INSIEMI, NUMERI E OPERAZIONI

INSIEMI

Un insieme può essere inteso come una collezione di oggetti chiamati membri o elementi di un insieme. Questi vengono definiti come concetti primitivi ovvero non definibili tramite concetti più semplici. Un insieme è definito quando esiste una regola che permette di stabilire se un elemento appartiene all'insieme.

SIMBOLOGIA

$x \in A$; *x* appartiene ad A

$x \notin A$; *x* non appartiene ad A

$A \subseteq B$; A è contenuto in B (A è **sottoinsieme** di B)

$A \subset B$; A è contenuto propriamente in B (A è **sottoinsieme proprio** di B)

DEFINIZIONI

- Due insiemi sono uguali se contengono gli stessi elementi
- L'insieme vuoto è un insieme privo di elementi
- L'insieme ambiente o universo ("insieme U") contiene la totalità dei possibili elementi

CORRISPONDENZE FRA INSIEMI

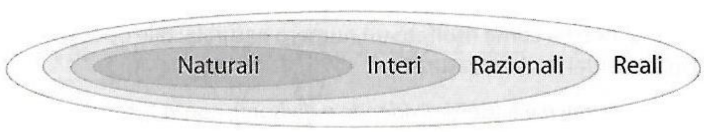
Dati due insiemi se esiste un criterio che permette di associare gli elementi del altro, si dice che i due insiemi sono legati da una corrispondenza.

- CORRISPONDENZA UNIVOCA: Tra due insiemi A e B vi è corrispondenza univoca quando a ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B. La corrispondenza univoca viene definita anche funzione o applicazione. Viene indicata con $\varphi: A \to B$.
- CORRISPONDENZA BIUNIVOCA: Tra due insiemi vi è una corrispondenza biunivoca quando a ogni elemento di un insieme corrisponde uno e un solo elemento del altro e viceversa. Questo tipo di corrispondenza viene definito anche trasformazione tra A e B.

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

- Intersezione: Insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente a entrambi gli insiemi. Viene indicato con il simbolo $\cap$
- Unione: Insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi. Viene indicato con il simbolo $\cup$

Uno dei primi obiettivi è quello di saper classificare i numeri nei vari insiemi numerici (o classi numeriche).



NUMERI NATURALI

I numeri naturali costituisco un insieme infinito, indicato con $\mathbb{N}$. Devono il loro nome all'azione naturale del contare

OPERAZIONI NATURALI E LE PROPRIETA'

L'ordine corretto di priorità per l'esecuzione di un'espressione è:

1: parentesi 2: potenze e radici 3: moltiplicazioni e divisioni 4: addizioni e sottrazioni

Le principali proprietà delle operazioni fondamentali sono:

- Addizione:
  - Commutativa: a + b = b + a
  - Associativa: (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c
- Sottrazione:
  - Invariantiva: a – b = (a ± c) – (b ± c)
- Moltiplicazione:
  - Commutativa a * b = b * a
  - Associativa: (a* b) * c = a * (b * c) = a * b * c
  - Distributiva rispetto alla somma: a * (b + c) = a * b + a * c
- Divisione:
  - Invariantiva: a / b = (a / c) / (b / c) = (a * c) / (b * c)
  - Distributiva rispetto alla somma: (a + b) / c = a / c + b / c -> in una frazione questa proprietà può essere applicata solo al numeratore.

DIVISIONE CON RESTO, CRITERI DI DIVISIBILITA'

Nel insieme dei naturali la divisione fra 2 naturali abbia soluzione. Viene definita infatti divisione con resto l'operazione che determina due numeri naturali ovvero quoziente e resto.

