中 国 人 民 大 学 出 版 社

中国人民大学音像出版社

《应用时间序列分析》

目　录

第一章

时间序列分析简介

本章结构

- 引言
- 时间序列的定义
- 时间序列分析方法简介
- 时间序列分析软件

1.1 引言

- 最早的时间序列分析可以追溯到7000年前的古埃及。
  - 古埃及人把尼罗河涨落的情况逐天记录下来，就构成所谓的时间序列。对这个时间序列长期的观察使他们发现尼罗河的涨落非常有规律。由于掌握了尼罗河泛滥的规律，使得古埃及的农业迅速发展，从而创建了埃及灿烂的史前文明。
- 按照时间的顺序把随机事件变化发展的过程记录下来就构成了一个时间序列。对时间序列进行观察、研究，找寻它变化发展的规律，预测它将来的走势就是时间序列分析。

1.2 时间序列的定义

- 随机序列:按时间顺序排列的一组随机变量

$$\Lambda \ , X_1, X_2, \Lambda \ , X_t, \Lambda$$

- 观察值序列:随机序列的 n 个有序观察值，称之为序列长度为 n 的观察值序列

$$x_1, x_2, \Lambda \ , x_t$$

- 随机序列和观察值序列的关系
  - 观察值序列是随机序列的一个实现
  - 我们研究的目的是想揭示随机时序的性质
  - 实现的手段都是通过观察值序列的性质进行推断

1.3 时间序列分析方法

- 描述性时序分析

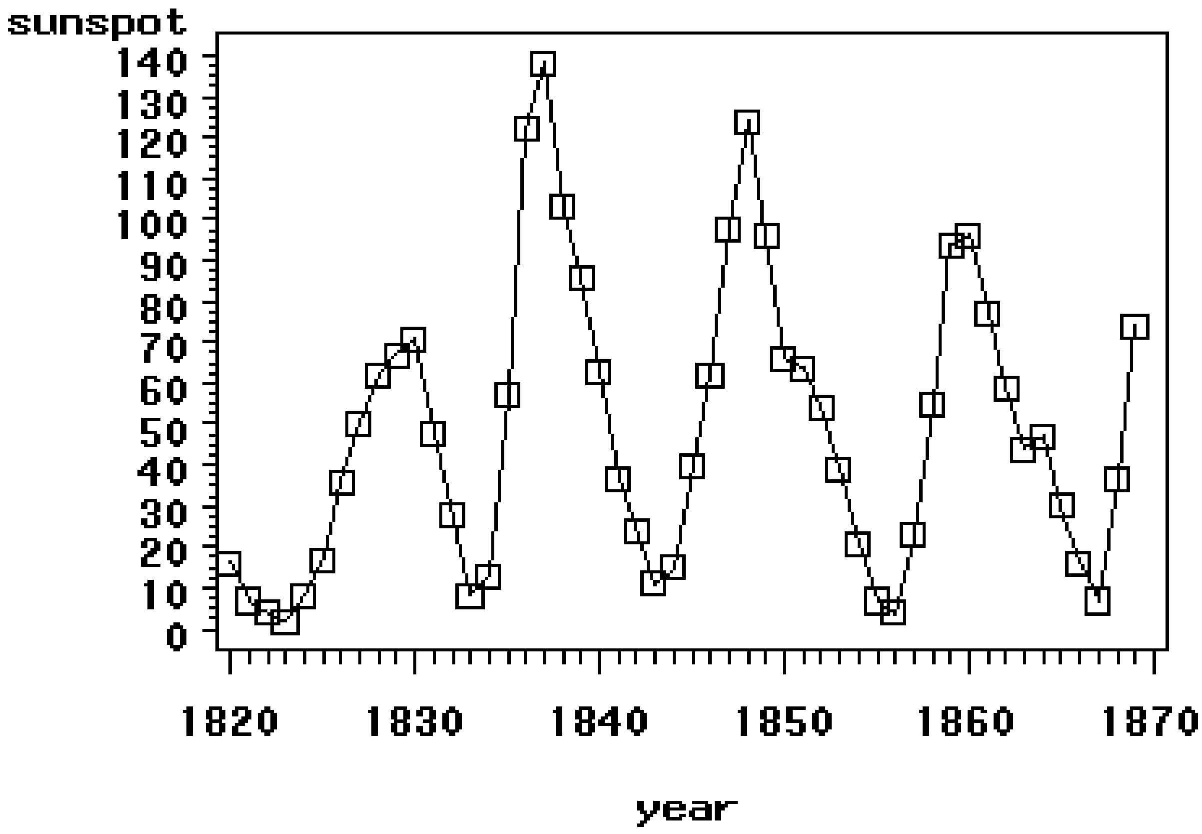
- 统计时序分析

描述性时序分析

- 通过直观的数据比较或绘图观测，寻找序列中蕴含的发展规律，这种分析方法就称为描述性时序分析
- 描述性时序分析方法具有操作简单、直观有效的特点，它通常是人们进行统计时序分析的第一步。

描述性时序分析案例

- 德国业余天文学家施瓦尔发现太阳黑子的活动具有11年左右的周期



统计时序分析

- 频域分析方法
- 时域分析方法

频域分析方法

- 原理
  - 假设任何一种无趋势的时间序列都可以分解成若干不同频率的周期波动
- 发展过程
  - 早期的频域分析方法借助富里埃分析从频率的角度揭示时间序列的规律
  - 后来借助了傅里叶变换，用正弦、余弦项之和来逼近某个函数
  - 20世纪60年代，引入最大熵谱估计理论，进入现代谱分析阶段
- 特点
  - 非常有用的动态数据分析方法，但是由于分析方法复杂，结果抽象，有一定的使用局限性

时域分析方法

- 原理
  - 事件的发展通常都具有一定的惯性，这种惯性用统计的语言来描述就是序列值之间存在着一定的相关关系，这种相关关系通常具有某种统计规律。
- 目的
  - 寻找出序列值之间相关关系的统计规律，并拟合出适当的数学模型来描述这种规律，进而利用这个拟合模型预测序列未来的走势
- 特点
  - 理论基础扎实，操作步骤规范，分析结果易于解释，是时间序列分析的主流方法

时域分析方法的分析步骤

- 考察观察值序列的特征
- 根据序列的特征选择适当的拟合模型
- 根据序列的观察数据确定模型的口径
- 检验模型，优化模型
- 利用拟合好的模型来推断序列其它的统计性质或预测序列将来的发展

时域分析方法的发展过程

- 基础阶段
- 核心阶段
- 完善阶段

基础阶段

- G.U.Yule
  - 1927年，AR模型
- G.T.Walker
  - 1931年，MA模型，ARMA模型

核心阶段

- G.E.P.Box和 G.M.Jenkins
  - 1970年，出版《Time Series Analysis Forecasting and Control》
  - 提出ARIMA模型（Box—Jenkins 模型）
  - Box—Jenkins模型实际上是主要运用于单变量、同方差场合的线性模型

完善阶段

- 异方差场合
  - Robert F.Engle，1982年，ARCH模型
  - Bollerslov，1985年GARCH模型
- 多变量场合
  - C.Granger，1987年，提出了协整（co-integration）理论
- 非线性场合
  - 汤家豪等，1980年，门限自回归模型

1.4 时间序列分析软件

- 常用软件
  - S-plus，Matlab，Gauss，TSP，Eviews 和SAS
- 推荐软件——SAS
  - 在SAS系统中有一个专门进行计量经济与时间序列分析的模块：SAS/ETS。SAS/ETS编程语言简洁，输出功能强大，分析结果精确，是进行时间序列分析与预测的理想的软件
  - 由于SAS系统具有全球一流的数据仓库功能，因此在进行海量数据的时间序列分析时它具有其它统计软件无可比拟的优势

第二章

时间序列的预处理

本章结构

- 平稳性检验
- 纯随机性检验

2.1平稳性检验

- 特征统计量
- 平稳时间序列的定义
- 平稳时间序列的统计性质
- 平稳时间序列的意义
- 平稳性的检验

概率分布

- 概率分布的意义
  - 随机变量族的统计特性完全由它们的联合分布函数或联合密度函数决定
- 时间序列概率分布族的定义

$$\{F_{t_1,t_2,\Lambda,t_m}(x_1,x_2,\Lambda,x_m)\}$$

$$\forall m\in(1,2,\Lambda,m),\forall t_1,t_2,\Lambda,t_m\in T$$

- 实际应用的局限性

特征统计量

- 均值

$$\mu_t = EX_t = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x)$$

- 方差

$$DX_t = E(X_t - \mu_t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_t)^2 dF_t(x)$$

- 自协方差

$$\gamma(t,s) = E(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)$$

- 自相关系数

$$\rho(t,s) = \frac{\gamma(t,s)}{\sqrt{DX_t \cdot DX_s}}$$

平稳时间序列的定义

- 严平稳
  - 严平稳是一种条件比较苛刻的平稳性定义，它认为只有当序列所有的统计性质都不会随着时间的推移而发生变化时，该序列才能被认为平稳。
- 宽平稳
  - 宽平稳是使用序列的特征统计量来定义的一种平稳性。它认为序列的统计性质主要由它的低阶矩决定，所以只要保证序列低阶矩平稳（二阶），就能保证序列的主要性质近似稳定。

平稳时间序列的统计定义

- 满足如下条件的序列称为严平稳序列

$\forall$正整数m, $\forall t_1, t_2, \Lambda\ , t_m \in T$, $\forall$正整数τ, 有

$$F_{t_1, t_2 \Lambda\, t_m}(x_1, x_2, \Lambda\ , x_m) = F_{t_{1+\tau}, t_{2+\tau} \Lambda\, t_{m+\tau}}(x_1, x_2, \Lambda\ , x_m)$$

- 满足如下条件的序列称为宽平稳序列

1) $EX_t^2 < \infty, \forall t \in T$

2) $EX_t = \mu, \mu$为常数，$\forall t \in T$

3) $\gamma(t, s) = \gamma(k, k+s-t)$，$\forall t, s, k$且$k+s-t \in T$

严平稳与宽平稳的关系

- 一般关系
  - 严平稳条件比宽平稳条件苛刻，通常情况下，严平稳（低阶矩存在）能推出宽平稳成立，而宽平稳序列不能反推严平稳成立
- 特例
  - 不存在低阶矩的严平稳序列不满足宽平稳条件，例如服从柯西分布的严平稳序列就不是宽平稳序列
  - 当序列服从多元正态分布时，宽平稳可以推出严平稳

平稳时间序列的统计性质

- 常数均值
- 自协方差函数和自相关函数只依赖于时间的平移长度而与时间的起止点无关
  - 延迟k自协方差函数

$$\gamma(k)=\gamma(t,t+k),\forall k\text{为整数}$$

  - 延迟k自相关系数

$$\rho_k==\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

自相关系数的性质

- 规范性
- 对称性
- 非负定性
- 非唯一性

平稳时间序列的意义

- 时间序列数据结构的特殊性
  - 可列多个随机变量，而每个变量只有一个样本观察值
- 平稳性的重大意义
  - 极大地减少了随机变量的个数，并增加了待估变量的样本容量
  - 极大地简化了时序分析的难度，同时也提高了对特征统计量的估计精度

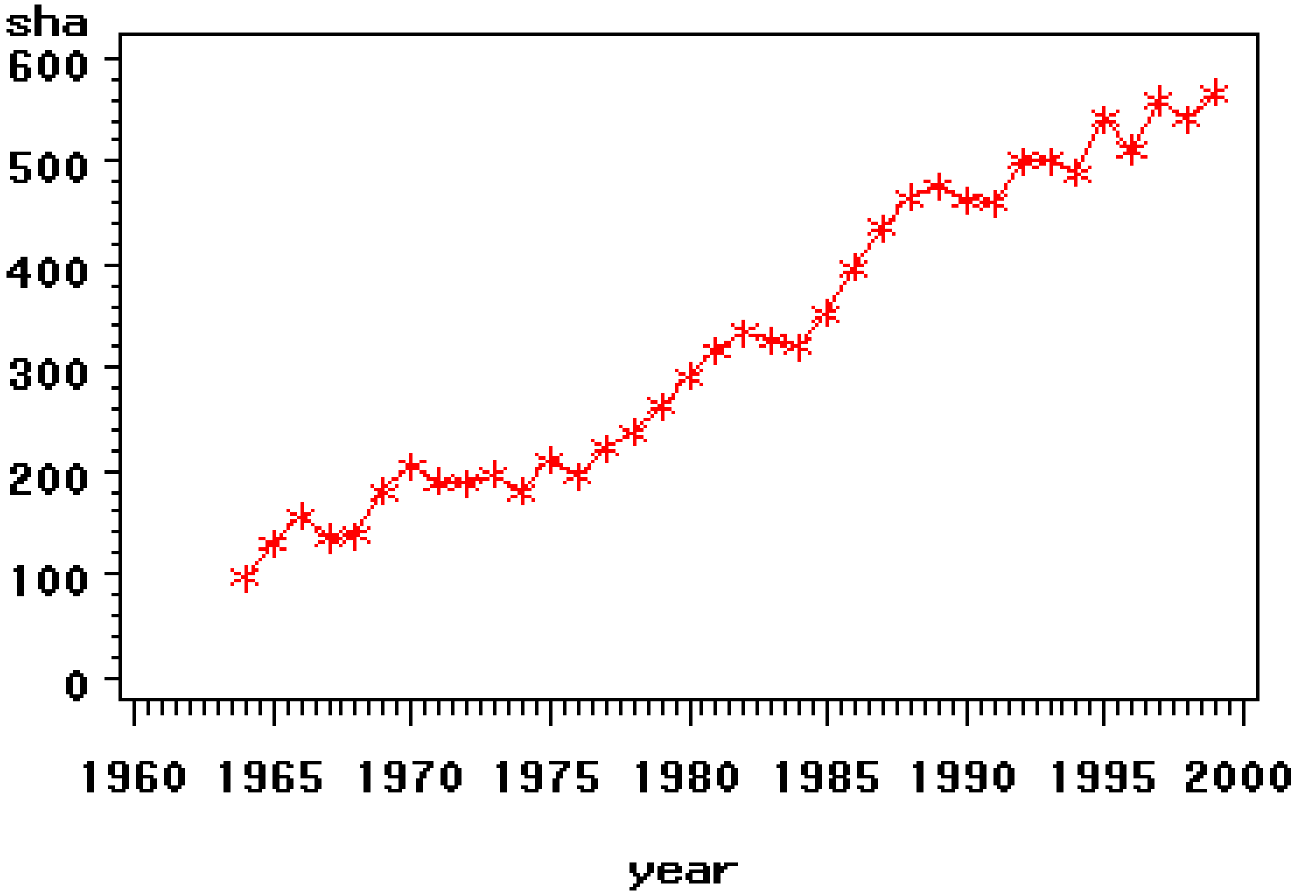
平稳性的检验（图检验方法）

- 时序图检验
  - 根据平稳时间序列均值、方差为常数的性质，平稳序列的时序图应该显示出该序列始终在一个常数值附近随机波动，而且波动的范围有界、无明显趋势及周期特征
- 自相关图检验
  - 平稳序列通常具有短期相关性。该性质用自相关系数来描述就是随着延迟期数的增加，平稳序列的自相关系数会很快地衰减向零

例题

- 例2.1
  - 检验1964年——1999年中国纱年产量序列的平稳性
- 例2.2
  - 检验1962年1月——1975年12月平均每头奶牛月产奶量序列的平稳性
- 例2.3
  - 检验1949年——1998年北京市每年最高气温序列的平稳性

例2.1时序图

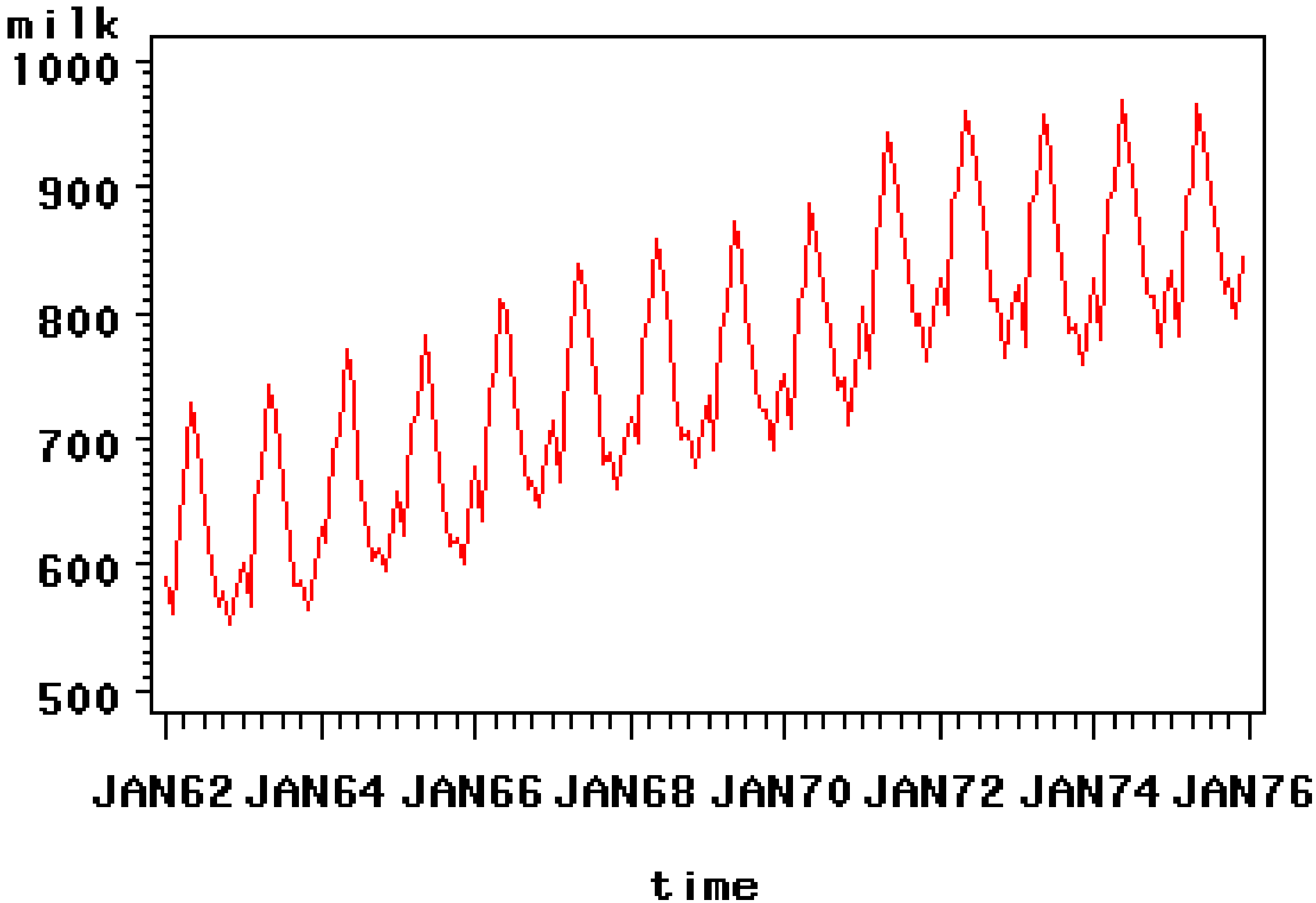


sha
600
500
400
300
200
100
0
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
year

例2.1自相关图

```
                              Autocorrelations

Lag  Covariance  Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0   21741.103      1.00000    |                    |********************|
  1   19869.670      0.91392    |             .      |******************  |
  2   18336.945      0.84342    |         .          |*****************   |
  3   16679.644      0.76719    |       .            |***************     |
  4   15119.827      0.69545    |     .              |**************.     |
  5   13234.768      0.60874    |   .                |************    .   |
  6   11822.365      0.54378    |  .                 |***********      .  |
  7   10355.425      0.47631    |  .                 |**********       .  |
  8    8597.171      0.39543    | .                  |********          . |
  9    6977.227      0.32092    | .                  |******            . |
 10    5262.589      0.24206    | .                  |*****             . |
 11    3185.458      0.14652    |.                   |***                .|
 12    1257.065      0.05782    |.                   |*                  .|
 13    -717.129      -.03298    |.                  *|                   .|
 14   -2356.762      -.10840    |.                 **|                   .|
 15   -3657.864      -.16825    |.                ***|                   .|
 16   -4675.021      -.21503    |.               ****|                   .|
 17   -5645.938      -.25969    |.              *****|                   .|
 18   -6662.959      -.30647    |.             ******|                   .|
 19   -7523.279      -.34604    |.            *******|                   .|
 20   -8300.856      -.38180    |.           ********|                   .|
 21   -9068.912      -.41713    |            ********|                    |
 22   -9409.375      -.43279    |           *********|                    |

                     "." marks two standard errors
```

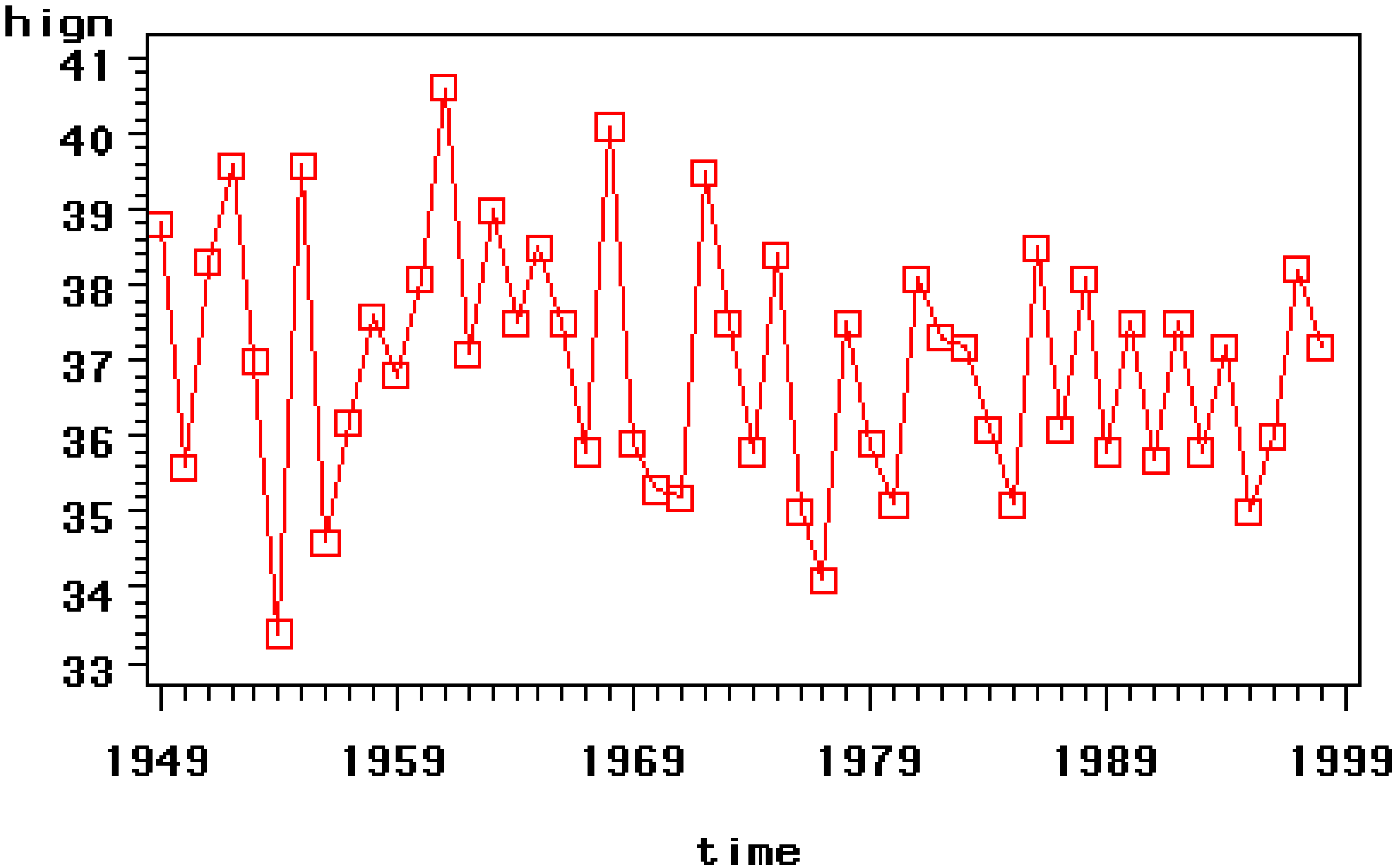
例2.2时序图


milk
1000
900
800
700
600
500
JAN62
JAN64
JAN66
JAN68
JAN70
JAN72
JAN74
JAN76
time

例2.2 自相关图

```
                                                   Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0     10383.588        1.00000    |                    |********************|
  1      9257.734        0.89157    |                 .  |******************  |
  2      8080.289        0.77818    |               .    |****************    |
  3      6440.643        0.62027    |              .     |************        |
  4      5053.314        0.48666    |             .      |**********          |
  5      4445.713        0.42815    |             .      |*********           |
  6      3904.890        0.37606    |             .      |********            |
  7      4306.827        0.41477    |             .      |********            |
  8      4716.761        0.45425    |            .       |*********           |
  9      5833.655        0.56181    |            .       |***********         |
 10      7128.946        0.68656    |            .       |**************      |
 11      7980.333        0.76855    |           .        |***************     |
 12      8773.234        0.84491    |           .        |*****************   |
 13      7735.639        0.74499    |          .         |***************     |
 14      6621.269        0.63767    |         .          |*************       |
 15      5084.621        0.48968    |         .          |**********.         |
 16      3775.004        0.36355    |         .          |*******   .         |
 17      3176.849        0.30595    |         .          |******    .         |
 18      2646.859        0.25491    |         .          |*****     .         |
 19      2984.458        0.28742    |         .          |******    .         |
 20      3328.659        0.32057    |         .          |******    .         |
 21      4324.928        0.41652    |        .           |********   .        |
 22      5489.933        0.52871    |        .           |***********.        |
 23      6265.032        0.60336    |        .           |************        |
 24      6986.088        0.67280    |        .           |*************       |

                                     "." marks two standard errors
```

例2.3时序图


hign
41
40
39
38
37
36
35
34
33
1949
1959
1969
1979
1989
1999
time

例2.3自相关图

```
                                                    Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0      2.569604        1.00000     |                   |********************|
  1     -0.449960        -.17511     |             . ****|     .              |
  2    -0.0091078        -.00354     |             .     |     .              |
  3      0.463204        0.18026     |             .     |**** .              |
  4      0.059232        0.02305     |             .     |     .              |
  5     -0.421428        -.16400     |             .  ***|     .              |
  6      0.253512        0.09866     |             .     |**   .              |
  7     -0.067559        -.02629     |             .    *|     .              |
  8    -0.0083274        -.00324     |             .     |     .              |
  9     -0.057247        -.02228     |             .     |     .              |
 10      0.148917        0.05795     |             .     |*    .              |
 11      0.095461        0.03715     |             .     |*    .              |
 12     -0.267799        -.10422     |             .   **|     .              |
 13      0.260969        0.10156     |             .     |**   .              |
 14      0.011069        0.00431     |             .     |     .              |
 15     -0.069243        -.02695     |             .    *|     .              |

                            "." marks two standard errors
```

2.2 纯随机性检验

- 纯随机序列的定义
- 纯随机性的性质
- 纯随机性检验

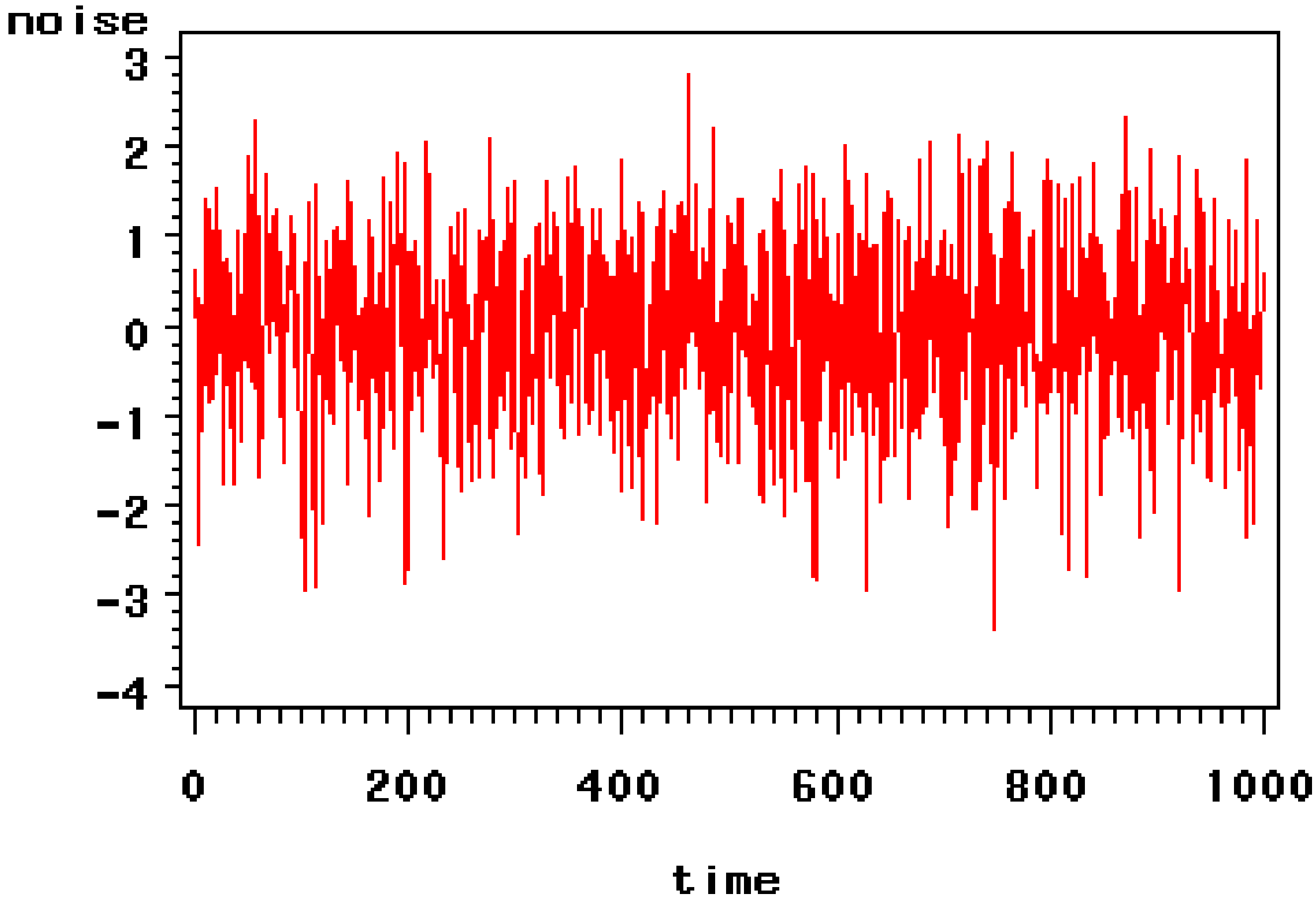
纯随机序列的定义

- 纯随机序列也称为白噪声序列，它满足如下两条性质

$$(1) EX_t = \mu, \forall t \in T$$

$$(2) \gamma(t,s) = \begin{cases} \sigma^2, t = s \\ 0, t \neq s \end{cases}, \forall t,s \in T$$

标准正态白噪声序列时序图



白噪声序列的性质

- 纯随机性

$$\gamma(k)=0,\quad \forall k\neq 0$$

  - 各序列值之间没有任何相关关系，即为“没有记忆”的序列

- 方差齐性

$$DX_t=\gamma(0)=\sigma^2$$

  - 根据马尔可夫定理，只有方差齐性假定成立时，用最小二乘法得到的未知参数估计值才是准确的、有效的

纯随机性检验

- 检验原理
- 假设条件
- 检验统计量
- 判别原则

Barlett定理

- 如果一个时间序列是纯随机的，得到一个观察期数为n的观察序列，那么该序列的延迟非零期的样本自相关系数将近似服从均值为零，方差为序列观察期数倒数的正态分布

$$\hat{\rho}_k \ \& N(0,\frac{1}{n}) \qquad ,\forall k \neq 0$$

假设条件

- 原假设：延迟期数小于或等于m期的序列值之间相互独立

$$H_0:\ \rho_1=\rho_2=\Lambda=\rho_m=0,\forall m\ge 1$$

- 备择假设：延迟期数小于或等于m期的序列值之间有相关性

$$H_1:\ \text{至少存在某个}\rho_k\neq 0,\forall m\ge 1,\ k\le m$$

检验统计量

- Q统计量

$$Q = n\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2 \sim \chi^2(m)$$

- LB统计量

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2(m)$$

判别原则

- 拒绝原假设
  - 当检验统计量大于$\chi^2_{1-\alpha}(m)$分位点，或该统计量的P值小于α时，则可以以$1-\alpha$的置信水平拒绝原假设，认为该序列为非白噪声序列
- 接受原假设
  - 当检验统计量小于$\chi^2_{1-\alpha}(m)$分位点，或该统计量的P值大于α时，则认为在$1-\alpha$的置信水平下无法拒绝原假设，即不能显著拒绝序列为纯随机序列的假定

例2.4：标准正态白噪声序列纯随机性检验

样本自相关图

```
                                    Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0      1.005528        1.00000    |                    |********************|
  1    -0.0010647        -.00106    |                   .|.                   |
  2     -0.036747        -.03655    |                   *|.                   |
  3    -0.0062567        -.00622    |                   .|.                   |
  4      0.011938        0.01187    |                   .|.                   |
  5     -0.025139        -.02500    |                   *|.                   |
  6     -0.014428        -.01435    |                   .|.                   |
  7     0.0088565        0.00881    |                   .|.                   |
  8     -0.010179        -.01012    |                   .|.                   |
  9     -0.026893        -.02674    |                   *|.                   |
 10     -0.024882        -.02475    |                   .|.                   |
 11     -0.014021        -.01394    |                   .|.                   |
 12      0.035527        0.03533    |                   .|*                   |

                       "." marks two standard errors
```

检验结果

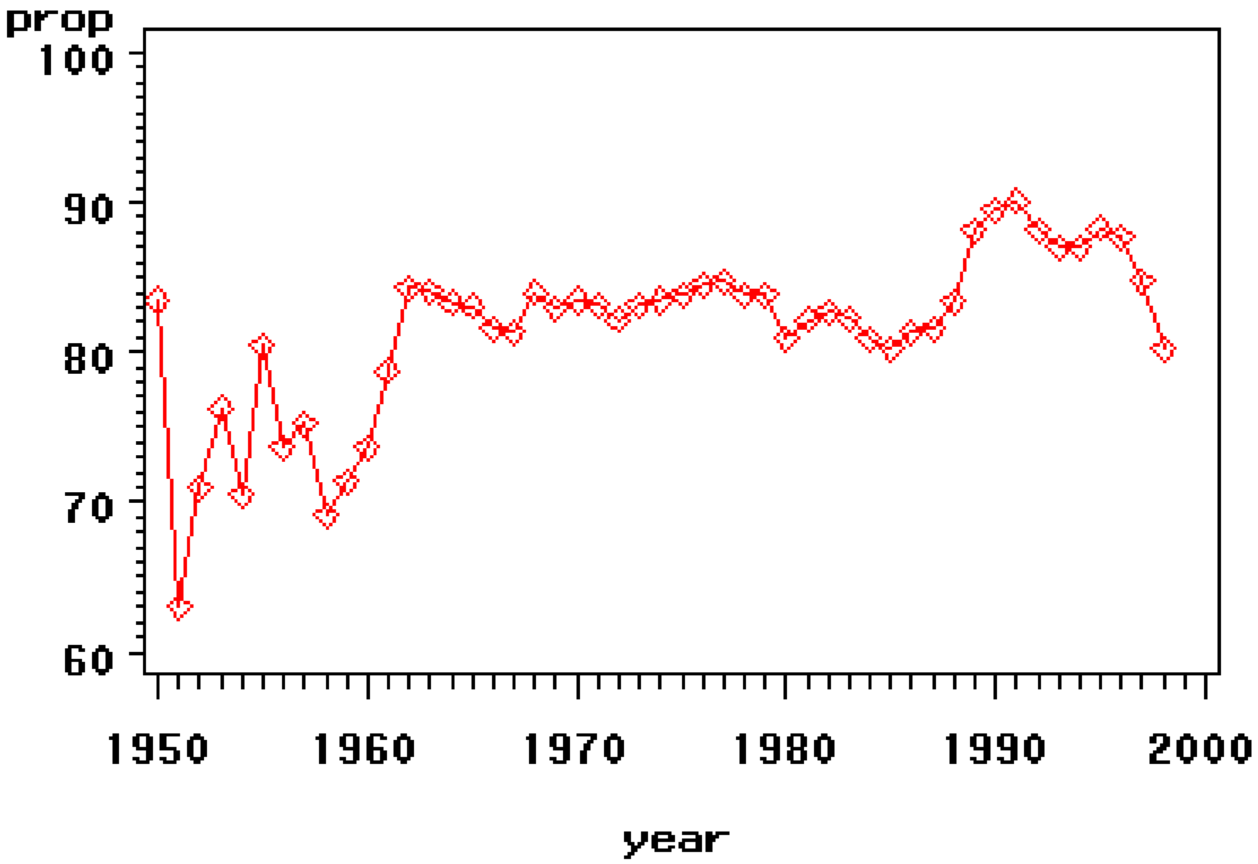
延迟	Q_{LB}统计量检验	
	Q_{LB} 统计量值	P值
延迟6期	2.36	0.8838
延迟12期	5.35	0.9454

