5$ ossia il punto $(-1; -5)$;
per $x = 0$ si ha $y = -3$ ossia il punto $(0; -3)$;
per $x = +1$ si ha $y = -1$ ossia il punto $(+1; -1)$;
per $x = +2$ si ha $y = +1$ ossia il punto $(+2; +1)$;
per $x = +3$ si ha $y = +3$ ossia il punto $(+3; +3)$;
per $x = +4$ si ha $y = +5$ ossia il punto $(+4; +5)$.

Riportando tali punti sul piano cartesiano e unendoli con una linea continua si ottiene il grafico della funzione, ossia una retta.



L'esempio precedente è stato proposto a scopo puramente didattico: **per disegnare una retta è sufficiente determinare due soli punti** appartenenti a essa. Si scelgono quindi arbitrariamente due valori "comodi" di una delle due variabili e (tramite l'equazione) si determinano i corrispondenti valori dell'altra variabile. Procedendo in questo modo si evita di perdere tempo prezioso durante lo svolgimento del test.

Si consideri l'equazione $F(x, y) = x - y + 1 = 0$: assegnando per esempio all'incognita x il valore $x = 0$ si ricava $y = 1$, per cui il punto $A = (0; 1)$ appartiene alla curva di equazione $x - y + 1 = 0$.
Similmente, assegnando alla y il valore $y = 0$ si ricava $x = -1$, per cui il punto $B = (-1; 0)$ appartiene anch'esso alla curva.



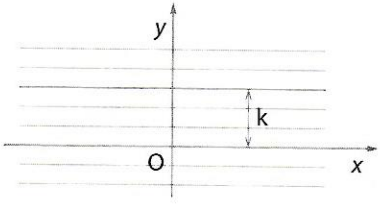
7.3.2 | Casi particolari

Nell'equazione generale della retta [12]:

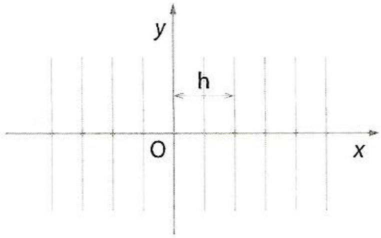
$$ax + by + c = 0$$

compaiono i tre parametri a, b, c i quali non sempre sono diversi da zero. Se uno dei tre parametri si annulla, si ha uno dei seguenti casi particolari.

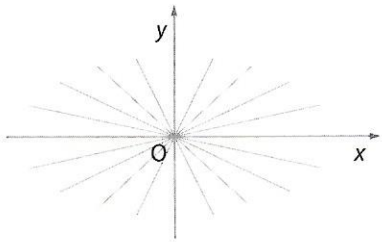
1. $a = 0 \;\rightarrow\; by + c = 0 \;\rightarrow\; y = -c/b \;\rightarrow\; y = k$ (dove k indica una costante)
Il diagramma dell'equazione $y = k$ è rappresentato da una retta **orizzontale**.
Al variare del parametro k si ottengono tutte le possibili rette orizzontali, tra le quali si trova anche l'asse delle x.
L'asse x ha equazione $y = 0$.



2. $b = 0 \rightarrow ax + c = 0 \rightarrow x = -c/a \rightarrow x = h$ (dove h indica una costante)
Il diagramma dell'equazione $x = h$ è rappresentato da una retta **verticale**.
Al variare del parametro h si ottengono tutte le possibili rette verticali, tra le quali si trova anche l'asse delle y.
L'asse y ha equazione $x = 0$.



3. $c = 0 \rightarrow ax + by = 0$
Si tratta di un'equazione sicuramente soddisfatta dalle coordinate dell'origine: in altre parole il punto $O = (0; 0)$ sicuramente appartiene alla retta. L'equazione $ax + by = 0$ rappresenta (al variare di a e b) un *fascio* di rette passanti per l'origine $O = (0; 0)$.
La bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione $y = x$. La bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $y = -x$.



Particolarmente importante è la seguente osservazione.

