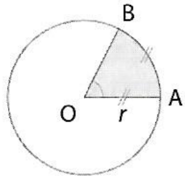
9 | Trigonometria

9.1 | Angoli e loro misura

I più importanti sistemi di misura degli angoli sono il sistema *sessagesimale* e il sistema *circolare*. Quest'ultimo è quello utilizzato dalla trigonometria.

Il sistema **sessagesimale** è il sistema che ha come unità di misura il **grado**, definito come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro (oppure, il che è lo stesso, come la novantesima parte dell'angolo retto).

Il sistema **circolare** è invece il sistema che si basa sulla **misura in radianti** degli angoli. Il sistema circolare utilizza quindi come unità di misura il **radiante**, definito come l'arco di una circonferenza (o come il corrispondente angolo al centro che insiste su un arco) lungo quanto il raggio (si veda la figura riportata a lato).



$\widehat{AB} = \overline{AO}$

All'angolo di 360° corrisponde (nel sistema circolare) l'angolo di 2π, all'angolo di 180° corrisponde l'angolo di π e così via. Per trasformare un angolo da radianti in gradi e viceversa si usa la proporzione:

$$180° : \pi = x° : x_{rad} \qquad [17]$$

Dalla [17] si ricavano le relazioni seguenti:

$$x° = x_{rad} \cdot \frac{180°}{\pi} \qquad x_{rad} = x° \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Trasformare 15° in radianti: $x_{rad} = 15° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{12}$

È quindi possibile ricavare la seguente tabella che fornisce la conversione in radianti degli angoli principali.

$360° = 2\pi$	$270° = \frac{3}{2}\pi$	$180° = \pi$
$90° = \frac{\pi}{2}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$45° = \frac{\pi}{4}$
$36° = \frac{\pi}{5}$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$18° = \frac{\pi}{10}$
$15° = \frac{\pi}{12}$	$10° = \frac{\pi}{18}$	$5° = \frac{\pi}{36}$

9.2 | Definizione delle funzioni goniometriche

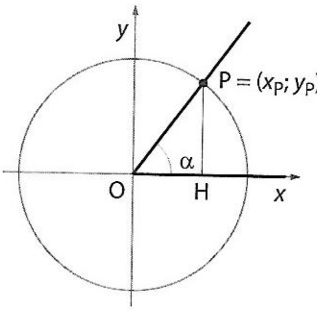
9.2.1 | Circonferenza goniometrica

Una circonferenza è detta **orientata** quando si fissa su di essa **il verso antiorario come positivo.**

Viene detta **circonferenza goniometrica** una qualsiasi circonferenza orientata alla quale sia associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e nel quale si assume come unità di misura dei segmenti il raggio della circonferenza. In questo modo **la circonferenza goniometrica ha raggio unitario e centro nell'origine del sistema di riferimento.**

9.2.2 | Seno, coseno e tangente

Si consideri una circonferenza goniometrica e un qualsiasi angolo orientato α con il primo lato coincidente con la semiretta positiva delle *x*. Sulla circonferenza goniometrica, si indichi con P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza, e con H l'intersezione fra il primo lato dell'angolo e la retta verticale passante per P.



Si hanno le seguenti definizioni.

Si definisce **seno** dell'angolo orientato α **l'ordinata del punto P**, ossia:

$$\operatorname{sen}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} y_P = \frac{PH}{OP}$$

Si definisce **coseno** dell'angolo orientato α **l'ascissa del punto P**, ossia:

$$\cos\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_P = \frac{OH}{OP}$$

Si definisce **tangente** dell'angolo orientato α **il rapporto (se esiste) fra l'ordinata e l'ascissa del punto P**, ossia, il che è lo stesso, **il rapporto (se esiste) fra il seno e il coseno** dell'angolo stesso:

$$\operatorname{tg}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_P}{x_P} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{PH}{OH}$$

Sono molto importanti le seguenti osservazioni.

Il seno, il coseno e la tangente di un angolo orientato α sono:

- **adimensionali,** in quanto definiti anche come rapporto tra lunghezze di segmenti;
- **numeri reali relativi**, quindi potrebbero essere negativi;
- **funzioni dell'angolo**, ossia dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α.