由于P值显著大于显著性水平α，所以该序列不能拒绝纯随机的原假设。

例2.5

- 对1950年——1998年北京市城乡居民定期储蓄所占比例序列的平稳性与纯随机性进行检验

例2.5时序图



例2.5自相关图

```
                                                        Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0     30.725523        1.00000     |                    |********************|
  1     21.583411        0.70246     |              .     |**************      |
  2     18.293557        0.59539     |            .       |************        |
  3     14.684303        0.47792     |           .        |**********          |
  4     10.080193        0.32807     |          .         |*******  .          |
  5     10.931717        0.35579     |          .         |*******  .          |
  6      9.318240        0.30327     |         .          |******    .         |
  7      8.944975        0.29113     |         .          |******    .         |
  8      4.927541        0.16037     |         .          |***       .         |
  9      1.842114        0.05995     |         .          |*         .         |
 10     -1.151434        -.03747     |         .         *|          .         |
 11     -2.369343        -.07711     |         .        **|          .         |
 12     -1.130247        -.03679     |         .         *|          .         |

                                     "." marks two standard errors
```

例2.5白噪声检验结果

延迟阶数	LB统计量检验	
	LB检验统计量的值	P值
6	75.46	<0.0001
12	82.57	<0.0001

第三章

平稳时间序列分析

本章结构

- 方法性工具
- ARMA模型
- 平稳序列建模
- 序列预测

3.1 方法性工具

- 差分运算
- 延迟算子
- 线性差分方程

差分运算

- 一阶差分

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$

- p 阶差分

$$\nabla^p x_t = \nabla^{p-1} x_t - \nabla^{p-1} x_{t-1}$$

- k 步差分

$$\nabla_k = x_t - x_{t-k}$$

延迟算子

- 延迟算子类似于一个时间指针，当前序列值乘以一个延迟算子，就相当于把当前序列值的时间向过去拨了一个时刻
- 记B为延迟算子，有

$$x_{t-p} = B^p x_t, \forall p \geq 1$$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}, c$为任意常数
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$
- $(1-B)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n C_n^i B^i$， 其中 $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

用延迟算子表示差分运算

- p 阶差分

$$\nabla^p x_t = (1-B)^p x_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^p C_p^i x_{t-i}$$

- k 步差分

$$\nabla_k = x_t - x_{t-k} = (1-B^k)x_t$$

线性差分方程

- 线性差分方程

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \Lambda + a_p z_{t-p} = h(t)$$

- 齐次线性差分方程

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \Lambda + a_p z_{t-p} = 0$$

齐次线性差分方程的解

- 特征方程

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \Lambda + a_p = 0$$

- 特征方程的根称为特征根，记作$\lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_p$
- 齐次线性差分方程的通解
  - 不相等实数根场合

$$z_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \Lambda + c_p\lambda_p^t$$

  - 有相等实根场合

$$z_t = (c_1 + c_2 t + \Lambda + c_d t^{d-1})\lambda_1^t + c_{d+1}\lambda_{d+1}^t + \Lambda + c_p\lambda_p^t$$

  - 复根场合

$$z_t = r^t(c_1 e^{it\varpi} + c_2 e^{-it\varpi}) + c_3\lambda_3^t + \Lambda + c_p\lambda_p^t$$

非齐次线性差分方程的解

- 非齐次线性差分方程的特解
  - 使得非齐次线性差分方程成立的任意一个解z_t''

$$z_t'' + a_1 z_{t-1}'' + a_2 z_{t-2}'' + \Lambda + a_p z_{t-p}'' = h(t)$$

- 非齐次线性差分方程的通解
  - 齐次线性差分方程的通解和非齐次线性差分方程的特解之和 z_t

$$z_t = z_t' + z_t''$$

3.2 ARMA模型的性质

- AR模型（Auto Regression Model）
- MA模型（Moving Average Model）
- ARMA模型（Auto Regression Moving Average model）

AR模型的定义

- 具有如下结构的模型称为 p 阶自回归模型，简记为 $AR(p)$

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{cases}$$

- 特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $AR(p)$ 模型

AR(P)序列中心化变换

- 称$\{y_t\}$为$\{x_t\}$的中心化序列，令

$$\mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\Lambda-\phi_p}$$

$$y_t = x_t - \mu$$

自回归系数多项式

- 引进延迟算子，中心化$AR(p)$模型又可以简记为

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

- 自回归系数多项式

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \Lambda - \phi_p B^p$$

AR模型平稳性判别

- 判别原因
  - AR模型是常用的平稳序列的拟合模型之一，但并非所有的AR模型都是平稳的
- 判别方法
  - 单位根判别法
  - 平稳域判别法

例3.1:考察如下四个模型的平稳性

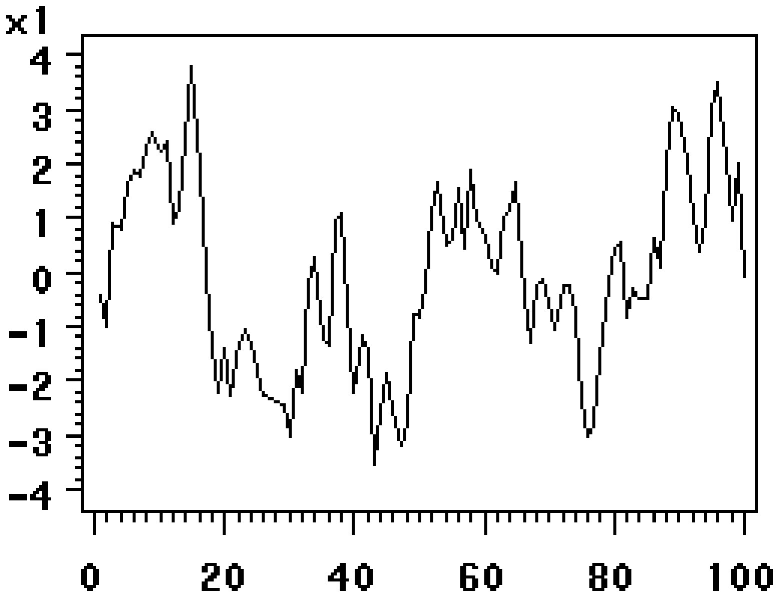
$$(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2)x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$$

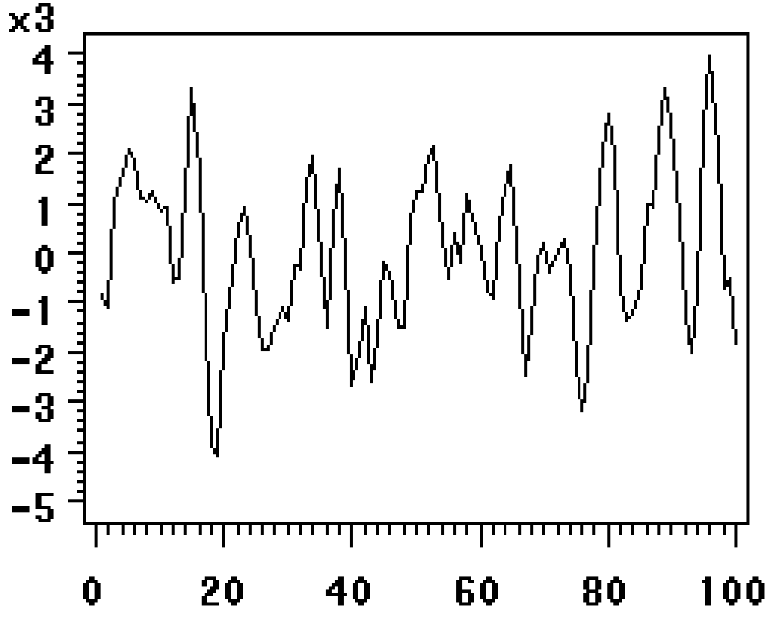
$$(3)x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(4)x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$$

例3.1平稳序列时序图

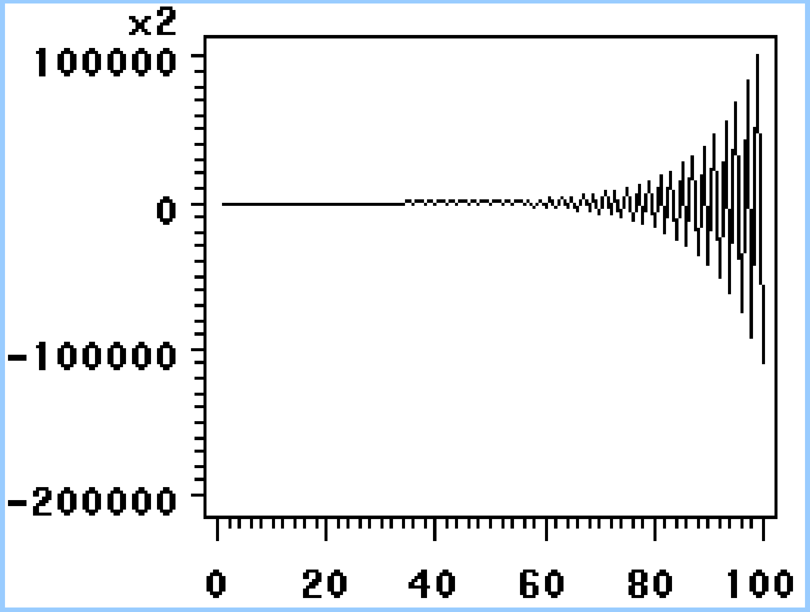


$$(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

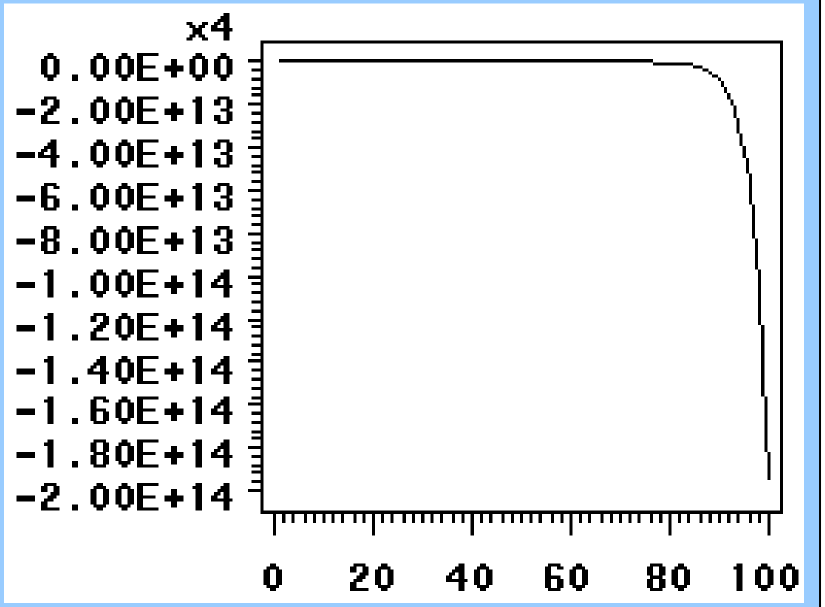


$$(3)x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

例3.1非平稳序列时序图



$$(2)x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$$



$$(4)x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$$

AR模型平稳性判别方法

- 特征根判别
  - AR(p)模型平稳的充要条件是它的p个特征根都在单位圆内
  - 根据特征根和自回归系数多项式的根成倒数的性质，等价判别条件是该模型的自回归系数多项式的根都在单位圆外
- 平稳域判别
  - 平稳域

$$\{\phi_1,\phi_2,\Lambda\ ,\phi_p \mid \text{单位根都在单位圆内}\}$$

AR(1)模型平稳条件

- 特征根

$$\lambda = \phi$$

- 平稳域

$$|\phi| \langle 1$$

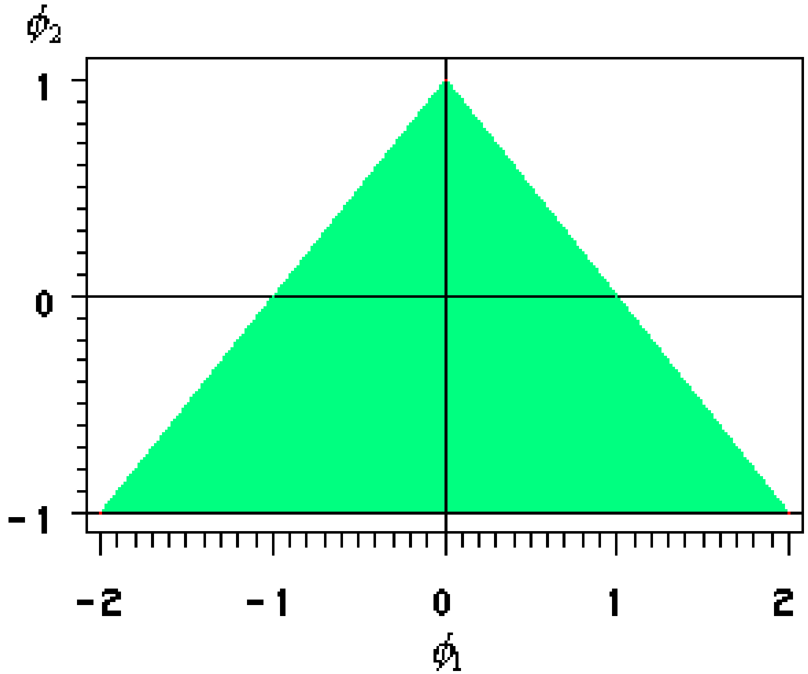
AR(2)模型平稳条件

- 特征根

$$\lambda_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

- 平稳域



$$\{\phi_1, \phi_2 \,\big|\, |\phi_2| < 1, \ \text{且} \ \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$$

例3.1平稳性判别

模型	特征根判别	平稳域判别	结论
(1)	$\lambda_1 = 0.8$	$\phi = 0.8$	平稳
(2)	$\lambda_1 = -1.1$	$\phi = -1.1$	非平稳
(3)	$\lambda_1 = \frac{1+i}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1-i}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 0.5, \phi_2 - \phi_1 = -1.5$	平稳
(4)	$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 1.5, \phi_2 - \phi_1 = -0.5$	非平稳

平稳AR模型的统计性质

- 均值
- 方差
- 协方差
- 自相关系数
- 偏自相关系数

均值

- 如果AR(p)模型满足平稳性条件，则有

$$Ex_t = E(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t)$$

- 根据平稳序列均值为常数，且$\{\varepsilon_t\}$为白噪声序列，有

$$Ex_t = \mu, E(\varepsilon_t) = 0 \quad ,\forall t \in T$$

- 推导出

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \Lambda - \phi_p}$$

Green函数定义

- AR模型的传递形式

$$x_t = \frac{\varepsilon_t}{\Phi(B)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1-\lambda_i B}\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\infty} k_i(\lambda_i B)^j \varepsilon_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} k_i \lambda_i^j \varepsilon_{t-j} \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}$$

- 其中系数 $\{G_j, j=1,2,\Lambda\}$ 称为Green函数

Green函数递推公式

- 原理

$$\begin{cases} \Phi(B)x_t = \varepsilon_t \\ x_t = G(B)\varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \Phi(B)G(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t$$

- 方法
  - 待定系数法
- 递推公式

$$\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_j = \sum_{k=1}^{j} \phi_k' G_{j-k}, \quad j = 1,2,\Lambda \end{cases} ,其中\phi_k' = \begin{cases} \phi_k, k \le p \\ 0, k > p \end{cases}$$

方差

- 平稳AR模型的传递形式

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}$$

- 两边求方差得

$$Var(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 \sigma_\varepsilon^2 \text{ , } G_j\text{为}Green\text{函数}$$

例3.2:求平稳AR(1)模型的方差

- 平稳AR(1)模型的传递形式为

$$x_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B} = \sum_{i=0}^{\infty} (\phi_1 B)^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{\ i} \varepsilon_{t-i}$$

- Green函数为

$$G_j = \phi_1^{\ j}, j = 0,1,\Lambda$$

- 平稳AR(1)模型的方差

$$Var(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 Var(\varepsilon_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{\ 2j} \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$$

协方差函数

- 在平稳AR(p)模型两边同乘 $x_{t-k}, \forall k \geq 1$，再求期望

$$E(x_t x_{t-k}) = \phi_1 E(x_{t-1} x_{t-k}) + \Lambda + \phi_p E(x_{t-p} x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k})$$

- 根据

$$E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0 \qquad , \forall k \geq 1$$

- 得协方差函数的递推公式

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \Lambda + \phi_p \gamma_{k-p}$$

例3.3:求平稳AR(1)模型的协方差

- 递推公式

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} = \phi_1^k \gamma_0$$

- 平稳AR(1)模型的方差为

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$$

- 协方差函数的递推公式为

$$\gamma_k = \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \quad ,\forall k \geq 1$$

例3.4:求平稳AR(2)模型的协方差

- 平稳AR(2)模型的协方差函数递推公式为

$$
\begin{cases}
\gamma_0 = \dfrac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}\sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_1 = \dfrac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} \\
\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}, \quad k \ge 2
\end{cases}
$$

自相关系数

- 自相关系数的定义

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- 平稳AR(P)模型的自相关系数递推公式

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$$

常用AR模型自相关系数递推公式

- AR(1)模型

$$\rho_k = \phi_1^k, k \geq 0$$

- AR(2)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} & k \geq 2 \end{cases}$$

AR模型自相关系数的性质

- 拖尾性

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lambda_i^k \quad c_1,c_2,\Lambda\ ,c_p\text{不能恒等于零}$$

- 呈复指数衰减

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lambda_i^k \ \rightarrow 0$$

例3.5:考察如下AR模型的自相关图

$$(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

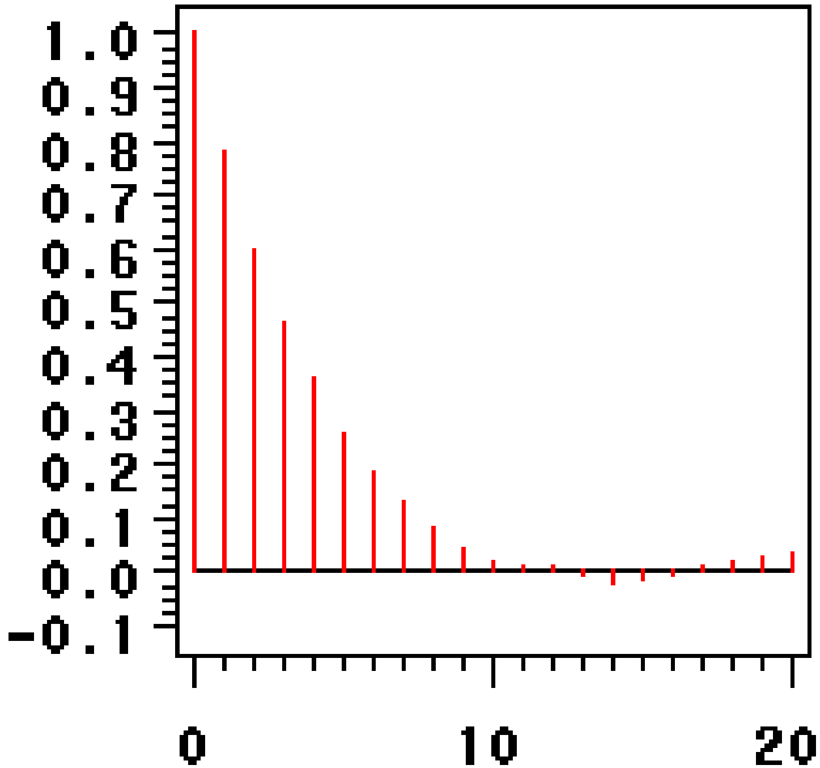
$$(2)x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3)x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

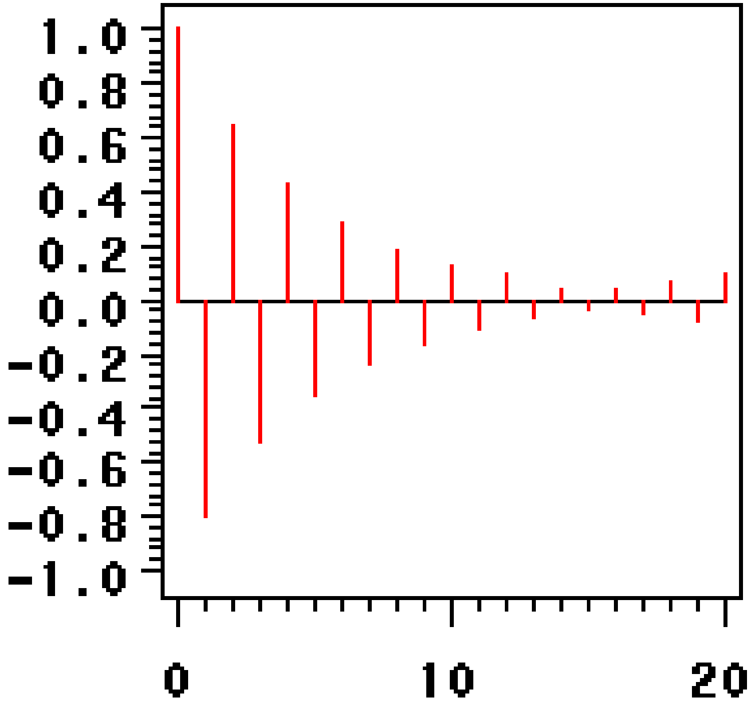
$$(4)x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

例3.5—— $(1) x_t = 0.8 x_{t-1} + \varepsilon_t$

- 自相关系数按复指数单调收敛到零

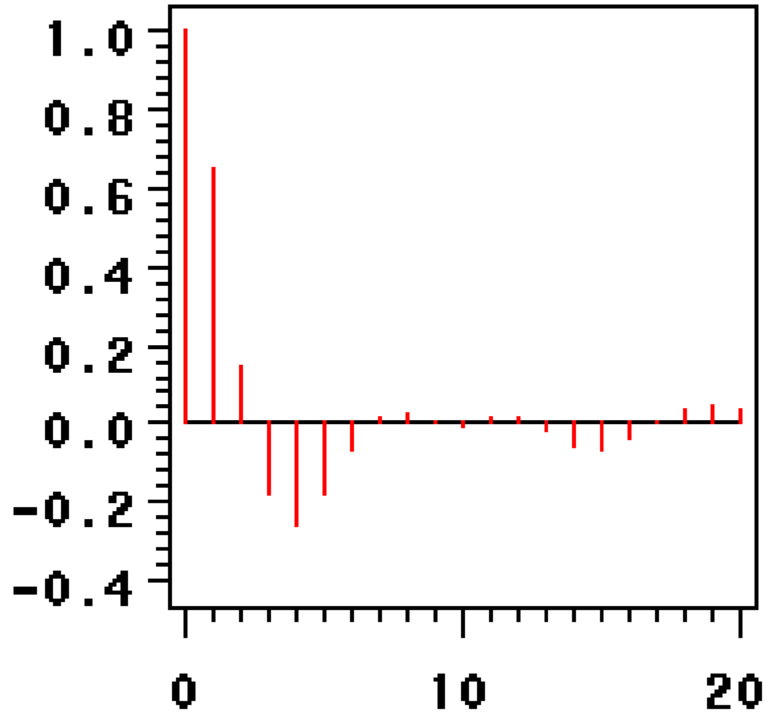


例3.5:—— $(2) x_t = -0.8 x_{t-1} + \varepsilon_t$



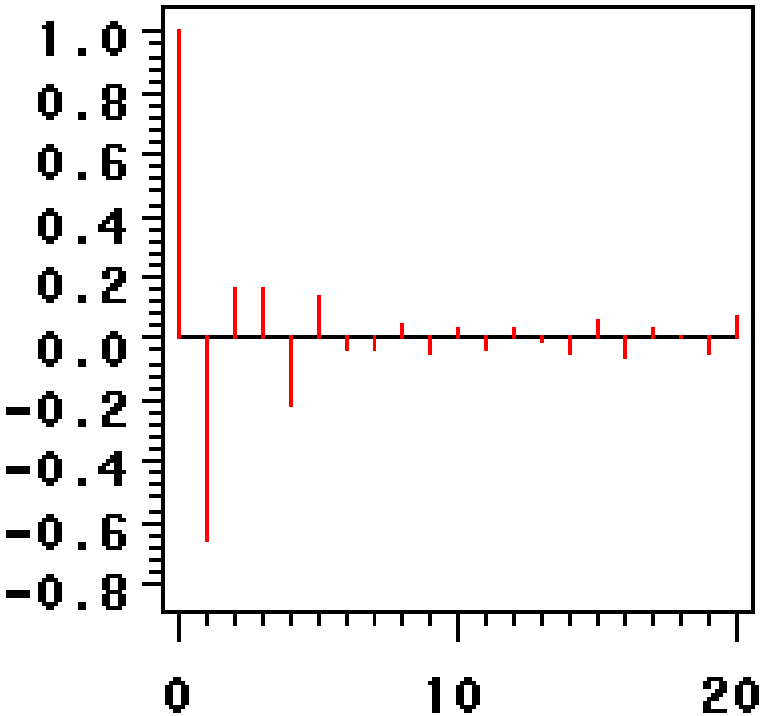
例3.5:——(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

- 自相关系数呈现出“伪周期”性



例3.5:— $(4)x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

- 自相关系数不规则衰减



偏自相关系数

- 定义

对于平稳AR(p)序列，所谓滞后k偏自相关系数就是指在给定中间k-1个随机变量 $x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-k+1}$ 的条件下，或者说，在剔除了中间k-1个随机变量的干扰之后，x_{t-k} 对 x_t 影响的相关度量。用数学语言描述就是

$$\rho_{x_t, x_{t-k} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]}$$

偏自相关系数的计算

- 滞后k偏自相关系数实际上就等于k阶自回归模型第个k回归系数的值。

$$
\begin{cases}
\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \Lambda + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\
\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \Lambda + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\
\Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\
\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \Lambda + \phi_{kk}\rho_0
\end{cases}
$$

$$
\phi_{kk} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{kt})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]}
$$

偏自相关系数的截尾性

- AR(p)模型偏自相关系数P阶截尾

$$\phi_{kk} = 0 \quad , k > p$$

例3.5续:考察如下AR模型的偏自相关图

$$(1) x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2) x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3) x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

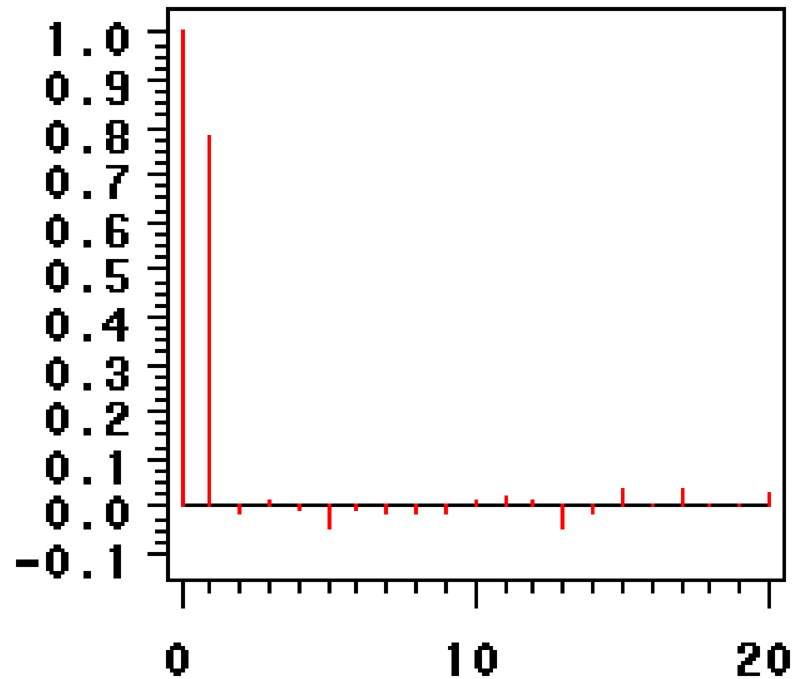
$$(4) x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

例3.5—— $(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

- 理论偏自相关系数

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.8 & ,k = 1 \\ 0 & ,k \geq 2 \end{cases}$$

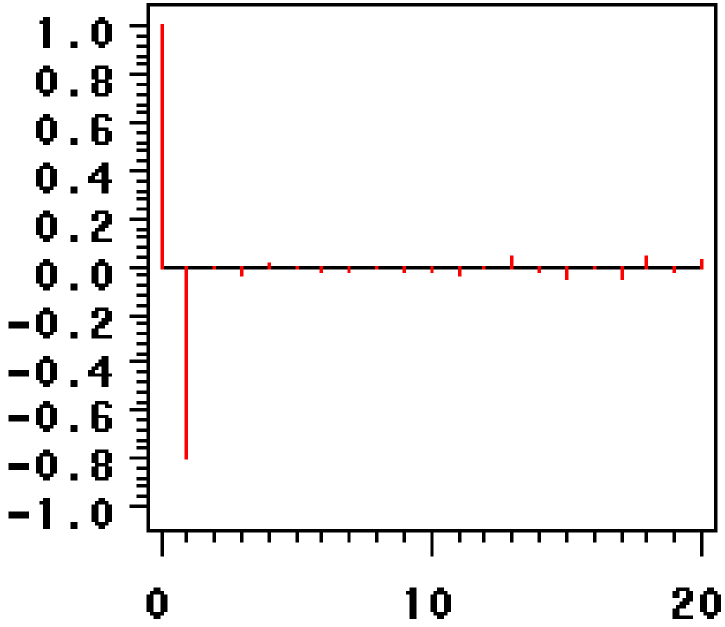
- 样本偏自相关图



例3.5:—— $(2)x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

- 理论偏自相关系数
- 样本偏自相关图

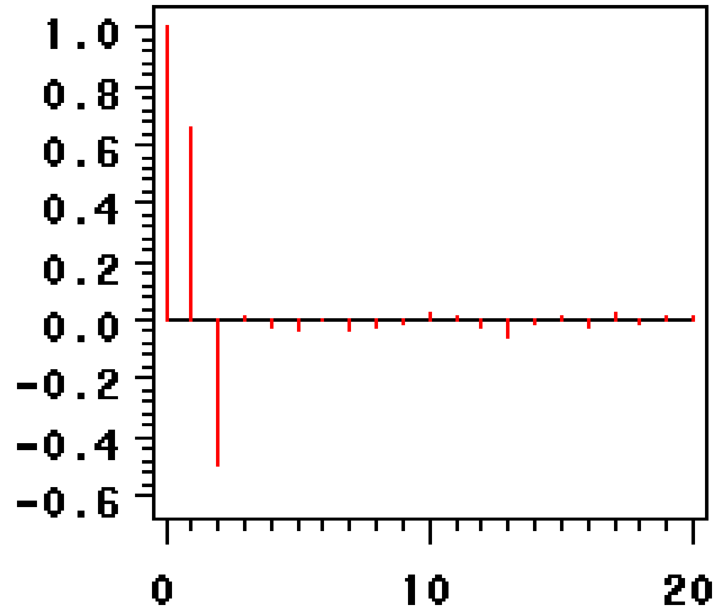
$$\phi_{kk} = \begin{cases} -0.8 & ,k = 1 \\ 0 & ,k \geq 2 \end{cases}$$



例3.5:——(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

- 理论偏自相关系数
- 样本偏自相关图

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} & ,k=1 \\ -0.5 & ,k=2 \\ 0 & ,k\ge 3 \end{cases}$$

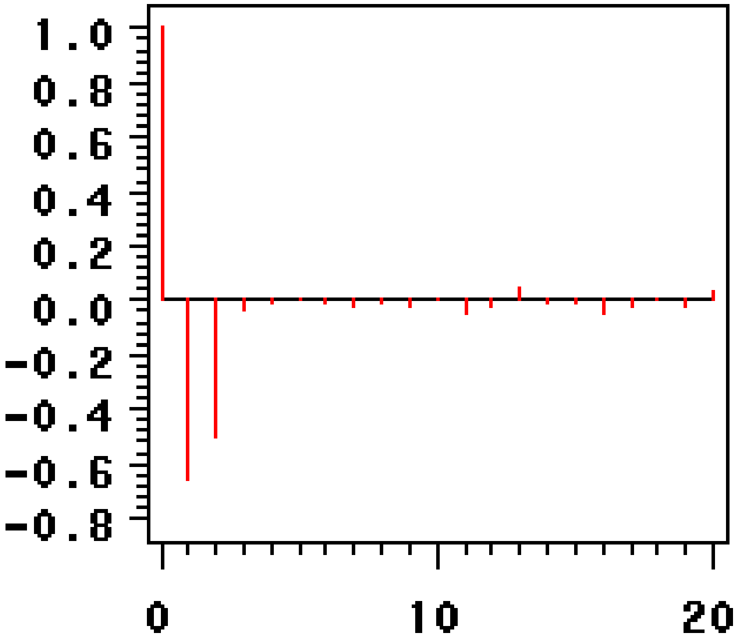


例3.5:— (4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

- 理论偏自相关系数

$$\phi_{kk} = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} & ,k=1 \\ -0.5 & ,k=2 \\ 0 & ,k \ge 3 \end{cases}$$

- 样本偏自相关系数图



MA模型的定义

- 具有如下结构的模型称为 q 阶自回归模型，简记为$MA(q)$

$$\begin{cases} x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \end{cases}$$

- 特别当 $\mu = 0$ 时，称为中心化$MA(q)$模型

移动平均系数多项式

- 引进延迟算子，中心化$MA(q)$模型又可以简记为

$$x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

- q阶移动平均系数多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \Lambda - \theta_q B^q$$

MA模型的统计性质

- 常数均值

$$Ex_t = E（\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \Lambda - \theta_q\varepsilon_{t-q}）$$

$$= \mu$$

- 常数方差

$$Var(x_t) = Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \Lambda - \theta_q\varepsilon_{t-q})$$

$$= (1 + \theta_1^2 + \Lambda + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$$

MA模型的统计性质

- 自协方差函数P阶截尾

$$
\gamma_k=\begin{cases}(1+\theta_1^2+\Lambda+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2, & k=0\\ (-\theta_k+\sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i})\sigma_\varepsilon^2, & 1\le k\le q\\ 0, & k>q\end{cases}
$$

- 自相关系数P阶截尾

$$
\rho_k=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-\theta_k+\sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i}}{1+\theta_1^2+\Lambda+\theta_q^2}, & 1\le k\le q\\ 0, & k>q\end{cases}
$$

常用MA模型的自相关系数

- MA(1)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & ,k=0 \\ \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & ,k=1 \\ 0 & ,k\geq 2 \end{cases}$$

- MA(2)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & ,k=0 \\ \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ,k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ,k=2 \\ 0 & ,k\geq 3 \end{cases}$$

MA模型的统计性质

- 偏自相关系数拖尾

$$\phi_{kk} = (-\theta_1\varepsilon_{t-1} - \Lambda - \theta_q\varepsilon_{t-q})(-\theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \Lambda - \theta_q\varepsilon_{t-k-q+1})$$

$\theta_1, \Lambda\ \theta_q$不恒为零$\Rightarrow \phi_{kk}$不会在有限阶之后恒为零

例3.6:考察如下MA模型的相关性质

$$(1)x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

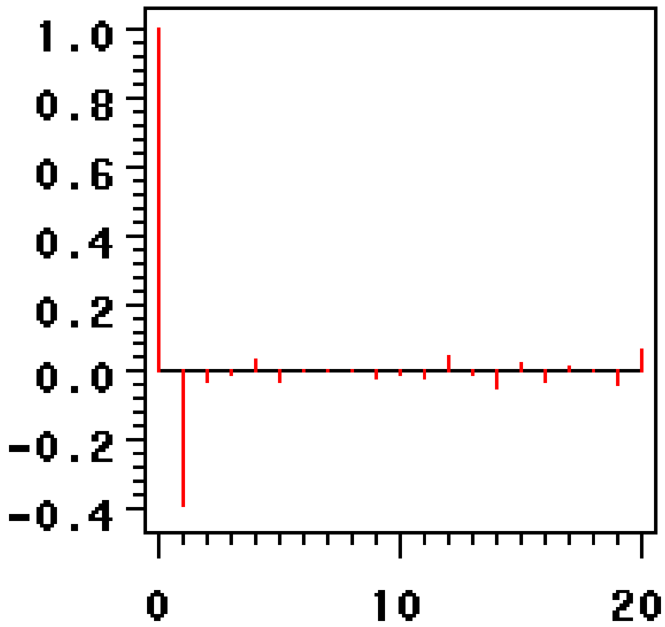
$$(2)x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