> **Quando il termine noto è nullo, la curva F $(x, y) = 0$ passa per l'origine qualunque sia la sua equazione (e il suo ordine).**

7.3.3 | Equazione canonica della retta e coefficiente angolare

L'equazione generale della retta (ossia $ax + by + c = 0$) è in forma implicita (si veda § 8.1); per esplicitarla si devono eseguire i seguenti passaggi, nell'ipotesi che sia $b \neq 0$:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b} \qquad [13]$$

Introducendo le seguenti definizioni:

$$-\frac{a}{b} = m \xrightarrow{\text{def}} \textbf{coefficiente angolare;} \qquad -\frac{c}{b} = q \xrightarrow{\text{def}} \textbf{termine noto}$$

la [13] diventa:

$$y = mx + q$$

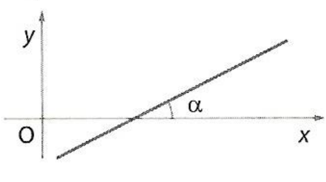
che prende il nome di **equazione canonica della retta**.

> L'equazione generale $3x + 2y - 4 = 0$ diventa (in forma canonica) $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

È di fondamentale importanza la seguente osservazione.

> Mentre l'equazione generale $ax + by + c = 0$ rappresenta **tutte** le rette, l'equazione canonica $y = mx + q$ tralascia le rette verticali (parallele all'asse y) e **non** rappresenta dunque **tutte** le rette del piano (si è infatti posto $b \neq 0$ per passare da una equazione all'altra).

> Data una retta di equazione $ax + by + c = 0$, **il** suo **coefficiente angolare è un indice di quanto la retta è inclinata rispetto all'asse x.**
> **Per le rette verticali** (le cui equazioni **non** possono essere portate in forma canonica) **non si definisce il coefficiente angolare.**



Indicando con α l'angolo orientato in senso antiorario formato dalla retta e dalla semiretta positiva delle ascisse, si ha che:
se l'angolo α è acuto (< 90°) $\rightarrow m > 0$
se l'angolo α è ottuso (> 90°) $\rightarrow m < 0$
se $\alpha = 0$ $\rightarrow m = 0$
Per la definizione di tangente (§ 9.2) si ha $m = \text{tg}\,\alpha$.

7.3.4 | Rette parallele e perpendicolari

Date due rette, con coefficienti angolari m_1 e m_2, la **condizione di parallelismo** è:

$$m_1 = m_2$$

Similmente, la **condizione di perpendicolarità** è:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \leftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

- Le rette $y = 3x + 1$ e $6x - 2y = 5$ sono parallele poiché hanno lo stesso coefficiente angolare ($m = 3$ per entrambe).
- Le rette $y = -2x + 1$ e $-x + 2y = 0$ sono invece perpendicolari.

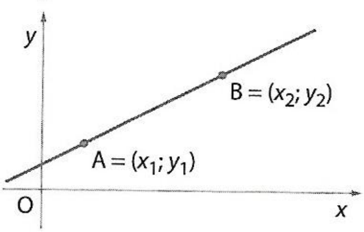
7.3.5 | Equazione delle rette passanti per uno o per due punti

Per un qualsiasi punto $P = (x_0; y_0)$ del piano passano infinite rette. L'equazione di una qualsiasi di queste rette è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Al variare del coefficiente angolare m si ottengono tutte le possibili rette passanti per P (ad esclusione dell'unica retta verticale).

Le rette passanti per il punto P (1; 2) hanno equazione: $y - 2 = m(x - 1)$

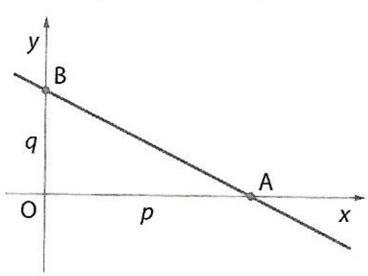


Siano dati ora due punti A e B (di coordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ rispettivamente): l'equazione della retta passante per i due punti è data dalla formula seguente:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

L'equazione della retta passante per $A = (1; 2)$ e $B = (2; 0)$ è: $\frac{y-2}{-2} = \frac{x-1}{2-1} \rightarrow y = -2x + 4$

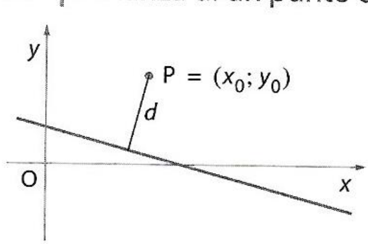
7.3.6 | Equazione segmentaria della retta



