4 | Equazioni e sistemi di equazioni

4.1 | Uguaglianze, disuguaglianze e identità

Confrontando due numeri (relativi) a e b qualunque, può essere vera una soltanto fra le seguenti tre relazioni:

$$a = b \quad a < b \quad a > b$$

nel primo caso si dirà che i due numeri a e b verificano una **uguaglianza**, nel secondo e nel terzo caso si dirà che essi verificano una **disuguaglianza**.

Ciò che è vero tra numeri lo è però solo parzialmente tra espressioni letterali.

Un'**espressione algebrica letterale assume** in generale **valori diversi a seconda dei valori numerici assegnati alle lettere** che in essa figurano.

Per esempio, l'espressione $A = 3x + 4$ assume (tra gli altri) i seguenti valori:

$$\text{per } x = 1 \rightarrow A = 3 \cdot 1 + 4 = 7$$
$$\text{per } x = 2 \rightarrow A = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$
$$\text{per } x = 3 \rightarrow A = 3 \cdot 3 + 4 = 13$$

Può così capitare che, indicando con A e B due espressioni letterali, al variare del valore numerico assegnato alle lettere, possano valere **tutte e tre** le seguenti relazioni:

$$A = B \quad A < B \quad A > B$$

Si considerino le due espressioni $A = 3x + 4$ e $B = 12 - x$. Esse assumono (tra gli altri) i seguenti valori:

$$\text{per } x = 1 \rightarrow \begin{cases} A = 3 \cdot 1 + 4 = 7 \\ B = 12 - 1 = 11 \end{cases} \rightarrow A < B$$

$$\text{per } x = 2 \rightarrow \begin{cases} A = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \\ B = 12 - 2 = 10 \end{cases} \rightarrow A = B$$

$$\text{per } x = 3 \rightarrow \begin{cases} A = 3 \cdot 3 + 4 = 13 \\ B = 12 - 3 = 9 \end{cases} \rightarrow A > B$$

Si sono già incontrate uguaglianze del tipo:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Si tratta di uguaglianze **sempre verificate**, ossia verificate **per ogni valore assegnato alle lettere** che in essa figurano.

Un'uguaglianza tra due espressioni algebriche letterali **verificata per ogni valore numerico assegnato alle lettere** prende il nome di **identità**.

L'uguaglianza $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ è un'identità in quanto il primo membro è identico al secondo membro per ogni valore delle lettere a e b; si ha infatti che:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2$$

MATEMATICA

4.2 | Equazioni

Si consideri ora l'uguaglianza:

$$2x + 1 = 7$$

è facile constatare che l'uguaglianza non è sempre verificata. Ponendo $x = 1$, per esempio, i due *membri* (ossia le due espressioni rispettivamente a sinistra e a destra del segno di uguaglianza) assumono valori diversi

$$2 \cdot 1 + 1 \neq 7$$

per cui l'uguaglianza non è verificata.

Un'uguaglianza tra due espressioni algebriche letterali **verificata solo per particolari valori numerici assegnati alle lettere** prende il nome di **equazione.**

In questo caso le lettere prendono il nome di *incognite.*

L'equazione $2x + 1 = 7$ è verificata per $x = 3$; infatti, sostituendo 3 al posto di x, l'equazione diventa $2 \cdot 3 + 1 = 7$ che è un'*identità numerica* (ossia un'identità tra due membri numerici e non più letterali).

4.2.1 | Soluzione di un'equazione

Risolvere un'equazione significa trovare i valori dell'incognita per i quali la relazione di uguaglianza diventa una identità numerica.

La **soluzione** di un'equazione è rappresentata dall'insieme di **tutti e soli** i valori dell'incognita che soddisfano l'uguaglianza.

L'equazione $3x - 2 = 4$ ha come soluzione il valore $x = 2$ (infatti, sostituendo 2 al posto di x, l'equazione diventa $3 \cdot 2 - 2 = 4$).

4.2.2 | Equazione impossibile, indeterminata, determinata

Equazione impossibile: è un'equazione che non ammette soluzioni reali cioè non è verificata per nessun valore reale dell'incognita.

Si consideri l'equazione:

$$x^2 = -4$$

si tratta di una equazione impossibile in quanto non esiste nessun numero il cui quadrato sia un numero negativo.

Equazione indeterminata: è un'equazione che ammette infinite soluzioni.

Si consideri, per esempio, l'equazione:

$$(x + 1)^2 + x = x^2 + 3x + 1$$

svolgendo il *prodotto notevole* si ottiene:

$$x^2 + 1 + 2x + x = x^2 + 3x + 1$$

ossia un'identità, verificata per ogni valore di x e quindi con infinite soluzioni.

Equazione determinata: è un'equazione che ammette un numero finito di soluzioni.

Si consideri l'equazione:

$$x^2 = 16$$

si tratta di una equazione determinata in quanto ammette le due soluzioni $x = +4$ e $x = -4$.

4.2.3 | Classificazione delle equazioni

Un'equazione si dice **numerica** quando **oltre all'incognita non contiene altre lettere.**

$2x + 1 = 0$ è un'equazione numerica.

Un'equazione si dice **letterale** quando **oltre all'incognita contiene anche altre lettere** (dette *parametri*) **che si considerano costanti.**

$x + a = 2$ è un'equazione letterale.

