11 | Geometria elementare

Nei paragrafi che seguono si riportano solo gli enunciati dei teoremi fondamentali (senza le dimostrazioni), unitamente alle definizioni di maggiore importanza.

11.1 | Geometria piana

Gli enti geometrici fondamentali sono il *punto*, la *retta* e il *piano*: si tratta di **concetti primitivi**, ossia non definibili tramite concetti più semplici.

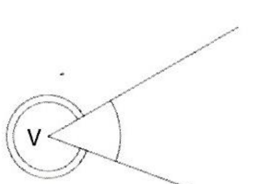
La geometria *razionale* o *euclidea* (da Euclide, il più importante matematico dell'antichità che ne riorganizzò in forma deduttiva tutte le conoscenze) è basata su 5 **postulati** o **assiomi**, proposizioni derivate direttamente dall'intuizione e che si accettano senza dimostrazione:

1. si può tracciare una retta da un punto qualsiasi a ogni altro punto;
2. si può prolungare indefinitamente una linea retta;
3. si può descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali fra loro;
5. se una retta, che interseca altre due rette, forma dalla stessa parte angoli la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette, indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi.

11.1.1 | Angoli e rette

Ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette uscenti da uno stesso punto è detta **angolo**.

Il punto comune alle due semirette è detto *vertice* dell'angolo (indicato dalla lettera V nella figura a fianco), mentre le due semirette prendono anche il nome di *lati* dell'angolo. Se i due lati sono ortogonali, l'angolo viene detto *retto*; se sono opposti, l'angolo viene detto *piatto*; se i due lati coincidono, l'angolo viene detto *giro*.

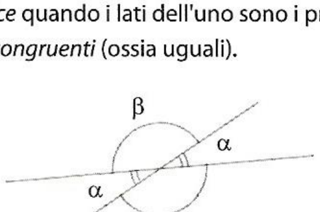


Due angoli aventi lo stesso vertice si dicono *consecutivi* se la loro intersezione è un lato di entrambi. Due angoli consecutivi si dicono *supplementari* se la loro unione è un angolo piatto, *complementari* se è un angolo retto.

Per la misura degli angoli si usa il sistema *sessagesimale*, che ha come unità di misura il **grado**, ottenuto dividendo l'angolo giro in 360 parti uguali.

Due angoli si dicono *opposti al vertice* quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Due angoli opposti al vertice sono *congruenti* (ossia uguali).

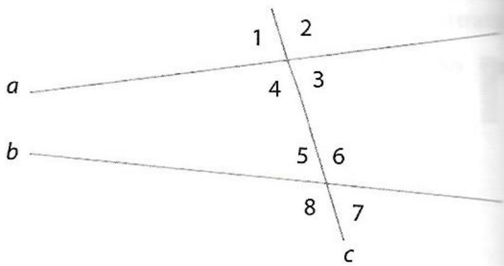


MATEMATICA

Angoli formati da due rette (*a* e *b*) tagliate da una trasversale *c*

Gli angoli:

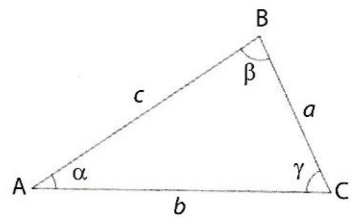
- 4 e 6; 3 e 5 sono detti *alterni interni* (risultano congruenti se le rette *a* e *b* sono parallele);
- 2 e 8; 1 e 7 sono detti *alterni esterni* (risultano congruenti se le rette *a* e *b* sono parallele);
- 1 e 5; 4 e 8; 2 e 6; 3 e 7 sono detti *corrispondenti* (risultano congruenti se le rette *a* e *b* sono parallele);
- 4 e 5; 3 e 6 sono detti *coniugati interni* (risultano supplementari se le rette *a* e *b* sono parallele);
- 1 e 8; 2 e 7 sono detti *coniugati esterni* (risultano supplementari se le rette *a* e *b* sono parallele).



11.1.2 | Triangoli

Il triangolo ABC è detto:

- *Scaleno* se $a \neq b \neq c$
- *Isoscele* se $a = b$ o $a = c$ o $b = c$
- *Equilatero* se $a = b = c$
- *Rettangolo* se α o β o $\gamma = 90°$



Punti notevoli di un triangolo

- **Ortocentro**: punto di incontro delle altezze (si definisce *altezza relativa a un lato* il segmento di perpendicolare condotto al lato dal vertice opposto). L'ortocentro è interno al triangolo se questo è acutangolo (ossia se ha tutti gli angoli interni minori di 90°), esterno se è ottusangolo, coincidente con il vertice dell'angolo retto se è rettangolo.
- **Baricentro**: punto di incontro delle mediane (si definisce *mediana relativa a un lato* il segmento che unisce il punto medio del lato con il vertice dell'angolo opposto). Il baricentro è sempre interno al triangolo.
- **Circocentro**: punto di incontro degli assi dei lati del triangolo (si definisce *asse relativo a un lato* la perpendicolare al lato passante per il suo punto medio). Il circocentro (essendo equidistante dai vertici) è anche il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ed è interno al triangolo se questo è acutangolo, esterno se è ottusangolo, coincidente con il punto medio dell'ipotenusa se è rettangolo.
- **Incentro**: punto di incontro delle bisettrici degli angoli del triangolo (si definisce *bisettrice di un angolo* la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due parti congruenti). L'incentro (essendo equidistante dai lati) è anche il centro della circonferenza inscritta nel triangolo ed è sempre interno al triangolo.

