2 | Algebra classica: monomi e polinomi

2.1 | Monomi

Si dice **monomio** qualunque espressione algebrica numerica o letterale in cui *non* figurano addizioni o sottrazioni.

Le espressioni $2ab$; $\frac{1}{2}xy^2$; $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{a^2}{b}$ rappresentano tre monomi.

I numeri 2, $\frac{1}{2}$ e $\left(-\frac{1}{3}\right)$ e le espressioni letterali ab, xy^2 e $\frac{a^2}{b}$ prendono rispettivamente il nome di *coefficienti numerici* e di *parti letterali* dei corrispondenti monomi.

2.1.1 | Grado di un monomio intero

Un monomio in cui le lettere non figurano a denominatore viene detto **monomio intero.**

Grado complessivo: è la somma degli esponenti delle lettere del monomio.
Grado relativo a una lettera: è l'esponente con cui tale lettera compare.

x^2y è un monomio di terzo grado (secondo grado rispetto a x e primo grado rispetto a y).

2.1.2 | Monomi simili e somma tra monomi

Due o più monomi sono **simili se hanno la stessa parte letterale.**

Dati due o più monomi, **la loro somma algebrica è un monomio soltanto se i monomi sono simili tra loro.**

La somma algebrica di due o più monomi simili **è un monomio simile agli addendi e avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.**

- $15abc^3$ e $24abc^3$ sono monomi simili e la loro somma vale $39abc^3$;
- $12ab^4c^2$ e $4ab^3$ non sono monomi simili e la loro somma non è un monomio.

2.1.3 | Prodotto tra monomi e potenza intera di un monomio

Il prodotto di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Ogni fattore letterale compare, quindi, nel prodotto con un esponente uguale alla somma degli esponenti con i quali compare nei singoli monomi.

$(12x^3yz^2) \cdot (4xy^2) = 48x^4y^3z^2$

MATEMATICA

Dalla regola del prodotto si ha quella della potenza (con esponente intero positivo) di un monomio.

Per elevare alla potenza n-esima un monomio si eleva alla potenza n-esima sia il coefficiente che ciascun fattore della parte letterale.

$(3x^2yz^3)^3 = 27x^6y^3z^9$

2.1.4 | Quoziente tra monomi

Un monomio si dice divisibile per un altro monomio (purché diverso da zero) **se esiste un terzo monomio che moltiplicato per il secondo dia come risultato il primo.**

Il terzo monomio prende allora il nome di *quoziente* tra il primo monomio, detto *dividendo*, e il secondo monomio, detto *divisore*. Indicando i tre monomi rispettivamente con le lettere Q, A e B, è possibile quindi scrivere:

$$A \div B = Q \leftrightarrow A = B \cdot Q$$

Dal momento che il grado del monomio A è uguale alla somma dei gradi dei monomi B e Q (osservazione che discende direttamente da quanto detto riguardo il prodotto tra monomi) risulta immediato che **il grado del monomio quoziente Q è uguale alla differenza dei gradi dei monomi dividendo A e divisore B.**

Affinché un monomio sia divisibile per un altro **è necessario che il dividendo contenga tutte le lettere che figurano nel divisore, ciascuna elevata a un esponente maggiore o uguale a quello che essa ha nel divisore.**

Se vale la precedente condizione allora il quoziente di due monomi è un monomio (intero) che si determina con la seguente regola.

Il coefficiente del monomio quoziente è uguale al quoziente dei coefficienti del dividendo e del divisore; la parte letterale è uguale al quoziente delle parti letterali, ossia è costituita da tutti i fattori letterali del monomio dividendo, ciascuno elevato alla differenza degli esponenti che esso ha nel monomio dividendo e nel monomio divisore.

$(-15a^5b^3c^4) \div (3a^3b^2c) = (-15/3)a^{5-3}b^{3-2}c^{4-1} = -5a^2bc^3$
Infatti $(-5a^2bc^3) \cdot (3a^3b^2c) = -15a^5b^3c^4$

Quando due monomi non sono divisibili l'uno per l'altro, non esiste un monomio quoziente *intero*: in questi casi il monomio quoziente è un *monomio frazionario*.

$$(12x^3yz^2) \div (-4xy^3zw) = \frac{12x^3yz^2}{-4xy^3zw} = -\frac{3x^2z}{y^2w}$$

2.1.5 | Massimo Comune Divisore (M.C.D.) di più monomi

È quel monomio che ha come coefficiente il M.C.D. dei coefficienti e come parte letterale il prodotto delle **lettere comuni** ai monomi dati, ciascuna di esse presa una volta sola con il **minimo esponente** con cui compare.

