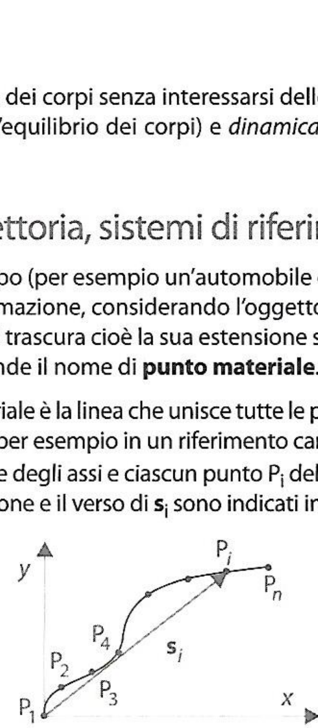
2 | Cinematica

La *cinematica* studia e descrive il moto dei corpi senza interessarsi delle cause che lo producono. L'insieme di cinematica, *statica* (che studia l'equilibrio dei corpi) e *dinamica* (che analizza le cause del moto) prende il nome di *meccanica*.

2.1 | Punto materiale, traiettoria, sistemi di riferimento

Nel descrivere il moto di un corpo (per esempio un'automobile che percorre un circuito) si ricorre spesso a una comoda approssimazione, considerando l'oggetto come un punto in cui è concentrata tutta la massa del corpo: si trascura cioè la sua estensione spaziale, preoccupandosi soltanto della posizione. Tale punto prende il nome di **punto materiale**.

La **traiettoria** di un punto materiale è la linea che unisce tutte le posizioni ($P_1, P_2, ..., P_n$) occupate dal punto al trascorrere del tempo, per esempio in un riferimento cartesiano.
Il vettore che congiunge l'origine degli assi e ciascun punto P_i della traiettoria è detto **vettore posizione** e si indica con $\mathbf{s}_i$. La direzione e il verso di $\mathbf{s}_i$ sono indicati in figura.



Dire che un oggetto è in quiete o in moto ha senso solo se si è precedentemente fissato un **sistema di riferimento**, rispetto al quale è possibile esprimere le posizioni occupate dal corpo nel tempo e tracciarne la relativa traiettoria. Il sistema di riferimento che si sceglie è normalmente *solidale* con la Terra, cioè in quiete rispetto a essa. Il moto del corpo è di conseguenza un *moto relativo* perché riferito a quel sistema. A seconda che il movimento avvenga lungo una retta, su un piano o nello spazio tridimensionale, per rappresentarlo si useranno rispettivamente una retta, un sistema di due assi ortogonali (**piano cartesiano**) o un sistema di tre assi ortogonali (**terna cartesiana**).

2.2 | Grandezze cinematiche

Per fissare le idee, si consideri che le grandezze cinematiche vengano osservate all'inizio e alla fine di intervalli di tempo ben precisi: tali istanti si possono chiamare, indifferentemente (e con ovvio riferimento dei pedici all'inizio e alla fine dell'osservazione), t_1 e t_2, oppure t_i e t_f, oppure ancora t_0 e t. Di conseguenza, le varie grandezze descritte nel seguito saranno indicate con gli stessi pedici dell'istante a cui si riferiscono.

2.2.1 | Spostamento

Il *vettore spostamento* unisce la posizione occupata nell'istante iniziale da un punto materiale in moto a quella occupata nell'istante finale. Si definisce quindi come una differenza di vettori posizione e si indica con $\Delta \mathbf{s}$:

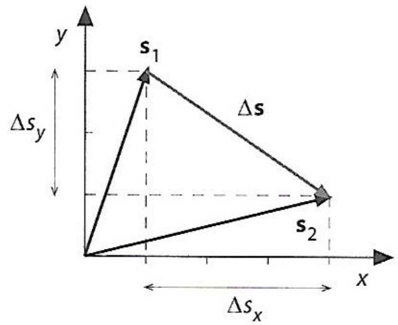
$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$$

L'unità di misura dello spostamento nel SI è il metro, mentre nel CGS è il centimetro.

In generale l'operatore matematico Δ applicato a una grandezza fisica g indica la **variazione** di g e si calcola sottraendo al valore assunto da g nell'istante finale il valore assunto da g nell'istante iniziale: $\Delta g = g_2 - g_1$.

Si supponga di dover disegnare il vettore spostamento di un punto materiale che si muove su un piano cartesiano, sapendo che nell'istante iniziale il punto occupa la posizione (1;3) e nell'istante finale raggiunge la posizione (4;1).

Per farlo si rappresentano il vettore posizione iniziale $\mathbf{s}_1$ e quello finale $\mathbf{s}_2$ nel piano cartesiano, secondo la definizione (cioè il vettore che va dall'origine degli assi al punto occupato). Si disegna poi il vettore spostamento $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$ come *differenza tra vettori* (cfr. § 1.3.2).



Se inoltre si vuole calcolare la lunghezza di $\Delta \mathbf{s}$, osservando il diagramma si applica il teorema di Pitagora alle componenti del vettore:

$$|\Delta \mathbf{s}| = \Delta s = \sqrt{(\Delta s_x)^2 + (\Delta s_y)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

2.2.2 | Velocità

La **velocità media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore posizione (rispetto a una terna cartesiana) e la variazione di tempo:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

L'unità di misura della velocità nel SI è il $\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \mathrm{m/s}$ (nel CGS è il $\mathrm{cm/s}$).

Esiste un'altra unità di misura della velocità molto usata: il km/h. Si ricorda che:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100.000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}; \qquad 1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Per passare da km/h a m/s si moltiplica per $\frac{1000}{3600} = \frac{10}{36} = \frac{1}{3{,}6}$ (ossia si divide per 3,6).

Per passare da m/s a km/h si moltiplica quindi per 3,6.

