3 | Dinamica

La dinamica è la scienza che **studia e descrive le relazioni fra il moto di un corpo e le *cause* che lo hanno prodotto**, cioè **le forze**.

3.1 | Principio di relatività galileiana

Galileo, eseguendo un *esperimento ideale*[1], giunse alla conclusione che, dall'interno di una «navicella», è impossibile valutare se questa è ferma o si muove di moto rettilineo uniforme. In altre parole egli constatò che **non è possibile distinguere lo stato di quiete da uno stato di moto con accelerazione nulla.**

Più precisamente si può affermare che:

Le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme gli uni rispetto agli altri.

3.2 | Forze, sistemi inerziali e leggi della dinamica

Dato un punto materiale libero di muoversi, la forza è una grandezza fisica che, se applicata a tale punto, è in grado di modificarne lo stato di moto o di quiete.

La dinamica spiega le relazioni forze-moto attraverso le sue tre leggi fondamentali.

3.2.1 | Sistemi inerziali e prima legge della dinamica

Esiste almeno un osservatore per il quale, se un punto materiale è fermo e su di esso non agisce alcuna forza, questo rimane fermo. Questo **osservatore** si dice **inerziale**.

I sistemi di riferimento in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale sono anch'essi inerziali.

Con buona approssimazione, un sistema inerziale è rappresentato dal sistema cosiddetto delle "stelle fisse". La Terra non è un sistema di riferimento inerziale perfetto a causa dei suoi moti di rotazione e di rivoluzione attorno al Sole, tuttavia viene considerata una buona approssimazione di un sistema inerziale su brevi intervalli di tempo.

Il concetto di sistema di riferimento inerziale permette di enunciare la prima legge della dinamica o principio di inerzia:

In ogni sistema di riferimento inerziale un corpo su cui non agisce alcuna forza o sul quale agiscono forze in equilibrio (a risultante nulla) mantiene il suo stato di moto (rettilineo uniforme) o di quiete.

In assenza di forze, la velocità vettoriale di un punto materiale rimane costante: in assenza di forze non si può avere accelerazione.
Così, una nave spaziale in movimento, sulla quale non agiscono forze, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme ($\mathbf{a} = 0$) senza bisogno di alcun propulsore.

1. Un esperimento ideale è un progetto di esperimento (pensato anche nei minimi particolari) di cui si immaginano i risultati senza però realizzarlo praticamente.

Per comprendere il principio di inerzia è necessario slegarsi dal senso comune secondo il quale per muoversi con velocità costante è indispensabile far uso di un motore. Un'automobile, per esempio, si muove a velocità costante in autostrada solo grazie alla forza esercitata dal motore. Ma tale forza è in ogni istante uguale e contraria alle forze di attrito cui l'autovettura è soggetta, che si oppongono al moto. Si è quindi nella condizione di un corpo cui sono applicate forze a risultante nulla e per il quale vale la prima legge della dinamica.

3.2.2 | Seconda legge della dinamica

Se si applica una forza **F** a un corpo e si misura la sua accelerazione **a**, si nota una proporzionalità diretta tra le due grandezze:

$$\frac{F}{a} = m$$

La costante di proporzionalità dipende dal corpo e prende il nome di *massa inerziale*.

La massa inerziale di un corpo esprime l'*inerzia* (ossia la **resistenza**) **che il corpo oppone a una variazione del suo stato di moto.**

Dato un corpo di massa m, per imprimergli una accelerazione **a** è quindi necessario applicare una forza **F** tale che:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad \text{dove } m = \text{massa inerziale} \tag{2}$$

Allo stesso modo, se su un corpo di massa m agiscono più forze, esso subisce un'accelerazione data dalla [2], dove **F** è la risultante delle forze applicate al corpo.

Si noti che la [2] è una relazione vettoriale.

3.2.3 | Forze fittizie o apparenti

Trovandosi in un sistema non inerziale, si è portati a introdurre delle forze aggiuntive per poter applicare il principio di inerzia. Tali forze non sono reali e vengono per questo denominate **fittizie** o **apparenti**.

Un osservatore su un treno in frenata che vede cadere la propria valigia è portato a supporre l'esistenza di una forza responsabile della caduta.

Un corpo in moto circolare uniforme è sottoposto a una accelerazione diretta verso il centro della traiettoria (accelerazione centripeta), il cui modulo è:

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Dalla [2] si deduce che il corpo, per poter mantenere la traiettoria circolare deve essere soggetto a una forza il cui modulo vale:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Sempre dalla [2] si deduce che tale forza ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'accelerazione: è diretta radialmente e orientata verso il centro della circonferenza. Questa forza prende il nome di **forza centripeta**.

Se venisse a mancare la forza centripeta, il corpo abbandonerebbe immediatamente la traiettoria circolare e proseguirebbe indisturbato lungo la retta tangente alla traiettoria nel punto in cui è cessata la forza, con un moto rettilineo uniforme. Così un autobus che sta curvando, rimane legato al centro della curva da una forza centripeta dovuta all'attrito delle gomme sull'asfalto.

Se un osservatore a terra studiasse il moto di un oggetto libero di muoversi sull'autobus, lo vedrebbe muoversi in linea retta in accordo con il principio d'inerzia, fino a colpire una parete dell'autobus. Al contrario, per un osservatore che si trova sull'autobus in curva (sistema non inerziale perché accelerato) l'oggetto si muoverebbe verso l'esterno della curva. Per giustificare questo movimento, l'osservatore solidale con l'autobus immagina l'esistenza di una forza fittizia, a cui si dà il nome di **forza centrifuga**, uguale e contraria alla forza centripeta.