Relazioni tra gli elementi di un triangolo

In ogni triangolo la somma degli angoli interni è uguale a un angolo piatto:

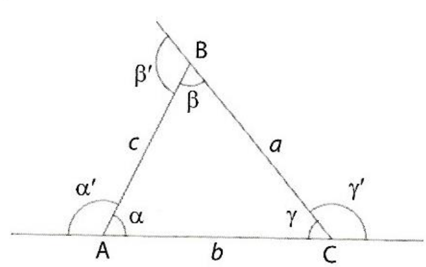
$$\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180°}$$

Similmente, la somma degli angoli esterni di un triangolo qualsiasi è pari a un angolo giro:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

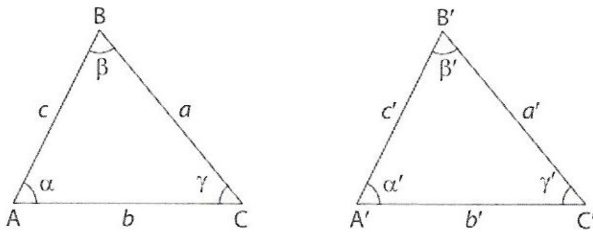
Inoltre, ciascun angolo esterno è pari alla somma dei due angoli interni non adiacenti:

$$\alpha' = \beta + \gamma \qquad \beta' = \alpha + \gamma \qquad \gamma' = \alpha + \beta$$



In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. In ogni triangolo il lato maggiore (minore) è opposto all'angolo maggiore (minore) e viceversa.

11.1.3 | Criteri di congruenza fra triangoli



I triangoli ABC e A′B′C′ sono congruenti se si verifica una delle seguenti condizioni:

- hanno congruenti due lati e l'angolo compreso;
  (per esempio: $b \equiv b'$; $c \equiv c'$; $\alpha \equiv \alpha'$);
- hanno congruenti due angoli e il lato a essi comune;
  (per esempio: $\alpha \equiv \alpha'$; $\beta \equiv \beta'$; $c \equiv c'$);
- hanno congruenti due angoli e il lato opposto a uno di essi;
  (per esempio: $\alpha \equiv \alpha'$; $\beta \equiv \beta'$; $a \equiv a'$);
- hanno i tre lati rispettivamente congruenti;
  (ossia: $a \equiv a'$; $b \equiv b'$; $c \equiv c'$).

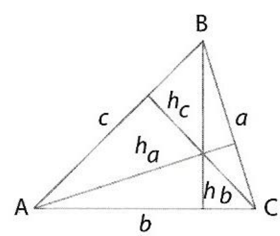
11.1.4 | Perimetro e area dei triangoli

Perimetro di un triangolo

$$P = a + b + c$$

Area di un triangolo

$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$



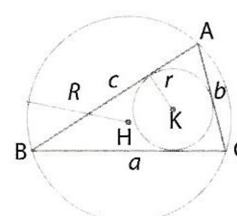
Formula di Erone

Serve per calcolare l'area di un triangolo qualunque conoscendo le misure dei tre lati:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove p è il semiperimetro (ossia $p = P/2$); oppure:

$$A = r \cdot p = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$



ove r e R sono i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.

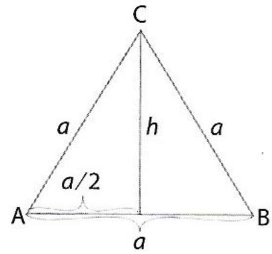
Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = \frac{A}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo

$$R = \frac{abc}{4A}$$

11.1.5 | Triangoli equilateri



Perimetro di un triangolo equilatero

$$P = 3a$$

Altezza di un triangolo equilatero

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R = 3r$$

Area di un triangolo equilatero

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2$$

dove *r* ed *R* sono i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo.