$8a^2b^3c^3;\quad 12ab^4c^2;\quad 16a^3b^3 \quad\rightarrow\quad \text{M.C.D.} = 4ab^3$

2.1.6 | Minimo comune multiplo (m.c.m.) di più monomi

È quel monomio che ha come coefficiente il m.c.m. dei coefficienti e come parte letterale il prodotto delle **lettere comuni e non comuni** ai monomi dati, ciascuna di esse presa una volta sola con il **massimo esponente** con cui compare.

$12a^3b^2;\quad 15abc^3;\quad 24a^3c^4 \quad\rightarrow\quad \text{m.c.m.} = 120a^3b^2c^4$

2.2 | Polinomi

La somma algebrica di più monomi (non tutti simili fra loro) si chiama polinomio. I singoli monomi prendono il nome di **termini** del polinomio.

L'espressione $\frac{3}{9}a^2 - \frac{1}{2}a^3b - \frac{5}{4}ab^2c + 2a^5 - 3ab$ è un polinomio.

I binomi e i trinomi sono polinomi costituiti da due e tre termini rispettivamente.

2.2.1 | Grado di un polinomio

Il grado di un polinomio è il massimo fra i gradi dei suoi termini.

$2xy^2 + 3x^2 + 5y$ è un polinomio di 3° grado, in quanto, fra i tre monomi che lo costituiscono, quello di grado massimo è $2xy^2$, ossia un monomio di 3° grado.

Un *polinomio omogeneo* è un polinomio costituito da termini aventi lo stesso grado.

$2xy + 3x^2 + y^2$ è un polinomio omogeneo di 2° grado.

2.2.2 | Somma e differenza di polinomi

La somma algebrica di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti quelli dei polinomi addendi.

Dopo aver scritto la somma di più polinomi si deve operare la **riduzione dei termini simili**, ossia effettuare la somma algebrica degli eventuali monomi simili.

$$(4xy^2 - 3x^2 + 5y) + (4x^2 + 2y) = 4xy^2 \underline{-3x^2} + \underline{\underline{5y}} + \underline{4x^2} + \underline{\underline{2y}} = 4xy^2 + x^2 + 7y$$

Similmente, la differenza di due polinomi è la somma del primo con l'opposto del secondo, ossia il secondo polinomio in cui sia stato cambiato il segno a tutti i termini.

$$(4xy^2 - 3x^2 + 5y) - (4x^2 + 2y) = 4xy^2 \underline{-3x^2} + \underline{\underline{5y}} \underline{-4x^2} \underline{\underline{-2y}} = 4xy^2 - 7x^2 + 3y$$

2.2.3 | Prodotto e quoziente di un polinomio per un monomio

La moltiplicazione di un polinomio per un monomio può essere vista come una applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (algebrica).

Il prodotto di un polinomio per un monomio è un polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio.

$$(4x^2 - 3x - 2y + 3z) \cdot (2xy) = 8x^3y - 6x^2y - 4xy^2 + 6xyz$$

Un polinomio si dice *divisibile* per un monomio quando tutti i termini (ossia tutti i monomi) del polinomio sono divisibili per il monomio.

Quando un polinomio è divisibile per un monomio, **il quoziente** (per la proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma) **è uguale al polinomio i cui termini si ottengono dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio.**

$$(4a^3b^4 - 8a^2b + 3a^2b^2 - 6a^4b) \div (2a^2b) = 2ab^3 - 4 + \frac{3}{2}b - 3a^2$$

Quando il polinomio non è divisibile per il monomio si ha una *frazione algebrica* (§ 2.4).

