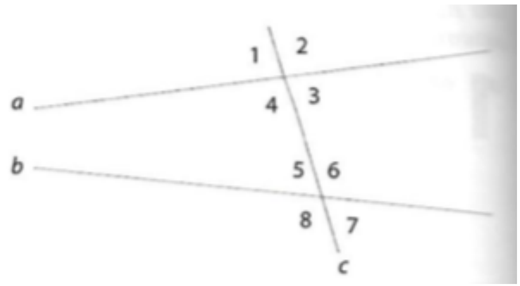
Geometria elementare

Gli enti fondamentali sono il punto, la retta e il piano. Sono **concetti primitivi** (definibili tramite concetti più semplici)

La geometria relazionare è basata su **5 postulati o assiomi:**
- si può tracciare una retta da un punto qualsiasi a ogni altro punto
- si può prolungare indefinitamente una linea retta
- si può descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi
- tutti gli angoli retti sono uguali tra loro
- se una retta, che interseca altre due rette, forma della stessa parte angoli la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette finiscono per incontrarsi

Ciascuna delle due parti di un piano individuate da due semirette uscenti da uno stesso punto è detta **angolo**

Angoli formati da du erette tagliate da una trasversale



- **Angoli alterni:** 4 e 6, 3 e 5
- **Angoli esterni:** 2 e 8, 1 e 7
- **Corrispondenti:** 1 e 5, 4 e 8, 2 e 6, 3 e 7
- **Coniugati interni:** 4 e 5, 3 e 6
- **Coniugati esterni:** 1 e 8, 2 e 7

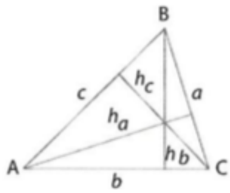
Altezza relativa: segmento perpendicolare condotto al lato dal vertice opposto
Mediana relativa: segmento che unisce il punto medio del lato con il vertice dell'angolo opposto
Asse relativo: perpendicolare al lato passante per il suo punto medio
Bisettrice: semiretta uscente dal vertice che divide un'angolo in due parti congruenti

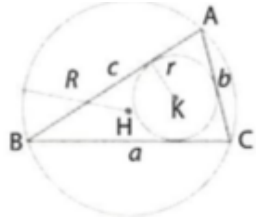
Punti potevi di un triangolo
- **Ortocentro:** punto di incontro delle altezze. E' interno se al triangolo se è acutangolo, esterno se è ottusangolo, coincide con l'angolo retto se è rettangolo
- **Baricentro:** punto di incontro delle mediane ed è sempre interno al triangolo
- **Circocentro:** punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo. E' il centro della circonferenza circoscritta l triangolo ed è interno al triangolo se è acutangolo, esterno se è ottusangolo, coincide con il punto medio dell'ipotenusa se è rettangolo
- **Incentro:** punto di incontro delle bisettrici degli angolo di un triangolo. Sempre interno ed è il centro della circonferenza inscritta

In ogni triangolo la **somma degli angolo interni** è uguale a un **angolo piatto** (180°)

In ogni triangolo ciascun lato è **minore della somma** degli altri due e **maggiore** della loro differenza

Triangolo





Perimetro: $P = a + b + c$

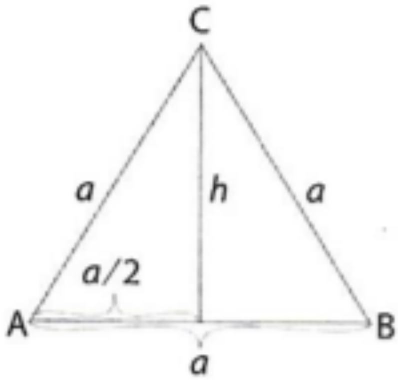
Area: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$

Formula di Erone: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\quad A = r \cdot p = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

Raggio della circonferenza inscritta: $r = \frac{A}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Raggio della circonferenza circoscritta: $R = \frac{abc}{4A}$