Nel caso particolare in cui si voglia calcolare l'equazione della retta passante per due punti A e B posizionati, rispettivamente, sull'asse x e sull'asse y (di coordinate, per esempio, $A = (p; 0)$ e $B = (0; q)$) si utilizza l'*equazione segmentaria della retta*:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

7.3.7 | Distanza di un punto da una retta



Data la retta $ax + by + c = 0$ e il punto $P = (x_0; y_0)$, la distanza d fra la retta e il punto è pari a:

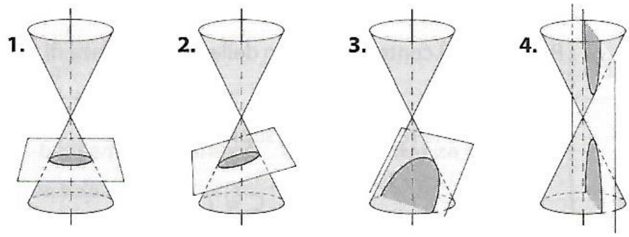
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7.4 | Curve algebriche del secondo ordine: le coniche

Come si è visto, le rette sono rappresentate analiticamente da equazioni di primo grado in due incognite. Viceversa le curve rappresentate da equazioni di secondo grado prendono il nome di *coniche*: il nome deriva dal fatto che tali curve si ottengono dall'**intersezione fra una superficie conica a due falde e un piano.**

A seconda dell'inclinazione e della posizione del piano rispetto all'asse della superficie conica si hanno i diversi tipi di conica:

1. circonferenza
2. ellisse
3. parabola
4. iperbole



7.4.1 | Equazione generale di una conica

L'equazione generale di una conica coincide con la forma più generale di equazione di secondo grado in due incognite:

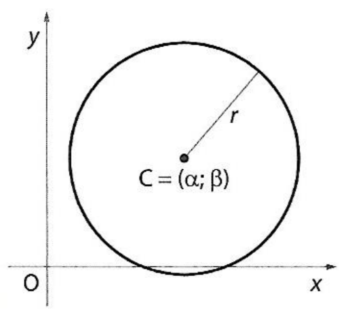
$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad [14]$$

Al variare dei coefficienti A, B, C, D, E, F, si ottengono tutte le coniche possibili.

Nella lettura dei paragrafi seguenti si tenga presente che il primo obiettivo da conseguire è quello di saper riconoscere le coniche dalle loro equazioni; in altre parole, data l'equazione di una conica, è necessario saper dire di che conica si tratta. Le coniche che più frequentemente compaiono nei quesiti dei test sono la circonferenza e la parabola.

7.4.2 | Circonferenza

La circonferenza è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la distanza da un punto fisso detto centro.



In base alla precedente definizione è possibile ricavare l'*equazione normale della circonferenza*:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad [15]$$

Se si moltiplica la [15] per una costante k (diversa da zero) si ottiene l'*equazione generale della circonferenza*:

$$kx^2 + ky^2 + kax + kby + kc = 0$$

L'equazione generale della circonferenza è una equazione di secondo grado mancante del termine in *xy* e avente i coefficienti dei termini di grado massimo uguali tra loro.

L'equazione generale della circonferenza si ottiene quindi dall'equazione generale delle coniche [14] ponendo B = 0 e A = C (ciò significa che l'equazione è priva del termine in *xy* e che i coefficienti dei termini di grado massimo sono uguali tra loro).

La curva di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ è una circonferenza.
La curva di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 3xy - 3y = 0$ **non** è una circonferenza.

Data l'equazione di una circonferenza, per trovarne le coordinate del centro $C = (\alpha; \beta)$ e il raggio r si utilizzano le relazioni seguenti:

$$a = -2\alpha \rightarrow \alpha = -\frac{a}{2} \qquad b = -2\beta \rightarrow \beta = -\frac{b}{2}$$

$$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \rightarrow r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

Per trovare il centro e il raggio della circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

si utilizzano le relazioni viste sopra e si ottiene:

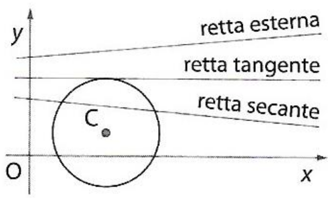
$$\begin{cases} \alpha = -a/2 = 1 \\ \beta = -b/2 = -2 \end{cases} \rightarrow C = (1; -2) \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

7.4.3 | Posizioni reciproche tra rette e circonferenze

Una retta può essere *esterna*, *tangente* o *secante* a una circonferenza:

esterna	$\leftrightarrow$	$d > r$
tangente	$\leftrightarrow$	$d = r$
secante	$\leftrightarrow$	$d < r$

ove r è il raggio della circonferenza, mentre d è la distanza fra il centro della circonferenza e la retta.