Inoltre, **non esiste la tangente degli angoli orientati α tali per cui il punto P venga a trovarsi sull'asse delle *y*.**

Per esempio, se $\alpha = \pi/2$ allora $\cos\alpha = \cos(\pi/2) = 0$ quindi si annulla il denominatore presente nella definizione di tangente (per cui la frazione perde di significato).

9.2.3 | Valore delle funzioni goniometriche per angoli particolari

È importante conoscere i valori che le funzioni goniometriche assumono in corrispondenza degli angoli (detti anche *archi notevoli*) riportati nella tabella seguente.

Angolo (in gradi)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Angolo (in radianti)	0_{rad}	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**non esiste**	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	**non esiste**	0

9.2.4 | Archi associati

Esistono alcune formule che consentono di ricavare, a partire dai valori della tabella del paragrafo precedente, i valori delle funzioni goniometriche in corrispondenza di altri angoli.

- α; $(90° - \alpha)$ (angoli complementari):

$$\text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\,(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\text{tg}\,(90° - \alpha) = 1/\text{tg}\,\alpha$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli di 60° e 90° partendo dagli angoli di 0° e 30°.

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

- α; $(180° - \alpha)$ (angoli supplementari):

$$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli 120°, 135°, 150°, 180°.

- α; $(180° + \alpha)$:

$$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli 210°, 225°, 240°, 270°.

- α; $-\alpha$ (angoli opposti):

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli 300°, 315°, 330°, 360°.

9.2.5 | Rappresentazione grafica di seno, coseno e tangente

Prima di affrontare la rappresentazione grafica, è utile fornire la seguente definizione.

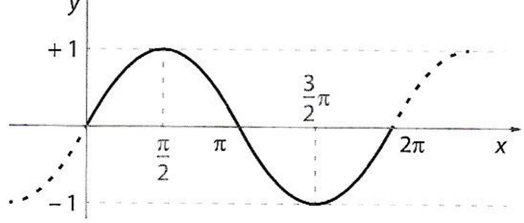
Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** di periodo T quando vale la seguente relazione:

$$f(x) = f(x + kT) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Più semplicemente, **una funzione è periodica quando il suo grafico si ripete periodicamente.**

Sinusoide: è il grafico della funzione:

$$y = \mathrm{sen}x$$



Proprietà

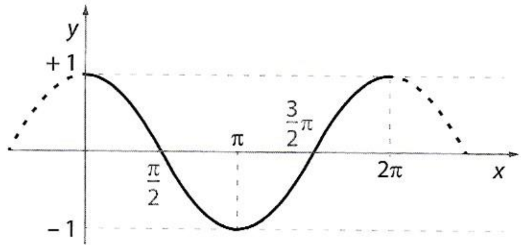
È una funzione dispari, limitata tra -1 e $+1$ e periodica con periodo T pari a 2π.

$$-1 \le \mathrm{sen}x \le 1 \quad \forall x$$

$$T = 2\pi = 360°$$

Cosinusoide: è il grafico della funzione:

$$y = \cos x$$



Proprietà

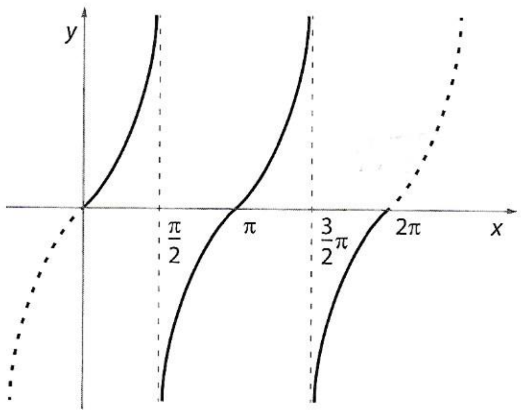
È una funzione pari, limitata tra -1 e $+1$ e periodica con periodo T pari a 2π.

$$-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x$$

$$T = 2\pi = 360°$$

Tangentoide: è il grafico della funzione:

$$y = \mathrm{tg}\,x$$



Proprietà

È una funzione dispari, ma, diversamente dalle precedenti, **non** è limitata ed è periodica con periodo T pari a π.