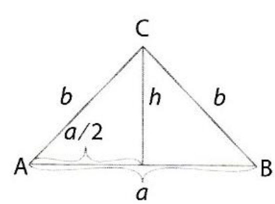
Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo equilatero

$$r = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{R}{2}$$

Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a = 2r$$

11.1.6 | Triangoli isosceli



Perimetro di un triangolo isoscele

$$P = a + 2b$$

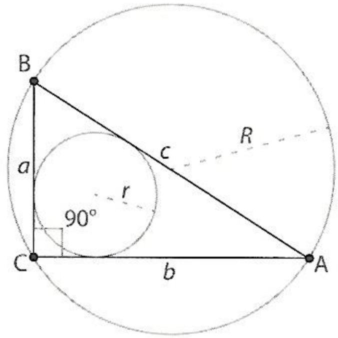
Area di un triangolo isoscele

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

PARTE TERZA

11.1.7 | Triangoli rettangoli

Sia ABC un triangolo rettangolo in C (dove quindi a e b sono i cateti, mentre c è l'ipotenusa).



Perimetro di un triangolo rettangolo

$$P = a + b + c$$

Area di un triangolo rettangolo

$$A = \frac{ab}{2}$$

Altezza relativa all'ipotenusa

$$h = \frac{ab}{c}$$

Raggio della circonferenza inscritta

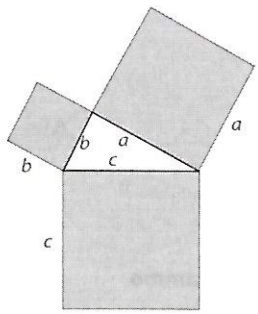
$$r = p - c = (a + b - c)/2$$

Raggio della circonferenza circoscritta

$$R = c/2$$

Teorema di Pitagora

In qualsiasi triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



In un triangolo rettangolo con ipotenusa c e cateti a e b:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{c^2 - b^2} \\ b = \sqrt{c^2 - a^2} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Si definisce **terna pitagorica** una terna di numeri naturali a, b e c tali che:

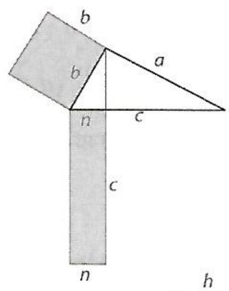
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Se a, b e c è una terna pitagorica, lo è anche ka, kb e kc dove k è un numero naturale qualsiasi. Le terne pitagoriche che compaiono più di frequente nei quesiti sono:

3, 4 e 5 5, 12 e 13 7, 24 e 25 8, 15 e 17

Primo teorema di Euclide

In qualsiasi triangolo rettangolo, un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa.

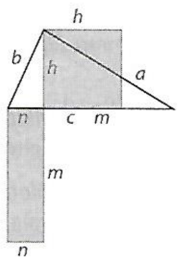


In un triangolo rettangolo con ipotenusa c e cateti a e b, sia n la proiezione di b su c; si ha il seguente teorema:

$$c : b = b : n \quad \rightarrow \quad b^2 = c \cdot n$$

Secondo teorema di Euclide

In qualsiasi triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



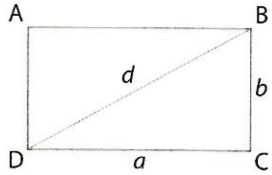
In un triangolo rettangolo con ipotenusa c e cateti a e b, sia h l' altezza relativa all'ipotenusa c, m la proiezione di a su c e infine n la proiezione di b su c; si ha il seguente teorema:

$$m : h = h : n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

11.1.8 | Perimetro e area dei poligoni

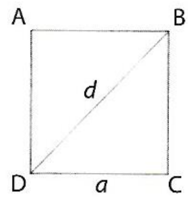
Rettangolo

$$P = 2 \cdot (a + b)$$
$$A = a \cdot b$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



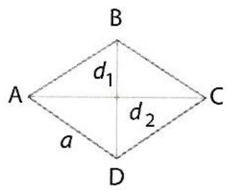
Quadrato

$$P = 4 \cdot a$$
$$A = a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$



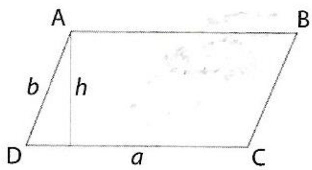
Rombo

$$P = 4 \cdot a$$
$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



Parallelogrammo

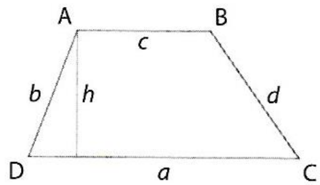
$$P = 2 \cdot (a + b)$$
$$A = a \cdot h$$



Trapezio

$$P = a + b + c + d$$
$$A = (a + c) \cdot \frac{h}{2}$$

Inoltre se $b = d$ allora il trapezio è detto isoscele.



Altre proprietà dei poligoni

- La *somma degli angoli interni di un poligono* vale $(N - 2) \cdot 180°$, dove N indica il numero di lati del poligono.
- In ogni *quadrilatero* circoscrivibile ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.
- In ogni *quadrilatero* inscrivibile in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari (ossia la loro somma vale 180°). Inoltre, il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti delle misure dei lati opposti (*teorema di Tolomeo*).

