

# CINEMATICA

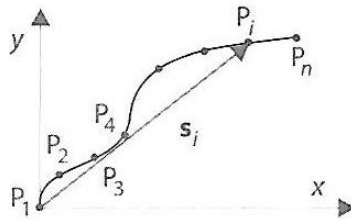
La **cinematica** studia e descrive il moto dei corpi. L'insieme di cinematica **statica** (equilibrio dei corpi) e **dinamica** (le cause del moto) prende il nome di **meccanica**.

## PUNTO MATERIALE TRAIETTORIA, SISTEMI DI RIFERIMENTO

Quando nel descrivere il moto di un corpo si considera l'oggetto come un punto in cui è concentrata la massa, tralasciando quindi la sua estensione spaziale si parla di **punto materiale**.

La **traiettoria** di un punto è la linea che unisce tutte le posizioni occupate dal punto nel tempo.

Il vettore che unisce il centro degli assi con un qualsiasi punto è detto **vettore posizione** e viene indicato con  $s_i$ .



Nel **sistema di riferimento** è possibile esprimere tutte le posizioni occupate da un corpo nel corso del tempo. Questo tuttavia deve essere fissato in precedenza e può essere una retta, un sistema di due assi ortogonali (**piano cartesiano**) o un sistema di tre assi ortogonali (**terna cartesiana**).

---

## GRANDEZZE CINEMATICHE

Le grandezze cinematiche vengono osservate all'inizio e alla fine di un intervallo di tempo ben preciso.

### SPOSTAMENTO

Il **vettore spostamento** unisce la posizione occupata nell'istante iniziale da un punto materiale con la posizione finale di esso. Può essere indicata come la differenza di due vettori posizioni e viene indicato con  $\Delta s$ . La lunghezza del nuovo vettore può essere calcolata tramite la seguente formula

$$|\Delta \mathbf{s}| = \Delta s = \sqrt{(\Delta s_x)^2 + (\Delta s_y)^2}$$

L'unità di misura dello spostamento nel SI è il metro, nel CGS è il centimetro.

Il simbolo  $\Delta$  indica la variazione della grandezza fisica e viene calcolata come la differenza tra il valore finale con quello iniziale.

### VELOCITÀ

La **velocità media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore posizione e la variazione di tempo.

L'unità di misura nel SI è m/s ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Nel CGS è il cm/s. Molto usata come unità di misura è km/h.

Per passare da km/h a m/s si deve dividere per 3,6. Per il passaggio opposto di conseguenza si moltiplica per 3,6.

La velocità media è un vettore. È parallela al valore di  $\Delta s$  e con modulo pari alla differenza tra  $\Delta s$  e  $\Delta t$

La velocità media **non** è la media delle velocità!

**Un camion viaggia a 200 km/h per mezz'ora, poi a 150 km/h per un'ora, infine a 50 km/h per due ore. Qual è la sua velocità media?**

Inizialmente si è tentati di rispondere:  $v = \frac{200 + 150 + 50}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 133,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Tuttavia questo procedimento è errato. In quanto la velocità media si calcola con la differenza fra la variazione di spostamento e il tempo impiegato. Di conseguenza dovremo calcolare il numero di chilometri percorsi nei vari intervalli per poi sommarli tutti e solo in seguito dividere questo numero per il tempo totale impiegato.  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{350 \text{ km}}{3,5 \text{ h}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Per ottenere più informazioni sullo stato di moto si riduce l'ampiezza degli intervalli temporali. Questo si ottiene effettuando un passaggio al limite secondo la relazione seguente che fornisce la definizione di **velocità istantanea**:

$$\mathbf{v}_{\text{ist}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{s}'(t)$$

## ACCELERAZIONE

L'**accelerazione media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore velocità e la variazione di tempo.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

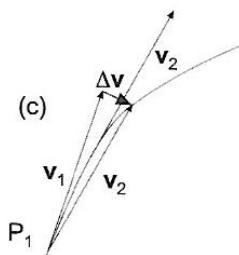
L'accelerazione media è un vettore.