3.2.4 | Dimensioni e unità di misura delle forze

Dalla [2] si ricavano le dimensioni della forza.

$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

Dimensioni: $[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$
Unità di misura nel SI: $N = kg\ m\ s^{-2}$

L'unità di misura della forza nel SI è il newton (N), definito come la forza che imprime a una massa unitaria (1 kg) una accelerazione unitaria (1 m/s^2). Le forze si misurano con il *dinamometro.*

L'unità di misura della forza nel sistema CGS è la dina (simbolo: dyn).
Quanti newton vale una dina?

Questo quesito consente di vedere un esempio importante di conversione tra unità di misura del SI e del CGS.

Si è visto che $1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}$. Per analogia, nel CGS, $1\ dyn = 1\ g \cdot \frac{cm}{s^2}$.

Si tratta, per passare da N a dyn, di trasformare tutte le unità del SI in unità del CGS mediante equivalenze:

$$1\ N = 1\ kg \cdot 1\ \frac{m}{s^2} = (10^3\ g) \cdot \frac{10^2\ cm}{1\ s^2} = (10^3 \cdot 10^2)\ g \cdot \frac{cm}{s^2} = 10^5\ dyn$$

Si conclude così che $1\ N = 10^5$ dyn e naturalmente, viceversa, $1\ dyn = 10^{-5}\ N$.

3.2.5 | Teorema dell'impulso

Dalla [2] si ricava il *teorema dell'impulso,* il quale afferma che una forza **F** che agisce per un tempo *t* su un corpo di massa *m* provoca una variazione della sua *quantità di moto* ($\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{v}$) pari al prodotto della forza con il tempo.

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot \mathbf{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \rightarrow \mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{P}$$

Una massa di 5 kg inizialmente ferma è sottoposta all'azione di una forza di 90 N per due secondi. Trovare la velocità finale v della massa.

Il teorema dell'impulso afferma che la variazione della quantità di moto $m \cdot \mathbf{v}$ è pari al prodotto fra la forza e il tempo nel quale ha agito.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t \rightarrow F \cdot \Delta t = 5\ kg \cdot v = 90\ N \cdot 2\ s \rightarrow v = \frac{180}{5}\frac{m}{s} = 36\ \frac{m}{s}$$

$$\mathbf{P}_1 = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_{i,1} = \mathbf{P}_2 = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_{i,2}$$

Principio di conservazione della quantità di moto: la quantità di moto totale di un sistema isolato è costante.

3.2.6 | Terza legge della dinamica o principio di azione e reazione

A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Dati due corpi (1 e 2) interagenti si ha:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \qquad [3]$$

dove $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ è la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2, e viceversa.

Le forze sono vettori e la [3] è una relazione vettoriale. Quindi le due forze $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ e $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ sono equidirezionali, hanno lo stesso modulo ma verso opposto.
Una forza e la corrispondente reazione sono applicate l'una a un corpo e l'altra sull'altro.

FISICA

Una coppia di pattinatori è ferma su una pista. Per partire si danno una spinta l'uno contro l'altro, in direzione opposta. Se lui ha una massa di 80 kg, lei invece di 60 kg e l'accelerazione acquistata dalla pattinatrice grazie alla spinta è di 2 $\mathrm{m/s^2}$, quanto vale l'accelerazione del pattinatore?

Si tratta di applicare la [3], sostituendo alle forze il prodotto di massa e accelerazione:

$$F_1 = F_2 \;\Rightarrow\; m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{60\ \mathrm{kg}}{80\ \mathrm{kg}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Al di là del risultato, si noti *dal punto di vista dimensionale* la formula risolutiva precedente: il rapporto tra le due masse è adimensionale, così, correttamente, sia a destra che a sinistra dell'uguale si trova un'accelerazione.

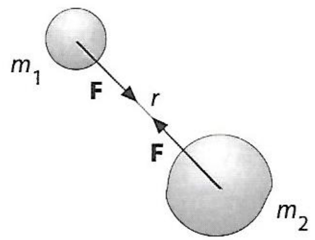
Sparando con un'arma da fuoco, la stessa forza che mette in moto il proiettile spinge in senso opposto anche l'arma. Si ha così l'effetto del *rinculo*. Poiché il proiettile e l'arma hanno masse diverse per la seconda legge della dinamica le rispettive accelerazioni sono inversamente proporzionali e il proiettile acquista una velocità decisamente superiore a quella dell'arma.

3.3 Legge di gravitazione universale

Due corpi dotati di massa e posti a distanza r l'uno dall'altro si attraggono con una **forza gravitazionale F** il cui modulo è dato dalla relazione seguente (detta *legge di gravitazione universale* o *legge di Newton*):

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad [4]$$

dove m_1 e m_2 indicano le **masse gravitazionali** dei due corpi e G è una costante detta *costante di gravitazione universale*, il cui valore è $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.



La massa *gravitazionale* è la caratteristica dei corpi responsabile della loro mutua attrazione gravitazionale.

Pur essendo associate a fenomeni fisici differenti, la massa *inerziale* e la massa *gravitazionale* di un corpo hanno la stessa unità di misura e lo stesso valore: nel seguito si parlerà spesso indistintamente di *massa*.

