10 | Probabilità, statistica e calcolo combinatorio

10.1 | Calcolo delle probabilità

10.1.1 | Il concetto di evento

Un concetto di primaria importanza nella teoria della probabilità è quello di *evento*. Si pensi al lancio di un dado: qualsiasi affermazione sul possibile risultato del lancio non può essere prevista *a priori*: ogni risultato è quindi *incerto* (o *aleatorio*). Ogni punteggio possibile ("1", "2",...,"6") è un evento aleatorio, come lo sono anche tutte le possibili affermazioni ("il risultato è un numero pari", "il risultato è un numero divisibile per 3",...).

Per evento si intende qualsiasi fatto fisico o concettuale che viene descritto (a parole) da un enunciato che ammetta due soli valori logici: vero o falso.

Generalmente gli eventi descrivono il risultato di un *esperimento* (fisico o concettuale): il lancio di una moneta, il numero di pezzi difettosi in un lotto di produzione, il risultato (somma) del lancio di due dadi, ... Quindi per ogni esperimento, benché risulti impossibile prevederne il "risultato", è invece possibile *enumerare* o *descrivere l'insieme di tutti i risultati (esiti) possibili.*

Per l'esperimento "lancio di un dado", l'insieme di tutti gli esiti possibili è {1, 2, 3, 4, 5, 6}: l'evento "esce un numero pari" comprende quindi gli esiti {2, 4, 6}.
Per l'esperimento "lancio di due monete" l'insieme di tutti gli esiti è {TT, TC, CT, CC}: l'evento "escono due teste" comprende il solo esito {TT}.

L'insieme di tutti i possibili esiti è chiamato **spazio dei risultati** e viene indicato con U: **qualsiasi evento può essere visto come insieme di esiti e quindi come sottoinsieme** (eventualmente improprio) **di U.** Allora un generico evento E è vero, cioè accade, se l'esperimento ha generato un esito tale da appartenere a E (pensato come sottoinsieme di U). Di conseguenza, anche l'intero spazio dei risultati e l'insieme vuoto $\emptyset$ sono da considerarsi eventi, chiamati rispettivamente **evento certo** ed **evento impossibile**. Chiaramente l'evento certo è sempre vero (l'esito sicuramente appartiene a U), mentre l'evento impossibile è sempre falso (nessun esito può appartenere all'insieme vuoto $\emptyset$).

Poiché gli eventi sono insiemi (di esiti), su di essi è possibile operare mediante le usuali operazioni insiemistiche di unione, intersezione e complementazione.

Se E e F sono eventi allora:

- l'evento *opposto* (o complementare) $\bar{E}$ è un evento vero se E è falso. In altre parole, due eventi E ed $\bar{E}$ si dicono opposti quando il verificarsi di E esclude il verificarsi di $\bar{E}$ e viceversa.

  Dal lancio di una moneta si possono verificare due eventi tra loro opposti: l'uscita della faccia contenente la testa o di quella contenente la croce.

- l'evento *unione* $E \cup F$ è un evento vero se *almeno* uno dei due eventi è vero;
- l'evento *intersezione* $E \cap F$ è un evento vero se *entrambi* gli eventi sono veri.

Si consideri l'esperimento "lancio di un dado" e il corrispondente spazio dei risultati $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{3, 4\}$ allora:

- $E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E \cap F = \{3\}$
- $\bar{E} = \{4, 5, 6\}$
- $\bar{F} = \{1, 2, 5, 6\}$

Se l'esito dell'esperimento è "4" allora F, $E \cup F$ e $\bar{E}$ sono veri, mentre E, $E \cap F$ e $\bar{F}$ sono falsi.

MATEMATICA

Due eventi si dicono **incompatibili** (o disgiunti) quando non possono avvenire contemporaneamente (in caso contrario gli eventi si dicono *compatibili*). In simboli, i due eventi E ed F sono incompatbili se:

$$E \cap F = \varnothing$$

Nel lancio di un dado, l'evento "esce il numero 2" e l'evento "esce il numero 4" sono due eventi incompatibili (ma non opposti).

Infine, due eventi E ed F si dicono **indipendenti** se il verificarsi di E non cambia la probabilità che si verifichi F e viceversa (in caso contrario gli eventi si dicono *dipendenti*).