La direzione e il verso sono gli stessi della velocità. Il modulo è il rapporto fra il modulo della variazione di velocità e il tempo.

Come per la velocità anche per l'accelerazione se si considerano intervalli di tempo molto piccoli si definisce l'**accelerazione istantanea**.

$$\mathbf{a}_{\text{ist}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{v}'(t)$$

Quando l'intervallo di tempo viene diminuito il vettore della differenza di velocità arriverà ad essere quasi perpendicolare ai due vettori velocità. Al limite l'accelerazione istantanea sarà perfettamente perpendicolare alla velocità e quindi diretta verso il centro della curva. Si parlerà di **accelerazione centripeta**.



## MOTI PARTICOLARI

Possiamo trovare alcuni tipi particolari di moto:

- Moto **rettilineo** quando la velocità ha direzione costante
- Moto **uniforme** quando la velocità ha modulo costante

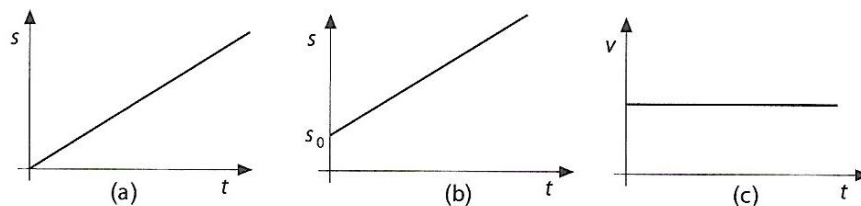
### MOTO RETTILINEO UNIFORME

È il moto più semplice in quanto nella velocità modulo, direzione e verso sono costanti. Avremo in questo caso:

$$v_{\text{media}} = v_{\text{istantanea}} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La **legge oraria** di un moto è la relazione che esprime lo spazio in funzione del tempo. Nel caso di moto rettilineo uniforme sarà:  $s = v \cdot t$ .

Il moto rettilineo uniforme può essere rappresentato con grafici del tipo spazio-tempo e velocità tempo. Nel caso lo spazio iniziale sia 0 avremo allora nel grafico spazio-tempo una semiretta che passa per l'origine degli assi. Nel caso avessimo uno spazio iniziale diverso da zero, la semiretta non passerà più per l'origine bensì per il punto che indica lo spostamento. La legge oraria inoltre diventerà  $s = s_0 + v \cdot t$ . Nel caso di un grafico velocità tempo la semiretta sarà parallela all'asse del tempo.



### MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Se in un moto l'accelerazione è costante si dice che il moto è **uniformemente accelerato**. La velocità raggiunta dopo un certo tempo sarà:

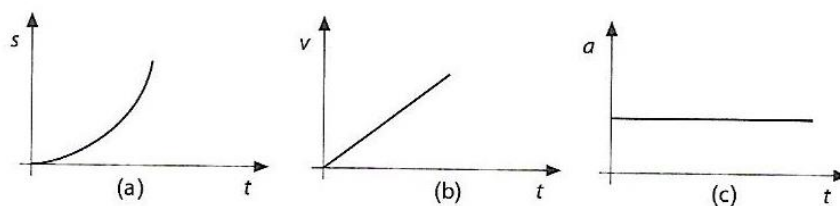
$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

La legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato è:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Dove  $v_0$  e  $s_0$  sono rispettivamente la velocità e lo spazio iniziale,  $a$  è l'accelerazione e  $t$  il tempo trascorso.

In questo tipo di moto i grafici possono essere del tipo spazio-tempo, velocità-tempo e accelerazione-tempo. Nel primo caso avremo una parabola avente per vertice l'origine degli assi. Nel grafico velocità-tempo invece avremo una semiretta passante per l'origine e avente coefficiente angolare pari al valore dell'accelerazione. Infine la rappresentazione accelerazione-tempo è una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate presso il valore dell'accelerazione.



## MOTO DI CADURA DEI GRAVI

La caduta libera dei gravi sulla terra è un moto uniformemente accelerato e ha un valore di accelerazione pari a  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Viene anche chiamato moto **naturalmente accelerato**.