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60 \cdot 1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{60}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \cdot 3{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

PARTE QUARTA

Un'automobile percorre il tragitto Milano-Torino a una velocità media di 100 km/h. Se la distanza tra le due città è di circa 140 km, quanto tempo è durato il tragitto?
Secondo la definizione, il modulo della velocità media vale $v = \Delta s/\Delta t$. Tale modulo è appunto un dato del problema, mentre l'altro è il modulo del vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$. Per trovare il tempo impiegato a percorrere il tragitto è sufficiente invertire la relazione $v = \Delta s/\Delta t$:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{140 \text{ km}}{100 \text{ km/h}} = 1{,}4 \text{ h}$$

Infine, trasformando in ore e minuti:

$$\Delta t = 1{,}4 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}4 \text{ h} = 1 \text{ h} + (0{,}4 \cdot 60 \text{ min}) = 1 \text{ h} + 24 \text{ min}$$

La velocità media è un vettore!
È parallela al vettore $\Delta \mathbf{s}$ perché la si ricava come rapporto tra il vettore $\Delta \mathbf{s}$ e un numero sempre positivo (Δt), e ha modulo pari al modulo di $\Delta \mathbf{s}$ diviso Δt:

$$v = \Delta s/\Delta t$$

La velocità media non è la media delle velocità! Si veda l'esercizio che segue.

Un camion viaggia a 200 km/h per mezz'ora, poi a 150 km/h per un'ora, infine a 50 km/h per due ore. Qual è la sua velocità media?
Si è tentati di rispondere:

$$v = \frac{200 + 150 + 50}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 133{,}3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ma questo procedimento è errato, poiché non si è utilizzata la definizione di velocità media $v = \Delta s/\Delta t$: per trovarla serve dunque ricavare lo spazio totale percorso e dividerlo per il tempo totale impiegato. Conviene rappresentare i dati del problema in una tabella:

	v (km/h)	**t (h)**	**$\Delta s = v \cdot \Delta t$ (km)**
1° tratto	200	0,5	100
2° tratto	150	1	150
3° tratto	50	2	100
Totale	/	3,5 h	350 km

A questo punto è facile calcolare il modulo della velocità media secondo la definizione:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{350 \text{ km}}{3{,}5 \text{ h}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Al contrario, sapere che un mezzo ha percorso un certo tragitto con una velocità media di 100 km/h non consente di per sé di conoscere la velocità da esso tenuta nei singoli tratti del tragitto. Per aumentare la quantità di informazioni sullo stato di moto, occorre ridurre l'ampiezza degli intervalli temporali nei quali si effettuano le misure. Il rapporto spazio/tempo viene così calcolato per intervalli di tempo via via più piccoli, al limite prossimi a zero.

Matematicamente, questo si ottiene effettuando un *passaggio al limite* secondo la relazione seguente, che fornisce la definizione di **velocità istantanea**:

$$\mathbf{v}_{ist} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{s}'(t)$$

Il simbolo $\mathbf{s}'(t)$ indica la *derivata* del vettore posizione **s** e corrisponde all'operazione matematica di passaggio al limite del rapporto delle differenze. Per questo motivo si dice che la velocità istantanea è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo.

FISICA

2.2.3 | Accelerazione

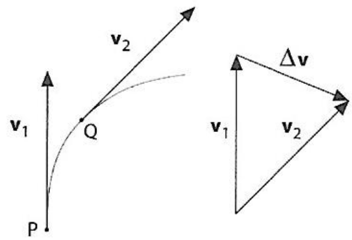
L'**accelerazione media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore velocità (rispetto a una terna cartesiana) e la variazione di tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

L'unità di misura dell'accelerazione nel SI è il $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m/s}^2$ (nel CGS è il $\mathrm{cm/s}^2$).

L'accelerazione media è un vettore!
Direzione e verso: gli stessi della variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$, poiché Δt è un numero sempre positivo. **Modulo**: pari al rapporto fra il modulo della variazione di velocità $|\Delta \mathbf{v}|$ e il tempo Δt impiegato per tale variazione.

L'accelerazione media è stata definita come variazione del vettore velocità nel tempo. Si può avere una variazione del vettore velocità ($\Delta \mathbf{v} \neq 0$) anche se il suo modulo è $|\mathbf{v}|$ = costante: è sufficiente che cambi la direzione. Infatti, **il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria.**
Per esempio, il vettore velocità associato al moto di un'automobile che viaggia a 50 km/h su un circuito circolare ha sempre lo stesso modulo, ma cambia direzione in ogni punto della traiettoria. In altre parole, **si può avere accelerazione diversa da zero anche se la velocità rimane costante in modulo.**



Nel caso di traiettoria curva, l'accelerazione del punto materiale che la percorre è sempre diversa da zero: in ogni punto, infatti, cambia quanto meno la direzione della sua velocità.

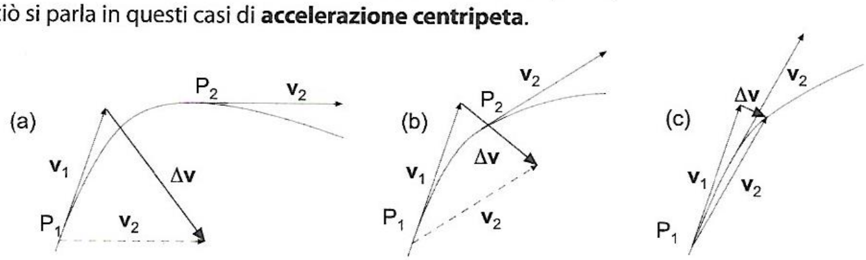
Analogamente a quanto visto per la velocità, un'informazione completa sull'accelerazione si ha quando gli intervalli di tempo nei quali la si misura sono piccoli. Si definisce così l'**accelerazione istantanea**:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{ist}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{v}'(t)$$

Quali sono le dimensioni dell'accelerazione?
A partire dalla definizione, $a = \Delta v / \Delta t$, sostituendo alla velocità e al tempo le loro dimensioni, si ricavano quelle di a:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]}{[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} \cdot \frac{1}{[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}$$

Si consideri un corpo in movimento lungo una traiettoria curvilinea con velocità costante in modulo: l'accelerazione è diversa da zero ed è diretta come $\Delta \mathbf{v}$ (caso a della figura sottostante). Se l'intervallo di tempo diminuisce, i vettori velocità in due istanti successivi arrivano quasi a coincidere e la differenza di velocità si dispone lungo una direzione che tende a diventare perpendicolare a tali vettori (caso b); al limite, l'accelerazione istantanea sarà perfettamente perpendicolare alla velocità e quindi diretta verso il centro della curva (caso c).
Perciò si parla in questi casi di **accelerazione centripeta**.



