8 | Funzioni

Per introdurre il concetto di funzione è utile ricordare le definizioni di corrispondenza univoca fra insiemi (§ 1.1.3).

8.1 | Definizione di funzione

Lo studio di diversi fenomeni della natura e la risoluzione di svariati problemi tecnici e matematici porta a considerare alcune grandezze **variabili** (convenzionalmente indicate in matematica con le lettere x, y, z...) e altre grandezze **costanti** (convenzionalmente indicate in matematica con le lettere a, b, c...). In molti casi, la variazione di una grandezza (sia essa un tempo, una lunghezza, una superficie, una temperatura...) è legata alla variazione di un'altra grandezza.

La lunghezza di una circonferenza y è legata alla lunghezza del raggio x dalla seguente formula:

$$y = 2\pi x$$

In questi casi, ossia quando la variazione della grandezza y è legata alla variazione della grandezza x, si dice che y è **funzione** della variabile x.

Una funzione è quindi una relazione che lega due grandezze variabili in modo che, assegnati valori arbitrari a una di esse (variabile indipendente)**, risultino univocamente determinati i corrispondenti valori dell'altra** (variabile dipendente)**.**

In pratica il concetto di funzione coincide con quello di **corrispondenza univoca**: la definizione corretta di funzione è infatti la seguente.

Dati due insiemi non vuoti X e Y, si chiama **funzione** (o **applicazione**) da X in Y una qualsiasi legge che fa corrispondere a **ogni** elemento x di X **uno e un solo** elemento y di Y: quest'ultimo elemento y viene detto **immagine** di x.

Le notazioni più utilizzate per indicare una funzione da X in Y sono le seguenti:

$$y = f(x)\,; \quad f\!:\mathrm{X} \to \mathrm{Y}\,; \quad \mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y}$$

Una funzione è rappresentata da una equazione che stabilisce il legame tra la variabile indipendente (generalmente indicata con x) **e la variabile dipendente** (generalmente indicata con y)**.**

Se l'equazione è risolta rispetto a una delle due variabili (di norma la variabile dipendente y), essa viene detta *in forma esplicita*:

$$y = f(x)$$

Se viceversa tutti i termini si trovano a primo membro, l'equazione viene detta *in forma implicita*:

$$F(x, y) = 0$$

Si utilizzano inoltre le seguenti notazioni:

- la variabile $x \in \mathrm{X}$ è convenzionalmente detta **variabile indipendente**;
- la variabile $y \in \mathrm{Y}$ è convenzionalmente detta **variabile dipendente**;
- l'insieme X è detto **dominio** (o **campo di esistenza**) della funzione;
- l'insieme $f(\mathrm{X})$ è l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di X, viene detto **codominio** (o **immagine** del dominio) e potrebbe non coincidere con l'intero insieme Y: $f(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Y}$.

MATEMATICA

8.1.1 | Funzioni suriettive, iniettive e biettive

Una funzione da X in Y si dice **suriettiva** quando **ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X.**

In simboli:

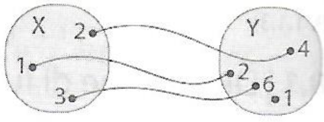
$$f(X) = Y$$

Infatti, ogni elemento di Y non è necessariamente l'immagine di un elemento di X: vi può essere un elemento di Y che non è immagine di alcun elemento di X.

Si considerino i due insiemi $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 4, 6\}$ e la funzione:

$$y = 2x$$

allora $f(X) = \{2, 4, 6\}$: si tratta quindi di un sottoinsieme proprio di Y e la funzione **non** è suriettiva.



Una funzione da X in Y si dice **iniettiva** se **a elementi distinti di X fa corrispondere elementi distinti di Y.**

In simboli:

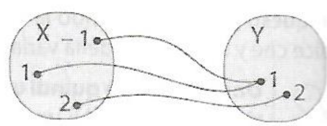
$$\text{se } x_1 \neq x_2 \text{ allora } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Infatti, un elemento di $f(X)$ potrebbe essere l'immagine di più di un elemento di X.

Sia $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$ e:

$$y = |x|$$

allora $f(X) = \{1, 2\}$ e l'elemento $y = 1$ è immagine di due elementi distinti di X (ossia $x = 1$ e $x = -1$) e la funzione **non** è inettiva.



Una funzione da X in Y che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva** si dice **biettiva** o **biunivoca.**

8.1.2 | Campo di esistenza

Il campo di esistenza (o **dominio**) di una funzione **è l'insieme dei valori della variabile indipendente per cui la funzione risulta definita.**

Nel seguito si riportano i campi di esistenza per le principali tipologie di funzioni.

1. **Funzioni razionali intere**: esistono per ogni valore reale della x.

