1 | Insiemi, numeri e operazioni

1.1 | Insiemi

Un *insieme* può essere inteso come una *collezione di oggetti* (detti *membri* o *elementi* dell'insieme): il concetto di *insieme* e quello di *elemento di un insieme* sono **concetti primitivi**, ossia non definibili tramite concetti più semplici.

Un insieme A risulta definito quando esiste una "regola" specifica (o *univoca*) che permette di stabilire se un qualunque elemento x appartiene o meno all'insieme A.

Esempi di insiemi:
- insieme delle consonanti dell'alfabeto italiano;
- insieme degli stati europei;
- insieme dei numeri relativi;
- insieme delle frazioni.

1.1.1 | Simbologia

- $x \in A$; x appartiene ad A
- $x \notin A$; x non appartiene ad A
- $A \subseteq B$; A è contenuto in B (A è **sottoinsieme** di B)
- $A \subset B$; A è contenuto propriamente in B (A è **sottoinsieme proprio** di B)

1.1.2 | Definizioni

Due insiemi A e B sono **uguali** quando contengono gli stessi elementi.

L'**insieme vuoto** (indicato con $\varnothing$) è un insieme privo di elementi.

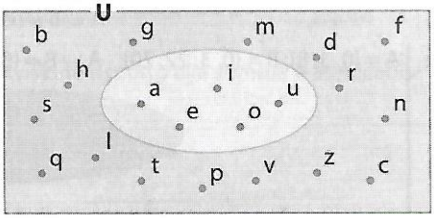
Può capitare che la definizione di un insieme non sia completa, ossia che non consenta di identificare univocamente l'insieme.

Per esempio, l'insieme $A = \{x \mid 1 < x < 5\}$, ossia l'insieme dei numeri compresi fra 1 e 5 (estremi esclusi), non è univocamente determinato: se infatti x è un numero intero, l'insieme A conterrà solo tre elementi (ossia $A = \{2; 3; 4\}$), mentre se x è un numero decimale, l'insieme A sarà infinito.

Occorre, in altre parole, indicare l'*ambiente* da cui trarre gli elementi dell'insieme.

L'**insieme ambiente** o **universo** (indicato con U) contiene la totalità dei possibili elementi.

In questo senso, l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano ha come universo U proprio l'alfabeto italiano:



1.1.3 | Corrispondenze fra insiemi

Dati due insiemi A e B, se esiste un criterio che permette di associare elementi di A con elementi di B, si dice che i due insiemi sono legati da una *corrispondenza* (o *relazione*).

Dati gli insiemi A = {1, 2, 3, 4, 5, ...} e B = {0, 1} un esempio di corrispondenza è: associare a ogni numero dispari di A l'elemento "0" di B e a ogni numero pari di A l'elemento "1" di B.

Corrispondenza univoca

Tra due insiemi A e B vi è una corrispondenza univoca (da A a B) quando a **ogni** elemento a di A corrisponde **uno e un solo** elemento b di B.

Per affermare che tra due insiemi A e B vi è una corrispondenza univoca, è necessario che sia definita una legge che permette di decidere, preso un qualunque elemento $a \in A$, qual è **il** corrispondente elemento $b \in B$.

La corrispondenza univoca fra gli elementi di A e quelli di B viene anche detta **funzione** o **applicazione** φ di A in B e viene indicata con $\varphi\colon A \to B$.

Corrispondenza biunivoca

Tra due insiemi vi è una corrispondenza biunivoca quando a **ogni** elemento di un insieme corrisponde **uno e un solo** elemento dell'altro insieme **e viceversa**.

Per affermare che tra due insiemi A e B vi è una corrispondenza biunivoca, è necessario che sia definita una legge che associa a ogni elemento $a \in A$, uno e un solo elemento $b \in B$, e viceversa a ogni $b \in B$ uno e un solo elemento $a \in A$. La corrispondenza biunivoca fra gli elementi di A e quelli di B viene anche detta **trasformazione** tra A e B.

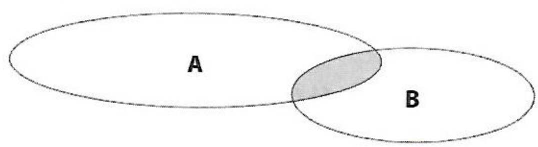
1.1.4 | Operazioni con gli insiemi

Intersezione

L'insieme **intersezione** di A e B è l'insieme degli elementi appartenenti **contemporaneamente** ad A **e** a B, ossia a entrambi gli insiemi. In simboli:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A = {0, 3, 8}; B = {0, 3, 22, 70}: $A \cap B = \{0, 3\}$

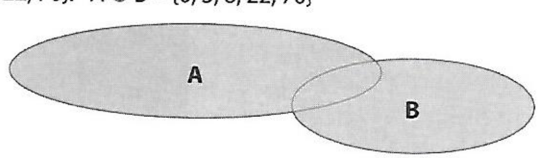


Unione

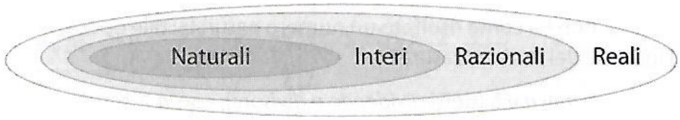
L'insieme **unione** di A e B è l'insieme degli elementi appartenenti ad A **oppure** a B, ossia ad almeno uno dei due insiemi. In simboli:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

A = {0, 3, 8}; B = {0, 3, 22, 70}: $A \cup B = \{0, 3, 8, 22, 70\}$



Uno dei primi obiettivi da perseguire è quello di essere in grado di *classificare* i numeri, ossia conoscere i differenti *insiemi numerici* (insieme dei naturali, insieme degli interi relativi, insieme dei razionali...). Partendo dai numeri naturali, con successivi ampliamenti delle **classi numeriche**, si arriva fino ai numeri reali. Nella seguente rappresentazione insiemistica appare evidente che ciascuna classe è un ampliamento di quella che la precede.



1.2 | Numeri naturali

I numeri naturali costituiscono un insieme infinito, generalmente indicato con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

I numeri naturali devono il loro nome al fatto che traducono l'azione *naturale* del contare.