2.2.4 | Prodotto di polinomi

Anche la moltiplicazione di polinomi può essere vista come un'applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Il prodotto fra due polinomi **è uguale al polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo.**

$(a+b+c)\cdot(x+y) = a\cdot(x+y)+b\cdot(x+y)+c\cdot(x+y) = ax+ay+bx+by+cx+cy$

$$\begin{aligned}(a^2c+ab^3+bc^2)\cdot(a^3x^2+b^2c^3x) &= \\ &= a^2c\cdot(a^3x^2+b^2c^3x)+ab^3\cdot(a^3x^2+b^2c^3x)+bc^2\cdot(a^3x^2+b^2c^3x) = \\ &= a^5cx^2+a^2b^2c^4x+a^4b^3x^2+ab^5c^3x+a^3bc^2x^2+b^3c^5x\end{aligned}$$

Il grado del polinomio prodotto è quindi uguale (per quanto visto sul prodotto fra monomi) alla somma dei gradi dei polinomi fattori.

$$\begin{aligned}(2a^2b-3ab^2)\cdot(ab+5b^2) &= 2a^2b\cdot(ab+5b^2)-3ab^2\cdot(ab+5b^2) = \\ &= 2a^3b^2+10a^2b^3-3a^2b^3-15ab^4 = \\ &= 2a^3b^2+7a^2b^3-15ab^4\end{aligned}$$

in questo caso il primo fattore è un polinomio (omogeneo) di 3° grado, il secondo è un polinomio (omogeneo) di 2° grado, quindi il prodotto è un polinomio (omogeneo) di 5° grado.

Il prodotto di più polinomi si ottiene moltiplicando dapprima i primi due, il prodotto così ottenuto per il terzo e così via fino a esaurire tutti i fattori.

2.2.5 | Prodotti notevoli

Nelle applicazioni si presentano spesso alcune moltiplicazioni di particolari polinomi che danno luogo a risultati facilmente memorizzabili e quindi ottenibili in modo più semplice e rapido (evitando l'applicazione della regola generale del § 2.2.4).

1. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$
2. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
5. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
6. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7. $a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$
8. $a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

$(3a+2b)\cdot(3a-2b) = (3a)^2-(2b)^2 = 9a^2-4b^2$

$(x^2y+2y^2)\cdot(x^2y-2y^2) = (x^2y)^2-(2y^2)^2 = x^4y^2-4y^4$

$(3a+2b)^2 = (3a)^2+2\cdot(3a)\cdot(2b)+(2b)^2 = 9a^2+12ab+4b^2$

$(x^2y-2y^2)^2 = (x^2y)^2+2\cdot(x^2y)\cdot(-2y^2)+(-2y^2)^2 = x^4y^2-4x^2y^3+4y^4$

$$\begin{aligned}(3a-2b)^3 &= (3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot(-2b)+3\cdot(3a)\cdot(-2b)^2+(-2b)^3 = \\ &= 27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3\end{aligned}$$

2.2.6 | Potenza n-esima di un binomio e triangolo di Tartaglia

Se si osservano le formule (viste nel paragrafo precedente) per lo sviluppo del quadrato e del cubo di un binomio e la regola per la potenza con esponente nullo e con esponente unitario dello stesso binomio, ossia:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\(a+b)^1 &= a+b\\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

si nota che ciascuno dei quattro sviluppi precedenti si presenta come **un polinomio omogeneo dello stesso grado della potenza e ordinato secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*.**

Tale osservazione consente di prevedere la parte letterale dei monomi che costituiranno lo sviluppo della potenza n-esima (con n intero e positivo) del binomio stesso. Per esempio, la quarta, la quinta e la sesta potenza del binomio avranno come parti letterali rispettivamente le seguenti:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \mathbf{?}a^4+\mathbf{?}a^3b+\mathbf{?}a^2b^2+\mathbf{?}ab^3+\mathbf{?}b^4\\(a+b)^5 &= \mathbf{?}a^5+\mathbf{?}a^4b+\mathbf{?}a^3b^2+\mathbf{?}a^2b^3+\mathbf{?}ab^4+\mathbf{?}b^5\\(a+b)^6 &= \mathbf{?}a^6+\mathbf{?}a^5b+\mathbf{?}a^4b^2+\mathbf{?}a^3b^3+\mathbf{?}a^2b^4+\mathbf{?}ab^5+\mathbf{?}b^6\end{aligned}$$

dove i punti interrogativi sostituiscono i coefficienti (per ora incogniti) dello sviluppo.

