PROBABLITA', STATISTICA E CALCOLO COMBINATORIO

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

IL CONCETTO DI EVENTO

Per **evento** si intende qualsiasi fatto fisico o concettuale che viene descritto da un enunciato che ammetta due soli valori logici: vero o falso.

Generalmente gli eventi descrivono il risultato di un esperimento ad esempio il lancio di una moneta.

L'insieme di tutti gli esiti è chiamato **spazio campionario** e viene indicato con il simbolo U: qualsiasi evento può essere visto come un insieme di esiti e di conseguenza come un sottoinsieme di U.

L'insieme dell'intero spazio dei risultati e l'insieme vuoto vengono chiamati rispettivamente evento **certo** e evento **impossibile**.

Due eventi vengono definiti **opposti** se al verificarsi di un evento viene escluso il verificarsi dell'altro.

L'evento **unione (simbolo** u**)** è un evento vero se almeno uno dei due eventi è vero

L'evento **intersezione (simbolo ∩)** è un evento vero se entrambi gli eventi sono veri.

Due eventi si dicono **incompatibili** quando non possono avvenire contemporaneamente. E ∩ F = Insieme vuoto.

Due eventi E e F si dicono **indipendenti** se il verificarsi di E non cambia la probabilità che si verifichi F e viceversa. In caso contrario i due eventi si dicono **dipendenti.**

PROBABILITA' DI UN EVENTO

La **probabilità di un evento** E, indicata con P(E), è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al manifestarsi di E e il numero di casi possibili. La probabilità equivale sempre a un numero compreso fra 0 e 1.

Es. Probabilità che nel lancio di un dado esca il 2. P(E) = 1 (casi favorevoli) / 6 (casi possibili)

Avendo due eventi opposti la somma delle loro probabilità è uguale a 1.

TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI

Siano E ed F due eventi incompatibili; la probabilità che si verifichi E oppure F è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi.

La formula generale per calcolare la probabilità totale di due eventi è:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE

Dati n eventi indipendenti, la probabilità che si verifichino tutti **contemporaneamente** è data dal prodotto della probabilità dei singoli eventi.

$$P(E \cap F \cap G \cap \ldots \cap Z) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) \cdot \ldots \cdot P(Z)$$

PROBABILITA' E COEFFICIENTE BINOMIALE

In alcuni casi un esperimento può essere pensato come costituito da n ripetizioni di un esperimento più semplici. Per queste richieste si ricorre al **coefficiente binomiale** che risponde alla domanda "dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?" e viene calcolato tramite la formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Es. Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?

Inizialmente conviene utilizzare la formula del coefficiente binomiale usando n = 6 (numero di lanci) e k = 4 (numero di volte che deve uscire testa)

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

In seguito si moltiplicherà il coefficiente binomiale con la probabilità di una singola configurazione (P_1) ovvero 1/64.

$$P_2 = 15 \cdot P_1 = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

STATISTICA

La **statistica** comprende le tecniche di raccolta ed elaborazione dei dati al fine di trarre da essi delle informazioni sintetiche

DISTRIBUZIONI STATISTICHE

Il punto di partenza di un indagine statistica consiste nella raccolta di dati e la loro classificazione. Si definisce un **carattere** ovvero cosa si intende analizza e le **modalità** ovvero i possibili esiti. Per ottenere una descrizione sintetica del fenomeno si associa a ciascuna modalità il numero di volte che si presenta, questo valore prende il nome di **frequenza**.

L'insieme delle modalità e delle rispettive frequenze prende il nome di **distribuzione statistica (o distribuzione delle frequenze)**

La distribuzione statistica è a tutti gli effetti una funzione in quanto associa a ciascuna modalità la corrispondente frequenza.

La distribuzione statistica può essere rappresentata sia in forma **tabellare** sia in forma **grafica.**

MODA, MEDIANA E MEDIA ARITMETICA

Ci sono alcuni valori che possono essere dedotti dalla distribuzione statistica.

La **moda** è la modalità che presenta la massima frequenza.

La **mediana** è l'osservazione che occupa la posizione centrale della successione delle osservazioni ordinate in modo crescente. Nel caso il numero di elementi sia pari la mediana sarà calcolata dalla media dei due valori centrali.

La **media aritmetica (detta anche media)** di n numeri è la somma degli n numeri divisi per n.

CALCOLO COMBINATORIO

Il **calcolo combinatorio** si propone di stabilire il numero totale dei gruppi che si possono formare con un dato numero di oggetti, una volta fissata la legge di composizioni di tali gruppi.

DISPOSIZIONI

Disposizioni semplici

Con disposizioni di n oggetti si definisce il numero in cui è possibile disporre gli oggetti presi k alla volta. Ogni disposizione differisce per gli oggetti che compongono il gruppo o il loro ordine. Può essere calcolato con la formula:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (\dots) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione

Sono disposizioni di n oggetti presi a gruppi di k e dove un elemento compare fino a k volte.

$$D^{rip}_{n,k} = n^k$$

Es. In quanti modi si possono sedere 10 persone su una panca da 4 posti?

$D_{10,4}$ = 10*9*8*7 = 5040

PERMUTAZIONI

Permutazioni semplici

Le permutazioni sono disposizioni di n oggetti presi a gruppi di n che differiscono solo per l'ordine.

$$P_n = D_{n\ n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (\dots) \cdot 1 = n!$$

Permutazioni con ripetizione

Sono ripetizioni di n oggetti di cui k sono uguali

$$P^{rip}_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

Es. Quanti anagrammi si possono ottenere della parola CANNONE?

Essendo che nei 7 oggetti ne troviamo 3 uguali (lettera N) il risultato sarà $P^{rip}_{7,3} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

COMBINAZIONI

Combinazioni semplici

Le combinazioni differiscono l'una dall'altra solo per gli oggetti che la compongono e non per l'ordine.

Ad esempio i gruppi {1,3,5} e {3,5,1} rappresentano due disposizioni ma una solo combinazione in quanto sono presenti gli stessi valori.

La relazione per calcolare una combinazione semplice è:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Combinazioni con ripetizioni

Sono combinazioni di n oggetti raccolti a gruppi di k oggetti dove ciascun elemento compare la massimo k volte. Viene calcolato dalla relazione:

$$C_{n,k}^{rip} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

Es. In quanti modi è possibile distribuire 4 caramelle fra 2 bambini?

Poiché a un bambino possono essere assegnate più di una caramella avremo una combinazione con ripetizioni e che sarà uguale a:

$$C_{2,4}^{rip} = \frac{(2+4-1)!}{(2-1)! \cdot 4!} = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = 5$$