   $y = x + 2$: esiste per ogni $x \rightarrow$ C.E.: $\mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali)

2. **Funzioni razionali frazionarie**: il denominatore deve essere diverso da zero.

   $y = \dfrac{x+3}{x+2}$: esiste per $x \neq -2 \rightarrow$ C.E.: $x \neq -2$

3. **Funzioni irrazionali**: se l'indice di radice è pari, il radicando deve essere non negativo.

   $y = \sqrt{x+2}$: esiste per $x \geq -2 \rightarrow$ C.E.: $x \geq -2$

4. **Funzioni trascendenti:** si distinguono diversi casi.

   4.1 Esponenziali: esistono per ogni valore della x.

   4.2 Logaritmiche: l'argomento dei logaritmi deve essere positivo.

   4.3 Trigonometriche: verranno definite nel § 9.2.

   - $y = 3^x$ esiste per ogni $x \rightarrow$ C.E.: $\mathbb{R}$
   - $y = \log(x+2)$ esiste per $x > -2 \rightarrow$ C.E.: $x > -2$

Trovare il campo di esistenza di una funzione significa in generale risolvere una disequazione (o un sistema di disequazioni).

- $y = \sqrt{x+1} \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow$ C.E.: $x \geq -1$
- $y = \log(x-1) \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow$ C.E.: $x > 1$

È chiaro che si possono presentare delle combinazioni dei casi visti: in questi casi si deve ricorrere a **sistemi di disequazioni**.

$$y = \frac{\log(x+3)}{x-4} \cdot \sqrt{x-7} \rightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x-4 \neq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x \neq 4 \\ x \geq 7 \end{cases} \rightarrow \text{C.E.: } x \geq 7$$

8.1.3 | Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione f viene detta **crescente** se, comunque scelti due elementi x_1 e x_2 (appartenenti al dominio della funzione f) con $x_1 < x_2$, si ha:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

In altre parole, al crescere di x cresce anche il valore di $f(x)$.

Per esempio, la funzione $y = 5x$ è crescente:

$$2 < 3 \rightarrow f(2) < f(3) \quad \text{infatti: } f(2) = 10 < f(3) = 15$$

Una funzione f viene invece detta **decrescente** se, comunque scelti due elementi x_1 e x_2 (appartenenti al dominio della funzione f) con $x_1 < x_2$, si ha:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

In altre parole, al crescere di x decresce il valore di $f(x)$.

8.1.4 | Funzioni pari e dispari

Una funzione f viene detta **pari** se, comunque scelto un elemento x (appartenente al dominio di f) si ha:

$$f(x) = f(-x)$$

Per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è una funzione pari:

$$f(4) = f(-4) = 16$$

Una funzione f viene invece detta **dispari** se si ha:

$$f(-x) = -f(x)$$

Per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è una funzione dispari:

$$f(-4) = -f(4) = -64$$

8.1.5 | Massimi e minimi

Si definisce **massimo** (o **minimo**) assoluto di una funzione f il **più grande** (o il **più piccolo**) dei valori che essa assume. In altre parole la funzione f ha un massimo assoluto se esiste un valore x_1 (appartenente al dominio di f) tale che comunque scelto un elemento x (sempre appartenente al dominio di f) si abbia:

$$f(x_1) \geq f(x)$$

e ha un minimo assoluto se esiste un valore x_2 (appartenente al dominio di f) tale che:

$$f(x_2) \leq f(x)$$

Per esempio, la funzione $y = -x^2 + 5x - 4$ (parabola con concavità rivolta verso il basso) ha un massimo in corrispondenza del vertice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

MATEMATICA

8.2 | Rappresentazione grafica delle funzioni

Come si è visto, una qualsiasi funzione stabilisce un legame tra la variabile indipendente (generalmente indicata con x) e la variabile dipendente (generalmente indicata con y) espressa in termini algebrici attraverso un'equazione: tramite le coordinate cartesiane (§ 7.1) è possibile anche *rappresentare graficamente* le funzioni. Si consideri la funzione:

$$y = f(x)$$

per ogni valore della variabile indipendente x è possibile calcolare il corrispondente valore della variabile dipendente y: qualsiasi coppia di valori (x, y), ossia $(x, f(x))$, così ottenuta è una coppia ordinata di numeri reali e come tale può essere rappresentata in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (in quanto alla coppia ordinata corrisponde uno e un solo punto del piano).

Rappresentando sul piano cartesiano tutti i possibili punti $(x, f(x))$ si ottiene una **curva** che prende il nome di **diagramma** (o **grafico**) **della funzione.** Ogni funzione del tipo $y = f(x)$ può quindi essere rappresentata graficamente nel piano cartesiano.