Nel lancio di due dadi, l'evento "esce il numero 1 sul primo dado" e l'evento "esce il numero 6 sul secondo dado" sono due eventi indipendenti.

10.1.2 | Probabilità di un evento

Dopo aver chiarito il concetto di evento è possibile fornire la definizione di probabilità.

La probabilità di un evento *E*, indicata con P(*E*), è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al manifestarsi di *E* e il numero dei casi possibili, giudicati egualmente probabili.

La probabilità che lanciando una moneta esca "croce" è 1/2. Infatti c'è un solo caso favorevole (l'uscita della "croce") su due casi possibili ("testa" oppure "croce").
La probabilità che dal lancio di un dado esca il numero 2 è 1/6. Infatti i casi possibili sono 6 (le 6 facce del dado) mentre il caso favorevole (l'uscita del numero 2) è uno solo.

La probabilità di un evento è quindi un numero compreso tra 0 e 1. In particolare si ha:

P(*E*) = 0 se l'evento *E* è impossibile

P(*E*) = 1 se l'evento *E* è certo

La probabilità che dal lancio di un dado (con le facce numerate da 1 a 6) esca il numero 7 è pari a 0: si tratta di un evento impossibile.
La probabilità che dal lancio di un dado esca un numero minore di 7 è pari a 1: si tratta di un evento certo (ossia che si verifica sicuramente).

Se E ed $\bar{E}$ sono due eventi opposti la somma delle loro probabilità è uguale a 1:

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1 \quad \rightarrow \quad P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

In altre parole, la probabilità che E **non** si verifichi è pari a $1 - P(E)$.

La probabilità che, dal lancio di un dado, **non** esca il numero 2 è uguale a 5/6 ossia è pari alla differenza tra 1 e la probabilità che esca proprio il numero 2.

Determinare la probabilità che sia uguale a 4 la somma dei numeri usciti dal lancio di due dadi.

I casi favorevoli sono tre e sono descritti nella tabella seguente:

1° Dado	2° Dado	Somma
1	3	4
3	1	4
2	2	4

$$\left.\begin{array}{r}\text{numero di casi favorevoli} = 3\\ \text{numero di casi possibili} = 36\end{array}\right\} \text{la probabilità dell'evento è } P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

10.1.3 | Teorema delle probabilità totali

Siano E ed F due eventi *incompatibili*; la probabilità che si verifichi E **oppure** F (ossia la probabilità che si verifichi l'evento $E \cup F$) è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi. In simboli, se i due eventi E ed F sono incompatibili allora:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Dal lancio di un dado, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire; la probabilità che esca il numero 1 **oppure** il 6 è $P(1, 6) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

La formula che vale in generale per due eventi compatibili qualsiasi è:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

10.1.4 | Teorema delle probabilità composte

Siano E ed F due eventi *indipendenti*; la probabilità che essi si verifichino **contemporaneamente** (ossia la probabilità che si verifichi l'evento $E \cap F$) è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi. In simboli, se i due eventi E ed F sono indipendenti allora:

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

La probabilità che, lanciando due volte un dado, esca due volte il numero 1 è data da:

$$P = 1/6 \cdot 1/6 = (1/6)^2 = 1/36$$

Analogamente, nel caso di tre o più eventi *indipendenti* $E, F, G \dots Z$ la probabilità che si verifichino tutti **contemporaneamente** è data ancora dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$P(E \cap F \cap G \cap \dots \cap Z) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) \cdot \dots \cdot P(Z)$$

La probabilità che, lanciando tre volte un dado, esca tre volte il numero 1 è data da:

$$P = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = (1/6)^3 = 1/216$$

I due teoremi visti sono spesso utili per calcolare la probabilità di particolari eventi.

Si tirano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere un 6 e un numero diverso da 6?

Per la risoluzione di questo problema si può procedere in due modi distinti: utilizzando la definizione oppure utilizzando i due teoremi visti sul calcolo delle probabilità. Per utilizzare la definizione si tratta ancora una volta di trovare il numero di casi favorevoli al manifestarsi dell'evento (i casi possibili sono in totale $6 \cdot 6 = 36$).

