5 | Disequazioni

5.1 | Disequazioni

Una disuguaglianza tra due espressioni algebriche letterali **verificata solo per alcuni valori numerici assegnati alle lettere** prende il nome di **disequazione**.

Risolvere una disequazione significa trovare **tutti** i valori dell'incognita che la soddisfano.

Le soluzioni di una disequazione sono quindi **tutti** i valori dell'incognita (di solito infiniti) che, sostituiti nella disequazione, la rendono una disuguaglianza vera.

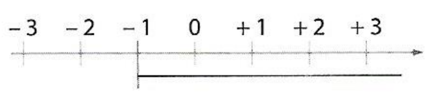
5.1.1 | Rappresentazione grafica della soluzione di una disequazione

Come si vedrà dai successivi esempi, in generale una disequazione è (a differenza di una equazione) verificata da una **infinità** di valori numerici, per esempio:

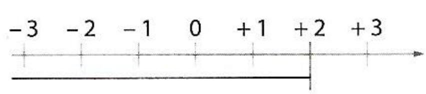
- da tutti i valori di x minori di un certo numero a, ossia $x < a$;
- da tutti i valori di x maggiori di un certo numero b, ossia $x > b$;
- da tutti i valori di x compresi tra due certi numeri c e d, ossia $c < x < d$.

Se tra i valori assunti dall'incognita si possono considerare anche i valori estremi, le tre scritture precedenti diventano rispettivamente $x \leq a$, $x \geq b$ e $c \leq x \leq d$. Nella pratica, è molto utile rappresentare *graficamente* la soluzione di una disequazione, indicando su di una retta (che rappresenta l'insieme di tutti i valori numerici reali) quali valori soddisfano la disequazione e quali no. Si osservino i seguenti tre esempi, dove le soluzioni sono individuate graficamente da segmenti:

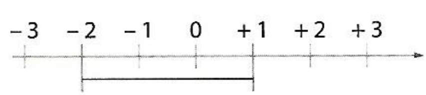
$x > -1$ $\rightarrow$



$x < +2$ $\rightarrow$



$-2 < x < +1$ $\rightarrow$



5.1.2 | Disequazioni e metodo della verifica

Poiché una disequazione è, in generale, verificata da una infinità di valori numerici, il metodo della verifica non è applicabile.

Risolvere la seguente disequazione: $2x + 1 \geq 0$

A $x \leq -2$ B $x \geq 0$ C $x > -1/2$ D $x \geq -1/2$ E $x \geq -2$

Mentre la prima e l'ultima risposta non soddisfano la disequazione, le altre tre la soddisfano, eppure la sola risposta corretta è la D. La soluzione di una disequazione è, infatti, l'insieme di **tutti** e soli i valori dell'incognita che la soddisfano.

In altre parole, le disequazioni vanno risolte in modo "tradizionale".

MATEMATICA

5.1.3 | Disequazioni equivalenti

Due disequazioni si dicono *equivalenti* quando ammettono la **stessa soluzione**.

Come per le equazioni, anche per risolvere le disequazioni è importante conoscere i principi di equivalenza che consentono di trasformare una disequazione in un'altra a essa equivalente.

Aggiungendo ad ambedue i membri di una disequazione la medesima espressione algebrica si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Indicando con A, B e K tre espressioni algebriche *sempre definite*, si ha:

$$A > B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} A + K > B + K$$

$x - 3 > 0 \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(sommando + 3)}} x > 3$ quindi, come per le equazioni, è possibile spostare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno.

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per la medesima espressione algebrica sempre definita e sempre positiva si ottiene una disequazione dello stesso verso ed equivalente a quella data.

Indicando con A e B due espressioni algebriche *sempre definite* e con K una espressione algebrica *sempre definita* e **sempre positiva** si ha:

$$\text{se } K > 0: \quad A > B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} A \cdot K > B \cdot K \text{ e inoltre } A > B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} \frac{A}{K} > \frac{B}{K}$$

$2x > 3 \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(dividendo per 2)}} x > \frac{3}{2}$: la disequazione mantiene lo stesso verso.

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per la medesima espressione algebrica sempre definita e sempre negativa si ottiene una disequazione di verso opposto ed equivalente a quella data.

Indicando con A e B due espressioni algebriche *sempre definite* e con K una espressione algebrica *sempre definita* e **sempre negativa** si ha:

$$\text{se } K < 0: \quad A > B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} A \cdot K < B \cdot K \text{ e inoltre } A > B \xrightarrow{\text{è equivalente a}} \frac{A}{K} < \frac{B}{K}$$

$-5x > 7 \xrightarrow[\text{è equivalente a}]{\text{(dividendo per − 5)}} x < -\frac{7}{5}$: la disequazione cambia verso.

