4 | Lavoro ed energia

4.1 | Lavoro di una forza

Quando il punto di applicazione di una forza **F** compie uno spostamento **s**, la forza compie un lavoro L dato dal prodotto scalare tra forza e spostamento.

$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos\alpha$ Dimensioni: $[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$

dove α è l'angolo formato dai vettori **F** e **s**. Unità di misura nel SI: $N \cdot m$ = joule (J)

L'unità di misura del lavoro nel sistema CGS è l'erg (simbolo: erg). Quanti joule vale un erg?

Si è visto che $1\ J = 1\ N \cdot 1\ m$. Analogamente, nel CGS, $1\ erg = 1\ dyn \cdot 1\ cm$.
Si tratta, per passare da J a erg, di trasformare tutte le unità del SI in unità del CGS mediante equivalenze:

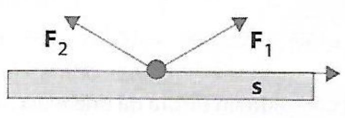
$$1\ J = 1\ N \cdot 1\ m = (10^5\ dyn) \cdot 10^2\ cm = (10^5 \cdot 10^2)\ dyn \cdot cm = 10^7\ erg$$

Si conclude così che $1\ J = 10^7\ erg$ e, viceversa, $1\ erg = 10^{-7}\ J$.

Il lavoro è una grandezza scalare!

Il lavoro compiuto da una forza **F** quando il suo punto di applicazione si sposta non dipende solo dalle intensità della forza e dello spostamento, ma anche dal loro orientamento reciproco nello spazio. Per esempio, il lavoro è positivo o negativo a seconda che l'angolo α formato da **F** e da **s** sia minore o maggiore di 90°.

Una forza F di modulo 10 N viene applicata a un corpo che si sposta verso destra, di 2 m, lungo un piano orizzontale senza attrito. Calcolare il lavoro della forza nel caso in cui essa formi con il piano un angolo di 30° o di 150°.
A parità di forza e spostamento, qual è l'angolo per cui il lavoro è massimo?



Schematizzando il problema come in figura, si scrive, secondo la definizione di lavoro:

$$L_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 30° = 10\ N \cdot 2\ m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ J$$

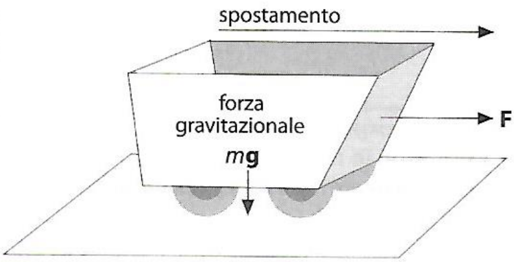
$$L_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 150° = 10\ N \cdot 2\ m \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -10\sqrt{3}\ J$$

L'angolo per cui è massimo il lavoro è l'angolo per cui è massimo in generale un prodotto scalare: 0°. Ovvero, **il lavoro è massimo quando forza e spostamento sono paralleli.**

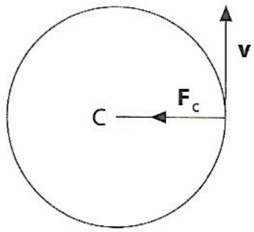
FISICA

Dalla definizione di lavoro, poiché $\cos(90°) = 0$, si ricava che **le forze perpendicolari allo spostamento non compiono lavoro.**

La forza centripeta e la forza gravitazionale sono forze che in alcune circostanze, come quelle sotto raffigurate, non compiono lavoro.



Se il piano di scorrimento del carrello è orizzontale, la forza peso del carrello $m\mathbf{g}$ non compie lavoro, mentre la forza **F** sì.



La forza centripeta $\mathbf{F}_c$ nel moto circolare uniforme è perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento: è una forza che non compie lavoro.

Più in generale il lavoro di una forza è nullo quando vale **almeno una** delle seguenti condizioni:

$$|\mathbf{F}| = 0; \quad |\mathbf{s}| = 0; \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{s}$$

4.2 | Potenza

La potenza media di una forza o, più in generale, di una macchina è definita come il rapporto tra il lavoro compiuto dalla forza (o dalla macchina) e il tempo impiegato a produrre il lavoro.