11.1.9 | Poligoni regolari

Un poligono si dice **regolare** quando ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali: ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile a una circonferenza. Queste due circonferenze hanno lo stesso centro che viene detto **centro del poligono**.

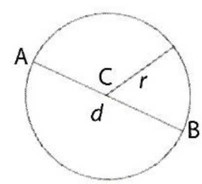
Indicando con R il raggio della circonferenza circoscritta, è possibile esprimere il lato e l'area di un qualsiasi poligono regolare in funzione di R.

Poligono regolare	Misura del lato	Misura dell'area
Triangolo	$R\sqrt{3}$	$(3\sqrt{3}/4)\,R^2$
Quadrato	$R\sqrt{2}$	$2R^2$
Esagono	R	$(3\sqrt{3}/2)\,R^2$

Si definisce **apotema** il segmento di perpendicolare tracciato dal centro di un poligono regolare a un lato: l'apotema coincide con il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.

11.1.10 | Circonferenza e cerchio

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso (detto centro).

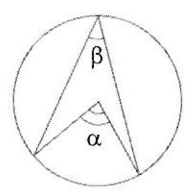


$$d = 2r = \overline{AB} = \text{diametro} \qquad P = 2\pi r = \pi d$$

Il cerchio è l'insieme formato dai punti di una circonferenza e dai punti interni alla circonferenza. La sua area è:

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

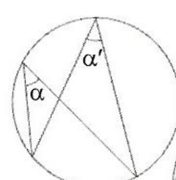
Angoli alla circonferenza e angoli al centro



1. In una circonferenza un angolo al centro (cioè con il vertice nel centro) è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza (angolo convesso con il vertice sulla circonferenza e i cui lati sono entrambi secanti o uno secante e l'altro tangente alla circonferenza) che insiste sullo stesso arco:

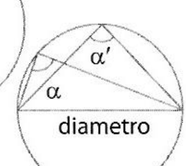
$$\alpha = 2\beta$$

2. Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti, sono congruenti.



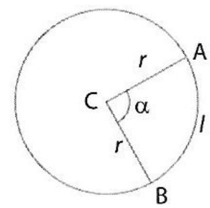
$$\alpha = \alpha'$$

3. Angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza, sono retti.



$$\alpha = \alpha' = 90°$$

Settore circolare



$$\text{arco AB} = l = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha°$$

$$P = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha° + 2r$$

$$A = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{360°} \cdot \alpha°$$

11.2 | Geometria solida

11.2.1 | Parallelepipedi

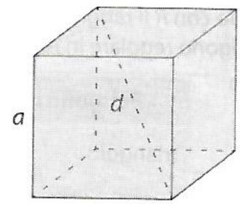
Cubo

$$\text{Superficie laterale } S_l = 4a^2$$

$$\text{Superficie totale } S_t = 6a^2$$

$$\text{Volume } V = a^3$$

$$\text{Diagonale } d = a\sqrt{3}$$



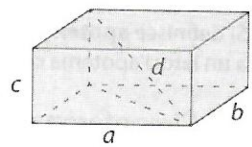
Parallelepipedo rettangolo

$$\text{Superficie laterale } S_l = 2c(a+b)$$

$$\text{Superficie totale } S_t = 2(ab+ac+bc)$$

$$\text{Volume } V = a \cdot b \cdot c$$

$$\text{Diagonale } d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

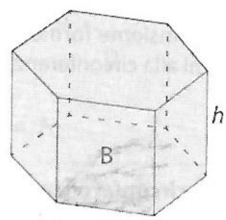


Prisma retto (P_B e S_B indicano il perimetro e la superficie della base)

$$\text{Superficie laterale } S_l = P_B \cdot h$$

$$\text{Superficie totale } S_t = S_l + 2S_B$$

$$\text{Volume } V = S_B \cdot h$$



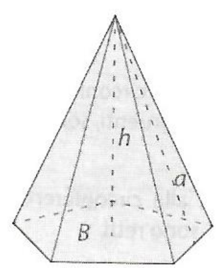
11.2.2 | Piramide e tronco di piramide

Piramide retta (P_B e S_B indicano il perimetro e la superficie della base)

$$\text{Superficie laterale } S_l = \frac{a}{2} \cdot P_B$$

$$\text{Superficie totale } S_t = S_l + S_B$$

$$\text{Volume } V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

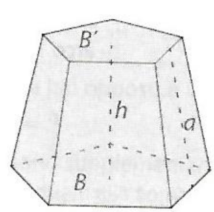


Tronco di piramide retta (S_B, $S_{B'}$, P_B e $P_{B'}$ indicano le superfici e i perimetri delle basi)

$$\text{Superficie laterale } S_l = \frac{a}{2} \cdot (P_B + P_{B'})$$

$$\text{Superficie totale } S_t = S_l + S_B + S_{B'}$$

$$\text{Volume } V = \frac{h}{3} \cdot (S_B + S_{B'} + \sqrt{S_B \cdot S_{B'}})$$

