3 | Radicali e numeri reali

3.1 | Numeri razionali, irrazionali e reali

Dati l'insieme dei numeri razionali e i punti di una retta orientata, si ha che a ogni numero razionale corrisponde un punto sulla retta, ma non viceversa; in altre parole **manca** la corrispondenza **biunivoca** tra i numeri razionali e i punti della retta orientata. Esistono inoltre problemi non risolubili nell'insieme dei numeri razionali. Per rendersene conto basta pensare all'equazione $x^2 = 2$, la cui soluzione è $\pm\sqrt{2}$, ossia un numero **non** esprimibile sotto forma di frazione.

Per mostrare che $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, occorre prima ricordare la definizione di radice quadrata: $\sqrt{2}$ indica un numero che, elevato al quadrato, è uguale a 2. Si supponga ora (per assurdo) che $\sqrt{2}$ sia esprimibile sotto forma di frazione, ossia:

$$\sqrt{2} = m/n$$

con m ed n numeri interi **primi fra loro** (ossia tali che il loro rapporto sia irriducibile). In base alla definizione di radice quadrata dovrebbe risultare:

$$2 = (m/n)^2 = m^2/n^2$$

Ma se i due numeri m ed n sono primi fra loro, anche i loro quadrati sono primi fra loro, pertanto il rapporto m^2/n^2 è irriducibile e non può essere uguale a 2.

In alcuni casi, quindi, l'estrazione di radice ha come risultato un numero decimale che non è né limitato, né illimitato periodico, perché in entrambi i casi lo si potrebbe trasformare in una frazione (§ 1.4.3).

I numeri non esprimibili sotto forma di frazione sono quindi numeri decimali **illimitati non periodici**. Tali numeri prendono il nome di **numeri irrazionali**.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\log 5$, $\sqrt[3]{4}$ sono numeri irrazionali.

Per eliminare questi e altri limiti che si incontrano lavorando con i numeri razionali si deve passare ai numeri reali $\mathbb{R}$. **L'insieme dei numeri reali è l'unione dell'insieme dei razionali e dell'insieme degli irrazionali** ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$) e coincide quindi con l'insieme dei numeri decimali.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata.

Nell'insieme dei numeri reali (come in qualsiasi altro insieme numerico) **non** si può dividere per zero.

3.2 | Radicali algebrici e aritmetici

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ (da leggersi "radice n-esima di a") prende il nome di *radicale*, a si chiama *radicando*, mentre n (con $n \in \mathbb{N}$) prende il nome di *indice della radice*.

Esistono due tipi di radicali: il radicale algebrico e il radicale aritmetico.

Il *radicale algebrico* $\sqrt[n]{a}$ è **ogni** numero reale la cui potenza *n-esima* è uguale al numero reale a.

- $\sqrt{4} = \pm 2$ infatti $(+2)^2 = (-2)^2 = 4$
- $\sqrt[3]{8} = +2$ infatti $(+2)^3 = 8$

MATEMATICA

Per il radicale algebrico $\sqrt[n]{a}$ si hanno **quattro casi:**

1	Con $a > 0$ e n pari $\rightarrow$ il radicale algebrico assume due valori reali opposti	esempio: $\sqrt{9} = \pm 3$
2	Con $a > 0$ e n dispari $\rightarrow$ un valore positivo	esempio: $\sqrt[3]{8} = 2$
3	Con $a < 0$ e n pari $\rightarrow$ nessun valore reale	esempio: $\sqrt[2]{-4}$ non esiste
4	Con $a < 0$ e n dispari $\rightarrow$ un valore negativo	esempio: $\sqrt[3]{-27} = -3$

Nel caso di radicando nullo, si pone $\sqrt[n]{0} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il *radicale aritmetico* $\sqrt[n]{a}$ (con $a \geq 0$) è invece **il** numero reale **non negativo** la cui potenza *n-esima* è uguale ad a.

$\sqrt{4} = 2$ infatti $2^2 = 4$.