$$-\infty < \mathrm{tg}\,x < +\infty$$

$$T = \pi = 180°$$

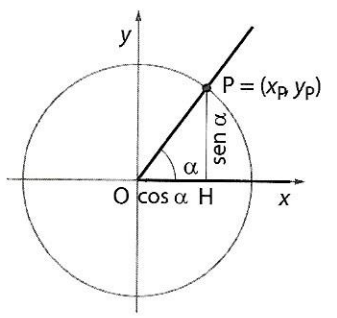
La tangentoide presenta infiniti *asintoti verticali* (le rette verticali, tratteggiate in figura, a cui la curva si avvicina indefinitamente, definite nel § 7.4.7) di equazione:

$$x = \pi/2 + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

9.3 | Teorema fondamentale della trigonometria

Si torni a considerare la circonferenza goniometrica. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo OPH, si ha:

$$PH^2 + OH^2 = OP^2 = 1$$



dove si è sfruttato il fatto che l'ipotenusa OP, essendo un raggio della circonferenza goniometrica, ha valore unitario. Sostituendo ora PH con $\mathrm{sen}\alpha$ e OH con $\cos\alpha$, si ha:

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dalla relazione precedente (chiamata anche *unità trigonometrica*) si ricavano le relazioni seguenti:

$$\mathrm{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\alpha}$$

PARTE TERZA

9.4 | Formule trigonome

Per la **somma e sottrazione di archi**

sen

cos

Dalle precedenti, derivano le formul

Inoltre, si definiscono altre funzioni

cotangente: $\mathrm{cotg}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = $

9.5 | Equazioni goniom

Un'equazione goniometri una funzione goniometric

Anche per le equazioni trig si può usare il metodo della scere i valori delle funzioni t 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 2

Nel seguito si riportano comunqu equazioni goniometriche elementa

- $\mathrm{sen}x = a$ con $-1 \le a \le 1$
- $\cos x = b$ con $-1 \le b \le 1$
- $\mathrm{tg}x = c$ con c qualsiasi

Per risolvere l'equazione s devono trovare gli angoli 1/2 : per farlo, si disegna la goniometrica.
Si traccia la retta orizzontale dividuano le intersezioni d circonferenza e si cercano g il punto P venga a trovarsi in sezioni.
Si trovano così due angoli Oltre ai due angoli trovati, tengono sommando multi

$x =$

Le equazioni elementari a goniometriche.

9.4 | Formule trigonometriche principali

Per la **somma e sottrazione di archi** si utilizzano le seguenti formule:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$$

Dalle precedenti, derivano le formule per la **duplicazione di archi:**

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

Inoltre, si definiscono altre funzioni goniometriche (di importanza minore):

cotangente: $\text{cotg}\alpha \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$ secante: $\sec\alpha \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\cos\alpha}$ cosecante: $\text{cosec}\alpha \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

9.5 | Equazioni goniometriche

Un'equazione goniometrica è un'equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di una funzione goniometrica.

Anche per le equazioni trigonometriche vale l'osservazione fatta per gli altri tipi di equazioni: si può usare il metodo della verifica. Per usare il metodo della verifica si devono comunque conoscere i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli più "importanti": 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, 360°.

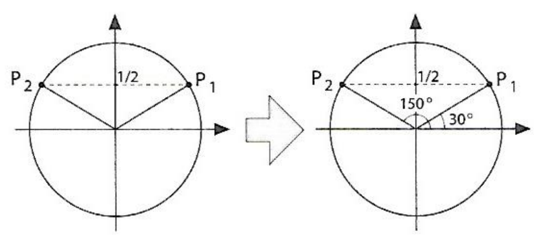
Nel seguito si riportano comunque alcuni esempi svolti di equazioni trigonometriche elementari. Le equazioni goniometriche elementari sono equazioni del tipo:

- $\text{sen}x = a$ con $-1 \le a \le 1$
- $\cos x = b$ con $-1 \le b \le 1$

se a e b fossero minori di – 1 o maggiori di + 1 l'equazione sarebbe impossibile

- $\text{tg}x = c$ con c qualsiasi

Per risolvere l'equazione $\text{sen}x = 1/2$, si devono trovare gli angoli il cui seno vale $1/2$: per farlo, si disegna la circonferenza goniometrica.
Si traccia la retta orizzontale $y = 1/2$ si individuano le intersezioni di questa con la circonferenza e si cercano gli angoli tali che il punto P venga a trovarsi in suddette intersezioni.