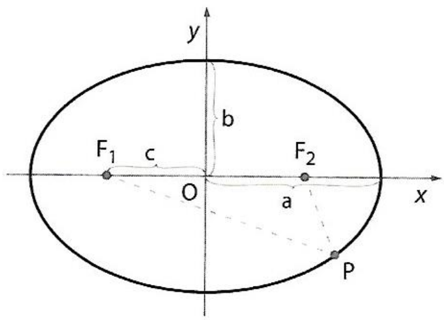
Dal punto di vista algebrico, per trovare le (eventuali) intersezioni fra una retta e una circonferenza si deve risolvere il sistema (di secondo grado) fra le loro equazioni: se il sistema non ha soluzioni la retta è esterna, se il sistema ha una sola soluzione la retta è tangente, se le soluzioni sono due la retta è secante.

7.4.4 | Ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Indicando con F_1 ed F_2 i due fuochi e con 2a la somma (costante) delle distanze di un punto P dagli stessi due fuochi F_1 ed F_2, si ha che l'ellisse è il luogo dei punti P tali che:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



Si supponga (senza ledere la generalità) che i due fuochi F_1 ed F_2 abbiano le seguenti coordinate:

$$F_1 = (-c;0) \qquad F_2 = (c;0)$$

per cui i due fuochi si trovano sull'asse delle *x*, entrambi a distanza c dall'origine degli assi (in modo che l'origine stessa sia il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$): sotto queste ipotesi, l'*equazione canonica* (o *normale*) *dell'ellisse* è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per le ellissi scritte in forma canonica si utilizza la seguente nomenclatura:

a = semiasse maggiore b = semiasse minore c = semidistanza focale

La relazione che lega i tre parametri a, b, c è la seguente:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

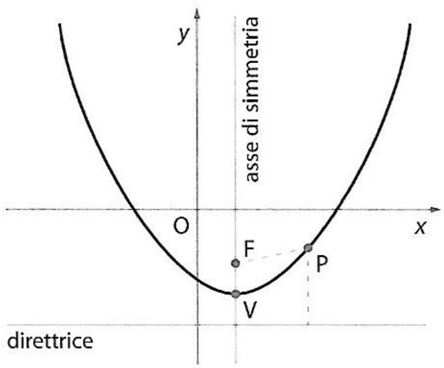
Si definisce **eccentricità dell'ellisse** il rapporto $e = \frac{c}{a}$.

L'eccentricità dell'ellisse è un indice di quanto l'ellisse è "schiacciata". Essendo $a > c$, si ha che $0 \leq e < 1$.

La circonferenza è un'ellisse con eccentricità nulla: i due fuochi coincidono in un punto (il centro della circonferenza) e la loro distanza è $2c = 0$ ossia $c = 0$, che implica $e = 0$.

7.4.5 | Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.

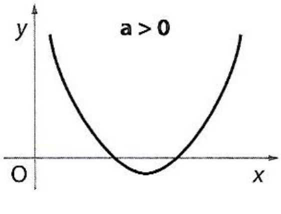


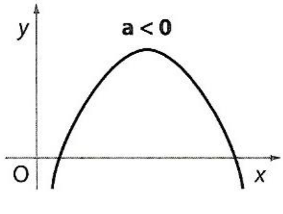
Si supponga che la direttrice sia una retta orizzontale (parallela all'asse delle *x*); allora, l'equazione generale della parabola risulta essere:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad [16]$$

che (al variare di a, b, c) rappresenta tutte le parabole con direttrice orizzontale.

Se nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ il parametro a (coefficiente numerico del termine di secondo grado) è **positivo**, la concavità della parabola è rivolta **verso l'alto**; viceversa se il parametro a è **negativo**, la concavità è **verso il basso**.