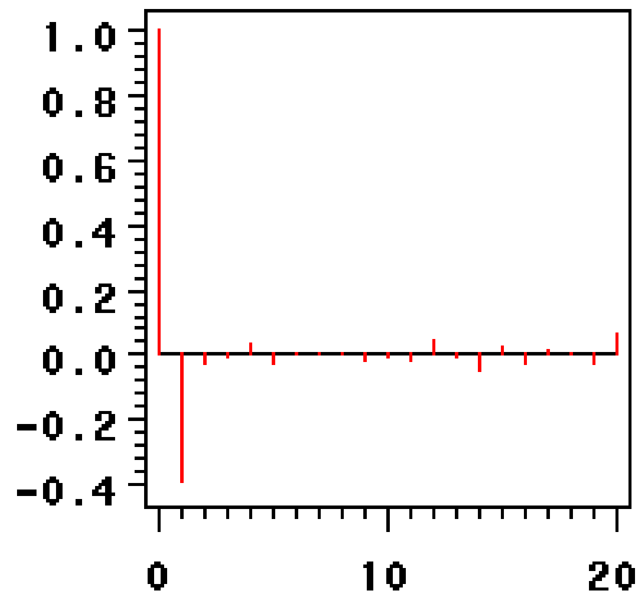
$$(3)x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

$$(4)x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

MA模型的自相关系数截尾

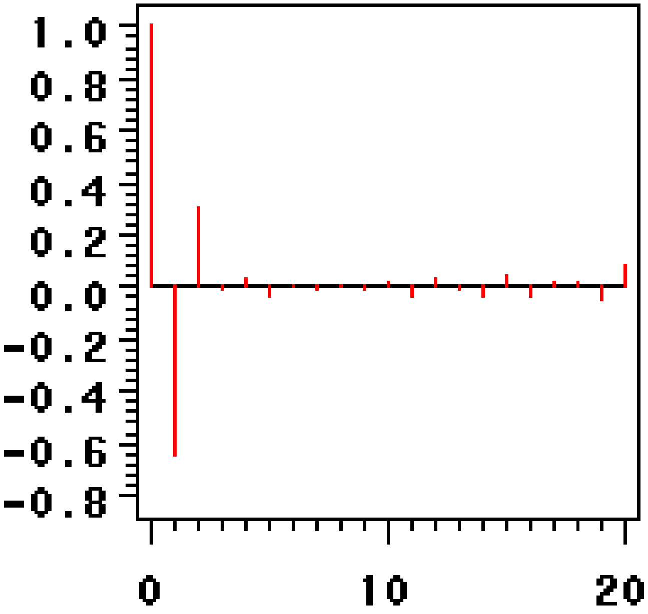
- （1）$x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$
- （2）$x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

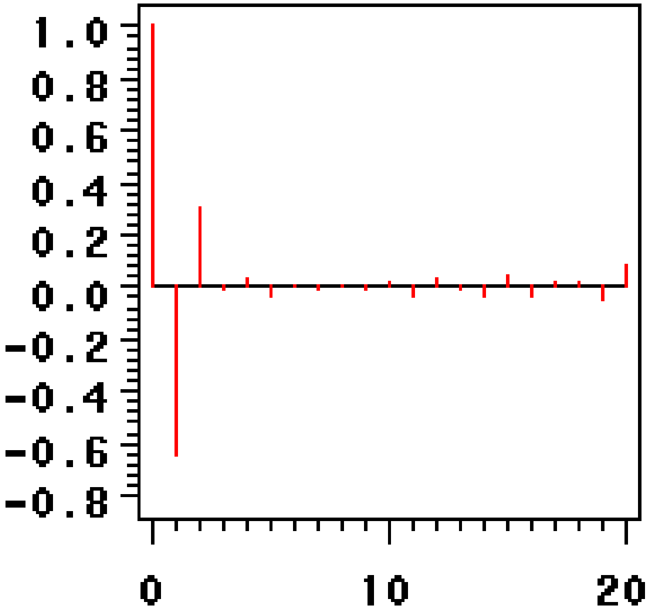




MA模型的自相关系数截尾

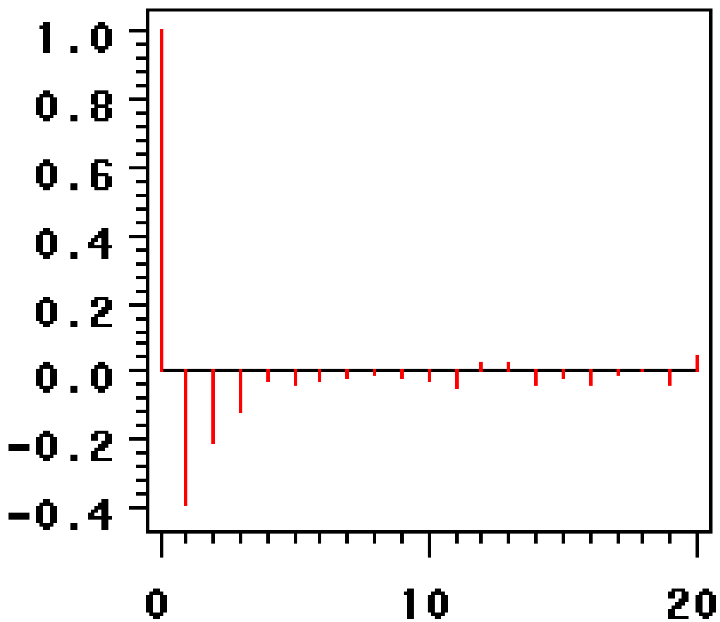
- (3) $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$
- (4) $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

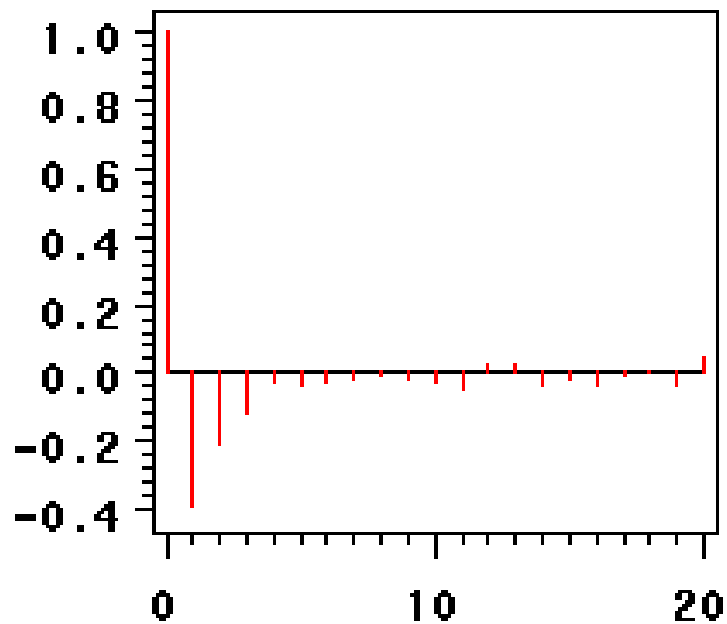




MA模型的偏自相关系数拖尾

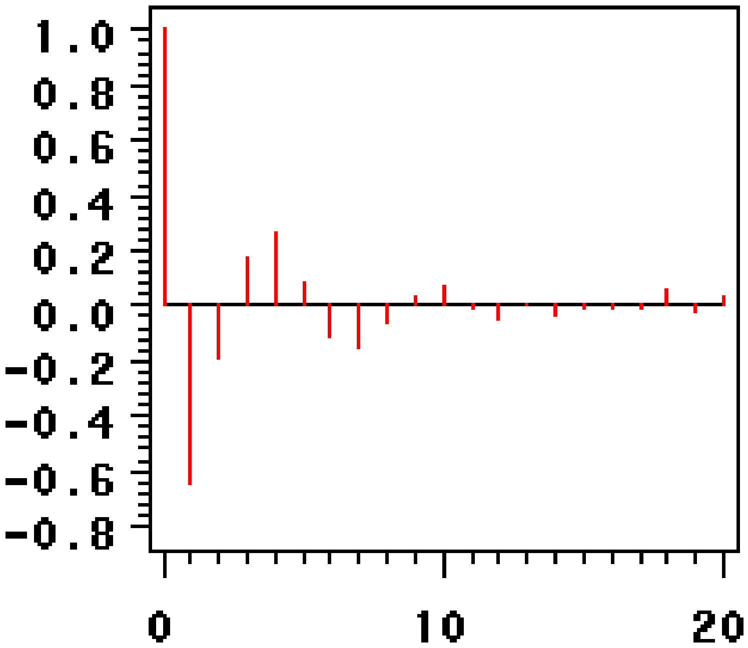
- （1） $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$
- （2） $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

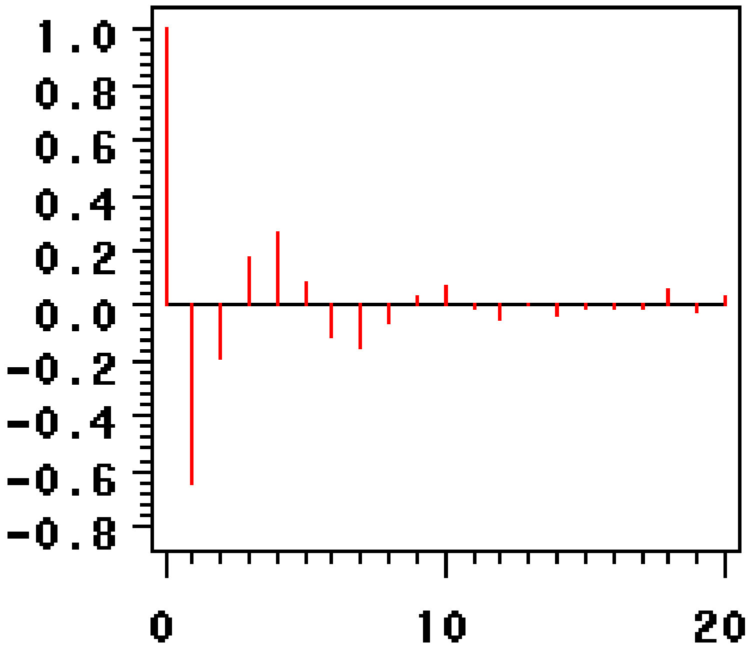




MA模型的偏自相关系数拖尾

- (3) $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$
- (4) $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$





MA模型的可逆性

- MA模型自相关系数的不唯一性
  - 例3.6中不同的MA模型具有完全相同的自相关系数和偏自相关系数

$$(1)x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} \quad \leftrightarrow \quad (2)x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$(3)x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2} \leftrightarrow (4)x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

可逆的定义

- 可逆MA模型定义
  - 若一个MA模型能够表示称为收敛的AR模型形式，那么该MA模型称为可逆MA模型
- 可逆概念的重要性
  - 一个自相关系数列唯一对应一个可逆MA模型。

可逆MA(1)模型

- $x_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

$$\frac{x_t}{1-\theta B} = \varepsilon_t$$

- $x_t = \varepsilon_t - \dfrac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$

$$\frac{x_t}{1-\frac{1}{\theta}B} = \varepsilon_t$$

$$\rho = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$|\theta| < 1$, 可逆

$|\theta| > 1$, 可逆

MA模型的可逆条件

- MA(q)模型的可逆条件是：
  - MA(q)模型的特征根都在单位圆内

$$|\lambda_i| < 1$$

  - 等价条件是移动平滑系数多项式的根都在单位圆外

$$\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| > 1$$

逆函数的递推公式

- 原理

$$\begin{cases} x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = I(B)x_t \end{cases} \Rightarrow \Theta(B)I(B)x_t = x_t$$

- 方法
  - 待定系数法
- 递推公式

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_j = \sum_{k=1}^{j} \theta'_k I_{j-k}, \quad j = 1,2,\Lambda \end{cases}, \text{其中}\ \theta'_k = \begin{cases} \theta_k, k \le q \\ 0, k > q \end{cases}$$

例3.6续:考察如下MA模型的可逆性

$$(1)x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

$$(2)x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$(3)x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

$$(4)x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

(1)—(2)

- $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} \Rightarrow |\theta| = 2 > 1 \Rightarrow$ 不可逆
- $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} \Rightarrow |\theta| = 0.5 < 1 \Rightarrow$ 可逆
- 逆函数

$$I_k = \begin{cases} 1 \\ 0.5^k, k \geq 1 \end{cases}$$

- 逆转形式

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k x_{t-k}$$

(3)—(4)

- $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \theta_2 < 1, \theta_2 \pm \theta_1 < 1 \Rightarrow$ 可逆
- $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{25}{16} > 1 \Rightarrow$ 不可逆
- 逆函数

$$I_k = \begin{cases} (-1)^n \theta_1^k, k = 3n \text{ 或 } 3n+1 \\ 0, k = 3n+2 \end{cases}, n = 0,1,\Lambda$$

- 逆转形式

$$\varepsilon_t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n} x_{t-3n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n+1} x_{t-3n-1}$$

ARMA模型的定义

- 具有如下结构的模型称为自回归移动平均模型，简记为 $ARMA(p,q)$

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Lambda - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \phi_p \neq 0，\quad \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0，\quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{cases}$$

- 特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $ARMA(p,q)$ 模型

系数多项式

- 引进延迟算子，中心化 $ARMA(p,q)$模型又可以简记为

$$\Phi(B)x_t=\Theta(B)\varepsilon_t$$

- p阶自回归系数多项式

$$\Phi(B)=1-\phi_1B-\phi_2B^2-\Lambda-\phi_pB^p$$

- q阶移动平均系数多项式

$$\Theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2-\Lambda-\theta_qB^q$$

平稳条件与可逆条件

- ARMA(p,q)模型的平稳条件
  - P阶自回归系数多项式 $\Phi(B)=0$ 的根都在单位圆外
  - 即ARMA(p,q)模型的平稳性完全由其自回归部分的平稳性决定
- ARMA(p,q)模型的可逆条件
  - q阶移动平均系数多项式$\Theta(B)=0$的根都在单位圆外
  - 即ARMA(p,q)模型的可逆性完全由其移动平滑部分的可逆性决定

传递形式与逆转形式

- 传递形式

$$x_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}$$

$$\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_k = \sum_{j=1}^{k} \phi_j' G_{k-j} - \theta_j' \quad , \quad k \geq 1 \end{cases}$$

- 逆转形式

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)x_t$$

$$= x_t + \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{t-j}$$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_k = \sum_{j=1}^{k} \theta_j' I_{k-j} - \phi_j' \quad , \quad k \geq 1 \end{cases}$$

ARMA(p,q)模型的统计性质

- 均值

$$Ex_t = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\Lambda-\phi_p}$$

- 协方差

$$\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}$$

- 自相关系数

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} G_j G_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} G_j^2}$$

ARMA模型的相关性

- 自相关系数拖尾
- 偏自相关系数拖尾

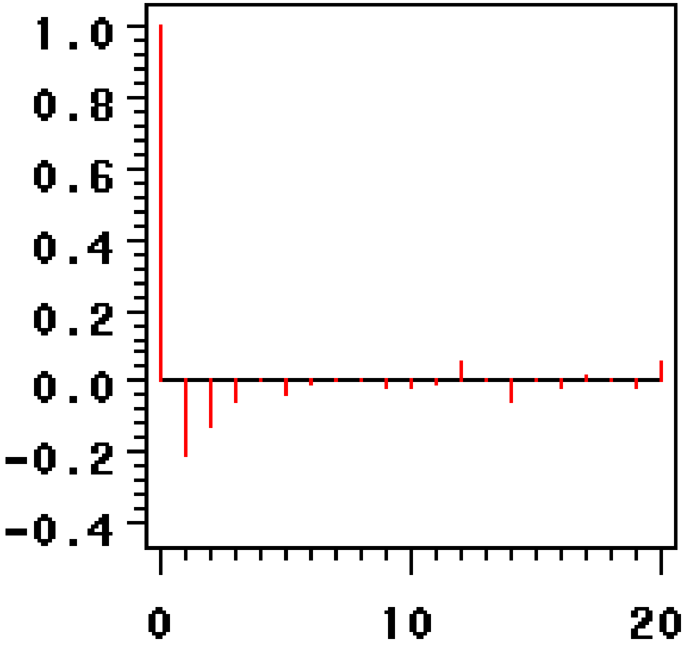
例3.7:考察ARMA模型的相关性

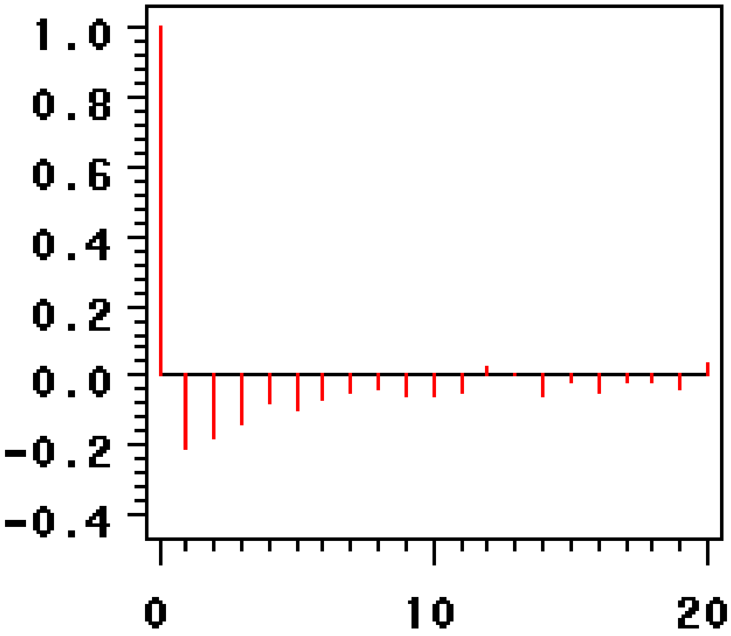
- 拟合模型ARMA(1, 1)：$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_t$

  并直观地考察该模型自相关系数和偏自相关系数的性质。

自相关系数和偏自相关系数拖尾性

- 样本自相关图
- 样本偏自相关图





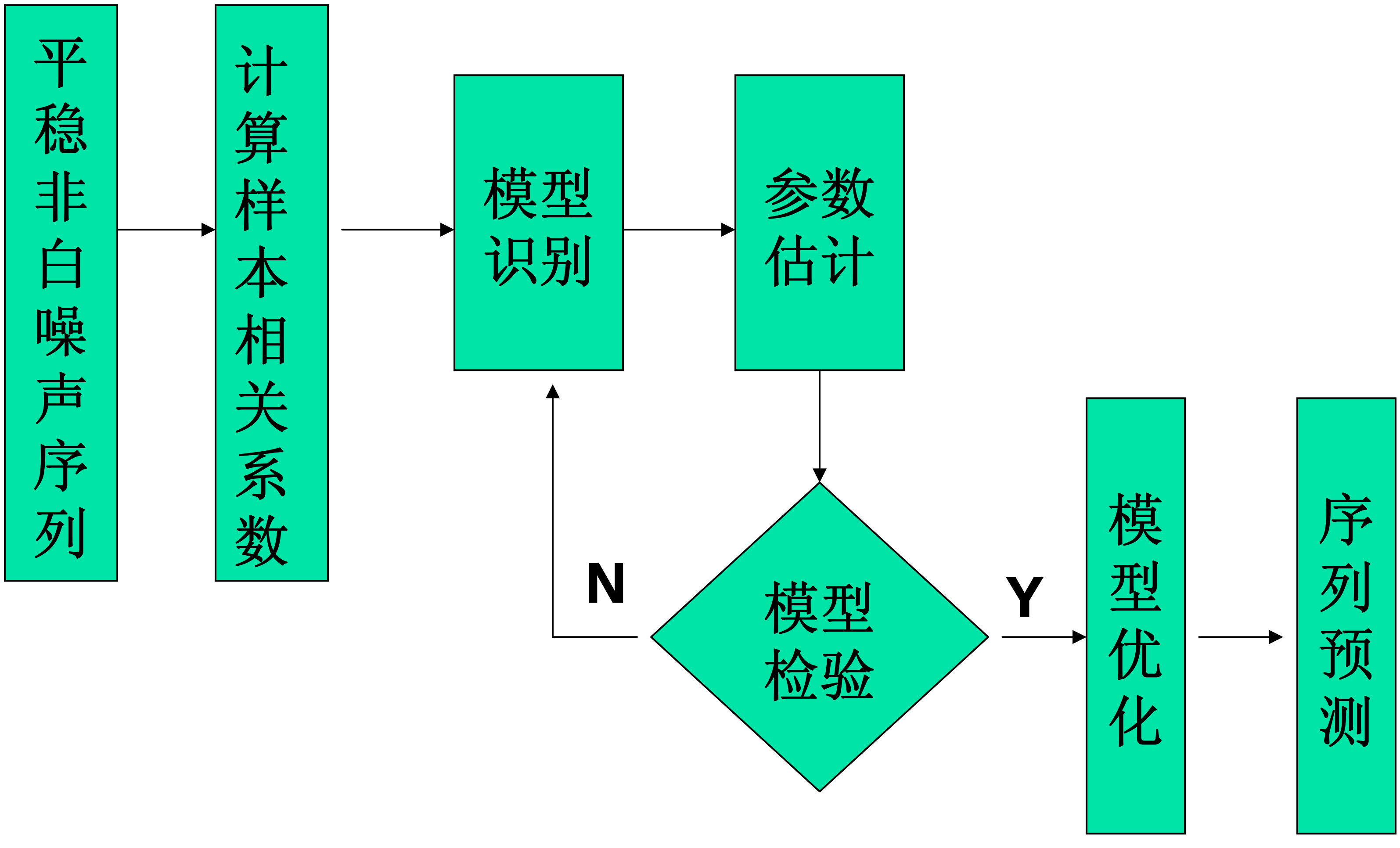
ARMA模型相关性特征

模型	自相关系数	偏自相关系数
AR(P)	拖尾	P阶截尾
MA(q)	q阶截尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾

3.3平稳序列建模

- 建模步骤
- 模型识别
- 参数估计
- 模型检验
- 模型优化
- 序列预测

建模步骤



计算样本相关系数

- 样本自相关系数

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}$$

- 样本偏自相关系数

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{D}_k}{\hat{D}}$$

模型识别

- 基本原则

$\hat{\rho}_k$	$\hat{\phi}_{kk}$	选择模型
拖尾	P阶截尾	AR(P)
q阶截尾	拖尾	MA(q)
拖尾	拖尾	ARMA(p,q)

模型定阶的困难

- 因为由于样本的随机性，样本的相关系数不会呈现出理论截尾的完美情况，本应截尾的 $\hat{\rho}_k$ 或$\hat{\phi}_{kk}$ 仍会呈现出小值振荡的情况
- 由于平稳时间序列通常都具有短期相关性，随着延迟阶数 $k \to \infty$ ，$\hat{\rho}_k$ 与 $\hat{\phi}_{kk}$ 都会衰减至零值附近作小值波动

？ 当 $\hat{\rho}_k$ 或$\hat{\phi}_{kk}$ 在延迟若干阶之后衰减为小值波动时，什么情况下该看作为相关系数截尾，什么情况下该看作为相关系数在延迟若干阶之后正常衰减到零值附近作拖尾波动呢？

样本相关系数的近似分布

- Barlett

$$\hat{\rho}_k \sim N(0,\frac{1}{n}) \ ,n \to \infty$$

- Quenouille

$$\hat{\phi}_{kk} \sim N(0,\frac{1}{n}) \ ,n \to \infty$$

模型定阶经验方法

- 95％的置信区间

$$\Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{n}} \le \hat{\rho}_k \le \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

$$\Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{n}} \le \hat{\phi}_{kk} \le \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

- 模型定阶的经验方法
  - 如果样本(偏)自相关系数在最初的d阶明显大于两倍标准差范围，而后几乎95％的自相关系数都落在2倍标准差的范围以内，而且通常由非零自相关系数衰减为小值波动的过程非常突然。这时，通常视为(偏)自相关系数截尾。截尾阶数为d。

例2.5续

- 选择合适的模型ARMA拟合1950年——1998年北京市城乡居民定期储蓄比例序列。

序列自相关图

```
                                   Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   0     30.725523        1.00000    |                    |********************|
   1     21.583411        0.70246    |              .     |**************      |
   2     18.293557        0.59539    |            .       |************        |
   3     14.684303        0.47792    |           .        |**********          |
   4     10.080193        0.32807    |          .         |*******  .          |
   5     10.931717        0.35579    |          .         |*******  .          |
   6      9.318240        0.30327    |         .          |******    .         |
   7      8.944975        0.29113    |         .          |******    .         |
   8      4.927541        0.16037    |         .          |***       .         |
   9      1.842114        0.05995    |         .          |*         .         |
  10     -1.151434        -.03747    |         .         *|          .         |
  11     -2.369343        -.07711    |         .        **|          .         |
  12     -1.130247        -.03679    |         .         *|          .         |

                           "." marks two standard errors
```

序列偏自相关图

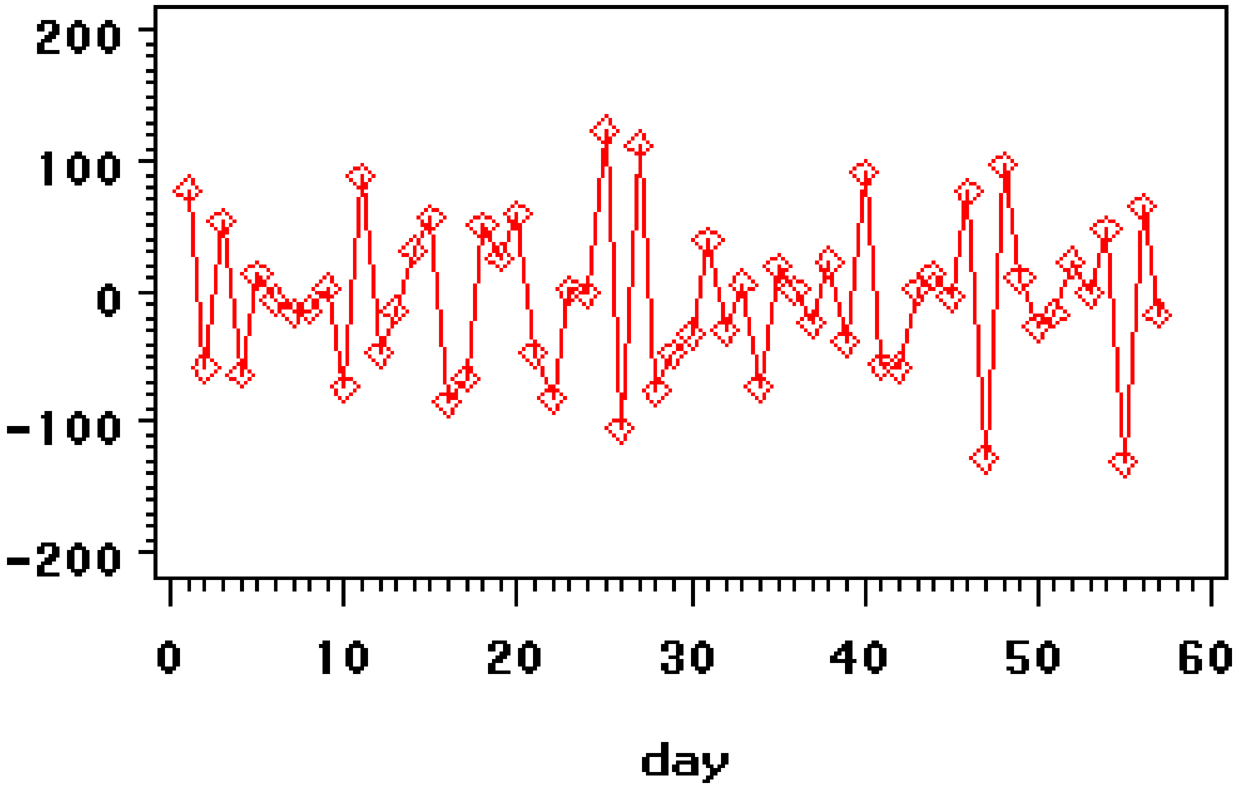
```
                         Partial Autocorrelations

Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.70246    |              .     |**************      |
  2        0.20124    |              .     |**** .              |
  3        0.00512    |              .     |     .              |
  4       -0.12611    |              .  ***|     .              |
  5        0.22698    |              .     |*****.              |
  6        0.01190    |              .     |     .              |
  7        0.03000    |              .     |*    .              |
  8       -0.26241    |              .*****|     .              |
  9       -0.06206    |              .    *|     .              |
 10       -0.10468    |              .   **|     .              |
 11        0.07879    |              .     |**   .              |
 12        0.05519    |              .     |*    .              |
```

拟合模型识别

- 自相关图显示延迟3阶之后，自相关系数全部衰减到2倍标准差范围内波动，这表明序列明显地短期相关。但序列由显著非零的相关系数衰减为小值波动的过程相当连续，相当缓慢，该自相关系数可视为不截尾
- 偏自相关图显示除了延迟1阶的偏自相关系数显著大于2倍标准差之外，其它的偏自相关系数都在2倍标准差范围内作小值随机波动，而且由非零相关系数衰减为小值波动的过程非常突然，所以该偏自相关系数可视为一阶截尾
- 所以可以考虑拟合模型为AR(1)

例3.8

美国科罗拉多州某一加油站连续57天的OVERSHORT序列



序列自相关图

```
                                              Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0      3415.718        1.00000    |                    |********************|
  1     -1719.956        -.50354    |          **********|    .               |
  2       416.701        0.12200    |             .      |**    .             |
  3      -723.256        -.21174    |             .  ****|      .             |
  4       273.522        0.08008    |             .      |**    .             |
  5     66.440027        0.01945    |             .      |      .             |
  6       396.723        0.11615    |             .      |**    .             |
  7      -742.192        -.21729    |             .  ****|      .             |
  8       861.426        0.25219    |             .      |***** .             |
  9      -655.675        -.19196    |             .  ****|      .             |
 10       192.042        0.05622    |             .      |*     .             |
 11      -357.536        -.10467    |             .    **|      .             |
 12     42.072379        0.01232    |             .      |      .             |
 13       747.289        0.21878    |             .      |****  .             |
 14      -203.674        -.05963    |            .      *|       .            |

                                   "." marks two standard errors
```

序列偏自相关图

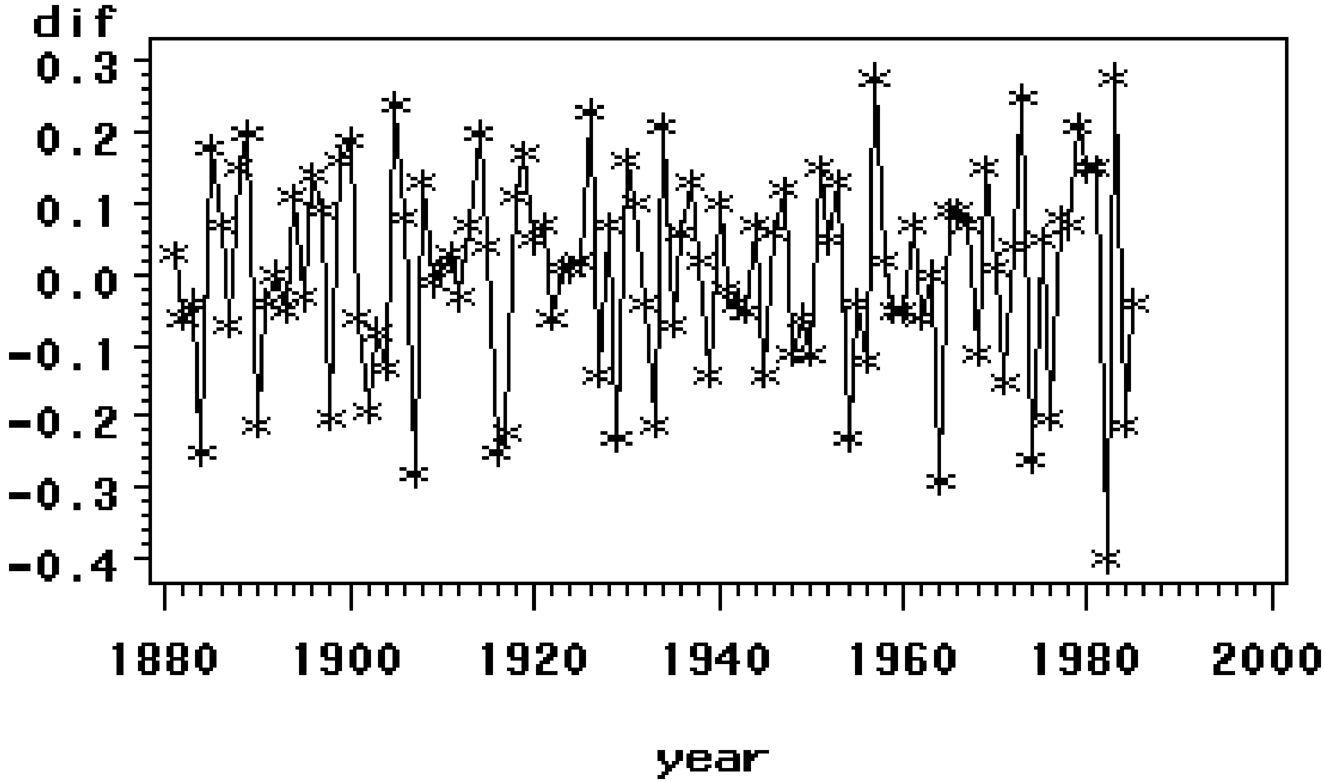
```
                        Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation   -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1       -0.50354    |          **********|    .                |
   2       -0.17625    |               .****|    .                |
   3       -0.31556    |              ******|    .                |
   4       -0.26367    |               *****|    .                |
   5       -0.15282    |               . ***|    .                |
   6        0.04200    |               .    |*   .                |
   7       -0.19396    |               .****|    .                |
   8        0.11850    |               .    |**  .                |
   9        0.05068    |               .    |*   .                |
  10       -0.06969    |               .   *|    .                |
  11       -0.15294    |               . ***|    .                |
  12       -0.24858    |               *****|    .                |
  13        0.09786    |               .    |**  .                |
  14        0.10270    |               .    |**  .                |
```

拟合模型识别

- 自相关图显示除了延迟1阶的自相关系数在2倍标准差范围之外，其它阶数的自相关系数都在2倍标准差范围内波动。根据这个特点可以判断该序列具有短期相关性，进一步确定序列平稳。同时，可以认为该序列自相关系数1阶截尾
- 偏自相关系数显示出典型非截尾的性质。
- 综合该序列自相关系数和偏自相关系数的性质，为拟合模型定阶为MA(1)

例3.9

- 1880-1985全球气表平均温度改变值差分序列



序列自相关图

```
                                          Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0      0.020061        1.00000    |                    |********************|
  1    -0.0050732        -.25289    |               *****|   .                |
  2    -0.0022778        -.11354    |                . **|   .                |
  3    -0.0031786        -.15845    |                .***|   .                |
  4    0.00089372        0.04455    |                .   |*  .                |
  5    -0.0019930        -.09935    |                . **|   .                |
  6     0.0043177        0.21523    |                .   |****                |
  7    -0.0040567        -.20222    |                ****|   .                |
  8     0.0021045        0.10490    |               .    |**  .               |
  9    -0.0021195        -.10566    |               .  **|    .               |
 10     0.0020664        0.10301    |               .    |**  .               |
 11    -0.0002314        -.01154    |               .    |    .               |
 12    0.00086729        0.04323    |               .    |*   .               |

                                 "." marks two standard errors
```

序列偏自相关图

```
                         Partial Autocorrelations

Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1       -0.25289     |               *****|   .                |
  2       -0.18963     |                ****|   .                |
  3       -0.26659     |               *****|   .                |
  4       -0.13025     |                .***|   .                |
  5       -0.24134     |               *****|   .                |
  6        0.05558     |                .   |*  .                |
  7       -0.23049     |               *****|   .                |
  8       -0.03122     |                .  *|   .                |
  9       -0.15970     |                .***|   .                |
 10       -0.04892     |                .  *|   .                |
 11       -0.01493     |                .   |   .                |
 12       -0.05320     |                .  *|   .                |
```

拟合模型识别

- 自相关系数显示出不截尾的性质
- 偏自相关系数也显示出不截尾的性质
- 综合该序列自相关系数和偏自相关系数的性质，可以尝试使用ARMA(1,1)模型拟合该序列

参数估计

- 待估参数
  - $p+q+2$个未知参数

$$\phi_1,\cdots,\phi_p,\theta_1,\cdots,\theta_q,\mu,\sigma_\varepsilon^2$$

- 常用估计方法
  - 矩估计
  - 极大似然估计
  - 最小二乘估计

矩估计

- 原理
  - 样本自相关系数估计总体自相关系数

$$
\begin{cases}
\rho_1(\phi_1,\cdots,\phi_p,\theta_1,\cdots,\theta_q)=\hat{\rho}_1 \\
\vdots \\
\rho_{p+q}(\phi_1,\cdots,\phi_p,\theta_1,\cdots,\theta_q)=\hat{\rho}_{p+q}
\end{cases}
$$

  - 样本一阶均值估计总体均值，样本方差估计总体方差

$$
\hat{\mu}=\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{1+\hat{\phi}_1^2+\cdots+\hat{\phi}_p^2}{1+\hat{\theta}_1^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2}\hat{\sigma}_x^2
$$

例3.10:求AR(2)模型系数的矩估计

- AR(2)模型 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$
- Yule-Walker方程

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{cases}$$

- 矩估计（Yule-Walker方程的解）

$$\hat{\phi}_1 = \frac{1-\hat{\rho}_2}{1-\hat{\rho}_1^2}\hat{\rho}_1 \qquad \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^2}{1-\hat{\rho}_1^2}$$