Tali coefficienti incogniti si ricavano tramite il cosiddetto *triangolo di Tartaglia*:

potenza con esponente 0:	1
potenza con esponente 1:	1 1
potenza con esponente 2:	1 2 1
potenza con esponente 3:	1 3 3 1
potenza con esponente 4:	1 4 6 4 1
potenza con esponente 5:	1 5 10 10 5 1
potenza con esponente 6:	1 6 15 20 15 6 1

per la cui costruzione basta ricordare che:

1. al vertice compare il numero 1;
2. ogni riga inizia e termina con il numero 1;
3. ogni altro numero si ottiene sommando i due numeri soprastanti della riga precedente (per esempio, il 15 presente nell'ultima riga si ottiene sommando 5 e 10).

Si è quindi in grado di calcolare anche i coefficienti (oltre alle parti letterali) dello sviluppo della potenza n-esima del binomio. In particolare, la quarta, la quinta e la sesta potenza del binomio avranno i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3a-2b)^4 &= (3a)^4+4\cdot(3a)^3\cdot(-2b)+6\cdot(3a)^2\cdot(-2b)^2+4\cdot(3a)\cdot(-2b)^3+(-2b)^4 =\\ &= 81a^4-216a^3b+216a^2b^2-96ab^3+16b^4\end{aligned}$$

MATEMATICA

2.3 | Scomposizione di un polinomio in fattori

Un'operazione di fondamentale importanza per l'algebra è la *scomposizione di un polinomio in fattori*, ossia la **trasformazione di una somma algebrica di più monomi in un prodotto.**

Non sempre tale scomposizione è possibile, né esiste una regola generale da seguire. Verranno indicati nel seguito alcuni metodi da utilizzare nei diversi casi di scomposizione: solo la pratica può aiutare nella risoluzione di questa tipologia di esercizi.

2.3.1 | Raccoglimento a fattore comune

È il tipo più semplice di scomposizione in fattori: consiste nel **mettere in evidenza un fattore comune a tutti i termini** (ossia i monomi) **del polinomio da scomporre.** La migliore applicazione di questo metodo consiste nel mettere in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio.

Per eseguire il raccoglimento a fattore comune **si calcola il M.C.D. dei monomi del polinomio e si pone il polinomio uguale al prodotto di due fattori di cui il primo è il M.C.D. stesso e il secondo è il quoziente tra il polinomio e il M.C.D.**

$15x^6 - 25x^4 + 5x^3 = 5x^3 \cdot (3x^3 - 5x + 1)$ dove M.C.D.: $5x^3$

$3x^2 - 6ax + 12xy = 3x \cdot (x - 2a + 4y)$ dove M.C.D.: $3x$

$6a^4b - 8a^2b^3 + 2a^3b^2 = 2a^2b \cdot (3a^2 - 4b^2 + ab)$ dove M.C.D.: $2a^2b$

2.3.2 | Raccoglimento a fattore parziale

Se il polinomio è del tipo:

$$ax + bx + ay + by$$

è possibile mettere in evidenza, nei primi due termini, il fattore comune x e, negli ultimi due, il fattore comune y:

$$ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b)$$

mettendo poi in evidenza il fattore $(a + b)$ si ha:

$$ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (x + y)$$

$$3x + 6y - 2x^2 - 4xy = 3 \cdot (x + 2y) - 2x \cdot (x + 2y) = (x + 2y) \cdot (3 - 2x)$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}xy^2 - 2y^3 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy^2 - 2xy - 2y^3 =$$

$$= \frac{1}{3}x \cdot (x + y^2) - 2y \cdot (x + y^2) = (x + y^2) \cdot \left(\frac{1}{3}x - 2y\right)$$

2.3.3 | Scomposizione tramite i prodotti notevoli

Le uguaglianze dedotte affrontando i prodotti notevoli (§ 2.2.5) si possono leggere in senso "inverso" ed essere quindi utili come metodi ulteriori per la scomposizione in fattori di un polinomio.

Per esempio, dal prodotto notevole:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

si ricava la regola di scomposizione:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

semplicemente invertendo i due membri: tale regola viene espressa a parole dicendo che la differenza dei quadrati di due monomi o polinomi è uguale al prodotto della somma delle basi per la loro differenza.

$$x^2-4y^2 = x^2-(2y)^2 = (x+2y)\cdot(x-2y)$$

$$16a^2-9b^4 = (4a)^2-(3b^2)^2 = (4a+3b^2)\cdot(4a-3b^2)$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= [(x+y)+(x-y)]\cdot[(x+y)-(x-y)]\\ &= [x+y+x-y]\cdot[x+y-x+y] = 2x\cdot 2y = 4xy\end{aligned}$$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

$$9a^4+4b^6-12a^2b^3 = (3a^2-2b^3)^2$$

$$8x^3+12x^2+6x+1 = (2x+1)^3$$

$$a^6-64b^3 = (a^2-4b)\cdot(a^4+4a^2b+16b^2)$$

La scomposizione in fattori di un polinomio risulta utile anche per rispondere a quesiti di calcolo numerico.