Triangolo equilatero



Perimetro: $P = 3a$

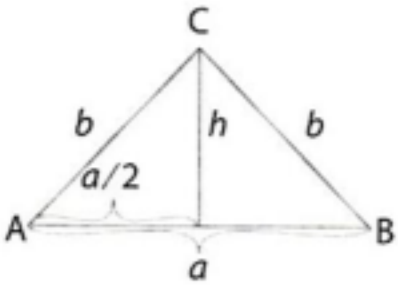
Altezza: $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R = 3r$

Area: $A = \frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2$

Raggio della circonferenza inscritta: $r = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{R}{2}$

Raggio della circonferenza circoscritta: $R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a = 2r$

Triangolo isoscele



Perimetro: $P = a + 2b$

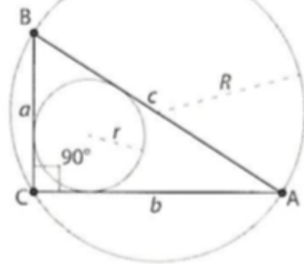
Area: $A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

Triangolo rettangolo

Perimetro: $P = a + b + c$

Altezza: $A = \frac{ab}{2}$

Area: $h = \frac{ab}{c}$

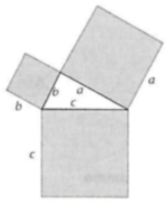


Raggio della circonferenza inscritta: $r = p - c = (a + b - c)/2$

Raggio della circonferenza circoscritta: $R = c/2$

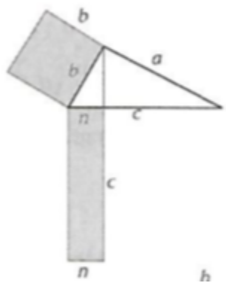
Teorema di Pitagora: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma della due aree dei quadranti costruiti sui cateti.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{c^2 - b^2} \\ b = \sqrt{c^2 - a^2} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$



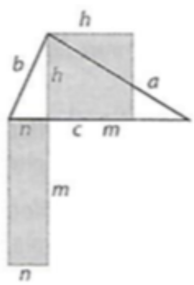
Primo teorema di Euclide: un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa

$$b^2 = c \cdot n$$



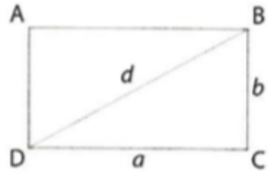
Secondo teorema di Euclide: l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$$h^2 = m \cdot n$$



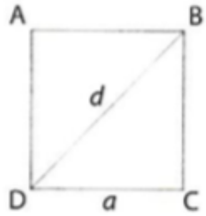
Rettangolo:

$$P = 2 \cdot (a+b)$$
$$A = a \cdot b$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2}$$



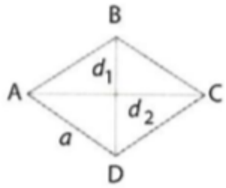
Quadrato:

$$P = 4 \cdot a$$
$$A = a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$



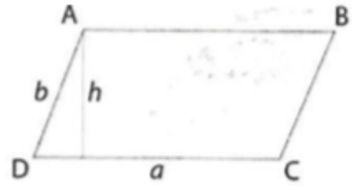
Rombo:

$$P = 4 \cdot a$$
$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



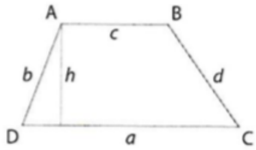
Parallelogramma:

$$P = 2 \cdot (a+b)$$
$$A = a \cdot h$$



Trapezio:

$$P = a+b+c+d$$
$$A = (a+c) \cdot \frac{h}{2}$$



La **somma degli angoli interni di un poligono** cale (N - 2) * 180°

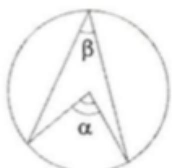
Un poligono si dice **regolare** quando ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali. Ogni poligono regolare è **inscrivibile e circoscrivibile** a una circonferenza. Quando hanno lo stesso centro, viene chiamato **cento del poligono.**

Apotema è il segmento di parallelepipedo tradito dal centro di un poligono regolare a un lato, coincide con il raggio della circonferenza inscritta nel poligono