5.1.4 | Disequazioni intere di primo grado

Una disequazione intera di primo grado può sempre essere ricondotta (tramite le proprietà viste nel paragrafo precedente) a una delle forme seguenti:

$$ax + b > 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b < 0 \qquad [8]$$

applicando ancora le proprietà viste nel paragrafo precedente si ha:

$$ax > -b \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad ax < -b \rightarrow \begin{cases} x < -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x > -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases} \qquad [9]$$

$2x + 1 > 0 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$3 - 4x < 0 \rightarrow -4x < -3 \rightarrow x > +\frac{3}{4}$

5.1.5 | Segno di un prodotto o di un quoziente

Prima di analizzare le disequazioni frazionarie è utile studiare come si comporta il segno di un prodotto o di un quoziente di due espressioni algebriche.

Siano A e B due espressioni algebriche *sempre definite*. Allora, per quanto riguarda il prodotto si ricava:

$$A \cdot B > 0 \leftrightarrow \text{A e B sono concordi} \qquad A \cdot B < 0 \leftrightarrow \text{A e B sono discordi}$$

e analogamente per il quoziente si ha:

$$\frac{A}{B} > 0 \leftrightarrow \text{A e B sono concordi} \qquad \frac{A}{B} < 0 \leftrightarrow \text{A e B sono discordi}$$

Per cui si ricava che:

$$A \cdot B > 0 \leftrightarrow \frac{A}{B} > 0 \leftrightarrow \text{A e B sono concordi}$$

$$A \cdot B < 0 \leftrightarrow \frac{A}{B} < 0 \leftrightarrow \text{A e B sono discordi}$$

5.1.6 | Disequazioni frazionarie di primo grado

Una disequazione viene detta **frazionaria** quando **l'incognita compare al denominatore**.

Il metodo seguito per risolvere le equazioni frazionarie (ossia trovare le Condizioni di Esistenza, quindi eliminare i denominatori moltiplicando ambo i membri per il denominatore comune) non è purtroppo applicabile anche alle disequazioni, in quanto, per poter moltiplicare per il denominatore comune occorre tener conto del suo segno.

Per evitare di dover considerare i due possibili casi (ossia denominatore comune positivo e denominatore comune negativo) conviene procedere come nel seguente esempio.

Per risolvere una disequazione frazionaria si comincia col portare tutti i termini al primo membro, calcolando poi il denominatore comune e riducendo i termini simili:

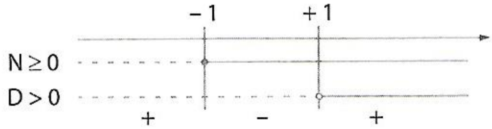
$$\frac{2}{x-1} \geq -1 \rightarrow \frac{2}{x-1} + 1 \geq 0 \rightarrow \frac{2+x-1}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

Si cercano ora i valori di x che rendono concordi il numeratore e il denominatore. Per fare questo si deve *studiare il segno* di numeratore e denominatore: si comincia quindi col cercare i valori di x che rendono *positivi* numeratore e denominatore (ricordandosi di scartare per quest'ultimo gli eventuali zeri):

$$N \geq 0 \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

Questi risultati vengono rappresentati graficamente nel seguente diagramma, dove il tratto unito indica la positività, il tratteggio indica la negatività, il pallino pieno indica che il valore $x = -1$ deve essere incluso dalla soluzione, mentre il pallino vuoto indica che il valore $x = +1$ deve essere escluso dalla soluzione:



La soluzione cercata è quindi $x \leq -1$ e $x > 1$; infatti, in tali intervalli, c'è concordanza di segno fra il numeratore $(x + 1)$ e il denominatore $(x - 1)$.

5.1.7 | Segno di un trinomio di secondo grado e disequazioni

Le disequazioni di secondo grado (in forma normale) si presentano nelle seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c < 0 \qquad [10]$$

Senza ledere la generalità si può assumere $a > 0$ (in caso contrario, è sufficiente moltiplicare entrambi i membri per -1 e cambiare verso alla disequazione). In tale circostanza, risolvere una delle due disequazioni [10] equivale a *studiare il segno* del trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$.

Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante del trinomio: sotto l'ipotesi $a > 0$ si presentano i tre casi riportati nella tabella seguente.