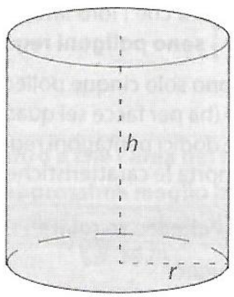


11.2.3 | Cilindro

Superficie laterale $S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$

Superficie totale $S_t = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$

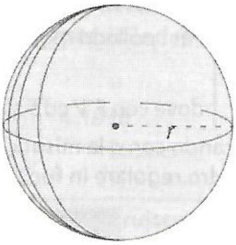
Volume $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



11.2.4 | Sfera

Superficie $A = 4\pi r^2$

Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



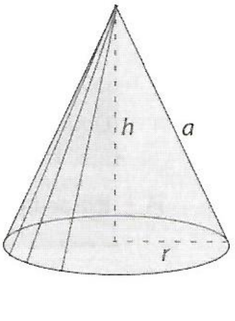
11.2.5 | Cono e tronco di cono

Cono (*a* indica l'apotema)

Superficie laterale $S_l = \pi \cdot r \cdot a$

Superficie totale $S_t = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (a + r)$

Volume $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

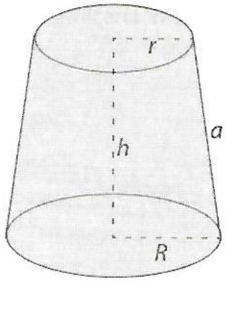


Tronco di cono (*a* indica l'apotema)

Superficie laterale $S_l = \pi \cdot (r + R) \cdot a$

Superficie totale $S_t = \pi \cdot (r + R) \cdot a + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot R^2$

Volume $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot h$



11.2.6 | Poliedri regolari

Un poliedro (figura solida individuata da poligoni, o *facce*, non tutti complanari e disposti in modo che i loro lati, o *spigoli*, siano comuni esattamente a due di essi) **si dice regolare se le facce sono poligoni regolari uguali e gli angoloidi sono uguali.**

Esistono solo cinque poliedri regolari: il **tetraedro** (ha per facce quattro triangoli equilateri), l'**esaedro** o cubo (ha per facce sei quadrati), l'**ottaedro** (ha per facce otto triangoli equilateri), il **dodecaedro** (ha per facce dodici pentagoni regolari) e l'**icosaedro** (ha per facce venti triangoli equilateri). La tabella seguente ne riporta le caratteristiche principali.

Poliedro regolare	Facce	Lati di ogni faccia	Vertici	Spigoli
Tetraedro	4	3	4	6
Esaedro	6	4	8	12
Ottaedro	8	3	6	12
Dodecaedro	12	5	20	30
Icosaedro	20	3	12	30

Per i poliedri regolari vale la **relazione di Eulero**:

$$F + V = S + 2$$

dove con F, V ed S si indicano rispettivamente il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli.

Indicando con a la misura dello spigolo, è possibile esprimere la superficie e il volume di un qualsiasi poliedro regolare in funzione di a.

Poliedro regolare	Superficie	Volume
Tetraedro	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Esaedro	$6a^2$	a^3
Ottaedro	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Icosaedro	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$

Quesiti svolti

---

1 Sapendo che in un triangolo rettangolo un cateto è la metà dell'altro e che l'area del triangolo è pari a 64 m^2, determinare quale delle seguenti lunghezze approssima meglio la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo.

A 12 m B 14 m C 18 m D 24 m E 36 m

Se si indica con x il cateto avente la lunghezza minore, allora il secondo cateto ha lunghezza pari a $2x$. L'area del triangolo è pertanto uguale a:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2$$

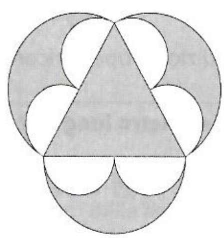
Essendo l'area pari a 64 m^2, si ricava $x^2 = 64\ m^2$, da cui $x = 8$ m. Pertanto i due cateti del triangolo hanno lunghezza 8 m e 16 m rispettivamente. Applicando il teorema di Pitagora, è ora possibile determinare la lunghezza dell'ipotenusa:

$$\text{ipotenusa} = \sqrt{8^2\ m^2 + 16^2\ m^2} = \sqrt{64\ m^2 + 256\ m^2} = \sqrt{320\ m^2} \approx 18\ m$$

La risposta corretta è quindi la C.

---

2 Sia un triangolo equilatero con lato pari a 4. Su ogni lato del triangolo si costruisca un semicerchio avente per base il lato del triangolo stesso e due semicerchi aventi per base metà del lato del triangolo stesso, come rappresentato nella figura seguente.



Qual è l'area della figura ombreggiata?