3.2.1 | Proprietà invariantiva dei radicali aritmetici

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/q]{a^{m/q}}$$

$\sqrt[6]{27a^6b^9} = \sqrt[6]{(3a^2b^3)^3} = \sqrt{3a^2b^3}$

È importante osservare che la proprietà invariantiva vale nel caso in cui la base della potenza che costituisce il radicando sia positiva: quando invece il segno della base della potenza non è definito, occorre prestare la massima attenzione per evitare che il radicando possa diventare negativo.

Per esempio, $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$, infatti $a^3 > 0$ implica $a > 0$; ma $\sqrt[4]{a^2} \neq \sqrt{a}$, infatti $a^2 > 0$ non implica $a > 0$.

In altre parole, mentre nel primo caso l'esistenza di $\sqrt[6]{a^3}$ implica l'esistenza di $\sqrt{a}$, nel secondo caso l'esistenza di $\sqrt[4]{a^2}$ non implica l'esistenza di $\sqrt{a}$; infatti, a potrebbe essere negativo e in questo caso $\sqrt{a}$ non esisterebbe, quindi $\sqrt[4]{a^2} \neq \sqrt{a}$. La vera uguaglianza è $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|}$; in questo modo infatti si garantisce l'esistenza di entrambi i membri per ogni valore di a.

3.2.2 | Operazioni con i radicali aritmetici

Prodotto fra radicali: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}$

Quoziente fra radicali (purché $b \neq 0$): $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

$\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3}$; $\dfrac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{8}{9}}$

Per poter eseguire una moltiplicazione o una divisione fra radicali è necessario che i radicali abbiano **lo stesso indice**: se così non fosse, occorre prima effettuare una *riduzione di più radicali allo stesso indice.*

Riduzione di più radicali allo stesso indice: si tratta di trasformare radicali con indice diverso in radicali aventi lo stesso indice (sfruttando la proprietà invariantiva).

Trasformare i seguenti radicali portandoli a indice comune uguale a sei:

- $\sqrt[4]{a^2b^6} = \sqrt{|ab^3|} = \sqrt[6]{|a^3b^9|}$
- $\sqrt[3]{2a+2b} = \sqrt[3]{2(a+b)} = \sqrt[6]{4(a+b)^2}$
- $\sqrt[18]{27a^{12}(a+b)^3} = \sqrt[18]{[3a^4(a+b)]^3} = \sqrt[6]{3a^4(a+b)}$

Potenza: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$(\sqrt[4]{4})^3 = \sqrt[4]{4^3} = \sqrt[4]{64} = \sqrt{8}$

Radice di radice: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

$\sqrt[3]{a\sqrt{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3b}} = \sqrt[6]{a^3b}$

Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice (estrazione di radice):

se $a \geq 0$ allora $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}$.

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Eseguendo l'operazione di estrazione di radice è necessario **fare attenzione ai segni.**

$\sqrt{ax^2+bx^2} = \sqrt{x^2(a+b)} = |x|\sqrt{a+b}$: x è in valore assoluto perché altrimenti, se x fosse negativo, l'uguaglianza perderebbe di significato.
Analogamente si ha: $\sqrt{x^2-2xy+y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$.

In maniera simile si esegue l'operazione inversa, ossia il *trasporto di un fattore sotto il segno di radice*:

- se $a \geq 0$ allora $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$;
- se $a < 0$ allora $a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{|a|^nb}$.

3.2.3 | Somma di radicali aritmetici simili

In generale, **la somma algebrica di due o più radicali non si può esprimere sotto forma di un unico radicale.**

- $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$
- $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a-b}$

Per poter calcolare la somma algebrica è necessario che i due radicali siano *simili*.

Due o più radicali si dicono simili quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono, eventualmente, **solo per un fattore moltiplicativo.**
La somma algebrica di due o più radicali **simili** è un radicale, simile ai dati, avente per fattore moltiplicativo la somma algebrica dei fattori moltiplicativi.

$\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ sono due radicali simili: la loro somma è $(1+2) \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$.

$2 \cdot \sqrt[4]{ab^2}$, $-4 \cdot \sqrt[4]{ab^2}$ e $3 \cdot \sqrt[4]{ab^2}$ sono radicali simili: la loro somma è $\sqrt[4]{ab^2}$.