	Radici del trinomio $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c > 0$ **è soddisfatta da:**	$ax^2 + bx + c < 0$ **è soddisfatta da:**
$\Delta > 0$	due radici distinte x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$	$x < x_1$ e $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	due radici coincidenti $x_{1,2} = -b/2a$	$x \neq -b/2a$	non ammette soluzioni
$\Delta < 0$	nessuna radice reale	tutti i valori di x	non ammette soluzioni

Se la disequazione ammette l'uguaglianza (ossia non prevede una disuguaglianza stretta) e si presenta quindi in una delle nelle seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

sempre sotto l'ipotesi $a > 0$ la tabella precedente diventa:

	Radici del trinomio $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ **è soddisfatta da:**	$ax^2 + bx + c \leq 0$ **è soddisfatta da:**
$\Delta > 0$	due radici distinte x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$	$x \leq x_1$ e $x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	due radici coincidenti $x_{1,2} = -b/2a$	tutti i valori di x	$x = -b/2a$
$\Delta < 0$	nessuna radice reale	tutti i valori di x	non ammette soluzioni

5.1.8 | Disequazioni intere di secondo grado

Applicando quanto visto nel paragrafo precedente (in particolare la tabella riassuntiva), risulta possibile risolvere le disequazioni intere di secondo grado.

Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - x + 1 < 0$.
Essendo $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$, dalla prima tabella (ultima riga e ultima colonna) si ricava che la disequazione non ammette soluzioni.

Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$.
Dopo aver moltiplicato entrambi membri per -1 e aver cambiato il verso della disuguaglianza (per rispettare la condizione $a > 0$), si ottiene la disequazione $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Le radici del trinomio a primo membro sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.
La soluzione della disequazione risulta quindi (penultima colonna della seconda tabella):

$$x \leq x_1 \text{ e } x \geq x_2 \rightarrow x \leq 2 \text{ e } x \geq 3$$

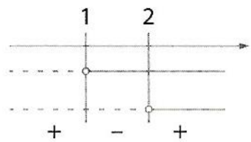
Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Le radici del trinomio sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, per cui la soluzione è costituita dalle x comprese tra 1 e 2. Nella prima tabella (prima riga e ultima colonna) si legge infatti:

$$x_1 < x < x_2 \rightarrow 1 < x < 2$$

Ovviamente, si poteva anche scomporre il primo membro in fattori e studiarne il segno, pervenendo allo stesso risultato.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2) \rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$



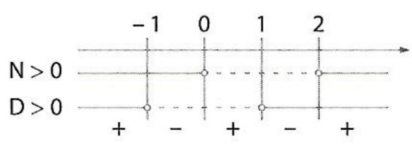
5.1.9 | Disequazioni frazionarie di secondo grado

Per risolvere una disequazione frazionaria di secondo grado si procede (come nel § 5.1.6) allo studio del segno di numeratore e denominatore, per poi verificare dove i segni siano concordi o discordi a seconda del verso della disequazione di partenza.

Per risolvere la seguente disequazione frazionaria:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} < 0$$

si cercano i valori di x che rendono discordi il numeratore e il denominatore. Per fare questo si studia il segno di numeratore e denominatore: si comincia sempre col cercare i valori di x che rendono *positivi* numeratore e denominatore. Il numeratore ammette due radici reali e distinte (ossia $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$) ed è quindi positivo per valori esterni (ossia $x < 0$ e $x > 2$). Il denominatore ammette anch'esso due radici reali e distinte (ossia $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$) ed è positivo per valori esterni (ossia $x < -1$ e $x > +1$). In forma grafica:



Negli intervalli (− 1, 0) e (1, 2) la frazione è negativa e la disequazione è quindi verificata: la soluzione cercata è pertanto $-1 < x < 0$ e $1 < x < 2$.

5.1.10 | Disequazioni di grado superiore al secondo

Le disequazioni di grado superiore al secondo si risolvono scomponendo in fattori il polinomio (di grado superiore al secondo) nel prodotto di due o più fattori (di primo o secondo grado).

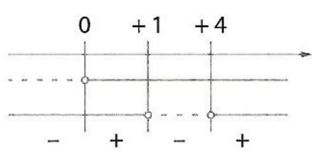
Risolvere la seguente disequazione: $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$.

Effettuando un raccoglimento a fattore comune, si ottiene: $x \cdot (x^2 - 5x + 4) > 0$.

Studiando il segno dei singoli fattori si ricava:

1° fattore > 0 per $x > 0$

2° fattore > 0 per $x < 1$ e $x > 4$



la soluzione della disequazione risulta dunque $0 < x < 1$ e $x > 4$.

