6 | Logaritmi ed esponenziali

Per introdurre i logaritmi è opportuno iniziare dalla definizione di equazione esponenziale.

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita compare all'esponente.

Indicati con a e b due numeri reali, l'equazione esponenziale *elementare* assume la forma:

$$a^x = b$$

La risoluzione consiste, quando ciò è possibile, nel trasformare b (il secondo membro) in una potenza di a (la base della potenza al primo membro), per poi trasformare l'uguaglianza fra potenze in una uguaglianza fra esponenti.

- $2^x = 1 \xrightarrow{\text{può essere riscritta nella forma}} 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$
- $5^x = \dfrac{1}{25} \xrightarrow{\text{può essere riscritta nella forma}} 5^x = 5^{-2} \rightarrow x = -2$
- $4^x = 8 \xrightarrow{\text{può essere riscritta nella forma}} 2^{2x} = 2^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = 3/2$
- $3^x = \sqrt[3]{9} \xrightarrow{\text{può essere riscritta nella forma}} 3^x = 9^{1/3} \rightarrow 3^x = 3^{2/3} \rightarrow x = 2/3$

La soluzione di un'equazione esponenziale elementare esiste ed è unica se e solo se sono verificate le tre condizioni: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Talvolta (come nel caso dell'equazione $2^x = 5$) non è possibile trasformare b in una potenza di a e l'equazione $a^x = b$ non sarebbe risolubile: è necessario utilizzare il concetto di logaritmo.

MATEMATICA

6.1 | Definizione di logaritmo

Data l'equazione esponenziale elementare $a^x = b$, si introduce la seguente definizione.

Dati due numeri positivi a e b (con $a \neq 1$), **si chiama logaritmo in base a del numero b** (detto anche *argomento*) **l'esponente da attribuire alla base a per ottenere il numero b.**

In simboli:

$$x = \log_a b \text{ se e solo se } a^x = b$$

- $\log_2 4 = 2 \leftrightarrow 2^2 = 4$
- $\log_3 81 = 4 \leftrightarrow 3^4 = 81$
- $\log_{1/2} 2 = -1 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \leftrightarrow (3)^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Per la definizione precedente si può allora "risolvere" l'equazione $2^x = 5$, la cui soluzione è quindi $x = \log_2 5$: in realtà, l'introduzione del logaritmo non consente di risolvere in senso stretto l'equazione (ossia ricavare il valore numerico della radice), ma solo di scriverne la soluzione in forma esplicita utilizzando la nuova simbologia.

Dalla definizione di logaritmo derivano le seguenti proprietà.

Il logaritmo in base a dell'argomento b esiste se e solo se sono verificate le tre condizioni: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. In particolare, **il logaritmo di un numero negativo non esiste nell'insieme dei numeri reali.**

Per esempio, se esistesse il logaritmo in base 2 del numero – 4 si avrebbe la seguente equazione esponenziale:

$$\log_2(-4) = x \leftrightarrow 2^x = -4$$

la quale è assurda in quanto la potenza di un numero positivo, qualsiasi sia l'esponente, non è mai negativa.

Il logaritmo dell'unità è sempre nullo, qualsiasi sia la base: $\log_a 1 = 0 \leftrightarrow a^0 = 1$

Il logaritmo della base è sempre uguale all'unità: $\log_a a = 1 \leftrightarrow a^1 = a$

- $\log_2 1 = 0 \leftrightarrow 2^0 = 1$
- $\log_5 1 = 0 \leftrightarrow 5^0 = 1$
- $\log_2 2 = 1 \leftrightarrow 2^1 = 2$
- $\log_5 5 = 1 \leftrightarrow 5^1 = 5$

6.2 | Segno del logaritmo

Se $a > 1$, il logaritmo di un numero positivo minore di 1 è negativo, mentre quello di un numero positivo maggiore di 1 è positivo.
Se $0 < a < 1$, il logaritmo di un numero positivo minore di 1 è positivo, mentre quello di un numero positivo maggiore di 1 è negativo.