Configurazione	1° Dado	2° Dado	N° di casi
1ª	6	da 1 a 5	5
2ª	da 1 a 5	6	5

Complessivamente i casi favorevoli sono $5 + 5 = 10$ e la probabilità richiesta vale 10/36.

Nel caso invece si vogliano usare i teoremi visti si procede nel modo seguente: l'evento si verifica se la configurazione dei dadi è una delle due riportate nella precedente tabella.

Per il teorema delle probabilità composte, la probabilità di ognuna delle due configurazioni (che risultano essere naturalmente equiprobabili) si ottiene dal prodotto delle probabilità relative ai valori assunti dai singoli dadi; per la prima configurazione, per esempio, si ha:

$$P_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

Dato che le due configurazioni sono incompatibili tra loro, per il teorema delle probabilità totali, la probabilità cercata si ottiene sommando le probabilità delle due configurazioni:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$$

MATEMATICA

10.1.5 | Probabilità e coefficiente binomiale

Spesso un dato esperimento può essere pensato come costituito da n **ripetizioni** di un esperimento più semplice: se, per esempio, si chiede qual è la probabilità che esca k volte "testa" se una moneta viene lanciata n volte (oppure, indifferentemente, se si lanciano n monete) questo equivale a ripetere n volte il singolo esperimento "lancio di una moneta". Le configurazioni distinte possono essere numerose e occorre una formula per poterle contare: per questo "conteggio" si utilizza il *coefficiente binomiale* che fondamentalmente risponde alla domanda "dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?". La formula per il calcolo del coefficiente binomiale "n su k" è la seguente[1]:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?
Lanciando 6 volte una moneta, la probabilità di ottenere una certa sequenza contenente esattamente 4 volte testa e, di conseguenza, 2 volte croce è data da:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Occorre però prestare attenzione al fatto che questa è la probabilità di ottenere una sola configurazione, per esempio T T T T C C dove ci sono prima le 4 teste e poi le 2 croci: esistono però altre configurazioni. Si potrebbero presentare le seguenti sequenze:

TTTTCC
TTTCTC
TTTCCT
TTCTTC
...
CTCTTT
CCTTTT

Occorre quindi contare tutte queste possibili configurazioni: applicando la formula per il calcolo del coefficiente binomiale al caso dei 6 lanci (quindi $n = 6$) con la testa che esce 4 volte (quindi $k = 4$) si ottiene:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

La probabilità cercata è quindi data dal prodotto del coefficiente binomiale e della probabilità di una singola configurazione:

$$P_2 = 15 \cdot P_1 = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

In un quesito a risposta multipla si commette facilmente l'errore di calcolare la probabilità di ottenere una sola configurazione e quindi di rispondere erroneamente $P = 1/64$ che rappresenta invece la probabilità di una sola delle 15 possibili sequenze di 4 teste e 2 croci.

Il valore del coefficiente binomiale può anche essere trovato tramite il metodo per il calcolo dei coefficienti della potenza n-esima di un binomio (§ 2.2.6).

$\binom{n}{k}$ è il $(k+1)$-esimo valore della $(n+1)$-esima riga del triangolo di Tartaglia (§ 2.2.6).

È utile ricordare infine altre proprietà del coefficiente binomiale.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\,.$$

1. Con $n!$ (n fattoriale) si intende il prodotto dei primi n numeri naturali (per esempio $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$). Inoltre per definizione si ha: $0! = 1$.

10.2 | Statistica

La statistica comprende le tecniche di raccolta ed elaborazione dei dati al fine di trarre da essi delle informazioni sintetiche.

10.2.1 | Distribuzioni statistiche

Il punto di partenza di un'indagine statistica consiste sempre nella raccolta dei dati e nella loro classificazione: dopo aver definito il *carattere* che si intende analizzare (per esempio "colore degli occhi") e le sue *modalità* (per esempio "occhi verdi", "occhi azzurri"...), si procede alla rilevazione, che consiste nell'assegnare ciascuna osservazione alla corrispondente modalità del carattere.

Al fine di ottenere una descrizione sintetica del fenomeno, è utile associare a ciascuna modalità il numero di ricorrenze, ossia il numero delle osservazioni che rientrano in tale modalità: questo numero prende il nome di *frequenza* (o *intensità*).