Le coordinate del fuoco F e l'equazione della direttrice sono rispettivamente (con $\Delta = b^2 - 4ac$):

$$F = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \qquad y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$$

L'equazione dell'*asse di simmetria* (la retta ortogonale alla direttrice passante per il fuoco F) e le coordinate del vertice V (il punto di intersezione tra la parabola e l'asse di simmetria) sono invece:

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Data la parabola $y = x^2 - 2x - 3$ (con $\Delta = 16$) le coordinate del vertice sono $V = (1; -4)$.

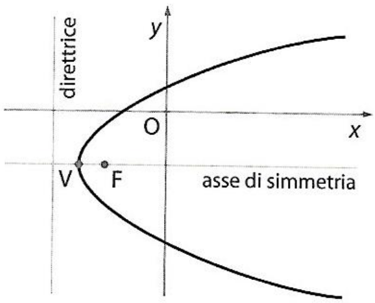
La parabola con direttrice orizzontale è anche una funzione (§ 8.1).

Nel caso in cui la direttrice sia verticale (e di conseguenza l'asse di simmetria sia orizzontale), l'equazione della parabola diventa:

$$x = ay^2 + by + c$$

si tratta in pratica di una equazione che differisce dalla [16] solo per lo scambio della x con la y: tutte le formule finora trovate continuano a valere, a patto di effettuare ovunque lo scambio della x con la y. Per esempio, le coordinate del vertice V sono:

$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$$



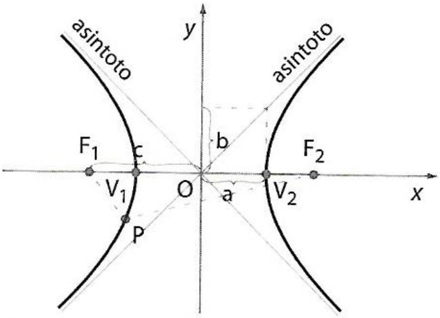
La parabola con direttrice verticale non è una funzione (§ 8.1).

7.4.6 | Iperbole

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante (in valore assoluto) la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Indicando con F_1 ed F_2 i due fuochi e con 2a la differenza (costante) delle distanze di un punto P dagli stessi due fuochi F_1 ed F_2, si ha che l'iperbole è il luogo dei punti P tali che:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$



Si supponga ora che i due fuochi F_1 ed F_2 abbiano le seguenti coordinate:

$$F_1 = (-c; 0) \qquad F_2 = (c; 0)$$

per cui i due fuochi si trovano sull'asse delle x, entrambi a distanza c dall'origine degli assi (in modo che l'origine stessa sia il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$): sotto queste ipotesi, l'*equazione canonica* (o *normale*) *dell'iperbole* è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per le iperboli scritte in forma canonica si utilizza la seguente nomenclatura:

a = semiasse trasverso b = semiasse non trasverso c = semidistanza focale

La relazione che lega i tre parametri a, b, c è la seguente:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si definisce **eccentricità dell'iperbole** il rapporto $e = \frac{c}{a}$.

L'eccentricità è un indice dello "schiacciamento" dell'iperbole, come per l'ellisse, ma, a differenza di quest'ultima, si ha sempre che $e > 1$.

7.4.7 | Asintoti di un'iperbole

Quando una curva (per esempio un'iperbole) si avvicina indefinitamente ad una retta, il suo comportamento viene detto **asintotico** e la retta in questione **asintoto della curva**.

Un'iperbole possiede sempre due asintoti: se l'equazione dell'iperbole è $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (equazione canonica), allora i due asintoti hanno le seguenti equazioni:

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad y = \frac{b}{a}x$$

Gli asintoti dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sono $y = -\frac{3}{4}x$ e $y = \frac{3}{4}x$

7.4.8 | Iperbole equilatera

Un'iperbole si dice **equilatera** quando i suoi asintoti sono perpendicolari tra loro.

Ricordando la condizione di perpendicolarità tra due rette e le equazioni degli asintoti dell'iperbole, si ha che la definizione di iperbole equilatera si trasforma nella seguente condizione:

$$-\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = -1 \xrightarrow{\text{eliminando i denominatori}} b^2 = a^2$$

L'equazione canonica di una iperbole equilatera può allora essere riscritta:

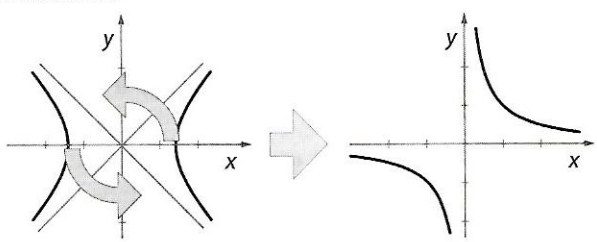
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \xrightarrow{\text{moltiplicando ambo i membri per } a^2} x^2 - y^2 = a^2$$

Le equazioni degli asintoti di una iperbole equilatera sono:

$$y = -x \qquad y = x$$

ossia coincidono con le bisettrici degli assi coordinati.