Potenza media: $P_m = \dfrac{L}{\Delta t}$

Dimensioni: $[P] = [M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$
Unità di misura nel SI: J/s = watt (W)

La potenza di una forza può essere espressa in funzione della forza e della velocità del suo punto di applicazione attraverso la relazione:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Che potenza deve erogare una centrale elettrica che alimenta una città con un milione di alloggi, ciascuno dei quali consuma mediamente 1 chilowatt di potenza elettrica?
Per risolvere questo quesito non è necessario conoscere alcuna nozione di elettricità: è sufficiente moltiplicare la potenza media consumata da ciascun alloggio per il numero totale di alloggi. Si ottiene così:

$$P_{tot} = 1\ \text{kW} \cdot 1.000.000 = 10^3\ \text{W} \cdot 10^6 = 10^9\ \text{W} = 1\ \text{GW}$$

Il **chilowattora** è il lavoro compiuto in un'ora da una macchina avente la potenza di 1000 W.

Vale la relazione: $1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}$

Il chilowattora misura un lavoro e non una potenza!

Altre unità di misura della potenza (non appartenenti al SI ma largamente utilizzate in campo tecnico) sono il *cavallo vapore* (CV) e il *cavallo vapore britannico* (hp, che sta per *horse power*). Valgono le relazioni:

$$1\ \text{CV} = 75\ \text{kg}_{peso} \cdot 1\ \text{m/s} = 735{,}499\ \text{W}; \qquad 1\ \text{hp} = 745{,}7\ \text{W}$$

4.3 | Energia meccanica

L'energia meccanica di un corpo è una misura del lavoro meccanico che è stato fatto sul corpo o del lavoro meccanico che il corpo è potenzialmente in grado di produrre. **Lavoro ed energia sono quindi grandezze omogenee**: entrambe si misurano in joule.

L'*energia meccanica* si distingue in:

- **energia cinetica**: energia di movimento che non dipende dalla posizione del corpo;
- **energia potenziale**: energia di posizione che non dipende dallo stato di moto del corpo.

4.3.1 | Energia cinetica

Dato un corpo di massa m che si muove alla velocità $\mathbf{v}$, la sua energia cinetica E_k vale:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

L'energia cinetica, come ogni forma di energia, si misura in joule.

Quanto vale l'energia cinetica finale di un grave di massa $m = 1$ g lasciato cadere da un'altezza $h = 2$ m?

Si ricorda che, in assenza di attriti, la velocità finale del grave vale $v = \sqrt{2gh}$.

Dalla definizione di energia cinetica:

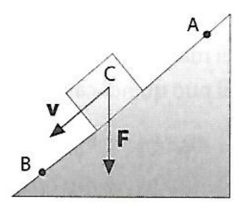
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh = mgh = 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\ \text{m} = 0{,}0196\ \text{J}$$

Volendo esprimere il risultato in notazione esponenziale $0{,}0196\ \text{J} = 1{,}96 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$.

Teorema dell'energia cinetica

Dato un corpo C soggetto alla sola forza **F**, il lavoro compiuto da **F** quando C si sposta da un punto A a un punto B è uguale alla variazione dell'energia cinetica ΔE_k del corpo C.

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = L_{A \to B}$$



4.3.2 | Energia potenziale

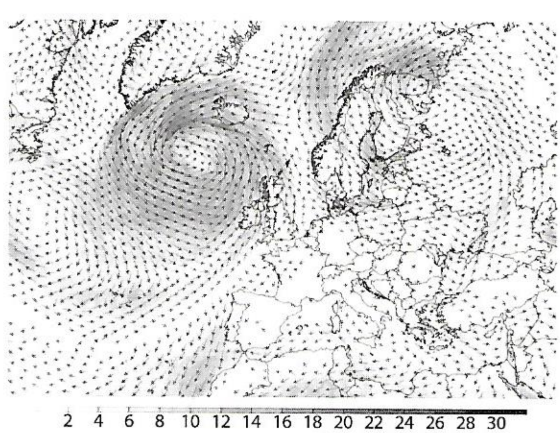
Per definire l'energia potenziale di un corpo è necessario introdurre i concetti di *campo vettoriale* e di *campo conservativo*.

Campo vettoriale: regione di spazio a ogni punto della quale è possibile associare un vettore che caratterizza il campo in quel punto.

Per esempio ad ogni punto della superficie terrestre è possibile associare direzione, verso e intensità (ossia velocità) del vento in quel punto, tramite la cosiddetta *mappa dei venti*..

Il **campo gravitazionale** è un campo vettoriale, dato che a ogni punto si può associare il vettore che rappresenta la forza gravitazionale che agisce su una massa posta in quel punto.

Il campo gravitazionale può essere visto anche come un *campo di forze*.