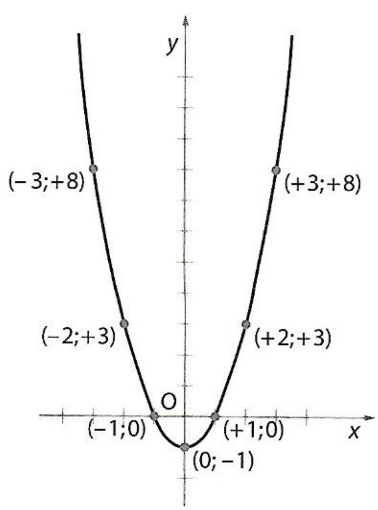
Infatti si consideri la funzione:

$$y = x^2 - 1$$

scegliendo arbitrariamente alcuni valori di x si possono ricavare i corrispondenti valori di y e quindi determinare le seguenti coppie di coordinate:

per $x = -3$	si ha $y = +8$	ossia il punto $(-3; +8)$;
per $x = -2$	si ha $y = +3$	ossia il punto $(-2; +3)$;
per $x = -1$	si ha $y = 0$	ossia il punto $(-1; 0)$;
per $x = 0$	si ha $y = -1$	ossia il punto $(0; -1)$;
per $x = +1$	si ha $y = 0$	ossia il punto $(+1; 0)$;
per $x = +2$	si ha $y = +3$	ossia il punto $(+2; +3)$;
per $x = +3$	si ha $y = +8$	ossia il punto $(+3; +8)$.

Riportando tali punti sul piano cartesiano e unendoli con una linea continua, si ottiene il grafico della funzione, ossia una parabola.



Ovviamente il grafico di una funzione riflette le caratteristiche algebriche della funzione stessa: per esempio, **il grafico di una funzione pari risulta simmetrico rispetto all'asse delle *y*** (si veda, per esempio, il grafico di $y = x^2$ nel § 8.2.5), mentre **il grafico di una funzione dispari risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi** (si veda, per esempio, il grafico di $y = x^3$ nel § 8.2.5). Similmente i punti di massimo e minimo (assoluti) sono rispettivamente il punto più alto e quello più basso del grafico.

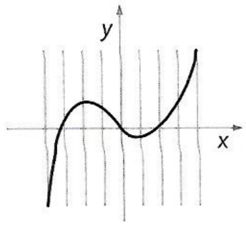
PARTE TERZA

La parabola $y = x^2 - 1$ (rappresentata nel diagramma precedente) è una funzione pari:

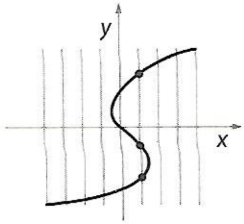
$$f(1) = f(-1) = 0$$
$$f(2) = f(-2) = +3$$
$$f(3) = f(-3) = +8$$

e infatti il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle y.
Inoltre il vertice della parabola $V = (0; -1)$ è anche il minimo assoluto; non esiste invece un massimo in quanto la parabola (con concavità rivolta verso l'alto) non è limitata superiormente.

Inoltre, poiché una funzione è una relazione univoca da X in Y (in quanto fa corrispondere a ogni elemento x di X **uno e un solo** elemento y di Y), **un qualsiasi diagramma rappresenta il grafico di una funzione se e solo se il diagramma è unisecato** (ossia intersecato una sola volta) **dalle rette verticali.**



È una funzione.



Non è una funzione.

8.2.1 | Condizione di appartenenza

Come per le curve algebriche (§ 7.2.1), un punto P di coordinate $(x_0; y_0)$ appartiene al diagramma della funzione $y = f(x)$ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva, ossia se e solo se vale la seguente relazione:

$$y_0 = f(x_0)$$

Il punto $P = (2; 3)$ appartiene alla curva di equazione $y = 2x - 1$ in quanto:

$$3 = 2 \cdot 2 - 1$$

8.2.2 | Intersezione tra curve

Date due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ si consideri un loro (eventuale) punto di intersezione $P = (x_0; y_0)$. Per la condizione di appartenenza, P deve appartenere contemporaneamente a entrambe le curve, ossia soddisfare contemporaneamente entrambe le equazioni; le coordinate del punto P saranno allora le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Le coordinate del punto di intersezione di due curve sono la soluzione del sistema formato dalle equazioni delle due curve.

Gli eventuali punti di intersezione fra le curve di equazione $y = x - 1$ e $y = x^2 - 3x + 2$ si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

In questo modo si perviene alle due soluzioni $(3; 2)$ e $(1; 0)$ che quindi rappresentano le coordinate dei due punti di intersezione fra le curve date.

MATEMATICA

8.2.3 | Intersezioni con gli assi

Trovare le intersezioni con gli assi di una funzione equivale a risolvere il sistema fra l'equazione della funzione stessa e l'equazione di ciascuno degli assi.

L'asse *x* ha equazione $y = 0$. L'asse *y* ha equazione $x = 0$.