Un'equazione si dice **intera** quando **l'incognita non compare nel denominatore.**

$\frac{x}{2} - 5 = 3$ è un'equazione intera.

Un'equazione si dice **frazionaria** quando **l'incognita compare nel denominatore.**

$\frac{1}{x^2} + x = 1$ è un'equazione frazionaria.

Un'equazione si dice **irrazionale** quando l'incognita compare nell'argomento di un radicale.

$x + \sqrt{3x+1} = 3$ è un'equazione irrazionale, mentre $\sqrt{5}x + 4x - \sqrt{7} = 0$ **non** è irrazionale.

Nel seguito si incontreranno ulteriori tipi di equazioni, come quelle esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

4.2.4 | Forma normale e grado di un'equazione

Un'equazione è *in forma normale* quando è nella forma $P(x) = 0$ dove $P(x)$ è un polinomio nell'incognita x ordinato secondo le potenze decrescenti della stessa x: i metodi per portare un'equazione in forma normale verranno esposti nel § 4.2.7 e nel § 4.2.8.

Il grado di un'equazione a una sola incognita è **il massimo esponente con cui l'incognita compare nell'equazione ridotta in forma normale.**

$2x + 1 = 0$ $\rightarrow$ è un'equazione di **primo grado.**

$2x + x^2 = 1$ $\rightarrow$ è un'equazione di **secondo grado.**

$\frac{x+1}{x} - 3x = 0$ $\rightarrow$ occorre prima ridurla in forma normale.

Moltiplicando ambo i membri per x e ordinando il polinomio si ottiene:

$$-3x^2 + x + 1 = 0$$

si tratta quindi di un'equazione di **secondo grado.**

4.2.5 | Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione non indeterminata di grado *n* ammette al massimo *n* soluzioni nell'insieme dei numeri reali, alcune delle quali potrebbero coincidere.

- $x + 1 = 0$ $\rightarrow$ $x = -1$: la soluzione è unica.
- $x^2 = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ e $x = 0$: le soluzioni sono due, reali e coincidenti.
- $x^2 = -4$ $\rightarrow$ non ammette soluzioni nell'insieme dei numeri reali.

MATEMATICA

4.2.6 | Metodo della verifica

Per rispondere a domande a risposta multipla relative alle soluzioni di una equazione, spesso non è necessario e talvolta neanche conveniente risolvere le equazioni: **risulta più rapido sostituire nell'equazione le soluzioni proposte e trovare quale fra queste la soddisfa (cioè quale tra queste è la vera soluzione).** Si usa, in altre parole, il "metodo della verifica".

Risolvere la seguente equazione: $x^2 - 1 = 0$

A) $x = 2 ; x = 1$
B) $x = 1 ; x = -1$
C) $x = 0 ; x = -1$
D) $x = 0 ; x = 2$
E) $x = 1$

La soluzione corretta è la B in quanto, sostituendo nell'equazione i valori $x = 1$ e $x = -1$, si ottiene in entrambi i casi una identità.

Nonostante il metodo della verifica consenta di risolvere la quasi totalità dei quesiti sulle equazioni, è evidente che la conoscenza dei metodi risolutivi classici permette di scegliere la strada più veloce. Si consiglia pertanto di studiare comunque i paragrafi seguenti.

4.2.7 | Condizioni di esistenza delle espressioni frazionarie

Le uguaglianze (e le identità) tra frazioni algebriche (ossia espressioni con denominatori letterali) sono soggette a ben determinate *condizioni di esistenza*.

Prima di risolvere una equazione frazionaria si devono scartare tutti gli *zeri* dei denominatori (ossia tutti i valori numerici che annullano i denominatori), in quanto, in corrispondenza di tali valori, **l'espressione frazionaria perde di significato** (ossia **non esiste**).

Si consideri, per esempio, l'equazione:

$$\frac{x-2}{(x-3)(x+5)} = 0$$

il primo membro perde di significato (ossia non esiste) in corrispondenza dei due valori $x = 3$ e $x = -5$: questi due valori devono essere scartati prima di fare qualsiasi altra operazione (anche una semplice semplificazione). Si scriverà allora:

$$\text{C.E.} \quad x \neq 3 ; \quad x \neq -5$$

ossia "le Condizioni di Esistenza sono: x diverso da 3 e x diverso da -5". In altre parole **l'espressione frazionaria esiste solo per valori di x diversi dagli zeri del denominatore.**

4.2.8 | Equazioni equivalenti

Due equazioni si dicono *equivalenti* quando ammettono la **stessa soluzione**.

$2x + 1 = 0$ è equivalente a $4x + 2 = 0$: entrambe ammettono come soluzione $x = -1/2$.

Per risolvere una equazione si cerca di trasformarla in un'altra a essa equivalente, ma di forma più semplice: è quindi importante conoscere i seguenti principi di equivalenza.