- $\log_2 16 = 4$
- $\log_{1/2} 4 = -2$
- $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
- $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$

6.3 | Teoremi sui logaritmi

Il logaritmo del prodotto di due o più numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza fra il logaritmo del numeratore e quello del denominatore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza:

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Il logaritmo della radice di un numero positivo è uguale al prodotto del reciproco dell'indice per il logaritmo del radicando:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

PARTE TERZA

Combinando gli ultimi due teoremi si ha:

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a b$$

- $\log_a(3 \cdot 2) = \log_a 3 + \log_a 2$
- $\log_a(3/2) = \log_a 3 - \log_a 2$
- $\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \cdot \log_a 2$
- $\log_a \sqrt{3} = \log_a 3^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \log_a 3$

6.4 | Sistemi di logaritmi maggiormente utilizzati

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali positivi, rispetto alla stessa base *a*, prende il nome di *sistema dei logaritmi in base a*.

Esistono quindi infiniti sistemi di logaritmi, poiché infinite sono le possibili basi (ossia tutti i numeri *positivi* e *diversi da uno*).

6.4.1 | Logaritmi decimali e logaritmi naturali

Tra gli infiniti sistemi di logaritmi, due sono quelli maggiormente utilizzati: i *logaritmi decimali* e i *logaritmi naturali*.

I **logaritmi decimali** hanno come base il numero 10 e si indicano nella forma[1]:

$$\text{Log}\, x \quad \text{equivalente a:} \quad \log_{10} x$$

I **logaritmi naturali** (o **neperiani**) hanno come base un numero irrazionale (detto appunto numero di Nepero o di Eulero) indicato con la lettera *e*, il cui valore approssimato è:

$$e = 2{,}71828\ldots$$

I logaritmi naturali si indicano nella forma[2]:

$$\ln x \quad \text{equivalente a:} \quad \log_e x$$

6.4.2 | Passaggio da un sistema di logaritmi a un altro

Si supponga di conoscere il logaritmo in base *a* di un numero positivo *b* e di voler calcolare, dello stesso numero *b*, il logaritmo in un'altra base *c*. Si ponga $\log_c b = x$ da cui:

$$c^x = b$$

Si calcoli il logaritmo in base *a* di quest'ultima espressione:

$$\log_a c^x = \log_a b \rightarrow x\log_a c = \log_a b \rightarrow x = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

per cui si perviene alla seguente formula:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \qquad [11]$$

La [11] può essere utilizzata per passare dai logaritmi decimali a quelli naturali e viceversa:

$$\ln b = \frac{\text{Log}\, b}{\text{Log}\, e} \quad \text{e} \quad \text{Log}\, b = \frac{\ln b}{\ln 10}$$

1. Per i logaritmi decimali si usa anche la simbologia: log *x*
2. Per i logaritmi naturali si usa anche la simbologia: lg *x*

MATEMATICA

Quesiti svolti

1 Quale di queste espressioni equivale a: ln $y = x$?

- A $x = e^y$
- B $y = 1/x$
- C $y = e^x$
- D $y = x$
- E $y^x = e$

Applicando la definizione di logaritmo e ricordando che "ln" indica "logaritmo in base *e*", si ricava:

$$\ln y = x \;\rightarrow\; y = e^x$$

quindi la risposta corretta è la C.

2 Quanto vale il logaritmo in base 10 della radice quadrata di 10^{-8}?

- A -4
- B 0,8
- C $-10/8$
- D 8
- E 1/16

Occorre conoscere e saper applicare con sicurezza le proprietà delle potenze e i teoremi sui logaritmi:

$$\log_{10}\sqrt{10^{-8}} = \log_{10}(10)^{-\frac{8}{2}} = -\frac{8}{2}\cdot\log_{10}10 = -4\cdot\log_{10}10 = -4$$

La risposta corretta è la A.