Trovare le intersezioni della curva di equazione $y = f(x)$ con l'asse *x* (ossia trovare i cosiddetti "zeri" della funzione) equivale quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{applicando il metodo del confronto (§ 4.4.4)}} \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per trovare le intersezioni della curva $y = x^2 - 3x + 2$ con l'asse *x* si risolve il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Poiché la prima equazione è un'equazione di secondo grado completa in una sola incognita, la si risolve con la formula risolutiva (§ 4.2.12) ottenendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$: le due intersezioni del grafico della funzione con l'asse *x* sono quindi i punti $(1; 0)$ e $(2; 0)$.

Similmente, trovare l'intersezione della curva $y = f(x)$ con l'asse *y* equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

8.2.4 | Segno di una funzione

Studiare il segno di una funzione $y = f(x)$ significa trovare i valori della variabile indipendente *x* in corrispondenza dei quali la variabile *y* (ossia il valore assunto dalla funzione) risulta positiva, nulla o negativa rispettivamente.

Per studiare il segno di una funzione è sufficiente ricercare i valori della *x* in corrispondenza dei quali la funzione risulta positiva o nulla: in tutti gli altri punti del C.E. la funzione sarà negativa.

In altre parole, per studiare il segno della funzione $y = f(x)$ si risolve la disequazione $f(x) \geq 0$.

Per studiare il segno della funzione $y = x^2 - 3x + 2$ si risolve la disequazione:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Poiché si tratta di una disequazione di secondo grado in una sola incognita, la si risolve (come si è visto nel § 5.1.8) ottenendo $x \leq 1$ e $x \geq 2$: questo è l'insieme dei valori di *x* in corrispondenza dei quali la funzione è positiva o nulla.

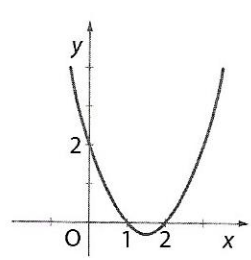
Di conseguenza, la funzione sarà negativa nell'intervallo $1 < x < 2$.

Dal punto di vista grafico lo studio del segno della funzione permette di capire quali sono le zone del piano cartesiano in cui la funzione è positiva (ossia al di sopra dell'asse delle *x*) e quelle in cui è negativa (al di sotto dell'asse *x*): dove la funzione si annulla si avranno le intersezioni con l'asse delle *x* (ossia gli "zeri" della funzione).

Dal precedente esempio si è ricavato che la funzione $y = x^2 - 3x + 2$ è positiva per $x < 1$ e $x > 2$, negativa per $1 < x < 2$ e nulla per $x = 1$ e $x = 2$ (questi ultimi sono quindi gli "zeri" della funzione).

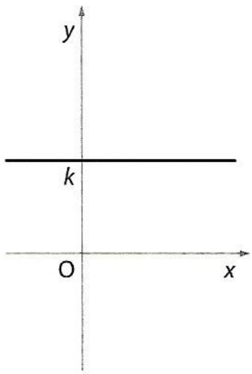
Inoltre è facile ricavare che l'intersezione con l'asse delle *y* ha coordinate $(0; 2)$.

In effetti, il grafico della funzione $y = x^2 - 3x + 2$ è riportato a lato.

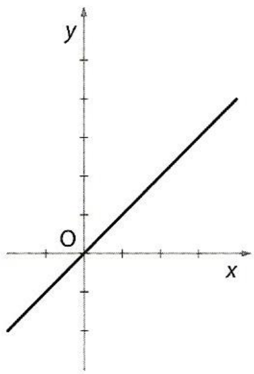


PARTE TERZA

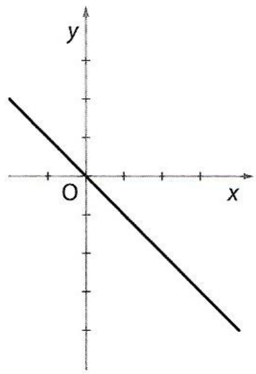
8.2.5 | Grafici di alcune funzioni notevoli



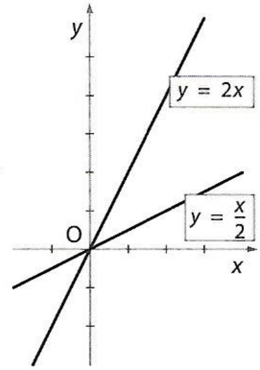
$y = k$ (k costante)