例3.11:求MA(1)模型系数的矩估计

- MA(1)模型 $x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- 方程

$$\begin{cases} \gamma_0 = (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \end{cases} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

- 矩估计

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}$$

例3.12:求ARMA(1,1)模型系数的矩估计

- ARMA(1,1)模型 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- 方程

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1 \phi_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 \end{cases}$$

- 矩估计

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1}, \quad \hat{\theta}_1 = \begin{cases} \dfrac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2}, c \le -2 \\ \dfrac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}, c \ge 2 \end{cases}, \quad c = \frac{1 - \phi_1^2 - 2\hat{\rho}_2}{\phi_1 - \hat{\rho}_1}$$

对矩估计的评价

- 优点
  - 估计思想简单直观
  - 不需要假设总体分布
  - 计算量小（低阶模型场合）
- 缺点
  - 信息浪费严重
    - 只用到了p+q个样本自相关系数信息，其他信息都被忽略
  - 估计精度差
- 通常矩估计方法被用作极大似然估计和最小二乘估计迭代计算的初始值

极大似然估计

- 原理
  - 在极大似然准则下，认为样本来自使该样本出现概率最大的总体。因此未知参数的极大似然估计就是使得似然函数（即联合密度函数）达到最大的参数值

$$L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \Lambda\ , \hat{\beta}_k; x_1, \tilde{x}) = \max\{p(\tilde{x}); \beta_1, \beta_2, \Lambda\ , \beta_k\}$$

似然方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial \sigma_\varepsilon^2} l(\tilde{\beta};\tilde{x}) = \dfrac{n}{2\sigma_\varepsilon^2} - \dfrac{S(\tilde{\beta})}{2\sigma_\varepsilon^4} = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} l(\tilde{\beta};\tilde{x}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ln|\Omega|}{\partial \tilde{\beta}} + \dfrac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\dfrac{\partial S(\tilde{\beta})}{\partial \tilde{\beta}} = 0
\end{cases}
$$

- 由于$S(\tilde{\beta})$和$\ln|\Omega|$都不是$\tilde{\beta}$的显式表达式。因而似然方程组实际上是由p+q+1个超越方程构成，通常需要经过复杂的迭代算法才能求出未知参数的极大似然估计值

对极大似然估计的评价

- 优点
  - 极大似然估计充分应用了每一个观察值所提供的信息，因而它的估计精度高
  - 同时还具有估计的一致性、渐近正态性和渐近有效性等许多优良的统计性质
- 缺点
  - 需要假定总体分布

最小二乘估计

- 原理
  - 使残差平方和达到最小的那组参数值即为最小二乘估计值

$$Q(\hat{\beta}) = \min Q(\tilde{\beta})$$

$$= \min \sum_{t=1}^{n} (x_t - \phi_1 x_{t-1} - \Lambda - \phi_p x_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Lambda - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2$$

条件最小二乘估计

- 实际中最常用的参数估计方法
- 假设条件

$$x_t = 0 \, , t > 0$$

- 残差平方和方程

$$Q(\tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_t - \sum_{i=1}^{t} \pi_i x_{t-1}]^2$$

- 解法
  - 迭代法

对最小二乘估计的评价

- 优点
  - 最小二乘估计充分应用了每一个观察值所提供的信息，因而它的估计精度高
  - 条件最小二乘估计方法使用率最高
- 缺点
  - 需要假定总体分布

例2.5续

- 确定1950年——1998年北京市城乡居民定期储蓄比例序列拟合模型的口径
  - 拟合模型：AR(1)
  - 估计方法：极大似然估计
  - 模型口径

$$x_t = 25.17 + 0.69 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = 16.17$$

例3.8续

- 确定美国科罗拉多州某一加油站连续57天的OVERSHORTS序列拟合模型的口径
  - 拟合模型：MA(1)
  - 估计方法：条件最小二乘估计
  - 模型口径

$$x_t = -4.40351 + (1 - 0.82303B)\varepsilon_t$$

$$Var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = 2178.929$$

例3.9续

- 确定1880-1985全球气表平均温度改变值差分序列拟合模型的口径
  - 拟合模型：ARMA(1,1)
  - 估计方法：条件最小二乘估计
  - 模型口径

$$x_t = 0.003 + 0.407 x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1}$$

$$Var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = 0.016$$

模型检验

- 模型的显著性检验
  - 整个模型对信息的提取是否充分
- 参数的显著性检验
  - 模型结构是否最简

模型的显著性检验

- 目的
  - 检验模型的有效性（对信息的提取是否充分）
- 检验对象
  - 残差序列
- 判定原则
  - 一个好的拟合模型应该能够提取观察值序列中几乎所有的样本相关信息，即残差序列应该为白噪声序列
  - 反之，如果残差序列为非白噪声序列，那就意味着残差序列中还残留着相关信息未被提取，这就说明拟合模型不够有效

假设条件

- 原假设：残差序列为白噪声序列

$$H_0：\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=0,\forall m\ge 1$$

- 备择假设：残差序列为非白噪声序列

$$H_1：至少存在某个\rho_k\ne 0,\forall m\ge 1，k\le m$$

检验统计量

- LB统计量

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2(m)$$

例2.5续

- 检验1950年——1998年北京市城乡居民定期储蓄比例序列拟合模型的显著性
- 残差白噪声序列检验结果

延迟阶数	LB统计量	P值	检验结论
6	5.83	0.3229	拟合模型显著有效
12	10.28	0.5050	
18	11.38	0.8361	

参数显著性检验

- 目的
  - 检验每一个未知参数是否显著非零。删除不显著参数使模型结构最精简
- 假设条件

$$H_0:\beta_j=0 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\beta_j\neq 0 \qquad \forall 1\leq j\leq m$$

- 检验统计量

$$T=\sqrt{n-m}\,\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sqrt{a_{jj}Q(\tilde{\beta})}}\sim t(n-m)$$

例2.5续

- 检验1950年——1998年北京市城乡居民定期储蓄比例序列极大似然估计模型的参数是否显著
- 参数检验结果

检验参数	t统计量	P值	结论
均值	46.12	<0.0001	显著
ϕ_1	6.72	<0.0001	显著

例3.8续:对OVERSHORTS序列的拟合模型进行检验

- 残差白噪声检验

延迟阶数	LB统计量	P值	结论
6	3.15	0.6772	模型显著有效
12	9.05	0.6171	

- 参数显著性检验

检验参数	t统计量	P值	结论
均值	－3.75	<0.0004	显著
θ_1	10.60	<0.0001	显著

例3.9续:对1880-1985全球气表平均温度改变值差分序列拟合模型进行检验

- 残差白噪声检验

延迟阶数	LB统计量	P值	结论
6	5.28	0.2595	模型显著有效
12	10.30	0.4247	

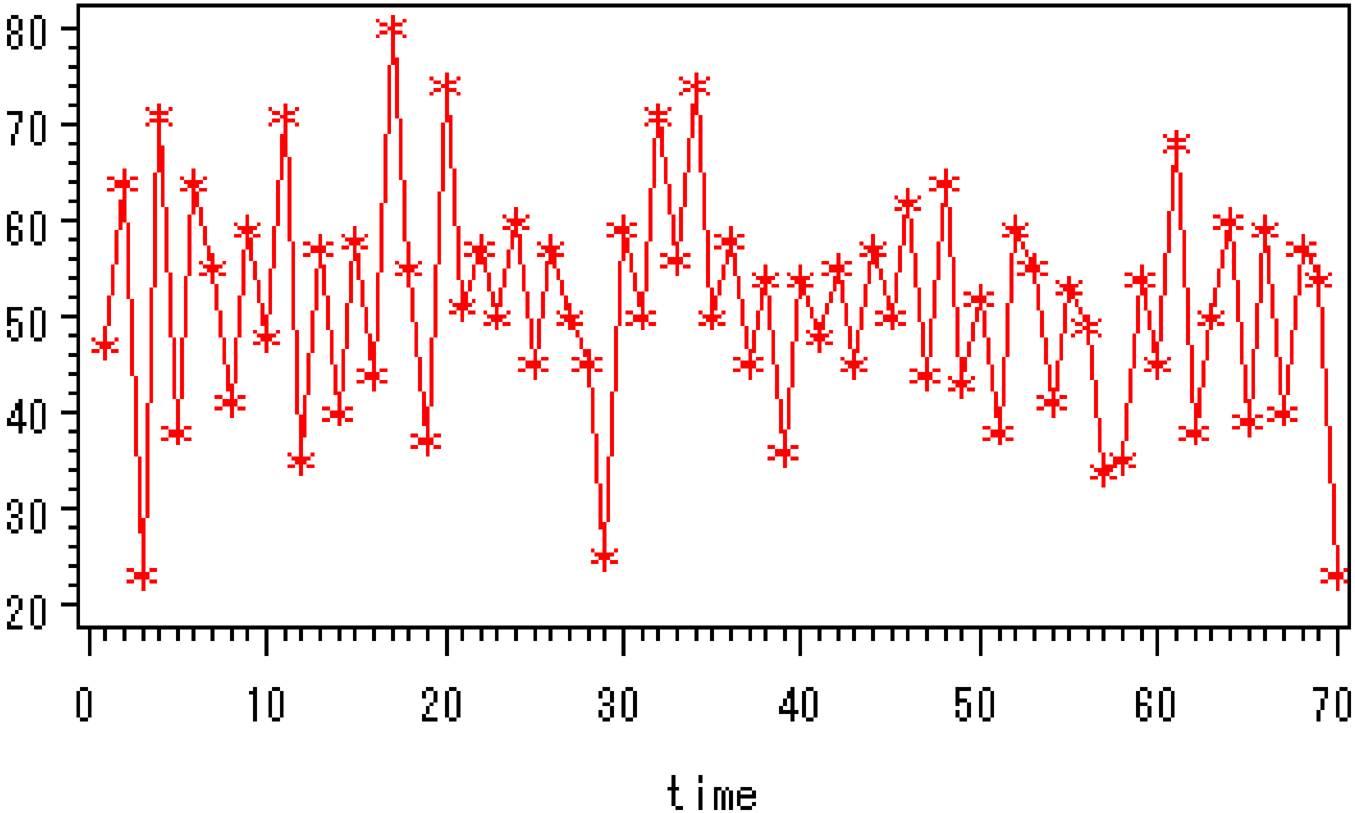
- 参数显著性检验

检验参数	t统计量	P值	结论
θ_1	16.34	<0.0001	显著
ϕ_1	3.5	0.0007	显著

模型优化

- 问题提出
  - 当一个拟合模型通过了检验，说明在一定的置信水平下，该模型能有效地拟合观察值序列的波动，但这种有效模型并不是唯一的。
- 优化的目的
  - 选择相对最优模型

例3.13:拟合某一化学序列



序列自相关图

```
                                              Autocorrelations

 Lag     Covariance     Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   0        139.798        1.00000     |                    |********************|
   1     -54.504114        -.38988     |            ********|    .               |
   2      42.553609        0.30439     |               .    |******              |
   3     -23.144178        -.16555     |              .  ***|     .              |
   4       9.886402        0.07072     |              .     |*    .              |
   5     -13.565875        -.09704     |              .   **|     .              |
   6      -6.578560        -.04706     |              .    *|     .              |
   7       4.945082        0.03537     |              .     |*    .              |
   8      -6.075359        -.04346     |              .    *|     .              |
   9      -0.670493        -.00480     |              .     |     .              |
  10       2.012128        0.01439     |              .     |     .              |
  11      15.366178        0.10992     |              .     |**   .              |
  12      -9.615079        -.06878     |              .    *|     .              |
  13      20.694889        0.14803     |              .     |***  .              |
  14       5.000367        0.03577     |              .     |*    .              |
  15      -0.933542        -.00668     |              .     |     .              |
  16      24.185609        0.17300     |              .     |***  .              |
  17     -15.565443        -.11134     |              .   **|     .              |
  18       2.791872        0.01997     |              .     |     .              |

                                   "." marks two standard errors
```

序列偏自相关图

```
                               Partial Autocorrelations

Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1     -0.38988       |            ********|    .               |
  2      0.17971       |               .    |****.               |
  3      0.00226       |               .    |    .               |
  4     -0.04428       |               .   *|    .               |
  5     -0.06941       |               .   *|    .               |
  6     -0.12062       |               .  **|    .               |
  7      0.01968       |               .    |    .               |
  8      0.00489       |               .    |    .               |
  9     -0.05650       |               .   *|    .               |
 10      0.00371       |               .    |    .               |
 11      0.14280       |               .    |*** .               |
 12     -0.00941       |               .    |    .               |
 13      0.09196       |               .    |**  .               |
 14      0.16693       |               .    |*** .               |
 15     -0.00129       |               .    |    .               |
 16      0.22069       |               .    |****.               |
 17      0.05281       |               .    |*   .               |
 18     -0.10519       |               .  **|    .               |
```

拟合模型一

- 根据自相关系数2阶截尾，拟合MA(2)模型
- 参数估计

$$yield_t = 51.17301 + (1 - 0.32286B + 0.31009B^2)\varepsilon_t$$

- 模型检验
  - 模型显著有效
  - 三参数均显著

拟合模型二

- 根据偏自相关系数1阶截尾，拟合MA(1)模型
- 参数估计

$$yield_t = 51.26169 + \frac{\varepsilon_t}{1 + 0.42481B}$$

- 模型检验
  - 模型显著有效
  - 两参数均显著

问题

- 同一个序列可以构造两个拟合模型，两个模型都显著有效，那么到底该选择哪个模型用于统计推断呢？
- 解决办法
  - 确定适当的比较准则，构造适当的统计量，确定相对最优

AIC准则

- 最小信息量准则（An Information Criterion）
- 指导思想
  - 似然函数值越大越好
  - 未知参数的个数越少越好
- AIC统计量

$$AIC = n\ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}) + 2(\text{未知参数个数})$$

SBC准则

- AIC准则的缺陷
  - 在样本容量趋于无穷大时，由AIC准则选择的模型不收敛于真实模型，它通常比真实模型所含的未知参数个数要多
- SBC统计量

$$SBC = n\ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}) + \ln(n)(\text{未知参数})$$

例3.13续

- 用AIC准则和SBC准则评判例3.13中两个拟合模型的相对优劣

模型	AIC	SBC
MA(2)	536.4556	543.2011
AR(1)	535.7896	540.2866

- 结果
  - AR(1)优于MA(2)

序列预测

- 线性预测函数

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x_{t-1-i}$$

- 预测方差最小原则

$$Var_{\hat{x}_{t}(l)}\left[e_t(l)\right] = \min\left\{Var\left[e_t(l)\right]\right\}$$

序列分解

$$
\begin{aligned}
x_{t+l} &= \left(\varepsilon_{t+l} + G_1\varepsilon_{t+l-1} + \cdots + G_{l-1}\varepsilon_{t+1}\right) + \left(G_l\varepsilon_t + G_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots\right) \\
&= \qquad\qquad e_t(l) \qquad\qquad + \qquad\qquad \hat{x}_t(l)
\end{aligned}
$$

$$
\underset{\text{预测误差}}{\downarrow} \qquad\qquad\qquad \underset{\text{预测值}}{\downarrow}
$$

$$E(x_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots) = \hat{x}(l)$$

$$Var(x_{t+l} \mid x_t, x_{t-1}, \cdots) = Var[e_t(l)]$$

误差分析

- 估计误差

$$e_t(l) = \varepsilon_{t+l} + G_1\varepsilon_{t+l-1} + \Lambda\ G_{l-1}\varepsilon_{t+1}$$

- 期望

$$E[e_t(l)] = 0$$

- 方差

$$Var[e_t(l)] = \sum_{i=0}^{l-1} G_i^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2$$

AR(p)序列的预测

- 预测值

$$\hat{x}(l)=\phi_1\hat{x}_t(l-1)+\cdots+\phi_p\hat{x}_t(l-p)$$

- 预测方差

$$Var[e_t(l)]=(1+G_1^2+\cdots+G_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

- 95％置信区间

$$\left(\hat{x}_t(l)\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(1+G_1^2+\cdots+G_{l-1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sigma_\varepsilon\right)$$

例3.14

- 已知某超市月销售额近似服从AR(2)模型（单位：万元/每月）

$$x_t = 10 + 0.6x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t \quad ,\varepsilon_t \sim N(0,36)$$

- 今年第一季度该超市月销售额分别为：

  101，96，97.2万元

- 请确定该超市第二季度每月销售额的95％的置信区间

例3.14解：预测值计算

- 四月份

$$\hat{x}_3(1) = 10 + 0.6x_3 + 0.3x_2 = 97.12$$

- 五月份

$$\hat{x}_3(2) = 10 + 0.6\hat{x}_3(1) + 0.3x_3 = 97.432$$

- 六月份

$$\hat{x}_3(3) = 10 + 0.6\hat{x}_3(2) + 0.3\hat{x}_3(1) = 97.5952$$

例3.14解：预测方差的计算

- GREEN函数

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \phi_1 G_0 = 0.6$$

$$G_2 = \phi_1 G_1 + \phi_2 G_0 = 0.36 + 0.3 = 0.66$$

- 方差

$$Var[e_3(1)] = G_0^2 \sigma_\varepsilon^2 = 36$$

$$Var[e_3(2)] = (G_0^2 + G_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 48.96$$

$$Var[e_3(3)] = (G_0^2 + G_1^2 + G_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 64.6416$$

例3.14解：置信区间

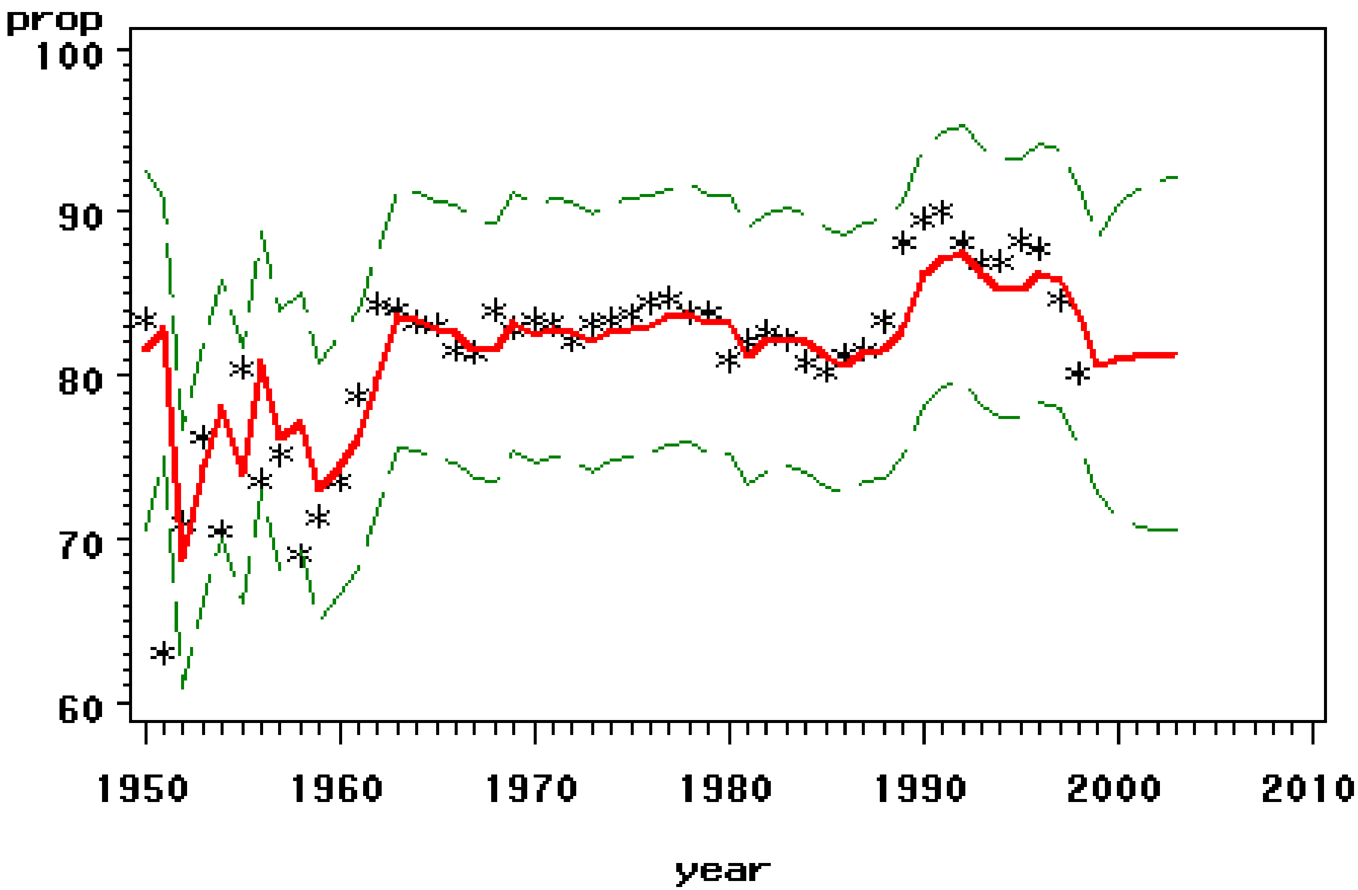
- 公式

$$(\hat{x}_3(l) - 1.96\sqrt{Var[e_3(l)]}\ ,\ \hat{x}_3(l) + 1.96\sqrt{Var[e_3(l)]})$$

- 估计结果

预测时期	95％置信区间
四月份	（85.36，108.88）
五月份	（83.72，111.15）
六月份	（81.84，113.35）

例2.5:北京市城乡居民定期储蓄比例序列拟合与预测图



MA(q)序列的预测

- 预测值

$$\hat{x}_t(l)=\begin{cases}\mu-\sum_{i=l}^{q}\theta_i\varepsilon_{t+l-i} & ,l\le q\\ \mu & ,l>q\end{cases}$$

- 预测方差

$$Var[e_t(l)]=\begin{cases}(1+\theta_1^2+\Lambda+\theta_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2 & ,l\le q\\ (1+\theta_1^2+\Lambda+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 & ,l>q\end{cases}$$

例3.15

- 已知某地区每年常驻人口数量近似服从MA(3)模型（单位：万）：

$$x_t = 100 + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-1}$$

- 最近3年的常驻人口数量及一步预测数量如下：

年份	统计人数	预测人数
2002	104	110
2003	108	100
2004	105	109

- 预测未来5年该地区常住人口的95％置信区间

例3.15解：随机扰动项的计算

$$\varepsilon_{t-2} = x_{2002} - \hat{x}_{2001}(1) = 104 - 110 = -6$$

$$\varepsilon_{t-1} = x_{2003} - \hat{x}_{2002}(1) = 108 - 100 = 8$$

$$\varepsilon_{t} = x_{2004} - \hat{x}_{2003}(1) = 105 - 109 = -4$$

例3.15解：估计值的计算

$$\hat{x}_t(1) = 100 - 0.8\varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} = 109.2$$

$$\hat{x}_t(2) = 100 + 0.6\varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} = 96$$

$$\hat{x}_t(3) = 100 - 0.2\varepsilon_t = 100.8$$

$$\hat{x}_t(4) = 100$$

$$\hat{x}_t(5) = 100$$

例3.15解：预测方差的计算

$$Var[e_t(1)] = \sigma_\varepsilon^2 = 25$$

$$Var[e_t(2)] = (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 41$$

$$Var[e_t(3)] = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 50$$

$$Var[e_t(4)] = (1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)\sigma_\varepsilon^2 = 51$$

$$Var[e_t(5)] = (1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)\sigma_\varepsilon^2 = 51$$

例3.15解：置信区间的计算

预测年份	95％置信区间
2005	（99，119）
2006	（83，109）
2007	（87，115）
2008	（86，114）
2009	（86，114）

ARMA(p,q)序列预测

- 预测值

$$\hat{x}_t(k)=\begin{cases}\hat{x}_t(k) & ,k\geq 1\\ x_{t+k} & ,k\leq 0\end{cases}$$

- 预测方差

$$Var[e_t(l)]=(G_0^1+G_1^2+\Lambda\ +G_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

例3.16

- 已知模型为：

$$x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} \quad \sigma_\varepsilon^2 = 0.0025$$

- 且 $x_{100} = 0.3 \quad \varepsilon_{100} = 0.01$

- 预测未来3期序列值的95％的置信区间。

例3.16解：估计值的计算

$$\hat{x}_{100}(1) = 0.8x_{100} - 0.6\varepsilon_{100} = 0.234$$

$$\hat{x}_{100}(2) = 0.8\hat{x}_{100}(1) = 0.1872$$

$$\hat{x}_{100}(3) = 0.8\hat{x}_{100}(2) = 0.14976$$

例3.16解：预测方差的计算

- Green函数

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \phi_1 G_0 - \theta_1 = 0.2$$

$$G_2 = \phi_1 G_1 = 0.16$$

- 方差

$$Var[e_{100}(1)] = G_0^2 \sigma_\varepsilon^2 = 0.0025$$

$$Var[e_{100}(2)] = (G_0^2 + G_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 0.0026$$

$$Var[e_{100}(3)] = (G_0^2 + G_1^2 + G_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 0.002664$$

例3.16解：置信区间的计算

时期	95％置信区间
101	（0.136，0.332）
102	（0.087，0.287）
103	（－0.049，0.251）

修正预测

- 定义
  - 所谓的修正预测就是研究如何利用新的信息去获得精度更高的预测值
- 方法
  - 在新的信息量比较大时——把新信息加入到旧的信息中，重新拟合模型
  - 在新的信息量很小时——不重新拟合模型，只是将新的信息加入以修正预测值，提高预测精度

修正预测原理

- 在旧信息的基础上，x_{t+l} 的预测值为

$$\hat{x}_t(l) = G_l\varepsilon_t + G_1\varepsilon_{t-1} + \Lambda$$

- 假设新获得一个观察值 x_{t+1}，则
  - x_{t+l} 的修正预测值为

$$\hat{x}_{t+1}(l-1) = G_{l-1}\varepsilon_{t+1} + G_l\varepsilon_t + G_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \Lambda = G_{l-1}\varepsilon_{t+1} + \hat{x}_t(l)$$

  - 修正预测误差为

$$e_{t+1}(l-1) = G_0\varepsilon_{t+l} + \Lambda + G_{l-2}\varepsilon_{t+2}$$

  - 预测方差为

$$Var[e_{t+1}(l-1)] = (G_0^2 + \Lambda + G_{l-2}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

一般情况

- 假设新获得p个观察值 $x_{t+1},\Lambda\ ,x_{t+p}$，则
  - x_{t+l} 的修正预测值为

$$\hat{x}_{t+p}(l-p)=G_{l-p}\varepsilon_{t+p}+\Lambda\ +G_{l-1}\varepsilon_{t+1}+\hat{x}_t(l)$$

  - 修正预测误差为

$$e_{t+p}(l-p)=G_0\varepsilon_{t+l}+\Lambda\ +G_{l-p-1}\varepsilon_{t+p+1}$$

  - 预测方差为

$$Var[e_{t+p}(l-p)]=(G_0^2+\Lambda\ +G_{l-p-1}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

例3.14续:假如四月份的真实销售额为100万元，求二季度后两个月销售额的修正预测值

- 计算四月份的预测误差

$$\varepsilon_4 = x_4 - \hat{x}_3(1) = 100 - 97.12 = 2.88$$

- 计算修正预测值

$$\hat{x}_4(1) = G_1\varepsilon_4 + \hat{x}_3(2) = 99.16$$

$$\hat{x}_4(2) = G_2\varepsilon_4 + \hat{x}_3(3) = 99.50$$

- 计算修正方差

$$Var[e_4(1)] = Var[e_3(1)] = G_0^2\sigma_\varepsilon^2 = 36$$

$$Var[e_4(2)] = Var[e_3(2)] = (G_0^2 + G_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 48.96$$

修正置信区间

预测时期	修正前置信区间	修正后置信区间
四月份	（85.36，108.88）	
五月份	（83.72，111.15）	（87.40，110.92）
六月份	（81.84，113.35）	（85.79，113.21）

第四章

非平稳序列的确定性分析

本章结构

- 时间序列的分解
- 确定性因素分解
- 趋势分析
- 季节效应分析
- 综合分析
- X－11过程

4.1 时间序列的分解

- Wold分解定理
- Cramer分解定理

Wold分解定理（1938）

- 对于任何一个离散平稳过程$\{x_t\}$它都可以分解为两个不相关的平稳序列之和，其中一个为确定性的，另一个为随机性的，不妨记作

$$x_t = V_t + \xi_t$$

其中：$\{V_t\}$为确定性序列，$\{\xi_t\}$为随机序列，$\xi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$

它们需要满足如下条件

（1）$\varphi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty$ （2）$\{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

（3）$E(V_t, \varepsilon_s) = 0, \quad \forall t \neq s$

确定性序列与随机序列的定义

- 对任意序列$\{y_t\}$而言，令y_t关于q期之前的序列值作线性回归

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-q} + \alpha_2 y_{t-q-1} + \Lambda + \upsilon_t$$

其中$\{\upsilon_t\}$为回归残差序列，$Var(\upsilon_t) = \tau_q^2$ 。

  - 确定性序列，若 $\lim\limits_{q\to\infty} \tau_q^2 = 0$
  - 随机序列，若 $\lim\limits_{q\to\infty} \tau_q^2 = Var(y_t)$

ARMA模型分解

$$x_t = \mu + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

确定性序列

随机序列

Cramer分解定理（1961）

- 任何一个时间序列$\{x_t\}$都可以分解为两部分的叠加：其中一部分是由多项式决定的确定性趋势成分，另一部分是平稳的零均值误差成分，即

$$x_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j$$

确定性影响

$$\varepsilon_t = \Psi(B) a_t$$

随机性影响

对两个分解定理的理解

- Wold分解定理说明任何平稳序列都可以分解为确定性序列和随机序列之和。它是现代时间序列分析理论的灵魂，是构造ARMA模型拟合平稳序列的理论基础。
- Cramer 分解定理是Wold分解定理的理论推广，它说明任何一个序列的波动都可以视为同时受到了确定性影响和随机性影响的综合作用。平稳序列要求这两方面的影响都是稳定的，而非平稳序列产生的机理就在于它所受到的这两方面的影响至少有一方面是不稳定的。

4.2确定性因素分解

- 传统的因素分解
  - 长期趋势
  - 循环波动
  - 季节性变化
  - 随机波动
- 现在的因素分解
  - 长期趋势波动
  - 季节性变化
  - 随机波动

确定性时序分析的目的

- 克服其它因素的影响，单纯测度出某一个确定性因素对序列的影响
- 推断出各种确定性因素彼此之间的相互作用关系及它们对序列的综合影响

4.3趋势分析

- 目的
  - 有些时间序列具有非常显著的趋势，我们分析的目的就是要找到序列中的这种趋势，并利用这种趋势对序列的发展作出合理的预测
- 常用方法
  - 趋势拟合法
  - 平滑法

趋势拟合法

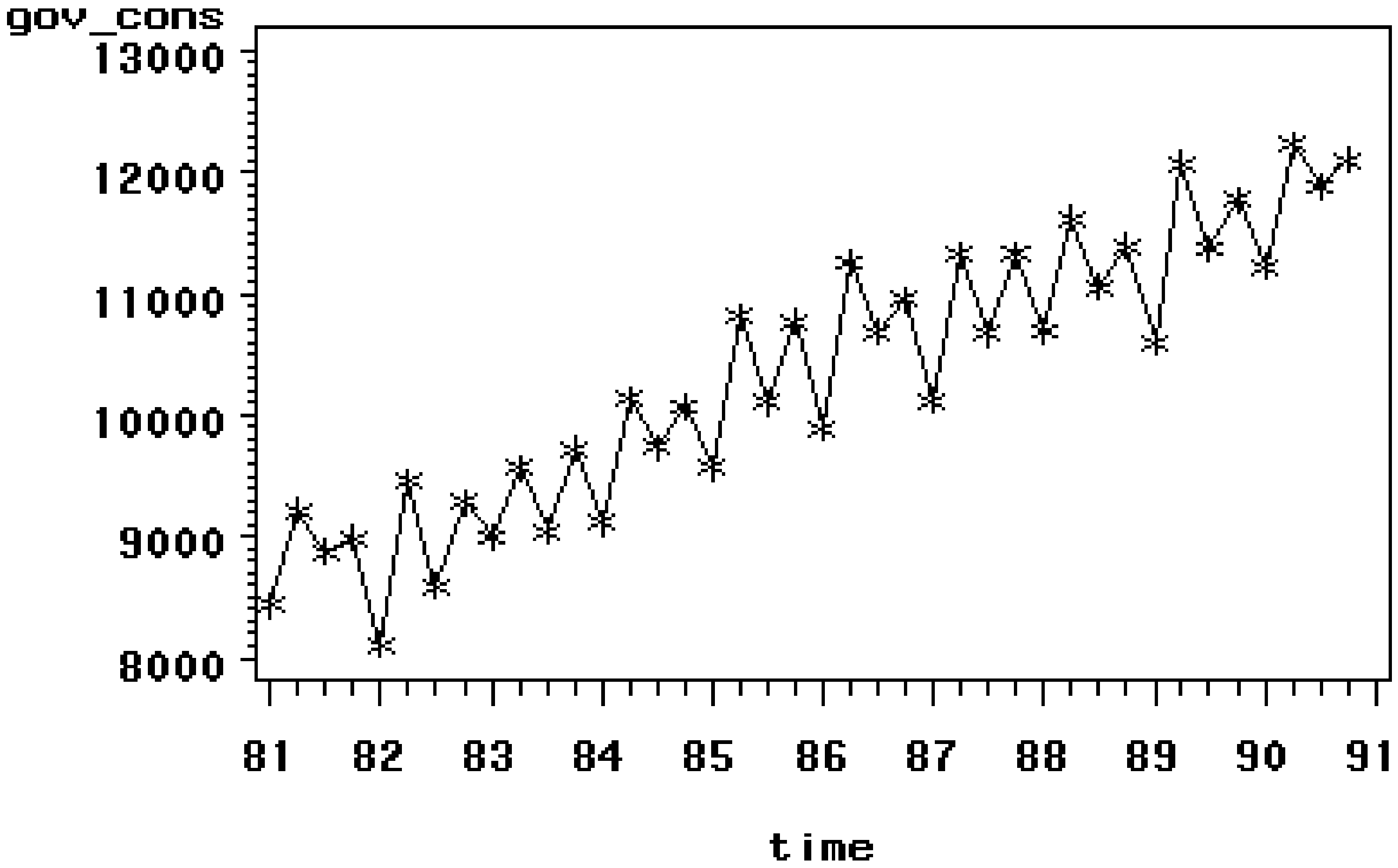
- 趋势拟合法就是把时间作为自变量，相应的序列观察值作为因变量，建立序列值随时间变化的回归模型的方法
- 分类
  - 线性拟合
  - 非线性拟合

线性拟合

- 使用场合
  - 长期趋势呈现出线形特征
- 模型结构

$$\begin{cases} x_t = a + bt + I_t \\ E(I_t) = 0, Var(I_t) \end{cases}$$

例4.1:拟合澳大利亚政府1981——1990年每季度的消费支出序列



线性拟合

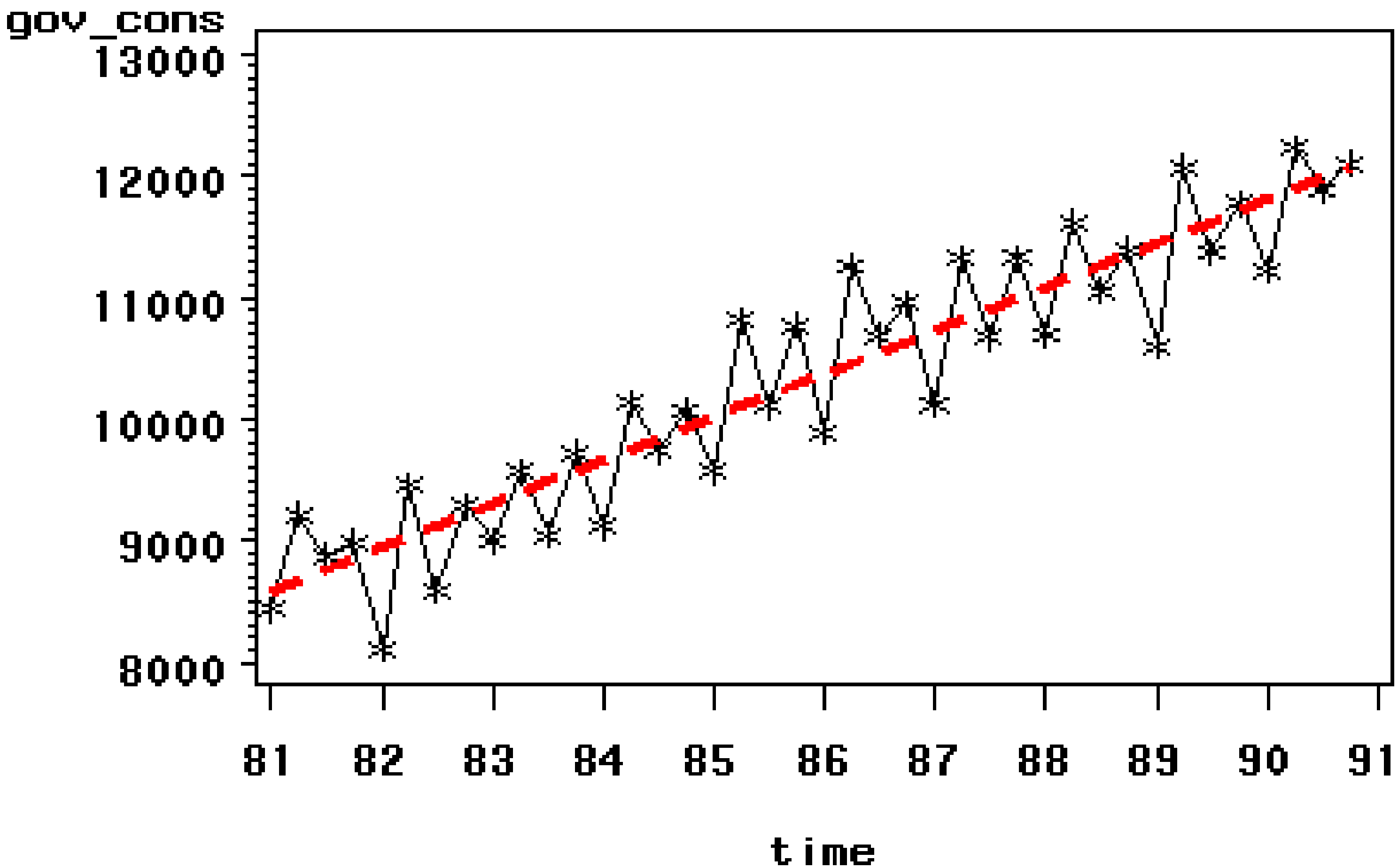
- 模型

$$\begin{cases} x_t = a + bt + I_t \qquad ,t = 1,2\Lambda\ ,40 \\ E(I_t) = 0, Var(I_t) = \sigma^2 \end{cases}$$