3 L'espressione $\log_{a^{1/2}}\left(\frac{1}{a^{2/3}}\right)$:

- A vale 1/3
- B vale $-4/3$
- C è irrazionale
- D ha un valore che dipende da *a*
- E vale 3

Svolgendo l'espressione contenuta nel testo del quesito si ottiene:

$$\log_{a^{1/2}}\left(\frac{1}{a^{2/3}}\right) = \log_{a^{1/2}}a^{-2/3} = -\frac{2}{3}\log_{a^{1/2}}a = -\frac{2}{3}\cdot 2 = -\frac{4}{3}$$

La risposta esatta è la B.

4 **Se $x = e^{-\ln 2}$ si può dire che:**

(A) $x = 2 \log e$

(B) $x = 1/2$

(C) $x = 2$

(D) $x = -2$

(E) nessuna delle precedenti

Conviene intanto ricordare la seguente uguaglianza:

$$a^{\log_a b} = b \quad \rightarrow \quad e^{\ln 2} = 2$$

Per definizione, infatti, ln 2 è l'esponente da attribuire ad e per ottenere 2. Quindi:

$$x = e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

La risposta esatta è dunque la (B).

5 **Il $\log_a b$ è uguale a:**

(A) $\log_b \frac{1}{a}$

(B) $\log_b a - 1$

(C) $(\log_b a)^{-1}$

(D) $-\frac{1}{\log_b a}$

(E) nessuna delle precedenti

Per uno dei teoremi dei logaritmi si può scrivere che: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

In particolare ponendo $c = b$, si ha che:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} = (\log_b a)^{-1}$$

La risposta corretta è la (C).

6 **L'espressione $7^{2+\log_7 x}$ è uguale a:**

(A) $49x$

(B) $7^2 + x$

(C) $49 + \log_7 x$

(D) $49 \log_7 x$

(E) $7x$

Applicando le proprietà delle potenze ($a^{b+c} = a^b \cdot a^c$) e quelle dei logaritmi ($a^{\log_a b} = b$) si ottiene:

$$7^{2+\log_7 x} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 x} = 7^2 \cdot x = 49x$$

quindi la risposta esatta è la (A).

MATEMATICA

7 **Il logaritmo della somma di due numeri log $(a + b)$:**

- **A** è uguale a $\log a + \log b$
- **B** è uguale a $\log a \cdot \log b$
- **C** è minore di zero per $(a + b) < 0$
- **D** è uguale a zero per $a = 1 - b$
- **E** nessuna delle precedenti

La risposta corretta è la **D** in quanto, se $a = 1 - b$ allora $a + b = 1 - b + b = 1$, quindi $\log(a + b) = \log 1 = 0$. Occorre prestare attenzione al fatto che le risposte **A** e **B** potrebbero trarre in inganno a causa della loro somiglianza con la relazione:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

La risposta **C** è infine sicuramente sbagliata in quanto se fosse $(a + b) < 0$ si avrebbe un logaritmo con argomento negativo.

---

8 **Quante delle seguenti uguaglianze sono verificate per ogni numero reale α positivo e diverso da uno?**

$$\log_{2\alpha} \alpha = 1/2; \quad \log_{\sqrt{\alpha}} (1/\alpha) = -2;$$

$$(\log_{\alpha} \alpha^2) \cdot (\log_{\alpha^2} \alpha) = 1; \quad \log_{\alpha} (\alpha/2) = 1/2$$

A Nessuna **B** Una **C** Due **D** Tre **E** Tutte

Essendo α un numero reale positivo e diverso da uno, tutti i logaritmi contenuti nel quesito esistono (per tutti valgono le condizioni di esistenza). Utilizzando la definizione di logaritmo si ricava, per la prima uguaglianza:

$$(2\alpha)^{1/2} = \sqrt{2\alpha} \neq \alpha \ \rightarrow \ \log_{2\alpha} \alpha \neq 1/2$$

la quale risulta quindi **non** verificata.