1.2.1 | Operazioni fondamentali e loro proprietà

Alla base dell'aritmetica si trovano, oltre alla definizione di numero naturale, le definizioni delle operazioni (*addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza* ed *estrazione di radice*), delle quali è importante conoscere le proprietà. In primo luogo occorre ricordare l'**ordine** con cui devono essere *svolte le operazioni che si trovano nella medesima espressione.*

Il corretto **ordine di priorità decrescente** è il seguente:

1: parentesi 2: potenze e radici 3: moltiplicazioni e divisioni 4: addizioni e sottrazioni

$3 + 4 \cdot (3 + 2)^2 = 3 + 4 \cdot (5)^2 = 3 + 4 \cdot 25 = 3 + 100 = 103$

La tabella seguente riporta le principali proprietà delle quattro operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione).

Operazione	Proprietà
Addizione	commutativa $\rightarrow$ $a + b = b + a$ associativa $\rightarrow$ $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Sottrazione	invariantiva $\rightarrow$ $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$
Moltiplicazione	commutativa $\rightarrow$ $a \cdot b = b \cdot a$ associativa $\rightarrow$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ distributiva rispetto alla somma $\rightarrow$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Divisione	invariantiva $\rightarrow$ $a : b = (a : c) : (b : c) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ distributiva rispetto alla somma $\rightarrow$ $(a + b) : c = a : c + b : c$

Si noti che in una frazione la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma è applicabile solo al dividendo (numeratore) e **non** al divisore (denominatore).

$(6 + 9) \div 3 = 6 \div 3 + 9 \div 3$ mentre $24 \div (4 + 8) \neq 24 \div 4 + 24 \div 8$

Le proprietà dell'elevamento a potenza e dell'estrazione di radice verranno trattate nei capitoli successivi.

1.2.2 | Divisione con resto, criteri di divisibilità e numeri primi

Nell'insieme dei numeri naturali non è detto che il problema di dividere fra loro due naturali a e b abbia soluzione (nel senso che non è detto che il quoziente fra due numeri naturali sia anch'esso un numero naturale).

L'operazione $12 \div 4$ ha come risultato il numero naturale 3: tale operazione **può** quindi essere effettuata nell'insieme dei numeri naturali.

L'operazione $5 \div 3$ non ha come risultato un numero naturale: tale operazione **non può** essere effettuata nell'insieme dei numeri naturali.

Dati due numeri naturali a e b (detti *dividendo* e *divisore*), con $a \geq b$ e $b \neq 0$, si definisce *divisione con resto* l'operazione che consiste nel determinare due numeri naturali q ed r (detti *quoziente* e *resto*), con $0 \leq r < b$, tali che $a = q \cdot b + r$.

Se $r = 0$, a si dice **divisibile** per (o **multiplo** di) b, mentre b è detto **divisore** (o **fattore**) di a.

Esistono alcuni *criteri di divisibilità* che consentono di stabilire rapidamente se un qualsiasi numero intero n sia divisibile (o meno) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11.

	***n* è divisibile:**
per 2	se è divisibile per 2 l'ultima sua cifra;
per 3	se è divisibile per 3 la somma delle sue cifre;
per 4	se è divisibile per 4 il numero formato dalle ultime due cifre;
per 5	se l'ultima cifra è 0 oppure 5;
per 6	se è divisibile per 2 e per 3;
per 7	se divisibile per 7 la differenza tra il numero ottenuto escludendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità;
per 8	se è divisibile per 8 il numero formato dalle ultime tre cifre;
per 9	se è divisibile per 9 la somma delle sue cifre;
per 10	se l'ultima cifra è zero;
per 11	se è divisibile per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari.

Qualsiasi numero naturale è **sempre** divisibile (senza resto) per sé stesso e per l'unità.

Si consideri, per esempio, il numero naturale 12: si ha che $12 \div 12 = 1$ e che $12 \div 1 = 12$.

Alcuni numeri naturali ammettono anche altri divisori (oltre a sé stessi e all'unità).

Si consideri ancora il numero naturale 12: i suoi divisori sono: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Si dicono **primi** i numeri naturali maggiori di 1 che ammettono come divisori **solo** sé stessi e l'unità.

I primi dieci numeri primi sono: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

1.2.3 | Scomposizione in fattori primi

La scomposizione in fattori primi di un numero naturale maggiore di 1 è la rappresentazione del numero stesso come **prodotto dei suoi fattori primi** (ossia come prodotto dei suoi divisori che siano anche numeri primi): indipendentemente dal procedimento utilizzato per il calcolo, la scomposizione in fattori primi è **unica**.

La scomposizione in fattori primi di 126 è: $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Per scomporre un numero in fattori primi si utilizza il metodo delle *divisioni successive*: si procede per tentativi cercando un numero primo (partendo dai valori più piccoli: 2, 3, 5, ...) che sia divisore del numero dato finché si trova il primo fattore. A questo punto si riapplica il procedimento al quoziente ottenuto e così via fino a quando si trova come quoziente 1.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{126} & \mathbf{2} \\ \mathbf{63} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ \mathbf{63} & \mathbf{3} \\ \mathbf{21} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ \mathbf{21} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \end{array} \rightarrow 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

1.2.4 | Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Il **Massimo Comune Divisore** (M.C.D.) di due o più interi è il maggiore fra gli interi che dividono (senza resto) tutti i numeri dati. Il **minimo comune multiplo** (m.c.m.) di due o più interi è il minore fra gli interi multipli di tutti i numeri dati.

Per determinare il **M.C.D.** di due o più numeri, li si scompone in fattori primi e si calcola il prodotto dei **fattori primi comuni**, ciascuno preso una volta sola con il **minimo esponente** con cui figura.

Per determinare il **m.c.m.** di due o più numeri, li si scompone in fattori primi e si calcola il prodotto dei **fattori primi comuni e non comuni**, ciascuno preso una volta sola con il **massimo esponente** con cui figura.

M.C.D.(24, 144, 60) = 12 e m.c.m.(24, 144, 60) = 720 infatti:

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{M.C.D.}(24, 144, 60) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{m.c.m.}(24, 144, 60) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720 \end{array}$$

1.3 | Numeri interi relativi

Nell'insieme dei numeri naturali non sempre è possibile effettuare l'operazione di sottrazione fra due numeri.