- 参数估计方法
  - 最小二乘估计
- 参数估计值

$$\hat{a} = 8498.69 \quad , \quad \hat{b} = 89.12$$

拟合效果图



gov_cons
13000
12000
11000
10000
9000
8000
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
time

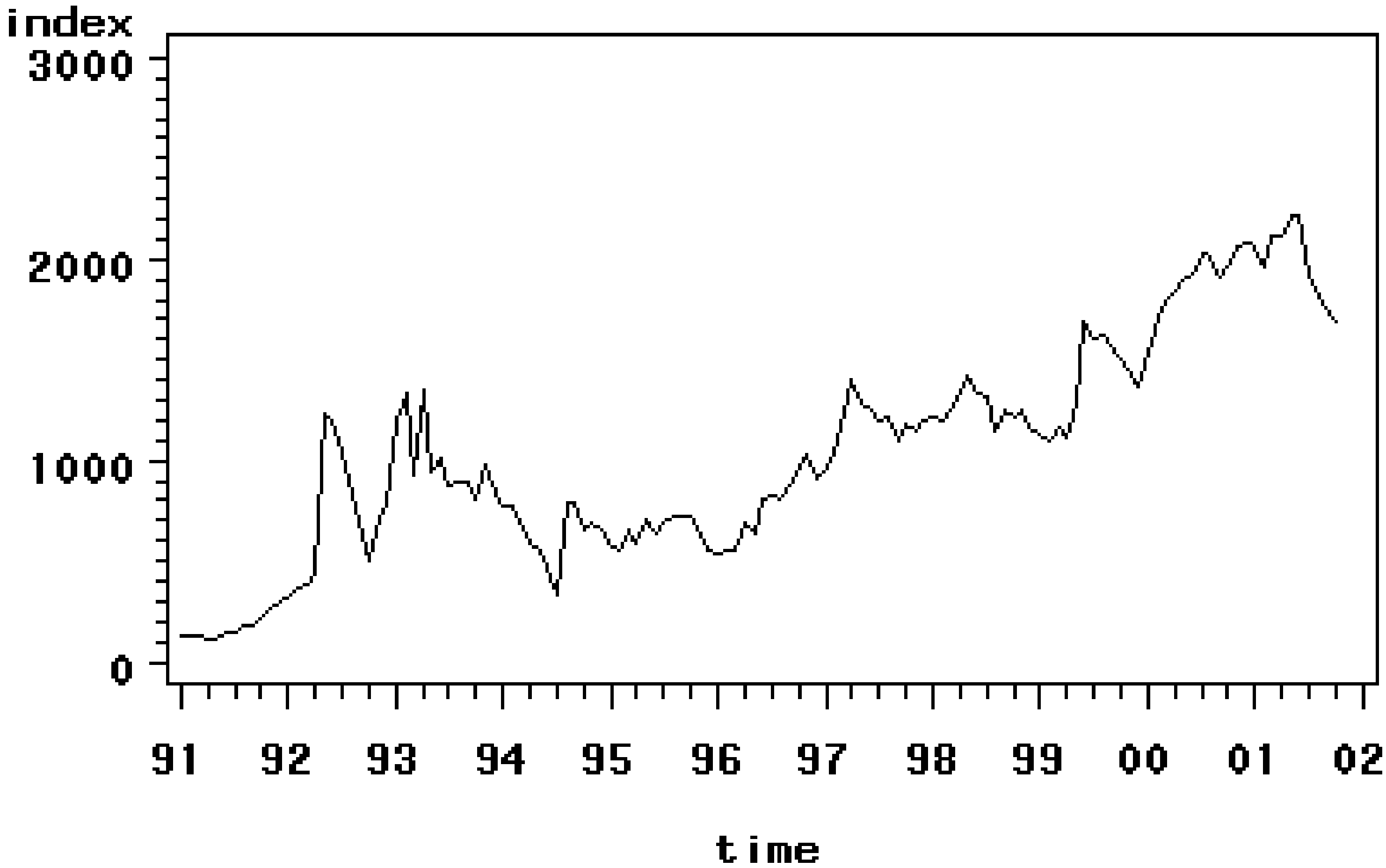
非线性拟合

- 使用场合
  - 长期趋势呈现出非线形特征
- 参数估计指导思想
  - 能转换成线性模型的都转换成线性模型，用线性最小二乘法进行参数估计
  - 实在不能转换成线性的，就用迭代法进行参数估计

常用非线性模型

模型	变换	变换后模型	参数估计方法
$T_t = a + bt + ct^2$	$t_2 = t^2$	$T_t = a + bt + ct_2$	线性最小二乘估计
$T_t = ab^t$	$T_t' = \ln T_t$ $a' = \ln a$ $b' = \ln b$	$T_t' = a' + b't$	线性最小二乘估计
$T_t = a + bc^t$	—	—	迭代法
$T_t = e^{a+bc^t}$	—	—	迭代法
$T_t = \dfrac{1}{a + bc^t}$	—	—	迭代法

例4.2： 对上海证券交易所每月末上证指数序列进行模型拟合



非线性拟合

- 模型

$$T_t = a + bt + ct^2$$

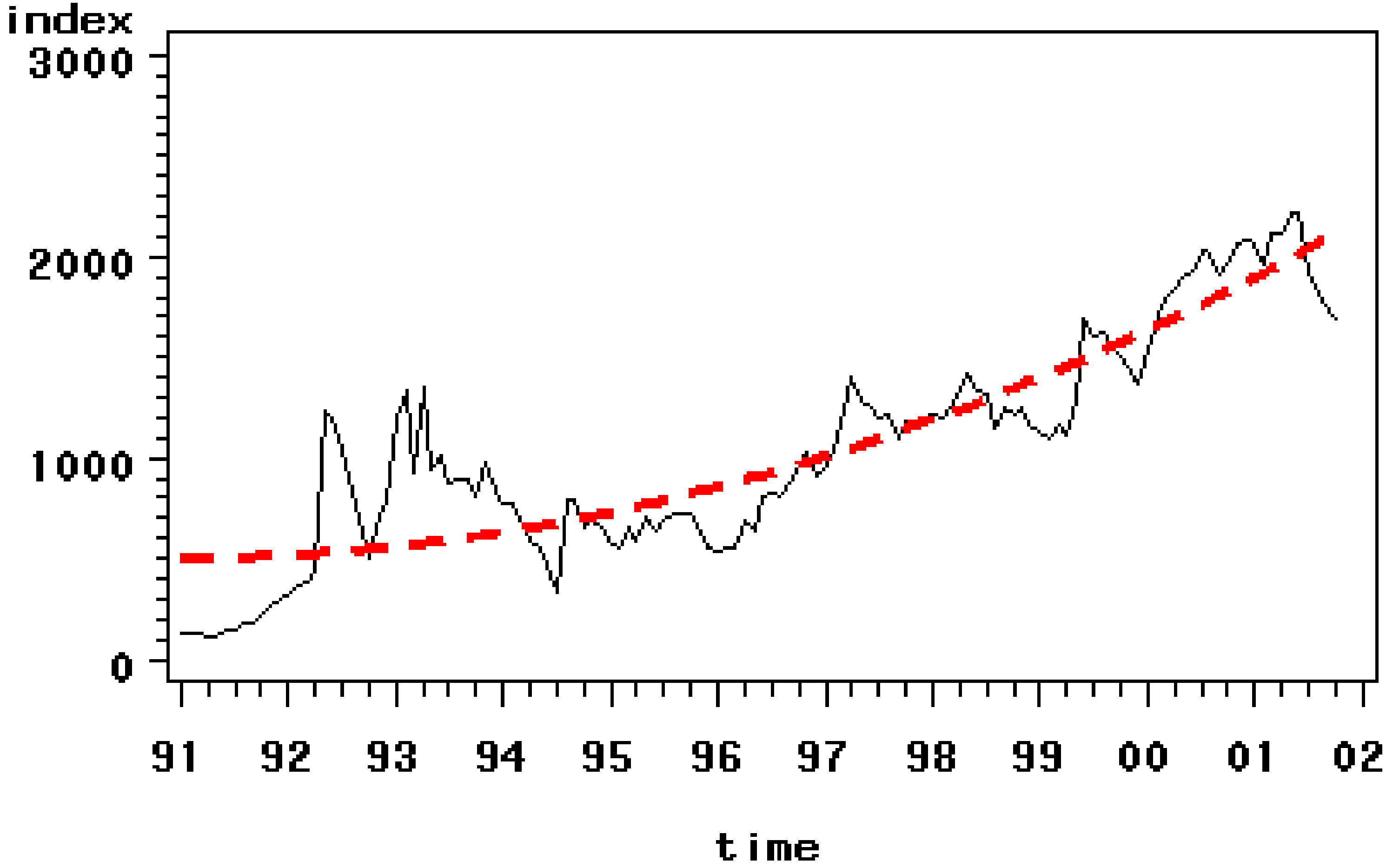
- 变换

$$t_2 = t^2$$

- 参数估计方法
  - 线性最小二乘估计
- 拟合模型口径

$$T_t = 502.2517 + 0.0952t^2$$

拟合效果图



平滑法

- 平滑法是进行趋势分析和预测时常用的一种方法。它是利用修匀技术，削弱短期随机波动对序列的影响，使序列平滑化，从而显示出长期趋势变化的规律
- 常用平滑方法
  - 移动平均法
  - 指数平滑法

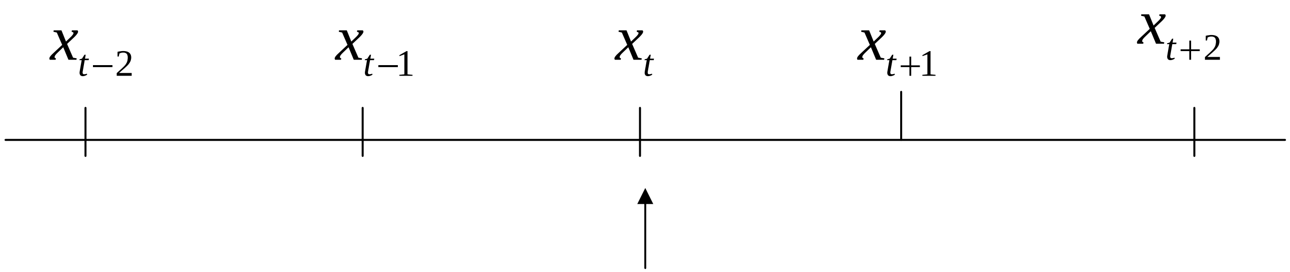
移动平均法

- 基本思想
  - 假定在一个比较短的时间间隔里，序列值之间的差异主要是由随机波动造成的。根据这种假定，我们可以用一定时间间隔内的平均值作为某一期的估计值
- 分类
  - n期中心移动平均
  - n期移动平均

n期中心移动平均

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(x_{t-\frac{n-1}{2}} + x_{t-\frac{n-1}{2}+1} + \Lambda + x_t + \Lambda + x_{t+\frac{n-1}{2}-1} + x_{t+\frac{n-1}{2}}\right)，\ n\text{为奇数} \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}x_{t-\frac{n}{2}} + x_{t-\frac{n}{2}+1} + \Lambda + x_t + \Lambda + x_{t+\frac{n}{2}-1} + \dfrac{1}{2}x_{t+\frac{n}{2}}\right)，\ n\text{为偶数} \end{cases}$$

5期中心移动平均

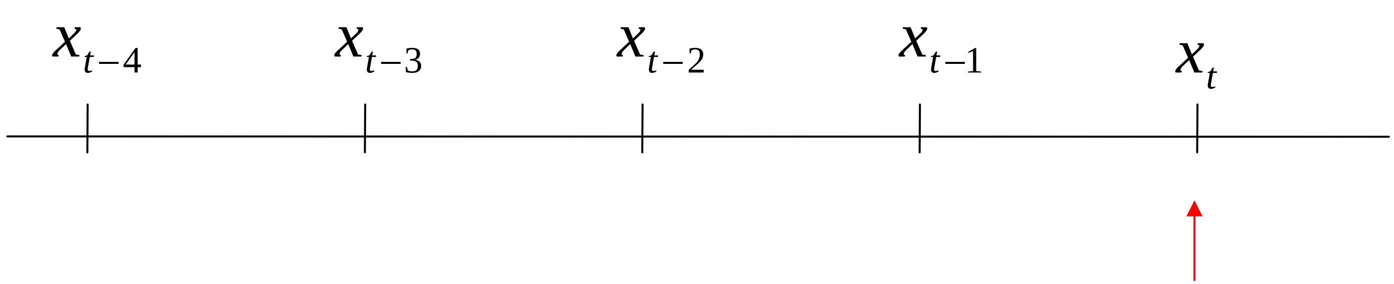


$$\tilde{x}_t = \frac{x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2}}{5}$$

n期移动平均

$$\tilde{x}_t = \frac{1}{n}(x_t + x_{t-1} + \Lambda + x_{t-n+1})$$

5期移动平均



$$\tilde{x}_t = \frac{x_{t-4} + x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{5}$$

移动平均期数确定的原则

- 事件的发展有无周期性
  - 以周期长度作为移动平均的间隔长度，以消除周期效应的影响
- 对趋势平滑的要求
  - 移动平均的期数越多，拟合趋势越平滑
- 对趋势反映近期变化敏感程度的要求
  - 移动平均的期数越少，拟合趋势越敏感

移动平均预测

$$\hat{x}_{T+l} = \frac{1}{n}(x'_{T+l-1} + x'_{T+l-2} + \Lambda + x'_{T+l-n})$$

$$x'_{T+l-i} = \begin{cases} \hat{x}_{T+l-i} & ,l > i \\ x_{T+l-i} & ,l \leq i \end{cases}$$

例4.3

- 某一观察值序列最后4期的观察值为：

5，5.5，5.8，6.2

（1）使用4期移动平均法预测 $\hat{x}_{T+2}$。

（2）求在二期预测值 $\hat{x}_{T+2}$ 中 x_T 前面的系数等于多少？

例4.3解

（1）$$\hat{x}_{T+1}=\frac{1}{4}\left(x_T+x_{T-1}+x_{T-2}+x_{T-3}\right)=\frac{5+5.4+5.8+6.2}{4}=5.6$$

$$\hat{x}_{T+2}=\frac{1}{4}\left(\hat{x}_{T+1}+x_T+x_{T-1}+x_{T-2}\right)=\frac{5.6+5+5.4+5.8}{4}=5.45$$

（2）$$\hat{x}_{T+2}=\frac{1}{4}\left(\hat{x}_{T+1}+x_T+x_{T-1}+x_{T-2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(x_T+x_{T-1}+x_{T-2}+x_{T-2}\right)+x_T+x_{T-1}+x_{T-2}\right]$$

$$=\frac{5}{16}\left(x_T+x_{T-1}+x_{T-2}\right)+\frac{1}{16}x_{T-3}$$

在二期预测值中 x_T 前面的系数等于$\frac{5}{16}$

指数平滑法

- 指数平滑方法的基本思想
  - 在实际生活中，我们会发现对大多数随机事件而言，一般都是近期的结果对现在的影响会大些，远期的结果对现在的影响会小些。为了更好地反映这种影响作用，我们将考虑到时间间隔对事件发展的影响，各期权重随时间间隔的增大而呈指数衰减。这就是指数平滑法的基本思想
- 分类
  - 简单指数平滑
  - Holt两参数指数平滑

简单指数平滑

- 基本公式

$$\tilde{x}_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \Lambda$$

- 等价公式

$$\tilde{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\tilde{x}_{t-1}$$

经验确定

- 初始值的确定

$$\tilde{x}_0 = x_1$$

- 平滑系数的确定
  - 一般对于变化缓慢的序列，α常取较小的值
  - 对于变化迅速的序列，α常取较大的值
  - 经验表明α的值介于0.05至0.3之间，修匀效果比较好。

简单指数平滑预测

- 一期预测值

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{T+1} &= \tilde{x}_T \\
&= \alpha x_T + \alpha(1-\alpha)x_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{T-2} + \Lambda
\end{aligned}
$$

- 二期预测值

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{T+2} &= \alpha\hat{x}_{T+1} + \alpha(1-\alpha)x_T + \alpha(1-\alpha)^2 x_{T-1} + \Lambda \\
&= \alpha\hat{x}_{T+1} + (1-\alpha)\hat{x}_{T+1} = \hat{x}_{T+1}
\end{aligned}
$$

- l 期预测值

$$
\hat{x}_{T+l} = \hat{x}_{T+1} \quad , \quad l \geq 2
$$

例4.4

- 对某一观察值序列$\{x_t\}$使用指数平滑法。

已知$x_T=10$，$\tilde{x}_{T-1}=10.5$， 平滑系数$\alpha=0.25$

(1) 求二期预测值$\hat{x}_{T+2}$。

(2)求在二期预测值$\hat{x}_{T+2}$中x_T前面的系数等于多少？

例4.4解

（1）$\hat{x}_{T+1}=\tilde{x}_T=0.25x_T+0.75\tilde{x}_{T-1}=10.3$

$\hat{x}_{T+2}=\hat{x}_{T+1}=10.3$

（2）$\hat{x}_{T+2}=\hat{x}_{T+1}=\alpha x_T+\alpha(1-\alpha)x_{T-1}+\Lambda$

所以使用简单指数平滑法二期预测值中 x_T 前面的系数就等于平滑系数 $\alpha=0.25$

Holt两参数指数平滑

- 使用场合
  - 适用于对含有线性趋势的序列进行修匀
- 构造思想
  - 假定序列有一个比较固定的线性趋势

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r$$

  - 两参数修匀

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(\tilde{x}_{t-1} + r_{t-1}) \\ r_t = \gamma(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1-\gamma) r_{t-1} \end{cases}$$

初始值的确定

- 平滑序列的初始值

$$\tilde{x}_0 = x_1$$

- 趋势序列的初始值

$$r_0 = \frac{x_{n+1} - x_1}{n}$$

Holt两参数指数平滑预测

- l 期预测值

$$\hat{x}_{T+l} = \tilde{x}_T + l \cdot r_T$$

例4.5

- 对北京市1978——2000年报纸发行量序列进行Holt两参数指数平滑。指定

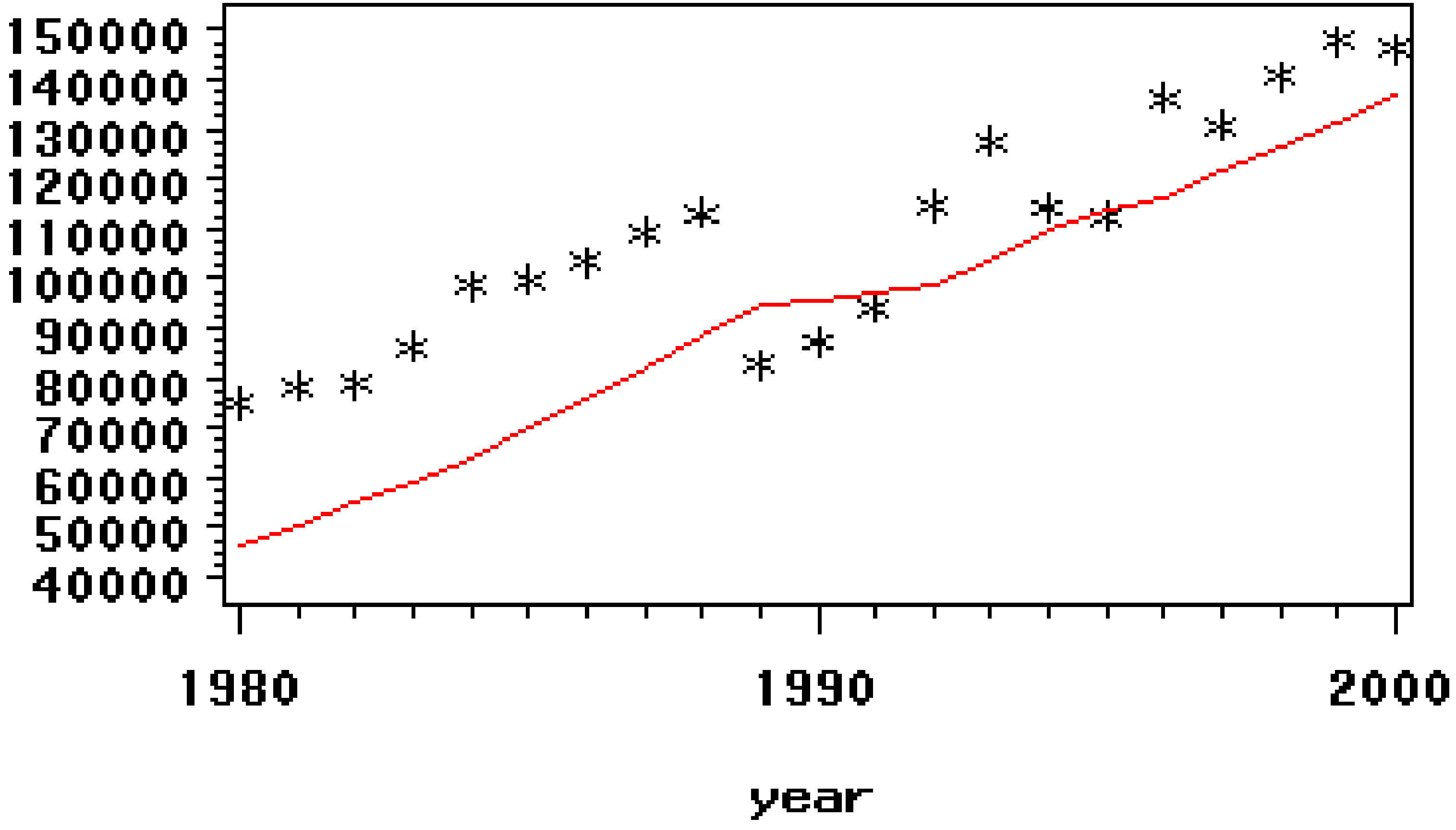
$$\tilde{x}_0 = x_1 = 51259$$

$$r_0 = \frac{x_{23} - x_1}{23} = 4325$$

$$\alpha = 0.15$$

$$\gamma = 0.1$$

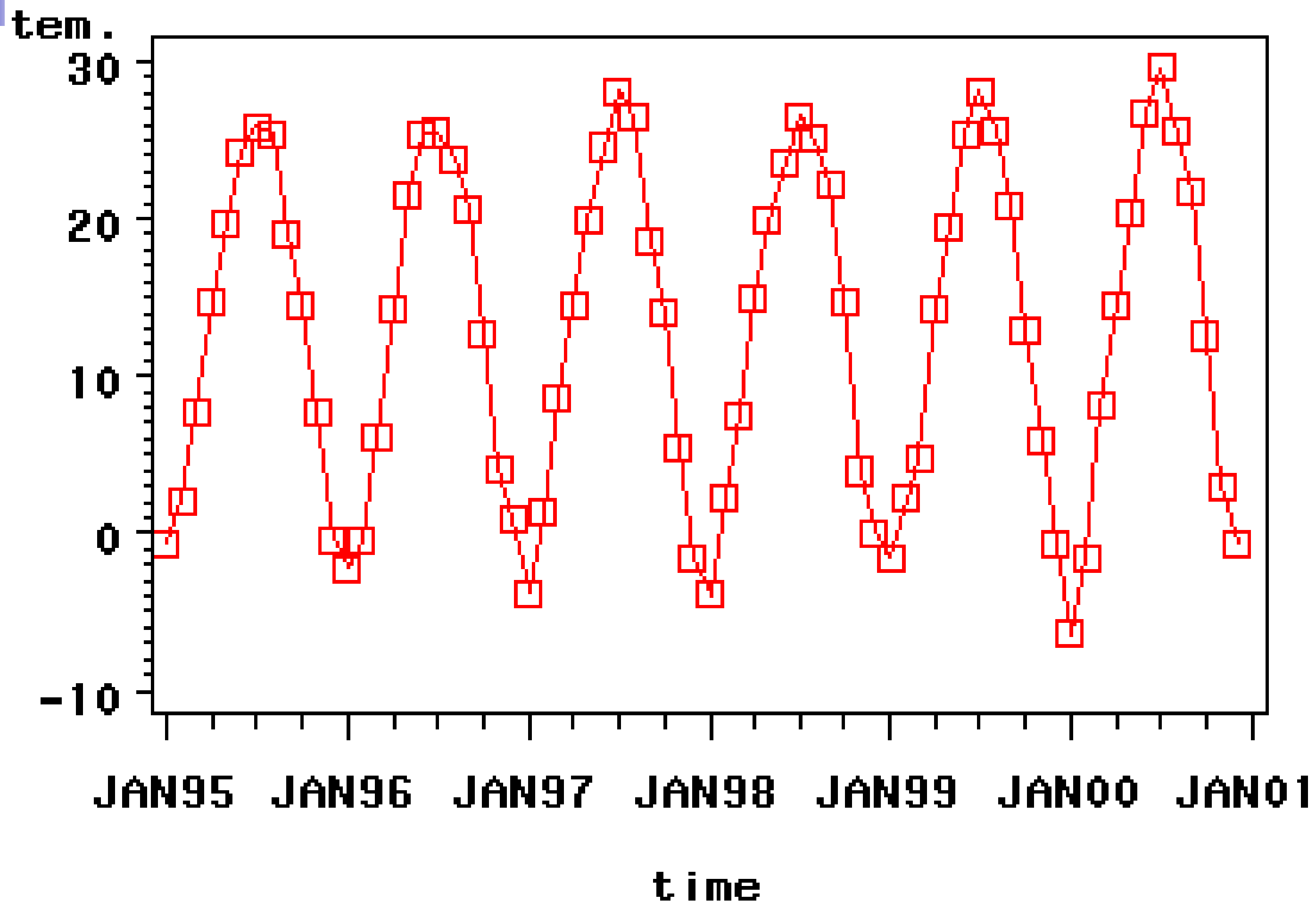
例4.5平滑效果图


150000
140000
130000
120000
110000
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
1980
1990
2000
year

4.3 季节效应分析

【例4.6】以北京市1995年——2000年月平均气温序列为例，介绍季节效应分析的基本思想和具体操作步骤。

时序图



tem.
30
20
10
0
-10
JAN95
JAN96
JAN97
JAN98
JAN99
JAN00
JAN01
time

季节指数

- 季节指数的概念
  - 所谓季节指数就是用简单平均法计算的周期内各时期季节性影响的相对数
- 季节模型

$$x_{ij} = \bar{x} \cdot S_j + I_{ij}$$

季节指数的计算

- 计算周期内各期平均数

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}{n} \quad ,k = 1,2,\Lambda\ ,m$$

- 计算总平均数

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ik}}{nm}$$

- 计算季节指数

$$S_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}} \quad ,k = 1,2,\Lambda\ ,m$$

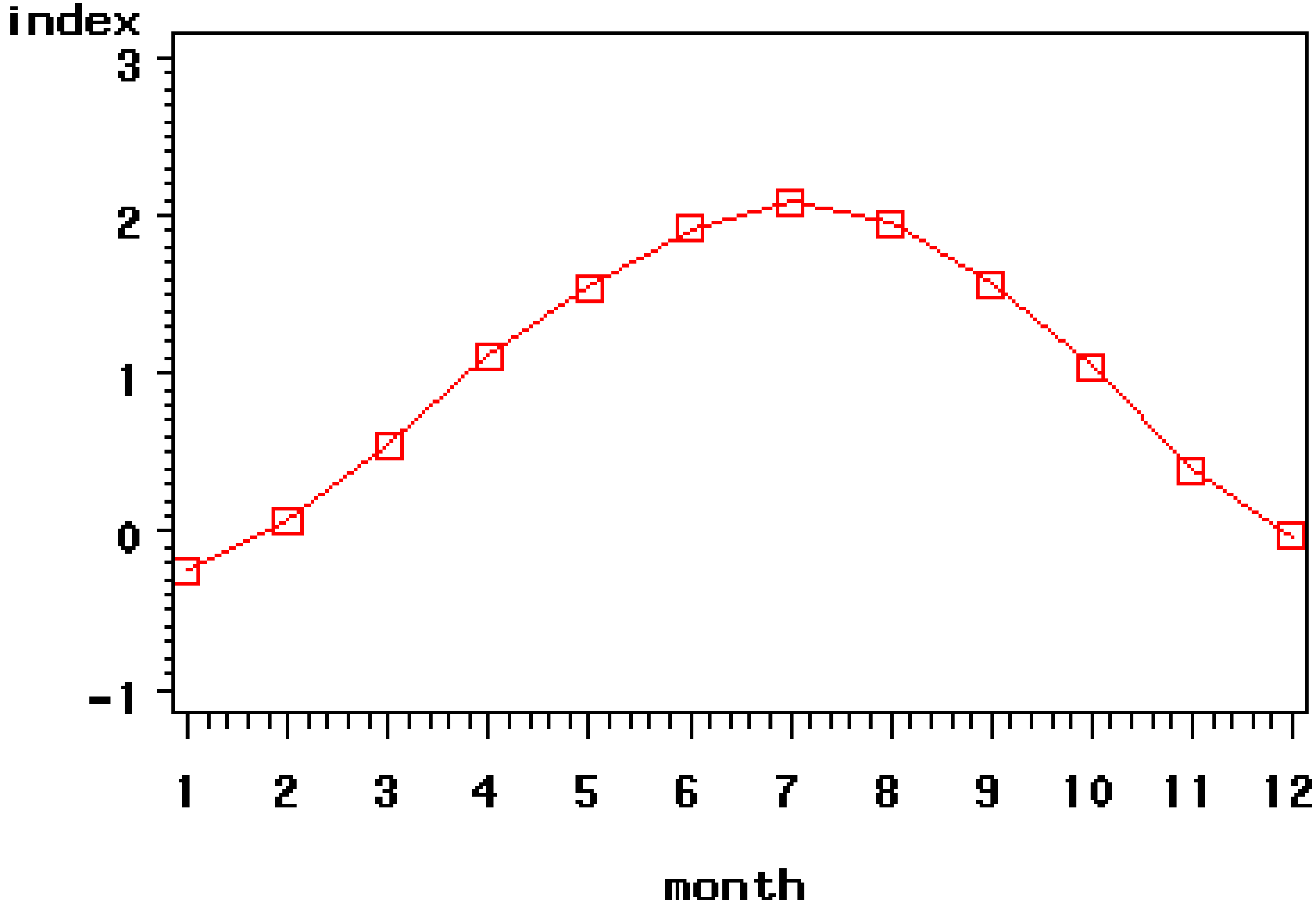
季节指数的理解

- 季节指数反映了该季度与总平均值之间的一种比较稳定的关系
- 如果这个比值大于1，就说明该季度的值常常会高于总平均值
- 如果这个比值小于1，就说明该季度的值常常低于总平均值
- 如果序列的季节指数都近似等于1，那就说明该序列没有明显的季节效应

例4.6季节指数的计算

年 / 月	平均气温（℃）						月平均 $\bar{x}_i$	季节指数 S_i
	1995	1996	1997	1998	1999	2000		
1	-0.7	-2.2	-3.8	-3.9	-1.6	-6.4	-3.10	-0.238
2	2.1	-0.4	1.3	2.4	2.2	-1.5	1.02	0.078
3	7.7	6.2	8.7	7.6	4.8	8.1	7.18	0.551
4	14.7	14.3	14.5	15.0	14.4	14.6	14.58	1.119
5	19.8	21.6	20.0	19.9	19.5	20.4	20.20	1.550
6	24.3	25.4	24.6	23.6	25.4	26.7	25.00	1.919
7	25.9	25.5	28.2	26.5	28.1	29.6	27.30	2.095
8	25.4	23.9	26.6	25.1	25.6	25.7	25.38	1.948
9	19.0	20.7	18.6	22.2	20.9	21.8	20.53	1.576
10	14.5	12.8	14.0	14.8	13.0	12.6	13.62	1.045
11	7.7	4.2	5.4	4.0	5.9	3.0	5.03	0.386
12	-0.4	0.9	-1.5	0.1	-0.6	-0.6	-0.35	-0.027
总平均 $\bar{x}$=13.03								

例4.6季节指数图



综合分析

- 常用综合分析模型
  - 加法模型

$$x_t = T_t + S_t + I_t$$

  - 乘法模型

$$x_t = T_t \cdot S_t \cdot I_t$$

  - 混合模型

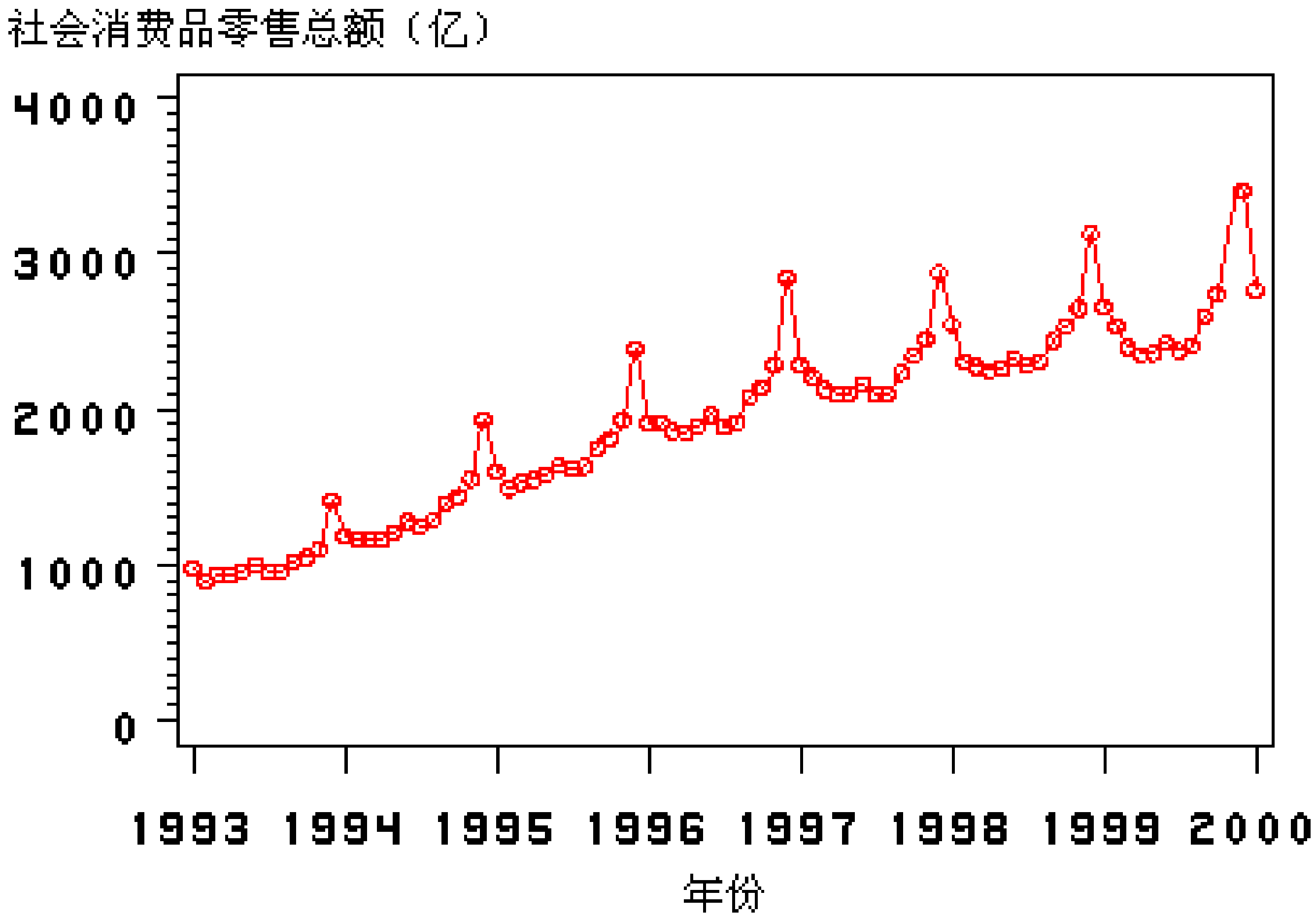
$$a) \quad x_t = S_t \cdot T_t + I_t$$

$$b) \quad x_t = S_t \cdot (T_t + I_t)$$

例4.7

- 对1993年——2000年中国社会消费品零售总额序列（数据见附录1.11）进行确定性时序分析。

(1)绘制时序图



社会消费品零售总额（亿）
4000
3000
2000
1000
0
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
年份