L'insieme delle modalità e delle rispettive frequenze prende il nome di distribuzione statistica (o distribuzione delle frequenze).

La distribuzione statistica si ottiene dunque riclassificando le osservazioni in base alla frequenza con cui ciascuna modalità compare.

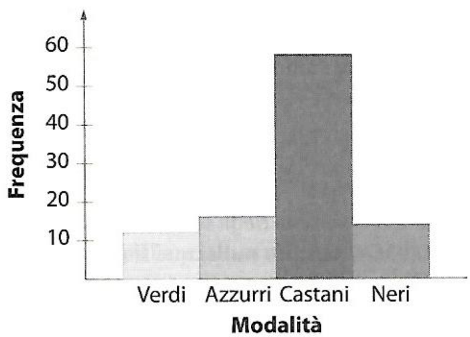
Distribuzione del colore degli occhi di 100 individui:

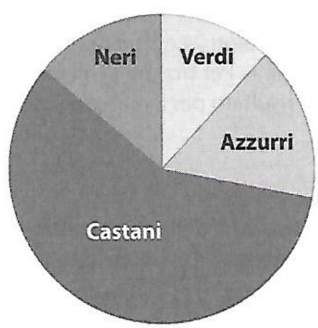
Modalità	Frequenza
Verdi	12
Azzurri	16
Castani	58
Neri	14

La distribuzione statistica è a tutti gli effetti una *funzione* (per la definizione di funzione si veda § 8.1) **in quanto associa a ciascuna modalità la corrispondente frequenza.**

Come tutte le funzioni, anche la distribuzione statistica può essere rappresentata sia in forma tabellare (elencando le modalità e le corrispondenti frequenze come nell'esempio precedente) che in forma grafica.

La stessa distribuzione dell'esempio precedente (sul colore degli occhi di 100 individui) può essere rappresentata sia tramite un istogramma (grafico a sinistra, che mostra la frequenza di ciascuna modalità) sia tramite un areogramma o diagramma "a torta" (grafico a destra, che mostra l'incidenza percentuale di ciascuna modalità sul totale).





MATEMATICA

10.2.2 | Moda, mediana e media aritmetica

Si è già detto che la statistica si pone la finalità di trarre dai dati delle informazioni sintetiche: la distribuzione statistica rappresenta già una forma di sintesi dei dati, ma è spesso necessario disporre di un unico valore numerico che sintetizzi tutti i dati della distribuzione rappresentandone, in qualche modo, il "centro". Esiste più di un "valore centrale" (che più correttamente prende il nome di *indice di posizione* o *di tendenza centrale*) che può essere utilizzato a tal fine; i più importanti sono la *moda*, la *mediana* e la *media aritmetica* della distribuzione.

La moda rappresenta sicuramente il "valore centrale" più intuitivo: **la moda è** infatti **la modalità che presenta la massima frequenza.**

Dati i sette numeri 2, 3, 5, 1, 5, 3, 5 la loro moda è 5 (è la modalità con il maggior numero di ricorrenze).

Per definire invece la mediana di una distribuzione è necessario *ordinare* le osservazioni, ponendole in *ordine crescente*: **la mediana è l'osservazione che occupa la posizione centrale della successione.** Nel caso la successione sia costituita da un numero N dispari di elementi, la mediana coincide con l'elemento che occupa la posizione $(N+1)/2$.

Dati i sette numeri 2, 3, 5, 1, 5, 3, 5 la loro successione ordinata è:

$$1, 2, 3, 3, 5, 5, 5$$

quindi la mediana è 3 (quarto elemento in una successione di sette).

Nel caso la successione sia costituita da un numero N pari di elementi, si presentano due elementi centrali che occupano le posizioni $N/2$ e $(N/2)+1$: la mediana è, in questo caso, per definizione la semisomma dei due elementi.

Dati gli otto numeri 2, 3, 5, 1, 5, 3, 5, 7 la loro successione ordinata è:

$$1, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7$$

quindi la mediana è la semisomma di 3 e 5 (quarto e quinto elemento, rispettivamente, in una successione di otto), ossia $4 = (3+5)/2$.