MATEMATICA

Quesiti svolti

1 **Le soluzioni della seguente disequazione $x^2 - 6x + 5 < 0$ sono:**

- A $x < 1$ o $x > 5$
- B $1 < x < 5$
- C $2 < x < 3$
- D $x < -6$
- E non esistono nel campo reale

Il trinomio contenuto nel primo membro della disequazione data è negativo per valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione associata $x^2 - 6x + 5 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$. La disequazione è quindi verificata per $1 < x < 5$ (risposta B).

2 **La disequazione $x^2 < a$ nell'incognita x:**

- A è impossibile per $a < 1$
- B è risolta, qualunque sia $a > 0$, per $-a < x < a$
- C è risolvibile purché $a < 0$
- D è risolvibile per ogni valore di a
- E nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

Nell'insieme dei numeri reali la disequazione di secondo grado:

$$x^2 < a$$

è risolta, qualunque sia il valore di a positivo, per valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione associata $x^2 = a$, cioè per $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. Per valori negativi di a la disequazione data non è mai verificata per alcun valore reale di x. La risposta esatta è la E.

3 **Le soluzioni della disequazione:**

$$(2 - x)(x + 1)\,x < 0$$

sono:

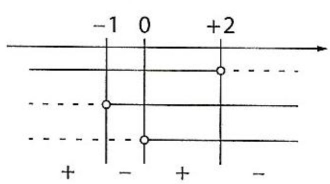
- A $-1 < x < 0$ oppure $x > 2$
- B $x < -1$ oppure $0 < x < 2$
- C $-1 < x < 0$
- D $x > 2$
- E $0 < x < 1$ oppure $x > 2$

Studiando il segno dei singoli fattori e facendo il prodotto dei segni per ciascun intervallo si ricava:

1° fattore $> 0 \;\rightarrow\; 2 - x > 0 \;\rightarrow\; x < 2$

2° fattore $> 0 \;\rightarrow\; x + 1 > 0 \;\rightarrow\; x > -1$

3° fattore $> 0 \;\rightarrow\; x > 0 \;\rightarrow\; x > 0$



La soluzione della disequazione risulta dunque $-1 < x < 0$ e $x > 2$: la risposta corretta è pertanto la A.

4 **Risolvere la disequazione: $(2x + x^2 + 1)/(x^2 - 1) > 0$.**

- **A** $x > 0$
- **B** $x < -1$ e $x > 1$
- **C** $-1 < x < 1$
- **D** $x < 0$
- **E** x qualunque

Si è già detto che le disequazioni, diversamente da quanto accade per le equazioni, vanno risolte in modo tradizionale. Per rispondere ai quesiti sulle disequazioni è dunque molto importante scegliere una "strada veloce". In questo esercizio è sufficiente notare che il numeratore è un quadrato perfetto ($2x + x^2 + 1 = (x + 1)^2$) per concludere che la disequazione è soddisfatta dai valori di x che rendono positivo il denominatore. Si tratta cioè di risolvere la disequazione di secondo grado $x^2 - 1 > 0$. L'equazione equivalente ammette le due radici $x = 1$ e $x = -1$: il binomio $x^2 - 1$ è positivo per valori esterni all'intervallo delle due radici. La risposta corretta è dunque la **B**.

---

5 **Siano a e b due numeri reali con $a < b$. Quali, fra le seguenti affermazioni, è vera?**

- **A** $|a| < |b|$
- **B** $a^2 < b^2$
- **C** $ab < b^2$
- **D** $a^2 + b^2 < 2ab$
- **E** Nessuna delle precedenti

Conviene procedere per esclusione: la risposta **A** è errata: infatti, prendendo $a = -2$ e $b = -1$, la disequazione diventa $2 < 1$. Gli stessi valori numerici attribuiti ad a e b consentono di scartare anche la **B** e la **C**. La risposta **D** infine non è vera in quanto, portando il secondo membro $2ab$ a primo membro, si ottiene la disuguaglianza falsa $(a - b)^2 < 0$.

Non resta dunque che scegliere la **E**.

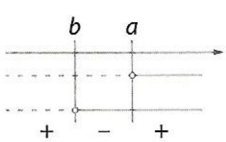
---

6 **Dire per quali valori di x vale la disequazione $\dfrac{x-a}{x-b} > 0$ con $a > b > 0$.**

- **A** Per $x > a$
- **B** Per $x < b$
- **C** Per $b < x < a$
- **D** Per $x > a$ e $x < b$
- **E** Nessuna delle precedenti

Si cercano i valori di x che rendono concordi il numeratore e il denominatore:

$$\begin{matrix} N > 0 \\ D > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x - a > 0 \\ x - b > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x > a \\ x > b \end{matrix}$$



prestando attenzione al posizionamento di a e b sulla retta reale (ossia ricordando che $b < a$) si ricava che la soluzione è $x < b$ e $x > a$ (risposta **D**).