A $2\sqrt{3} + 6\pi$ B $4\sqrt{3} + 3\pi$ C $4\sqrt{3} + 6\pi$ D $2\sqrt{3} + 3\pi$ E $2\sqrt{3}$

Poiché il lato del triangolo equilatero è 4, la sua altezza è $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Quindi l'area del triangolo equilatero è uguale a $\frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. A questa area occorre sommare l'area dei tre semicerci "maggiori" di raggio 2, ossia:

$$\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 6\pi$$

e sottrarre l'area dei sei semicerci "minori" di raggio 1, ossia:

$$\frac{6}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 3\pi$$

L'area della figura ombreggiata risulta quindi $4\sqrt{3} + 6\pi - 3\pi = 4\sqrt{3} + 3\pi$ (risposta B).

MATEMATICA

3 Un quadrilatero ha le diagonali di lunghezza 1 e 2 (in metri). La sua area A (espressa in metri quadrati) è:

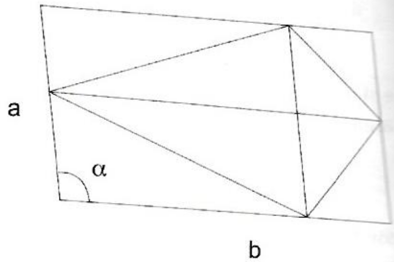
- A maggiore di 1
- B maggiore o uguale a 2
- C maggiore o uguale a 1
- D minore o uguale a 1
- E minore di 1

Condotte per i vertici del quadrilatero le parallele alle sue diagonali, si ottiene un parallelogramma la cui area è doppia rispetto a quella del quadrilatero.

Detto α l'angolo formato dai due lati $a = 1$ m e $b = 2$ m del parallelogramma, si ha:

$$A_P = a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \text{ m}^2 \quad A_Q = \frac{1}{2}A_P = \operatorname{sen}\alpha \text{ m}^2$$

e poiché il seno di un angolo è sempre minore o uguale a 1, si ricava che $A_Q \leq 1$ m^2 (risposta D).



4 Indicare quale delle seguenti tre terne di numeri sicuramente non corrisponde ai lati di un triangolo.

A 6, 5, 7 B 7, 13, 18 C 5, 5, 12 D 5, 12, 13 E 3, 4, 5

Per le disuguaglianze triangolari ogni lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due e minore della loro somma. Nella terza terna proposta risulta:

$$12 > 5 + 5$$

che non soddisfa la seconda delle condizioni appena ricordate. La risposta esatta è la C.

5 Un triangolo rettangolo ha perimetro lungo 12 cm. Allora i suoi due cateti possono essere lunghi:

A 4 e 5 cm B 2 e 3 cm C 5 e 6 cm D 3 e 4 cm E 1 e 2 cm

Affinché il triangolo sia rettangolo, le lunghezze dei tre lati devono formare una terna pitagorica (il quadrato del maggiore deve essere uguale alla somma dei quadrati degli altri due) e la loro somma dev'essere pari a 12 cm. L'unica alternativa che soddisfa tali richieste è la D: in tal caso infatti l'ipotenusa vale $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm ed il perimetro misura $P = 3 + 4 + 5 = 12$ cm.

6 Sei triangoli equilateri possono essere accostati intorno a un punto A del piano ricoprendo con esattezza lo spazio, poiché la somma degli angoli che vengono accostati al vertice è eguale a 360°. Verificare nei tre casi seguenti se l'accostamento al vertice di diversi poligoni regolari produce lo stesso risultato di esatta copertura dello spazio.

- A 3 pentagoni
- B 2 esagoni + 2 triangoli
- C 2 ottagoni + 1 quadrato + 1 triangolo
- D 2 pentagoni + 1 esagono
- E 4 pentagoni

Ogni angolo interno di un triangolo equilatero vale 60° e ogni angolo interno di un quadrato 90°.

Ricordando la formula relativa alla somma degli angoli interni di un poligono, si può affermare che un poligono regolare di N lati ha ciascun angolo interno uguale a:

$$\frac{180° \cdot (N-2)}{N}$$

Quindi ogni angolo interno di un pentagono regolare è uguale a 108°, ogni angolo interno di un esagono regolare è uguale a 120° e ogni angolo interno di un ottagono regolare è uguale a 135°.

Accostando 3 pentagoni regolari, si ottiene un angolo di $3 \cdot 108° = 324°$: l'alternativa A non è dunque accettabile. Accostando 4 pentagoni regolari, si ottiene un angolo di $4 \cdot 108° = 432°$: anche l'alternativa E non è accettabile. Accostando 2 esagoni regolari e 2 triangoli equilateri, si ha:

$$2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 240° + 120° = 360°$$

Con semplici calcoli per le alternative C e D si ricavano angoli di 420° e di 336°; la risposta esatta è dunque la B.