Esistono alcuni criteri di divisibilità per stabilire se un numero è divisibile per un altro:

- Per 2: se l'ultima cifra è divisibile per 2
- Per 3: se la somma delle cifre è divisibile per 3
- Per 4: se il numero formato dalle ultime due cifre è divisibile per 4
- Per 5: se l'ultima cifra è 0 o 5
- Per 6: se è divisibile per 2 e 3
- Per 7: se la differenza tra il numero ottenuto escludendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è divisibile per 7
- Per 8: se il numero formato dalle ultime tre cifre è divisibile per 8
- Per 9: se la somma delle cifre è divisibile per 9
- Per 10: se l'ultima cifra è 0
- Per 11: se la differenza fra la somma delle cifre in posto pari e rispetto alle dispari è divisibile per 11

Un numero naturale è divisibile per 1 e se stesso. Un numero è definito pari se possiede solo questi divisori

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI

La scomposizione in fattori primi di un numero è il prodotto dei suoi fattori primi ovvero dei numeri primi. La scomposizione è sempre unica.

MASSIMO COMUNE DIVISORE E MINIMO COMUNE MULTIPLO

Il massimo comune divisore è il maggiore fra gli interi che dividono i numeri dati. Il minimo comune multiplo è il minore fra i multipli in comune tra i numeri.

Per calcolare il MCD si fa il prodotto dei fattori primi in comune tra i numeri con esponente più basso.

Il mcm si calcola con il prodotto fra i fattori primi dei numeri e si prende l'esponente più alto per quelli in comune.

NUMERI INTERI RELATIVI

L'insieme dei numeri interi relativi è costituito dai numeri interi positivi, negativi e lo zero. Normalmente viene indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$.

Non si può mai dividere un numero per 0. Viceversa dividere 0 per un qualsiasi numero darà sempre 0

La legge di annullamento del prodotto dice che se tra i numeri del prodotto è presente uno 0 il risultato sarà 0

VALORE ASSOLUTO DI UN NUMERO RELATIVO

Il valore assoluto di un numero relativo a è una quantità positiva o nulla.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Due numeri relativi aventi lo stesso valore assoluto e segni contrari si chiamano opposti. Due numeri con lo stesso segno si dicono concordi. Due numeri con segni diversi si chiamano discordi.

CONFRONTO FRA NUMERI RELATIVI

Due numeri relativi sono uguali se hanno lo stesso valore assoluto e lo stesso segno.

Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo. Fra due numeri positivi è maggiore quello con il valore assoluto maggiore. Fra due numeri negativi è maggiore quello che ha il valore assoluto minimo.

OPERAZIONI FRA NUMERI RELATIVI

- Addizione: se due numeri sono concordi, si fa la somma dei valori assoluti. Se sue numeri sono discordi si fa la differenza tra i valori assoluti e si mantiene il segno con valore assoluto più alto
- Sottrazione: è l'operazione opposta dell'addizione.
- Moltiplicazione e divisione: si fa la moltiplicazione/divisione fra i valori. Per il segno si può usare questa tabella:

Segno degli operandi		Segno del risultato
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

NUMERI RAZIONALI

Tutte le possibili frazioni costituiscono l'insieme dei numeri razionali, il quale viene indicato con il simbolo $\mathbb{Q}$.

PROPRIETA' INVARIANTIVA E FRAZIONI EQUIVALENTI

Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero si ottiene una frazione equivalente a quella data.

Una frazione viene detta irriducibile o ridotta ai minimi termini quando i suoi termini sono primi fra loro (MCD = 1). Per ridurre si dividono i due elementi per il loro MCD. Questo processo è anche chiamato semplificazione.

OPERAZIONI TRA FRAZIONI

- Addizione e sottrazione: Per addizionare o sottrarre due frazioni si trasformando le due frazioni nelle due aventi per denominatore il mcm tra i due denominatori. In seguito si eseguono i calcoli tra i numeratori
- Moltiplicazione: Per calcolare il prodotto tra due frazioni si calcolano il prodotto del numeratore e quello del denominatore.
- Divisione: Per dividere due frazioni si fa il prodotto del reciproco della seconda frazione.
- Confronto tra frazioni: per confrontare due frazioni è necessario che abbiano lo stesso denominatore. Fatto questo si fa il confronto tra i numeratori

NUMERI DECIMALI E FRAZIONI GENERATRICI

Ogni numero razionale può anche essere rappresentato come numero decimale dividendo il numeratore con il denominatore. I numeri decimali possono essere:

- Limitato: con un numero finito di cifre dopo la virgola
- Illimitato periodico: numero illimitato di cifre che si ripetono. La cifra o le cifre che si chiamo periodo, le cifre decimali prima del periodo vengono chiamate antiperiodo.