L'operazione 4 – 7 non può essere effettuata nell'insieme dei numeri naturali.

Per rendere possibile la sottrazione anche nei casi in cui il minuendo è minore del sottraendo si introducono i numeri *interi negativi* (mentre i numeri naturali considerati sinora prendono il nome di numeri *interi positivi*) e lo zero.

Gli infiniti numeri interi positivi (ossia i numeri naturali), lo zero e gli infiniti numeri interi negativi costituiscono l'insieme dei numeri interi relativi.

I numeri relativi costituiscono quindi un insieme infinito, indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots, +n, \ldots\}$$

L'introduzione dello zero rende necessaria la seguente osservazione.

Negli interi, come in ogni altro insieme numerico, **non si può dividere per zero.**
L'operazione $a \div 0$ è priva di significato.

Viceversa, l'operazione $0 \div a$ ha sempre significato per ogni $a \neq 0$ e si ha: $0 \div a = 0$.

Per il prodotto vale inoltre la notevole **legge dell'annullamento del prodotto**:

Il prodotto tra due numeri si annulla se e solo se almeno uno dei due numeri è uguale a zero.

MATEMATICA

1.3.1 | Valore assoluto di un numero relativo

Il *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero relativo a (indicato con $|a|$) è una quantità **positiva o nulla** così definita:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Il numero $-a$ non è necessariamente negativo: se $a = -3 \rightarrow -a = -(-3) = +3 > 0$.

$|-3| = 3\,;\ |+7| = 7\,.$

Due numeri relativi aventi lo **stesso valore assoluto e segni contrari** si dicono **opposti** (o anche simmetrici o contrari). Due numeri relativi **aventi lo stesso segno** si dicono **concordi**. Due numeri relativi **aventi segno diverso** si dicono **discordi**.

1.3.2 | Confronto fra numeri relativi

Due numeri relativi si dicono **uguali** se hanno lo **stesso valore assoluto** e lo **stesso segno.**

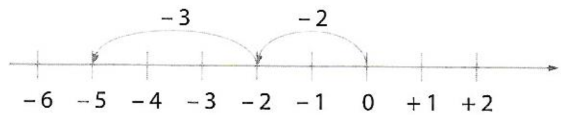
Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo. Fra due numeri positivi è maggiore quello che ha il valore assoluto maggiore, mentre **fra due numeri negativi è maggiore quello che ha il valore assoluto minore.** Inoltre lo zero è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

1.3.3 | Operazioni fra numeri relativi

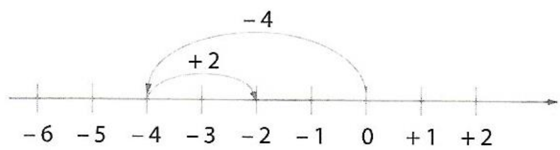
Addizione di numeri relativi: se i due numeri sono concordi, si addizionano i valori assoluti e si mantiene lo stesso segno; se i due numeri sono discordi, si calcola la differenza fra i valori assoluti e si tiene il segno del numero con valore assoluto maggiore.

Per "visualizzare" le operazioni fra numeri relativi può essere utile fare riferimento a una sorta di scala termometrica (come quella utilizzata nei comuni termometri):

$(-2)+(-3) = -5$

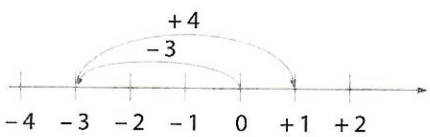


$(-4)+(+2) = -2$



Sottrazione fra numeri relativi: la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione, quindi sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto. Conviene quindi trasformare la sottrazione in un'addizione e utilizzarne le relative regole.

$(-3)-(-4) = (-3)+(+4) = +1$



Anche le operazioni di moltiplicazione e di divisione risultano facilitate se si utilizza il concetto di valore assoluto.

Moltiplicazione e divisione fra numeri relativi: si esegue la moltiplicazione (o la divisione) fra i valori assoluti e si tiene il segno positivo se i due numeri sono concordi, negativo se sono discordi.

$(-2) \cdot (-3) = +6\,;\ (-4) \cdot (+2) = -8\,;\ (+6) \div (-3) = -2\,;\ (-12) \div (-4) = +3$

Per meglio memorizzare le regole sul segno di un prodotto o di un quoziente fra numeri relativi, può essere utile la seguente tabella:

Segno degli operandi		Segno del risultato
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

1.4 | Numeri razionali

Come si è visto, nell'insieme dei numeri interi relativi non sempre è possibile effettuare l'operazione di quoziente fra due numeri interi.

L'operazione $3 \div 8$ non ha soluzione nell'insieme dei numeri interi.

Per rendere possibile il quoziente anche nei casi in cui il dividendo non sia multiplo del divisore si introducono i numeri *razionali*.

Tutte le possibili frazioni (rapporti fra numeri interi relativi) costituiscono l'insieme dei numeri razionali.

I numeri razionali costituiscono quindi un insieme infinito, indicato con il simbolo $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

La frazione $\frac{3}{8}$ è il rapporto fra l'intero 3 (il *numeratore*) e l'intero 8 (il *denominatore*).

È utile osservare che tutti gli interi possono essere pensati come frazioni con denominatore unitario, per cui si ricava la seguente catena di inclusioni fra insiemi numerici:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

1.4.1 | Proprietà invariantiva e frazioni equivalenti

La proprietà invariantiva, valida per l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, vale anche per l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali.

Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero (purché diverso da zero) **si ottiene una frazione equivalente a quella data.**

Da un altro punto di vista, è possibile affermare che il valore di un numero non varia se questo viene moltiplicato per 1. In una frazione, moltiplicare sia il numeratore che il denominatore per lo stesso numero equivale a moltiplicare la frazione per 1: la frazione non cambia. Lo stesso accade anche se, anziché moltiplicare, si divide per lo stesso numero sia numeratore che denominatore.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6};\ \frac{5}{15} = \frac{5}{15} \div 1 = \frac{5}{15} \div \frac{5}{5} = \frac{5 \div 5}{15 \div 5} = \frac{1}{3}$$

Una frazione viene detta **irriducibile** o **ridotta ai minimi termini** quando i suoi termini sono *primi fra loro* (ossia quando il loro M.C.D. vale 1). Per ridurre una frazione ai minimi termini si divide sia il numeratore che il denominatore per il loro M.C.D. Questa operazione prende anche il nome di "semplificazione".

$$\frac{24}{60} \xrightarrow{\text{essendo M.C.D.}(24, 60) = 12} \frac{24 \div 12}{60 \div 12} = \frac{2}{5}$$

MATEMATICA

1.4.2 | Operazioni tra frazioni

Addizione e sottrazione tra frazioni: per addizionare (o sottrarre) fra loro due o più frazioni occorre che esse abbiano lo stesso denominatore.

Per ridurre più frazioni al *minimo comune denominatore* si riducono le frazioni ai minimi termini (se non lo sono già), si cerca il m.c.m. dei denominatori e si trasforma ciascuna frazione nella frazione equivalente che abbia il m.c.m. trovato come denominatore.

Una volta ridotte le frazioni al minimo comune denominatore, si considera come somma (o differenza) delle frazioni date una nuova frazione avente per numeratore la somma (o la differenza) fra i numeratori e per denominatore il minimo comune denominatore trovato.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8} \xrightarrow{\text{essendo m.c.m.}(4,6,8)=24} \frac{18}{24}+\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{18+20-21}{24}=\frac{17}{24}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{6}+\frac{12}{15}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{essendo m.c.m.}(2,3,5)=30} \frac{15}{30}-\frac{20}{30}+\frac{24}{30}=\frac{15-20+24}{30}=\frac{19}{30}$$

Moltiplicazione tra frazioni: il prodotto fra due o più frazioni è la frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}=\frac{5\cdot7}{4\cdot2\cdot8}=\frac{35}{64}$$

Per quando riguarda il segno di un prodotto tra frazioni, vale ancora la regola e la tabella vista nel § 1.3.3: il prodotto è positivo se le due frazioni sono concordi, negativo se sono discordi.

Inoltre, in un prodotto tra frazioni è possibile effettuare la semplificazione prima di svolgere il prodotto, dividendo il numeratore di una delle due frazioni e il denominatore dell'altra per il loro M.C.D.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{{}^{1}\cancel{3}}{4}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{8} \qquad \frac{7}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{7}{{}_{1}\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{15}^{3}}{4}=\frac{7}{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$$

Divisione tra frazioni: per dividere fra loro due frazioni si moltiplica la prima per la reciproca (ossia la frazione ottenuta scambiando fra loro numeratore e denominatore) della seconda.

$$\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10} \qquad \frac{4}{7}\div2=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

Confronto tra frazioni: per confrontare fra loro due o più frazioni occorre che esse abbiano lo stesso denominatore. Una volta ridotte le frazioni al minimo comune denominatore, si confrontano fra loro i numeratori.

Per confrontare fra loro le tre frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, le si riduce allo stesso denominatore, ottenendo $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$ e $\frac{21}{24}$. Essendo $18<20<21$, si ottiene: $\frac{18}{24}<\frac{20}{24}<\frac{21}{24} \rightarrow \frac{3}{4}<\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$.

Se le frazioni da confrontare sono soltanto due (per esempio a/b e c/d) esiste un metodo più rapido: si confrontano i due prodotti $a\cdot d$ e $b\cdot c$ e si utilizza la regola seguente.

La frazione più grande è quella il cui numeratore compare nel prodotto maggiore.

Per confrontare fra loro le due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$, si calcolano i due prodotti $4\cdot4=16$ e $5\cdot3=15$. Essendo $16>15$, il numeratore che compare nel prodotto maggiore è 4, per cui la frazione maggiore è $\frac{4}{5}$, ossia $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$.

PARTE TERZA

1.4.3 | Numeri decimali e frazioni generatrici

Ogni numero razionale (ossia ogni frazione) può anche essere rappresentato in forma di **numero decimale**: è sufficiente **dividere il numeratore per il denominatore** utilizzando la nota regola di divisione fra interi.

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4$$

Trattandosi di una divisione fra interi, possono presentarsi due casi:

1. a un certo punto della divisione si trova un resto nullo: il quoziente risulta quindi formato da una parte intera (eventualmente nulla) seguito dalla virgola e da un numero finito di cifre (eventualmente nessuna). Si è ottenuto un *numero decimale limitato*;

$$\frac{8}{5} = 8 \div 5 = 1{,}6$$

2. per quanto si prosegua nell'operazione di divisione non si trova mai un resto nullo: il quoziente risulta allora formato da una parte intera (eventualmente nulla) seguita dalla virgola e da un numero infinito di cifre. Si è ottenuto un *numero decimale illimitato*. I resti sono numeri interi minori del divisore, quindi proseguendo nell'operazione di divisione si deve ripresentare un resto già ottenuto in precedenza: da questo punto in poi, tutti i resti che seguono si ripetono sempre nello stesso ordine e così pure le cifre del quoziente. Il gruppo di cifre decimali che si ripete nel quoziente viene detto *periodo* (mentre il gruppo delle eventuali cifre fra la virgola e la prima ricorrenza del periodo viene detto *antiperiodo*) e il numero decimale è *illimitato periodico*.

$\frac{10}{3} = 3{,}333... = 3{,}(3) = 3{,}\bar{3}$: il periodo è 3.

$\frac{4}{15} = 0{,}2666... = 0{,}2(6) = 0{,}2\bar{6}$: l'antiperiodo è 2 mentre il periodo è 6.

Data una frazione è sempre possibile trovare il corrispondente numero decimale.

È vero anche il viceversa: dato un numero decimale limitato o illimitato periodico è possibile trovare la frazione corrispondente, che prende il nome di *frazione generatrice*.

Di nuovo si presentano due casi.