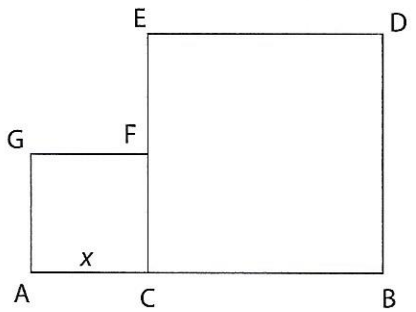
---

7 Su di un segmento AB lungo 25 cm si scelga un punto interno C in modo che l'area della gura piana formata dai due quadrati, costruiti dalla stessa parte rispetto alla retta AB e aventi lati AC e CB, sia uguale a 337 cm^2.

Il perimetro della figura ottenuta è di:

A 75 cm B 82 cm C 91 cm D 100 cm E 132 cm

Indicando con x la lunghezza del segmento $\overline{AC}$, come in figura:



e ipotizzando che $\overline{AC}$ sia minore di $\overline{CB}$, il perimetro della figura composta dai due quadrati di lati $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, tenendo presente che il segmento $\overline{FC}$ non appartiene al suo contorno, risulta:

$$P = P_{ACFG} + P_{CBDE} - 2\overline{FC} = 4x + 4(25-x) - 2x = 100 - 2x$$

e la sua area:

$$x^2 + (25-x)^2 = x^2 + 625 - 50x + x^2 = 2x^2 - 50x + 625$$

I valori che x può assumere si determinano imponendo che tale area misuri esattamente 337 cm^2, e risolvendo l'equazione che si ricava:

$$2x^2 - 50x + 625 = 337 \rightarrow 2x^2 - 50x + 288 = 0 \rightarrow x^2 - 25x + 144 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} \rightarrow x_1 = 9 \text{ e } x_2 = 16$$

Avendo supposto $\overline{AC} < \overline{CB}$, consideriamo solo $x = 9$. Per tale valore, il perimetro della figura data risulta quindi:

$$P = 100 - 2x = 100 - 2(9) = 100 - 18 = 82 \text{ cm}$$

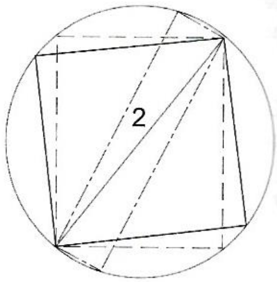
pertanto la risposta corretta è la B.

MATEMATICA

8 L'area di un rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio r:

- **A** è minore o uguale a r^2
- **B** non dipende dal perimetro del rettangolo
- **C** è minore o uguale a $2r^2$
- **D** può essere maggiore di $2r^2$
- **E** non è mai uguale a $2r^2$

Un rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio r ha le diagonali sempre uguali a $2r$. Tra questi rettangoli inscritti quello di area A_R massima è il quadrato.



Per convincersi di questo basta osservare che ciascuno dei triangoli rettangoli in cui rimane diviso il rettangolo da una delle sue diagonali ha area massima quando l'altezza relativa all'ipotenusa è uguale a r, cioè quando il triangolo rettangolo è isoscele.

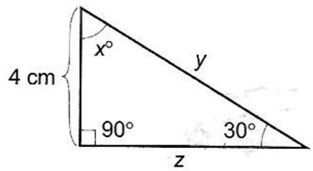
Poiché la diagonale d del quadrato è legata al lato l dalla relazione $d = l\sqrt{2}$, si ha che $l = d\sqrt{2}/2$, cioè:

$$l = 2r\sqrt{2}/2 = r\sqrt{2}$$

L'area del quadrato è quindi uguale a $A_Q = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$. Poiché $A_R \le A_Q$, cioè $A_R \le 2r^2$, si conclude che la risposta esatta è la **C**.

9 Riferendosi alla figura seguente, indicare i valori corretti di x, y e z.

- **A** $x = 50°, y = \sqrt{3}/2$ cm, $z = 8$ cm
- **B** $x = 60°, y = 8$ cm, $z = 8$ cm
- **C** $x = 60°, y = \sqrt{3}/2$ cm, $z = 8$ cm
- **D** $x = 60°, y = 8$ cm, $z = \sqrt{3}/2$ cm
- **E** $x = 60°, y = 8$ cm, $z = 4\sqrt{3}$ cm



La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a 180°, per cui:

$$x = 180° - 90° - 30° = 60°$$

il triangolo rettangolo risulta quindi essere la metà di un triangolo equilatero, e quindi l'ipotenusa y ha lunghezza doppia rispetto al cateto noto, per cui:

$$y = 2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

La misura del secondo cateto z può essere infine ricavata grazie al teorema di Pitagora:

$$z = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

La risposta corretta è dunque la **E**.

