1 | Scalari e vettori

1.1 | Grandezze scalari

Misurare una grandezza fisica (come la lunghezza di un tavolo o la durata di un evento) significa fissare un'opportuna **unità di misura** (per esempio, rispettivamente, il metro o il minuto) e stabilire quante volte essa è contenuta nella grandezza data.

Si dice **scalare** una grandezza che può essere descritta indicando un numero, eventualmente accompagnato dalla relativa unità di misura.

Il record del mondo sui 100 metri piani e l'altezza del monte Everest sono grandezze scalari (un *tempo e una lunghezza, rispettivamente). Allo stesso modo, anche se non ha alcuna unità di misura, la percentuale di bambini maschi in una classe elementare è una grandezza scalare: viene* espressa infatti con un *numero puro.*

1.1.1 | Sistema internazionale delle unità di misura

In fisica si definiscono sette grandezze **fondamentali** fra loro indipendenti, tra cui la lunghezza, la massa e il tempo. Tutte le altre prendono il nome di grandezze **derivate** nel senso che si possono ricavare tramite opportune "ricette" matematiche a partire dalle grandezze fondamentali.

La velocità è una grandezza derivata definita come rapporto di due grandezze fondamentali:

$$\text{velocità} = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$$

Per convenzione, il sistema di unità di misura attualmente adottato è il Sistema internazionale (SI) o MKS (dalle iniziali dei simboli per le unità di misura metro, chilogrammo e secondo); in questo sistema le sette grandezze fondamentali hanno le unità di misura riportate nella tabella seguente.

Grandezza fondamentale	Unità di misura nel SI	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
tempo	secondo	s
intensità di corrente	ampere	A
temperatura	kelvin	K
intensità luminosa	candela	cd
quantità di materia	mole	mol

Il SI non è il solo sistema di unità di misura esistente; un altro molto usato è il CGS (dalle iniziali di centimetro, grammo e secondo), nel quale per lunghezza, massa e tempo si usano rispettivamente le unità di misura centimetro, grammo e secondo. In questo testo, in generale, si utilizzano le unità di misura del SI.

In Appendice è riportata una tabella di conversione fra SI e CGS.

FISICA

1.1.2 | Unità di misura: multipli e sottomultipli

In entrambi i sistemi SI e CGS si aggiungono prefissi alle unità di misura in modo da rendere i numeri più "maneggevoli". La tabella seguente riporta i prefissi più usati.

Multipli				Sottomultipli			
deca (da)	10^1	mega (M)	10^6	deci (d)	10^{-1}	micro (μ)	10^{-6}
etto (h)	10^2	giga (G)	10^9	centi (c)	10^{-2}	nano (n)	10^{-9}
chilo (k)	10^3	tera (T)	10^{12}	milli (m)	10^{-3}	pico (p)	10^{-12}

Questi prefissi si usano moltiplicando la corrispondente potenza di 10 per le unità di misura a cui vengono affiancati:

$$1 \text{ millisecondo} = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \cdot 1 \text{ secondo} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$1 \text{ gigametro} = 1 \text{ Gm} = 10^{9} \cdot 1 \text{ metro} = 10^{9} \text{ m}$$

Per passare da un'unità di misura a un suo multiplo o sottomultiplo si inverte la definizione:

$$1 \text{ hg} = 10^2 \text{ g} = 100 \text{ g} \Rightarrow 1 \text{ g} = \frac{1 \text{ hg}}{100} = 10^{-2} \text{ hg}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ m} = \frac{1 \text{ pm}}{10^{-12}} = 10^{12} \text{ pm}$$

Si esprima la lunghezza 7 Gm (gigametri) in pm (picometri).
In esercizi di questo tipo bisogna lavorare con le potenze di 10; in particolare, una volta note le definizioni dei prefissi per le unità di misura, si devono applicare le proprietà:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \quad \text{oppure} \quad 10^a / 10^b = 10^{a-b}$$

Conviene sempre passare per l'unità di misura senza prefisso (il metro nell'esempio):

$$7 \text{ Gm} = 7 \cdot (10^9 \text{ m}) = 7 \cdot 10^9 \cdot (\mathbf{1\ m}) = 7 \cdot 10^9 \cdot (10^{12} \text{ pm}) =$$
$$= 7 \cdot (10^9 \cdot 10^{12}) \text{ pm} = 7 \cdot 10^{9+12} \text{ pm} = 7 \cdot 10^{21} \text{ pm}$$

1.1.3 | Notazione scientifica o esponenziale

Ogni numero razionale può essere scritto nella forma $a \cdot 10^b$, dove a è un numero decimale con una sola cifra diversa da zero prima della virgola, mentre b è un numero intero.

$0{,}0025 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$; $-562{,}5 = -5{,}625 \cdot 10^2$; $-0{,}070 = -7{,}0 \cdot 10^{-2}$

Nel trasformare –0,070 in notazione esponenziale non si può tralasciare lo zero dopo il 7.
In fisica, infatti, gli zeri a destra dell'ultima cifra diversa da zero dopo la virgola contengono un'informazione non trascurabile: per esempio, qui, «7 centesimi e 0 millesimi» anziché «7 centesimi». Trascurando questo zero nel passaggio alla notazione esponenziale, l'informazione rispetto al numero di partenza sarebbe incompleta (si veda più avanti il § 1.4.2).