Si immagini ora di "ruotare" di 45° il diagramma dell'iperbole equilatera: effettuando questa "rotazione" in senso antiorario si ha che gli asintoti vengono a coincidere con i due assi coordinati e il diagramma dell'iperbole è tutto contenuto nel primo e nel terzo quadrante.



È possibile dimostrare che, effettuando questa "rotazione", l'equazione dell'iperbole equilatera diventa particolarmente semplice:

$$xy = k$$

In questi casi si parlerà di **iperbole equilatera riferita ai propri asintoti**, in quanto gli asintoti coincidono con gli assi del sistema di riferimento cartesiano.

L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti è anche una funzione.

MATEMATICA

7.5 | Metodo pratico per il riconoscimento di una conica

Finora è stato affrontato il problema di trovare, data la definizione di una conica come luogo geometrico, la sua equazione (generale o canonica). In questo paragrafo si affronterà il problema opposto: data una equazione di secondo grado in due incognite (tipicamente x e y), individuare di che conica si tratta.

Si è visto (§ 7.4.1) che la forma più generale di equazione di una conica coincide con la forma più generale di equazione di secondo grado in due incognite:

$$F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dove al variare dei coefficienti A, B, C, D, E, F, si ottengono tutte le coniche possibili.

Data l'equazione di una conica si calcoli per essa la quantità:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Si possono presentare i seguenti tre casi.

1. Se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ allora la conica è un'ellisse; in particolare è una circonferenza se $A = C$ e $B = 0$;
2. se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ allora la conica è una parabola;
3. se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ allora la conica è un'iperbole; inoltre l'iperbole è equilatera se e solo se $A + C = 0$.

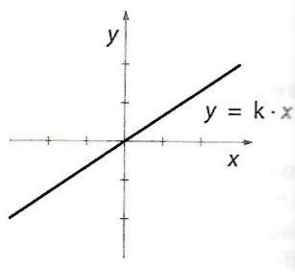
Data la conica di equazione $3y^2 + 2x - y + 1 = 0$, di che conica si tratta?
Essendo $A = 0, B = 0, C = 3$ si ha che $\Delta = 0$ quindi la conica è una parabola.

Data la conica di equazione $2x^2 - 4y^2 - 3x - 5 = 0$, di che conica si tratta?
Essendo $A = 2, B = 0, C = -4$ si ha che $\Delta = +32$ quindi la conica è una iperbole: essendo $A + C = 2 - 4 = -2 \neq 0$, l'iperbole non è equilatera.

7.6 | Proporzionalità diretta e inversa fra grandezze

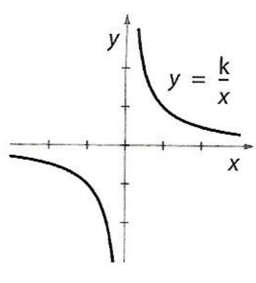
Tra due variabili x e y vi è **proporzionalità diretta** se il loro **rapporto** è costante:

$$\frac{y}{x} = k \leftrightarrow y = k \cdot x$$



dove k indica una costante.
La rappresentazione grafica della proporzionalità diretta è una retta passante per l'origine e con inclinazione (coefficiente angolare) pari a k.
Tra due variabili x e y vi è invece **proporzionalità inversa** se il loro **prodotto** è costante:

$$x \cdot y = k \leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$



dove ancora k indica una costante.
La rappresentazione grafica della proporzionalità inversa è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. In altre parole, *la curva è asintotica agli assi coordinati*: nel caso di k positivo, al crescere di una delle due variabili (per esempio, la x), l'altra (la y) deve necessariamente decrescere (per mantenere costante il prodotto) facendo quindi in modo che la curva si avvicini sempre di più all'asse (delle x).