2.3 | Moti particolari

Si procede a una carrellata dei principali moti particolari e delle loro proprietà. In generale:

Il moto è **rettilineo** quando la velocità **v** ha *direzione costante* (il modulo può variare).
Il moto è **uniforme** quando la velocità **v** ha *modulo costante* (la direzione può variare).

È rettilineo il moto di un atleta che percorre i 100 metri piani, anche se la sua velocità aumenta progressivamente in modulo. È uniforme il moto della punta di una lancetta di orologio, anche se la traiettoria descritta non è diritta ma circolare.

2.3.1 | Moto rettilineo uniforme

È il moto più semplice, in cui la velocità **v** è costante in direzione, modulo e verso. In questo caso:

$$\mathbf{v}_{media} = \mathbf{v}_{istantanea} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

Da cui:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \qquad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}; \qquad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot \Delta t$$

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Per *legge oraria* di un moto si intende la relazione che esprime lo spazio in funzione del tempo. Nel caso del moto rettilineo uniforme, la legge oraria assume la forma:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot t$$

Se all'istante iniziale t_0 il corpo aveva già percorso un tratto s_0, la legge oraria diventa:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v} \cdot t$$

Un'automobile procede alla velocità costante di 72 km/h. Quanti metri percorre in 5 secondi?

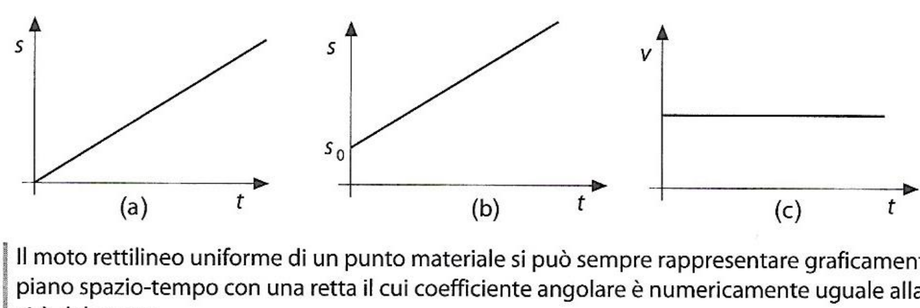
Si converte la velocità in m/s (72 km/h = 20 m/s) e si procede al calcolo secondo la legge oraria:

$$s = v \cdot t \;\Rightarrow\; s = 20\,\text{m/s} \cdot 5\,\text{s} = 100\,\text{m}$$

Rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è regolato da leggi che legano tra loro le variabili spazio, tempo e velocità. È possibile rappresentare tali legami con delle curve piane in un sistema di assi cartesiani.

Si possono disegnare grafici di tipo *spazio-tempo* e *velocità-tempo*. Se $s_0 = 0$, spazio e tempo sono legati dalla legge oraria $s = v \cdot t$: si tratta di grandezze direttamente proporzionali e la rappresentazione grafica della legge oraria è una semiretta passante per l'origine degli assi cartesiani *spazio-tempo* (figura a). Se $s_0 \neq 0$, la legge oraria assume la forma $s = s_0 + v \cdot t$ e la semiretta che la rappresenta non passa per l'origine degli assi (figura b). Nel piano *velocità-tempo* (figura c), la rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme è invece una semiretta parallela all'asse dei tempi che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza del valore costante della velocità.



Il moto rettilineo uniforme di un punto materiale si può sempre rappresentare graficamente nel piano spazio-tempo con una retta il cui coefficiente angolare è numericamente uguale alla velocità del punto.

FISICA

2.3.2 | Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se in un moto l'accelerazione è costante, il moto si dice *uniformemente accelerato.*
Per il moto uniformemente accelerato la velocità raggiunta dopo avere accelerato per un tempo t vale:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t$$

dunque passando ai moduli:

$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

Legge oraria del moto rettilineo uniformememente accelerato
Nel caso del moto uniformemente accelerato lo spazio percorso dopo un tempo t (legge oraria) è:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot t^2$$

dunque passando ai moduli:

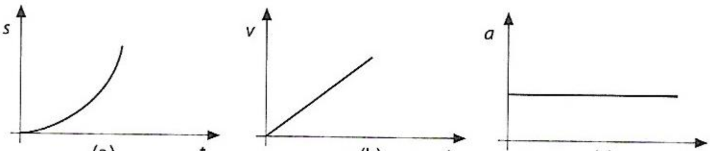
$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

dove $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_f$ sono la velocità iniziale e finale, $\mathbf{s}_0$ è lo spazio iniziale, **a** è l'accelerazione (costante) e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale.

Rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato
In questo caso i grafici possono essere del tipo *spazio-tempo, velocità-tempo* e *accelerazione-tempo.* Nel primo caso il legame tra s e t è dato dalla legge oraria:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Nel caso particolare $s_0 = v_0 = 0$, si ha $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, la cui rappresentazione grafica nel piano *spazio-tempo* è una parabola con vertice nell'origine degli assi (figura a).
Dalla relazione $v = a \cdot t$ (quando $v_0 = 0$) si nota una diretta proporzionalità tra v e t. Così, la rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato nel piano *velocità-tempo* è una semiretta passante per l'origine degli assi, il cui coefficiente angolare è pari al valore dell'accelerazione (figura b).
Infine, la rappresentazione grafica dell'accelerazione in funzione del tempo nel piano *accelerazione-tempo* è una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza del valore costante dell'accelerazione (figura c).



(a) (b) (c)

2.3.3 | Moto di caduta dei gravi

L'importanza che riveste il moto uniformemente accelerato è dovuta al fatto che la caduta libera dei gravi sulla Terra è un moto di questo tipo. Per questo motivo il moto di caduta dei gravi è chiamato anche moto *naturalmente accelerato.*

In particolare, nel campo gravitazionale si ha:

$$a = g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Il *modulo* dell'accelerazione gravitazionale **g** varia in effetti con la latitudine e l'altitudine; in particolare, diminuisce passando dai poli all'equatore e diminuisce con l'aumentare della distanza dalla superficie terrestre. Le variazioni sono però talmente piccole che g può essere considerato costante sulla superficie terrestre. Il vettore **g** è sempre *diretto* lungo la verticale, *verso* il basso.