Si trovano così due angoli (30° = $\pi/6$ e 150° = $5\pi/6$) il cui seno vale $1/2$.
Oltre ai due angoli trovati, si devono però considerare (per la periodicità) tutti gli angoli che si ottengono sommando multipli di 2π. La soluzione diventa quindi:

$$x = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{e} \quad x = 5\pi/6 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Le equazioni elementari **ammettono infinite soluzioni** a causa della periodicità delle funzioni goniometriche.

MATEMATICA

Come si è visto nell'esempio precedente, prima si trovano gli angoli (che soddisfano l'equazione) compresi fra 0 e 2π (per seno e coseno) oppure fra 0 e π (per tangente e cotangente), poi si aggiungono a ciascuno di questi tutti i possibili multipli del periodo della funzione goniometrica ($2k\pi$ per seno e coseno, $k\pi$ per tangente e cotangente).

1. $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
2. $\cos x = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
3. $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
4. $\text{sen}\,x = 2 \rightarrow$ impossibile (la sinusoide è compresa tra -1 e $+1$);
5. $\cos x = -3 \rightarrow$ impossibile (la cosinusoide è compresa tra -1 e $+1$);
6. $\text{tg}\,x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi = k\pi$ (il periodo della tangentoide è π) con $k \in \mathbb{Z}$;
7. $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
8. $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

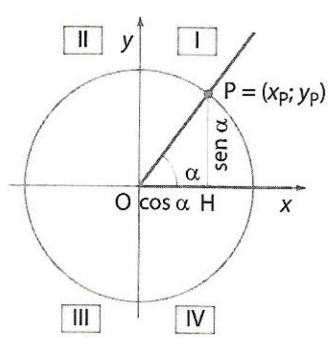
9.6 | Disequazioni goniometriche

Una disequazione goniometrica è una disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento di una funzione goniometrica.

Si è già detto che le disequazioni vanno risolte in modo tradizionale (non vale per esse il "metodo della verifica"). Non bisogna tuttavia allarmarsi perché, se un quesito dovesse contenere una disequazione trigonometrica, questa sarebbe certamente di facile risoluzione. Ciò che diventa determinante in questi casi è la strada che si sceglie per risolvere la disequazione.

Per poter affrontare efficacemente le disequazioni goniometriche è importante conoscere il segno delle funzioni goniometriche (al variare dell'angolo).

Si ricorda (§ 7.1.3) che nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale i due assi dividono l'intero piano in quattro parti, convenzionalmente chiamate *quadranti* e numerate in senso antiorario: ovviamente, anche la circonferenza goniometrica viene suddivisa dagli assi cartesiani in quattro quadranti:



I $\rightarrow$ *primo quadrante* $\xleftrightarrow{\text{def}}$ $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

II $\rightarrow$ *secondo quadrante* $\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$

III $\rightarrow$ *terzo quadrante* $\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\pi \le \alpha < \frac{3}{2}\pi$

IV $\rightarrow$ *quarto quadrante* $\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\frac{3}{2}\pi \le \alpha < 2\pi$

Il segno di ciascuna funzione goniometrica **non cambia all'interno di ciascun quadrante** (ossia al variare dell'angolo, rimanendo nello stesso quadrante).

Nella seguente tabella è riportato il segno di ciascuna funzione goniometrica nei quattro quadranti:

Funzione \ Quadrante	I	II	III	IV
seno	+	+	–	–
coseno	+	–	–	+
tangente	+	–	+	–

Si prendono ora in esame alcuni semplici casi.

1. $\text{sen}x > 0 \rightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (ossia 1° e 2° quadrante) con $k \in \mathbb{Z}$;
2. $\cos x > 0 \rightarrow 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ (1° e 4° quadrante) con $k \in \mathbb{Z}$;
3. $\text{tg}x > 0 \rightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ossia 1° e 3° quadrante) con $k \in \mathbb{Z}$.

In altri casi la soluzione potrebbe essere più complessa e richiedere quindi di ragionare sia sulla rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche che sulla circonferenza goniometrica (come si è fatto per le equazioni goniometriche).

$\text{sen}x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

MATEMATICA

Quesiti svolti

1 Il seno di un angolo:

(A) è una grandezza adimensionale
(B) si misura in radianti
(C) ha le dimensioni di una lunghezza
(D) si misura in gradi
(E) ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza

Il seno di un angolo è stato definito (nel § 9.2.2) come rapporto fra segmenti (ossia fra grandezze omogenee), quindi è una grandezza adimensionale (risposta (A)).