Quesiti svolti

1 **Se un parallelogramma ABCD ha vertici:**

A = (3 ; 4) B = (– 1 ; 2) C = (5 ; 0)

allora il quarto vertice D ha coordinate:

A (9 ; 2)   B (8 ; 2)   C (10 ; 1)   D (10 ; 2)   E (8 ; 1)

In un parallelogramma ABCD le diagonali AC e BD si incontrano nel loro punto medio M. Per le formule del punto medio le coordinate di M sono uguali a:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

Per le considerazioni precedenti, si può scrivere che:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow 4 = \frac{-1 + x_D}{2} \rightarrow x_D = 9$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow 2 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow y_D = 2$$

Le coordinate di D sono pertanto uguali a (9 ; 2) (risposta A).

2 **Se $y = 4x\,(x + 1)$, il grafico di y in funzione di x su un piano cartesiano è:**

A un cerchio
B una retta
C un'iperbole
D una parabola
E una curva di tipo esponenziale

Per riconoscere la natura di questa conica conviene svolgere il prodotto a secondo membro:

$$y = 4x(x+1) \rightarrow y = 4x^2 + 4x$$

È più facile ora capire che si tratta di una parabola (risposta D) passante per l'origine (c = 0) con asse di simmetria parallelo all'asse *y*.

3 **Un'iperbole di equazione $xy = k$ $(k > 0)$ e una retta di equazione $x - y = h$, hanno in comune:**

A un punto
B due punti
C nessun punto
D dipende dal segno di *h*
E nessuna delle precedenti

L'iperbole di equazione $xy = k$ è equilatera e i suoi due rami, poiché k è positivo, sono contenuti nel primo e nel terzo quadrante. La retta di equazione $x - y = h$, ossia $y = x - h$ appartiene al fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Queste considerazioni consentono di concludere che ciascuna retta del fascio interseca l'iperbole sempre in due punti distinti (risposta B).

MATEMATICA

4 **Che valore deve avere a, affinché le due equazioni $ax = 15 - 3y$ e $y = 3x - 2$ rappresentino due rette perpendicolari fra loro?**

A $a = 3$

B $a = 1$

C $a = -1/3$

D $a = 0$

E $a = -1$

Affinché le due rette date siano perpendicolari, i rispettivi coefficienti angolari m_1 e m_2 devono soddisfare la condizione $m_1 \cdot m_2 = -1$. Poiché le equazioni canoniche delle due rette sono rispettivamente:

$$y = -\frac{a}{3}x + 5 \qquad y = 3x - 2$$

la condizione di perpendicolarità è uguale a:

$$-\frac{a}{3} \cdot 3 = -1$$

Risolvendo l'equazione in a, si ottiene $a = 1$. La risposta esatta è quindi la B.

5 **Per quali valori del parametro reale a le due rette di equazione $y = 2x + 1$ e $y = ax - 3$ non hanno alcun punto in comune?**

A $a = 5$ e $a = 3$

B $a = 0$

C $a = 2$

D Per nessun valore di a

E Per ogni valore di a

Per risolvere il quesito non è necessario impostare il sistema avente come equazioni quelle delle due rette e determinare per quali valori del parametro a esso non ammette soluzioni. Ricordando che, in un piano cartesiano, due rette non hanno alcun punto in comune se sono parallele, è sufficiente imporre che i relativi coefficienti angolari siano uguali:

$$ax = 2x \rightarrow a = 2$$

La risposta esatta è dunque la C.

6 **Quale delle seguenti espressioni rappresenta una circonferenza in coordinate cartesiane?**

A $x + y = R$

B $x - y = R$

C $x^2 + y^2 = R^2$

D $(x + y)^2 = R$

E $xy = R$

L'espressione contenuta nella risposta C è l'equazione canonica della circonferenza di raggio R, per cui la C risulta essere la risposta esatta. A questa conclusione si sarebbe potuti giungere anche procedendo per esclusione: le espressioni contenute nelle risposte A e B sono equazioni di primo grado, quindi rappresentano (in coordinate cartesiane) due rette. L'espressione contenuta nella risposta D, una volta sviluppato il quadrato a primo membro, contiene il termine in xy per cui non può rappresentare una circonferenza. Infine, l'espressione E contiene il termine xy e non contiene i termini x^2 e y^2, quindi non può essere l'equazione di una circonferenza.