Trattandosi di un moto uniformemente accelerato, valgono le stesse leggi viste nel § 2.3.2. Indicando con h l'altezza del grave che cade lungo la verticale (rispetto a terra, per esempio), si ha:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad [1]$$

dove h_0 è la posizione iniziale, v_0 è l'eventuale velocità iniziale del grave; il segno – appare perché l'accelerazione è diretta verso il basso, cioè verso altezze decrescenti.

Se $h_0 = v_0 = 0$, la [1] assume la forma:

$$h = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Per un corpo lasciato cadere da un'altezza h_0 con velocità iniziale nulla si ha:

$$\text{tempo di caduta} = t_c = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$\text{velocità finale} = v_f = \sqrt{2gh_0}$$

Per un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 si ha:

$$\text{altezza max raggiunta} = h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{tempo necessario per raggiungerla} = t_h = \frac{v_0}{g}$$

Si noti che **nessuna delle grandezze appena definite per un corpo in caduta libera dipende dalle caratteristiche particolari del corpo** (per esempio massa, materiale, forma).

Un oggetto avente massa m = 28 kg viene lanciato verso l'alto con una velocità v_0 di 9,8 m/s. Si calcoli la massima altezza raggiunta, il tempo impiegato per raggiungerla e quello impiegato per tornare all'altezza iniziale.

Si utilizzano le formule viste sopra. La massima altezza raggiunta è:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{96{,}04 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 4{,}9 \text{ m}$$

Il tempo di salita è:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{9{,}8 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 1 \text{ s}$$

Si noti che la massa dell'oggetto lanciato non influisce sui risultati ottenuti.

Una volta arrivato all'altezza massima il corpo ricade con moto naturalmente accelerato: si tratta dunque di calcolare in quanto tempo il grave ripercorre i 4,9 metri di altezza raggiunti. Si può utilizzare la formula per il tempo di caduta e si ottiene:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}9 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 1 \text{ s}$$

In generale il tempo necessario per raggiungere una certa altezza è pari al tempo necessario per ripercorrerla a ritroso, in caduta libera. Nello stesso modo si dimostra che la velocità iniziale verso l'alto è la stessa con cui il corpo ritransita per il punto di partenza.

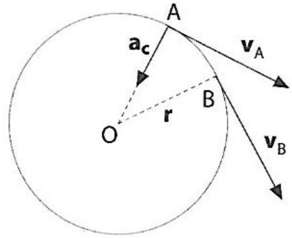
FISICA

2.3.4 | Moto circolare uniforme

È il moto di un punto che descrive una traiettoria circolare con velocità costante in modulo.
Si definiscono:

- T = **periodo** = tempo impiegato a compiere una rotazione completa.
- ν = **frequenza** = numero di rotazioni al secondo.

T e ν sono grandezze scalari aventi rispettivamente per unità di misura i secondi e i s^{-1} = hertz (simbolo: Hz).



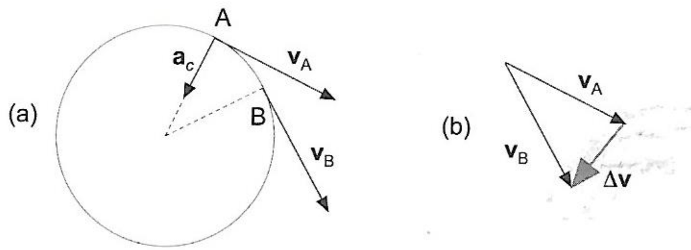
Dalla definizione di velocità, si ha:

$$|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = \frac{\text{lunghezza della circonferenza}}{\text{periodo di rotazione}} = \frac{2\pi r}{T} = \text{costante}$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, mentre la sua direzione è in ogni punto tangente alla circonferenza (e quindi perpendicolare al raggio). Dato che la direzione della velocità cambia continuamente, il punto materiale che si muove di moto circolare uniforme è sottoposto a un'accelerazione sempre diversa da zero, diretta verso il centro della circonferenza. Tale accelerazione, detta **accelerazione centripeta**, è di conseguenza sempre perpendicolare alla velocità istantanea del punto.
Nel moto circolare uniforme, il vettore accelerazione centripeta $\mathbf{a}_c$ ha le seguenti caratteristiche.

Direzione radiale in ogni punto; *verso* dall'esterno al centro della circonferenza; *modulo* costante, dato dal rapporto fra il quadrato della velocità e il raggio della circonferenza:

$$a_c = v^2/r$$



Si ha accelerazione centripeta ogni volta che la velocità varia in direzione!
L'accelerazione centripeta è sempre perpendicolare alla velocità: anche per il moto circolare valgono le considerazioni fatte a pagina 296.

Un punto materiale si muove lungo il bordo di un disco a velocità costante e compie quattro giri ogni due secondi. Quanto vale il periodo? Quanto vale l'accelerazione centripeta se il raggio del disco è 1 cm?

Nel moto circolare uniforme il periodo è definito come il tempo necessario a compiere un giro; il problema dà invece la frequenza:

$$\nu = 4/(2\ \text{s}) = 2\ \text{Hz} \Rightarrow T = 1/\nu = 0{,}5\ \text{s}$$

Conoscendo il raggio della traiettoria è possibile calcolare lo spazio percorso in un periodo, e dunque l'accelerazione centripeta:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Nel sostituire i valori numerici si deve fare attenzione al raggio, che nel testo è dato in cm e va trasformato in metri (se non diversamente specificato, è bene usare le unità del SI):

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{(0{,}5\ \text{s})^2} = 1{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Nel moto circolare, accanto alla velocità lineare del punto materiale che si sposta lungo la circonferenza, si definisce anche una **velocità angolare media** ω, data dal rapporto fra l'angolo al centro *spazzato* dal raggio vettore (il vettore radiale che ha origine nel centro della circonferenza ed estremo sul punto materiale) e il tempo impiegato a spazzarlo:

$$\omega_{media} = \Delta\theta/\Delta t$$

Nel moto circolare uniforme, la **velocità angolare** è un vettore con queste caratteristiche:
Direzione perpendicolare al piano di rotazione;
Verso uscente dal piano di rotazione se questa è antioraria, entrante nel piano se è oraria;
Modulo costante e pari a:

$$\omega = 2\pi_{rad}/T = 2\pi\nu$$

L'angolo di ampiezza 2π equivale all'angolo di 360° espresso in radianti; il **radiante** è l'angolo al centro di una circonferenza che insiste su un arco lungo quanto il raggio.