1. Se il numero decimale è limitato, si forma la frazione moltiplicando e dividendo il numero decimale per il numero costituito dalla cifra 1 seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato: la frazione ottenuta potrà poi essere ridotta ai minimi termini.

$$0{,}06 = \frac{0{,}06 \cdot 100}{100} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

2. Se il numero decimale è illimitato periodico, si forma la frazione avente per numeratore la differenza fra il numero costituito dalla parte intera seguita dall'antiperiodo e dal periodo preso una sola volta e il numero composto dalla parte intera e dall'eventuale antiperiodo e, per denominatore, un numero composto da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tante cifre 0 quante sono quelle dell'eventuale antiperiodo.

- $0{,}(13) = \frac{13-0}{99} = \frac{13}{99}$: in questo caso non c'è antiperiodo.
- $2{,}18(4) = \frac{2184-218}{900} = \frac{1966}{900} = \frac{983}{450}$: in questo caso l'antiperiodo è 18.

MATEMATICA

1.4.4 | Operazioni tra numeri decimali

Addizione e sottrazione tra numeri decimali: per addizionare (o sottrarre) fra loro due o più numeri decimali è conveniente allineare una sotto l'altra le virgole dei diversi numeri. Questo assicura che i decimi siano addizionati (o sottratti) ai decimi, i centesimi ai centesimi e così via.

Per effettuare la somma
$$\begin{array}{r} 0{,}6\ + \\ 0{,}07\ + \\ \underline{0{,}008\ =} \end{array}$$
si utilizza l'allineamento
$$\begin{array}{l} 0{,}6\quad\ + \\ 0{,}07\ \ + \\ \underline{0{,}008\ =} \\ 0{,}678 \end{array}$$

Moltiplicazione tra numeri decimali: per moltiplicare fra loro due o più numeri decimali si effettua il calcolo come se fossero interi ("dimenticandosi" della virgola). Il risultato avrà un numero di cifre decimali pari alla somma dei numeri di cifre decimali dei fattori.

$$\begin{array}{rccl} 0{,}675 & \times & \rightarrow & \text{3 cifre decimali } + \\ \underline{0{,}42} & \underline{=} & \rightarrow & \underline{\text{2 cifre decimali } =} \\ 1350 & & & \\ \underline{2700\ \ } & & & \\ 0{,}28350 & & \leftarrow & \text{5 cifre decimali} \end{array}$$

Divisione tra numeri decimali: per dividere fra loro due numeri decimali si moltiplicano sia il dividendo che il divisore per l'opportuno multiplo di 10 (per la proprietà invariantiva il quoziente non cambia) in modo che diventino entrambi interi, quindi si effettua la divisione nel modo usuale.

$0{,}675 \div 0{,}25 \;=\; 675 \div 250 \;=\; 2{,}7$

L'espressione $\{9{,}18-[6{,}3-(3{,}2+5{,}6)]\}+\{[(-4{,}1+4{,}21)-(3{,}65\div 5)]-9{,}06\}$ si svolge (applicando le regole viste finora) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &\{9{,}18-[6{,}3-(3{,}2+5{,}6)]\}+\{[(-4{,}1+4{,}21)-(3{,}65\div 5)]-9{,}06\} \\ &= \{9{,}18-[6{,}3-8{,}8]\}+\{[0{,}11-0{,}73]-9{,}06\} \\ &= \{9{,}18-[-2{,}5]\}+\{[-0{,}62]-9{,}06\} \\ &= \{9{,}18+2{,}5\}+\{-0{,}62-9{,}06\} \;=\; 11{,}68-9{,}68 \;=\; 2 \end{aligned}$$

Confronto tra numeri decimali: conviene aggiungere alcuni zeri dopo l'ultima cifra decimale di ciascun numero in modo che tutti i numeri abbiano lo stesso numero di cifre dopo la virgola. Si effettua poi il confronto nella maniera usuale.

Per confrontare fra loro 0,62, 0,073 e 0,0084 conviene trasformarli rispettivamente in 0,6200, 0,0730 e 0,0084 da cui si ricava che:

$$0{,}0084 < 0{,}0730 < 0{,}6200$$

Può capitare che venga richiesto di confrontare numeri decimali con frazioni: in questi casi, occorre "uniformare" i numeri, trasformandoli tutti in frazioni oppure tutti in forma decimale.

Per disporre in ordine crescente i seguenti numeri (decimali e frazionari):

$$x=0{,}8; \quad y=0{,}63; \quad z=13/20; \quad w=7/25$$

si trasformano prima i decimali in frazioni:

$$x = 0{,}8 = 8/10 \qquad y = 0{,}63 = 63/100 \qquad z = 13/20 \qquad w = 7/25$$

poi li si riduce tutti allo stesso denominatore 100:

$$x = 80/100 \qquad y = 63/100 \qquad z = 65/100 \qquad w = 28/100$$

Infine dal confronto fra i numeratori si deduce che l'ordine crescente è w, y, z, x.

PARTE TERZA

1.5 | Percentuali

Le percentuali sono in sostanza delle frazioni: **per cento** è un sinonimo di **centesimi**, nel senso che 25% significa 25 centesimi.

- $25\% = \dfrac{25}{100}$
- $2000\% = \dfrac{2000}{100}$
- $0{,}3\% = \dfrac{0{,}3}{100} = \dfrac{3}{1000}$

Una percentuale è pertanto una frazione con denominatore pari a 100. È possibile esprimere le percentuali sia come frazioni che come numeri decimali.

- $25\% = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$
- $10\% = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$
- $100\% = \dfrac{100}{100} = 1$

Dal momento che 100% rappresenta l'unità, moltiplicare o dividere un numero qualsiasi (intero, decimale o frazionario) per 100% non ne cambia il valore. Quindi:

- per convertire un numero (intero, decimale o frazionario) in percentuale lo si moltiplica per 100% (ossia si moltiplica per 100 e si affianca il simbolo di percentuale);
- per convertire una percentuale in un numero la si divide per 100% (ossia si divide per 100 e si toglie il simbolo di percentuale).

Convertire 0,67 in percentuale: $0{,}67 \cdot 100\% = 67\%$, da cui $0{,}67 = 67\%$.

Convertire 35% in frazione: $35\% = \dfrac{35\%}{100\%} = \dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20}$, da cui $35\% = \dfrac{7}{20}$.