Angoli alla circonferenza e angoli al centro

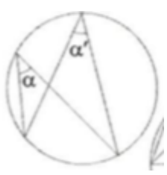
1. In una circonferenza un angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco

$$\alpha = 2\beta$$



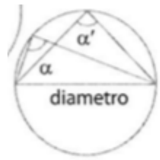
2. Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congiunti, sono congruenti

$$\alpha = \alpha'$$



3. Angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza, sono retti

$$\alpha = \alpha' = 90°$$

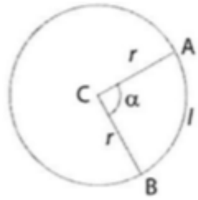


Settore circolare

$$\text{arco AB} = l = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha°$$

$$P = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha° + 2r$$

$$A = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{360°} \cdot \alpha°$$



Geometria solida

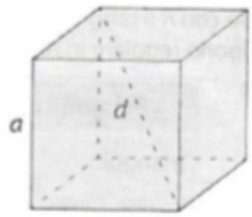
Cubo

Superficie laterale $S_l = 4a^2$

Superficie totale $S_t = 6a^2$

Volume $V = a^3$

Diagonale $d = a\sqrt{3}$



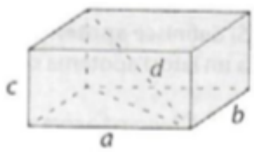
Parallelepipedo rettangolare

Superficie laterale $S_l = 2c(a+b)$

Superficie totale $S_t = 2(ab + ac + bc)$

Volume $V = a \cdot b \cdot c$

Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

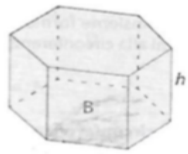


Prisma retto

Superficie laterale $S_l = P_B \cdot h$

Superficie totale $S_t = S_l + 2S_B$

Volume $V = S_B \cdot h$

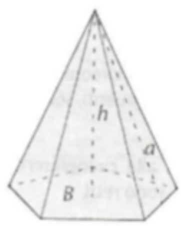


Piramide retta

Superficie laterale $S_l = \frac{a}{2} \cdot P_B$

Superficie totale $S_t = S_l + S_B$

Volume $V = \frac{S_B \cdot h}{3}$

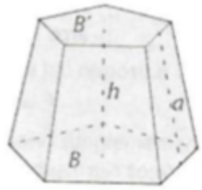


Tronco di piramide retta

Superficie laterale $S_l = \frac{a}{2} \cdot (P_B + P_{B'})$

Superficie totale $S_t = S_l + S_B + S_{B'}$

Volume $V = \frac{h}{3} \cdot (S_B + S_{B'} + \sqrt{S_B \cdot S_{B'}})$



Cilindro

Superficie laterale $S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$

Superficie totale $S_t = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$

Volume $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Sfera

Superficie $A = 4\pi r^2$

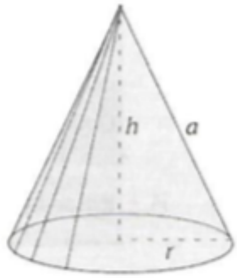
Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cono

Superficie laterale $S_l = \pi \cdot r \cdot a$

Superficie totale $S_t = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (a + r)$

Volume $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

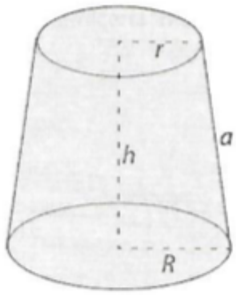


Tronco di cono

Superficie laterale $S_l = \pi \cdot (r + R) \cdot a$

Superficie totale $S_t = \pi \cdot (r + R) \cdot a + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot R^2$

Volume $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot h$



Un **poliedro** si dice **regolare** se le facce sono poligoni regolari uguali e gli angoloidi sono uguali. Esistono 5 poliedri regolari: **tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro.**

Poliedro regolare	Facce	Lati di ogni faccia	Vertici	Spigoli
Tetraedro	4	3	4	6
Esaedro	6	4	8	12
Ottaedro	8	3	6	12
Dodecaedro	12	5	20	30
Icosaedro	20	3	12	30

Per i poliedri regolari cale la **relazione di Eulero:** $F + V = S + 2$

dove F, V e S sono ripetitivamente il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli

Poliedro regolare	Superficie	Volume
Tetraedro	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Esaedro	$6a^2$	a^3
Ottaedro	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Icosaedro	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$