Per calcolare il prodotto $101\cdot 99$ si usa il prodotto notevole $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$:

$$101\cdot 99 = (100+1)\cdot(100-1) = 100^2-1^2 = 10000-1 = 9999$$

2.4 | Semplificazione di frazioni algebriche

Il quoziente fra due espressioni algebriche A e B (che possono essere monomi o polinomi), dove B non sia identicamente nullo, **prende il nome di frazione algebrica.**

Molte delle proprietà delle frazioni numeriche (come la proprietà invariantiva) continuano a valere anche per le frazioni algebriche.

Moltiplicando o dividendo sia il numeratore che il denominatore di una frazione algebrica per una stessa espressione (purché diversa da zero) **si ottiene una frazione algebrica equivalente a quella data.**

Quando si *dividono* sia il numeratore che il denominatore di una frazione algebrica per un monomio o un polinomio che sia un divisore comune, si parla di *semplificazione della frazione algebrica*. Per **semplificare una frazione algebrica** si deve:

1. scomporre in fattori (se necessario) numeratore e denominatore;
2. eliminare i fattori comuni tra numeratore e denominatore.

$$\frac{16x^3y^2z^4}{12x^2y^2z^2} = \frac{4xz^2(4x^2y^2z^2)}{3(4x^2y^2z^2)} = \frac{4xz^2}{3}$$

$$\frac{3x^2+xy}{9x^2-y^2} = \frac{x(3x+y)}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{x}{3x-y}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{8x^4-x} = \frac{(2x-1)^2}{x\cdot(8x^3-1)} = \frac{(2x-1)^2}{x\cdot(2x-1)\cdot(4x^2+2x+1)} = \frac{2x-1}{x\cdot(4x^2+2x+1)}$$

MATEMATICA

Quesiti svolti

1 **Il M.C.D. e il m.c.m. dei tre monomi**

$$50xy^3 \quad 20x^2yz \quad 45y^2z^3$$

sono rispettivamente:

A $20y\ ;\ 900xy^3z^3$

B $5y\ ;\ 180\,x^3y^3z^3$

C $25xyz\ ;\ 50x^3y^4z^4$

D $5y\ ;\ 900x^2y^3z^3$

E $20y\ ;\ 50x^3y^4z^4$

Il M.C.D. fra i monomi dati ha come coefficiente numerico il M.C.D. dei coefficienti (per cui M.C.D.(50, 20, 45) = 5) e come parte letterale il prodotto delle lettere comuni prese una sola volta con il minimo esponente: l'unica lettera comune è la y che compare con esponente minimo uguale a 1. Pertanto il M.C.D. è uguale a $5y$ e le risposte A, C ed E non sono accettabili. Il m.c.m. fra i monomi dati ha come coefficiente numerico il m.c.m. dei coefficienti (per cui m.c.m.(50, 20, 45) = 900) e come parte letterale il prodotto delle lettere comuni e non comuni prese una sola volta con il massimo esponente: la lettera x compare con esponente massimo uguale a 2 nel secondo monomio, la lettera y compare con esponente massimo uguale a 3 nel primo monomio e la lettera z compare con esponente massimo uguale a 3 nel terzo monomio.
Quindi il m.c.m. è $900x^2y^3z^3$. (risposta D).

2 **Il polinomio $5a^2b^2 - \frac{1}{5}a^4 + 3 + 2b^4$:**

A è omogeneo

B ha un termine che è un monomio fratto

C è di 4° grado

D è la somma di due quadrati

E nessuna delle precedenti

Il polinomio dato non è omogeneo perché, pur avendo tre termini di 4° grado, presenta un termine noto, 3, che è di grado zero. Esso non ha tra i suoi termini monomi fratti, cioè monomi che presentano lettere al denominatore, e non è la somma di due quadrati. Nel polinomio il grado massimo con cui compaiono i suoi termini è il quarto, quindi il polinomio è di quarto grado (risposta C).