Per riepilogare, nel moto circolare uniforme valgono le seguenti relazioni:

$$T = \frac{1}{\nu}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}; \qquad v = \omega \cdot r; \qquad \omega = \frac{v}{r}; \qquad a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Mentre il modulo della velocità v dipende dalla distanza dal centro di rotazione (ossia dal raggio r), ω ne è indipendente.

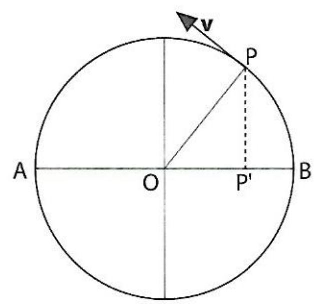
Un corpo celeste ha periodo di rotazione T pari a 36 ore. Detta ω la sua velocità angolare e ω_T quella terrestre, quale delle due è minore?
La relazione tra il periodo di un moto e la sua velocità angolare è $\omega = 2\pi/T$.
Le velocità angolari del corpo celeste e della Terra valgono rispettivamente:

$$\omega = \frac{2\pi}{36 \text{ h}} \quad \text{e} \quad \omega_T = \frac{2\pi}{24 \text{ h}}$$

Si conclude che $\omega < \omega_T$.

2.3.5 | Moto oscillatorio armonico

Il moto oscillatorio armonico è, come il moto circolare uniforme, un moto periodico; precisamente è il moto che compie il punto P' (proiezione di P lungo il diametro AB) quando P si muove di moto circolare uniforme.



- La velocità di P' è la proiezione di **v** sul diametro AB: è massima in O e nulla in A e B, dove P' inverte il moto.
- L'accelerazione di P' è proporzionale allo spostamento OP': è massima in A e in B ed è nulla in O.

La legge oraria di tale moto è rappresentata graficamente da una sinusoide:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

dove A è l'ampiezza massima dell'oscillazione (nell'esempio è la distanza tra il centro dell'oscillazione O e gli estremi dell'oscillazione, ovvero $A = \overline{AB}/2$), φ è un parametro detto *fase iniziale* che tiene conto delle condizioni iniziali e ω prende il nome di *pulsazione* e ha le dimensioni di un inverso del tempo.

Un corpo appeso a una molla inizialmente allungata, una volta lasciato libero, compie, in assenza di attriti, un moto oscillatorio armonico. Per piccole oscillazioni, un pendolo o un'altalena in assenza di attriti compiono un moto oscillatorio armonico.
Se non intervengono forze esterne, tale moto si ripete periodicamente nel tempo senza mai arrestarsi.

FISICA

2.4 | Moti composti

2.4.1 | Composizione di moti uniformi

Si consideri un passeggero che si sposta con velocità costante **v** lungo la carrozza di un treno in moto su un binario rettilineo con velocità costante **u**. Un osservatore fermo a terra che guardi il treno vedrà il passeggero muoversi a una velocità diversa da **v**, e in particolare: se il passeggero cammina nella stessa direzione del treno, la sua velocità rispetto al suolo sarà maggiore di **u**; viceversa, se cammina in direzione opposta, l'osservatore a terra lo vedrà muoversi più lentamente del treno. Si parla in questi casi di *moto relativo*, poiché la sua descrizione dipende dal sistema di riferimento prescelto. Si parla inoltre di *velocità relativa* (del passeggero rispetto al sistema in moto, nell'esempio **v**), di *velocità di trascinamento* (quella del sistema in moto rispetto alla Terra, nell'esempio **u**) e di *velocità assoluta* (del passeggero rispetto alla Terra).

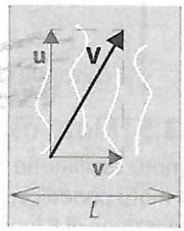
Il moto risultante dalla composizione di un moto uniforme a velocità **v** in un sistema di riferimento a sua volta in moto uniforme con velocità **u** è ancora un moto uniforme, con velocità **V** data dalla somma vettoriale delle due velocità:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Se **v** e **u** sono parallele, il moto risultante avviene lungo la stessa direzione.
Se **v** e **u** sono ortogonali, ovvero se un corpo si muove in direzione ortogonale rispetto alla velocità di trascinamento, può essere comodo descrivere il suo moto, in ogni istante, ragionando in maniera separata lungo due assi cartesiani: uno allineato alla direzione del moto relativo e l'altro allineato a quella di trascinamento.

Per attraversare un fiume il cui letto è largo $L = 50$ m, alcuni gitanti si servono di una barca a remi. Riescono a sviluppare una velocità $v = 5$ m/s in direzione ortogonale alla corrente del fiume, che è pari a $u = 10$ m/s. A quale distanza a valle di quella da cui sono partiti arriveranno i gitanti sull'altra sponda del fiume?

Conviene ragionare separatamente lungo la direzione della corrente, che chiameremo *Y*, e lungo quella a essa perpendicolare in cui si sposta la barca, che chiameremo *X*.