La seconda uguaglianza è invece verificata, in quanto:

$$(\sqrt{\alpha})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{\alpha})^2} = \frac{1}{\alpha} \ \rightarrow \log_{\sqrt{\alpha}} (1/\alpha) = -2$$

Per la terza uguaglianza occorre analizzare singolarmente ciascuno dei due fattori a primo membro. Per il primo e il secondo fattore si ha rispettivamente:

$$\log_{\alpha} \alpha^2 = 2 \cdot \log_{\alpha} \alpha = 2$$

$$\log_{\alpha^2} \alpha = \log_{\alpha^2} (\alpha^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \log_{\alpha^2} \alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

quindi, considerando il prodotto fra questi due fattori, si ottiene:

$$(\log_{\alpha} \alpha^2) \cdot (\log_{\alpha^2} \alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

quindi anche la terza uguaglianza è verificata.

Infine per la quarta si ha:

$$(\alpha)^{1/2} = \sqrt{\alpha} \neq \alpha/2 \ \rightarrow \ \log_{\alpha} (\alpha/2) \neq 1/2$$

la quale **non** è quindi verificata. Riassumendo, due uguaglianze sono verificate (la seconda e la terza) per cui la risposta corretta è la **C**.

9 **Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log_3(2x+1) < -1$.**

Ⓐ $x < -\frac{2}{3}$

Ⓑ L'insieme vuoto

Ⓒ $x < -\frac{1}{3}$

Ⓓ $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$

Ⓔ $-\frac{1}{2} < x < 0$

Poiché $1 = \log_3 3$, la disequazione data diventa $\log_3(2x+1) < -\log_3 3$ che, applicando le proprietà dei logaritmi, diventa:

$$\log_3(2x+1) < -\log_3 3 \Rightarrow \log_3(2x+1) + \log_3 3 < 0 \Rightarrow \log_3 3(2x+1) < 0$$

Essendo $0 = \log_3 1$, la precedente risulta:

$$\log_3 3(2x+1) < 0 \Rightarrow \log_3 3(2x+1) < \log_3 1$$

Poiché $y = \log_3 x$ è una funzione crescente (essendo la base del logaritmo maggiore di 1, si veda § 8.2.8), la disequazione precedente equivale alla disequazione tra gli argomenti:

$$3(2x+1) < 1 \Rightarrow 6x < -2 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \text{ (risposta Ⓒ)}$$

10 **Quale dei seguenti numeri ha il logaritmo in base 10 strettamente compreso tra 4 e 6?**

Ⓐ $10^2 + 10^4$

Ⓑ -10^{-6}

Ⓒ 1.234.567

Ⓓ $10^8 - 10^4$

Ⓔ -10^5

Per prima cosa si osservi che le alternative Ⓑ ed Ⓔ possono essere scartate, in quanto non esistono logaritmi di numeri negativi.

Per determinare la risposta corretta, si procede nel modo seguente.

In base alle indicazioni del quesito, indicando con x il numero da individuare, si può scrivere:

$$4 < \log_{10} x < 6$$

che, essendo $4 = \log_{10} 10^4$ e $6 = \log_{10} 10^6$, diventa:

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} x < \log_{10} 10^6$$

Poiché $y = \log_{10} x$ è una funzione crescente (essendo la base del logaritmo maggiore di 1, si veda § 8.2.8), la disequazione precedente equivale a quella tra gli argomenti dei logaritmi:

$$10^4 < x < 10^6$$

Dal momento che tra i numeri proposti dalle alternative Ⓐ, Ⓒ e Ⓓ l'unico strettamente compreso tra $10^4 = 10.000$ e $10^6 = 1.000.000$ è $10^2 + 10^4 = 100 + 10.000 = 10.100$, la risposta esatta è la Ⓐ.

MATEMATICA