2 Sia x un numero reale tale che $0 < x < 1/2$; dire quale delle seguenti catene di disuguaglianze è vera:

(A) $0 < \text{sen}\, x < \cos x < \text{sen}^2 x < 1$
(B) $0 < \text{sen}^2 x < \text{sen}\, x < \cos x < 1$
(C) $0 < \text{sen}\, x < \text{sen}^2 x < \cos x < 1$
(D) $0 < \text{sen}^2 x < \cos x < \text{sen}\, x < 1$
(E) le precedenti affermazioni sono false

Poiché la misura in radianti dell'angolo x è compresa tra 0 e $1/2$, esso appartiene al 1° quadrante e dunque il suo seno e il suo coseno sono compresi fra 0 e 1. Ne segue che:

$$\text{sen}^2 x < \text{sen}\, x$$

Inoltre essendo l'angolo x senz'altro minore di $\pi/4$, perché $\pi/4 > 1/2$, si ha che

$$\text{sen}\, x < \cos x$$

Unendo le relazioni trovate in un'unica catena di disuguaglianze, si ha

$$0 < \text{sen}^2 x < \text{sen}\, x < \cos x < 1$$

La risposta corretta è la (B).

3 Se $\cos \alpha = 0{,}7$ (con $0 < \alpha < \pi$), quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $\text{sen}\, \alpha < 0{,}7$
(B) $\text{tg}\, \alpha > 1$
(C) $\cos 2\alpha = 0{,}49$
(D) $\alpha < \pi/6$
(E) $\cos^2 \alpha = 0{,}51$

Se $\cos \alpha = 0{,}7$ e $0 < \alpha < \pi$, allora si può scrivere:

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{1-(0{,}7)^2} = \sqrt{1-0{,}49} = \sqrt{0{,}51} > \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0{,}7$$

Poiché $\cos \alpha = 0{,}7$ e $\text{sen}\, \alpha > 0{,}7$, segue che:

$$\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha / \cos\alpha > 1$$

per cui la risposta esatta è la (B).

4 **Per ogni angolo α vale:**

A $\text{sen}\ \alpha = \cos(\alpha + 90°)$

B $\text{sen}\ \alpha = -\cos(\alpha + 90°)$

C $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}(\alpha + 180°)$

D $\cos\alpha = \cos(\alpha + 180°)$

E $\text{sen}\ \alpha = \cos(\alpha + 180°)$

Per le relazioni fra archi associati (§ 9.2.4) è possibile concludere che l'unica relazione corretta è la B, infatti si ha:

$$\cos(\alpha + 90°) = -\text{sen}\ \alpha$$

$$\text{sen}(\alpha + 180°) = -\text{sen}\ \alpha$$

$$\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$$

5 **La retta $y = 2x - 4$ forma con l'asse x un angolo:**

A $>\pi/4$

B $<\pi/4$

C $= \pi/4$

D $= \pi/2$

E nessuna delle precedenti

Nel piano cartesiano il coefficiente angolare di una retta è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

La retta di equazione $y = 2x - 4$ forma con l'asse x un angolo α la cui tangente è uguale a 2. Poiché la tangente di $\pi/4$ è uguale a 1 e la tangente di $\pi/2$ non esiste, si può concludere che α è maggiore di $\pi/4$ (risposta A).

6 **Qual è il periodo di cos (4 α)?**

A $\pi/2$

B π

C 2π

D 4π

E 8π

Per rispondere a questo quesito conviene memorizzare una regola che potrà essere utilizzata in ogni esercizio con caratteristiche simili: se una funzione $y = f(x)$ è periodica con periodo T allora la funzione $y = f(kx)$ è periodica con periodo T/k.

Nel caso in esame, dato che $\cos x$ è periodica con periodo $2\pi \rightarrow \cos(4x)$ è una funzione periodica con periodo pari a $2\pi/4 = \pi/2$ (risposta A).