In altre parole, per convertire una percentuale in un numero decimale è sufficiente eliminare il segno di percentuale (%) e spostare la virgola di due posizioni a sinistra (il che equivale a dividere per cento):

$$25\% = 0{,}25; \quad 2000\% = 20; \quad 0{,}3\% = 0{,}003$$

La maggior parte dei problemi con le percentuali è riconducibile all'espressione:

Il tasso T percentuale di B è A

↓ ↓ ↓ ↓

Il 10 % di 60 è 6

Generalmente sono date due variabili ed è richiesto di calcolare la terza. Le formule da utilizzare in questo caso sono:

$$A = T \cdot B; \quad B = \frac{A}{T}; \quad T = \frac{A}{B} \qquad [1]$$

Per trovare il 15% di 50 si applica la prima delle [1] e si ottiene:

$$A = 0{,}15 \cdot 50 = 7{,}5$$

Per calcolare il numero B di cui 5 è il 10% si applica la seconda delle [1] e si ottiene:

$$B = \frac{5}{10\%} = \frac{5 \cdot 100}{10} = 50$$

1.5.1 | Problemi di sconto

Si tratta di problemi del tipo: "A quanto ammonta lo sconto se una automobile che costa 12.000 euro è scontata del 15%?".

La formula da applicare in questo tipo di problemi è la seguente:

$$\text{sconto} = \text{costo} \cdot \text{tasso di sconto} \qquad [2]$$

Essendo il tasso di sconto espresso in termini percentuali, la formula equivale alla relazione già incontrata: $A = T \cdot B$.

Per calcolare a quanto ammonta lo sconto se un'automobile che costa 12.000 euro è scontata del 15% si applica la [2] e si ottiene:

$$\text{sconto} = €\,12.000 \cdot \frac{15}{100} = €\,12.000 \cdot 0{,}15 = €\,1800$$

1.5.2 | Problemi di interesse

Si tratta di problemi del tipo: "A quanto ammonta l'interesse che fruttano 5.000 euro investiti per 6 mesi a un tasso del 6%?".

Anche in questo caso c'è un tasso espresso in percentuale e il modo di procedere è analogo a quello visto nel paragrafo precedente. Compare tuttavia, nella formula da applicare per il calcolo dell'interesse, un nuovo elemento da considerare: il *tempo*.

$$\text{interesse} = \text{capitale} \cdot \text{tempo} \cdot \text{tasso di interesse} \qquad [3]$$

Il tasso di interesse va inteso come *tasso annuale*, a meno che il problema non ne specifichi uno diverso: tutti i tempi vanno convertiti in anni (o frazioni di anno).

Per calcolare l'interesse che fruttano 5000 euro investiti per 6 mesi a un tasso del 6% si applica la [3] e si ottiene:

$$\text{interesse} = €\,5000 \cdot \frac{{}^{1}\cancel{6}}{\cancel{12}_{2}} \cdot \frac{6}{100} = €\,{}^{50}\cancel{5000} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{100}_{1}} = €\,50 \cdot 3 = €\,150$$

1.5.3 | Variazione percentuale

È opportuno infine ricordare la formula per ottenere la *variazione percentuale di una variabile* di cui si conoscono il valore iniziale e finale (ammontare originale e nuovo ammontare). Essa è la stessa sia che si consideri un *incremento* sia che si consideri un *decremento* percentuale: l'unica differenza che si osserva è il segno della variazione percentuale (positivo nel primo caso, negativo nel secondo).

$$\text{variazione percentuale} = \frac{\text{nuovo ammontare} - \text{ammontare originale}}{\text{ammontare originale}} \cdot 100\% \qquad [4]$$

Il numero di auto vendute da un concessionario è passato da 300 a 360. Per calcolare l'incremento percentuale di tale numero si applica la [4] e si ottiene:

$$\text{variazione percentuale} = \frac{360 - 300}{300} \cdot 100\% = 20\% \quad \text{(incremento)}$$

Il valore di un'azione è sceso da 30 dollari a 24 dollari. Per calcolare il suo decremento percentuale si utilizza ancora la [4] e si ottiene:

$$\text{variazione percentuale} = \frac{24 - 30}{30} \cdot 100\% = -20\% \quad \text{(decremento)}$$

1.6 | Potenze di un numero razionale

La *potenza* di un numero razionale a, detto *base*, con *esponente* intero n è il prodotto di n fattori tutti uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad \text{con} \begin{cases} a \in \mathbb{Q} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ volte}} = 81 \,; \quad (-5)^3 = \underbrace{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}_{3 \text{ volte}} = -125$$

Poiché la potenza di un numero è sempre riconducibile a una operazione di moltiplicazione, è possibile enunciare la seguente regola che permette di stabilire il segno di una potenza.

Se la base è positiva, il valore della potenza è sempre positivo.
Se la base è negativa, il valore della potenza è positivo se l'esponente è pari, negativo se l'esponente è dispari.

$(+5)^3 = +125\,; \quad (-2)^4 = +16\,; \quad (-3)^3 = -27$

1.6.1 | Proprietà delle potenze

Le seguenti proprietà sono conseguenze della definizione di potenza.

Il valore di una potenza con esponente unitario è sempre uguale alla base:

$$a^1 = a$$

Il valore di una potenza con base nulla è sempre nullo qualunque sia l'esponente (purché diverso da zero):

$$0^n = 0 \quad \text{con } n \neq 0$$

Dalla precedente osservazione è possibile ricavare la seguente.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il valore di una potenza sia nullo è che sia nulla la base della potenza.

È utile inoltre osservare che al simbolo 0^0 non si attribuisce alcun significato.

Il valore di una potenza con base unitaria è sempre unitario qualunque sia l'esponente:

$$1^n = 1$$

1.6.2 | Potenze e operazioni fondamentali

Il prodotto di due o più potenze aventi la stessa base è una potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

- $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)]$
  $= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^7 = (-2)^{3+4} = -128$
- $\dfrac{(-3)^5}{(-3)^3} = \dfrac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = (-3) \cdot (-3) = (-3)^2 = (-3)^{5-3} = +9$

In base alla precedente proprietà sul quoziente di due potenze risulta possibile dare un valore a due simboli (a^0 e a^{-n}) finora privi di significato come potenze.