3.2.4 | Radicali doppi

Per *radicale doppio* si intende un radicale del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Se $(a^2 - b)$ è un quadrato perfetto è possibile applicare la formula seguente:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

dove si è posto $\sqrt{a^2-b} = c$.

$\sqrt{6+\sqrt{20}}$ da cui $a = 6, b = 20$ e $(a^2 - b) = 16$ è un quadrato perfetto. Pertanto, applicando la formula dei radicali doppi, si ottiene:

$$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{16}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}+1$$

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}$ da cui $a = 4, b = 12$ e $(a^2 - b) = 4$ è un quadrato perfetto. Pertanto, applicando la formula dei radicali doppi, si ottiene:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3}-1$$

Esiste anche una "formula inversa" che consente, data la somma o la differenza di due radicali, di trasformarli in un unico radicale doppio:

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \qquad \text{dove} \begin{cases} a = x+y \\ b = 4xy \end{cases}$$

$\sqrt{5}-1 = \sqrt{5}-\sqrt{1}$ da cui $x = 5$ e $y = 1$: si ricava quindi $a = 6$ e $b = 20$. Applicando la "formula inversa" dei radicali doppi, si ottiene:

$$\sqrt{5}-1 = \sqrt{5}-\sqrt{1} = \sqrt{6-\sqrt{20}}$$

3.2.5 | Potenza con esponente razionale (frazionario)

Di fondamentale importanza risulta essere la relazione: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

- $1^{m/n} = 1$ (con $n \neq 0$)
- $\sqrt[2]{a^3} = a^{3/2}$
- $0^{m/n} = 0$ (con $m \neq 0$ e $n \neq 0$)
- $\sqrt[3]{a^2 b} = a^{2/3} b^{1/3}$
- $5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$
- $a^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Applicando le proprietà delle potenze risulta possibile **moltiplicare e dividere fra loro radici con uguale radicando**:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}} \qquad\qquad \sqrt[n]{a}/\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \text{ (con } a \neq 0)$$

- $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{3+2}} = \sqrt[6]{3^5}$
- $\sqrt[3]{4}/\sqrt[4]{4} = \sqrt[3\cdot 4]{4^{4-3}} = \sqrt[12]{4}$

3.2.6 | Razionalizzazione delle frazioni

Razionalizzare una frazione significa eliminare dal denominatore eventuali espressioni irrazionali.

Per raggiungere questo scopo si moltiplicano numeratore e denominatore per un *fattore razionalizzante* opportuno. Nella tabella seguente sono riportati i principali tipi di frazione con i rispettivi fattori razionalizzanti.

	Frazione	Fattore razionalizzante	Frazione razionalizzata
1	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$
2	$\frac{1}{a\sqrt{b}}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{b}}{ab}$
3	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$
4	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}\quad (m<n)$	$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
5	$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$	$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$
6	$\frac{1}{a\pm\sqrt{b}}$	$a\mp\sqrt{b}$	$\frac{a\mp\sqrt{b}}{a^2-b}$

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (caso 1 della tabella: il fattore razionalizzante è $\sqrt{2}$);
- $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (caso 2: il fattore razionalizzante è $\sqrt{3}$);
- $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$ (caso 3: il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{5^2}$);
- $\frac{1}{\sqrt[3]{5^5}} = \frac{1}{5\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{25}$

  (caso 4: essendo $n = 3$ ed $m = 5$, prima di applicare la regola si è resa necessaria una estrazione di radice, in modo da rispettare la condizione $m < n$, ottenendo $n = 3$ ed $m = 2$: si ha quindi che il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{5}$);
- $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$

  (caso 5: il fattore razionalizzante è $\sqrt{7}-\sqrt{5}$).

MATEMATICA

Quesiti svolti

---

1 **$\sqrt{3}$ è un numero:**

- A razionale
- B immaginario
- C complesso
- D intero
- E nessuna delle risposte proposte

Per quanto visto, $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale (non è esprimibile sotto forma di frazione). Ciononostante, non sarebbe corretto scegliere la risposta E. Per rispondere correttamente occorre osservare che $\sqrt{3}$, oltre a essere un numero irrazionale, appartiene, come ogni altro numero, all'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. La risposta corretta è dunque la C.