La forza gravitazionale tra due corpi è **sempre attrattiva***; è diretta lungo la congiungente i baricentri e la sua intensità è data dalla legge [4].*

La forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra le masse: cosa succede al modulo della forza quando r raddoppia?

A partire dalla legge di gravitazione universale, si sostituisce $2r$ a r:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \;\Rightarrow\; F' = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(2r)^2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{4r^2} = \frac{F}{4}$$

Il modulo della forza è diventato un quarto! In altre parole, allontanando due corpi dotati di massa – e dunque soggetti alla forza di gravitazione universale – questi si attraggono con una forza via via meno intensa. Viceversa, avvicinando i due corpi l'intensità aumenta.

3.4 | Forza peso

Nei pressi della superficie terrestre gli spostamenti in verticale sono trascurabili rispetto al raggio medio della Terra (6380 km). Allora si può dire che **tutti i gravi lasciati liberi di cadere sono sottoposti alla stessa accelerazione g**, detta *accelerazione gravitazionale terrestre*, il cui modulo è legato all'attrazione gravitazionale esistente tra la Terra e i corpi dotati di massa. Il suo valore medio è:

$$|\mathbf{g}| = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Per la seconda legge di Newton, tale accelerazione è dovuta a una forza, detta **forza peso** e solitamente indicata con **P**, data da:

$$\mathbf{P} = \text{forza peso} = m \cdot \mathbf{g}$$

Il peso è una forza: si misura in newton.

Qual è il peso di un corpo avente massa $m = 1$ kg?
Per trovare il *peso* del corpo, basta sostituire in $P = m \cdot g$ i valori $m = 1$ kg e $g = 9{,}8$ m/s^2:

$$\text{peso di 1 kg}_{massa} = 1 \text{ kg}_{peso} = 1 \text{ kg}_{massa} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}8 \text{ kg}_{massa} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}8 \text{ N}$$

In definitiva 1 $\text{kg}_{peso} = 9{,}8$ N (1 N è quindi pari a circa un decimo di kg_{peso}).

La **massa** di un corpo è una caratteristica intrinseca del corpo: è indipendente dal luogo dove il corpo si trova. È una grandezza *scalare*.
Il **peso** di un corpo dipende invece dal luogo nel quale il corpo si trova (per esempio sulla Terra oppure sulla Luna). Trattandosi di una forza, è una grandezza *vettoriale*.

Sulla Terra il kg_{massa} (unità di massa) ha massa unitaria e peso $P = 9{,}8$ N; lo stesso kg_{massa} sulla Luna avrebbe sempre massa unitaria, ma il suo peso sarebbe circa 1/6 di quello sulla Terra (1,6 N), in quanto l'accelerazione gravitazionale lunare è sei volte più piccola dell'accelerazione gravitazionale terrestre.

3.5 | Densità e peso specifico

Per quanto detto su massa e peso, è possibile introdurre ora le definizioni di *densità* e *peso specifico*.

Densità: $\rho = \frac{m}{V}$ — Dimensioni: $[\rho] = [M] \cdot [L]^{-3}$ — Unità di misura nel SI: $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

La densità dell'acqua vale: $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Peso specifico: $p = \frac{m \cdot g}{V}$ — Dimensioni: $[p] = [M] \cdot [L]^{-2} \cdot [T]^{-2}$ — Unità di misura nel SI: $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$

Vale la relazione:

$$p_{specifico} = \rho \cdot g$$

Il peso specifico dell'acqua è:

$$p_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot g = 1000\text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\text{m/s}^2 \approx 10.000\text{N/m}^3$$

Densità relativa del corpo 2 rispetto al corpo 1: $\rho_{2,1} = \rho_2/\rho_1$

Peso specifico relativo del corpo 2 rispetto al corpo 1: $p_{2,1} = p_2/p_1$

FISICA

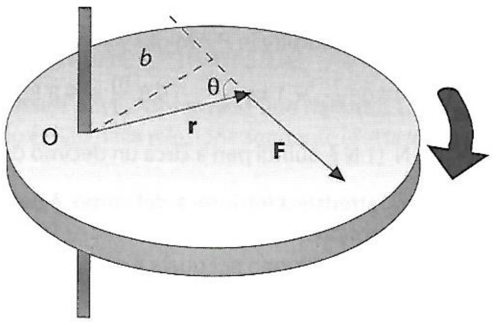
3.6 | Momento di una forza

Dato un *sistema di forze*, la sua **risultante** è, per definizione, il vettore che si ottiene sommando tra loro le forze costituenti il sistema. La risultante di più forze applicate a un punto materiale libero è la forza che, applicata da sola al punto materiale, produce lo stesso effetto che producono le altre insieme. Tuttavia, se il corpo sul quale sono applicate le forze non è puntiforme ma spazialmente esteso (ovvero se l'approssimazione a un punto materiale non può essere applicata), il sistema di forze non può generalmente essere ricondotto alla sola forza risultante: occorre introdurre una nuova grandezza: il *momento* di una forza.

Il **momento di una forza** rispetto a un punto è un indice della capacità della forza di *generare una rotazione* intorno al punto. Si definisce come prodotto vettoriale:

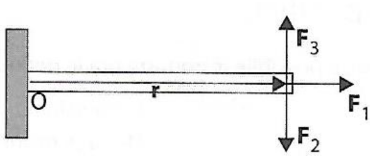
$$\tau = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot F$$

Il momento τ della forza **F** rispetto a un punto O è un vettore perpendicolare al piano individuato da **F** e dal suo *vettore posizione* **r**. Il modulo di τ è tanto maggiore quanto maggiore è la distanza di **F** da O.