Aggiungendo ad ambedue i membri di una equazione la medesima espressione algebrica si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Indicando con A, B ed M tre espressioni algebriche *sempre definite*, si ha:

$$A = B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} A + M = B + M$$

- Se uno stesso termine figura come addendo in entrambi i membri di una equazione, esso può essere soppresso (in quanto ciò equivale ad aggiungere ai due membri la medesima quantità, ossia l'opposto del termine stesso):

$$3x^2 + 2x = 12 + 2x \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(sommando } -2x)} 3x^2 = 12$$

- Si può sempre "spostare" un addendo da un membro all'altro purché lo si cambi di segno (in quanto ciò equivale ad aggiungere ai due membri l'opposto del termine):

$$9x^2 + 4 = -5x \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(sommando } -4)} 9x^2 = -5x - 4$$

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per la medesima espressione algebrica (purché sempre definita e diversa da zero) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Indicando con A e B due espressioni algebriche *sempre definite* e con M una espressione algebrica *sempre definita* e *sempre diversa da zero*, si ha:

$$A = B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} A \cdot M = B \cdot M \text{ e inoltre: } A = B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} \frac{A}{M} = \frac{B}{M}$$

- Se i due membri hanno un fattore numerico comune, questo può essere soppresso (equivale a dividere ambo i membri per quel fattore):

$$9x + 6 = 12 + 3x \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(dividendo per 3)}} 3x + 2 = 4 + x$$

- Moltiplicando i due membri per una espressione opportuna, si possono eliminare i denominatori dall'equazione (in quanto ciò equivale a moltiplicare ambo i membri per il m.c.m. dei denominatori):

$$\frac{4x-2}{3} = 3 + \frac{3x}{4} \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(moltiplicando per 12)}} 16x - 8 = 36 + 9x$$

- Cambiando i segni di tutti i termini di una equazione se ne ottiene una equivalente (in quanto ciò equivale a moltiplicare per – 1):

$$-4x^2 + 2 = -5x \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(moltiplicando per } -1)} 4x^2 - 2 = 5x$$

È possibile ora illustrare i passi necessari per portare un'equazione nella sua forma normale:

1. svolgere le eventuali operazioni indicate nella forma iniziale (come eliminazione delle parentesi o elevamenti a potenza);
2. eliminare gli eventuali denominatori (moltiplicando ambo i membri per il m.c.m. dei denominatori); se l'equazione è frazionaria si deve porre la condizione di esistenza del m.c.m. (per evitare l'annullamento del denominatore);
3. spostare tutti i termini nel primo membro sfruttando i principi di equivalenza;
4. ridurre i termini simili e ordinare il polinomio secondo le potenze decrescenti della x.

Per portare in forma normale l'equazione $\frac{(x-1)^2}{x} = 1$ occorre:

1. svolgere l'elevamento al quadrato: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 1$
2. porre la C.E. del denominatore (ossia C.E.: $x \neq 0$) ed eliminare il denominatore (moltiplicando ambo i membri per x): $x^2 - 2x + 1 = x$
3. spostare tutti i termini nel primo membro: $x^2 - 2x + 1 - x = 0$
4. ridurre i termini simili e ordinare il polinomio: $x^2 - 3x + 1 = 0$

MATEMATICA

4.2.9 | Equazioni intere di primo grado

Si chiamano anche equazioni **lineari** e (dopo averle ridotte in forma normale) sono equivalenti alla seguente forma generale:

$$ax + b = 0 \qquad [5]$$

Dopo aver spostato il termine noto a destra del segno di uguaglianza e supponendo che sia $a \neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per a, ottenendo:

$$x = -\frac{b}{a} \qquad [6]$$

$3x + 4 = 0 \rightarrow 3x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$

Dalla [6] discende che un'equazione intera di primo grado in una incognita $ax + b = 0$ **ammette sempre una e una sola soluzione nell'ipotesi che sia $a \neq 0$**: in tal caso si dice che l'equazione è *determinata*. Se invece risulta $a = 0$, la [5] diventa:

$$0 \cdot x + b = 0 \quad \text{ossia:} \quad 0 \cdot x = -b$$

la quale risulta evidentemente **impossibile** se $b \neq 0$, **indeterminata** se $b = 0$.

- $3x + 3 = 4x - 10 \rightarrow -x = -13 \rightarrow x = 13$
  l'equazione è determinata;
- $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4} \rightarrow \frac{2x+2}{4} = \frac{4x-2x-3}{4} \rightarrow 2x - 2x = -2 - 3 \rightarrow 0 \cdot x = -5$
  l'equazione è impossibile;
- $\frac{2x+5}{4} - 1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{2x+5-4}{4} = \frac{2x+1}{4} \rightarrow 2x + 5 - 4 = 2x + 1 \rightarrow$
  $\rightarrow 2x - 2x = +1 - 5 + 4 \rightarrow 0 \cdot x = 0$
  l'equazione è indeterminata.

4.2.10 | Equazioni frazionarie di primo grado

La risoluzione delle equazioni frazionarie richiede di prestare attenzione alle condizioni di esistenza da porre affinché l'equazione non perda di significato e al fatto che tutte le soluzioni eventualmente trovate dovranno essere confrontate con le condizioni poste.

Per risolvere l'equazione:

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} = x + \frac{2x}{x + 1}$$

si comincia col porre le condizioni di esistenza dei denominatori:

$$\text{C.E.:} \quad x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

a questo punto, calcolando il denominatore comune e riducendo a forma intera (moltiplicando ambo i membri per il denominatore comune che, dopo aver posto le C.E. è sicuramente diverso da zero) si ha:

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} = \frac{x^2 + x + 2x}{x + 1} \rightarrow x^2 - 3 = x^2 + x + 2x$$

$$\rightarrow x^2 - x^2 - 3x = 3 \rightarrow -3x = 3$$

per cui, dividendo per il coefficiente della x (ossia -3) si ottiene:

$$-3x = 3 \rightarrow x = -1$$

La soluzione trovata è evidentemente inaccettabile, in quanto contrasta con la condizione di esistenza posta all'inizio. Si conclude quindi che l'equazione data è impossibile.