1.1.4 | Ordine di grandezza

L'ordine di grandezza (ODG) di un numero indica con quale potenza di 10 lo si può sostituire in calcoli approssimati. Dato un numero espresso nella notazione esponenziale $a \cdot 10^b$, il suo ODG è:

pari all'esponente b se $|a| < 5$ oppure pari a $b+1$ se $|a| \geq 5$

$\text{ODG}(0{,}0025) = -3$; $\text{ODG}(-562{,}5) = 2 + 1 = 3$; $\text{ODG}(-0{,}070) = -2 + 1 = -1$

1.2 | Dimensioni di una grandezza fisica

Per ciascuna delle grandezze fondamentali viste al § 1.1 si introduce un'etichetta di riconoscimento che, racchiusa fra parentesi quadre, indica la grandezza stessa o, più correttamente, la sua *dimensione*. Nella tabella seguente vengono riportate le dimensioni delle grandezze fondamentali.

Grandezza	Dimensione
lunghezza	[L]
massa	[M]
tempo	[T]
intensità di corrente elettrica	[i]
temperatura	[K]
intensità luminosa	[I]
quantità di materia	[m]

Le dimensioni di una grandezza derivata si ricavano dalle dimensioni delle grandezze fondamentali, secondo la stessa relazione che lega la grandezza derivata alle grandezze fondamentali.

Le dimensioni della velocità media, definita come $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, sono $\frac{[L]}{[T]}$.

Se due grandezze fisiche hanno le stesse dimensioni, si dicono **omogenee**.
Alcune grandezze fisiche (tipicamente quelle definite come rapporto fra due grandezze omogenee) sono prive di dimensioni: si tratta di grandezze fisiche **adimensionali**.

La lunghezza di un tavolo e l'altezza di un muro sono grandezze omogenee e hanno entrambe dimensione [L].

Gli **angoli**, che nel SI e nel CGS si misurano in radianti (simbolo: rad), sono grandezze scalari adimensionali. Si noti che, quando non è accompagnata dall'indicazione dei radianti, la dicitura «π» non rappresenta l'angolo piatto, bensì il numero puro che vale circa 3,14.
Dunque, per esempio: 2π rad è l'angolo giro; 2π è un numero puro che vale circa 6,28.

Quali sono le dimensioni di $\cos\vartheta$?
Il coseno di un angolo (così come il seno e la tangente) sono funzioni trigonometriche definite come rapporto tra due segmenti, pertanto sono adimensionali.

1.2.1 | Regole per l'analisi dimensionale

Le dimensioni vengono trattate proprio come le quantità algebriche nel calcolo letterale. Questo implica alcune regole pratiche:

1. i numeri puri, gli angoli e tutte le grandezze adimensionali in genere non hanno dimensioni; nell'analisi dimensionale si possono sostituire con un 1;
2. moltiplicare o dividere una grandezza fisica per un numero puro non varia le dimensioni del risultato;
3. le grandezze fisiche possono essere sommate o sottratte solo se hanno le stesse dimensioni (ossia se sono omogenee);
4. i due membri di un'equazione o di un'uguaglianza fisica devono avere le stesse dimensioni.

Se p è il perimetro di una stanza (con dimensioni $[L]$), il doppio del perimetro ha ancora dimensioni $[L]$. In formule:

$$[2p] = [2] \cdot [p] = 1 \cdot [L] = [L]$$

Questo perché il numero puro 2 è adimensionale.

Le operazioni "1 m + 1 kg" e "22 m/s – 10 s" non hanno senso in fisica.

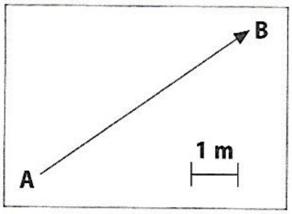
1.3 | Grandezze vettoriali

Queste grandezze sono individuate, oltre che da un numero (*modulo* o *intensità*) che ne esprime la misura rispetto a un'unità prefissata, anche da una *direzione* e da un *verso*.

Si supponga di dover descrivere lo spostamento di una formica a partire dalla sua tana. È chiaro che specificare la lunghezza di questo spostamento, per esempio 3 cm, non è sufficiente: questo basta soltanto a stabilire che la formica, dopo essersi spostata, si trova in qualche punto di una circonferenza di raggio 3 cm centrata nella tana! **Lo spostamento non è una grandezza scalare, ma vettoriale.** Per stabilire la posizione finale della formica è necessario conoscere *anche* la direzione lungo la quale si è mossa e, lungo questa direzione, il verso: per esempio sapere che, a partire dalla sua tana, la formica si è spostata di 3 cm, *in direzione verticale e verso nord*, consente di capire dove è arrivata.

I vettori si rappresentano simbolicamente con delle frecce.

Nella figura è rappresentato un vettore.



- A è il punto di "partenza" o **punto di applicazione**.
- Il **modulo** o **intensità** del vettore è pari alla lunghezza della freccia (rapportata alla relativa unità di misura).
- La **direzione** del vettore è la retta a cui appartiene la freccia.
- Il **verso** del vettore è quello indicato dalla freccia (per ogni direzione si possono avere due versi).

Esistono diverse notazioni per indicare un vettore. Le più utilizzate sono il grassetto **v** o la barra sopra la lettera $\bar{v}$. In questo testo viene adottato l'uso del grassetto.

Il modulo di un generico vettore **v** è indicato con il simbolo $|\mathbf{v}|$ oppure con il corsivo *v*.