Infine, **la media aritmetica** (o semplicemente *media*) **di *n* numeri è la somma degli *n* numeri divisa per *n***:

$$\text{media di } x_1, x_2, \ldots, x_n = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

La media aritmetica dei quattro numeri 2, 4, 5 e 7 è $\frac{2+4+5+7}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5$.

Uno studente universitario, dopo aver sostenuto tre esami, ha una media di 24 trentesimi. Nell'esame successivo lo studente consegue 30. Qual è la sua media dopo i quattro esami?
Per rispondere a questo quesito è necessario non dare la stessa importanza (lo stesso peso) ai due valori 24 e 30. Il primo è infatti la media di tre esami mentre il secondo è il risultato di un solo esame. Per trovare la media M dei voti è sufficiente sommare le votazioni conseguite e dividere il risultato per il numero totale di esami dati (ossia 4):

$$M = \frac{24+24+24+30}{4} = 25{,}5$$

Una particolarità della media aritmetica è la seguente: la somma degli scarti dalla media (ossia la somma delle differenze fra ciascuno degli n numeri e la media) è **sempre nulla**, qualsiasi siano gli n numeri.

Riferendosi ancora ai quattro numeri 2, 4, 5 e 7, la somma degli scarti dalla media vale:

$$(2-4{,}5)+(4-4{,}5)+(5-4{,}5)+(7-4{,}5) = -2{,}5-0{,}5+0{,}5+2{,}5 = 0$$

10.3 | Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio si propone di stabilire il numero totale dei gruppi che si possono formare con un dato numero di oggetti, una volta fissata la legge di composizione di tali gruppi.

10.3.1 | Disposizioni

Disposizioni semplici

Con disposizioni di n oggetti a k a k ($D_{n,k}$), si definisce il numero di modi in cui è possibile disporre n oggetti presi k alla volta (a k a k) ove ciascuna disposizione differisce dalle altre **per gli oggetti oppure per il loro ordine**. Si ha che:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (\ldots) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Quanti sono i numeri di tre cifre distinte che si possono formare con le quattro cifre 1, 3, 5 e 7?
Si tratta di disposizioni semplici di 4 oggetti a 3 a 3. Applicando la relazione vista si ha:

$$D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

In quanti possibili modi diversi possono sedersi dieci persone su una panca con quattro posti?
Anche in questo caso i modi possibili sono tanti quante sono le disposizioni semplici di 10 oggetti presi a 4 a 4, ossia $D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Disposizioni con ripetizione

Sono disposizioni di n oggetti a k a k dove ciascun elemento figura al massimo k volte:

$$D^{rip}_{n,k} = n^k$$

Quante parole con 4 lettere si possono formare disponendo di 7 lettere dell'alfabeto e potendo ripetere la stessa lettera?
Si tratta di disposizioni con ripetizione di 7 oggetti a 4 a 4. Applicando la relazione si ha:

$$D^{rip}_{7,4} = 7^4$$

10.3.2 | Permutazioni

Permutazioni semplici

Le permutazioni sono disposizioni di n oggetti a n a n, quindi **differiscono** l'una dall'altra **solo per l'ordine** degli oggetti. Vale la seguente relazione:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (\ldots) \cdot 1 = n!$$

In quanti modi diversi possono sedersi 4 persone su una panca con 4 posti?
Si tratta di permutazioni semplici di quattro oggetti: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Permutazioni con ripetizione

Sono permutazioni di n oggetti di cui k uguali:

$$P^{rip}_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

Quanti anagrammi (anche senza significato) si ottengono con le lettere della parola CANNONE?
Si tratta di 7 oggetti di cui 3 uguali (le tre "N") quindi: $P^{rip}_{7,3} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

MATEMATICA

10.3.3 | Combinazioni

Combinazioni semplici

Le combinazioni, diversamente dalle disposizioni, **differiscono** l'una dall'altra **solo per gli oggetti** e **non per l'ordine** degli oggetti.

I gruppi {1, 3, 5} e {3, 5, 1} rappresentano due disposizioni, ma una sola combinazione, mentre i gruppi {1, 3, 5} e {1, 3, 6} rappresentano due disposizioni e due combinazioni.

Riprendendo l'esempio precedente, le quattro persone che si siedono nei quattro posti a disposizione, costituiscono, comunque si dispongano, sempre **una sola** combinazione.