FISICA

Campo conservativo: campo di forze nel quale il lavoro delle forze del campo è una funzione di stato, cioè non dipende dal cammino seguito dal punto di applicazione della forza, ma solo dalle sue posizioni iniziale e finale.

In un campo conservativo il lavoro delle forze del campo lungo una *traiettoria chiusa* è sempre nullo.

A questo punto è possibile definire l'energia potenziale.

L'**energia potenziale** E_p di un corpo immerso in un campo di forze conservativo è una funzione della posizione del corpo, tale che **la differenza fra i suoi valori nelle posizioni iniziale A e finale B è uguale al lavoro compiuto sul corpo dalle forze del campo per spostarlo dalla posizione A alla posizione B**:

$$L_{A \to B} = E_{p_A} - E_{p_B} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p \qquad [6]$$

Allo stesso modo, si può affermare che il lavoro che bisogna compiere per vincere le forze del campo (cioè *contro le forze del campo*) portando un corpo dal punto A al punto B è pari alla variazione dell'energia potenziale ΔE_p del corpo tra A e B.

Si noti il **cambiamento di segno**:
Lavoro compiuto dalle forze del campo:

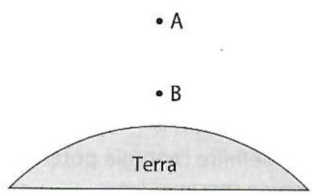
$$L_{A \to B} = -\Delta E_p$$

Lavoro compiuto dalle forze esterne *contro* le forze del campo:

$$L_{A \to B} = \Delta E_p$$

L'energia potenziale è definibile solo per campi conservativi.

Il campo gravitazionale è conservativo: il lavoro che le forze del campo compiono per portare un corpo di massa m dal punto A al punto B non dipende dal cammino seguito.
Si può quindi calcolare il lavoro lungo il segmento $\overline{AB}$:



$$L_{A \to B} = \mathbf{F}_{gravitazionale} \cdot \mathbf{AB} = F \cdot \overline{AB} = F(h_A - h_B)$$
$$= mg \cdot (h_A - h_B) = mgh_A - mgh_B = -\Delta(mgh) = -\Delta E_p$$

Si ricava quindi che l'**energia potenziale gravitazionale** vale:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m è direttamente proporzionale a m ed esprime fisicamente la quantità di lavoro meccanico che la forza gravitazionale compie sul corpo quando questo viene lasciato cadere liberamente nel campo.

Si dimostra che l'**energia potenziale elastica** di una molla di costante elastica k che ha subito un allungamento x vale:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Si calcoli l'energia potenziale di un punto materiale di massa $m = 1$ kg vincolato a una molla, acquistata in un'oscillazione di ampiezza $x = A$, sapendo che il periodo dell'oscillazione vale $T = 10$ s.

La conoscenza del periodo e della relazione che lo lega alla costante elastica k permette di trovare l'energia potenziale richiesta:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m = \frac{4\pi^2}{100\ s^2} \cdot 1\ kg \cong 0{,}4\frac{kg}{s^2} \rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 \cong 0{,}2 \cdot A^2$$

4.3.3 | Conservazione dell'energia meccanica totale

L'energia meccanica totale E_{tot} (ossia la somma di energia cinetica e di energia potenziale) di un corpo posto in un **campo conservativo** e soggetto alle sole forze del campo è costante:

$$E_{tot} = E_k + E_p = \text{costante}$$

Si consideri un corpo in caduta libera: via via che il corpo cade, la sua energia potenziale diminuisce (*h* diminuisce) e si trasforma in energia cinetica (*v* aumenta); in tal modo la loro somma rimane costante durante tutta la caduta.

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{costante}$$

Quando il corpo tocca il terreno intervengono forze non conservative in presenza delle quali non si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

In un campo non conservativo l'energia meccanica totale non si conserva. Parte di essa si può per esempio trasformare in energia termica.

La forza di attrito radente (§ 3.12) è una forza il cui lavoro *dipende* dal cammino seguito dal suo punto di applicazione. Si tratta quindi di una forza non conservativa.
In presenza di attriti non si è più in un campo di forze conservativo: cade dunque il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