Il vettore  $g$  (modulo dell'accelerazione gravitazionale) è sempre diretto lungo la verticale e verso il basso.

Essendo un moto uniformemente accelerato, valgono le stesse leggi viste nel paragrafo precedente. Indicando con  $h$  l'altezza del grave e con  $h_0$  l'altezza iniziale avremo che:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Per un corpo lasciato cadere da un'altezza e con velocità iniziale nulla avremo:

$$\text{tempo di caduta} = t_c = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$\text{velocità finale} = v_f = \sqrt{2gh_0}$$

Per un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$  avremo:

$$\text{altezza max raggiunta} = h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{tempo necessario per raggiungerla} = t_h = \frac{v_0}{g}$$

Il tempo necessario a un corpo per raggiungere una certa altezza è pari al tempo necessario per ripercorrerla al ritorno.

## MOTO CIRCOLARE UNIFORME

È il moto di un punto che descrive una traiettoria circolare con velocità costante in modulo.

Si definiscono:

- $T$  = periodo = tempo impiegato per completare una rotazione completa
- $\nu$  = frequenza = numero di rotazioni in un secondo.

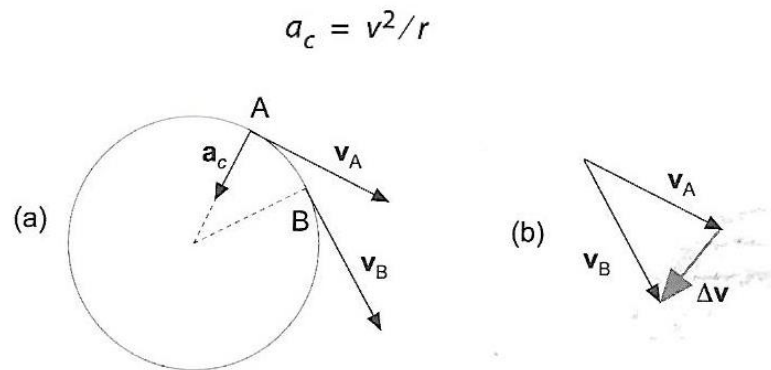
$T$  e  $\nu$  sono grandezze scalari aventi unità di misura secondi ed hertz.

Dalla definizione si ha che la velocità è:

$$\frac{\text{lunghezza della circonferenza}}{\text{periodo di rotazione}} = \frac{2\pi r}{T} = \text{costante}$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, la direzione è sempre tangente alla circonferenza. Dato un punto materiale che si muove, con accelerazione diversa da 0, verso il centro, questo tipo di accelerazione è detta **accelerazione centripeta**.

Nel moto circolare uniforme, il vettore accelerazione centripeta  $a_c$  ha le seguenti caratteristiche: Direzione radiale in ogni punto, verso dall'esterno al centro, modulo costante dato dal rapporto fra quadrato della velocità e raggio della circonferenza.



Si ha accelerazione centripeta ogni volta che la velocità varia in direzione.

Nel moto circolare, oltre alla velocità lineare, si definisce anche una velocità angolare media  $\omega$  dato dal rapporto fra l'angolo al centro spazzato dal raggio vettore (il vettore radiale che ha origine nel centro della circonferenza ed esterno sul punto) e il tempo impiegato a spazzarlo:

$$\omega_{media} = \Delta\theta / \Delta t$$

Nel moto circolare uniforme, la velocità angolare è un vettore con queste caratteristiche:

- Direzione perpendicolare al piano di rotazione;
- Verso uscente dal piano di rotazione se questa è antioraria, entrante se è oraria;
- Modulo pari a:

$$\omega = 2\pi_{rad} / T = 2\pi\nu$$

Il **radiante** è l'angolo al centro di una circonferenza che insiste su un arco lungo quanto il raggio.

## MOTO OSCILLATORIO ARMONICO

Il moto oscillatorio armonico è, come il moto circolare uniforme, un moto periodico; precisamente è il moto del punto P', ovvero la proiezione di P sul diametro AB, quando P si muove in moto circolare.