Vale la relazione:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

In un torneo quadrangolare di calcio, ciascuna delle quattro squadre partecipanti (A, B, C e D) deve incontrare le altre tre squadre una sola volta. Quante partite vengono giocate in totale?

Il numero di partite del torneo corrisponde al numero di gruppi di due squadre che si possono formare con le quattro squadre A, B, C e D. Occorre però tenere presente che, tra una coppia e l'altra, vi deve essere almeno una squadra diversa (la partita tra A e B e la partita tra B e A sono la stessa partita). Il numero di partite richiesto è dato dunque dal numero di combinazioni di quattro oggetti presi a due a due:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = 3 \cdot 2 = 6$$

A una riunione partecipano 6 persone: se ogni persona ha stretto la mano a tutte le altre, quante strette di mano vi sono state?

Per lo stesso ragionamento esposto per l'esercizio precedente, il numero di strette di mano è dato dal numero di combinazioni di sei oggetti presi a due a due:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Combinazioni con ripetizione

Sono combinazioni di n oggetti a k a k dove ciascun elemento figura al massimo k volte:

$$C^{rip}_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

In quanti modi è possibile distribuire 4 caramelle (indistinguibili) fra 2 bambini?

Si tratta del classico problema di suddivisione in gruppi di oggetti indistinguibili. Indicando con 1 il primo bambino e con 2 il secondo, la situazione in cui le 4 caramelle vengono assegnate tutte al primo bambino può essere scritta come "1-1-1-1", mentre se si dividono equamente 2 caramelle al primo e 2 al secondo si scriverà "1-1-2-2". Si tratta quindi di combinazioni con ripetizione di 2 oggetti (i numeri 1 e 2 che rappresentano i bambini) presi a gruppi di 4 (ossia il numero di caramelle da distribuire):

$$C^{rip}_{2,4} = \frac{(2+4-1)!}{(2-1)! \cdot 4!} = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = 5$$

Quesiti svolti

1 L'età media dei partecipanti ad una festa è di 24 anni. Se l'età media degli uomini è di 28 anni e quella delle donne è di 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

A 14/9 B 9/14 C 2 D 3/2 E 4/3

La risposta esatta è la D.
Infatti, indicando con x il numero degli uomini e con y quello delle donne presenti alla festa, dalla definizione di media si ricava:

$$\frac{28x + 18y}{x + y} = 24 \rightarrow 28x + 18y = 24x + 24y \rightarrow 4x = 6y \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2 In un maneggio vi sono 20 cavalli, 15 bianchi e 5 neri. Supponendo che uno a caso dei 20 cavalli venga portato altrove, qual è la probabilità che sia nero?

A 1/3 B 1/4 C 1/5 D 1/15 E 1/20

La probabilità di scegliere all'interno del maneggio un cavallo nero è uguale al rapporto fra il numero dei cavalli neri e il numero totale dei cavalli, cioè

$$P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

La risposta esatta è la B.

MATEMATICA

3 È noto che nel gioco della roulette diciotto numeri sono rossi, diciotto sono neri e uno (lo zero) non è né rosso né nero. Supponiamo ora che a una roulette (non truccata) siano usciti numeri di colore rosso per *n* volte consecutive. Alla giocata successiva:

A è più probabile che esca rosso
B è più probabile che esca nero
C è altrettanto probabile l'uscita del rosso o del nero
D è più probabile che esca nero se $n > 18$
E è più probabile che esca rosso se $n > 37$

È noto a tutti che, nel gioco della roulette, l'uscita del rosso o del nero sono eventi equiprobabili. Non tutti però sono propensi a credere che, per esempio, facendo girare sei volte la pallina, l'uscita di sei rossi consecutivi sia un evento equiprobabile all'uscita (per esempio) di tre rossi e tre neri alternati (rosso, nero, rosso, nero, rosso, nero).
Se in una giocata esce il rosso, nella giocata successiva la probabilità che esca rosso è identica a quella della prima giocata. Assumere che la probabilità che esca rosso decresca al crescere del numero di rossi consecutivi usciti precedentemente, sarebbe come ammettere che la pallina è dotata di capacità di memoria e si ricorda il colore scelto nelle giocate precedenti. La risposta esatta è dunque la C.