In altre parole: la componente di **V** lungo *X* è **v**. Secondo la legge oraria del moto uniforme, è possibile calcolare il tempo necessario ad attraversare il fiume:

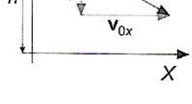
$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{50 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 10 \text{ s}$$

Poiché, inoltre, la componente di **V** lungo *Y* è **u**, adesso che conosciamo la durata dell'attraversamento possiamo calcolare l'effetto del trascinamento lungo il corso del fiume, ancora ricorrendo alla legge oraria del moto uniforme:

$$\Delta y = \Delta t \cdot u = 10 \text{ s} \cdot 10 \text{ m/s} = 100 \text{ m}$$

2.4.2 | Composizione di moti uniformi con moti accelerati

Sia dato un corpo di massa *m* che, come indicato in figura, viene lanciato con una certa velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ da un'altezza *h* sulla superficie terrestre. Analizziamo il moto scomponendolo lungo gli assi cartesiani. Il corpo è soggetto solo all'accelerazione gravitazionale, che agisce esclusivamente lungo la verticale; di conseguenza il moto lungo la verticale è uniformemente accelerato. Al contrario, poiché non ci sono accelerazioni che agiscono lungo l'asse *X*, il moto lungo l'orizzontale non è accelerato.



PARTE QUARTA

Si scomponga quindi il moto di caduta sugli assi ortogonali *X* (orizzontale) e *Y* (verticale) e si indichino rispettivamente con $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{a}_y$ le componenti dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione lungo l'asse *X* e lungo l'asse *Y*. Per quanto detto, ricordando le leggi orarie del moto uniforme e di quello uniformemente accelerato, si ha:

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x} = \text{costante} \qquad a_y = g \Rightarrow v_y = -v_{0y} - g \cdot t$$

Se il corpo viene lanciato orizzontalmente, $v_{0y} = 0$ e le equazioni del moto lungo i due assi sono:

$$x = v_x \cdot t \qquad y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

dalle quali si ottiene l'espressione analitica della traiettoria del corpo:

$$y = h - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_x^2}$$

Poiché g e v_x sono costanti, la rappresentazione grafica del moto nel piano *XY* è una parabola con concavità rivolta verso il basso e il moto è di tipo *parabolico*.

FISICA

Quesiti svolti

1 **Un corpo puntiforme si muove di moto circolare uniforme. Indichiamo con *r* il raggio della circonferenza, con *v* la velocità periferica, con ω la velocità angolare, con *T* il periodo, con *f* la frequenza. Qual è la giusta espressione?**

A $T = v/2\pi r$

B $T = 2\pi r/v$

C $T = f/\pi$

D $T = \omega \cdot v$

E $T = \pi/v$

L'espressione corretta è la B: invertendola si ricava infatti la definizione di velocità, cioè spazio (la lunghezza della circonferenza) fratto tempo (il periodo).

È interessante verificare che le altre espressioni non sono dimensionalmente corrette (non hanno cioè le dimensioni di un tempo):

$$\text{A} \left[\frac{v}{2\pi r}\right] = \frac{[L]/[T]}{[L]} = \frac{1}{[T]}; \quad \text{C} \left[\frac{f}{\pi}\right] = [T]^{-1};$$

$$\text{D} [\omega \cdot v] = [T]^{-1} \cdot \frac{[L]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2}; \quad \text{E} \left[\frac{\pi}{v}\right] = \frac{1}{[L]/[T]} = \frac{[T]}{[L]}$$

2 **Quale delle seguenti quantità rappresenta il tempo di caduta di un grave che cade da un'altezza *h*?**

A $\sqrt{2gh}$ B $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ C $2gh$ D $\frac{1}{2}gh^2$ E gh^2

Dalla teoria del moto uniformemente accelerato si ha che il tempo di caduta di un grave che parte da un'altezza h è $\sqrt{2h/g}$ (risposta B).

Per rispondere al quesito, se non si ricorda la formula e non si vuole ricavarla dalla teoria, si può utilizzare l'analisi dimensionale. Si può cioè controllare se le risposte fornite hanno le dimensioni di un tempo o no. La quantità riportata nella risposta A ha le dimensioni di una velocità, infatti:

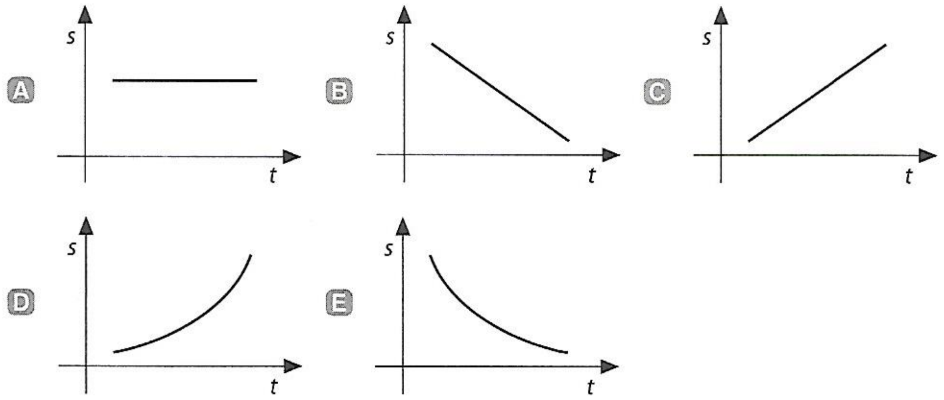
$$[\sqrt{2gh}] = [L]^{1/2}[T]^{-1}[L]^{1/2} = [L][T]^{-1}$$

Da questo si ricava facilmente che le dimensioni della quantità $2gh$ sono $[L]^2[T]^{-2}$ e quelle della quantità $1/2\, gh^2$ sono $[L]^3[T]^{-2}$. Anche le risposte C e D sono pertanto errate. La risposta corretta è la B dato che la quantità ivi riportata è la sola che abbia le dimensioni di un tempo, infatti:

$$\left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = [L]^{1/2}[T][L]^{-1/2} = [T]$$

Si osservi che l'analisi dimensionale è valida in generale come metodo veloce di controllo degli eventuali calcoli effettuati nella risoluzione dei test.

3 **Se la velocità di un'automobile è costante, qual è il grafico che individua l'andamento dello spazio percorso *s* in funzione del tempo *t* ?**



Se la velocità dell'automobile è costante, essa si muove di moto rettilineo uniforme e la legge oraria del moto è $s = v \cdot t$ dove s è lo spazio, t è il tempo e v è il modulo della velocità. Nel moto rettilineo uniforme spazio e tempo sono quindi direttamente proporzionali e il grafico che li rappresenta nel sistema di assi ortogonali *s-t* è una retta crescente. La risposta esatta è la C.