7 Determinare l'area S del triangolo i cui vertici sono i punti A (1 ; 2), B (2 ; 4) e C (2 ; 2).

A) S = 4

B) S = 1

C) S = 0

D) S = 2

E) La domanda è priva di significato

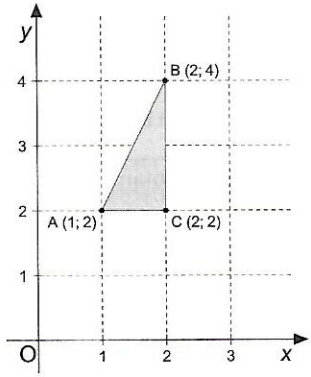
Per rispondere rapidamente al quesito conviene posizionare i tre punti sul piano cartesiano.

Dal disegno si ricava che il triangolo ABC è un triangolo rettangolo con base (segmento AC) di lunghezza unitaria e altezza (segmento BC) di lunghezza 2.

L'area S del triangolo risulta quindi essere:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

per cui la risposta corretta risulta essere la B.



8 La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ha il centro:

A) sull'asse x

B) sull'asse y

C) sulla retta $x = y$

D) nell'origine degli assi

E) nel punto di coordinate (0 ; 2)

Nell'equazione proposta dal quesito manca il termine in y, quindi ci si trova nel caso particolare b = 0: il centro si trova sull'asse delle x (risposta A).

9 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia *r* la retta di equazione:

$$y = \frac{3x + 1}{-2}$$

Quale delle seguenti equazioni rappresenta una retta parallela ad *r* e passante per il punto (1;1)?

A) $y = \frac{2}{3}x + 1$

B) $y = -\frac{3}{2}x + 1$

C) $y = \frac{3}{2}(x - 1) + 1$

D) $y = 1 + \frac{2}{3}(x - 1)$

E) $y = \frac{5 - 3x}{2}$

MATEMATICA

La retta $y = \frac{3x+1}{-2}$ ha coefficiente angolare $m = -\frac{3}{2}$. Qualsiasi retta a essa parallela deve avere lo stesso coefficiente angolare, quindi le alternative A, C e D sono errate. La retta cercata deve inoltre passare per il punto $(1;1)$ quindi, inserendo le coordinate di tale punto nella sua equazione, si deve ottenere un'identità (condizione di appartenenza).
Essendo:

$$y = -\frac{3}{2}x + 1 \rightarrow 1 = -\frac{3}{2}(1) + 1 \rightarrow 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5-3x}{2} \rightarrow 1 = \frac{5-3(1)}{2} \rightarrow 1 = \frac{2}{2} \rightarrow 1 = 1$$

la risposta esatta è la E.

10 **Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo le circonferenze c di centro $O(0;0)$ e raggio 2, e c' di centro O' e raggio 3. Le circonferenze c e c' si intersecano in due punti. Tra i seguenti punti, quale può essere O' ?**

A $(-4;-4)$

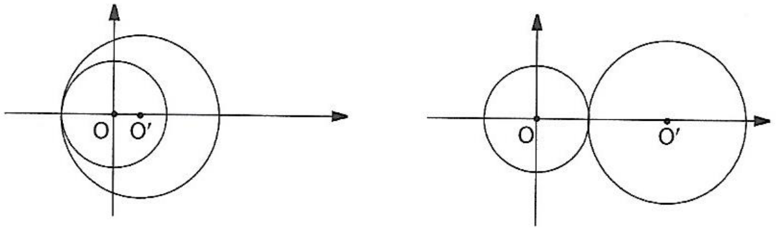
B $(3;4)$

C $\left(1;\frac{9}{2}\right)$

D $\left(\frac{11}{3};\frac{11}{3}\right)$

E $(5;-2)$

Poiché le circonferenze considerate si intersecano in due punti, esse non possono essere né concentriche, né esterne, né tangenti quindi la distanza tra i due centri O e O′ deve essere maggiore della differenza tra i raggi delle due circonferenze (circonferenze tangenti internamente) e minore della loro somma (circonferenze tangenti esternamente):



$$1 = 3 - 2 < \overline{OO'} < 3 + 2 = 5$$

Tra tutti i punti proposti, l'unico che soddisfa tali richieste è $\left(1;\frac{9}{2}\right)$, risultando in tal caso $\overline{OO'} = \sqrt{\frac{85}{4}} \approx 4{,}6$, quindi la risposta esatta è la C.