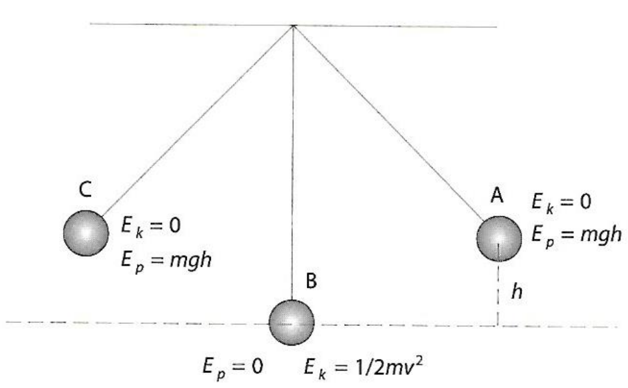
Quanto vale la velocità finale di un punto materiale che scivola da una quota *h* lungo un piano inclinato senza attrito che forma un angolo α con l'orizzontale?
La conservazione dell'energia meccanica rende la soluzione di questo esercizio molto semplice: basta osservare che *tutta* l'energia potenziale iniziale alla sommità del piano inclinato, mgh, si trasforma in energia cinetica alla base del piano. Perciò:

$$E_{k_{\text{fin}}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 = E_{p_{\text{iniz}}} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\text{fin}} = \sqrt{2 \cdot mgh/m} = \sqrt{2hg}$$

La velocità finale non dipende dalla massa (come si era visto nel § 2.3.3 per il moto di caduta libera) né dall'angolo α, ma soltanto dalla quota iniziale.

4.3.4 | Applicazione: moto del pendolo

Si consideri il pendolo semplice in figura. Nel punto di partenza A, il corpo è fermo, l'energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è pari a $m \cdot g \cdot h$.



Quando il pendolo viene lasciato, durante la discesa, l'energia potenziale diminuisce trasformandosi in energia cinetica. Nel punto B il pendolo possiede solo energia cinetica, il cui valore è pari a quello dell'energia potenziale posseduta in A (principio di conservazione dell'energia).
Nella fase di risalita da B a C, l'energia cinetica del pendolo diminuisce a favore dell'energia potenziale. Nel punto finale C, l'energia cinetica è nuovamente nulla, quella potenziale è massima e ha un valore pari a quello che aveva in A. Poiché d'altra parte l'energia potenziale è pari a $m \cdot g \cdot h$, si deduce che sia in A che in C il corpo raggiunge la stessa altezza.

FISICA

4.4 | Urti

Si parla di **urto** quando due (o più) particelle collidono (per esempio: urto tra due palle da biliardo) oppure quando interagiscono a distanza ravvicinata (per esempio: cariche elettriche o particelle alfa).

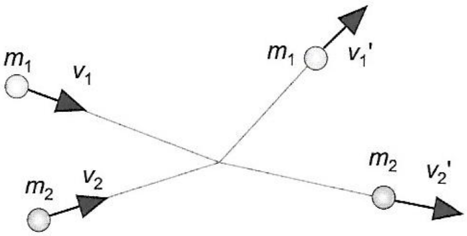
Studiando microscopicamente una collisione tra due corpi, si possono presentare due casi:

1. dopo l'urto, i due corpi hanno ancora la stessa forma e la stessa temperatura. Si tratta di corpi elastici e l'urto prende il nome di **urto elastico**;
2. nell'urto i due corpi hanno subito delle variazioni nella struttura, nella forma o nella temperatura interna; si parla in questo caso di **urto anelastico**. In particolare se i due corpi rimangono uniti, l'urto si dice **perfettamente anelastico**.

Il sistema costituito dalle particelle che si urtano può essere considerato con buona approssimazione un sistema isolato. In ogni tipo di urto, elastico o anelastico, vale quindi il principio di **conservazione della quantità di moto**:

$$\sum \mathbf{P}_i = \sum \mathbf{P}'_i \qquad [7]$$

dove $\mathbf{P}_i$ e $\mathbf{P}'_i$ sono le quantità di moto della i-esima particella prima e dopo l'urto.
Si tratta di una relazione vettoriale, con la quale è possibile stabilire le velocità delle particelle dopo l'urto partendo dalle velocità prima dell'urto o viceversa. Per utilizzarla in maniera corretta, è necessario fissare degli assi di riferimento e scomporre sugli assi i vettori quantità di moto.
Nella figura sottostante si rappresenta schematicamente l'urto fra due particelle di massa m_1 e m_2; l'apice indica le grandezze dopo l'urto.



Nel caso di un urto tra due particelle, la [7] diventa:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2$$

Negli urti elastici l'energia cinetica si conserva. Negli urti anelastici le deformazioni e il riscaldamento sono provocati da forze dissipative, e l'energia cinetica non si conserva.

L'energia cinetica si conserva solo negli urti elastici, mentre la quantità di moto si conserva in ogni urto.

PARTE QUARTA