3 **Il polinomio $x^2(x^2 + 15) - 8x^3$ è equivalente a:**

A $x^2[x(x-8) + 15]$

B $-x^2(x-3)\cdot(x+5)$

C $x^2(x + 15 - 8x^3)$

D $x^2(x-5)\cdot(x+3)$

E $x^2(x^2 + 7)$

Un modo per risolvere il problema è eseguire le operazioni indicate nelle espressioni contenute nelle alternative e verificare dove si ottiene un polinomio avente gli stessi termini del polinomio dato che si può riscrivere nella forma:

$$x^2(x^2+15)-8x^3 = x^4-8x^3+15x^2$$

Da una semplice osservazione si deduce che le ultime quattro alternative non sono accettabili: la B presenta per esempio il termine di quarto grado negativo:

$$-x^2(x-3)(x+5) = -x^2(x^2+2x-15) = -x^4-2x^3+15x^2$$

la C ha un termine di quinto grado:

$$x^2(x^2+15-8x^3) = x^4+15x^2-8x^5$$

La D ha per esempio il termine di secondo grado negativo:

$$x^2(x-5)(x+3) = x^2(x^2-2x-15) = x^4-2x^3-15x^2$$

La E è priva del termine di terzo grado:

$$x^2(x^2+7) = x^4+7x^2$$

La risposta esatta è la A, infatti:

$$x^2[x(x-8)+15] = x^2[x^2-8x+15] = x^4-8x^3+15x^2$$

---

4 Il quadrato del trinomio $(a-b-c)$ è uguale a:

A $(a+b+c)\cdot(a-b-c)$

B $a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ac$

C $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$

D $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac$

E $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$

Ricordando il prodotto notevole riguardante il quadrato di un trinomio (§ 2.2.5) e prestando attenzione ai segni, si ricava che la risposta corretta è la C.

---

5 Se $x = \dfrac{3a-b}{a+b}$ allora $\dfrac{x+3}{2} = ?$

A $\dfrac{2a+b}{a+b}$ B $\dfrac{a+2b}{a+b}$ C $\dfrac{3a+b}{a+b}$ D $\dfrac{a+3b}{a+b}$ E $\dfrac{4a+b}{a+b}$

Sapendo che $x = \dfrac{3a-b}{a+b}$ allora:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{\frac{3a-b}{a+b}+3}{2} = \frac{\frac{3a-b+3(a+b)}{a+b}}{2} =$$

$$\frac{3a-b+3a+3b}{2(a+b)} = \frac{6a+2b}{2(a+b)} = \frac{2(3a+b)}{2(a+b)} = \frac{3a+b}{a+b}$$

pertanto la risposta corretta è la C.

MATEMATICA

6 **L'espressione $(a^2 + b^2)^2$ è uguale a:**

A $(a^2 + b^2) - (2ab)^2$

B $(a + b)^3 \cdot (a - b)$

C $(a - b)^3 \cdot (a + b)$

D $[(a - b)^2 + 2ab]^2$

E $(a^2 + b^2) + 2ab$

Diversamente dal solito, conviene partire dalle risposte individuando quella che, attraverso opportuni passaggi algebrici, assume la stessa "faccia" dell'espressione contenuta nel testo del quesito. Svolgendo la D si ottiene:

$$[(a-b)^2 + 2ab]^2 = [a^2 + b^2 - 2ab + 2ab]^2 = (a^2 + b^2)^2$$

da cui si deduce che è proprio la risposta cercata.

7 **Il polinomio**

$$9a^2 - a^4 + 2a^2b - b^2$$

è scomponibile nel prodotto:

A $(3a - a^2 + b)(3a + a^2 - b)$

B $a^2(9 - 2b) + (a^2 - b)(a^2 + b)$

C $-(a^2 + b^2)(a^2 - 1)$

D $(3a - b)^2(a^2 + 1)$

E $(3a^2 - b)(4a^2 + b)$

L'alternativa B è da scartare perché l'espressione contenuta non è un prodotto. Gli ultimi tre termini del polinomio dato costituiscono l'opposto dello sviluppo del quadrato di un binomio:

$$9a^2 - a^4 + 2a^2b - b^2 = 9a^2 - (a^4 - 2a^2b + b^2) = 9a^2 - (a^2 - b)^2$$

Quindi l'espressione ottenuta è la differenza di due quadrati ed è scomponibile nel prodotto seguente:

$$9a^2 - (a^2 - b)^2 = (3a - a^2 + b)(3a + a^2 - b)$$

La risposta esatta è la A.