La velocità di P' è la proiezione di  $v$  sul diametro AB.

L'accelerazione di P' è proporzionata allo spostamento OP'.

La legge oraria di tale moto è:  $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  dove A è l'ampiezza massima dell'oscillazione,  $\varphi$  è il parametro detto fase iniziale che tiene conto delle condizioni iniziali e  $\omega$  prende il nome di pulsazione e ha dimensioni di un inverso del tempo.

---

## MOTI COMPOSTI

### COMPOSIZIONE DI MOTI UNIFORMI

Si consideri un corpo che si sposta con velocità costante  $\mathbf{v}$  e un corpo nel quale è contenuto che si sposta su un moto rettilineo con velocità  $\mathbf{u}$ . Nel caso il primo corpo si sposti nella stessa direzione del secondo la velocità con cui appare si sposti è maggiore. Nel caso opposto ovvero che il primo si sposti nel verso contrario rispetto al secondo, il corpo sembra spostarsi più lentamente. In questi casi si parlerà di **moto relativo**. Si parlerà inoltre di **velocità relativa** (si un corpo rispetto al sistema in moto), **velocità di trascinamento** (quello del sistema in moto rispetto alla terra) e **velocità assoluta** (velocità del corpo rispetto alla terra).

Il moto risultante della composizione di un moto uniforme a velocità  $\mathbf{v}$  in un sistema di riferimento a sua volta in moto uniforme con velocità  $\mathbf{u}$  è ancora un moto uniforme con velocità  $\mathbf{V}$  data dalla somma vettoriale delle due velocità:  $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  sono parallele, il moto risultante avviene lungo la stessa direzione.

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono ortogonali può essere comodo descrivere il suo moto, in ogni istante, ragionando in maniera separata lungo due assi cartesiani, ovvero le direzioni delle dei due moti.

**Per attraversare un fiume il cui letto è largo  $L = 50$  m, alcuni gitanti si servono di una barca a remi. Riescono a sviluppare una velocità  $\mathbf{v} = 5$  m/s in direzione ortogonale alla corrente del fiume, che è pari a  $\mathbf{u} = 10$  m/s . A quale distanza a valle di quella da cui sono partiti arriveranno i gitanti sull'altra sponda del fiume?**

Inizialmente conviene chiamare  $Y$  la direzione della corrente e  $X$  la direzione della barca perpendicolare alla corrente. In questo modo la componente  $V$  lungo  $X$  è  $v$ . Secondo la legge oraria potremmo calcolare il tempo necessario per l'attraversamento.

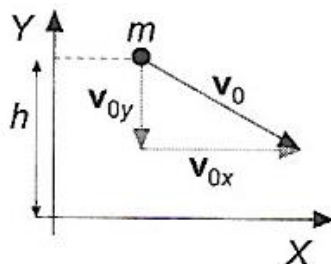
$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{50 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 10 \text{ s}$$

Grazie al dato appena ottenuto potremmo calcolare l'influenza della corrente per la durata del tragitto tramite la legge oraria in moto da ottenere lo spostamento totale.

$$\Delta y = \Delta t \cdot u = 10 \text{ s} \cdot 10 \text{ m/s} = 100 \text{ m}$$

### COMPOSIZIONE DI MOTI UNIFORMI CON MOTI ACCELERATI

Dato un corpo di massa  $m$  come indicato in figura viene lanciato a una certa velocità  $\mathbf{v}_0$  da una certa altezza  $h$  sulla superficie terrestre. Il corpo è soggetto solo all'accelerazione gravitazionale che agisce lungo la verticale ottenendo un moto uniformemente accelerato. Inoltre poiché non ci sono accelerazione lungo l'asse  $X$  il moto lungo l'orizzontale non è accelerato.



Se il corpo lanciato orizzontalmente,  $v_{0y} = 0$  e le relazioni del moto lungo gli assi sono:

$$x = v_x \cdot t \quad y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Mentre l'espressione della traiettoria sarà:

$$y = h - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_x^2}$$