MATEMATICA

7 Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $|x-1| \leq 2$ è verificata per:

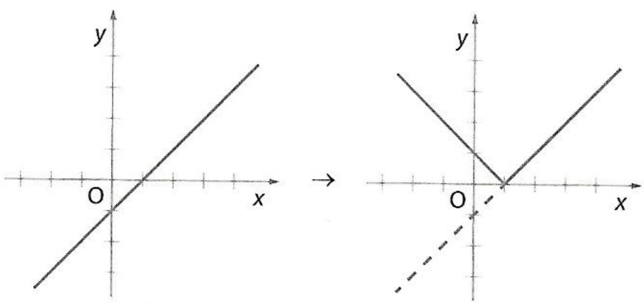
- (A) $1 \leq x \leq 3$
- (B) $-2 \leq x \leq 2$
- (C) $-1 \leq x \leq 2$
- (D) $-1 \leq x \leq 3$
- (E) $-1 < x \leq 2$

Per rispondere al quesito per via algebrica occorre "eliminare" il valore assoluto studiando il segno dell'argomento del valore assoluto stesso e trattando separatamente il caso di argomento positivo e quello di argomento negativo. Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x-1 \leq 2 \ \text{ per } x \geq 1 \\ 1-x \leq 2 \ \text{ per } x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \ \text{ per } x \geq 1 \\ x \geq -1 \ \text{ per } x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

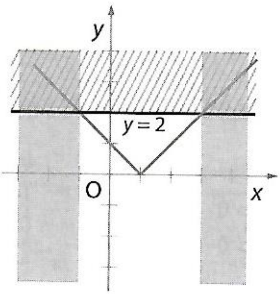
per cui la risposta corretta è la (D).

Il quesito poteva essere risolto anche per via geometrica disegnando il grafico dell'equazione $y = |x-1|$ che si ottiene disegnando il grafico della retta $y = x-1$ e "ribaltando" verso l'alto la parte di grafico che si trova al di sotto dell'asse delle x, come nel disegno seguente:



$y = x-1$ $\qquad\qquad$ $y = |x-1|$

A questo punto risulta facile individuare i valori che soddisfano la disequazione $|x-1| \leq 2$: si tratta di tutti i punti del grafico aventi ordinata minore o uguale a 2, ossia tutti quelli al di sotto della retta orizzontale $y = 2$.



Ovviamente anche per via geometrica si conferma che la risposta corretta è la (D).

8 **Per quali valori di a l'equazione $(a+1)x+2=0$ ha soluzioni inferiori a -2?**

- A $a<0$
- B $0<a<1$
- C $-1<a<+1$
- D $-1<a<0$
- E $a<-1$

L'equazione data è parametrica e ammette la soluzione $x=\dfrac{-2}{a+1}$ con $a\neq -1$.
Questa soluzione è minore di -2 se:

$$\frac{-2}{a+1}<-2 \rightarrow \frac{1}{a+1}>1 \rightarrow \frac{1-a-1}{a+1}>0 \rightarrow -\frac{a}{a+1}>0 \rightarrow \frac{a}{a+1}<0$$

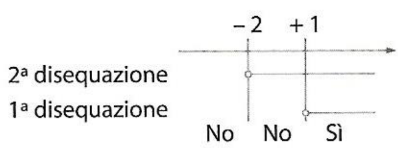
Dallo studio del segno dei termini della frazione algebrica contenuta nel primo membro della disequazione si ricava che i valori di a che rendono discordi il numeratore e il denominatore sono quelli compresi tra -1 e 0 (risposta D).

9 **Risolvere il seguente sistema di disequazioni** $\begin{cases} x-1>0 \\ -2-x<0 \end{cases}$.

- A $x<-2$ e $x>1$
- B $x>1$
- C $-2<x<1$
- D Il sistema è impossibile
- E $x>-2$

Si cercano i valori di x che soddisfano contemporaneamente entrambe le disequazioni.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ -2-x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -x<2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \end{cases} \rightarrow$$



Per $x>1$ entrambe le disequazioni sono soddisfatte; pertanto la soluzione del sistema è $x>1$ (risposta B).