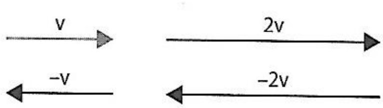
Due vettori si dicono:

- **paralleli** quando giacciono su direzioni (rette) coincidenti o parallele;
- **concordi** quando sono paralleli e hanno lo stesso verso;
- **antiparalleli** o **discordi** quando sono paralleli ma hanno verso opposto;
- **ortogonali** o **perpendicolari** quando le loro direzioni formano un angolo di 90° tra loro.

1.3.1 | Multipli di un vettore

Un certo vettore **v** può essere moltiplicato per uno scalare *s* (cioè per un numero), ottenendo come risultato un **vettore multiplo** di **v**, che ha *la stessa direzione* ma *modulo diverso*. Il verso del multiplo è concorde o discorde con quello del vettore **v** a seconda che lo scalare *s* sia positivo o negativo; il modulo del vettore prodotto è pari al prodotto dello scalare *s* per il modulo del vettore **v**.
Moltiplicando un vettore per 2, si ha cioè:

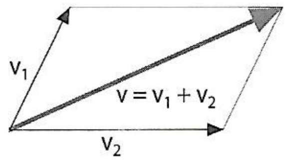
$$|\mathbf{2v}| = |2 \cdot \mathbf{v}| = 2 \cdot |\mathbf{v}| = 2v$$



Si definisce **opposto** di un vettore **v** il vettore −**v**, che ha lo stesso modulo ma verso opposto.

1.3.2 | Somma e differenza fra vettori

I vettori si sommano con la **regola del parallelogramma**: la **somma** di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, diretto lungo la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Il vettore $\mathbf{v}$ ha per modulo la lunghezza della diagonale.



Vale la relazione $0 \le |\mathbf{v}| \le |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$, ma in generale si ha:

$$|\mathbf{v}| \neq |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$$

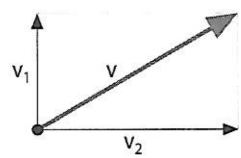
Il vettore somma prende il nome di **risultante.** Il modulo del vettore risultante si ricava in generale applicando la seguente relazione trigonometrica: detto α l'angolo tra i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, la loro somma $\mathbf{v}$ ha modulo:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2 \cdot |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\alpha}$$

Di seguito si riportano tre esempi in cui tale calcolo può essere effettuato più rapidamente, ricordando che $\cos(0°) = 1$, $\cos(90°) = 0$ e $\cos(180°) = -1$.

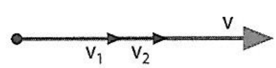
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali tra loro ($\alpha = 90°$).
Direzione e verso del vettore risultante $\mathbf{v}$ si costruiscono con la regola del parallelogramma; il modulo del vettore somma si ricava applicando il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2}$$



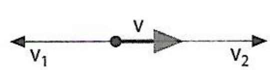
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono paralleli e concordi ($\alpha = 0°$).
Il vettore risultante $\mathbf{v}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; il modulo è dato da:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$$



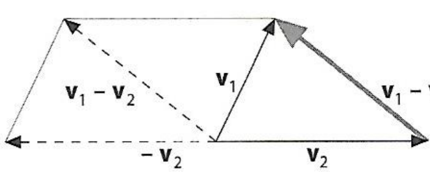
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono antiparalleli ($\alpha = 180°$).
Il vettore risultante $\mathbf{v}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e lo stesso verso del vettore di modulo maggiore; il modulo è invece dato da:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_2| - |\mathbf{v}_1| \text{ se } |\mathbf{v}_2| > |\mathbf{v}_1|; \quad |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2| \text{ altrimenti}$$



La **differenza** tra due vettori si ottiene sommando al primo vettore l'opposto del secondo:

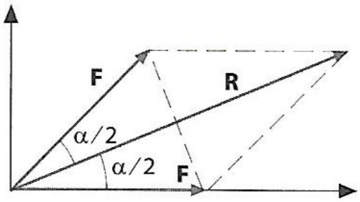
$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$$



FISICA

Si supponga di voler calcolare il modulo della risultante R di due forze che hanno lo stesso modulo F, formano tra loro un angolo $\alpha < 90°$ e sono applicate allo stesso punto: in questo caso si può usare la regola grafica del parallelogramma, facendo attenzione alle caratteristiche geometriche del problema.

Senza perdere in generalità, si può rappresentare una delle due forze lungo la direzione orizzontale in un riferimento cartesiano, e l'altra lungo la direzione che forma con essa un angolo $\alpha < 90°$. La risultante delle due forze, ovvero la diagonale del parallelogramma di lati uguali e pari a F, è quindi un vettore lungo quanto il doppio dell'altezza del triangolo isoscele di lati F. Tale altezza vale $h = F\cos(\alpha/2)$, dunque $R = 2F\cos(\alpha/2)$.



1.3.3 | Scomposizione di un vettore

Dato un riferimento cartesiano in cui giace un vettore **v** qualsiasi, le **componenti del vettore sono le sue proiezioni ortogonali sugli assi**; in altre parole, sono i due vettori $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$ paralleli rispettivamente agli assi x e y, tali che la loro somma dà il vettore **v**.

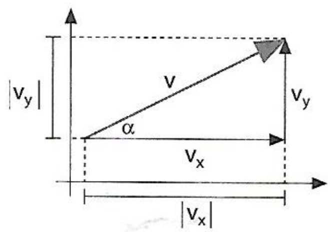
Le definizioni delle funzioni trigonometriche *seno* e *coseno* consentono di scomporre un vettore lungo due assi ortogonali orientati.