4 **Un treno marcia su vecchi binari che presentano giunzioni ogni 18 m. Un viaggiatore in 120 s cronometra 121 segnali sonori prodotti dal passaggio di una coppia di ruote sulle successive giunzioni delle rotaie. Sapendo che il viaggiatore ha fatto partire il cronometro in corrispondenza del primo dei 121 segnali, a che velocità viaggia il treno?**

A 64,26 km/h B 64,80 km/h C 65,34 km/h D 65,88 km/h E 66,42 km/h

Poiché il treno passa su 121 giunzioni, ha coperto uno spazio pari a 120 intervalli tra una giunzione e l'altra e quindi uguale a 120 · 18 m. Poiché questo spazio è stato percorso in 120 secondi, la velocità del treno è pari a:

$$v = \frac{120 \cdot 18 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 64{,}8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ (risposta B)}$$

5 **Un'automobile parte da ferma e accelera costantemente lungo un rettilineo. Qual è la sua accelerazione, costante, perché percorra 1 chilometro in 25 secondi?**

A 80 m/s^2 B $3{,}2 \text{ m/s}^2$ C $1{,}6 \text{ m/s}^2$ D $1{,}6 \text{ m/s}$ E 40 m/s^2

Vengono forniti lo spazio di accelerazione e il tempo impiegato e viene chiesto il valore dell'accelerazione. La relazione del moto uniformemente accelerato che lega le tre variabili è:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + (1/2)\, a \cdot t^2$$

che, nel caso in questione si trasforma nella più semplice:

$$s = (1/2)\, a \cdot t^2$$

(la velocità iniziale v_0 è infatti nulla e si può porre $s_0 = 0$). Quindi:

$$a = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{2000}{625} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per rispondere al quesito **non è necessario svolgere la divisione.** La risposta esatta è la B in quanto il numero 625 è contenuto circa 3 volte nel numero 2000.

FISICA

6 **Un atleta olimpionico corre i 100 m piani percorrendo in 3 s i primi 18 m con accelerazione costante e proseguendo quindi la gara con velocità costante. Il tempo impiegato complessivamente è:**

- A 9,83 s
- B 10,00 s
- C 11,20 s
- D 9,95 s
- E 8,85 s

Consideriamo le due fasi della corsa.

Nei primi 3 secondi il moto si svolge su uno spazio di 18 m, ed è uniformemente accelerato con accelerazione a e velocità iniziale nulla; pertanto, invertendo la legge oraria, si calcolano l'accelerazione e la velocità finale raggiunta:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow a = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 18\ \text{m}}{(3\ \text{s})^2} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_f = v_0 + at_1 = 0 + 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\ \text{s} = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La seconda parte della corsa si svolge a velocità costante sui rimanenti 82 m. Si tratta di invertire la legge oraria del moto uniforme per trovare il tempo:

$$s_2 = v_f \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v_f} = \frac{82\ \text{m}}{12\ \text{m/s}} = 6{,}83\ \text{s}$$

Sommando i due tempi di percorrenza si trova infine il tempo complessivo:

$$t = t_1 + t_2 = 3\ \text{s} + 6{,}83\ \text{s} = 9{,}83\ \text{s} \quad \text{(risposta A)}$$

7 **Il tempo di frenata di una moto la cui velocità passa da 90 a 40 km/h è di 3 secondi. Il modulo dell'accelerazione subita dal pilota è:**

- A nulla
- B pari a circa l'accelerazione di gravità g
- C pari a circa $g/2$
- D pari a circa $2g$
- E infinita

Dato che la velocità della moto è passata da $v_1 = 90$ km/h a $v_2 = 40$ km/h, l'accelerazione è stata negativa (si parla anche di decelerazione).

Il quesito però richiede solo il modulo dell'accelerazione e non il suo segno.

È sufficiente una rapida lettura delle risposte proposte per capire che è necessario convertire tutte le misure date in unità di misura del Sistema Internazionale.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40\ \text{km/h} - 90\ \text{km/h}}{3\ \text{s}} = \frac{-50\ \text{km/h}}{3\ \text{s}}$$

$$a \approx \frac{-15\ \text{m/s}}{3\ \text{s}} = -5\ \text{m/s}^2 \approx -\frac{1}{2}g \Rightarrow |\mathbf{a}| \approx \frac{1}{2}g$$

La risposta corretta è la C.

PARTE QUARTA

8 **Un sasso ruota attorno a un centro fisso trattenuto da un filo lungo 1 m con velocità angolare $\omega = \sqrt{10}$ rad/s. Se g è l'accelerazione di gravità, qual è (entro il 2%) la giusta proposizione?**

- A È sottoposto ad accelerazione pari a 1 g
- B È sottoposto ad accelerazione pari a 10 g
- C La velocità periferica è 10π m/s
- D La velocità periferica è π^2 m/s
- E La frequenza del moto è 2 Hz

Dai dati del problema si deduce che il moto descritto dal sasso è circolare uniforme, con raggio pari a 1 m. Questo è sufficiente a scrivere che l'accelerazione a cui è sottoposto (l'accelerazione centripeta) vale:

$$a = \omega^2 \cdot r = (\sqrt{10}\ \text{rad/s})^2 \cdot 1\ \text{m} = 10\ \text{m/s}^2$$

Se si prende come valore per l'accelerazione di gravità 9,8 m/s^2 si vede che lo scarto dal valore trovato è:

$$\frac{a-g}{a} = \frac{(10-9{,}8)\ \text{m/s}^2}{10\ \text{m/s}^2} = 0{,}02 = 2\%$$

Si può quindi concludere che la risposta corretta è la A.