4.2.11 | Equazioni incomplete di secondo grado

La forma normale di un'equazione di secondo grado è:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Assumendo che sia $a \neq 0$ (altrimenti si avrebbe un'equazione di primo grado), se uno degli altri due parametri, b oppure c, è nullo, l'equazione viene detta *incompleta*. Si distinguono tre casi:

1° caso: $c = 0$ (il termine noto è nullo) → l'equazione si dice *spuria*:

$$ax^2 + bx = 0 \xrightarrow[\text{in fattori}]{\text{scomponendo}} x \cdot (ax+b) = 0 \xrightarrow[\text{lamento del prodotto}]{\text{per la legge dell'annul-}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

dove x_1 e x_2 indicano le **due** soluzioni (ossia il massimo numero di soluzioni previsto dal teorema fondamentale dell'algebra per un'equazione di secondo grado).

Qualsiasi equazione intera priva di termine noto ammette la soluzione nulla $x = 0$.

2° caso: $b = 0$ → l'equazione si dice *pura*:

$$ax^2 + c = 0 \to x^2 = -\frac{c}{a} \xrightarrow[\text{brica di entrambi i membri}]{\text{estraendo la radice alge-}} x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Per la realtà di tali soluzioni bisogna che sia $-c/a \geq 0$ → a e c discordi. In caso contrario, non esistono soluzioni reali.

3° caso: $b = 0$ e $c = 0$ → l'equazione viene detta *monomia*:

$$ax^2 = 0 \to x_{1,2} = 0 \text{ (soluzione doppia)}$$

4.2.12 | Equazioni complete di secondo grado

Se nessuno dei tre parametri a, b e c si annulla, l'equazione si dice *completa*:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

le soluzioni sono date dalla *formula risolutiva*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il segno del radicando $\Delta = b^2 - 4ac$ (detto *discriminante*) influenza la realtà delle radici:

se $\Delta > 0$ → le radici sono reali distinte;
se $\Delta = 0$ → le radici sono reali e coincidenti;
se $\Delta < 0$ → non esistono radici reali.

$$2x^2 - 6x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{applicando la formula}} x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-8}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \xrightarrow{\text{essendo } \Delta = 0} x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{4} = \frac{8 \pm 0}{4} = 2 \begin{pmatrix}\text{soluzione} \\ \text{doppia}\end{pmatrix}$$

$$3x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{essendo } \Delta < 0} x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-48}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6} \begin{pmatrix}\text{nessuna} \\ \text{soluzione}\end{pmatrix}$$

Se b è pari, si può usare la *formula ridotta*:

$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a} \xrightarrow{\text{se } k = b/2} x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

MATEMATICA

4.2.13 | Equazioni frazionarie di secondo grado

Come per le equazioni frazionarie di primo grado, anche la risoluzione delle equazioni frazionarie di secondo grado richiede di prestare attenzione alle condizioni di esistenza da porre affinché i denominatori non si annullino e al fatto che tutte le soluzioni eventualmente trovate dovranno poi essere confrontate con le condizioni poste.

Per risolvere l'equazione:

$$\frac{3x-1}{x+1} - x = 0$$

si calcola il denominatore comune, si pone la condizione di esistenza (ossia C.E.: $x \neq -1$) e si riduce a forma intera:

$$\frac{3x-1}{x+1} - x = 0 \rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$$

l'equazione ha dunque due radici reali coincidenti: la soluzione è accettabile in quanto non contrasta con la condizione di esistenza.

4.2.14 | Somma e prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado

Data l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se $\Delta \geq 0$ (ossia se il discriminante è non negativo), è possibile conoscere la somma s e il prodotto p delle radici x_1 e x_2 senza dover risolvere l'equazione stessa. Si ha infatti che:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2x^2 - 12x + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s = x_1 + x_2 = -\dfrac{-12}{2} = 6 \\ p = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Risulta ora possibile determinare due numeri reali conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p: è infatti sufficiente risolvere l'equazione:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Per trovare i due numeri la cui somma valga 5 e il cui prodotto valga – 14, occorre risolvere l'equazione:

$$x^2 - sx + p = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 5x - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

per cui i due numeri cercati sono:

$$x_1 = 7 \text{ e } x_2 = -2$$

4.2.15 | Scomposizione di un trinomio di secondo grado in fattori

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ è scomponibile tramite la relazione:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

dove x_1 e x_2 sono le due radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Scomporre in fattori il trinomio $2x^2 + 2x - 4$. Si cercano le radici dell'equazione $2x^2 + 2x - 4 = 0$ tramite la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 4 = 2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

4.2.16 | Regola di Cartesio

La *regola di Cartesio* consente di determinare il segno delle radici di un'equazione di secondo grado (purché *completa* e con *discriminante positivo*) senza dover risolvere l'equazione stessa. È opportuno però premettere la seguente definizione.