4 **A e B sono due eventi indipendenti. La probabilità che A si verifichi è 2/5; la probabilità che B non si verifichi è 5/6. Quale è la probabilità che A e B si verifichino contemporaneamente?**

Ⓐ 1/15 Ⓑ 2/15 Ⓒ 1/3 Ⓓ 17/30 Ⓔ 13/15

La probabilità che due eventi indipendenti si verifichino contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi. La probabilità che A si verifichi è uguale a 2/5 e la probabilità che B si verifichi è (1 – 5/6) = 1/6. La probabilità richiesta è dunque 2/5 · 1/6 = 1/15 e la risposta corretta è la Ⓐ.

5 **Tre studenti si preparano per sostenere lo stesso esame. Se le probabilità di superarlo sono rispettivamente pari a 0,6, 0,8 e 0,5, qual è la probabilità che tutti e tre riescano a superare l'esame?**

Ⓐ 0,48 Ⓑ 0,24 Ⓒ 0,30 Ⓓ 0,20 Ⓔ 0,40

La probabilità che i tre studenti superino contemporaneamente l'esame è data (in base al teorema delle probabilità composte) dal prodotto delle singole probabilità. Infatti i tre eventi sono indipendenti tra loro: il fatto che uno studente superi l'esame non influenza in alcun modo l'esito dell'esame degli altri due. Pertanto, applicando il teorema delle probabilità composte, si ha:

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}24$$

la risposta corretta è quindi la Ⓑ.

6 **Si lanci due volte una moneta non truccata. Calcolare la probabilità che:**
a) esca due volte testa;
b) esca una volta testa e una volta croce;
c) esca due volte croce.
Dire inoltre qual è la somma di tali probabilità.

Ⓐ $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}$ Ⓑ $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1$ Ⓒ $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1$ Ⓓ $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}$ Ⓔ $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 1$

Il numero di casi possibili è pari a 4 poiché in ognuno dei due lanci può uscire croce oppure testa:

Configurazioni	Primo lancio	Secondo lancio
1	croce	croce
2	croce	testa
3	testa	testa
4	testa	croce

Dalla precedente tabella è possibile ricavare il numero di casi favorevoli per le varie combinazioni:
- due volte testa: casi favorevoli = 1, da cui $P_1 = 1/4$;
- una volta testa e una volta croce: casi favorevoli = 2, da cui $P_2 = 2/4 = 1/2$;
- due volte croce: casi favorevoli = 1, da cui $P_3 = 1/4$;
- la somma delle tre probabilità è: 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1.

Pertanto la risposta corretta è la Ⓒ.

7 **Tirando contemporaneamente due dadi, quante possibilità vi sono di ottenere lo stesso numero su entrambi i dadi?**

Ⓐ 1 su 6 Ⓑ 1 su 12 Ⓒ 1 su 36 Ⓓ 1 su 48 Ⓔ 1 su 100

La probabilità che esca su entrambi i dadi un numero fissato (per esempio il numero 1) è pari a 1/36 (ossia 1/6 · 1/6). Il quesito però non fissa il numero che deve uscire: richiede solo che sia lo stesso su entrambi i dadi, per cui (applicando il teorema delle probabilità totali) si ha:

Probabilità che esca il numero 1 su entrambi i dadi:	1/36 +
Probabilità che esca il numero 2 su entrambi i dadi:	1/36 +
Probabilità che esca il numero 3 su entrambi i dadi:	1/36 +
Probabilità che esca il numero 4 su entrambi i dadi:	1/36 +
Probabilità che esca il numero 5 su entrambi i dadi:	1/36 +
Probabilità che esca il numero 6 su entrambi i dadi:	1/36 =
Probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi:	1/6

quindi la risposta cercata è la A.