La distanza tra il vettore **F** e il punto O è la lunghezza del segmento condotto da O perpendicolarmente alla direzione di **F**. Tale distanza prende il nome di braccio *b* della forza **F** rispetto al polo O.

Si applichino una per volta tre forze a un'asta rigida vincolata a un supporto, come in figura. In quale dei tre casi si ha rotazione?



Si può rispondere intuitivamente: la forza $\mathbf{F}_1$ non dà luogo ad alcuna rotazione; la forza $\mathbf{F}_2$ dà luogo a una rotazione oraria; infine $\mathbf{F}_3$ a una rotazione antioraria. Allo scopo di verificare come questo risultato sia correlato al momento della forza, lo si calcola ora nei tre casi, rispetto al punto di aggancio dell'asta O. Per il modulo, la direzione e il verso, secondo la definizione $|\tau| = r \cdot F \cdot \operatorname{sen}\vartheta$ e la regola della mano destra, si ricava rispettivamente:

- $\tau_1 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_1 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_1 \cdot \operatorname{sen}0° = 0$;
- $\tau_2 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_2 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_2 \cdot \operatorname{sen}90° = r \cdot F_2$; τ entrante nel foglio;
- $\tau_3 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_3 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_3 \cdot \operatorname{sen}90° = r \cdot F_3$; τ uscente dal foglio;

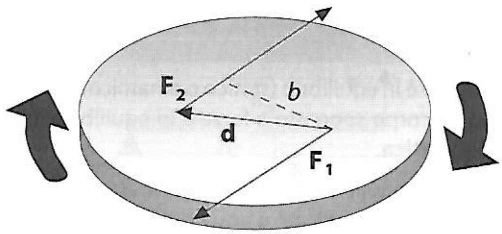
In generale, quando un sistema di forze dà luogo a un momento τ nullo rispetto a un polo O, il sistema di forze **non genera rotazione** rispetto a quel polo. Quando invece τ è diverso da zero, per la regola della mano destra è sempre diretto lungo una direzione perpendicolare al piano che contiene la forza e il raggio della forza: se τ è entrante nel piano allora la rotazione è **oraria**, e viceversa, se τ è uscente la rotazione è **antioraria**.

3.6.1 | Coppia di forze

Si tratta di un sistema composto da due forze parallele, di intensità *uguale*, ma verso opposto.

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \Rightarrow \mathbf{R} = 0$$

L'effetto di una coppia applicata a un *corpo rigido* libero è quello di generare una rotazione del corpo attorno a un asse ortogonale al piano individuato dalle due forze che compongono la coppia.



La coppia di forze, pur essendo un sistema di forze a risultante nulla, è in grado di generare una rotazione del corpo a cui è applicata.

Momento di una coppia di forze:

$$\tau = \mathbf{d} \wedge \mathbf{F}_1 \Rightarrow |\tau| = F \cdot b$$

dove F indica il modulo di una delle due forze, b la distanza tra le forze (braccio della coppia) e **d** infine è la distanza vettoriale fra i loro punti di applicazione.

Il momento di una coppia di forze è la somma dei momenti delle due forze che la compongono rispetto a un qualunque punto O del piano.

Il momento di una forza dipende dalla posizione del polo O mentre il momento di una coppia è lo stesso per tutti i punti del piano della coppia.

3.7 | Baricentro

Ogni sistema di forze è equivalente, dal punto di vista statico e dinamico, a un sistema composto dalla forza risultante e da una opportuna coppia di forze.

Si supponga di suddividere un corpo di massa M in tante parti di massa m_i, ciascuna delle quali soggetta alla forza peso. L'insieme di tali forze costituisce un sistema di forze parallele concordi che possono essere ricondotte a un'unica risultante avente come modulo la somma delle singole componenti.

Il punto di applicazione della risultante di tutte le forze peso prende il nome di *centro di gravità* o *baricentro* del corpo.

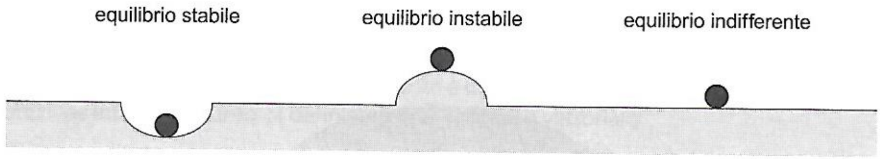
FISICA

Il centro di gravità o **baricentro** di un corpo o di un sistema di corpi è il punto in cui si può immaginare concentrato tutto il peso del corpo o del sistema di corpi.

- Qualunque sia la posizione di un corpo rispetto al terreno, la somma dei momenti delle forze gravitazionali rispetto al suo baricentro è nulla: un corpo posto nel campo gravitazionale e tenuto sospeso per il suo baricentro è in equilibrio (§ 3.8), comunque lo si orienti nello spazio.
- Il baricentro di un corpo esteso può anche essere esterno al corpo stesso (si pensi a un anello di materiale omogeneo: il suo baricentro coincide con il centro geometrico ed è quindi esterno al corpo).