È possibile fare il processo contrario passando da un decimale a una frazione. Per i numeri finiti si moltiplica e si divide per il numero di cifre dopo la virgola. Per i numeri illimitati si divide il periodo con un numero composto da tanti 9 quanti le cifre del periodo. Per i numeri che hanno l'antiperiodo si divide il numero completo contando anche le cifre dopo la virgola sottratte al numero dell'antiperiodo e l'intero con il 9 per ogni cifra del periodo e 0 per l'antiperiodo

$0,(13) = \frac{13-0}{99} = \frac{13}{99}$: in questo caso non c'è antiperiodo.

$2,18(4) = \frac{2184-218}{900} = \frac{1966}{900} = \frac{983}{450}$: in questo caso l'antiperiodo è 18.

OPERAZIONI TRA NUEMRI DECIMALI

- Addizione e sottrazione: per addizionare o sottrarre è conveniente allineare le cifre
- Moltiplicazione tra numeri decimali: Per moltiplicare due numeri decimali si fa la moltiplicazione normale inserendo poi la virgola alla posizione pari alla somma del numero delle cifre degli altri due.
- Divisione tra decimali: per eseguire la divisione si moltiplicano ambi i membri per l'opportuno multiplo di 10 per non avere cifre decimali per poi fare una normale divisione.
- Confronto tra numeri decimali: conviene aggiungere tanti zeri dopo la virgola in modo da avere due numeri con le stesse per poi fare il confronto.

PERCENTUALI

Le percentuali sono frazioni avente per denominatore cento. È possibile scriverla anche come numero decimale. Per convertire un numero da percentuale a decimale basta semplicemente spostare la virgola di due posti a sinistra passando da percentuale a decimale, e di due verso destra per la conversione opposta.

PROBLEMI DI SCONTO

La formula per il calcolo è:

Sconto = costo * tasso di sconto (risulta più semplice in frazione)

PROBLEMI DI INTERESSI

Per calcolare il valore dell'interesse si usa la formula:

Interesse = capitale * tempo * tasso d'interesse

VARIAZIONI PERCENTUALI

La formula per la ottenere la percentuale di incremento o decremento di un valore conoscendo il valore iniziale e il valore globale è:

Valore percentuale = $\frac{\text{nuovo valore} - \text{valore iniziale}}{valore\ iniziale}$* 100%

POTENZE DI UN NUMERO RAZIONALE

La potenza di un numero razione a, detto base, con esponente n è il prodotto di n fattori uguali ad a

Se la base è positiva, il valore è sempre positivo

Se la base è negativa, il valore della potenza è positivo con esponente pari, negativo con l'esponente dispari.

PROPRIETA' DELLE POTENZE

- Qualunque numero con esponente 1 è uguale a se stesso
- Il valore di una potenza con base 0 è sempre uguale a 0
- La condizione per cui il valore di una potenza non sia nulla è che la base sia diversa da 0
- Il valore di una potenza con base 1 è sempre uguale a 1

POTENZE E OPERAZIONI FONDAMENTALI

Il prodotto tra due potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti

Il quoziente tra due potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti

Una potenza con base diversa da 0 e con esponente 0 è sempre uguale a 1

Una potenza con esponente negativo è uguale al reciproco della potenza ma con esponente opposto

PROPRIETA' DISTRIBUTIVE DELLE POTENZE

La potenza del prodotto di più fattori è uguale al prodotto delle potenze di ciascun fattore.

La potenza di un quoziente di due numeri è uguale al quoziente delle potenze di ciascuno dei due numeri dati

La potenza di una potenza di una base qualsiasi è una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.