10 Sia Q un ottagono regolare. Allora la somma delle tangenti trigonometriche degli angoli interni di Q è:

- **A** 8
- **B** – 8
- **C** 0
- **D** – 1
- **E** varia al variare del lato di Q

PARTE TERZA

Un ottagono regolare ha ciascun angolo interno uguale a

$$\frac{180° \cdot (8-2)}{8} = \frac{1080°}{8} = 135°$$

La somma delle tangenti trigonometriche degli angoli interni di Q è dunque uguale a:

$$8 \cdot \text{tg}\ 135° = 8 \cdot (-1) = -8$$

La risposta corretta è la B.

---

11 La rotazione di un rettangolo di base 3 cm e altezza 5 cm attorno alla sua base genera:

A un cono con altezza uguale a 5 cm

B un cono con diametro di base uguale a 10 cm

C un cilindro con diametro di base uguale a 10 cm

D un cilindro con altezza uguale a 5 cm

E un cilindro con diametro di base uguale a 6 cm

Il solido generato dalla rotazione del rettangolo attorno alla propria base è un cilindro la cui altezza è 3 cm e la cui base ha diametro uguale a 10 cm.

La risposta corretta è dunque la C.

---

12 Un cocomero di forma sferica viene tagliato in 16 fette tutte uguali fra loro.

Se il diametro del cocomero è di 40 cm, il volume di ciascuna fetta è di:

A $\frac{40}{16}\pi\ \text{cm}^3$ B $\frac{40^3}{16}\pi\ \text{cm}^3$ C $\frac{\pi^3}{16}\ \text{cm}^3$ D $\frac{2000}{3}\pi\ \text{cm}^3$ E $\frac{\pi}{16}\ \text{cm}^3$

Se il diametro del cocomero misura 40 cm, il suo raggio misura 20 cm ed il suo volume vale:

$$V_{\text{cocomero}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(20)^3 = \frac{4}{3} \cdot 8000\pi\ \text{cm}^3 = \frac{32.000}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

Poiché il cocomero viene diviso in 16 fette uguali, ciascuna di esse avrà volume pari a un sedicesimo di quello del cocomero, cioè:

$$V_{\text{fetta}} = \frac{1}{16}V_{\text{cocomero}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{32.000}{3}\pi\ \text{cm}^3 = \frac{2000}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

quindi la risposta esatta è la D.

---

13 Siano S e s le due aree rispettivamente del cerchio circoscritto e del cerchio inscritto in un triangolo equilatero di lato l. Allora:

A S è il doppio di s

B S è il quadruplo di s

C il triplo di S è uguale al quadruplo di s

D il rapporto S/s dipende da l

E le superfici dei due cerchi sono grandezze fra loro incommensurabili

MATEMATICA

Ragionando sulla figura a lato e indicando con r ed R il raggio della circonferenza inscritta e circoscritta rispettivamente, è possibile ricavare la seguente relazione[1]:

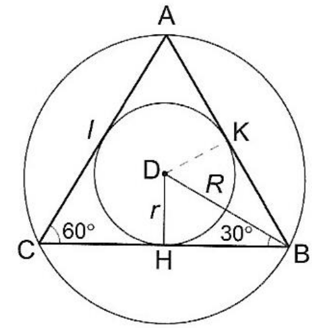
$$R = 2 \cdot r$$

per cui si ha:

$$s = \pi \cdot r^2$$

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (2 \cdot r)^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot s$$

quindi la risposta corretta è la B.



14 Quante diagonali ha un tetraedro?

A 0
B 1
C 2
D 4
E 6

La diagonale di un poliedro è il segmento che congiunge due vertici non appartenenti a uno stesso spigolo. In un tetraedro, presi due vertici qualsiasi, essi appartengono sempre a uno stesso spigolo, quindi tale poliedro non ha alcuna diagonale, risposta A.

Più in generale, per un poliedro per cui vale la formula di Eulero:

$$F - S + V = 2$$

dove F indica il numero delle facce, S quello degli spigoli e V quello dei vertici, la formula che fornisce il numero delle diagonali D è:

$$D = \frac{V(V-1)}{2} - S$$

Nel caso del tetraedro, poligono avente 4 facce (triangoli equilateri), 4 vertici e 6 spigoli, si ha:

$$D = \frac{4(4-1)}{2} - 6 = \frac{12}{2} - 6 = 6 - 6 = 0$$

1. Infatti il triangolo BDH è rettangolo (essendo BC una tangente alla circonferenza inscritta e DH il raggio passante per il punto di tangenza H); inoltre il segmento BD giace sulla bisettrice del vertice B del triangolo ABC (è possibile ricavarlo dalla congruenza dei due triangoli BDH e BDK). Il triangolo BDH è dunque rettangolo con un angolo di 30° per cui la sua ipotenusa BD (ossia il raggio R della circonferenza circoscritta) è il doppio del cateto DH (ossia il raggio r della circonferenza inscritta) opposto all'angolo di 30°. Questo significa $R = 2 \cdot r$.