8 **Il polinomio $x^3 + 3x^2 - 4x$ è divisibile per:**

A $x + 1$

B $x + 2$

C $x - 4$

D $x + 4$

E x^3

La risposta esatta è la D. Il polinomio può essere infatti scomposto facilmente in fattori e tra questi si trova il binomio $x + 4$:

$$x^3 + 3x^2 - 4x = x\,(x^2 + 3x - 4x) = x\,(x - 1)\,(x + 4)$$

PARTE TERZA

9 **Il numero $\frac{49^{40}-1}{7^{40}-1}$ è uguale a:**

A $42^{40}-1$

B $49^{20}+1$

C $7^{40}-1$

D 7^{40}

E 42^{40}

Per risolvere il quesito basta osservare che il numeratore della frazione data non è altro che una differenza di quadrati, pertanto si ottiene:

$$\frac{49^{40}-1}{7^{40}-1} = \frac{(7^2)^{40}-(1^2)}{7^{40}-1} = \frac{(7^{40})^2-(1)^2}{7^{40}-1} = \frac{(7^{40}-1)(7^{40}+1)}{7^{40}-1} = 7^{40}+1$$

Dal momento che tale risultato può essere riscritto nella forma seguente:

$$7^{40}+1 = (7)^{2\cdot 20}+1 = (7^2)^{20}+1 = 49^{20}+1$$

la risposta esatta è la B.

10 **Indicare quante coppie ordinate $(m; n)$ di interi positivi m ed n verificano la condizione**

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 64$$

A Nessuna B Cinque C Sei D Dieci E Infinite

L'equazione può essere riscritta, sviluppando i quadrati, come:

$$m^2 + n^2 + 2mn = m^2 + n^2 - 2mn + 64$$

riducendo i termini simili si ottiene:

$$2mn + 2mn = 64 \quad \rightarrow \quad 4mn = 64 \quad \rightarrow \quad mn = 16$$

In pratica quindi il quesito chiede quante sono le coppie ordinate $(m; n)$ di **interi positivi** il cui prodotto è pari a16. Esistono cinque coppie:

$$(1; 16) \quad (2; 8) \quad (4; 4) \quad (8; 2) \quad (16; 1)$$

La risposta corretta è quindi la B.

11 **L'espressione algebrica $\frac{x^2-6x+9}{2x^3-5x^2-3x}$ è uguale a:**

A $\frac{x-3}{2x+1}$

B $-\frac{3-x}{2x^2+x}$

C $\frac{x+3}{2x^2+x}$

D $\frac{x-3}{x-2x^2}$

E numeratore e denominatore non hanno fattori comuni, quindi l'espressione non è semplificabile

MATEMATICA

È necessario scomporre in fattori i termini della frazione algebrica, osservando che a numeratore è presente lo sviluppo del quadrato di un binomio e a denominatore, dopo aver eseguito un raccoglimento del fattore x, un trinomio scomponibile tramite un artificio:

$$\frac{x^2-6x+9}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{(x-3)^2}{x\cdot(2x^2-5x-3)} = \frac{(x-3)^2}{x\cdot(2x^2-6x+x-3)} =$$

$$= \frac{(x-3)^2}{x\cdot[2x(x-3)+(x-3)]} = \frac{(x-3)^2}{x\cdot(2x+1)\cdot(x-3)} =$$

Eseguendo la semplificazione e raccogliendo un segno meno fra i termini del numeratore:

$$= \frac{(x-3)^2}{x\cdot(2x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x-3}{x\cdot(2x+1)} = -\frac{3-x}{2x^2+x}$$

La risposta esatta è la B.

---

12 **Semplificare la seguente frazione algebrica $\frac{x^2-1}{x^3+x+2x^2}$.**

A $x+1$

B $\frac{x-1}{x(x+1)}$

C $\frac{x+1}{x}$

D $\frac{-1}{x^3+x+2x^2}$

E $\frac{x}{x(x+1)}$

Per eseguire la semplificazione, si devono scomporre in fattori i termini della frazione:

$$\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+2x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)}$$

La risposta esatta è la B.