Si dice che i tre coefficienti a, b e c (dell'equazione generale $ax^2 + bx + c = 0$), considerati nell'ordine scritto, presentano una **permanenza** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno, mentre presentano una **variazione** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno segni opposti.

A questo punto è possibile esporre la regola di Cartesio.

In una equazione di secondo grado completa, con discriminante positivo e scritta in forma normale, **a ogni permanenza** di segno nei coefficienti a, b, c, **corrisponde una soluzione negativa**, mentre **a ogni variazione corrisponde una soluzione positiva**.
Se l'equazione ha radici di segno opposto, la radice positiva ha il maggiore valore assoluto se la variazione precede la permanenza; viceversa, la radice negativa ha il maggiore valore assoluto se la permanenza precede la variazione.

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{Cartesio}}$ due permanenze $\rightarrow$ due radici negative.
Infatti le due radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{Cartesio}}$ due variazioni $\rightarrow$ due radici positive.
Infatti le due radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$3x^2 + 3x - 18 = 0 \xrightarrow{\text{Cartesio}}$ una permanenza e una variazione
$\rightarrow$ due radici di segno opposto.
Infatti le due radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+216}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{-3 \pm 15}{6} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

In quest'ultimo caso, dal momento che la permanenza precede la variazione, la radice negativa ha il maggiore valore assoluto. Infatti:

$$|x_1| = |2| = 2 < |x_2| = |-3| = 3$$

4.2.17 | Equazioni di grado superiore al secondo

Per risolvere tali equazioni occorre, in generale, scomporre in fattori per poi sfruttare la regola dell'annullamento del prodotto.

Data l'equazione di terzo grado $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ si scompone in fattori con un raccoglimento a fattor comune e si applica la legge dell'annullamento del prodotto (§ 1.3):

$$x \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{applicando la formula}} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

MATEMATICA

In altri casi, può essere utile effettuare un cambio di variabili: per esempio, un'equazione di quarto grado può diventare di secondo grado se contiene solo le potenze pari dell'incognita (in questo caso l'equazione viene detta *biquadratica*).

Data l'equazione di quarto grado $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ ponendo $t = x^2$ la si trasforma in un'equazione di secondo grado

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \xrightarrow{\text{ponendo } t = x^2} t^2 - 5t - 36 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \text{nessuna radice reale in } x \\ t_2 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

4.3 | Proporzioni

L'uguaglianza tra due rapporti è detta proporzione.

Dati a, b, c e d, con $b \neq 0$ e $d \neq 0$, se $a/b = c/d$ si ha la proporzione:

$$a : b = c : d$$

che si legge: "*a* sta a *b* come *c* sta a *d*".

a e c = *antecedenti*	b e d = *conseguenti*
a e d = *estremi*	b e c = *medi*

Vale la notevole relazione[1]:

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad [7]$$

Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Esistono diversi tipi di problemi risolvibili mediante proporzioni.

Se 12 donne su 100 sono bionde, quante donne su 300 non sono bionde?
Si utilizza la proporzione:

$$12 : 100 = x : 300 \rightarrow x = \frac{300 \cdot 12}{100} = 36$$

dove x indica il numero di donne bionde su 300. Il numero di donne **non** bionde è quindi:

$$300 - x = 300 - 36 = 264$$

Un'automobile viaggia alla velocità di 90 km/h, percorrendo 12 km con ogni litro di benzina. Quanto tempo impiega per consumare un litro di benzina?
Vale la proporzione:

$$90 \text{ km} : 1 \text{ h} = 12 \text{ km} : x \text{ h} \rightarrow x = \frac{12}{90} \text{ h} = \frac{2}{15} \text{ h} = 8 \text{ minuti}$$

1. Insieme alla [7], valgono anche le seguenti relazioni di importanza minore:

$a : c = b : d$	Proprietà del permutare
$b : a = d : c$	Proprietà dell'invertire
$a \cdot n : b = c \cdot n : d \quad \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d \quad (n \neq 0)$	Proprietà invariantiva
$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$	Proprietà del comporre/scomporre

PARTE TERZA

4.4 | Sistemi di equazioni

4.4.1 | Equazioni in due incognite e sistemi di equazioni

Si consideri un'equazione del tipo $ax + by = c$, ossia un'equazione di primo grado *in due incognite*, per esempio $2x + y = 0$: se si assegna all'incognita x un valore arbitrario (per esempio il valore 1) si ottiene una equazione *nella sola incognita y*. Risolvendola, si trova un valore numerico per l'incognita y (ossia -2) che, insieme al valore arbitrario assegnato alla y, costituisce una soluzione dell'equazione di partenza.

Ovviamente, il procedimento sopra descritto può essere ripetuto all'infinito, assegnando via via valori arbitrari alla x e trovando, per ognuno di questi, il corrispondente valore per la y: ciascuna delle coppie di valori così trovate costituisce una diversa soluzione dell'equazione.

Questo ragionamento vale non soltanto per la particolare equazione considerata, ma per qualsiasi equazione in due incognite.

Un'equazione in due (o più) incognite ammette in generale **infinite soluzioni**, ciascuna delle quali è rappresentata da una coppia di valori (uno per la x e uno per la y).