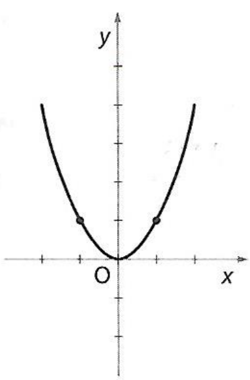
$y = x$



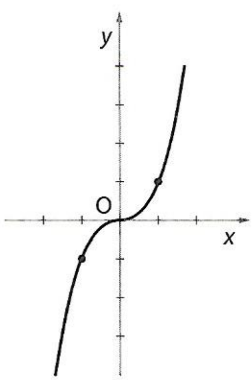
$y = -x$



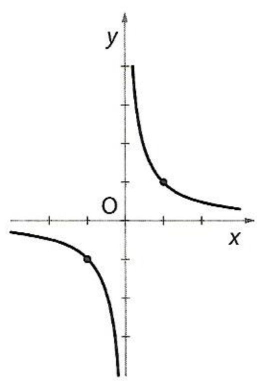
$y = 2x$ e $y = \frac{x}{2}$



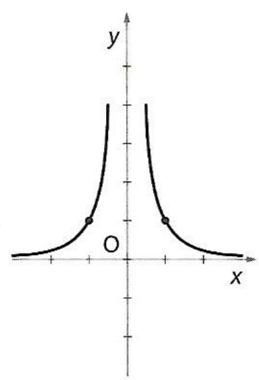
$y = x^2$



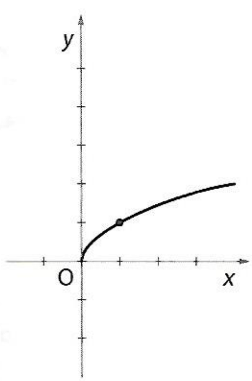
$y = x^3$



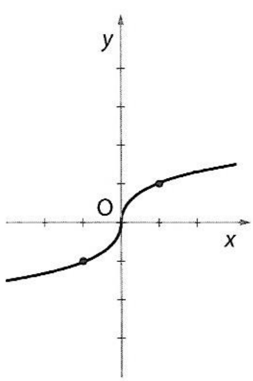
$y = \frac{1}{x}$



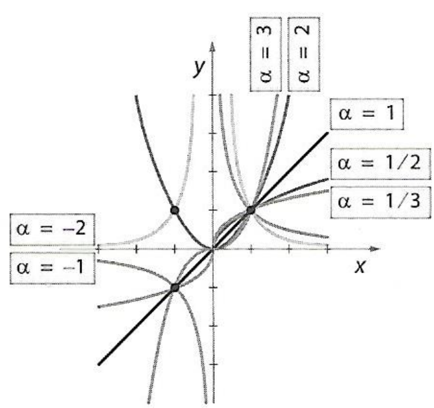
$y = \frac{1}{x^2}$



$y = \sqrt[2]{x}$

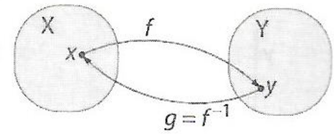


$y = \sqrt[3]{x}$



$y = x^{\alpha}$

8.2.6 | Funzione inversa



Si consideri una funzione $y = f(x)$ **biunivoca** da X in Y: a ogni elemento di X corrisponde uno e un solo elemento di Y e, viceversa, a ogni elemento di Y corrisponde uno e un solo elemento di X. Perciò, se con la funzione *f* si "passa" dall'elemento *x* di X all'elemento $y = f(x)$ di Y, esiste anche una funzione *g* (da Y in X) che dall'elemento *y* fa "ritornare" a *x*: in simboli $x = g(y)$.

La funzione *g* prende il nome di **inversa** della funzione *f* e viene indicata con f^{-1}. La funzione *f* viene invece detta **invertibile**.

Data un funzione *f* (*x*), per determinare l'espressione analitica della sua funzione inversa, si esplicita la *x* in funzione della *y* e si scambiano poi le variabili.

$$y = 2x \;\rightarrow\; x = \frac{y}{2} \xrightarrow{\text{scambiando le variabili}} y = \frac{x}{2}$$

$$y = x^n \;\rightarrow\; x = \sqrt[n]{y} \xrightarrow{\text{scambiando le variabili}} y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = a^x \;\rightarrow\; x = \log_a y \xrightarrow{\text{scambiando le variabili}} y = \log_a x$$

Condizione **necessaria e sufficiente** affinché una funzione sia invertibile è che essa sia **biunivoca.**

La precedente condizione può essere anche "tradotta" in termini grafici.

Condizione **necessaria e sufficiente** affinché una funzione sia invertibile è che **il suo grafico sia unisecato** (ossia intersecato una sola volta) **dalle rette orizzontali.**

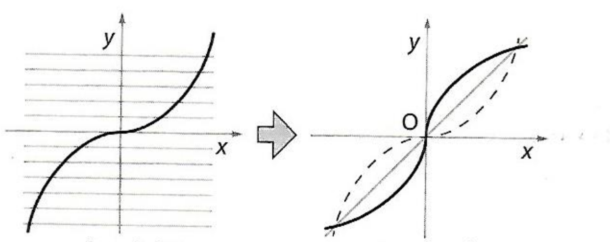


grafico di *f* (*x*) grafico di f^{-1} (*x*)

Infatti, nel riferimento cartesiano, il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene da quello della *f* mediante una **simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.**

In effetti, riguardando i grafici del § 8.2.5, è possibile osservare, per esempio, che i grafici della funzione $y = x^3$ e della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ sono simmetrici (rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante).