Nella figura è riportata la scomposizione di **v**, un generico vettore. $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$ sono le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani e si ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$.

Se, per esempio, $|\mathbf{v}| = 8$ cm e $\alpha = 30°$, si ha:

$$|\mathbf{v}_x| = 8\text{ cm} \cdot \cos(30°) = 8\text{ cm} \cdot (\sqrt{3}/2) = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$|\mathbf{v}_y| = 8\text{ cm} \cdot \text{sen}(30°) = 8\text{ cm} \cdot (1/2) = 4\text{ cm}$$



È sufficiente qualche nozione di geometria piana per riconoscere, nell'esempio precedente in cui $\alpha = 30°$, metà di un triangolo equilatero di lato **v** e altezza $\mathbf{v}_x$. Dunque, conoscendo il lato, si può concludere senza utilizzare la trigonometria che le componenti cercate sono:

$$|\mathbf{v}_x| = \text{altezza} = \mathbf{v} \cdot (\sqrt{3}/2); \quad |\mathbf{v}_y| = \text{base} = \mathbf{v}/2$$

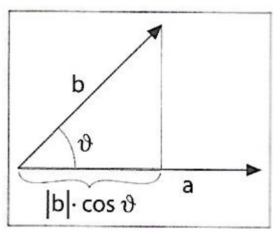
1.3.4 | Prodotti tra vettori

Diversamente dai numeri, i vettori possono essere moltiplicati fra loro in due modi diversi: mediante il prodotto *scalare* e il prodotto *vettoriale*.

Il **prodotto scalare** tra due vettori **a** e **b** è uno scalare (*cioè un numero puro!*) così definito:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta, \quad \text{dove } \vartheta \text{ è l'angolo tra } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b}$$

Il prodotto scalare tra due vettori è dunque pari a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_p|$, dove $\mathbf{b}_p$ è la componente di **b** parallela ad **a**, che vale appunto $|\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta$.



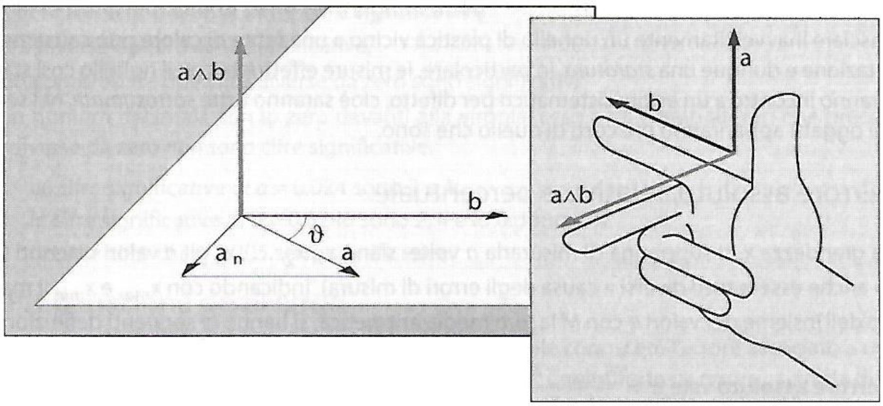
Si calcoli il prodotto scalare di due vettori a e b, sapendo che $a = 3$, $b = 1$, e che formano con l'asse x angoli rispettivamente pari a $\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$.

L'angolo ϑ formato dai due vettori **a** e **b** descritti nel testo è pari a $\alpha - \beta = 30°$. Si procede quindi a calcolare il loro prodotto scalare secondo la definizione:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta = 3 \cdot 1 \cdot \cos(30°) = 3\sqrt{3}/2$$

Il **prodotto vettoriale a $\wedge$ b** è un vettore così definito:

- **Intensità**: $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}\vartheta = |\mathbf{a}_n| \cdot |\mathbf{b}|$ dove $\mathbf{a}_n$ è la componente di **a** perpendicolare a **b**
- **Direzione**: perpendicolare al piano individuato da **a** e da **b**
- **Verso**: determinato dalla *regola della mano destra*, illustrata nella figura sottostante: se il pollice si dispone come **a** e l'indice come **b** allora il medio indica la direzione e il verso del prodotto vettoriale tra i due.



Si calcoli il prodotto vettoriale dei vettori a e b descritti nell'esercizio precedente.
Prima di calcolare il prodotto vettoriale, si osserva che, poiché il risultato è un vettore (e *non un numero* come nel caso del prodotto scalare), il problema richiede tre informazioni: il risultato **a $\wedge$ b** è descritto completamente solo conoscendone modulo, direzione e verso.
Si calcola il *modulo* secondo la definizione:

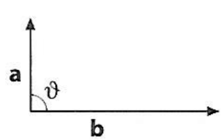
$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}\vartheta = 3 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}(30°) = 3 \cdot 1/2 = 3/2$$

La direzione è perpendicolare al piano in cui giacciono i due vettori (in questo caso al piano del foglio) e il verso è *entrante* nel foglio (regola della mano destra).

Ricordando che $\operatorname{sen}(90°) = 1$, $\operatorname{sen}(0°) = \operatorname{sen}(180°) = 0$, $\cos(90°) = 0$, $\cos(0°) = 1$ e $\cos(180°) = -1$, si ricavano i valori del prodotto scalare e vettoriale in tre casi particolari:

Se a e b sono ortogonali ($\vartheta = 90°$):

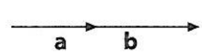
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(90°) = 0$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}(90°) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$



Dunque il prodotto scalare è nullo, mentre il modulo del prodotto vettoriale è massimo.