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ sono due delle infinite soluzioni dell'equazione $2x + y = 0$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ sono due delle infinite soluzioni dell'equazione $x - y = 0$

Si considerino ora **due** equazioni nelle stesse due incognite, per esempio $2x + y = 0$ e $x - y = 0$: ci si ponga il problema di trovare (se esiste) una soluzione *comune* alle due equazioni, ossia una coppia di valori che verifichi entrambe le equazioni.

L'insieme di due (o più) equazioni (nelle stesse incognite) delle quali si voglia trovare una soluzione comune **prende il nome di sistema di equazioni.**

4.4.2 | Soluzione di un sistema

Risolvere un sistema significa trovare la soluzione comune alle due (o più) infinità di soluzioni delle singole equazioni che compongono il sistema.

L'insieme delle coppie di valori numerici che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni costituenti il sistema prende il nome di **soluzione** del sistema.

La soluzione di un sistema è dunque contemporaneamente soluzione di ogni equazione costituente il sistema. Si tratta, in altre parole, di trovare l'intersezione fra gli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

4.4.3 | Grado di un sistema

Il grado di un sistema è il **prodotto dei gradi delle equazioni** che lo costituiscono.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & 1^\circ \text{ grado} \\ 2xy + x = 0 & 2^\circ \text{ grado} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{è un sistema di } 2^\circ \text{ grado.}$$

I sistemi di primo grado vengono anche detti *sistemi lineari*.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 & 1^\circ \text{ grado} \\ 3x + 2y = 8 & 1^\circ \text{ grado} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{è un sistema di } 1^\circ \text{ grado, ossia lineare.}$$

MATEMATICA

4.4.4 | Metodi risolutivi dei sistemi lineari

Esistono tre diversi metodi risolutivi dei sistemi di equazioni: *sostituzione*, *confronto* e *riduzione*. Per ognuno di questi si mostra la risoluzione *passo-passo* applicata al sistema:

$$\begin{cases} x-2y = 0 \\ 3x+2y = 8 \end{cases}$$

- **Sostituzione**: consiste nel ricavare da una delle equazioni (per esempio dalla prima) una delle incognite (per esempio la x), quindi sostituire l'espressione trovata nell'altra equazione.

$$\begin{cases} x = 2y \\ 3x+2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3\cdot(2y)+2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 8y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

- **Confronto**: consiste nel risolvere entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita (per esempio la y), per poi confrontare le due espressioni trovate.

$$\begin{cases} x-2y = 0 \\ 3x+2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ y = \dfrac{8-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{8-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ 4x = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = x/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

- **Riduzione**: consiste nel sommare (o sottrarre) membro a membro le due equazioni in modo da far "scomparire" una delle due incognite.

$$\begin{cases} x-2y = 0 \\ 3x+2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ 3x+2y = 8 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 4x+0 = 8 \quad} \rightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x-2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = x/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

4.4.5 | Carattere dei sistemi lineari

Un sistema lineare (ossia un sistema di primo grado) può essere:

- possibile
  - determinato ⟷ una soluzione
  - indeterminato ⟷ infinite soluzioni
- impossibile ⟷ nessuna soluzione

Non esiste un sistema lineare con due o tre soluzioni!

Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y = c_1 \\ a_2x+b_2y = c_2 \end{cases}$$

è possibile stabilirne il carattere (ossia determinare se sia determinato, indeterminato o impossibile) ancora prima di risolverlo. Si possono presentare i seguenti tre casi:

1. $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ → il sistema è determinato (quindi risolubile tramite uno dei metodi mostrati nel paragrafo precedente);
2. $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ → il sistema è indeterminato;
3. $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ → il sistema è impossibile.

Il sistema $\begin{cases} 2x-y = 1 \\ 6x-3y = 2 \end{cases}$ è impossibile, infatti: $\dfrac{2}{6} = \dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{1}{2}$ (caso 3).

PARTE TERZA

Quesiti svolti

1 L'equazione $1 + x = e^x$ è soddisfatta per:

A $x = -\infty$
B $x = 1$
C $x = -1$
D $x = 0$
E non è mai soddisfatta

Si tratta di un'equazione non risolubile elementarmente. Non esiste, in altre parole, per tale equazione un metodo risolutivo paragonabile all'utilizzo della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. In questo caso è dunque più che mai consigliabile utilizzare il metodo della verifica esposto nella parte teorica di questo capitolo. Ricordando che, indipendentemente dal valore della base, una potenza con esponente uguale a zero è uguale a uno, si verifica immediatamente la correttezza della risposta D.

2 Risolvere l'equazione $|x-2| = 3$.

A $x = 5$
B $x = 1$
C $x = -1$
D $x = 5$ e $x = -1$
E $x = -2$

È consigliabile utilizzare il metodo della verifica. Il valore $x = 5$ della risposta A soddisfa l'equazione proposta ma non rappresenta la soluzione dell'equazione: infatti, per soluzione di una equazione in x si intende l'insieme tutti e soli i valori di x che soddisfano l'equazione.

La risposta esatta è solo la D in quanto contiene **tutti** i valori di x ($x = 5$ e $x = -1$) che soddisfano l'equazione $|x-2| = 3$. Si riportano comunque i passaggi della soluzione tradizionale.

Ricordando che $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$ si devono considerare i due sistemi:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\text{soluzione} \\ \text{accettabile}\end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ -x+2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\text{soluzione} \\ \text{accettabile}\end{matrix}$$

per cui la risposta corretta è nuovamente la D.