7 **Come può essere interpretata la seguente uguaglianza?** $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

A Un'identità verificata per ogni valore di α

B La definizione del coseno dell'angolo $\alpha/2$

C Un'equazione con infinite soluzioni

D Una formula che permette di concludere che il coseno dell'angolo $\alpha/2$ è sempre irrazionale

E Nessuna delle precedenti risposte è esatta

MATEMATICA

Per individuare la risposta corretta è utile partire dall'espressione di una delle formule di bisezione e precisamente:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Questa relazione di uguaglianza è chiaramente una identità, essendo verificata per ogni valore dell'angolo α, e differisce dall'espressione contenuta nel resto del quesito solo per la presenza del doppio segno $\pm$ a secondo membro. Si conclude che la relazione proposta è soddisfatta da **infiniti** valori dell'angolo α ma **non da ogni** valore di α ; si tratta cioè di una equazione con infinite soluzioni (risposta **C**) e non di una identità. Per rendersi conto del fatto che non tutti i valori di α soddisfano la relazione data basta prendere $\alpha = 240°$; si ottiene:

$$\cos\frac{240°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 240°}{2}} \rightarrow \cos 120° = \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} \rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

8 **L'uguaglianza $(\text{sen}\, x)^4 + \cos 2x = (\cos x)^4$ con x numero reale, è verificata:**

- **A** per ogni x
- **B** per nessun x
- **C** soltanto per $x = 0$
- **D** soltanto per $x = \pi/2$
- **E** per infiniti x, ma non per ogni x

Con semplici passaggi algebrici l'espressione data si riduce nella forma:

$$(\text{sen}x)^4 + \cos 2x = (\cos x)^4 \rightarrow \text{sen}^4 x - \cos^4 x + \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow (\text{sen}^2 x - \cos^2 x)(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + \cos 2x = 0$$

Applicando all'ultima uguaglianza le formule di duplicazione e l'unità trigonometrica, si ha:

$$-\cos 2x \cdot 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 0 = 0$$

cioè un'identità. La risposta corretta è la **A**.

---

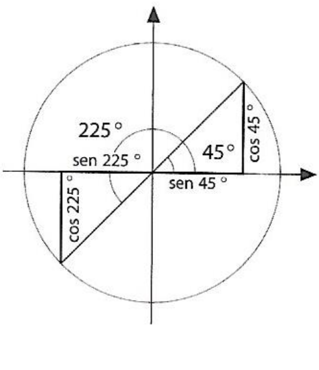
9 **L'equazione trigonometrica sen x – cos x = 0 ha come soluzione uno dei seguenti valori di x. Quale?**

- **A** $3/4\pi$ + multipli di π oppure $3/4\pi$ – multipli di π
- **B** $1/4\pi$ + multipli di π oppure $1/4\pi$ – multipli di π
- **C** $1/4\pi$ + multipli di $\pi/2$ oppure $1/4\pi$ – multipli di $\pi/2$
- **D** $2/3\pi$ + multipli di $\pi/2$ oppure $2/3\pi$ – multipli di $\pi/2$
- **E** $\pi/2$ + multipli di $\pi/2$ oppure $\pi/2$ – multipli di $\pi/2$

Spostando il termine – cos x a secondo membro si ricava:

$$\text{sen}\, x = \cos x$$

Si tratta quindi di trovare quale risposta contiene angoli il cui seno è uguale al coseno. Si consiglia di visualizzare gli angoli attraverso la circonferenza goniometrica.



La soluzione dell'equazione sen x = cos x risulta quindi:

$$x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{4}\pi \pm 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

ossia:

$$x = \frac{\pi}{4} \pm k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

La risposta esatta è quindi la **B**.

10 L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza. Detta α la misura dell'angolo formato dal sole sull'orizzonte in quel momento, si può dire che:

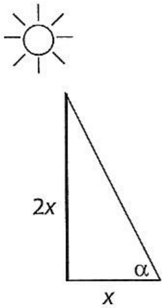
A $45° \leq \alpha \leq 60°$

B $60° \leq \alpha$

C $\alpha < 30°$

D è notte

E $30° \leq \alpha < 45°$



Indicata con x la lunghezza dell'ombra del campanile, è possibile rappresentare graficamente il quesito come nella figura a lato.
Utilizzando i teoremi sui triangoli rettangoli è possibile scrivere:

$$2x = x\,\text{tg}\alpha$$

da cui si ricava:

$$\text{tg}\alpha = 2$$

Essendo $\text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg}45° = 1$ e $\text{tg}60° = \sqrt{3}$ tutti valori minori di 2, si ha:

$$\alpha \geq 60°$$

quindi la risposta esatta è la B.