(2)选择拟合模型

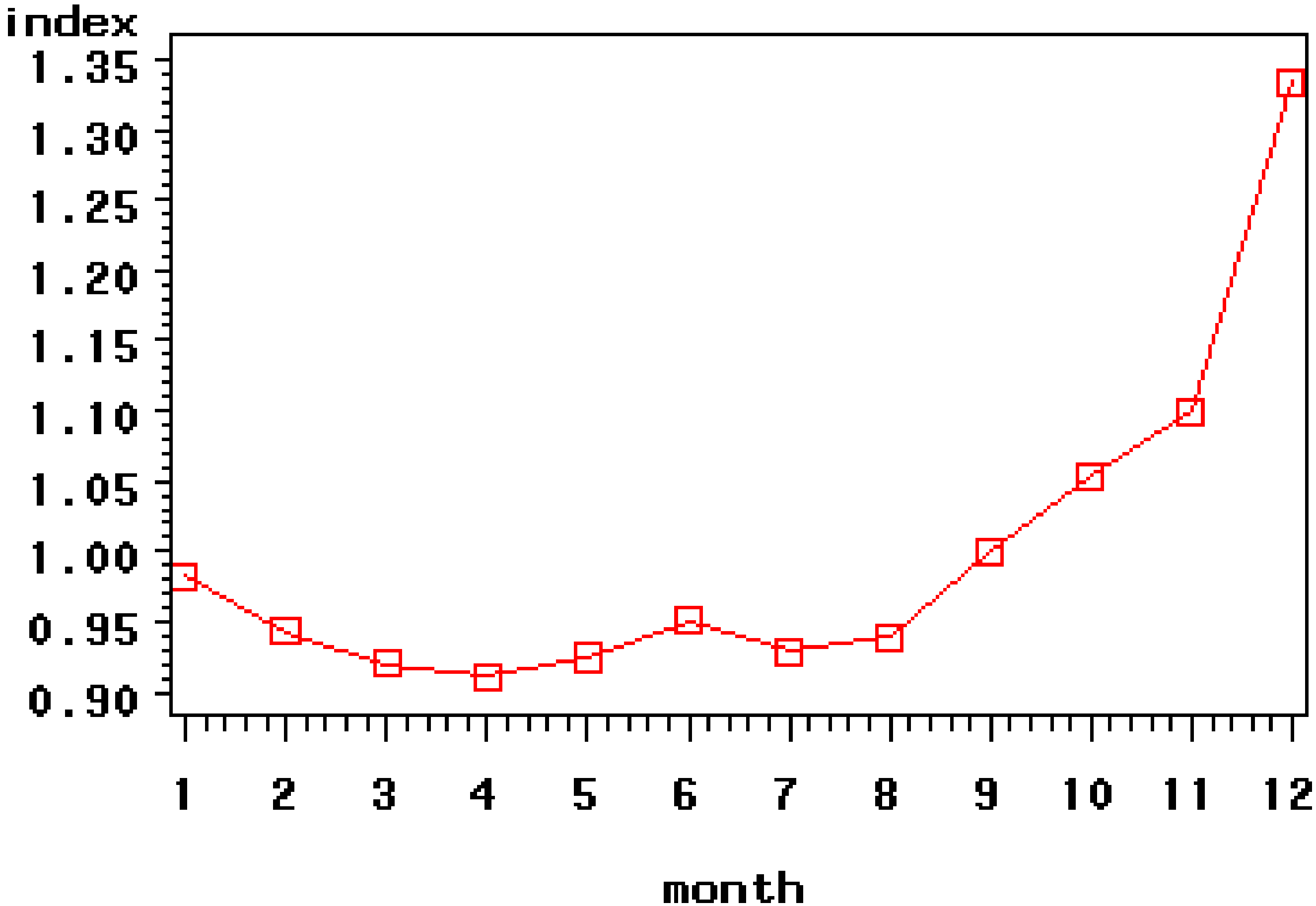
- 长期递增趋势和以年为固定周期的季节波动同时作用于该序列，因而尝试使用混合模型（b）拟合该序列的发展

$$x_t = S_t \cdot (T_t + I_t)$$

(3)计算季节指数

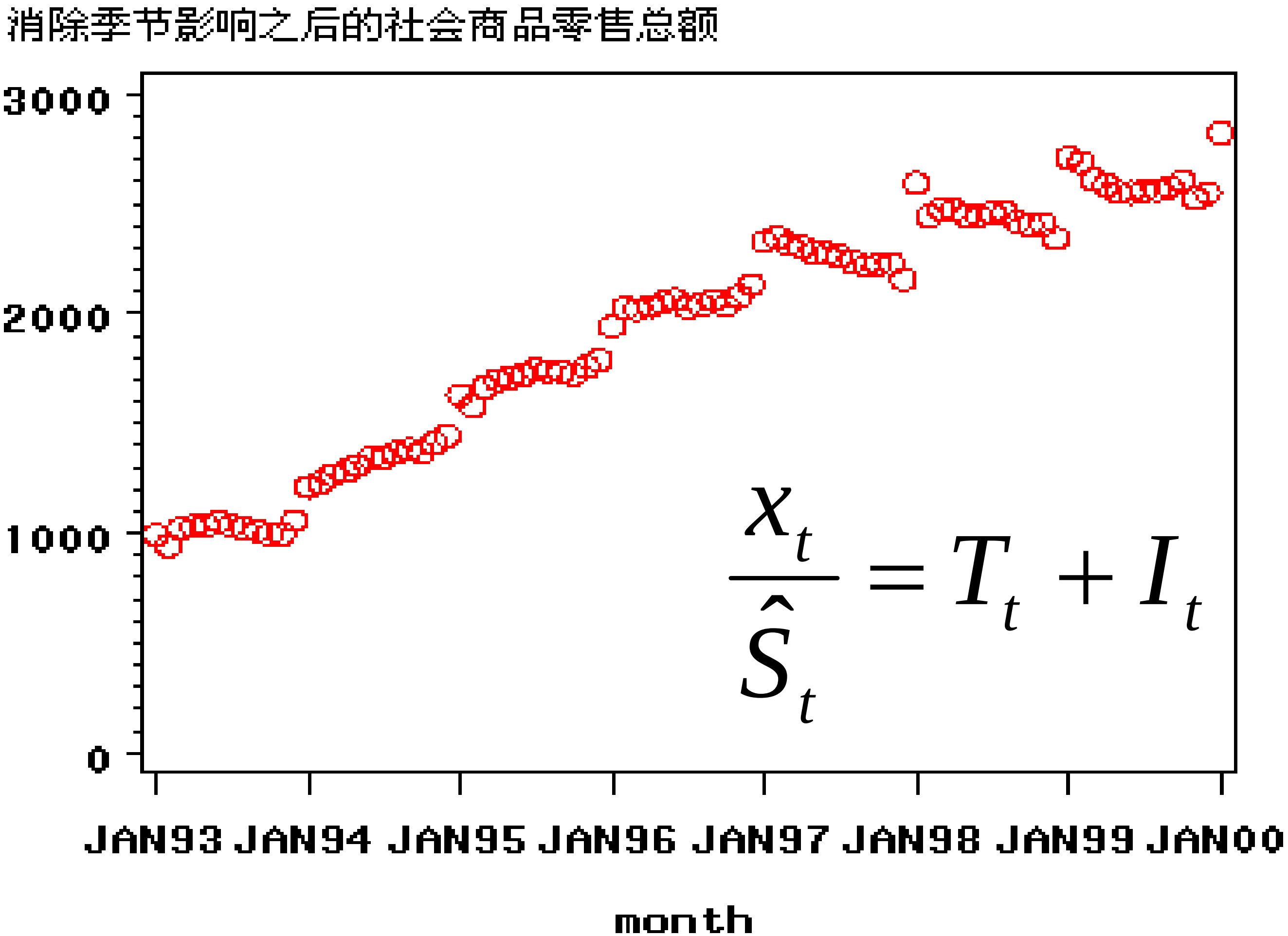
月份	季节指数	月份	季节指数
1	0.982	7	0.929
2	0.943	8	0.940
3	0.920	9	1.001
4	0.911	10	1.054
5	0.925	11	1.100
6	0.951	12	1.335

季节指数图



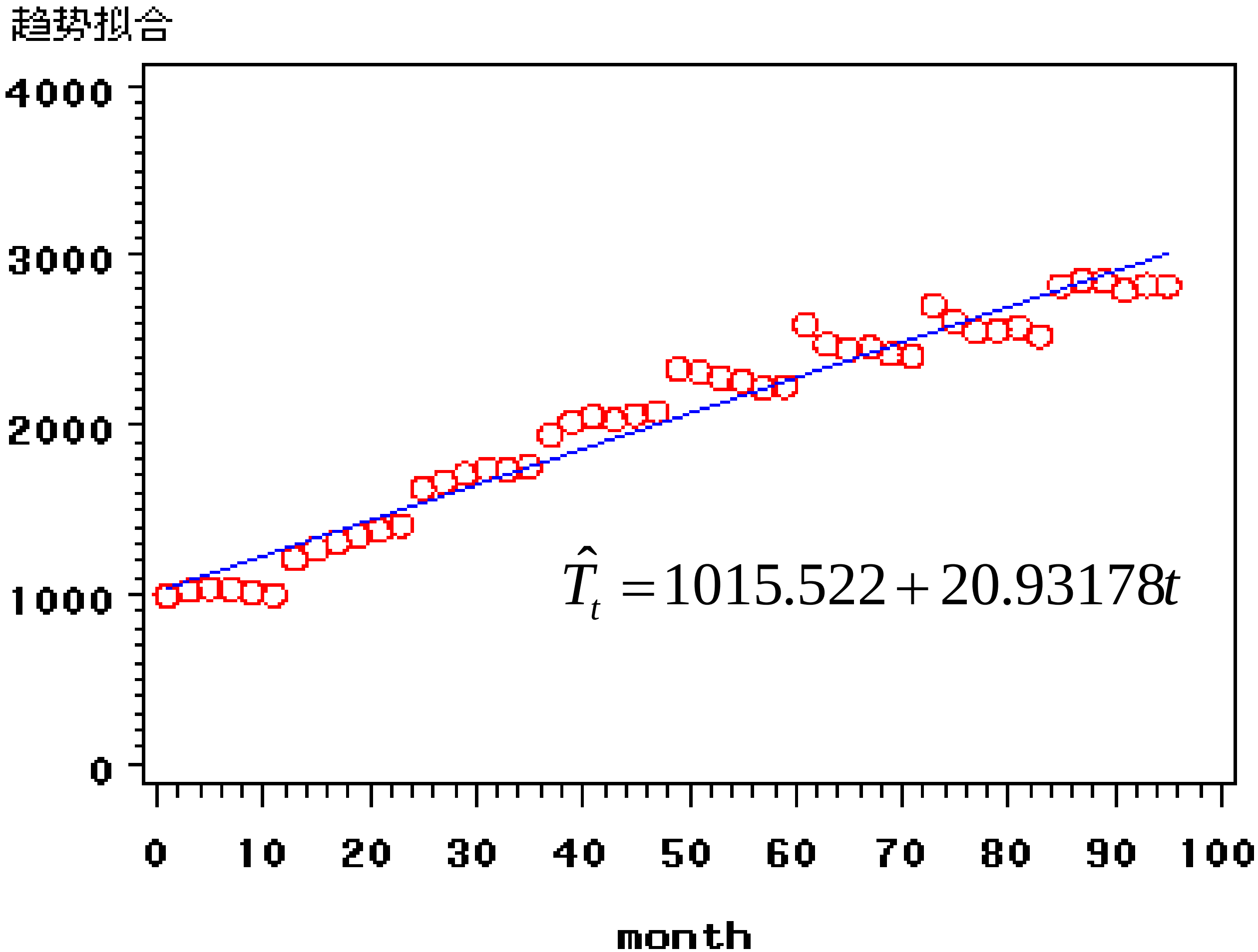
index
1.35
1.30
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
month

季节调整后的序列图



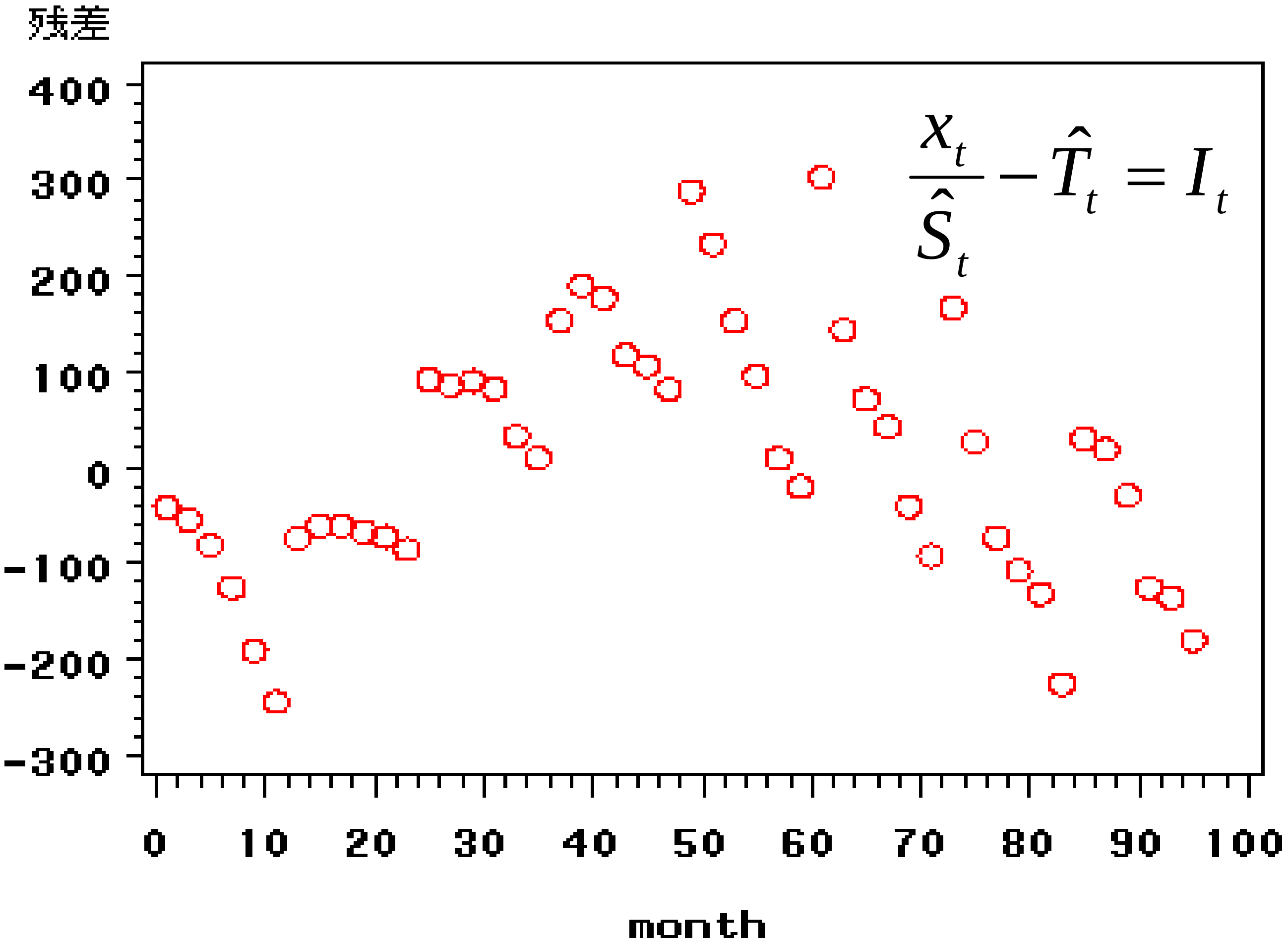
$$\frac{x_t}{\hat{S}_t} = T_t + I_t$$

(4)拟合长期趋势



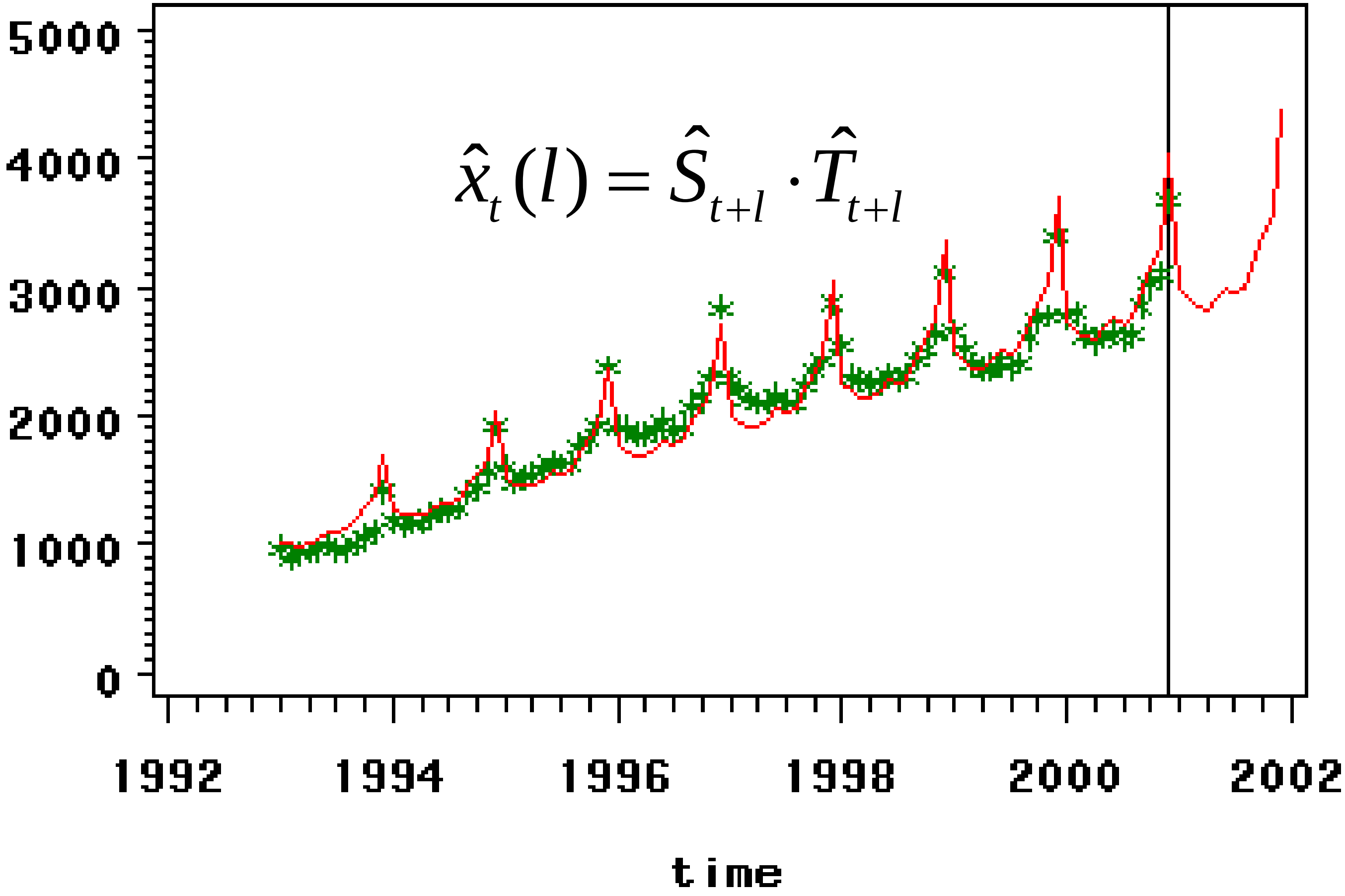
趋势拟合
4000
3000
2000
1000
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
month
$\hat{T}_t = 1015.522 + 20.93178t$

(5)残差检验


残差
400
300
200
100
0
-100
-200
-300
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
month
$\frac{x_t}{\hat{S}_t}-\hat{T}_t=I_t$

(6)短期预测

社会商品零售总额



X-11过程

- 简介
  - X-11过程是美国国情调查局编制的时间序列季节调整过程。它的基本原理就是时间序列的确定性因素分解方法
- 因素分解
  - 长期趋势起伏
  - 季节波动
  - 不规则波动
  - 交易日影响
- 模型
  - 加法模型
  - 乘法模型

方法特色

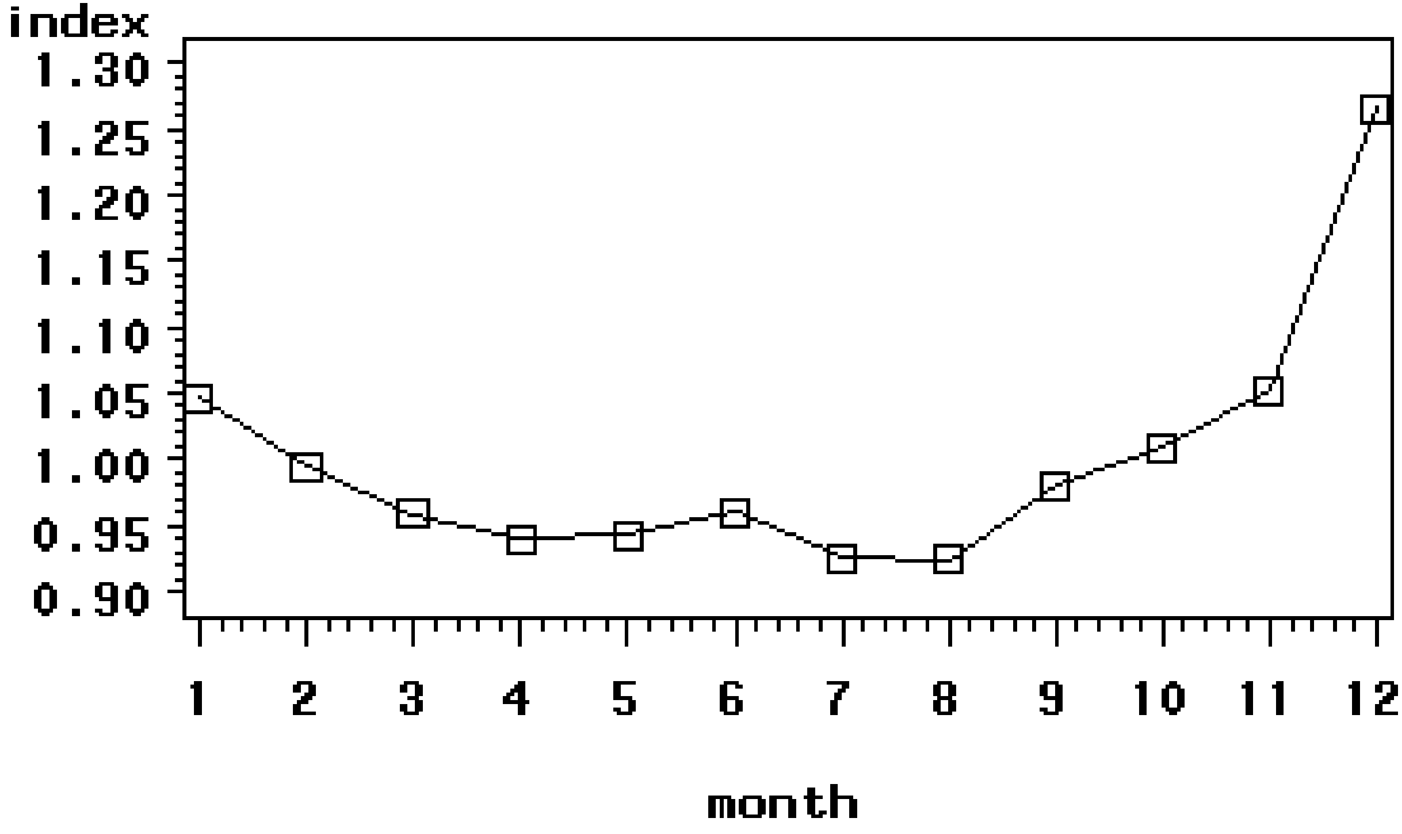
- 普遍采用移动平均的方法
  - 用多次短期中心移动平均消除随机波动
  - 用周期移动平均消除趋势
  - 用交易周期移动平均消除交易日影响

例4.7续

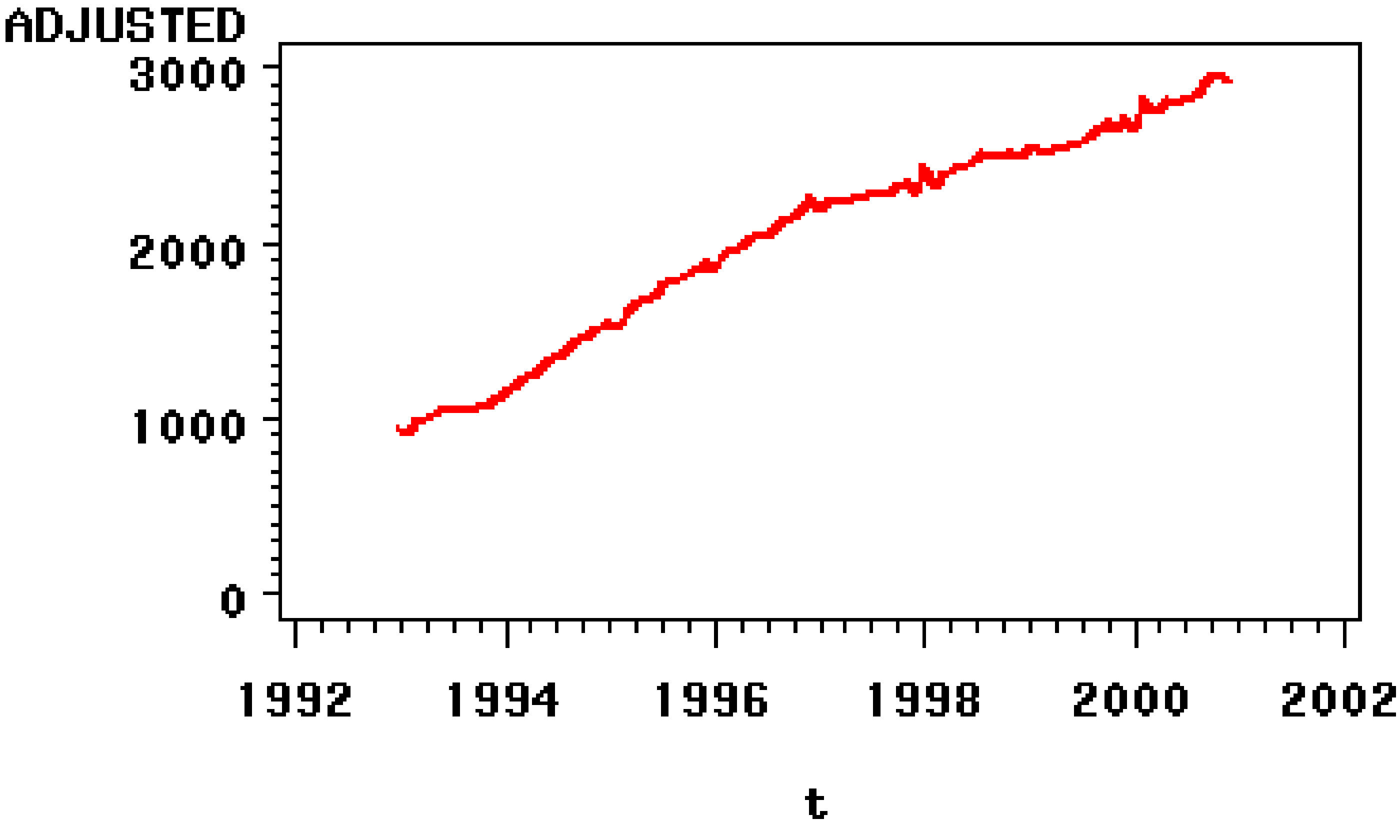
- 对1993年——2000年中国社会消费品零售总额序列使用X-11过程进行季节调整
- 选择模型（无交易日影响）

$$x_t = T_t S_t I_t$$

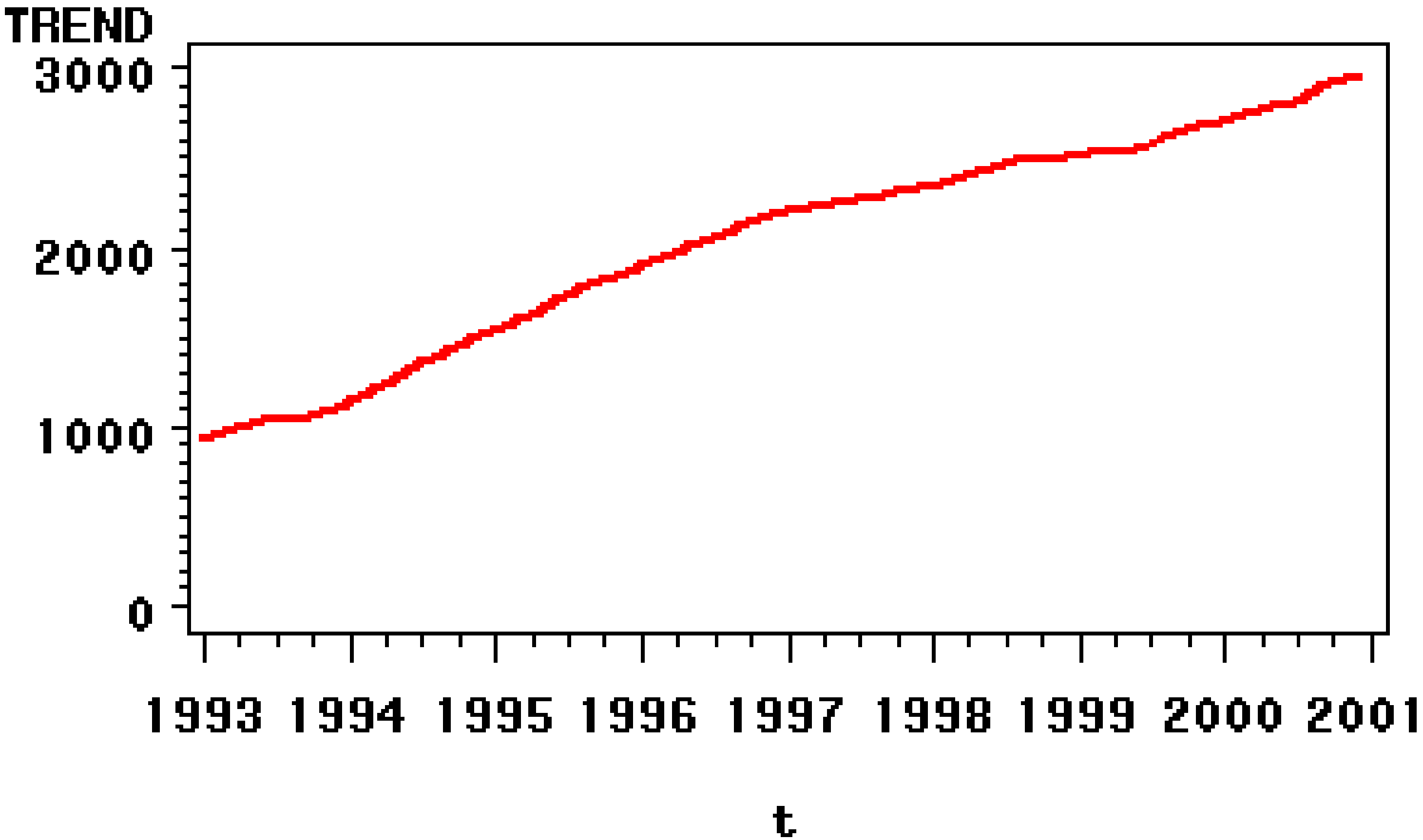
X11过程获得的季节指数图



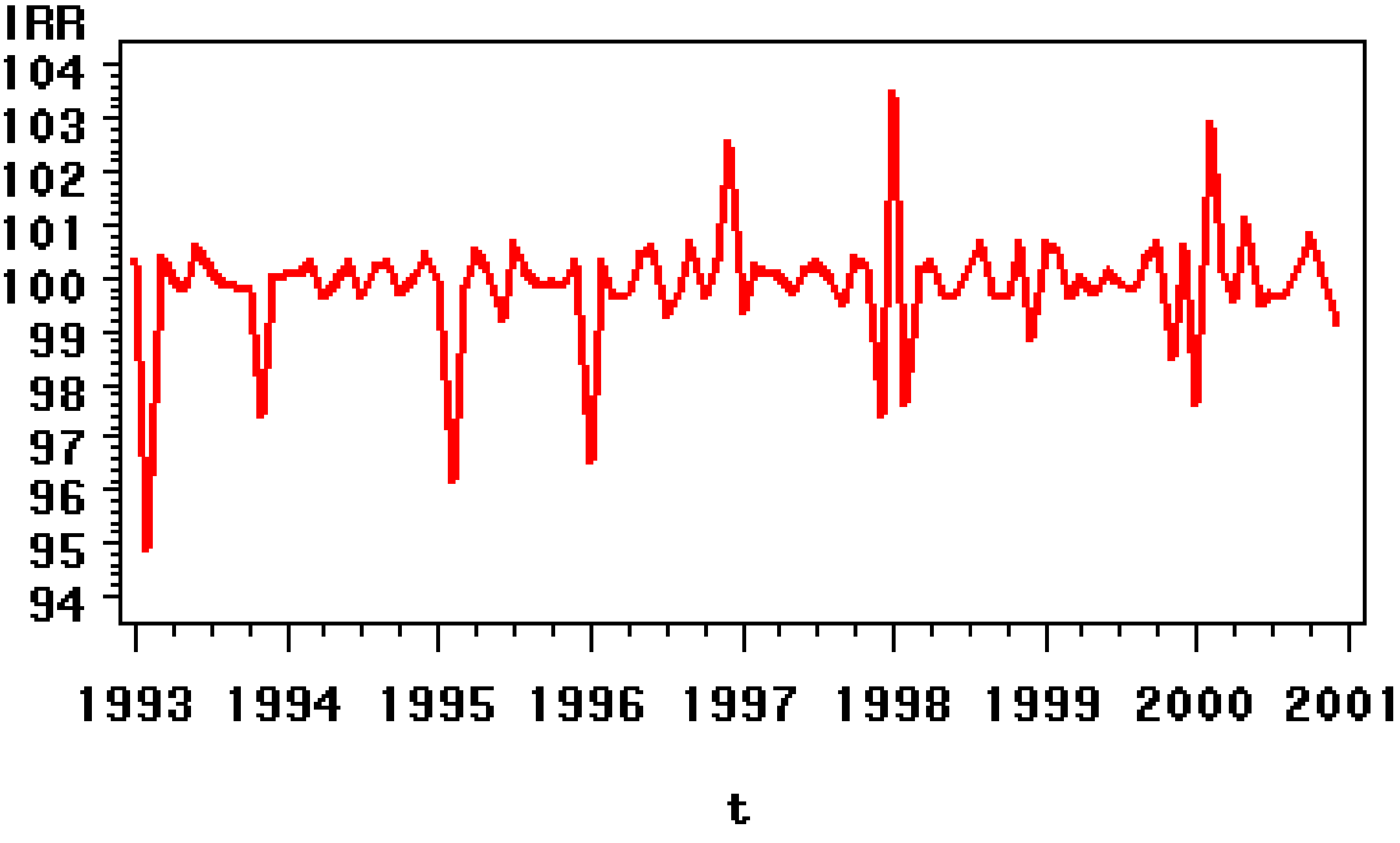
季节调整后的序列图



趋势拟合图


TREND
3000
2000
1000
0
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
t

随机波动序列图



IRR
104
103
102
101
100
99
98
97
96
95
94
1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001
t

第五章

非平稳序列的随机分析

本章结构

- 差分运算
- ARIMA模型
- Auto-Regressive模型
- 异方差的性质
- 方差齐性变化
- 条件异方差模型

5.1 差分运算

- 差分运算的实质
- 差分方式的选择
- 过差分

差分运算的实质

- 差分方法是一种非常简便、有效的确定性信息提取方法
- Cramer分解定理在理论上保证了适当阶数的差分一定可以充分提取确定性信息
- 差分运算的实质是使用自回归的方式提取确定性信息

$$\nabla^d x_t = (1-B)^d x_t = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i C_d^i x_{t-i}$$

差分方式的选择

- 序列蕴含着显著的线性趋势，一阶差分就可以实现趋势平稳
- 序列蕴含着曲线趋势，通常低阶（二阶或三阶）差分就可以提取出曲线趋势的影响
- 对于蕴含着固定周期的序列进行步长为周期长度的差分运算，通常可以较好地提取周期信息