La potenza con esponente nullo di una base qualsiasi (purché diversa da zero) **è sempre uguale all'unità.**

$$a^0 = 1 \quad \text{con } a \neq 0$$

Infatti, indicando con n un numero intero positivo qualsiasi, si ha:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

La proprietà sul quoziente di due potenze consente anche di dare significato alle potenze con esponente negativo.

La potenza con esponente negativo è uguale al reciproco della stessa potenza, ma con esponente opposto.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Infatti, indicando con n un numero intero positivo qualsiasi, si ha: $a^{-n} = a^{0-n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$.

- $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$
- $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8}$

1.6.3 | Proprietà distributive delle potenze

Per le potenze vale la proprietà distributiva sia rispetto alla moltiplicazione che rispetto alla divisione.

La potenza del prodotto di più fattori è uguale al prodotto delle potenze di ciascun fattore.

$$(a \cdot b \cdot c \cdot \ldots)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot \ldots$$

La potenza di un quoziente di due numeri è uguale al quoziente delle potenze di ciascuno dei due numeri dati.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{con } b \neq 0$$

- $(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$

Una conseguenza della proprietà distributiva rispetto al prodotto è la seguente.

La potenza di una potenza di una base qualsiasi è una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$

PARTE TERZA

Quesiti svolti

1 Si apre un vocabolario a caso e si legge il numero della pagina a destra: è la pagina 253. Si sollevano un certo numero di fogli e si legge di nuovo il numero della pagina a destra: è la pagina 523. Quante sono le pagine dispari tra le due pagine indicate?

A 130 B 134 C 270 D 135 E 270

Il numero delle pagine comprese fra la pagina 253 e la pagina 523 è uguale a:

$$(523 - 253) - 1 = 270 - 1 = 269$$

Di queste pagine 134 sono dispari e 135 sono pari. La risposta esatta è la B.

2 Qual è la scomposizione in fattori primi del numero 312?

A $2^3 \cdot 3 \cdot 13$ B $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$ C $2^4 \cdot 3^3$ D $2^5 \cdot 3^2$ E $2^3 \cdot 3^2$

Applicando il metodo delle divisioni successive al numero 312 si ricava:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{312} & \mathbf{2} \\ \mathbf{156} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 312 & 2 \\ \mathbf{156} & \mathbf{2} \\ \mathbf{78} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 312 & 2 \\ 156 & 2 \\ \mathbf{78} & \mathbf{2} \\ \mathbf{39} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 312 & 2 \\ 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ \mathbf{39} & \mathbf{3} \\ \mathbf{13} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 312 & 2 \\ 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ \mathbf{13} & \mathbf{13} \\ \mathbf{1} & \end{array} \rightarrow 312 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$$

La risposta corretta è dunque la A.

3 Sia x un numero razionale e si indichi col simbolo $[x]$ (da leggersi: "parte intera di x") il più grande intero relativo minore o al più uguale a x. Dire quale delle seguenti relazioni è vera per ogni x e y reali:

A $[x + 1] = [x] + 1$

B $[x^2] = [x]^2$

C $[2x] = 2[x]$

D $[-x] = -[x]$

E se $x < y$, allora $[x] < [y]$

Conviene procedere per esclusione solo dopo aver capito bene la definizione data di parte intera di x. A tale scopo si vedano gli esempi seguenti:

$$[2] = 2\ ;\ [2{,}9] = 2\ ;\ [2{,}1] = 2\ ;\ [-1{,}1] = -2$$

Per mostrare che una risposta **non** è quella corretta, nel senso che contiene una relazione non sempre vera, è sufficiente trovare alcuni valori numerici che non soddisfano la relazione in essa contenuta. La E non è verificata per ogni valore di x e y; basta infatti prendere $x = -2{,}9$ e $y = -2{,}1$. Si ottiene $[-2{,}9] < [-2{,}1] \rightarrow -3 < -3$. Per scartare la D basta prendere $x = 2{,}1$; si ottiene $-3 = -2$. Per la C basta porre $x = 5/2$ da cui segue $5 = 4$ e, infine, la B si scarta perché, ponendo $x = 3/2$, si ottiene $2 = 1$. Si conclude che la risposta esatta è la A.

MATEMATICA

4 **Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali:**

$$\mathbf{10^{-3} \quad -10^{3} \quad \frac{1}{10^{-3}} \quad -3 \cdot 10^{-3}}$$

A -10^3; $-3 \cdot 10^{-3}$; 10^{-3}; $\frac{1}{10^{-3}}$

B $-3 \cdot 10^{-3}$, -10^3; $\frac{1}{10^{-3}}$; 10^{-3}

C -10^3; 10^{-3}; $\frac{1}{10^{-3}}$; $-3 \cdot 10^{-3}$

D $-3 \cdot 10^{-3}$; -10^3; 10^{-3}; $\frac{1}{10^{-3}}$

E nessuna delle precedenti

Per confrontare i qauttro numeri conviene trasformarli tutti in forma decimale. Essendo:

$$10^{-3} = 0{,}001 \qquad -10^3 = -1000 \qquad \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000 \qquad -3 \cdot 10^{-3} = -3 \cdot 0{,}001 = -0{,}003$$

si ricava che l'ordinamento corretto è:

$$-1000 < -0{,}003 < 0{,}001 < 1000$$

ossia:

$$-10^3 < -3 \cdot 10^{-3} < 10^{-3} < \frac{1}{10^{-3}}$$

La risposta corretta è quindi la A.

5 **Un vetro avente lo spessore di 1 cm assorbe il 50% di un fascio di luce. Quale sarà l'assorbimento totale dello stesso vetro se lo spessore è di 3 cm?**

A 150% B 60% C 87,5% D 75% E 55%

Sarebbe errato fare il ragionamento seguente: se un centimetro assorbe il 50% della luce allora tre centimetri assorbono tre volte il 50% cioè il 150% della luce entrante. La conclusione alla quale si perviene è, tra l'altro, priva di senso perché già un assorbimento del 100% significa assorbimento totale.