MATEMATICA

3 **L'equazione:**

$$(2-3k)x^2+2(k-1)x+k = 0 \quad \text{con } k \neq \frac{2}{3}$$

ha due soluzioni reali coincidenti per:

A $k = -\frac{1}{2}$

B $k = \frac{1}{2}$

C $k = 2$

D $k = 0$

E per nessun valore di k

Perché l'equazione data (parametrica di 2° grado) abbia due radici reali coincidenti, il suo discriminante deve essere nullo, cioè:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow (k-1)^2-(2-3k)k = 0 \rightarrow 4k^2-4k+1 = 0 \rightarrow (2k-1)^2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

per cui la risposta esatta è la B.

4 **Le radici dell'equazione $2x^2+(m^2+1)x-3=0$, con m parametro reale, sono:**

A entrambe positive

B una positiva (la maggiore in modulo) e una negativa

C una negativa (la maggiore in modulo) e una positiva

D per rispondere occorre conoscere il valore di m

E nessuna delle precedenti

Si osserva in primo luogo che la quantità (m^2+1), coefficiente del termine di primo grado, è sicuramente positiva quindi, applicando la regola di Cartesio, si osservano una permanenza e una variazione, ossia una radice negativa e una positiva. A questo punto, per scegliere fra la risposta B e la C, occorre ricordare la regola riguardante la somma delle radici di una equazione:

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$$

che, applicata all'equazione proposta dal quesito, conduce al seguente risultato:

$$x_1+x_2 = -\frac{m^2+1}{2} < 0$$

per cui la somma delle radici è negativa, quindi la radice maggiore in modulo è quella negativa (risposta C).

5 **Il triplo di una lunghezza più la sua metà vale il suo quadruplo meno 50 cm. Quanto vale la lunghezza?**

A 1 m

B 1/2 m

C 200 cm

D 150 cm

E 50,5 cm

Chiamando x la lunghezza incognita e traducendo la relazione data dal testo del problema in un'equazione, si ha:

$$3x + \frac{1}{2}x = 4x - 50 \text{ cm}$$

Risolvendo questa equazione di primo grado in x, si ottiene:

$$3x + \frac{1}{2}x - 4x = -50 \text{ cm} \rightarrow -\frac{1}{2}x = -50 \text{ cm} \rightarrow x = 100 \text{ cm}$$

Convertendo i centimetri in metri, si ricava che la risposta esatta è la A.

Si consiglia di impostare un'equazione o un sistema di equazioni ogni volta che il quesito lo consente.

---

6 **In occasione di un esame due aule, A e B, sono occupate rispettivamente al 70% ed al 90% della loro capienza. Prima dell'inizio della prova si trasferiscono 13 studenti dell'aula B all'aula A. A questo punto l'aula A risulta occupata al 75% e l'aula B all'80%. Qual è il numero totale di studenti?**

A 299 B 300 C 245 D 70 E 291

Indicando con a la capienza dell'aula A e con b quella dell'aula B, dal testo si ricavano le due equazioni:

$$\frac{70}{100}a + 13 = \frac{75}{100}a$$

$$\frac{90}{100}b - 13 = \frac{80}{100}b$$

che risolte:

$$\frac{75}{100}a - \frac{70}{100}a = 13 \rightarrow \frac{5}{100}a = 13 \rightarrow a = 260$$

$$\frac{90}{100}b - \frac{80}{100}b = 13 \rightarrow \frac{10}{100}b = 13 \rightarrow b = 130$$

danno per l'aula A una capienza di 260 posti e per l'aula B una capienza di 130 posti.
Il numero degli studenti che si sono presentati all'esame è uguale a:

$$\frac{70}{100}a + \frac{90}{100}b = \frac{70}{100} \cdot 260 + \frac{90}{100} \cdot 130 = 182 + 117 = 299$$

La risposta esatta è la A.

---

7 **Su una speciale carta geografica 8 centimetri rappresentano una distanza di 5 chilometri nella realtà. Quindi, su quella carta, quanto distano in centimetri due punti che nella realtà si trovano a 11 chilometri fra loro?**

A 16,8
B 17
C 17,2
D 17,6
E 18

Per rispondere al quesito è sufficiente impostare una proporzione:

$$8 \text{ cm} : 5 \text{ km} = X \text{ cm} : 11 \text{ km}$$

Ricordando che in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi si ricava:

$$X = \frac{8 \text{ cm} \cdot 11 \text{ km}}{5 \text{ km}} = \frac{88}{5} \text{ cm} = 17,6 \text{ cm}$$

La risposta corretta è quindi la D.

MATEMATICA

8 **L'equazione nell'incognita reale x:**

$$\frac{x^2-3x}{3-x} = -2$$

A non ha soluzioni
B ha l'unica soluzione $x = 3$
C ha un'unica soluzione la quale è diversa da 3
D ha due soluzioni
E ha più di due soluzioni

Dopo aver posto la condizione di esistenza del denominatore:

$$\text{C.E.: } x \neq 3$$

l'equazione può essere riscritta come:

$$\frac{x^2-3x}{3-x} = -2 \quad \to \quad \frac{x(x-3)}{3-x} = -2 \quad \to \quad -\frac{x(x-3)}{x-3} = -2 \quad \to \quad -x = -2 \quad \to \quad x = 2$$

dove è stato possibile semplificare il denominatore proprio grazie alla condizione di esistenza. Si conclude che l'equazione ha un'unica soluzione, ossia $x = 2$ quindi diversa da 3: risposta C.