Condizione sufficiente (ma **non necessaria**) per l'invertibilità è che la funzione sia **monotóna**, ossia sempre crescente oppure sempre decrescente.

8.2.7 | Curva esponenziale

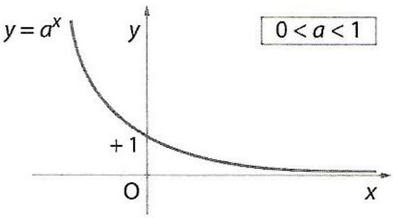
La **curva esponenziale** è il diagramma della funzione $y = a^x$ (con $a > 0$ e $a \neq 1$).

Prima di tracciarne il grafico è utile ricordare alcune osservazioni (basate anche su quanto visto riguardo le potenze nel § 1.6).

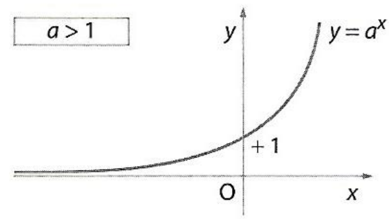
La funzione esponenziale è definita per ogni valore di *x* ed è sempre positiva, quindi non si annulla mai. Essendo $a^0 = 1$ si ha che **la curva esponenziale sicuramente passa per il punto $(0; 1)$.**

A questo punto è possibile enunciare l'ultima osservazione sulla curva esponenziale.

La curva esponenziale $y = a^x$ è una curva **decrescente se $0 < a < 1$, crescente se $a > 1$.**



Se $0 < a < 1$ la curva è decrescente



Se $a > 1$ la curva è crescente

$2 < 3 \rightarrow (1/5)^2 > (1/5)^3$

$2 < 3 \rightarrow 5^2 < 5^3$

8.2.8 | Curva logaritmica

La **curva logaritmica** è il diagramma della funzione $y = \log_a x$ (con $a > 0, a \neq 1$ e $x > 0$).

Anche in questo caso, prima di tracciarne il grafico è utile fare alcune osservazioni (basate anche su quanto visto nel § 6.1 e nel § 6.2).

La funzione logaritmica è definita solo per i valori positivi della x, quindi non esiste per $x \leq 0$.

In altre parole, il dominio (o campo di esistenza, § 8.1.2) della funzione logaritmica è C.E.: $x > 0$.

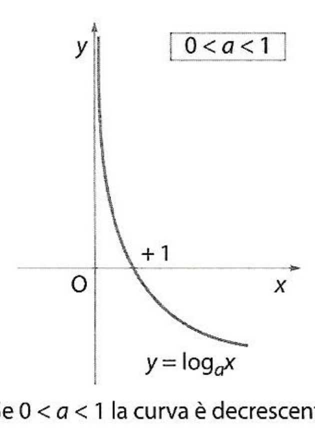
Ricordando che **il logaritmo dell'unità è sempre nullo, qualsiasi sia la base**, e che **il logaritmo della base è sempre uguale all'unità**, si ha la seguente osservazione.

Essendo $\log_a 1 = 0$ si ha che **la curva logaritmica sicuramente passa per il punto $(1; 0)$**.

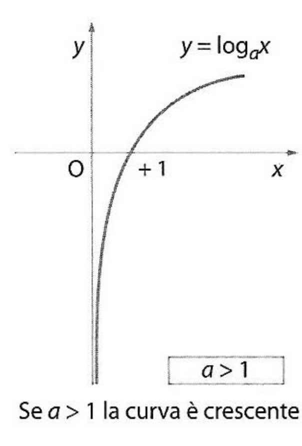
Essendo $\log_a a = 1$ si ha che **la curva logaritmica sicuramente passa per il punto $(a; 1)$**.

Infine, ricordando le definizioni di curva crescente e decrescente viste nel § 8.1.3, si ha la seguente osservazione.

La curva logaritmica $y = \log_a x$ è una curva **decrescente se $0 < a < 1$, crescente se $a > 1$.**



Se $0 < a < 1$ la curva è decrescente



Se $a > 1$ la curva è crescente

$2 < 3 \rightarrow \log_{1/5} 2 > \log_{1/5} 3$

$2 < 3 \rightarrow \log_5 2 < \log_5 3$

È facile osservare che le curve esponenziale e logaritmica sono simmetriche (rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante) in quanto le due funzioni sono l'una l'inverso dell'altra.