Occorre invece ragionare nel modo seguente: solo il 50% della luce incidente attraversa il primo centimetro di vetro; il secondo centimetro assorbe dunque il 50% del 50% della luce iniziale (cioè il 25% della luce iniziale). Il terzo centimetro assorbe il 50% del 25% della luce iniziale (cioè il 12,5% della luce iniziale). Complessivamente l'assorbimento causato dai tre centimetri di vetro vale 50% + 25% + 12,5% = 87,5% (risposta C).

6 **Due grandezze *P* e *V* sono legate dalla relazione $P = 2/V$. Di quale percentuale circa deve aumentare *V* affinché *P* diminuisca del 40%?**

A 40% B 55% C 67% D 80% E 35%

Dalla relazione $P = 2/V$ ricaviamo $V = 2/P$. Per semplicità poniamo $P = 100$: in corrispondenza di tale valore, risulta $V = 2/P = 2/100 = 1/50$. Se P diminuisce del 40%, il suo nuovo valore è: $P' = 100 - 40\%(100) = 100 - 40 = 60$ e, di conseguenza,

$$V' = 2/P' = 2/60 = 1/30.$$

Infine tramite la formula della variazione percentuale si ricava la percentuale di cui deve aumentare *V* affinché *P* diminuisca del 40%:

$$\frac{V'-V}{V}\cdot 100\% = \frac{\frac{1}{30}-\frac{1}{50}}{\frac{1}{50}}\cdot 100\% = \frac{50-30}{30\cdot 50}\cdot 50\cdot 100\% = \frac{20}{30}\cdot 100\% \approx 0{,}67\cdot 100\% = 67\%$$

La risposta corretta è quindi la C.

---

7 L'espressione $(3\cdot 10^4)\,(3\cdot 10^{-4})$ è uguale a:

A $3\cdot 10^{-16}$
B $3\cdot 10^8$
C $6\cdot 20^8$
D 3^2
E $9\cdot 10^{-16}$

Per rispondere ai quesiti sulle potenze è importante ricordare la seguente osservazione.

In generale non bisogna svolgere le potenze ma si devono utilizzare le loro proprietà. Ciò consente di semplificare al massimo i calcoli necessari.

Nel caso in questione basta osservare che $10^4\cdot 10^{-4}=1$.
Si ottiene: $(3\cdot 10^4)\,(3\cdot 10^{-4}) = 3\cdot 3 = 3^2$ (risposta D).

---

8 La metà di 20^4 è:

A 5^4 B $8\cdot 10^4$ C $5\cdot 10^3$ D $0{,}5\cdot 20^5$ E 10^4

La metà di 20^4 è uguale a $\frac{20^4}{2}$ e può essere espressa nella forma:

$$\frac{20^4}{2} = \frac{(2\cdot 10)^4}{2} = \frac{2^4\cdot 10^4}{2} = 2^4\cdot 2^{-1}\cdot 10^4 = 2^3\cdot 10^4 = 8\cdot 10^4$$

La risposta corretta è la B.

---

9 La somma $2{,}5\cdot 10^{-4}+5\cdot 10^{-5}$ è uguale a:

A $0{,}3\cdot 10^{-3}$
B $30\cdot 10^{-3}$
C $2{,}55\cdot 10^{-4}$
D $7{,}5\cdot 10^{-4}$
E $3\cdot 10^{-5}$

Nel calcolare la somma richiesta è necessario prestare attenzione al fatto che gli addendi hanno differenti ordini di grandezza. Per evitare errori basta applicare le proprietà delle potenze che consentono di scrivere:

$$2{,}5\cdot 10^{-4}+5\cdot 10^{-5} = (2{,}5+5\cdot 10^{-1})\cdot 10^{-4} = (2{,}5+0{,}5)\cdot 10^{-4} = 3\cdot 10^{-4} = 0{,}3\cdot 10^{-3}$$

per cui la risposta corretta è la A.

---

10 L'espressione $(2^n+2^{n+1})^2$ con *n* intero positivo, è anche uguale a:

A $9\cdot 4^n$ B 2^{4n+2} C 4^{4n+2} D 2^{2n^2+2n} E $3\cdot 4^n$

MATEMATICA

Sfruttando le proprietà delle potenze è possibile scrivere:

$$(2^n + 2^{n+1})^2 = (2^n + 2^n \cdot 2)^2$$

ed effettuando un raccoglimento a fattore comune (§ 2.3.1):

$$(2^n + 2^n \cdot 2)^2 = [(1 + 2) \cdot 2^n]^2 = (3 \cdot 2^n)^2 = 3^2 \cdot 2^{2n} = 3^2 \cdot (2^2)^n = 9 \cdot 4^n$$

La risposta corretta è dunque la A.

---

11 Quanto vale la frazione $\dfrac{10^{14} \cdot (10^3)^{-5}}{10^{-3} \cdot 10^2}$?

A 10^{-5}
B 10
C 1
D 10^{-1}
E 10^{-6}

Utilizzando le proprietà delle potenze si ottengono i seguenti passaggi:

$$\frac{10^{14} \cdot (10^3)^{-5}}{10^{-3} \cdot 10^2} = \frac{10^{14} \cdot 10^{-15}}{10^{-3} \cdot 10^2} = \frac{10^{14-15}}{10^{-3+2}} = \frac{10^{-1}}{10^{-1}} = 1 \quad \text{(risposta C)}$$

---

12 L'espressione $2^{-x} \cdot (2 + 2^{x^2} + 2^{-3x})$ è equivalente a:

A $2^{-x} + 2^{-x^3} + 2^{3x^2}$
B $2^{1-x} + 2^{x^2-x} + 2^{-4x}$
C $2^{1/x} + 2^x + 2^{-3}$
D $4^{-x} + 4^{-x^3} + 4^{3x^2}$
E nessuna delle precedenti

Utilizzando le proprietà delle potenze si ricava:

$$2^{-x} \cdot (2 + 2^{x^2} + 2^{-3x}) = 2^{-x} \cdot (2^1 + 2^{x^2} + 2^{-3x}) = 2^{1-x} + 2^{x^2-x} + 2^{-3x-x} = 2^{1-x} + 2^{x^2-x} + 2^{-4x}$$

per cui la risposta corretta è la B.