---

8 **Le 5 lampadine della decorazione di un albero di Natale, sono collegate in serie: se una si guasta l'intera decorazione si spegne. Le 5 lampadine sono state scelte a caso da una scatola di 1000, di cui 100 sono guaste. La probabilità che la decorazione luminosa funzioni è:**

A 0,18 B circa 0,9 C circa 0,59 D circa 0,67 E circa 0,41

Affinché la decorazione natalizia funzioni è necessario che tutte le sue 5 lampadine siano funzionanti. La probabilità di scegliere una lampadina non guasta dalla scatola di 1000 è uguale a (1000 – 100)/1000 = 900/1000. Dopo la prima scelta nella scatola sono rimaste 999 lampadine di cui 899 non guaste, la probabilità di sceglierne una funzionante è pari a 899/999. Allo stesso modo dopo la seconda estrazione sono rimaste 998 lampadine di cui 898 non guaste, la probabilità di sceglierne una funzionante è uguale a 898/998. Ripetendo lo stesso ragionamento per la quarta e per la quinta estrazione si ottengono probabilità di estrarre lampadine funzionanti pari rispettivamente a 897/997 e a 896/996. Per il teorema delle probabilità composte, la probabilità che eventi indipendenti si verifichino contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi; le cinque scelte costituiscono eventi indipendenti, che devono avvenire contemporaneamente e quindi la probabablità è uguale a:

$$P = \frac{900}{1000} \cdot \frac{899}{999} \cdot \frac{898}{998} \cdot \frac{897}{997} \cdot \frac{896}{996} \approx \left(\frac{900}{1000}\right)^5 \approx 0,59$$

La risposta corretta è la C.

---

9 **Una scatola contiene 10 palline bianche, 40 rosse, 50 nere. Qual è la probabilità di estrarre in sequenza prima una pallina bianca e poi una rossa? (N.B.: La seconda estrazione è effettuata senza reinserire nell'urna la prima pallina.)**

A 4%
B 6%
C 10%
D Non calcolabile
E Nessuna delle risposte qui fornite

La probabilità di estrarre alla prima estrazione una pallina bianca è uguale a 10/(10 + 40 + 50) = 10/100. Prima della seconda estrazione nella scatola ci sono quindi 99 palline. La probabilità di estrarre ora una pallina rossa è uguale a 40/99. Le due estrazioni sono eventi indipendenti; per il teorema della probabilità composta la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$P = \frac{10}{100} \cdot \frac{40}{99} = \frac{4}{99}$$

Poiché tale valore è diverso da 4%, da 6% e da 10%, la risposta esatta è la E.

MATEMATICA

10 **Da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20, viene estratta, a occhi bendati, una pallina. Supponendo che tutte le palline abbiano le stesse probabilità di essere estratte, qual è la probabilità che esca una pallina contrassegnata da un quadrato perfetto?**

A 1/4

B 1/5

C 1/10

D 3/20

E 2/5

Un quadrato perfetto è un numero intero che coincide con il quadrato di un altro numero intero. I quadrati perfetti fra 1 e 20 sono quindi 1, 4, 9 e 16: in totale quindi 4 casi favorevoli sui 20 possibili:

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

La risposta corretta è quindi la B.

11 **La media aritmetica fra i tre numeri *a, b, c* è uguale a 6. Quanto vale quindi la media aritmetica fra i *quattro* numeri *a, b, c*, 2?**

A 4

B 4,5

C 5

D 5,5

E 6

Affermare che "la media aritmetica fra i tre numeri a, b, c è uguale a 6" equivale ad affermare che "la somma dei tre numeri a, b, c è uguale a 18". Infatti:

$$\text{media}(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad a+b+c = 6 \cdot 3 = 18$$

Risulta ora facile calcolare la media aritmetica fra i quattro numeri a, b, c, 2:

$$\text{media}(a, b, c, 2) = \frac{a+b+c+2}{4} = \frac{18+2}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ (risposta C)}$$

12 **Quale dei seguenti numeri può rappresentare la media aritmetica di quattro multipli di 3 consecutivi?**

A 5 B 7,5 C 9 D 10,3 E 12

Indicando con $3k$, $3(k+1)$, $3(k+2)$ e $3(k+3)$, con k intero positivo, i quattro multipli consecutivi del numero 3, la loro somma vale:

$$3k + (3k+3) + (3k+6) + (3k+9) = 12k + 18$$

La media aritmetica dei quattro numeri è data da:

$$\frac{12k+18}{4} = 3k + \frac{18}{4} = 3k + 4{,}5$$

Tra le risposte proposte solo la B (7,5) può essere scritta nella forma $3k + 4{,}5$ (basta infatti porre $k = 1$). Questa è dunque la risposta corretta.