3.8 | Equilibrio

In presenza della forza gravitazionale, si distinguono tre tipi di equilibrio a seconda del loro *grado di stabilità*. In particolare un equilibrio si dice **stabile** quando, in conseguenza a un elemento di disturbo, si origina una forza (una componente della forza peso) che tende a ripristinare la posizione di equilibrio. Le diverse situazioni possibili sono rappresentate nel diagramma che segue.



Più in generale, si dice che un corpo è in equilibrio (statico o dinamico) quando il suo *stato di moto* si mantiene costante: per stabilire se un corpo soggetto a forze è in equilibrio valgono i seguenti criteri, detti **equazioni fondamentali della statica.**

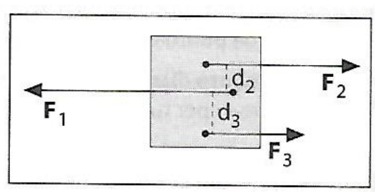
1. Un **punto materiale** è in equilibrio (non è soggetto ad alcuna accelerazione) se la risultante delle forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ a esso applicate è uguale a zero:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$$

2. Un **corpo rigido** (cioè un corpo esteso non assimilabile a un punto materiale) è in equilibrio se su di esso agiscono forze la cui risultante *e il cui momento risultante* sono nulli:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0 \qquad \tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0$$

A un corpo rigido inizialmente fermo si applica un sistema di forze come in figura. Quali sono le condizioni per l'equilibrio?



$\mathbf{F}_1$ è opposta a $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$: perché la risultante sia nulla basta che il modulo di $\mathbf{F}_1$ sia uguale alla somma dei moduli di $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$.

Il momento risultante delle forze non è nullo. Considerando il centro geometrico come polo di rotazione, in particolare, $\tau_1 = 0$, ma τ_2 e τ_3 sono diretti perpendicolarmente al foglio e hanno verso opposto (τ_2 entrante e τ_3 uscente, regola della mano destra). Oltre alla condizione sulle traslazioni, si deve dunque imporre quella sulle rotazioni:

$$\begin{cases} |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| + |\mathbf{F}_3| \\ |\mathbf{F}_2| \cdot d_2 = |\mathbf{F}_3| \cdot d_3 \end{cases}$$

3.9 | Macchine

Una macchina è un dispositivo con il quale è possibile vincere una data resistenza. La *forza motrice* $\mathbf{F}_m$ è la forza che compie l'azione; la *forza resistente* $\mathbf{F}_r$ è quella da vincere.

Vantaggio statico di una macchina: $V = |\mathbf{F}_r| / |\mathbf{F}_m|$

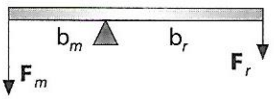
A seconda che *V* sia maggiore, minore o uguale a 1, la macchina sarà vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente. Segue l'esame di alcuni tipi di macchine: leve, carrucole e piano inclinato.

3.9.1 | Leve

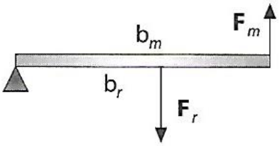
La leva è costituita da un'asta rigida girevole intorno a un asse a essa perpendicolare. Il **fulcro** è il punto di incontro fra asse e leva; i **bracci** sono la distanza tra i punti di applicazione di $\mathbf{F}_m$ e $\mathbf{F}_r$ e il fulcro. Le leve sono di *tre specie* a seconda delle posizioni di fulcro, forza motrice e resistenza:

1. **prima specie** (es: forbici): fulcro fra forza motrice $\mathbf{F}_m$ e resistenza $\mathbf{F}_r$; è vantaggiosa se $b_r < b_m$;
2. **seconda specie** (es: schiaccianoci): resistenza fra fulcro e forza motrice; sempre vantaggiosa;
3. **terza specie** (es: braccio umano): forza motrice fra fulcro e resistenza; sempre svantaggiosa.

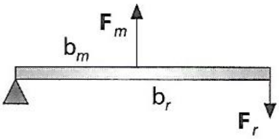
Leva di prima specie



Leva di seconda specie



Leva di terza specie



Dalla condizione di equilibrio per i momenti delle forze rispetto al fulcro di una leva, si ricava la **condizione di equilibrio per le leve:**

$$F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r \quad \Rightarrow \quad F_m : F_r = b_r : b_m$$

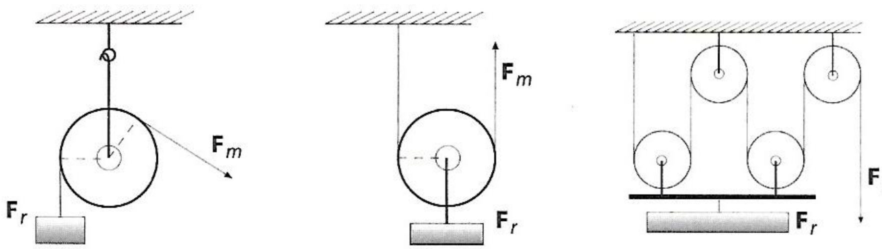
dove $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{F}_r$, b_m, b_r rappresentano la forza motrice, la forza resistente e i corrispondenti bracci d'azione.