MATEMATICA

Quesiti svolti

1 Data una funzione $f(x)$ tale che $f(x+1) = \dfrac{2f(x)+2}{2}$ e $f(1) = 2$, quanto vale $f(2)$?

A 3
B 0
C 1/2
D 2
E 1

La funzione data, semplificando per 2, equivale a:

$$f(x+1) = f(x) + 1 .$$

Per trovare quanto vale $f(2)$ si pone $x = 1$ ottenendo:

$$f(1+1) = f(1) + 1$$

ossia:

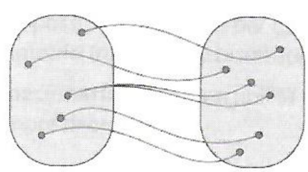
$$f(2) = f(1) + 1$$

quindi, essendo $f(1) = 2$, si ricava:

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

Si conclude quindi che la risposta esatta è la A.

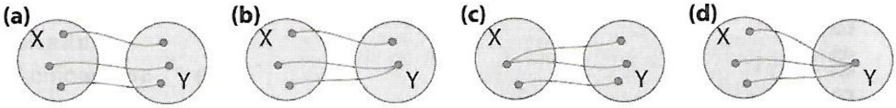
2 La relazione rappresentata dal seguente diagramma:



A non è una funzione
B è una funzione iniettiva
C è una funzione biiettiva
D nessuna delle altre risposte è corretta
E è una funzione suriettiva

La risposta esatta è la A in quanto dal diagramma si nota che esiste un elemento dell'insieme di partenza che ha due immagini distinte nell'insieme di arrivo e ciò contraddice la definizione stessa di funzione.

3 **Quattro relazioni tra gli elementi di due insiemi X e Y sono rappresentate dai seguenti diagrammi:**



A sono tutte funzioni
B (c) e (d) non sono funzioni
C (a) e (b) sono funzioni biettive
D (b) e (d) sono funzioni suriettive ma non iniettive
E nessuna delle precedenti

Le relazioni rappresentate non sono tutte delle funzioni, perché la (c) non associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y e quindi non è una funzione. La relazione (a) è l'unica funzione biettiva fra quelle rappresentate. Le funzioni (b) e (d) sono suriettive perché ad ogni elemento di Y corrisponde un elemento di X; ma non sono iniettive perché ad elementi distinti di X non corrispondono elementi distinti di Y. La risposta corretta è quindi la D.

4 **Determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{x-1}$.**

A $x > 0$
B $x \geq 1$
C $x \leq 2$
D $x > 1$
E $x > -1$

Il procedimento da seguire per determinare il dominio di una funzione è quello già visto per determinare il campo di esistenza delle espressioni frazionarie o irrazionali. Nel quesito proposto, il radicando deve essere positivo o nullo, quindi:

$$x - 1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 1 \quad \text{(risposta B)}$$

5 **La funzione $y = \dfrac{x^4}{4}$ è:**

A crescente
B decrescente
C pari
D dispari
E nessuna delle precedenti

La risposta corretta è la C, infatti:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{4} = \frac{x^4}{4} = f(x)$$

Si noti che la funzione proposta non è né monotóna crescente, né monotóna decrescente. Per mostrarlo, è sufficiente trovare opportuni controesempi.

Per mostrare che la funzione non è monotóna crescente si scelgono x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$ (per esempio $x_1 = -3$ e $x_2 = -2$) e si verifica se $f(x_1) < f(x_2)$: essendo $f(-3) = +81/4 > f(-2) = +4$, la funzione non è monotóna crescente.

Similmente, per mostrare che la funzione non è monotóna decrescente si scelgono x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$ (per esempio $x_1 = +2$ e $x_2 = +3$) e si verifica se $f(x_1) > f(x_2)$: essendo $f(+2) = +4 < f(+3) = +81/4$, la funzione non è monotóna decrescente.

MATEMATICA

6 **Il campo di esistenza della funzione log $\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ è:**

A $x \neq -1$

B $x > -1$

C $x > -1$ e $x \neq 1$

D $x < -1$

E l'insieme $\mathbb{R}$

Affinché la funzione esista è necessario che l'argomento del logaritmo sia positivo:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} > 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1} > 0$$

poiché a numeratore vi è un quadrato che è sempre non negativo, il segno della frazione algebrica dipende dal segno del denominatore e quindi essa risulta non negativa per $x > -1$ a cui va unita la condizione $x \neq 1$ per far sì che non si annulli il numeratore (risposta C).