例5.1

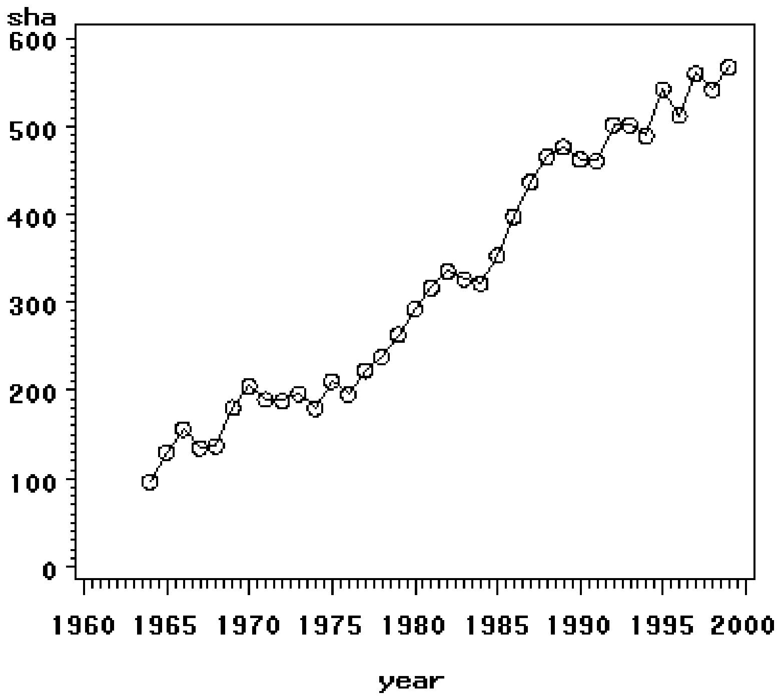
【例1.1】1964年——1999年中国纱年产量序列蕴含着一个近似线性的递增趋势。对该序列进行一阶差分运算

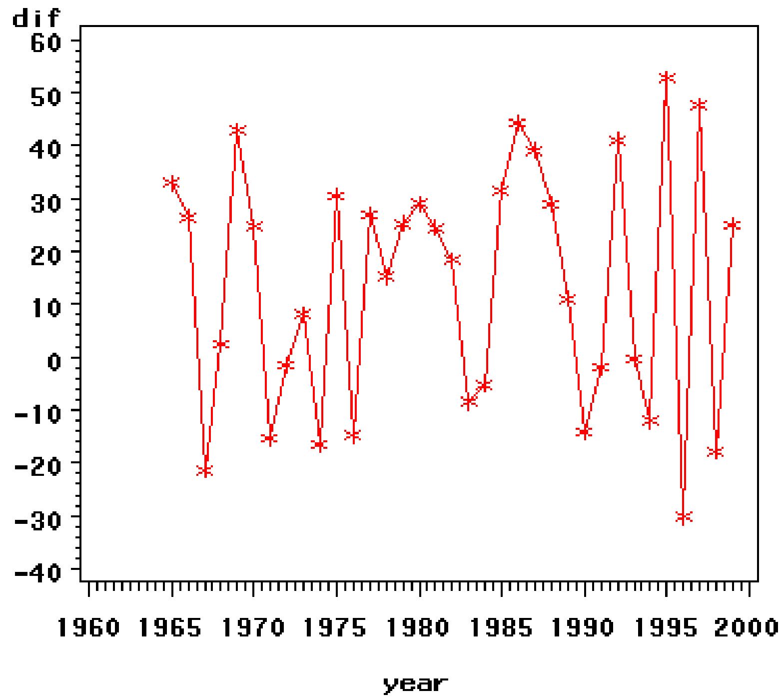
$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$

考察差分运算对该序列线性趋势信息的提取作用

差分前后时序图

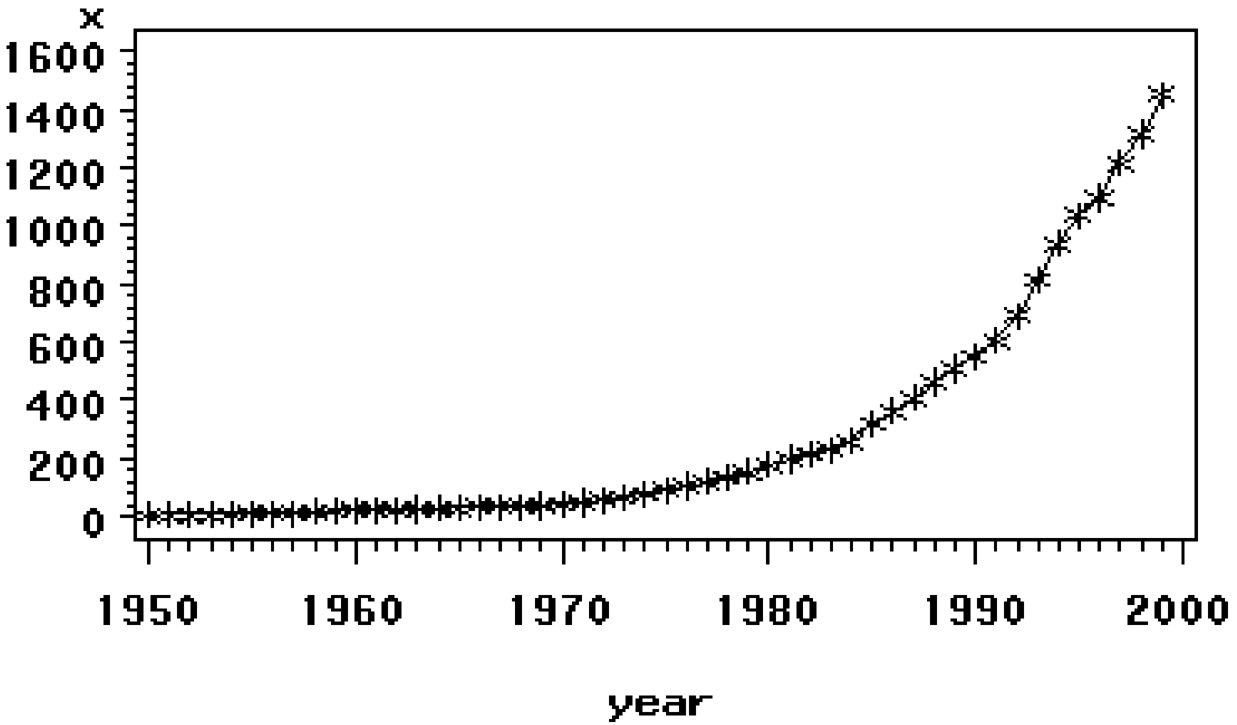
- 原序列时序图
- 差分后序列时序图





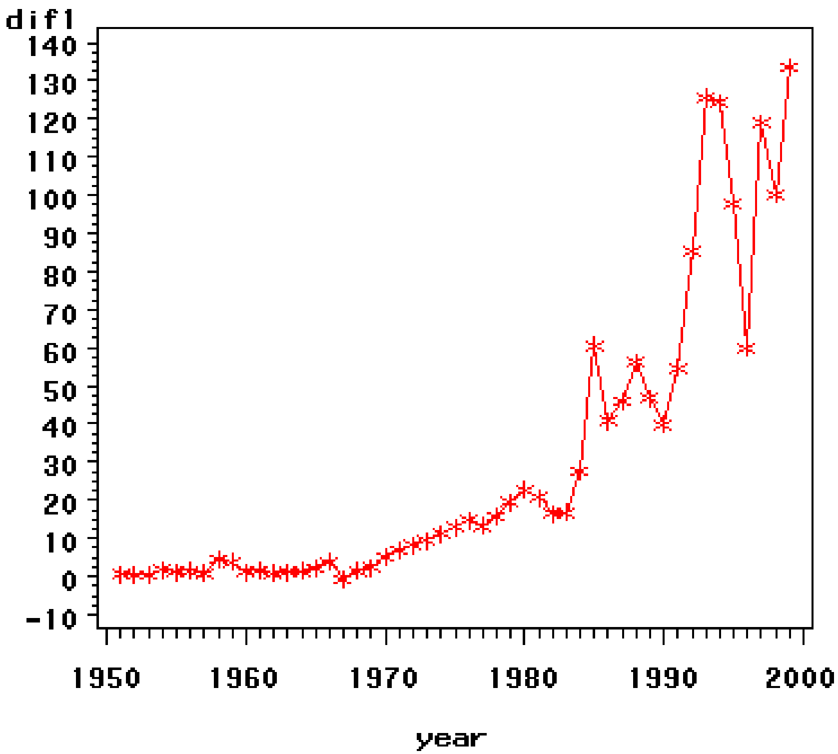
例5.2

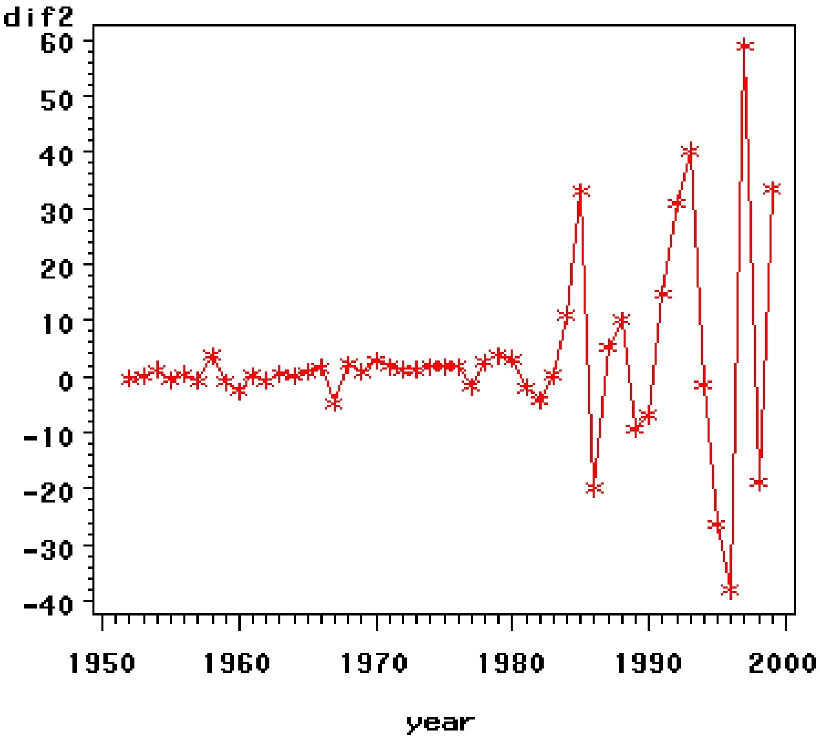
- 尝试提取1950年——1999年北京市民用车辆拥有量序列的确定性信息



差分后序列时序图

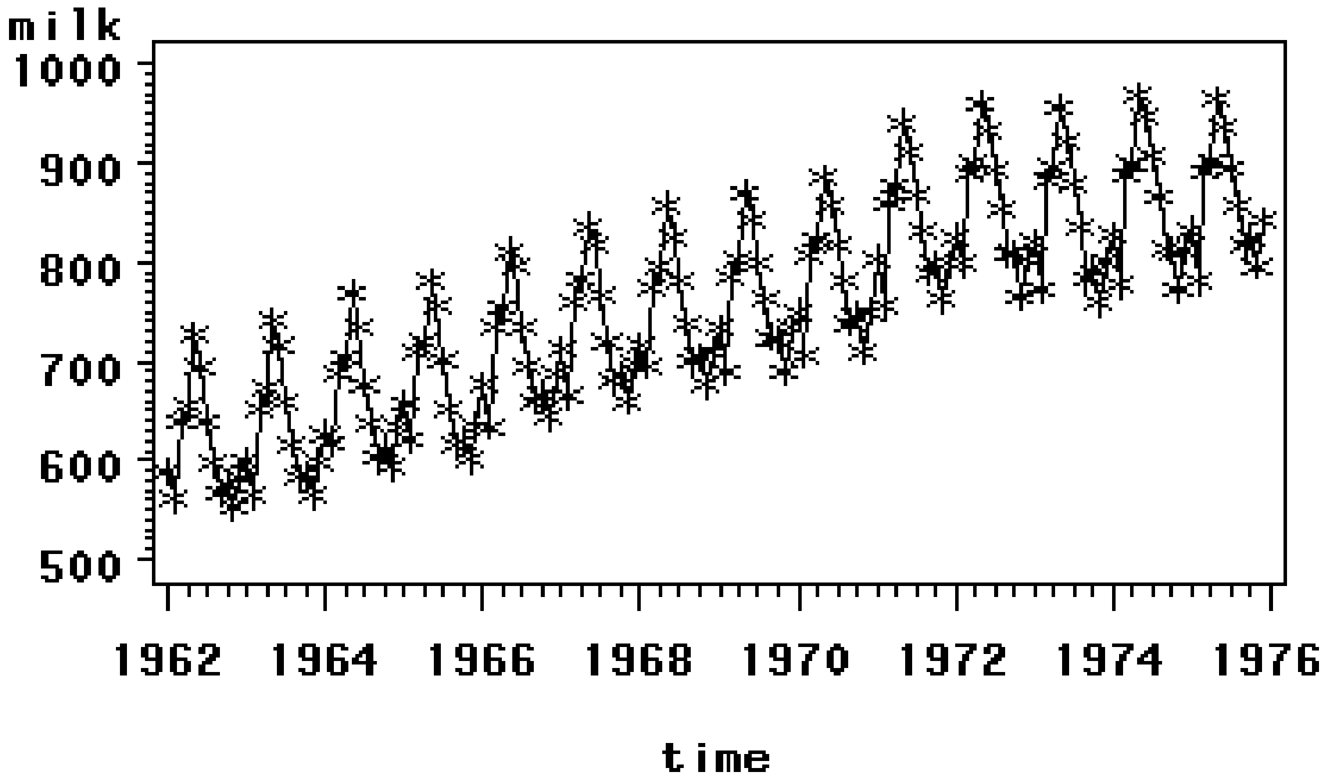
- 一阶差分
- 二阶差分





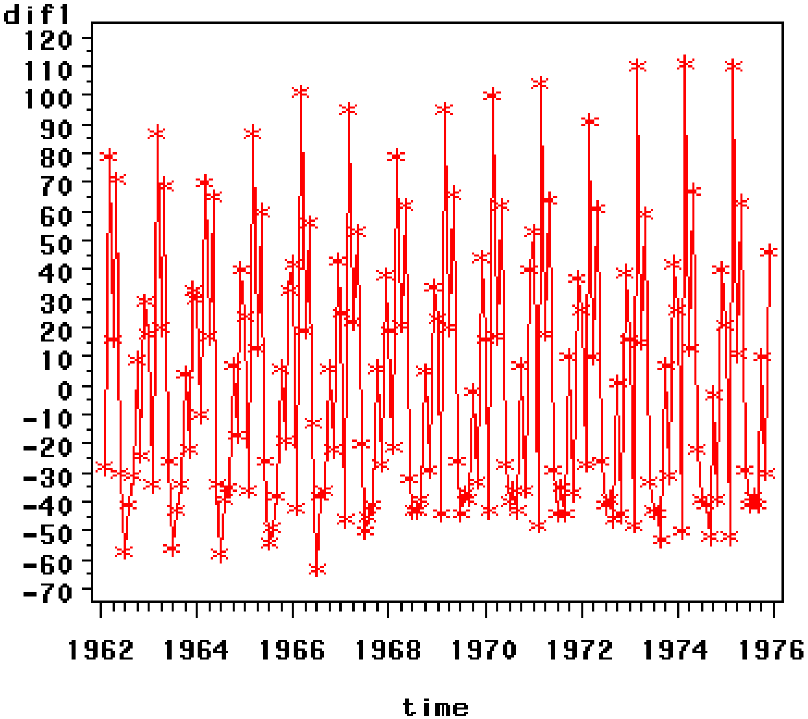
例5.3

- 差分运算提取1962年1月——1975年12月平均每头奶牛的月产奶量序列中的确定性信息

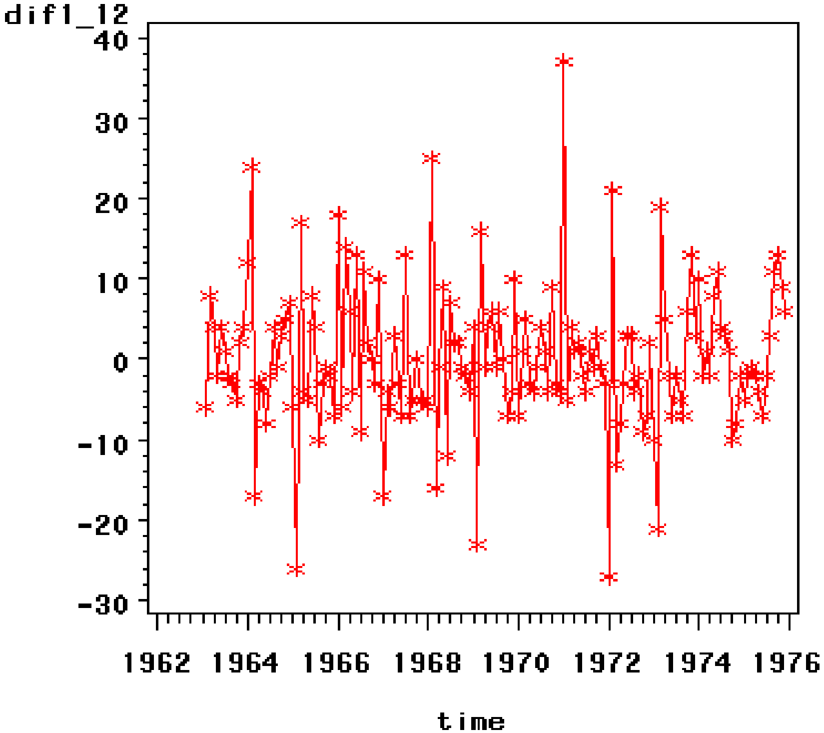


差分后序列时序图

- 一阶差分



- 1阶—12步差分



过差分

- 足够多次的差分运算可以充分地提取原序列中的非平稳确定性信息
- 但过度的差分会造成有用信息的浪费

例5.4

- 假设序列如下

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$$

- 考察一阶差分后序列和二阶差分序列的平稳性与方差

比较

- 一阶差分
  - 平稳

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$$
$$= \beta_1 + a_t - a_{t-1}$$

  - 方差小

$$Var(\nabla x_t) = Var(a_t - a_{t-1})$$
$$= 2\sigma^2$$

- 二阶差分（过差分）
  - 平稳

$$\nabla^2 x_t = \nabla x_t - \nabla x_{t-1}$$
$$= a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}$$

  - 方差大

$$Var(\nabla^2 x_t) = Var(a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2})$$
$$= 6\sigma^2$$

5.2 ARIMA模型

- ARIMA模型结构
- ARIMA模型性质
- ARIMA模型建模
- ARIMA模型预测
- 疏系数模型
- 季节模型

ARIMA模型结构

- 使用场合
  - 差分平稳序列拟合
- 模型结构

$$\begin{cases} \Phi(B)\nabla^d x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ Ex_s\varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{cases}$$

ARIMA 模型族

- d=0

  ARIMA(p,d,q)=ARMA(p,q)
- P=0

  ARIMA(P,d,q)=IMA(d,q)
- q=0

  ARIMA(P,d,q)=ARI(p,d)
- d=1,P=q=0

  ARIMA(P,d,q)=random walk model

随机游走模型(random walk)

- 模型结构

$$
\begin{cases}
x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \\
E(\varepsilon_t) = 0,\quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\
Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t
\end{cases}
$$

- 模型产生典故
  - Karl Pearson(1905)在《自然》杂志上提问：假如有个醉汉醉得非常严重，完全丧失方向感，把他放在荒郊野外，一段时间之后再去找他，在什么地方找到他的概率最大呢？

ARIMA模型的平稳性

- ARIMA(p,d,q)模型共有p+d个特征根，其中p个在单位圆内，d个在单位圆上。所以当$d \neq 0$时ARIMA(p,d,q)模型非平稳。

- 例5.5

  ARIMA(0,1,0)时序图

ARIMA模型的方差齐性

- $d \neq 0$时，原序列方差非齐性

$ARIMA(0,1,0)$模型

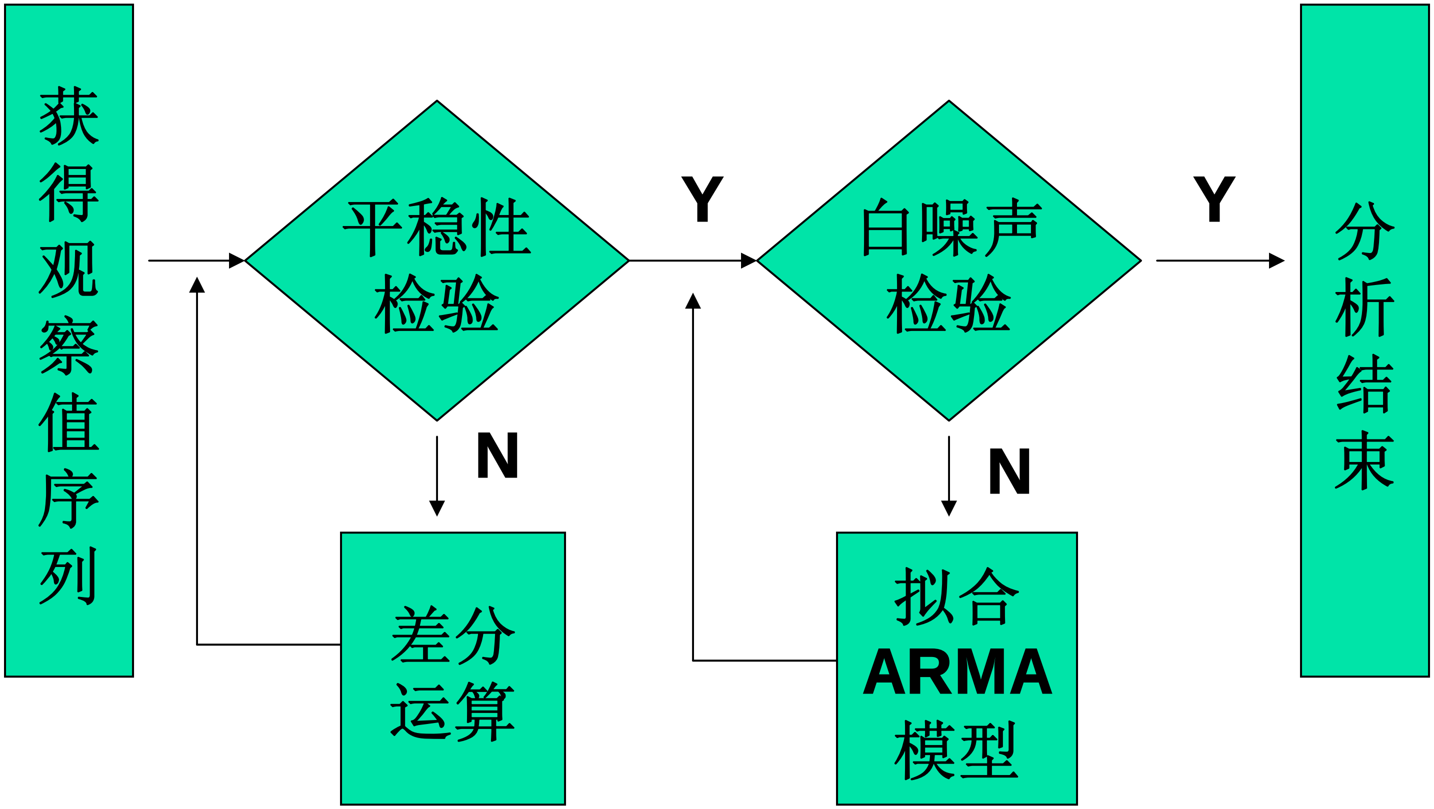
$$Var(x_t) = Var(x_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \Lambda\ \varepsilon_1) = t\sigma_\varepsilon^2$$

- d阶差分后，差分后序列方差齐性

$ARIMA(0,1,0)$模型

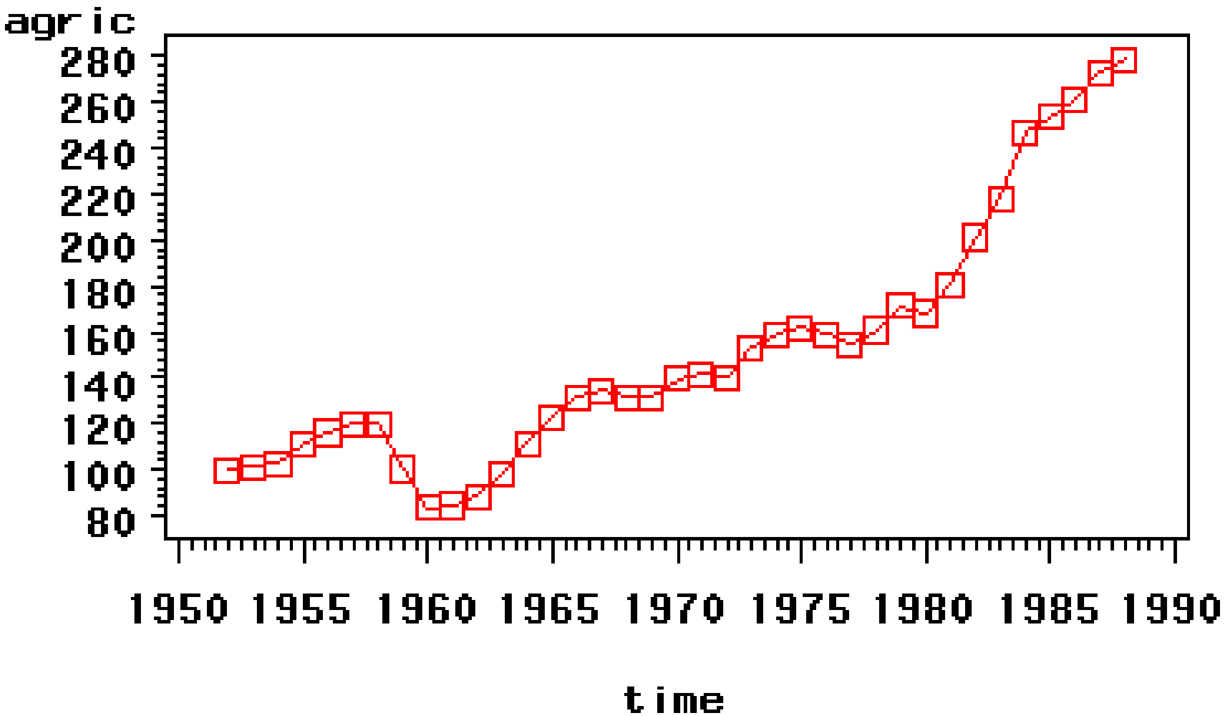
$$Var(\nabla x_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

ARIMA模型建模步骤

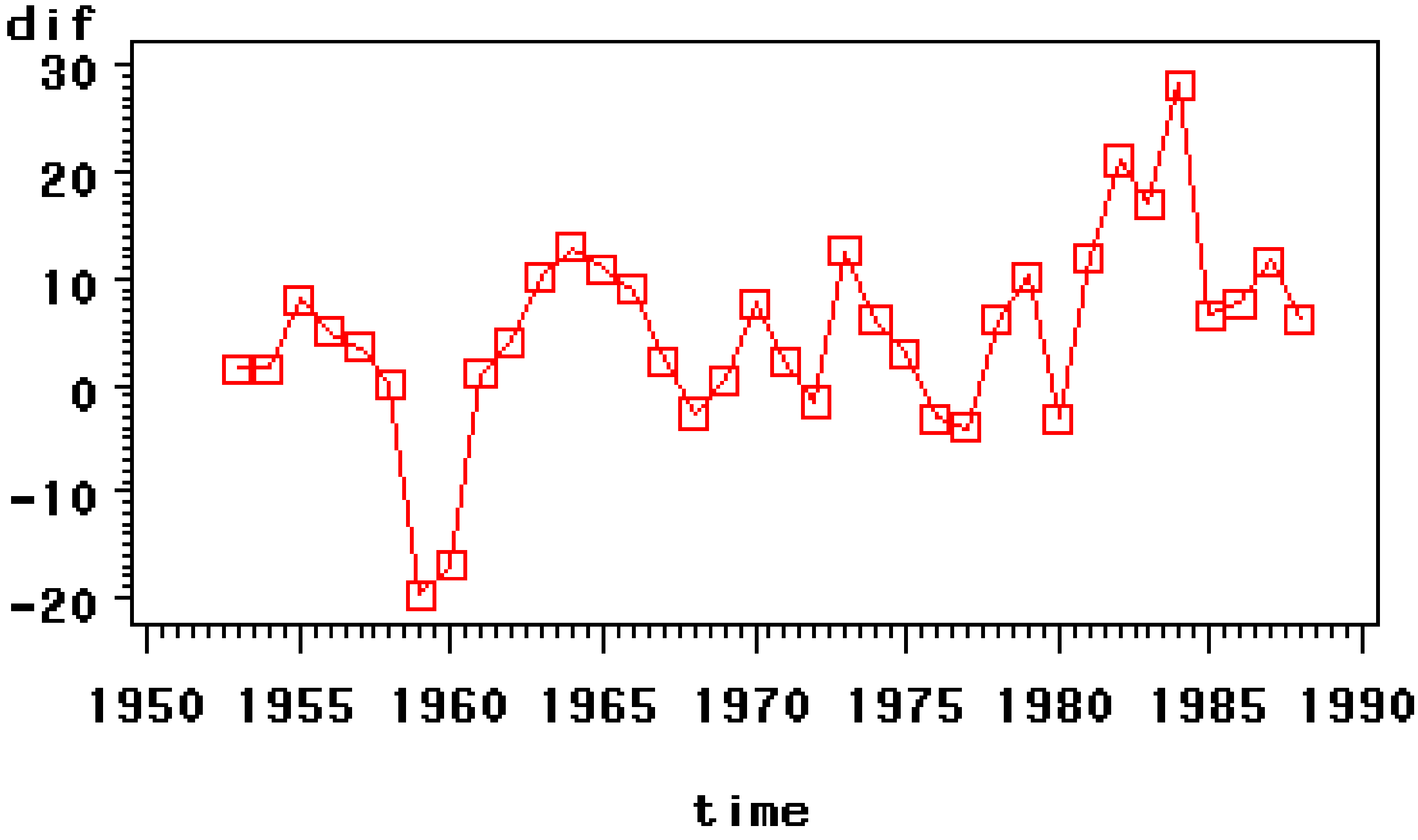


例5.6

- 对1952年——1988年中国农业实际国民收入指数序列建模



一阶差分序列时序图



dif
30
20
10
0
-10
-20
1950 1955 1960 1965 1970 1975 1980 1985 1990
time

一阶差分序列自相关图

```
                                          Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0     78.239167       1.00000     |                   |********************|
  1     42.075733       0.53778     |            .      |***********         |
  2     16.246605       0.20765     |           .       |****   .            |
  3      7.058588       0.09022     |          .        |**      .           |
  4    -11.132207       -.14228     |          .     ***|        .           |
  5     -7.917076       -.10119     |          .      **|        .           |
  6     -9.245185       -.11817     |          .      **|        .           |
  7    -11.564313       -.14781     |          .     ***|        .           |
  8      7.108735       0.09086     |          .        |**      .           |
  9     12.965116       0.16571     |          .        |***     .           |
 10     -0.909105       -.01162     |          .        |        .           |
 11     -2.455085       -.03138     |          .       *|        .           |
 12     -3.501852       -.04476     |          .       *|        .           |
 13     -6.583063       -.08414     |          .      **|        .           |
 14     -7.883765       -.10076     |          .      **|        .           |
 15     -4.783310       -.06114     |          .       *|        .           |
 16      2.087515       0.02668     |          .        |*       .           |
 17     12.894776       0.16481     |          .        |***     .           |
 18     15.631250       0.19979     |          .        |****    .           |

                            "." marks two standard errors
```

一阶差分后序列白噪声检验

延迟阶数	χ^2统计量	P值
6	15.33	0.0178
12	18.33	0.1060
18	24.66	0.1344

拟合ARMA模型

- 偏自相关图

```
                          Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1        0.53778    |             .      |***********         |
   2       -0.11474    |             .    **|      .             |
   3        0.03912    |             .      |*     .             |
   4       -0.27003    |             . *****|      .             |
   5        0.16219    |             .      |***   .             |
   6       -0.17787    |             .  ****|      .             |
   7        0.03051    |             .      |*     .             |
   8        0.21004    |             .      |****  .             |
   9        0.02902    |             .      |*     .             |
  10       -0.25795    |             . *****|      .             |
  11        0.04421    |             .      |*     .             |
  12        0.04346    |             .      |*     .             |
  13       -0.03857    |             .     *|      .             |
  14       -0.15591    |             .   ***|      .             |
  15        0.21892    |             .      |****  .             |
  16        0.00855    |             .      |      .             |
  17        0.05496    |             .      |*     .             |
  18        0.01825    |             .      |      .             |
```

建模

- 定阶
  - ARIMA(0,1,1)
- 参数估计

$$(1-B)x_t = 4.99661 + (1+0.70766B)\varepsilon_t$$

$$Var(\varepsilon_t) = 56.48763$$

- 模型检验
  - 模型显著
  - 参数显著

ARIMA模型预测

- 原则
  - 最小均方误差预测原理
- Green函数递推公式

$$
\begin{cases}
\psi_1 = \phi_1 - \theta_1 \\
\psi_2 = \phi_1 \psi_1 + \phi_2 - \theta_2 \\
\vdots \\
\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \cdots + \phi_{p+d} \psi_{j-p-d} - \theta_j
\end{cases}
$$

预测值

$$x_{t+l}=\underbrace{(\varepsilon_{t+l}+\psi_1\varepsilon_{t+l-1}+\Lambda+\psi_{l-1}\varepsilon_{t+1})}_{e_t(l)}+\underbrace{(\psi_l\varepsilon_t+\psi_{l+1}\varepsilon_{t-1}+\Lambda)}_{\hat{x}_t(l)}$$

$$E[e_t(l)]=0$$

$$Var[e_t(l)]=(1+\psi_1^2+\Lambda+\psi_{l-1}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

例5.7

- 已知ARIMA(1,1,1)模型为

$$(1-0.8B)(1-B)x_t = (1-0.6B)\varepsilon_t$$

且 $x_{t-1} = 4.5 \quad x_t = 5.3 \quad \varepsilon_t = 0.8 \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1$

- 求 x_{t+3} 的95％的置信区间

预测值

- 等价形式

$$(1-1.8B+0.8B^2)x_t=(1-0.6B)\varepsilon_t$$

$$x_t=1.8x_{t-1}-0.8x_{t-2}+\varepsilon_t-0.6\varepsilon_{t-1}$$

- 计算预测值

$$\hat{x}_t(1)=1.8x_t-0.8x_{t-1}-0.6\varepsilon_t=5.46$$

$$\hat{x}_t(2)=1.8\hat{x}_t(1)-0.8x_t=5.59$$

$$\hat{x}_t(3)=1.8\hat{x}_t(2)-0.8\hat{x}_t(1)=5.69$$

计算置信区间

- Green函数值

$$\begin{cases}\psi_1 = 1.8 - 0.6 = 1.2 \\ \psi_2 = 1.8\psi_1 - 0.8 = 1.36\end{cases}$$

- 方差

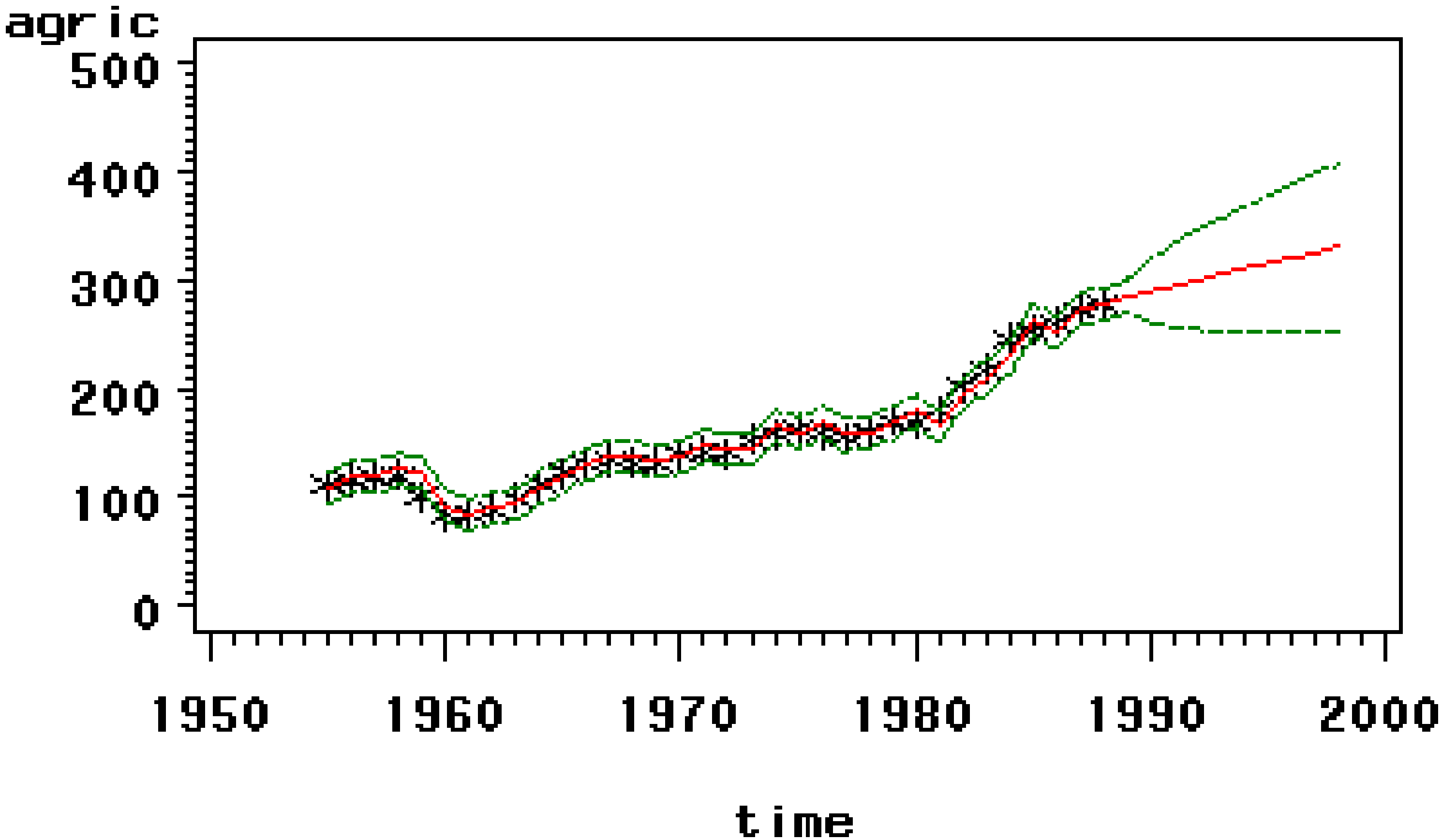
$$Var[e(3)] = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 4.2896$$