---

11 Le soluzioni della disequazione $\text{cotg}^2 x - 1 > 0$ sono:

A $x > \pi$

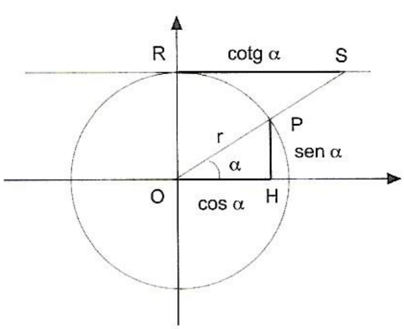
B $-\pi/4 + k\pi < x < \pi/4 + k\pi$ con $x \neq k\pi$

C $-1 < x < 1$

D $\pi/4 + k\pi < x < 3\pi/4 + k\pi$

E $x < \pi$

La disequazione data è una disequazione di secondo grado in cotg x. La cotangente di un angolo α è uguale all'inverso della tangente dello stesso angolo α, quindi non è definita per $\alpha = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). La visualizzazione grafica di cotg α sulla circonferenza goniometrica di raggio unitario è quella indicata nella figura a lato:



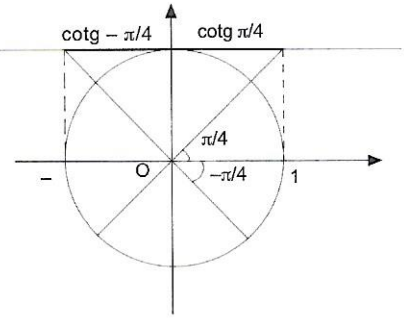
$$\text{cotg}\,\alpha = SR = \frac{OH}{PH} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

La disequazione proposta è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata, cioè per cotg $x < -1$ e cotg $x > 1$.
Dall'osservazione della circonferenza goniometrica e dal fatto che la cotangente è una funzione periodica di periodo pari a π, si ricava che cotg $x < -1$ è verificata per:

$$-\pi/4 + k\pi < x < k\pi$$

e cotg $x > 1$ è verificata per:

$$k\pi < x < \pi/4 + k\pi$$



unendo le due soluzioni si ha che la disequazione di partenza è verificata per:

$$-\pi/4 + k\pi < x < \pi/4 + k\pi$$

con $x \neq k\pi$. La risposta esatta è pertanto la B.

MATEMATICA

12 **L'equazione sen$x = -1/2$ è soddisfatta per:**

(A) $x = 0$

(B) $x = -\pi/6 + 2k\pi$

(C) $x = -\pi/3 + 2k\pi$

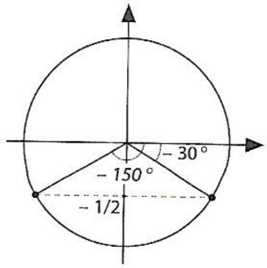
(D) $x = +\pi/6 + 2k\pi$ oppure $x = -\pi/6 + 2k\pi$

(E) $x = +\pi/3 + 2k\pi$

Si tratta di trovare quali sono gli angoli il cui seno è uguale a $-1/2$. Si consiglia in questi casi di visualizzare gli angoli attraverso la circonferenza goniometrica (circonferenza di raggio unitario).

Come mostrato nella figura, i due angoli che soddisfano la condizione richiesta sono $x = -\pi/6$ e $x = -5/6\pi$, ai quali va poi aggiunto il termine $2k\pi$ che tiene conto della periodicità della sinusoide. La soluzione completa dell'equazione sen$x = -1/2$ è dunque: $x = -\pi/6 + 2k\pi$ e $x = -5/6\pi + 2k\pi$.

Tra le risposte proposte si deve dunque scegliere la (B) (nel quesito *non è chiesta la soluzione completa dell'*equazione ma se i valori di x proposti la soddisfano).



13 **L'espressione** $\left(\text{sen}\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)^2$ **è uguale a:**

(A) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Applicando la formula del quadrato del binomio si ricava:

$$\left(\text{sen}\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

Per il teorema fondamentale della trigonometria:

$$\left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1$$

e, in base alle formule di duplicazione, si può scrivere:

$$2\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi la risposta esatta è la (E):

$$\left(\text{sen}\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left[\left(\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right] + 2\text{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} =$$

$$= 1 + \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 1 + \text{sen}\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$