9 **Fra tre anni Matteo avrà il doppio dell'età che Sara aveva tre anni fa, mentre ora il quadruplo degli anni di lui è pari al quintuplo degli anni di lei. Quale delle seguenti affermazioni è vera?**

A Per conoscere le età di Sara e Matteo ci vuole un ulteriore dato
B Si può dedurre che Sara è più vecchia di Matteo
C Fra un anno Sara avrà tanti anni quanti ne aveva Matteo un anno fa
D Si possono dedurre le età di Sara e di Matteo
E I due hanno la stessa età

Indicando con x l'età di Matteo e con y quella di Sara, il testo dell'esercizio, in formule, equivale al sistema:

$$\begin{cases} x+3 = 2(y-3) \\ 4x = 5y \end{cases} \to \begin{cases} x-2y = -9 \\ 4x-5y = 0 \end{cases}$$

Dal momento che tale sistema è determinato, è possibile calcolarne la soluzione, quindi determinare i valori delle età di Sara e Matteo.

La risposta corretta è la D.

10 **Quante soluzioni reali ammette, come minimo, un'equazione non indeterminata di 4° grado?**

A Nessuna
B Una
C Due
D Quattro
E Tre

Il quesito parla di una equazione non indeterminata, per cui per essa vale il teorema fondamentale dell'algebra: l'equazione ammette al **massimo** quattro soluzioni reali. Dal momento che il quesito richiede il numero **minimo** di soluzioni reali, occorre osservare che l'equazione potrebbe non ammettere soluzioni reali (si pensi, per esempio, all'equazione $x^4 = -1$). La risposta corretta è pertanto la A.

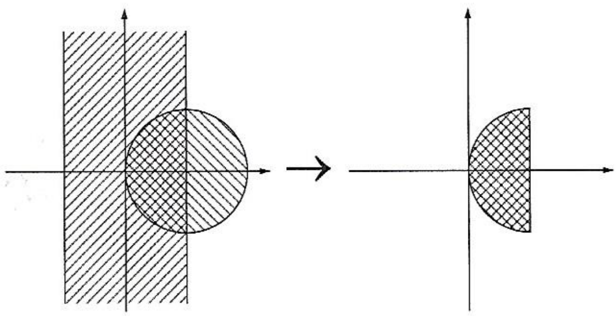
11 L'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2 \le 1 \\ |x| \le 1\end{cases}$$

- **A** è simmetrico rispetto all'asse y
- **B** è simmetrico rispetto all'asse x
- **C** è simmetrico rispetto all'orgine
- **D** contiene solamente punti con coordinata y non negativa
- **E** nessuna delle precedenti alternative è corretta

La prima disequazione del sistema rappresenta una circonferenza di centro $C(1;0)$ e raggio $r = 1$, mentre la seconda, che equivale alla doppia disequazione $-1 \le x \le 1$, indica la striscia di piano compresa tra le rette verticali di equazione $x = -1$ e $x = 1$.

Riportando tali indicazioni su un piano cartesiano, e considerando solo l'intersezione delle due rappresentazioni, poiché le soluzioni devono essere valide per entrambe le disequazioni del sistema, si ottiene:



Poichè l'insieme caratterizzato dal doppio tratto è simmetrico rispetto all'asse delle x, la risposta esatta è la **B**.

12 Il sistema di due equazioni in due incognite $\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=4\end{cases}$ **è:**

- **A** risolubile solo per $x=0$ e $y=x$
- **B** indeterminato
- **C** impossibile
- **D** risolubile per ogni valore di x
- **E** risolubile per ogni valore di y

Le due equazioni costituenti il sistema hanno i coefficienti delle variabili in proporzione. Moltiplicando per 2 entrambi i membri della prima equazione il sistema diventa:

$$\begin{cases}2x+2y=2\\2x+2y=4\end{cases}$$

Essendo uguali i primi membri delle due equazioni, lo dovrebbero essere anche i secondi membri; si conclude che il sistema è impossibile (risposta **C**). Alternativamente è anche possibile osservare che il rapporto tra i coefficienti delle incognite vale $1/2$ mentre il rapporto tra i termini noti vale $1/4$. Il sistema proposto è quindi impossibile.

MATEMATICA

13 **Il polinomio $x^2 - 3x + 2$ si scompone in:**

A $(x^2 - 3)\,x$
B $(x + 3)\,(x - 2)$
C $(x - 2)\,(x - 1)$
D non è scomponibile
E $(x + 1)\,(x + 2)$

Un trinomio di secondo grado del tipo $x^2 + bx + c$ può essere scomposto in fattori utilizzando la regola seguente (§ 4.2.15):

$$x^2 + bx + c = (x + x_1) \cdot (x + x_2)$$

dove x_1 e x_2 sono i due numeri la cui somma vale b e il cui prodotto vale c. Nell'esempio in questione, si tratta di trovare la coppia di numeri reali la cui somma vale -3 e il cui prodotto vale $+2$. I due numeri sono -2 e -1 e il trinomio si scompone in $(x - 2)\cdot(x - 1)$ (risposta C).