Alice e Bob riescono a tenere un dondolo in equilibrio stando seduti alle due estremità. Se Alice ha una massa di 40 kg, quanto pesa Bob?
La risposta è intuitiva: dato che il fulcro si trova esattamente a metà del dondolo (si faccia riferimento alla figura della leva di prima specie), ovvero i bracci delle due forze applicate alla leva sono uguali, Bob deve pesare quanto Alice.
Dato che Alice ha una massa di 40 kg, il suo peso (e quello di Bob) è:

$$P = mg = 40 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 392 \text{ N}$$

3.9.2 | Carrucole

La carrucola è costituita da un disco girevole, attorno al quale scorre una fune, fissato a un sostegno o a un peso da sollevare. Esistono carrucole fisse, mobili, o serie di carrucole (paranco).



(a) (b) (c)

1. Le *carrucole fisse* sono equivalenti a leve (§ 3.9.1) in cui il braccio della forza resistente è uguale a quello della forza motrice, entrambi uguali al raggio del disco (caso a in figura). La condizione di equilibrio è $F_m = F_r$.
   Si ha $V = 1 \Rightarrow$ macchina indifferente. Pur non essendo vantaggiosa, la carrucola fissa è utile perché consente di sollevare un corpo esercitando una forza diretta verso il basso.

2. Le *carrucole mobili* hanno un estremo della fune fissato al sostegno, la forza resistente fissata ne centro del disco e la forza motrice all'altro estremo della fune (caso b in figura). Metà resistenza s scarica sul sostegno e quindi l'equilibrio è raggiunto quando $F_m = F_r/2$.

   Si ha $V = 2 \Rightarrow$ macchina vantaggiosa.

3. Il *paranco* è una macchina composta da n carrucole mobili (caso c in figura); l'equilibrio viene rag giunto quando $F_m = F_r/(2n)$.

   Il vantaggio aumenta con l'aumentare di n: $V = 2n \Rightarrow$ macchina vantaggiosa.

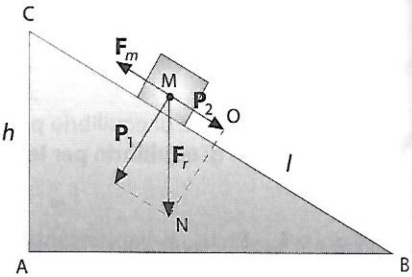
3.9.3 | Piano inclinato

Si tratta di una macchina formata da un piano di lunghezza l, inclinato rispetto all'orizzontale con un di-slivello h, sul quale viene appoggiato un corpo che si vuole tenere in equilibrio.

Il peso dell'oggetto costituisce la forza resistente $\mathbf{F}_r$. Il metodo più vantaggioso per bilanciare la caduta del corpo è applicare la forza motrice $\mathbf{F}_m$ parallela al piano. Tale forza deve essere uguale e contraria alla componente della forza peso parallela al piano.

Si scompone quindi il peso in $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$.

Per l'equilibrio, il modulo di $\mathbf{F}_m$ deve essere uguale a quello di $\mathbf{P}_2$: $F_m = \overline{MO}$.



Dalla similitudine dei triangoli ABC e MNO si ha:

$$\overline{BC} : \overline{MN} = \overline{AC} : \overline{MO}$$

$$\overline{MO} = \overline{MN} \cdot (\overline{AC}/\overline{BC}) \Rightarrow F_m = F_r \cdot (h/l)$$

La componente $\mathbf{P}_1$ della forza peso, ortogonale al piano, è bilanciata da una forza a essa uguale e opposta, detta *reazione vincolare*.

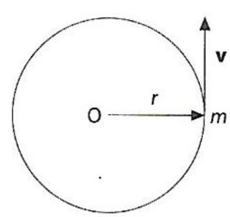
Per il piano inclinato il vantaggio è $V = \dfrac{l}{h}$. Essendo $l > h$, la macchina è sempre vantaggiosa.

3.10 | Momento angolare

Nel § 3.6 si è definito il momento di una forza rispetto a un punto come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione e la forza. Analogamente, per un corpo di massa m e velocità $\mathbf{v}$, si definisce il *momento angolare* o *momento della quantità di moto* rispetto a un punto O come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione del corpo rispetto a O e la sua quantità di moto.

Momento angolare: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{P} = m \cdot \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$

Tale vettore è perpendicolare al piano individuato dal vettore posizione e dal vettore quantità di moto e dipende dal punto O.



Analogamente a quanto accade per la quantità di moto, **il momento angolare di un sistema isolato è un vettore che si conserva.**

PARTE QUARTA

Nel caso di moto circolare uniforme, velocità e vettore posizione rispetto al centro della circonferenza sono ortogonali tra loro; il momento angolare assume quindi la forma:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega$$

dove ω indica la velocità angolare del corpo e $I = m \cdot r^2$ prende il nome di **momento d'inerzia.** I è un indice dell'inerzia che i corpi offrono a una variazione della loro velocità angolare.

Una pattinatrice sul ghiaccio sta eseguendo una trottola alla velocità angolare ω. Quando vuole aumentare la velocità della trottola avvicina gli arti al proprio asse di rotazione, fino a ridurre il momento di inerzia I della metà. Supponendo che tra i pattini e il ghiaccio ci sia attrito trascurabile, quanto vale la velocità angolare finale della trottola?

Il momento angolare **L** è, per il moto rotatorio, la grandezza analoga alla quantità di moto **P** per il moto traslatorio.

L'assenza di attrito indica che il sistema pattinatrice-ghiaccio è isolato, ovvero non agiscono forze esterne. In questo caso vale il principio di conservazione del momento angolare $L = I \cdot \omega$: segue che è possibile modificare la velocità angolare di un corpo in rotazione semplicemente cambiando il suo momento d'inerzia (I e ω sono infatti inversamente proporzionali).