9 **Un treno, viaggiando a velocità costante di 100 km/h, va da una città A a una città B in quattro ore. Si supponga che, arrivato in B, inverta immediatamente il verso di marcia e ritorni ad A con una velocità costante, ma diversa da quella dell'andata. Quale deve essere la velocità di ritorno perché la velocità media nel tragitto complessivo A-B-A sia di 200 km/h?**

- A 300 km/h
- B 400 km/h
- C 500 km/h
- D 600 km/h
- E Infinita

L'errore che non bisogna fare è il seguente: dato che la media aritmetica tra 100 e 300 è 200, se la velocità media nel percorso di andata è pari a 100 km/h, affinché la velocità media del tragitto complessivo sia 200 km/h, il treno deve tornare con una velocità pari a 300 km/h.

Per rendersi conto dell'errore commesso nella deduzione precedente si ragioni come segue: il tragitto complessivo di andata e ritorno è lungo 800 km (il treno impiega 4 ore per andare da A a B procedendo alla velocità di 100 km/h). Procedendo alla velocità media di 200 km/h (che è quanto richiesto dal problema) occorrono 4 ore per percorrere l'intero percorso (800 km). Il treno ha dunque a disposizione 4 ore per percorrere il tragitto di andata e ritorno (A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ A). Avendo però già utilizzato 4 ore per il solo tragitto di andata (A $\rightarrow$ B), per rispettare la condizione richiesta il treno dovrebbe percorrere il tragitto di ritorno (B $\rightarrow$ A) senza impiegare tempo, cioè istantaneamente e quindi con una velocità infinita (risposta E).

Più correttamente il quesito (tratto da un test ufficiale degli anni passati) avrebbe dovuto riportare la risposta: «la condizione richiesta non è realizzabile».

10 **Un ciclista *T* segue un ciclista *V* a una distanza di 1 km e i due procedono alla medesima velocità. La strada improvvisamente inizia a salire con pendenza costante. Ammesso che ciascuno dei ciclisti dimezzi la sua velocità dall'istante in cui inizia la salita, qual è la loro distanza quando ambedue sono nel tratto in salita?**

A 1 km

B 2 km

C 500 m

D 250 m

E Non è nota se non si conosce la velocità iniziale dei ciclisti

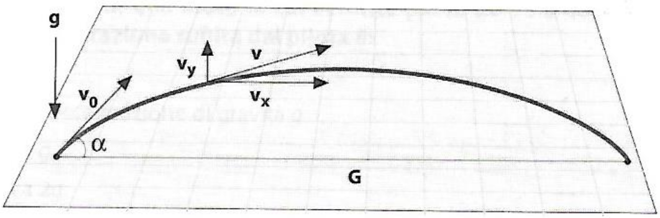
Vi sono più modi per risolvere il quesito; uno dei più rapidi è il seguente: quando i due ciclisti si trovano in piano sono separati da una **distanza temporale** pari a $t = \frac{1000\text{ m}}{v}$ dove v è la velocità comune dei due ciclisti. Quando entrambi i ciclisti si trovano sul tratto in salita la loro distanza spaziale è diminuita, la loro velocità è dimezzata **ma la distanza temporale è rimasta la stessa**. Indicando con x la distanza spaziale dei due corridori che si trovano in salita si ha:

$$\frac{1000\text{ m}}{v} = \frac{x}{v/2} \quad \Rightarrow \quad x = 500\text{ m} \qquad \text{(risposta C)}$$

11 **Le masse di due proiettili sono in rapporto 10 : 1. Trascurando l'attrito dell'aria, se sparati dallo stesso cannone con la stessa velocità iniziale, in quale rapporto saranno le loro gittate?**

A 1 : 1   B 1 : 10   C 10 : 1   D 100 : 1   E 5 : 1

In generale, la traiettoria del moto di un proiettile risulta dalla composizione di un moto rettilineo uniforme (diretto orizzontalmente) con un moto naturalmente accelerato (diretto verticalmente): si tratta di un **moto parabolico** (la traiettoria seguita dal proiettile è un arco di parabola). La *gittata G* è la distanza percorsa in orizzontale dal proiettile.



Conoscendo l'angolo α formato dalla velocità iniziale con il piano orizzontale e il modulo v_0 della velocità iniziale, *G* si può ricavare scomponendo il moto lungo i due assi. È la distanza percorsa in orizzontale a velocità v_{0x} (costante perché in orizzontale non agisce alcuna forza), in un tempo doppio di quello necessario a raggiungere l'altezza massima, detto t_{max} (ovvero nel tempo necessario a salire e a scendere). Lungo la verticale il moto è uniformemente accelerato, dunque sappiamo che:

$$t_{max} = v_{0y}/g = v_0 \text{sen}\alpha/g$$

Di conseguenza, *G* vale:

$$G = v_{0x} \cdot 2t_{max} = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot 2(v_0 \text{sen}\alpha/g) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen}2\alpha$$

Poiché *G* non dipende dalla massa del proiettile, ma solo dal modulo e dalla direzione della velocità iniziale, le gittate dei due proiettili del problema sono le stesse (risposta A).

12 **Una barca attraversa un fiume partendo da una sponda e dirigendosi in direzione perpendicolare alla sponda opposta, parallela alla prima, con velocità costante *V* rispetto all'acqua. Detto *T* il tempo che la barca impiegherebbe per raggiungere l'altra sponda se l'acqua fosse ferma, quanto vale il tempo minimo per attraversare il fiume (a parità di velocità della barca rispetto all'acqua) se la corrente è uniforme, con velocità di valore *V* parallela alle sponde?**

A $T/2$

B $T/\sqrt{2}$

C T

D $2T$

E $2 \cdot \sqrt{T}$

Per risolvere questo esercizio nel modo migliore (più veloce) è determinante la scelta del *sistema di riferimento* da utilizzare.

Si immagini di essere collocati in una seconda barca che si muove con la stessa velocità e nella stessa direzione della corrente (la barca "osservatore" è in quiete rispetto alla corrente). Si osservino dunque i due passaggi della barca da una sponda all'altra del fiume, compiuti con e senza corrente. Rispetto al sistema di riferimento scelto, la velocità della barca è, in entrambi i casi, perpendicolare alle sponde del fiume; sia la velocità della barca che lo spazio da percorrere rimangono gli stessi: il tempo impiegato ad attraversare il fiume nei due casi ($T = s/V$) è quindi esattamente lo stesso (risposta C).

FISICA