Se a e b sono paralleli e concordi ($\vartheta = 0°$):

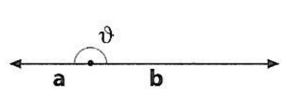
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(0°) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}(0°) = 0$



Dunque il prodotto scalare è massimo, mentre il prodotto vettoriale è nullo.

Se a e b sono antiparalleli ($\vartheta = 180°$):

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(180°) = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen}(180°) = 0$



Dunque il prodotto scalare è minimo, mentre il prodotto vettoriale è ancora nullo.

1.4 | Errori di misura

Non si può misurare una grandezza fisica con una precisione assoluta: ogni misura è affetta da errori, che possono essere suddivisi in due categorie.

Errori sistematici: derivano da difetti strumentali o dall'applicazione di leggi errate; sono errori sempre nello stesso verso, cioè o sempre per eccesso o sempre per difetto rispetto alla misura *vera*.
Errori accidentali: sono inevitabilmente legati a ogni procedura di misura; sono errori casuali nel senso che possono avvenire sia in eccesso sia in difetto rispetto alla misura *vera*.

Lasciare inavvertitamente un righello di plastica vicino a una fonte di calore può causarne una dilatazione e dunque una *staratura*. In particolare, le misure effettuate con il righello così starato andranno incontro a un errore sistematico per difetto, cioè saranno tutte *sottostimate*, nel senso che gli oggetti appariranno più corti di quello che sono.

1.4.1 | Errore assoluto, relativo e percentuale

Data una grandezza x, si supponga di misurarla n volte: siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ gli n valori ottenuti (che potrebbero anche essere tutti diversi a causa degli errori di misura). Indicando con x_{max} e x_{min} il massimo e il minimo dell'insieme dei valori e con M la loro media aritmetica, si hanno le seguenti definizioni.

L'**errore assoluto** vale $\varepsilon = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}$ (semidifferenza fra minimo e massimo).

L'**errore relativo** vale $\varepsilon_r = \varepsilon / M$ (rappresenta una *normalizzazione* dell'errore assoluto).

L'**errore percentuale** vale $\varepsilon_{\%} = (100 \cdot \varepsilon_r)\%$.

L'errore relativo e l'errore percentuale di una misura sono indici della sua accuratezza: minore è il loro valore, maggiore è l'accuratezza. Ogni misura deve essere accompagnata dall'errore e dall'unità di misura. La misura e l'errore si esprimono nelle stesse unità.

Un maestro chiede ad alcuni alunni della sua classe di misurare con un righello il lato più lungo di un foglio A4, facendo molta attenzione. Il risultato delle misure trovate da dieci studenti, espresse in cm, è:

29,8; 29,8; 29,6; 29,7; 29,7; 29,9; 29,8; 30,0; 29,7; 29,8

Calcolare media ed errore assoluto, relativo e percentuale. Il righello è starato?

Secondo le definizioni viste sopra si calcolano le grandezze richieste:

$$M = \frac{29{,}8 + 29{,}8 + 29{,}6 + \dots + 29{,}8}{10} = 29{,}78$$

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{30{,}0 - 29{,}6}{2} = 0{,}2$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{M} = 6{,}72 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_{\%} = 100 \cdot \varepsilon_r = 0{,}67\%$$

Il risultato della misura effettuata dagli studenti è dunque:

$$x = (29{,}78 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$$

Questo significa che secondo gli studenti il foglio A4 è lungo minimo 29,58, massimo 29,98 cm. Si preferisce solitamente indicare il risultato approssimandolo alla prima cifra interessata dall'errore assoluto (in questo caso la prima decimale):

$$x = (29{,}8 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$$

Il valore vero della lunghezza di un foglio A4 (29,7 cm) è contenuto nell'intervallo indicato dalla misura degli studenti, perciò non si può concludere che lo strumento sia starato.

PARTE QUARTA

1.4.2 | Cifre significative

Quando un numero rappresenta la misura di una certa quantità, le cifre significative sono quelle che apportano effettivamente delle informazioni sulla misura.

- L'informazione contenuta nel numero $a = 0{,}024$ è «2 centesimi e 4 millesimi».
- L'informazione contenuta nel numero $b = 0{,}0240$ è «2 centesimi, 4 millesimi e 0 decimi di millesimo».

Dunque, i numeri a e b non hanno lo stesso significato: b contiene più informazioni.

Regole per la determinazione delle cifre significative

- Le cifre diverse da zero sono significative;
- Gli zeri compresi fra due cifre diverse da zero sono significativi;
- Per un numero decimale con lo zero davanti alla virgola, esso e gli eventuali zeri che precedono le cifre diverse da zero *non sono* cifre significative.

- Le cifre significative di $a = 0{,}024$ sono 2 e 4;
- le cifre significative di $b = 0{,}0240$ sono 2, 4 e lo 0 dopo il 4;
- tutte le cifre di $c = 1{,}205$ sono significative.

1.4.3 | Propagazione degli errori

Se, anziché l'errore associato a una grandezza *misurata*, si vuole conoscere l'errore associato a una grandezza *calcolata* a partire dalle misure effettuate (ciascuna delle quali affetta da errore), si tratta di valutare come si propagano gli errori quando si eseguono operazioni tra più misure.