Numericamente, dato che $I_2 = I_1/2$:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = \frac{I_1}{I_1/2} \cdot \omega_1 = 2\omega_1$$

Ancora una volta, si noti dal punto di vista dimensionale la formula risolutiva:

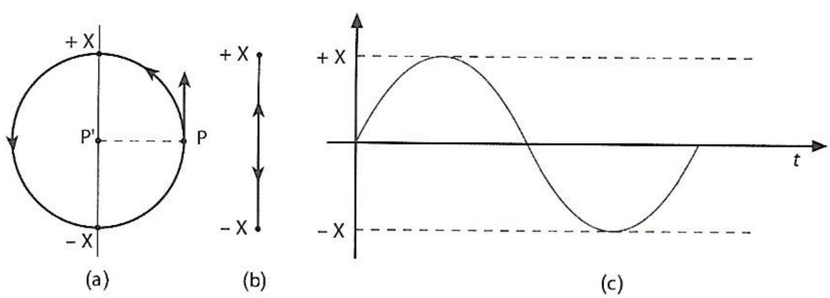
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1$$

dove a sinistra dell'uguale c'è una velocità angolare e a destra, correttamente, lo stesso, dato che il rapporto I_1/I_2 è adimensionale.

L'azione di una forza **F** su un corpo libero ne provoca una variazione della quantità di moto **P**; l'azione di una coppia di momento τ ne provoca una variazione del momento angolare **L**.

3.11 | Forze elastiche e moto armonico

Come si è visto nel § 2.3.5, il moto armonico si può definire come il moto della proiezione P' di un punto P che si muove con velocità angolare costante ω lungo una circonferenza. La legge oraria di tale moto è di tipo sinusoidale.



Quando P compie una rotazione completa (figura a), la sua proiezione P' si muove lungo il diametro della circonferenza (figura b) passando due volte per ogni punto del diametro. La rappresentazione di tale moto è un grafico di tipo sinusoidale (figura c): l'ampiezza x dell'oscillazione varia da $-X$ a $+X$.

Si tratta di un *moto periodico* di periodo $T = 2\pi/\omega$; ω è la *pulsazione del moto* e si ha:

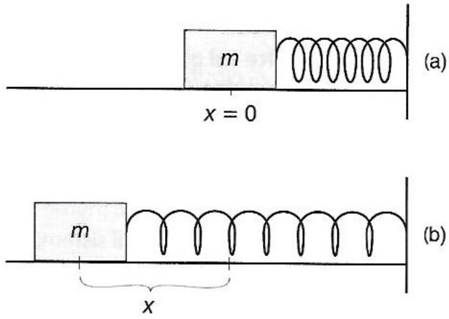
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad T = \frac{1}{\nu}$$

FISICA

3.11.1 | La molla e il pendolo semplice

Si prendono ora in esame due casi notevoli di moto armonico: l'oscillazione di un sistema *massa-molla* e l'oscillazione di un *pendolo semplice*.

Nella figura a lato, il **sistema massa-molla** è rappresentato nella configurazione di equilibrio (figura a) e in una configurazione dove la massa è spostata di una quantità x dalla posizione di equilibrio (figura b).

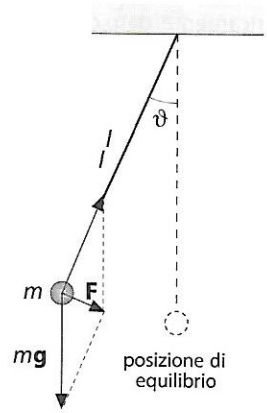


La massa è soggetta alla forza della molla che è una *forza di tipo elastico*, cioè opposta e proporzionale alla deformazione. Tale forza è data da:

$$\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{x}$ è lo spostamento dalla posizione di equilibrio e k è la *costante elastica* della molla.

La massa del **pendolo semplice** (una massa puntiforme m sospesa grazie a un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza l) è invece sottoposta a due forze: la forza peso pari a $m\mathbf{g}$ e la tensione del filo. La risultante di tali forze è indicata con $\mathbf{F}$ in figura.



In entrambi i casi si tratta di forze di richiamo che, in mancanza di attriti, fanno oscillare le masse senza interruzione.

Sempre in entrambi i casi, quando le masse transitano nelle posizioni di equilibrio ($x = 0$ e $\theta = 0$), le loro velocità risultano massime, mentre si annullano quando l'oscillazione raggiunge la massima ampiezza (x e θ massimi). Le accelerazioni, al contrario, raggiungono il loro valore massimo nei punti dove si inverte il moto, cioè dove x e θ sono massimi, e si annullano nella posizione di equilibrio.

Il periodo di oscillazione del sistema massa–molla è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni; il periodo di oscillazione del pendolo è indipendente dalla massa del corpo appeso al filo e dall'ampiezza delle oscillazioni.

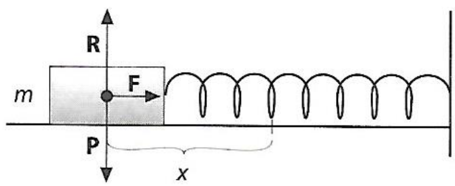
Rispettivamente, si ha:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

PARTE QUARTA

3.11.2 | Legge oraria del moto armonico

Si consideri il sistema massa-molla in figura. La forza peso **P** che agisce sulla massa m è bilanciata dalla reazione vincolare **R** del piano di appoggio. L'unica forza con risultante non nulla che agisce sulla massa è la forza elastica di richiamo $\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$. Tale forza provoca l'accelerazione della massa.



