GEOMETRIA ANALITICA

COORDINATE CARTESIANE E GEOMETRIA ANALITICA

RETTE E SEGMENTI ORIENTATI

Una retta si dice **orientata** se viene stabilito un verso positivo, indicato dalla freccia.

Se su una retta orientata fissiamo un punto O, otterremo due semirette, una positiva e una negativa. Il punto ottenuto prende il nome di origine delle semirette.

Fissando inoltre sulla stessa retta un punto A otterremo un segmento che potrà essere positivo o negativo.

Si dirà **misura del segmento orientato OA,** rispetto ad una unità prefissata u, il numero reale assoluto che esprime il rapporto fra OA e u

ASCISSE SULLA RETTA

Considerando una retta dove sono fissati due punti O e P, si chiama **ascissa del punto P**, la misura del segmento OP.

L'ascissa del punto P assumerà un valore reale positivo, negativo o nullo a seconda della posizione di P rispetto ad O. In questo modo **ogni punto assume un valore reale**. Vale anche il ragionamento inverso.

In questo modo si è stabilito una **relazione biunivoca** tra i punti delle retta e l'insieme dei numeri reali.

RIFERIMENTO CARTESIANO E COORDIATE DI UN PUNTO

Fissate due rette sul piano orientate fra loro ortogonalmente. Le due rette prendono il nome **di assi cartesiani.** Chiamate **asse x (ascisse) e asse y (ordinate).**

Il punto di intersezione prende il nome di **origine del sistema di riferimento**. I due assi dividono il piano in 4 quadranti.

Fissato un punto del piano P, possiamo trovare "a" e "b" ovvero la distanza rispetto tra il punto P e i due assi. Questi due numeri prendono il nome di **coordinate cartesiane ortogonali** del punto P dove "a" prende il nome di **ascissa** e "b" prende il nome di **ordinata**.

A ogni punto del piano corrispondono una coppia di numeri reali.

Vale anche il contrario. Ovvero che, data una coppia di numeri reali a e b è possibile determinare sempre un punto P.

Si è così stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali.

DISTANZA TRA DUE PUNTI E COORDINATE DEL LORO PUNTO MEDIO

Le formule per calcolare la distanza tra due punti A e B sono:

$$\overline{AB} = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{se } x_1 = x_2 \\ |x_2 - x_1| & \text{se } y_1 = y_2 \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \text{in generale} \end{cases}$$

Mentre la formula per calcolare il punto medio fra 2 punti è: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

CURVE NEL PIANO

La geometria analitica ha l'utilità di rappresentare graficamente le entità algebriche.

Rappresentando sul piano cartesiano gli infiniti punti (x; y) le cui coordinate soddisfano l'equazione F (x, y) = 0 si ottiene una **curva**.

Qualsiasi equazione in due incognite F (x, y) = 0 è detta anche curva

CONDIZIONI DI APPARTENENZA

Un punto P appartiene alla curva della funzione F (x, y) = 0 se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva

CURVE DEL PIANO COME LUOGHI GEOMETRICI

Il termine **luogo geometrico** si indica l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà. Es. Equidistanza da un centro.

La curva di equazione F (x, y) = 0 è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa.

CURVE ALGEBRICHE E CURVE TRASCENDENTI

F (x, y) = 0 è una **curva algebrica** se F (x, y) è un polinomio nelle variabili x e y: **l'ordine della curva** è il grado del polinomio.

Se F (x, y) non può essere rappresentata in forma polinomiale, la curva si dirà trascendente.

CURVE ALGEBRICHE DEL PRIMO ORDINE: LE RETTE

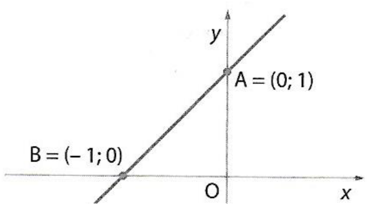
EQUAZIONE GENERALE DELLA RETTA

La forma per esprimere un equazione di primo grado (o lineare) in due incognite è: **ax + by + c = 0**

Il diagramma cartesiano per una equazione lineare è una retta.

Per disegnare una retta in un diagramma è sufficiente determinare solo due punti che appartengono ad essa. Quindi si scelgono due valori per una variabile che permettano di determinare le coordinate dei due punti.

Si consideri l'equazione $F(x, y) = x - y + 1 = 0$: assegnando per esempio all'incognita x il valore $x = 0$ si ricava $y = 1$, per cui il punto $A = (0; 1)$ appartiene alla curva di equazione $x - y + 1 = 0$.
Similmente, assegnando alla y il valore $y = 0$ si ricava $x = -1$, per cui il punto $B = (-1; 0)$ appartiene anch'esso alla curva.



CASI PARTICOLARI

Nel caso in cui uno dei tre valori a, b, c risultasse nulla avremo i seguenti casi

1. a = 0 → by + c = 0 → y = -c/b → costante
   In questo avremo una retta **orizzontale**
2. b = 0 → ax + c = 0 → x = -c/a → costante
   In questo avremo una retta **verticale**
3. c = 0 → ax + by = 0
   Questo tipo di equazione rappresenta l'equazione di un **fascio di rette** passanti per l'origine

EQUAZIONE CANONICA DELLA RETTA E COEFFICIENTE ANGOLARE

La formula esplicita dell'equazione generale di una retta è: $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$

Avremo quindi che:

- -a/b = m → **coefficiente angolare** della retta
- -c/b = q → **termine noto**

La formula può perciò essere espressa anche come: **y = mx + q**. Questa formula prende il nome di **equazione canonica della retta.**

Mentre l'equazione generale rappresenta tutte le rette. L'equazione canonica tralascia le rette verticali.