---

2 **Per determinare se un numero intero positivo *n* è un numero primo, è necessario e sufficiente controllare che non sia divisibile per nessun numero primo minore o al più uguale a:**

- A n
- B n^2
- C $\sqrt{n}$
- D $1/2\,n$
- E $n-1$

Se p è un divisore di n, allora anche $q = n/p$ è un divisore di n (infatti $\frac{n}{q} = \frac{n}{n/p} = p$): se p è un fattore di n maggiore di $\sqrt{n}$, allora q è un fattore di n minore di $\sqrt{n}$ (in quanto deve risultare $n = p \cdot q$). Quindi per ogni divisore p maggiore di $\sqrt{n}$ ne esiste sempre un altro (indicato con q) minore di $\sqrt{n}$ e viceversa: n è dunque un numero primo se, e solo se, non ha fattori primi minori o al più uguali a $\sqrt{n}$ (risposta C). Si noti inoltre che, per verificare se un numero n è primo, si analizzano (come possibili divisori) solo i numeri primi in quanto se n avesse un divisore d non primo, i suoi fattori primi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sarebbero a loro volta anch'essi divisori di n: non è necessario quindi analizzare *tutti* i numeri minori o al più uguali a $\sqrt{n}$, ma solo quelli primi.

---

3 **L'espressione $\sqrt[3]{-27}$ indica una quantità:**

- A irrazionale
- B immaginaria
- C intera
- D positiva
- E nessuna delle risposte precedenti

Essendo $(-3)^3 = -27$ si ricava $\sqrt[3]{-27} = -3$: si tratta di un numero intero (risposta C).

4 L'espressione:

$$\sqrt{\frac{a^m}{a^n}} \quad \text{con } a \text{ numero reale positivo}$$

è uguale a:

A $\dfrac{\sqrt{a^{m+n}}}{a^n}$ B $a^n\sqrt{a^{m-n}}$ C $\dfrac{\sqrt{a^{m-n}}}{a^n}$ D $\dfrac{a^{m-2}}{a^{n-2}}$ E $a^{\frac{m+n}{2}}$

Il radicale dato può essere scritto nella forma:

$$\sqrt{\frac{a^m}{a^n}} = \frac{\sqrt{a^m}}{\sqrt{a^n}}$$

Razionalizzando la frazione ottenuta, si ha:

$$\frac{\sqrt{a^m}}{\sqrt{a^n}} = \frac{\sqrt{a^m}\cdot\sqrt{a^n}}{a^n} = \frac{\sqrt{a^{m+n}}}{a^n}$$

La risposta esatta è la A.

5 Quanto vale $\sqrt{-4}$?

A Più di 2

B Meno di 2

C È un numero razionale

D È la somma di – 2 e + 2

E Non è definita nel campo reale

Il radicale algebrico $\sqrt{-4}$ avendo radicando negativo (– 4) e indice di radice pari (2) non è un numero reale. Esso assume due valori immaginari e precisamente:

$$\sqrt{-4} = \pm 2i$$

La risposta corretta è dunque la E.

6 L'espressione $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^{-5}}}$ è equivalente a:

A $\sqrt[6]{a}$ B $\sqrt[5]{\dfrac{1}{a^3}}$ C $\sqrt[6]{\dfrac{1}{a}}$ D $\sqrt[5]{\dfrac{1}{a}}$ E a^{-15}

Eseguendo il trasporto del fattore a^2 sotto il segno di radice quadrata e scrivendo la radice cubica di una radice quadrata come un'unica radice, si ha:

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^{-5}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a^{-5}}} = \sqrt[6]{a^{-1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}}$$

La risposta esatta è la C.