Per misurare l'area A di un tavolo di lunghezza a e larghezza b si utilizza la semplice relazione $A = a \cdot b$. Dato che le misure di a e b sono di per sé affette da errore, la misura *indiretta* dell'area A sarà affetta da un errore che è la *propagazione* di quello su a e b.

Regole base per la propagazione dell'errore

- L'errore **assoluto** su una **somma** o una **differenza** di più misure è uguale alla somma degli errori **assoluti** delle singole misure.
- L'errore **percentuale** su un **prodotto** o su un **quoziente** di più misure è uguale alla somma degli errori **percentuali** delle singole misure.

Sia dato un quadrato di cui si conosce la misura del lato, pari a $L = (10 \pm 2)$ cm. Calcolare errore assoluto e percentuale su perimetro e superficie del quadrato.

Il perimetro del quadrato vale $P = 4L = 40$ cm. Si tratta della *somma* di quattro grandezze (in questo caso coincidenti: il lato) di cui è noto l'errore assoluto $\varepsilon = 2$ cm. Si può pertanto scrivere che l'errore assoluto su P vale:

$$\varepsilon_P = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon = 8 \text{ cm}$$

Così l'errore relativo sul perimetro, per definizione, vale:

$$\varepsilon_{rP} = \frac{\varepsilon_P}{P} = \frac{8 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0{,}2 \quad \text{(è un numero puro)}$$

L'errore relativo sul lato si ricava dal valore del lato e dal suo errore assoluto secondo la definizione:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{2 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}2 \quad \text{(è un numero puro)}$$

L'area del quadrato è data dal *prodotto* del lato per se stesso: $A = L^2 = 100 \text{ cm}^2$, pertanto si sommano gli errori relativi sui lati per trovare l'errore relativo sull'area:

$$\varepsilon_{rA} = \varepsilon_r + \varepsilon_r = 0{,}4 \quad \text{(è un numero puro)}$$

A questo punto, per trovare l'errore assoluto sull'area, si inverte la definizione di ε_{rA}:

$$\varepsilon_{rA} = \frac{\varepsilon_A}{A} \Rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_{rA} \cdot A = 0{,}4 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

FISICA

Quesiti svolti

1 **Siano *a*, *b* e *c* le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo regolare. Data la relazione $abc + X = Y$, determinare quale tra le seguenti sono, rispettivamente, le dimensioni delle grandezze *X* e *Y*.**

A *X* è una lunghezza e *Y* un volume
B Entrambe le grandezze sono superfici
C Entrambe le grandezze sono lunghezze
D Entrambe le grandezze sono volumi
E Nessuna delle precedenti

Anzitutto, secondo una semplice nozione di geometria elementare, la quantità abc è il volume del parallelepipedo. Dato che in fisica si possono sommare solo grandezze con le stesse dimensioni, *X* deve essere un volume. Naturalmente, la somma di due volumi è un volume; infine, dato che i due membri di un'eguaglianza tra grandezze fisiche devono avere le stesse dimensioni, si conclude che anche la grandezza *Y* è un volume. La risposta esatta è la D.

2 **Quali dei seguenti termini corrisponde a una grandezza fisica?**

A Poise
B Ampere
C Metro
D Temperatura
E Chilogrammo

Nelle risposte si incontrano termini nuovi. È una situazione che si presenta di frequente nello svolgimento dei test composti da quesiti a risposta multipla e, per questo motivo, bisogna imparare a gestirla nel modo migliore.

In questo caso, in particolare, non si è ancora definito il termine poise (l'unità di misura della viscosità). È tuttavia sufficiente osservare che la temperatura è una grandezza fisica per concludere che tutte le altre sono unità di misura. La risposta esatta è dunque la D.

3 ***Micro* è un prefisso che indica un sottomultiplo dell'unità pari a:**

A 1 centesimo
B 1 decimo
C 1 millesimo
D 1 milionesimo
E 1 miliardesimo

Il prefisso micro corrisponde a 10^{-6}. D'altra parte $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1.000.000}$.
La risposta esatta è la D.

PARTE QUARTA

4 **La massa totale degli abitanti dell'Italia è all'incirca:**

- A 3 milioni di tonnellate
- B 30 milioni di chilogrammi
- C 300 mila quintali
- D 3 miliardi di grammi
- E 30 milioni di tonnellate

Considerando la popolazione italiana composta da circa 56 milioni di persone e supponendo una massa media per persona pari a 60 chilogrammi, la massa totale degli abitanti dell'Italia è uguale a:

$$60 \text{ kg} \cdot 56.000.000 = 3.360.000.000 \text{ kg} = 3.360.000 \text{ tonnellate}$$

La risposta esatta è quindi la A.