Data un equazione, il suo coefficiente angolare indica l'inclinazione della retta rispetto all'asse delle x. Per le rette verticali il coefficiente sarà pari a 0.

RETTE PARALLELE E RETTE PERPENDICOLARI

Due rette vengono definite **parallele** quando i coefficienti angolari sono uguali (**condizione di parallelismo**)

Due rette vengono definite **perpendicolare** quando un coefficiente angolare è il reciproco dell'altro (**condizione di perpendicolarità**)

EQUAZIONE DELLE RETTE PASSANTI PER UNO O PER DUE PUNTI

Per un punto P = (x_0, y_0) passano infinite rette. Di conseguenza l'equazione di una retta passante per quel punto sarà: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Dati due punti A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2), l'equazione della retta passante per i due punti è data dalla formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

EQUAZIONE SEGMENTARIA DELLA RETTA

Per calcolare l'equazione di una retta passante per due punti degli assi (A = (p, 0) e B = (0, q)), retta chiama segmentaria, si utilizza la formula:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

DISTANZA PUNTO RETTA

Data la retta ax + by + c = 0 e un punto P = (x_0, y_0); la distanza tra essi sarà:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CURVE ALGEBRICHE DEL SECONDO ORDINE: LE CONICHE

Le curve che vengono rappresentate da un equazione di secondo grado prendono il nome di coniche. Il nome deriva da un intersezione fra una superficie conica a due falde e un piano. A seconda dell'inclinazione del piano si hanno diversi tipi di coniche: circonferenza, elisse, parabola e iperbole.

EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA

L'equazione generale di una conica coincide con un equazione di secondo grado del tipo:

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

CIRCONFERENZA

La circonferenza è il luogo dei punti del piano per I quali è costante la distanza da un punto fisso detto centro.

L'equazione normale della circonferenza è: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

L'equazione generale della circonferenza è **una equazione di secondo grado mancante del termine in xy** e avente i coefficienti dei termini di grado massimo uguali tra loro.

Data l'equazione di una circonferenza, avente centro C = (α; β) e raggio r:

$\alpha = -a/2$ $\beta = -b/2$ $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$

POSIZIONI RECIPROCHE TRA RETTE E CIRCONFERENZE

In base al confronto tra la distanza di una retta dal il centro della circonferenza con il raggio possiamo assistere a tre circostanze:

$d > r$ → retta esterna $d = r$ → retta tangente $d < r$ → retta secante.

ELLISSE

L'elisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante **la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.**

L'equazione canonica dell'elisse è : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Con le ellissi scritte in forma canonica si usa la nomenclatura

a: semiasse maggiore b: semiasse minore c: semidistanza focale

La relazione tra i tre parametri è: $c^2 = a^2 - b^2$

L'eccentricità di un elisse si calcola con il rapporto $e = c/a$

La circonferenza è un elisse con eccentricità nulla.

PARABOLA

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice.

L'equazione generale di una parabola avente una direttrice orizzontale è: $y = ax^2 + bx + c$

Se nell'equazione di una parabola il parametro a è positivo la concavità sarà rivolta verso l'alto. Viceversa se questo è negativo, la concavità sarà verso il basso.

Le coordinate del fuoco F, l'equazione della direttrice, l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice sono:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \qquad y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \qquad x = -\frac{b}{2a} \qquad V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

La parabola con direttrice orizzontale è anche una funzione

La parabola con direttrice verticale non è una funzione

IPERBOLE

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Questa può essere espressa come $|PF_1 - PF_2| = 2a$ dove F_1 e F_2 sono i fuochi e 2a è la differenza delle distanze di un punto P dai fuochi.

L'equazione canonica dell'iperbole è : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Con le iperboli scritte in forma canonica si usa la nomenclatura

a: semiasse traverso b: semiasse non traverso c: semidistanza focale

La relazione tra i tre parametri è: $c^2 = a^2 + b^2$

L'eccentricità di un elisse si calcola con il rapporto e = c/a

ASINTOTI DI UN'IPERBOLE

Quando una curva si avvicina in modo indefinito ad una retta, il suo comportamento viene detto asintoto e la retta in questione asintoto della curva.

In un iperbole avente come equazione $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ l'equazione degli asintoti sono:

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad y = \frac{b}{a}x$$

Un 'iperbole si dice equilatera quando i suoi asintoti sono perpendicolari tra loro.

E poiché: $-\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = -1 \rightarrow b^2 = a^2$

Allora possiamo dire anche che l'equazione canonica di un iperbole equilatera sarà:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \xrightarrow{\text{moltiplicando ambo i membri per } a^2} x^2 - y^2 = a^2$$

In alcuni casi si parlerà di iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, in quanto coincidono con gli assi del sistema si riferimento.

L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti è anche una funzione

---

METODO PRATICO PER IL RICONOSCIMENTO DELLA CONICA

Come si è visto in precedenza con l'equazione $F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ è possibile ottenere tutte le coniche. In particolare si possono ottenere tre casi:

- Se $B^2 - 4AC < 0$ allora la conica è un elisse. Sarà una circonferenza se A = C e B = 0
- Se $B^2 - 4AC = 0$ allora la conica è una parabola
- Se $B^2 - 4AC > 0$ allora la conica è un iperbole. Inoltre l'iperbole è equilatera se A + C = 0

PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA FRA GRANDEZZE

Tra due variabili x e y vi è proporzionalità diretta se il loro rapporto è costante (y/x = k).

Tra due variabili x e y vi è proporzionalità inversa se il loro prodotto è costante (y*x = k).