MATEMATICA

7 **Siano a, b, c tre numeri reali positivi. Si scriva il numero $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2c^5}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}}{\sqrt{abc^3d}}$ come radice di un monomio.**

A $\sqrt[8]{\dfrac{a^{15}b^9c^2}{d^4}}$

B $\sqrt[30]{\dfrac{a^{23}b^{11}c^{17}}{d^{15}}}$

C $\sqrt[30]{\dfrac{a^{18}b^{12}c^{15}}{d}}$

D $\sqrt[30]{\dfrac{a^4b^2c^4}{d}}$

E $\sqrt[30]{\dfrac{a^{18}b^9c^4}{d^{15}}}$

È bene dapprima portare fuori dal segno di radice il fattore c e semplificarlo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^5}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}}{\sqrt{abc^3d}} = \frac{c\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}}{c\cdot\sqrt{abcd}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}}{\sqrt{abcd}}$$

Si riducono ora i radicali dati allo stesso indice, cioè $30 = \text{m.c.m.}(3, 5, 2)$, e poi si eseguono le operazioni di moltiplicazione e di divisione di radicali aventi lo stesso indice:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}}{\sqrt{abcd}} = \frac{\sqrt[30]{a^{20}b^{20}c^{20}}\cdot\sqrt[30]{a^{18}b^6c^{12}}}{\sqrt[30]{a^{15}b^{15}c^{15}d^{15}}} = \sqrt[30]{\frac{a^{20}b^{20}c^{20}\cdot a^{18}b^6c^{12}}{a^{15}b^{15}c^{15}d^{15}}} =$$

$$= \sqrt[30]{\frac{a^{20+18-15}b^{20+6-15}c^{20+12-15}}{d^{15}}} = \sqrt[30]{\frac{a^{23}b^{11}c^{17}}{d^{15}}}$$

La risposta corretta è quindi la B.

8 **L'espressione $\dfrac{a}{a+b}\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}$ (dove $a, b > 0$) è uguale a:**

A $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ B $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}}$ C $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$ D $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}$ E $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

Trasportando il fattore sotto il segno di radice (operazione inversa dell'estrazione di radice) e semplificando, si ottiene:

$$\frac{a}{a+b}\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} = \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2+2ab}\cdot\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}} = \sqrt{\frac{a^2}{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

La risposta corretta è quindi la A.

9 **L'espressione $\sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1}$, con x un numero reale, equivale a:**

- A $2x^2 - 2x + 1$
- B $\pm(2x^2 - 2x + 1)$
- C $\pm(2x^2 - 1)$
- D $2x^2 - 1$
- E $2x^2 - 1|$

Il radicando del radicale dato è il quadrato di un binomio, cioè $4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2$: pertanto è non negativo, (e il radicale quindi esiste), per ogni valore reale di x.

Poiché $2x^2 - 1$ può assumere sia valori positivi che negativi, nel semplificare l'esponente del radicando con l'indice della radice è necessario passare al modulo del radicando per mantenere il segno positivo del radicale aritmetico e dunque scrivere:

$$\sqrt{(2x^2 - 1)^2} = |2x^2 - 1|$$

La risposta esatta è quindi la E.

10 **L'inverso del numero $\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ è:**

- A $\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{2}{3}}$
- B $\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{3}}$
- C $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$
- D $\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$
- E $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$

L'inverso del numero $\sqrt{5/2} - \sqrt{3/2}$ è pari a una frazione avente 1 al numeratore e il numero dato al denominatore:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Razionalizzandone il denominatore si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

La risposta esatta è quindi la C.

11 **Il radicale $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ è uguale a:**

A $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

B $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

C $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

D $2\sqrt{3}$

E $3\sqrt{2}$

Applicando la regola sui radicali doppi (§ 3.2.4) si ha:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-24}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-24}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

La risposta corretta è quindi la C.

12 **Eseguire la razionalizzazione di $\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$.**

A $\frac{\sqrt{15}+3}{6}$

B $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

C $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

E $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

Prima di effettuare la vera e propria razionalizzazione, è utile svolgere il prodotto a denominatore: $\frac{1}{\sqrt{15}-3}$. Ora è facile individuare il fattore razionalizzante $\sqrt{15}+3$. La razionalizzazione sarà quindi

$\frac{1}{\sqrt{15}-3}\cdot\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3} = \frac{\sqrt{15}+3}{15-9} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$. La risposta corretta è la A.