5 **Nel 1926 Perrin ottenne il premio Nobel per i suoi studi sulle dimensioni di atomi o molecole. Un suo famoso esperimento prevede di lasciar cadere una goccia di acido oleico sulla superficie dell'acqua in un catino. L'acido resterà a galla formando una chiazza circolare che (per le speciali proprietà dell'acido stesso) avrà spessore pari alle dimensioni tipiche di una sola molecola (strato monomolecolare). Sapendo che il volume di acido oleico contenuto nella goccia che viene lasciata cadere è di 10^{-4} cm^3 e che rimane costante misurando il diametro della chiazza (circa 28 cm) prodotta nell'acqua, dare una stima delle dimensioni dello strato molecolare sapendo che il volume di acido oleico resterà sempre lo stesso.**

- A $1{,}6 \cdot 10^{-7}$ cm
- B $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ m
- C $1{,}6 \cdot 10^{-17}$ cm
- D $28 \cdot 10^{-4}$ cm
- E $1{,}6 \cdot 10^{7}$ cm

Visualizzando correttamente il problema secondo la minuziosa descrizione dell'esperimento di Perrin, esso si riduce a un esercizio di geometria solida: la chiazza circolare di acido oleico è assimilabile a un cilindro che ha diametro di base *d* pari a 28 cm e un'altezza che è lo spessore *h* dello strato che si chiede di trovare.

Conoscendo il volume *V* del cilindro non resta che fare una divisione.

$$h = \frac{V}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{10^{-4} \text{ cm}^3}{3{,}14 \cdot \left(\frac{28 \text{ cm}}{2}\right)^2} = \frac{10^{-4}}{3{,}14 \cdot 14^2} \text{ cm}$$

L'unica difficoltà del problema sta nell'eseguire la divisione senza l'aiuto di una calcolatrice, ma si può proseguire il calcolo con qualche approssimazione:

$$\frac{10^{-4}}{3{,}14 \cdot 14^2} \cong \frac{10^{-4}}{3 \cdot (2 \cdot 7)^2} = \frac{10^{-4}}{3 \cdot 4 \cdot 49} \cong \frac{10^{-4}}{3 \cdot 4 \cdot 50} = \frac{10^{-4}}{600} = \frac{10^{-4}}{6 \cdot 10^2} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$$

Giunti a questo punto del calcolo, anche senza sapere quanto fa esattamente 1 diviso 6, si possono escludere tutte le alternative tranne la prima, sulla base degli ordini di grandezza e delle unità di misura.

Dato che 1/6 è compreso tra $1/8 = 0{,}125 = 1{,}25 \cdot 10^{-1}$ e $1/5 = 0{,}2 = 2 \cdot 10^{-1}$, si conclude che la risposta esatta è la A.

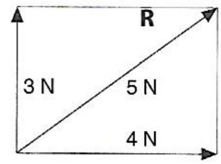
FISICA

6 **Due forze agiscono in direzioni perpendicolari l'una rispetto all'altra. I moduli delle due forze sono rispettivamente 3N e 4N. Quanto vale il modulo della forza risultante?**

A 7 N B 5 N C 1 N D 12 N E 4/3 N

Per rispondere a questo quesito conviene rappresentare le due forze e la loro risultante (somma delle forze) utilizzando la regola del parallelogramma.

Il modulo della risultante **R** si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo che ha per cateti le due forze di moduli 3 N e 4 N e per ipotenusa la loro risultante:



$$R = \sqrt{(9\ \mathrm{N})^2 + (16\ \mathrm{N})^2} = 5\mathrm{N}$$

La risposta corretta è dunque la B.

7 **Il modulo del vettore risultante dalla somma di due vettori, a e b, è uguale alla differenza tra il modulo del vettore a e il modulo del vettore b. È possibile affermare che:**

A i vettori **a** e **b** hanno la stessa direzione e lo stesso verso

B i vettori **a** e **b** hanno la stessa direzione e verso opposto

C i vettori **a** e **b** possono avere una direzione e un verso qualsiasi

D le direzioni dei vettori **a** e **b** formano un angolo di 60°

E i vettori **a** e **b** hanno modulo uguale e verso opposto

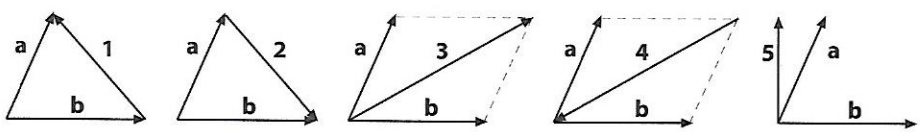
La risposta corretta è la B: infatti, il modulo della risultante di due vettori è dato dalla somma algebrica dei moduli dei due vettori solo quando questi sono equidirezionali (paralleli), e ciò consente di scartare le risposte C e D.

La A può essere esclusa per il fatto che se, oltre ad avere la stessa direzione, i due vettori hanno anche lo stesso verso, il modulo della risultante si ottiene **sommando** i loro moduli. La risposta E infine non è corretta per il fatto che rappresenta una condizione **sufficiente** ma **non necessaria** affinché l'affermazione del testo dell'esercizio sia vera.

In altre parole è vera l'implicazione seguente:

I vettori **a** e **b** hanno modulo uguale e verso opposto $\Rightarrow$ il modulo del vettore risultante dalla somma dei due vettori **a** e **b** è uguale alla differenza tra il modulo del vettore **a** e il modulo del vettore **b**; non è però vera l'implicazione inversa. Dall'affermazione contenuta nel testo del quesito non si può, infatti, concludere che i due vettori **a** e **b** hanno lo stesso modulo.

8 **Quale vettore tra quelli indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza a – b?**



A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

Secondo la regola del parallelogramma, la somma vettoriale (o *risultante*) di due vettori **a** e **b** è la diagonale del parallelogramma che ha per lati **a** e **b**. La risultante **a** + **b** è rappresentata nel diagramma 3. Utilizzando sempre la regola del parallelogramma, si definisce differenza tra **a** e **b**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Dunque il calcolo della differenza di due vettori si riduce al calcolo della somma di un vettore con l'opposto dell'altro. Graficamente, il vettore opposto è lo stesso vettore cambiato di verso. Si conclude che lo schema corretto per la differenza **a** – **b** è l'1: la risposta esatta è la A.