Per la seconda legge della dinamica si ha:

$$m \cdot \mathbf{a} = -k \cdot \mathbf{x} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{a} = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x} \qquad [5]$$

Nel moto armonico l'accelerazione è sempre direttamente proporzionale allo spostamento del corpo rispetto alla posizione di equilibrio.

Dalla [5] si ricava la legge oraria del moto armonico.

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad \text{dove } \omega = \sqrt{k/m}$$

dove A è l'ampiezza massima dell'oscillazione, φ è un parametro detto *fase iniziale* che tiene conto delle condizioni iniziali e ω prende il nome di pulsazione e ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

Le equazioni trovate assumono la stessa forma per qualunque moto oscillatorio; nel pendolo semplice, l'equazione del moto riferita all'angolo di apertura delle oscillazioni è la seguente:

$$\theta(t) = \Theta \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad \text{dove } \omega = \sqrt{g/l}$$

3.11.3 | Grandezze caratteristiche del moto oscillatorio

	massa - molla	pendolo semplice
Costante del moto	k	$\frac{mg}{l}$
Periodo T	$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Pulsazione $\omega = 2\pi\nu$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Frequenza ν	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$
Energia potenziale[1]	$\frac{1}{2}kx^2$	mgh

1. L'energia potenziale verrà definita nel § 4.3.2.

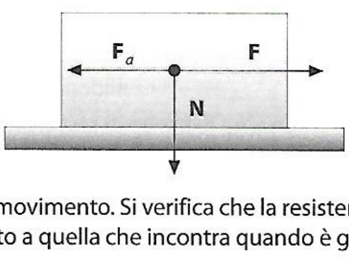
3.12 | Forza di attrito

Le *forze di attrito* si oppongono ai movimenti relativi tra i corpi. La forma di attrito più ricorrente nelle domande dei test universitari è la forza di attrito *radente*.

Dati due corpi mantenuti a contatto da una forza **N** perpendicolare alla superficie di contatto, la forza di **attrito radente** $\mathbf{F}_a$ è originata dallo slittamento di un corpo sull'altro ed è un vettore così definito:
Direzione: parallela alla superficie di contatto;
Verso: quello che si oppone al moto relativo tra i due corpi;

Intensità: $|\mathbf{F}_a| = f \cdot |\mathbf{N}|$ dove $f = \begin{cases} f_s: \text{ coefficiente di attrito statico} \\ f_k: \text{ coefficiente di attrito dinamico} \end{cases}$

La forza di attrito radente è quindi direttamente proporzionale alla forza normale **N** (che nel caso in figura coincide con la forza peso del corpo) e dipende dalla natura delle superfici di contatto. Il coefficiente di attrito statico f_s è proprio della resistenza che si incontra quando si cerca di mettere in movimento un corpo inizialmente fermo.



Il coefficiente di attrito dinamico f_k riguarda invece un corpo già in movimento. Si verifica che la resistenza che un corpo incontra è maggiore quando parte da fermo rispetto a quella che incontra quando è già in moto.

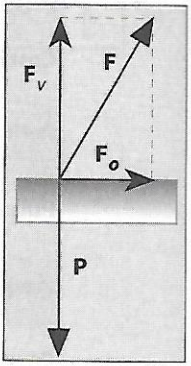
Per ogni materiale vale la disuguaglianza: $f_s > f_k$

FISICA

Oltre alla forza di attrito radente, esistono altri due tipi di forze di attrito.

- **Forza di attrito volvente**: si tratta della forza che si oppone al rotolamento di un corpo su un altro: sperimentalmente si trova che l'attrito volvente è sempre inferiore a quello radente.
- **Forza di attrito nei fluidi**: quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso (come un pesce nell'acqua o un paracadutista nell'aria) incontra una resistenza che dipende dalla viscosità del fluido (§ 6.5) e dalla forma, dalle dimensioni e dalla velocità del corpo che si muove nel fluido.

Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato su un piano orizzontale. Tra il corpo e il piano i coefficienti di attrito statico e dinamico valgono rispettivamente $f_s = 0,5$ e $f_d = 0,3$. Si applica al corpo una forza F di modulo pari a 20 N che forma con il piano un angolo di 60°. Determinare la forza totale agente parallelamente al piano.



La componente verticale della forza **F** vale:

$$F_v = F\text{sen}(60°) = 17{,}32\ \text{N}$$

mentre quella orizzontale $F_o = F\cos(60°) = 10\ \text{N}$.

La forza di attrito statico vale:

$$F_s = (mg - F_v) \cdot f_s = (2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 17{,}32\ \text{N}) \cdot 0{,}5 = 1{,}14\ \text{N}$$

ed è diretta nel verso opposto alla componente orizzontale $\mathbf{F}_o$.

Essendo $F_s < F_o$, il corpo inizia a muoversi.

Si considera l'attrito dinamico:

$$F_d = (mg - F_v) \cdot f_d = (2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 17{,}32\ \text{N}) \cdot 0{,}3 = 0{,}684\ \text{N}$$

La forza totale parallela al piano è dunque:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_d \Rightarrow R = F_o - F_d = (10 - 0{,}684)\ \text{N} = 9{,}316\ \text{N}$$

PARTE QUARTA