7 **Date le funzioni reali nella variabile x:**

$$f(x) = x^3 - 1 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$$

si può affermare che:

A il dominio è $\mathbb{R}$ per tutte le funzioni

B il codominio è $\mathbb{R}$ per tutte le funzioni

C le funzioni $g(x)$ e $h(x)$ non sono iniettive

D le funzioni $f(x)$ e $h(x)$ sono iniettive

E il dominio è lo stesso per tutte le funzioni

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite su $\mathbb{R}$, mentre $h(x)$ è definita per $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \geq \sqrt{2}$.

Le funzioni $g(x)$ e $h(x)$ hanno immagini soltanto positive, quindi il loro codominio non è $\mathbb{R}$.

Le stesse funzioni non sono iniettive perché ciascun valore positivo di y può essere immagine di due valori distinti di x, per esempio:

$$g(1) = g(-1) = 1 \qquad \text{perché: } 1^2 = 1 \text{ e } (-1)^2 = 1$$

$$h(2) = h(-2) = \sqrt{2} \qquad \text{perché: } \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2} \text{ e } \sqrt{(-2)^2 - 2} = \sqrt{2}$$

La risposta esatta è pertanto la C.

8 **Quale tra le seguenti affermazioni è sbagliata?**

A Tutte le funzioni ammettono la funzione inversa

B Una funzione dispari è simmetrica rispetto all'origine

C Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse delle y

D Alcune relazioni sono funzioni

E La funzione logaritmica è iniettiva

La risposta esatta è la A in quanto una funzione ammette inversa se e solo se essa è biunivoca.

9 **Il logaritmo in base 5 di 24:**

A è compreso tra 1 e 2
B è compreso tra 2 e 3
C non esiste
D è compreso tra – 1 e 1
E è uguale a 24/5

Il numero 24 non è una potenza intera di 5, quindi il logaritmo in base 5 di 24 non potrà essere un numero intero. È sufficiente però osservare che:

$$5 < 24 < 25$$

e quindi:

$$5^1 < 24 < 5^2$$

A questo punto, calcolando il logaritmo in base 5 (funzione **crescente** dell'argomento) della precedente relazione si ricava:

$$\log_5 5 = 1 < \log_5 24 < \log_5 5^2 = 2 \cdot \log_5 5 = 2$$

per cui $1 < \log_5 24 < 2$ (risposta A).

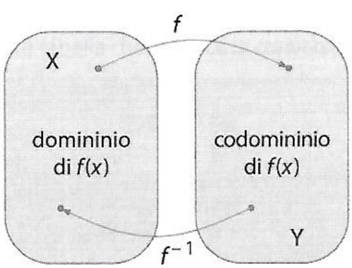
10 **Data una funzione $y = f(x)$ è sempre vero che:**

A la funzione reciproca ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$
B la funzione inversa ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$
C la funzione inversa è data da $y = \dfrac{1}{f(x)}$
D la funzione inversa è data da $y = -f(x)$
E la funzione reciproca è data da $y = \dfrac{1}{f(x)}$

La risposta esatta è la E, per la definizione stessa di funzione reciproca.

La risposta A è errata; se la funzione $f(x)$ interseca l'asse delle x in almeno un punto del suo dominio, in tale punto la funzione reciproca $y = \dfrac{1}{f(x)}$ non è definita, poiché si annulla il denominatore.

La risposta B è errata poiché il dominio della funzione inversa di $f(x)$, coincide con il codominio della funzione $f(x)$:



La risposta C è errata in quanto la funzione inversa di $f(x)$ indicata con $y = f^{-1}(x)$, non corrisponde a $y = [f(x)]^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$. Infine, la risposta D è errata poiché la funzione $y = -f(x)$ è l'opposta della funzione $y = f(x)$, non l'inversa che, come già precisato, è $y = f^{-1}(x)$.

MATEMATICA

11 L'ordinamento corretto fra i numeri 2^{500}, 5^{300} e 10^{100} è il seguente:

A $5^{300} < 10^{100} < 2^{500}$

B $10^{100} < 2^{500} < 5^{300}$

C $10^{100} < 5^{300} < 2^{500}$

D $2^{500} < 5^{300} < 10^{100}$

E $5^{300} < 2^{500} < 10^{100}$

Per determinare il corretto ordinamento dei tre valori proposti non è necessario calcolarli esplicitamente: è sufficiente osservare che, in tutti i casi, si tratta di potenze con base maggiore di uno. Dal momento che la funzione potenza, nel caso in cui la base sia maggiore di uno, è crescente, basta scrivere i tre valori proposti come potenze aventi lo stesso esponente. Essendo M.C.D.(500, 300, 100) = 100, si ha:

$$2^{500} = (2^5)^{100}; \qquad 5^{300} = (5^3)^{100}; \qquad 10^{100} = 10^{100}$$

Dato che:

$$10 < 2^5 < 5^3 \rightarrow 10^{100} < (2^5)^{100} < (5^3)^{100}$$

la risposta corretta è la B.

PARTE TERZA