9 **Siano date tre forze $\neq 0$, complanari, tutte e tre applicate all'origine di un sistema piano di assi cartesiani ortogonali, tutte e tre giacenti nel primo quadrante. Per quali dei seguenti valori dei moduli può essere nulla la loro risultante?**

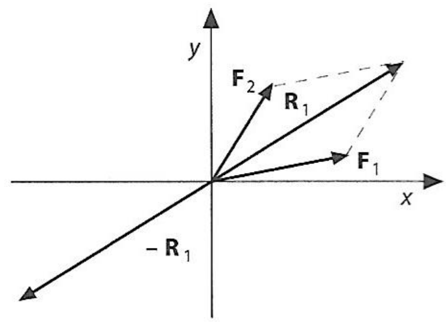
A Mai, qualsiasi siano i valori di F_1, di F_2 e di F_3

B $F_1 = 3;\ F_2 = 4;\ F_3 = 5$

C $F_1 = 1;\ F_2 = 7;\ F_3 = 13$

D $F_1 = 0{,}5;\ F_2 = 0{,}5;\ F_3 = 1$

E $F_1 = 1;\ F_2 = 2;\ F_3 = 4$



Si osserva anzitutto che non serve conoscere le proprietà delle forze per risolvere questo esercizio. È sufficiente trattare $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ed $\mathbf{F}_3$ come vettori qualsiasi.
Si può iniziare il ragionamento considerando i primi due vettori ($\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$), senza perdere di generalità. Entrambi tali vettori sono non nulli e appartenenti al primo quadrante, dunque la somma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{R}_1$ deve anch'essa appartenere al primo quadrante.
L'unico modo di *bilanciare* (ovvero annullare) una forza $\mathbf{R}_1$ giacente nel primo quadrante è sommarla a una uguale e opposta $-\mathbf{R}_1$, che dovrebbe dunque appartenere al terzo quadrante. Ma per ipotesi, tutti e tre i vettori dati nel problema appartengono al primo quadrante.

Si conclude che tali vettori non possono mai dare luogo a una risultante nulla (risposta A).

10 **Data la misura della lunghezza di un circuito in chilometri, si riconoscano tra le seguenti le dimensioni dell'errore assoluto e dell'errore relativo della misura.**

A [L]; [L]

B [L]; $[L]^2$

C Adimensionale; [L]

D [L]; adimensionale

E Sono entrambe grandezze adimensionali

Per ricavare le dimensioni dell'errore assoluto di una misura si utilizza la definizione.

Supponendo che la misura del circuito sia per esempio la media di una serie di misure, e ricordando che dividere per un numero non cambia le dimensioni:

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \Rightarrow [\varepsilon] = [x_{max} - x_{min}] = [x] = [L]$$

L'errore assoluto ha sempre le dimensioni della misura a cui è associato.

L'errore relativo è definito come $\varepsilon_r = \varepsilon / X$, dove X è la misura. Essendo il rapporto di due grandezze con le stesse dimensioni, ε_r è una grandezza adimensionale. In questo caso:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{X} \Rightarrow [\varepsilon_r] = \frac{[L]}{[L]} = 1$$

La risposta corretta è pertanto la D.

11 **La misura della massa di un corpo è (20,0 ± 0,5) mg. Quanto vale l'errore percentuale?**

- A 0,5%
- B 2,5%
- C 5,0%
- D 25%
- E 50%

Quando la misura di una grandezza è indicata nella forma $(M \pm \varepsilon)$, M rappresenta il valore medio di più misure, mentre ε indica l'errore assoluto associato a M. Si definiscono errore relativo ε_r ed errore percentuale $\varepsilon_{\%}$ le due quantità:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{M} \qquad \varepsilon_{\%} = \frac{\varepsilon}{M} \cdot 100\%$$

Sostituendo i valori, si ottiene: $\varepsilon_{\%} = \dfrac{0{,}5 \text{ mg}}{20 \text{ mg}} \cdot 100\% = 2{,}5\,\%$.

La risposta esatta è quindi la B.

12 **Misurando la larghezza *l* e l'altezza *h* di un tavolo si trovano i seguenti valori:**

$$l = (180 \pm 0{,}2) \text{ cm} \quad \text{e} \quad h = (80 \pm 0{,}1) \text{ cm}$$

Dire quale delle due misure è più precisa.

- A *l*
- B *h*
- C Hanno la stessa precisione
- D Per rispondere occorre conoscere gli errori assoluti
- E Per rispondere occorre conoscere gli errori sistematici

La grandezza che esprime la precisione di una misura è il suo errore relativo (o anche l'errore percentuale). Per le due misure in esame si ha:

$$\varepsilon_{r,l} = \frac{0{,}2}{180} = 0{,}0011 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{\%} = 0{,}11\%; \quad \varepsilon_{r,h} = \frac{0{,}1}{80} = 0{,}0013 \;\Rightarrow\; \varepsilon_{\%} = 0{,}13\%$$

Essendo $\varepsilon_{r,l} < \varepsilon_{r,h}$ si conclude che la misura della larghezza del tavolo è più precisa della misura dell'altezza (risposta A).

Si noti che non sempre errore assoluto più piccolo significa misura più precisa!