- 95％置信区间

$$(\hat{x}_t(3) - 1.96\sqrt{Var(e(3))}\ ,\ \hat{x}_t(3) + 1.96\sqrt{Var(e(3))}\ )$$

$$\Rightarrow (1.63, 9.75)$$

例5.6续：对中国农业实际国民收入指数序列做为期10年的预测



疏系数模型

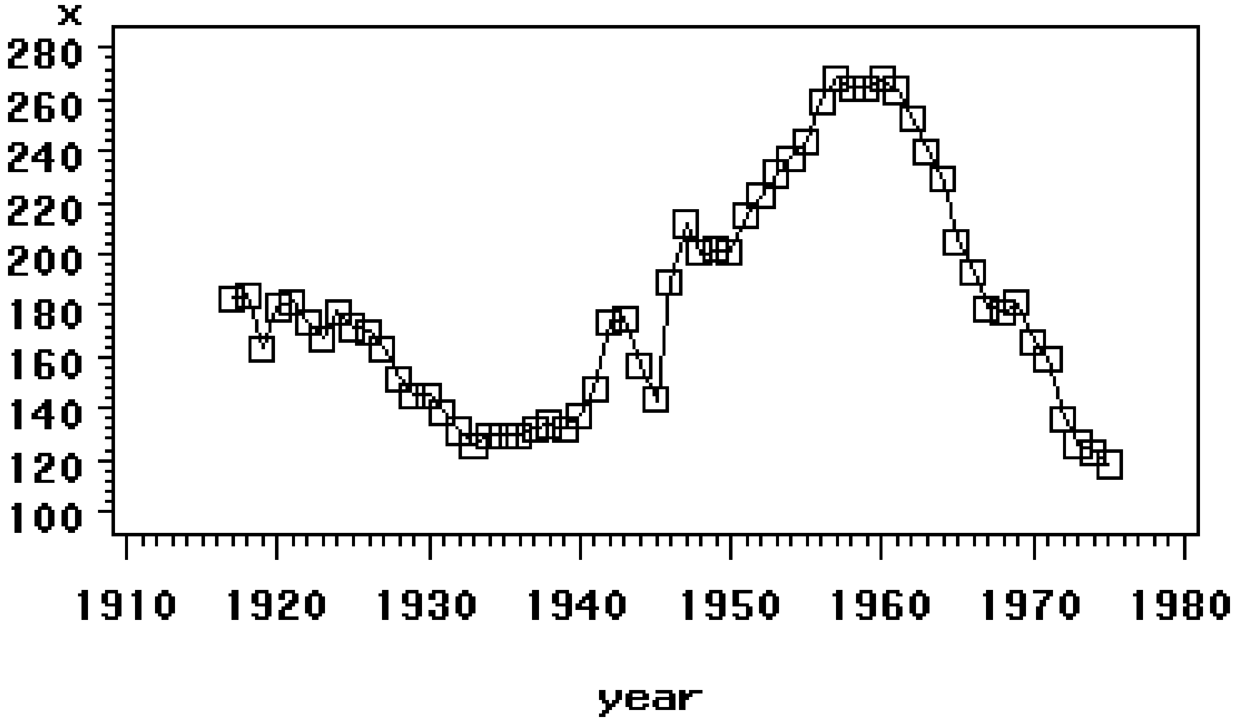
- ARIMA(p,d,q)模型是指d阶差分后自相关最高阶数为p，移动平均最高阶数为q的模型，通常它包含p+q个独立的未知系数：$\phi_1,\Lambda\ ,\phi_p,\theta_1,\Lambda\ ,\theta_q$
- 如果该模型中有部分自相关系数$\phi_j,1\le j<p$或部分移动平滑系数$\theta_k,1\le k<q$为零，即原模型中有部分系数省缺了，那么该模型称为疏系数模型。

疏系数模型类型

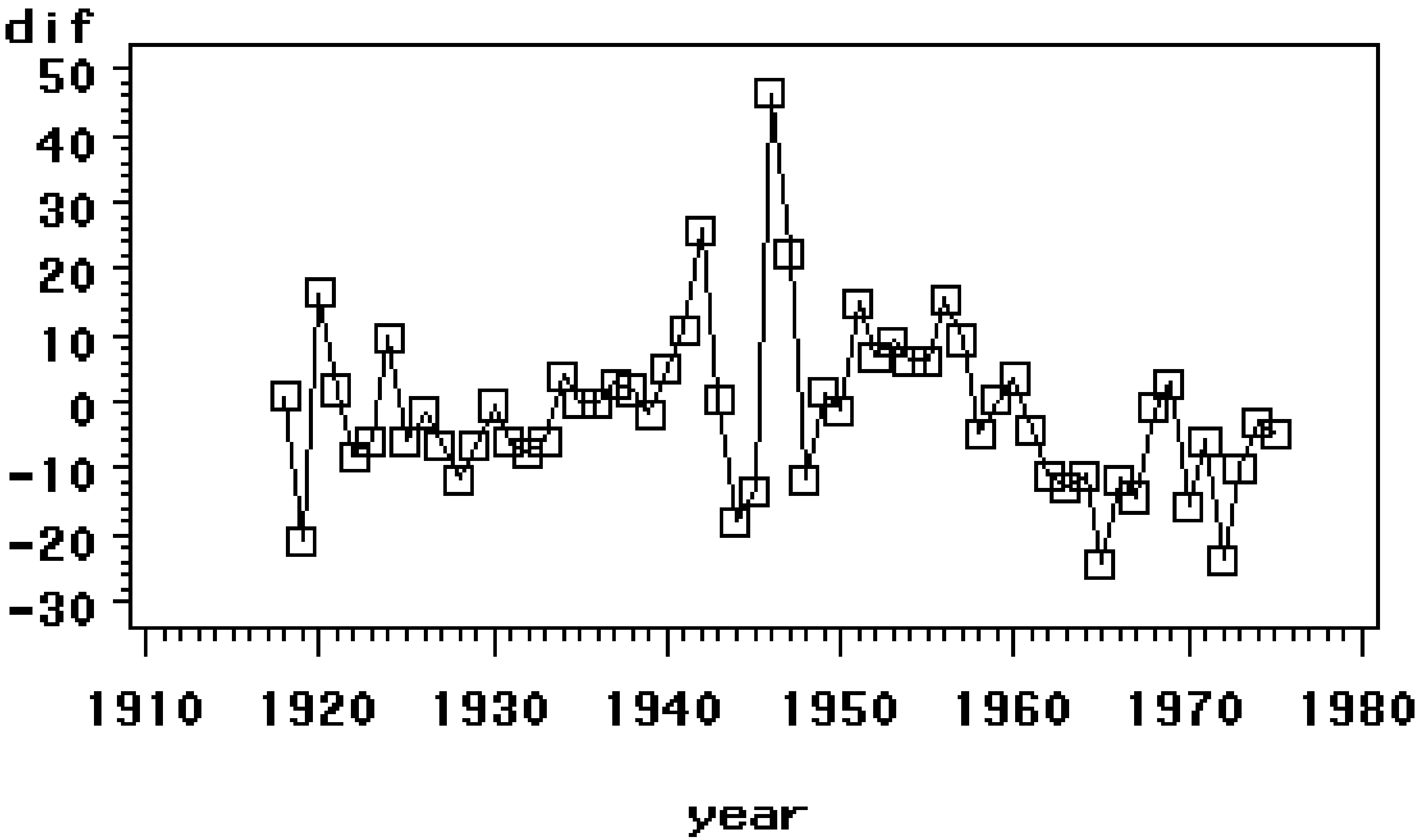
- 如果只是自相关部分有省缺系数，那么该疏系数模型可以简记为$ARIMA((p_1,\Lambda\ ,p_m),d,q)$
  - $p_1,\Lambda\ ,p_m$ 为非零自相关系数的阶数
- 如果只是移动平滑部分有省缺系数，那么该疏系数模型可以简记为$ARIMA(p,d,(q_1,\Lambda\ ,q_n))$
  - $q_1,\Lambda\ ,q_n$ 为非零移动平均系数的阶数
- 如果自相关和移动平滑部分都有省缺，可以简记为$ARIMA((p_1,\Lambda\ ,p_m),d,(q_1,\Lambda\ ,q_n))$

例5.8

- 对1917年－1975年美国23岁妇女每万人生育率序列建模



一阶差分



dif
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
year

自相关图

```
                                               Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0       145.928        1.00000    |                    |********************|
  1     41.471097        0.28419    |               .    |******              |
  2     -6.153942        -.04217    |              .    *|     .              |
  3     11.679824        0.08004    |              .     |**   .              |
  4     47.775344        0.32739    |              .     |*******             |
  5     47.552927        0.32586    |              .     |*******             |
  6     21.691431        0.14864    |             .      |***   .             |
  7      9.102516        0.06238    |             .      |*     .             |
  8      3.544593        0.02429    |             .      |      .             |
  9     12.658538        0.08674    |             .      |**    .             |
 10     13.544854        0.09282    |             .      |**    .             |
 11     -5.308811        -.03638    |             .     *|      .             |
 12    -10.154165        -.06958    |             .     *|      .             |
 13     -6.521036        -.04469    |             .     *|      .             |
 14     -7.235034        -.04958    |             .     *|      .             |
 15    -16.998688        -.11649    |             .    **|      .             |
 16    -18.817139        -.12895    |             .   ***|      .             |
 17    -10.170169        -.06969    |             .     *|      .             |
 18    -21.791201        -.14933    |             .   ***|      .             |

                                     "." marks two standard errors
```

偏自相关图

Partial Autocorrelations

```
Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.28419    |               .    |******              |
  2       -0.13373    |               . ***|    .               |
  3        0.14580    |               .    |*** .               |
  4        0.28405    |               .    |******              |
  5        0.19604    |               .    |****.               |
  6        0.07973    |               .    |**  .               |
  7        0.02965    |               .    |*   .               |
  8       -0.10604    |               .  **|    .               |
  9       -0.05098    |               .   *|    .               |
 10       -0.06054    |               .   *|    .               |
 11       -0.14640    |               . ***|    .               |
 12       -0.05923    |               .   *|    .               |
 13       -0.05089    |               .   *|    .               |
 14       -0.06281    |               .   *|    .               |
 15       -0.07425    |               .   *|    .               |
 16       -0.03383    |               .   *|    .               |
 17        0.02752    |               .    |*   .               |
 18       -0.08911    |               .  **|    .               |
```

建模

- 定阶
  - ARIMA((1,4),1,0)
- 参数估计

$$(1-B)x_t = \frac{1}{1-0.26633B-0.33597B^4}\varepsilon_t$$

- 模型检验
  - 模型显著
  - 参数显著

季节模型

- 简单季节模型
- 乘积季节模型

简单季节模型

- 简单季节模型是指序列中的季节效应和其它效应之间是加法关系

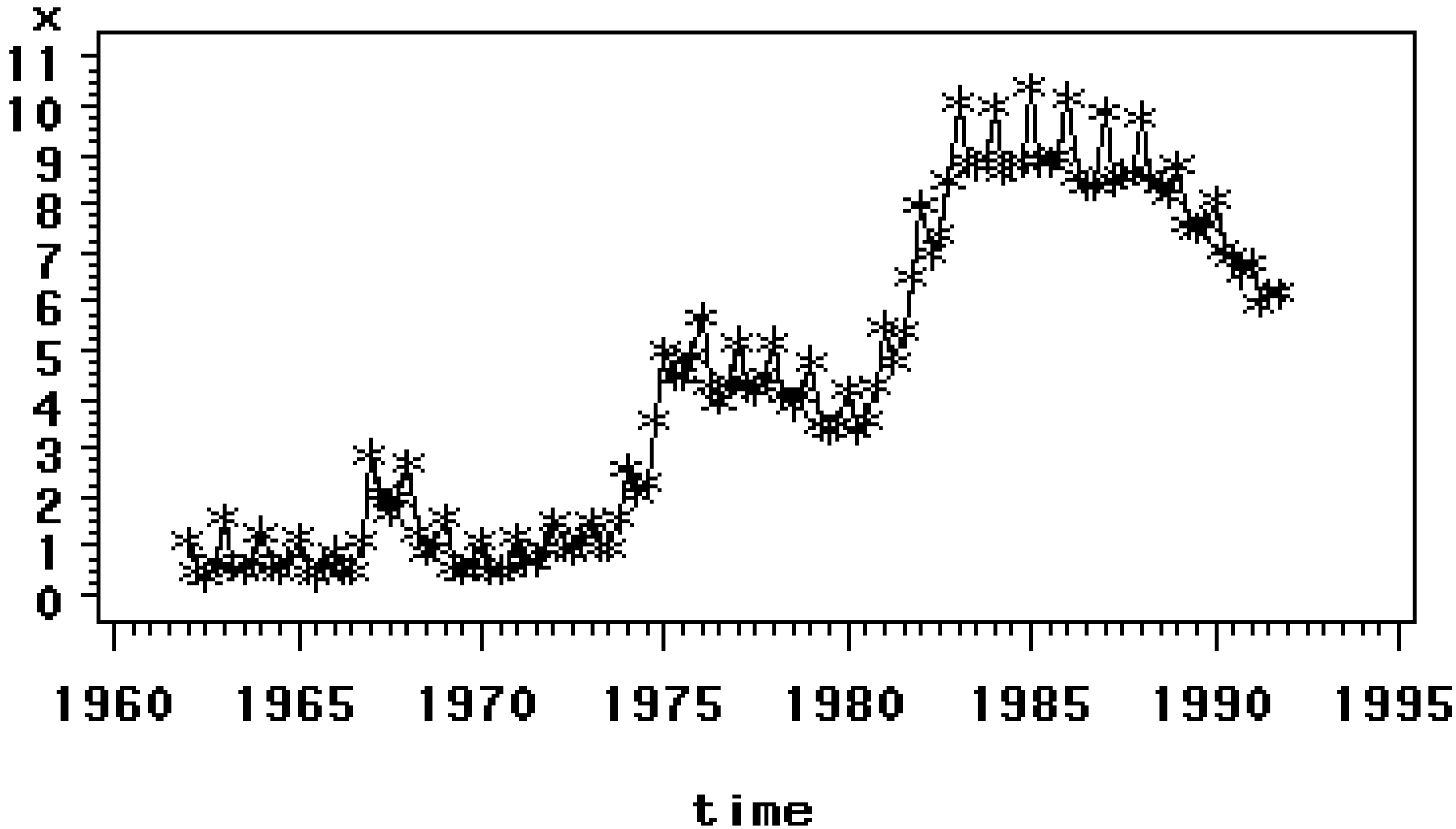
$$x_t = S_t + T_t + I_t$$

- 简单季节模型通过简单的趋势差分、季节差分之后序列即可转化为平稳，它的模型结构通常如下

$$\nabla_D \nabla^d x_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

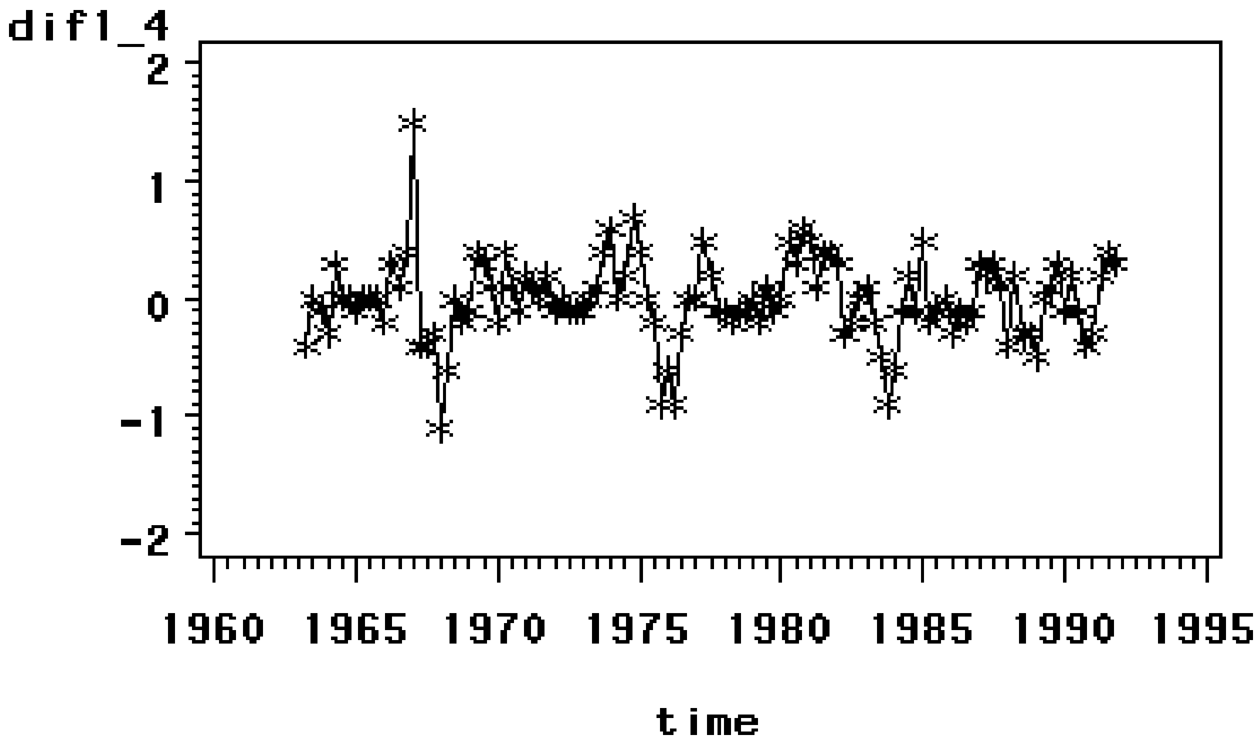
例5.9

- 拟合1962——1991年德国工人季度失业率序列



差分平稳

- 对原序列作一阶差分消除趋势，再作4步差分消除季节效应的影响，差分后序列的时序图如下



白噪声检验

延迟阶数	χ^2统计量	P值
6	43.84	<0.0001
12	51.71	<0.0001
18	54.48	<0.0001

差分后序列自相关图

```
                                         Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   0      0.124721        1.00000     |                    |********************|
   1      0.052641        0.42207     |                .   |********            |
   2      0.023569        0.18898     |                .   |****                |
   3     0.0090404        0.07248     |                .   |*  .                |
   4     -0.029789        -.23884     |               *****|   .                |
   5     -0.029783        -.23879     |               *****|    .               |
   6     -0.022559        -.18087     |               .****|    .               |
   7     -0.024312        -.19493     |               .****|    .               |
   8     -0.011082        -.08885     |               .  **|    .               |
   9    -0.0074505        -.05974     |               .   *|    .               |
  10     0.0027160        0.02178     |               .    |    .               |
  11     0.0027155        0.02177     |               .    |    .               |
  12     -0.013672        -.10962     |               .  **|    .               |
  13    -0.0025423        -.02038     |               .    |    .               |
  14    -0.0033988        -.02725     |               .   *|    .               |
  15     -0.015005        -.12031     |               .  **|    .               |
  16     0.0021367        0.01713     |               .    |    .               |
  17     0.0070261        0.05633     |               .    |*   .               |
  18    -0.0046198        -.03704     |               .   *|    .               |

                          "." marks two standard errors
```

差分后序列偏自相关图

```
                    Partial Autocorrelations

Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.42207    |                .   |********            |
  2        0.01319    |                .   |   .                |
  3       -0.01435    |                .   |   .                |
  4       -0.32452    |              ******|   .                |
  5       -0.03822    |                .  *|   .                |
  6       -0.01721    |                .   |   .                |
  7       -0.07052    |                .  *|   .                |
  8       -0.03361    |                .  *|   .                |
  9       -0.07938    |                . **|   .                |
 10        0.05648    |                .   |*  .                |
 11       -0.07772    |                . **|   .                |
 12       -0.19344    |                ****|   .                |
 13        0.04133    |                .   |*  .                |
 14       -0.01802    |                .   |   .                |
 15       -0.12741    |                .***|   .                |
 16        0.01261    |                .   |   .                |
 17        0.03710    |                .   |*  .                |
 18       -0.11550    |                . **|   .                |
```

模型拟合

- 定阶
  - ARIMA((1,4),(1,4),0)

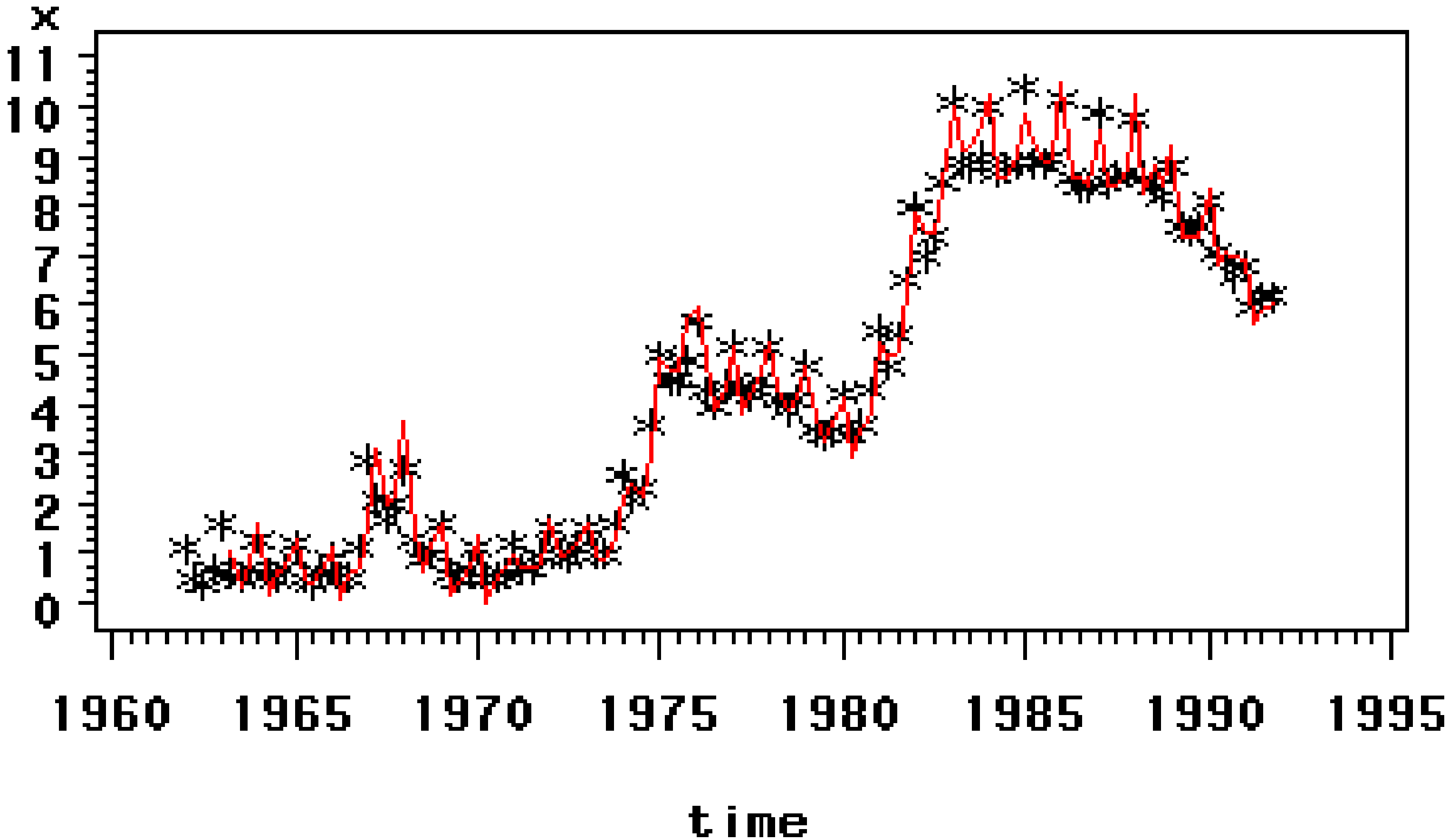
- 参数估计

$$(1-B)(1-B^4)x_t = \frac{1}{1-0.44746B+0.28132B^4}\varepsilon_t$$

模型检验

残差白噪声检验			参数显著性检验		
延迟阶数	χ^2统计量	P值	待估参数	t 统计量	P值
6	2.09	0.7191	θ_1	5.48	<0.0001
12	10.99	0.3584	θ_4	-3.41	<0.0001

拟合效果图



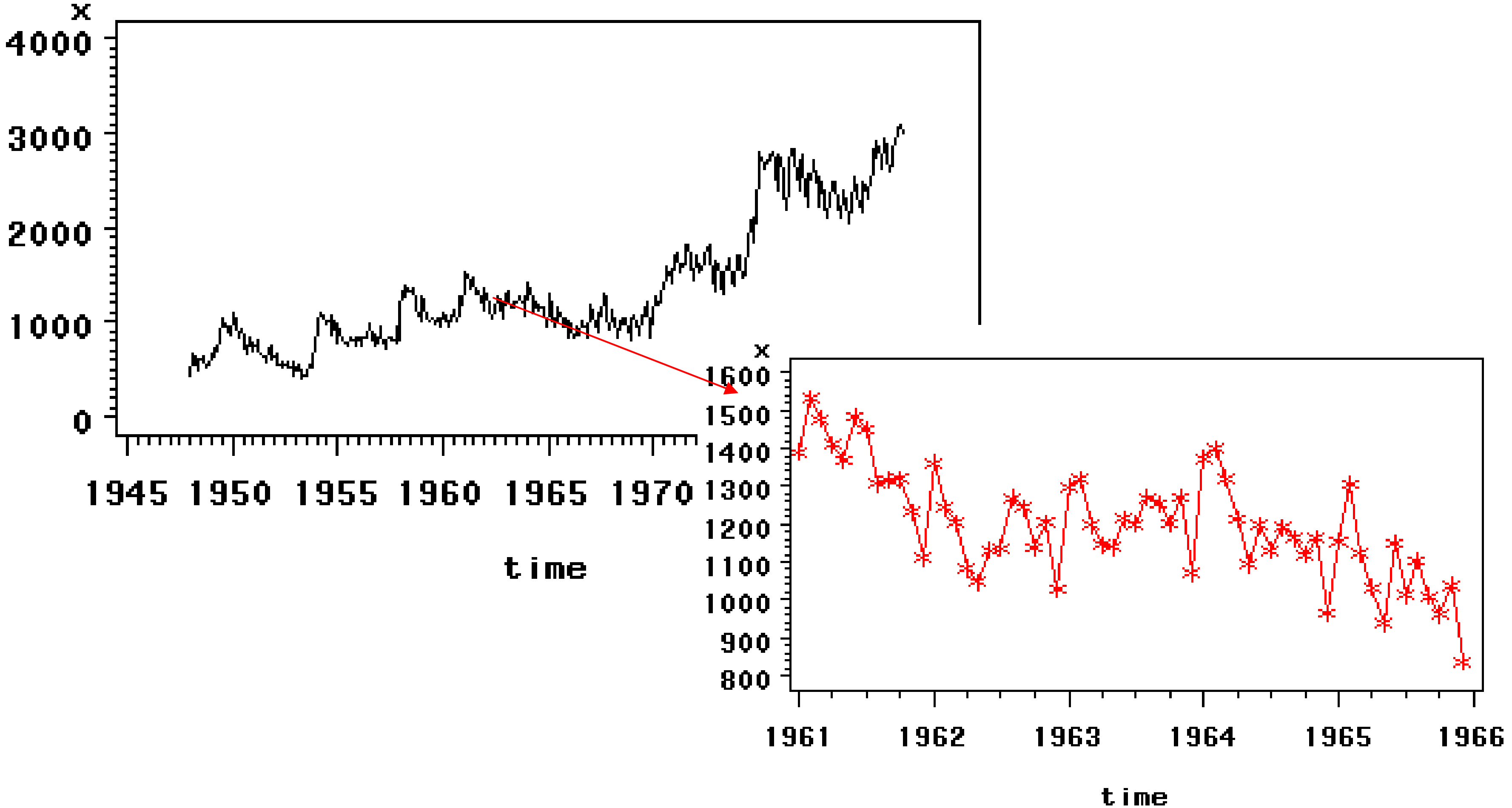
x
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1960 1965 1970 1975 1980 1985 1990 1995
time

乘积季节模型

- 使用场合
  - 序列的季节效应、长期趋势效应和随机波动之间有着复杂地相互关联性，简单的季节模型不能充分地提取其中的相关关系
- 构造原理
  - 短期相关性用低阶ARMA(p,q)模型提取
  - 季节相关性用以周期步长S为单位的ARMA(P,Q)模型提取
  - 假设短期相关和季节效应之间具有乘积关系，模型结构如下

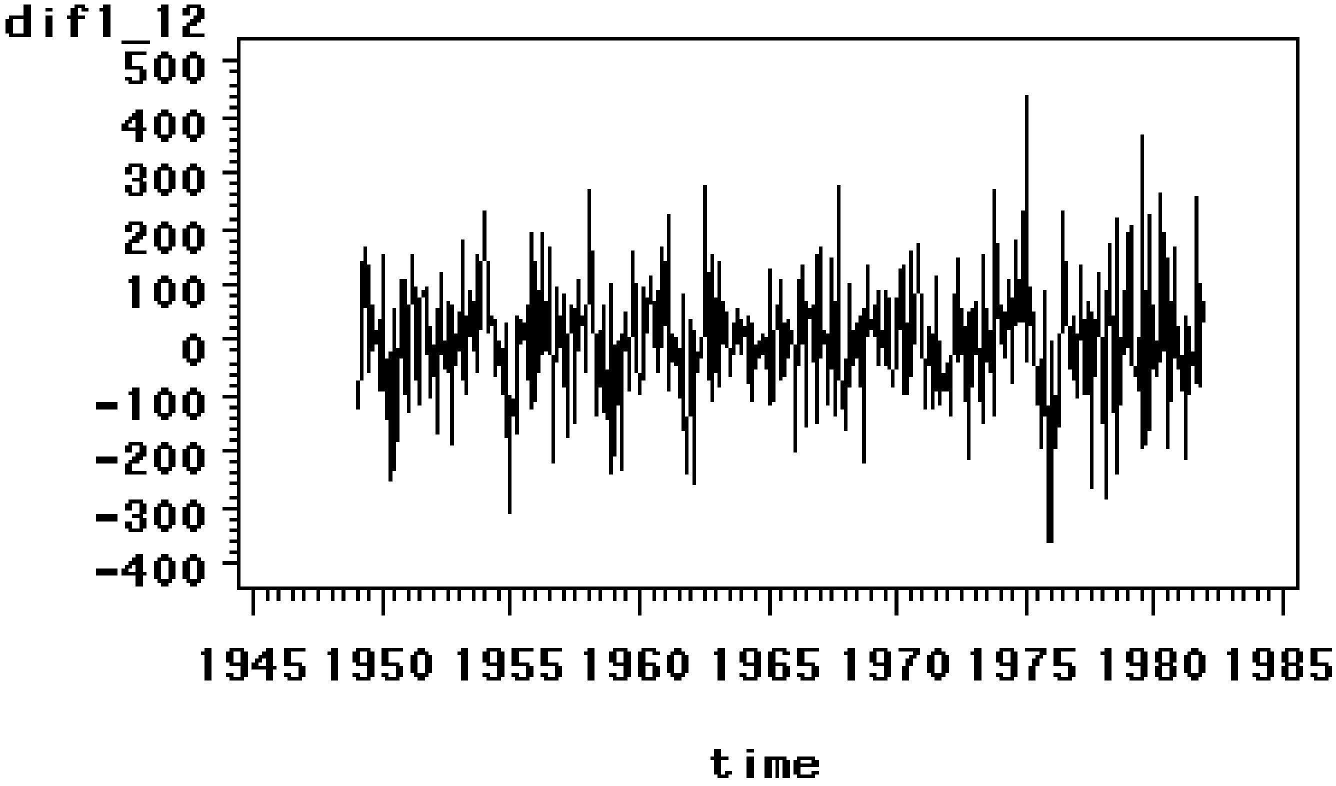
$$\nabla^d \nabla_S^D x_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \frac{\Theta_S(B)}{\Phi_S(B)} \varepsilon_t$$

例5.10 :拟合1948——1981年美国女性月度失业率序列



差分平稳

- 一阶、12步差分



差分后序列自相关图

```
                               Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  0     12557.531       1.00000      |                    |********************|
  1     -1734.813       -.13815      |                 ***| .                  |
  2      2375.783       0.18919      |                  . |****                |
  3       279.359       0.02225      |                  . | .                  |
  4       759.808       0.06051      |                  . |*.                  |
  5       138.150       0.01100      |                  . | .                  |
  6       655.488       0.05220      |                  . |*.                  |
  7     -1028.202       -.08188      |                  **| .                  |
  8       533.734       0.04250      |                  . |*.                  |
  9      -158.605       -.01263      |                  . | .                  |
 10     -1606.237       -.12791      |                 ***| .                  |
 11       858.206       0.06834      |                  . |*.                  |
 12     -5698.457       -.45379      |           *********| .                  |
 13       521.120       0.04150      |                 .  |*  .                |
 14      -509.219       -.04055      |                 . *|   .                |
 15     -1020.660       -.08128      |                 .**|   .                |
 16      -730.212       -.05815      |                 . *|   .                |
 17       429.071       0.03417      |                 .  |*  .                |
 18      -825.235       -.06572      |                 . *|   .                |
 19       592.947       0.04722      |                 .  |*  .                |
 20      -565.282       -.04502      |                 . *|   .                |
 21       206.681       0.01646      |                 .  |   .                |
 22      -117.966       -.00939      |                 .  |   .                |
 23       774.691       0.06169      |                 .  |*  .                |
 24      -929.421       -.07401      |                 . *|   .                |

                         "." marks two standard errors
```

差分后序列偏自相关图

```
                            Partial Autocorrelations

 Lag     Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1       -0.13815     |                 ***| .                  |
   2        0.17342     |                  . |***                 |
   3        0.07127     |                  . |*.                  |
   4        0.04101     |                  . |*.                  |
   5        0.00652     |                  . | .                  |
   6        0.03643     |                  . |*.                  |
   7       -0.08399     |                  **| .                  |
   8        0.00291     |                  . | .                  |
   9        0.01776     |                  . | .                  |
  10       -0.14008     |                 ***| .                  |
  11        0.04184     |                  . |*.                  |
  12       -0.42881     |           *********| .                  |
  13       -0.07313     |                  .*| .                  |
  14        0.11856     |                  . |**                  |
  15       -0.04173     |                  .*| .                  |
  16       -0.03232     |                  .*| .                  |
  17        0.04320     |                  . |*.                  |
  18        0.00766     |                  . | .                  |
  19       -0.03205     |                  .*| .                  |
  20       -0.00893     |                  . | .                  |
  21        0.03529     |                  . |*.                  |
  22       -0.12175     |                  **| .                  |
  23        0.09376     |                  . |**                  |
  24       -0.30002     |              ******| .                  |
```

简单季节模型拟合结果

延迟阶数	拟合模型残差白噪声检验					
	AR(1,12)		MA(1,2,12)		ARMA((1,12),(1,12))	
	χ^2值	P值	χ^2值	P值	χ^2值	P值
6	14.58	0.0057	9.5	0.0233	15.77	0.0004
12	16.42	0.0883	14.19	0.1158	17.99	0.0213
结果	拟合模型均不显著					

乘积季节模型拟合

- 模型定阶
  - ARIMA(1,1,1)×(0,1,1)$_{12}$

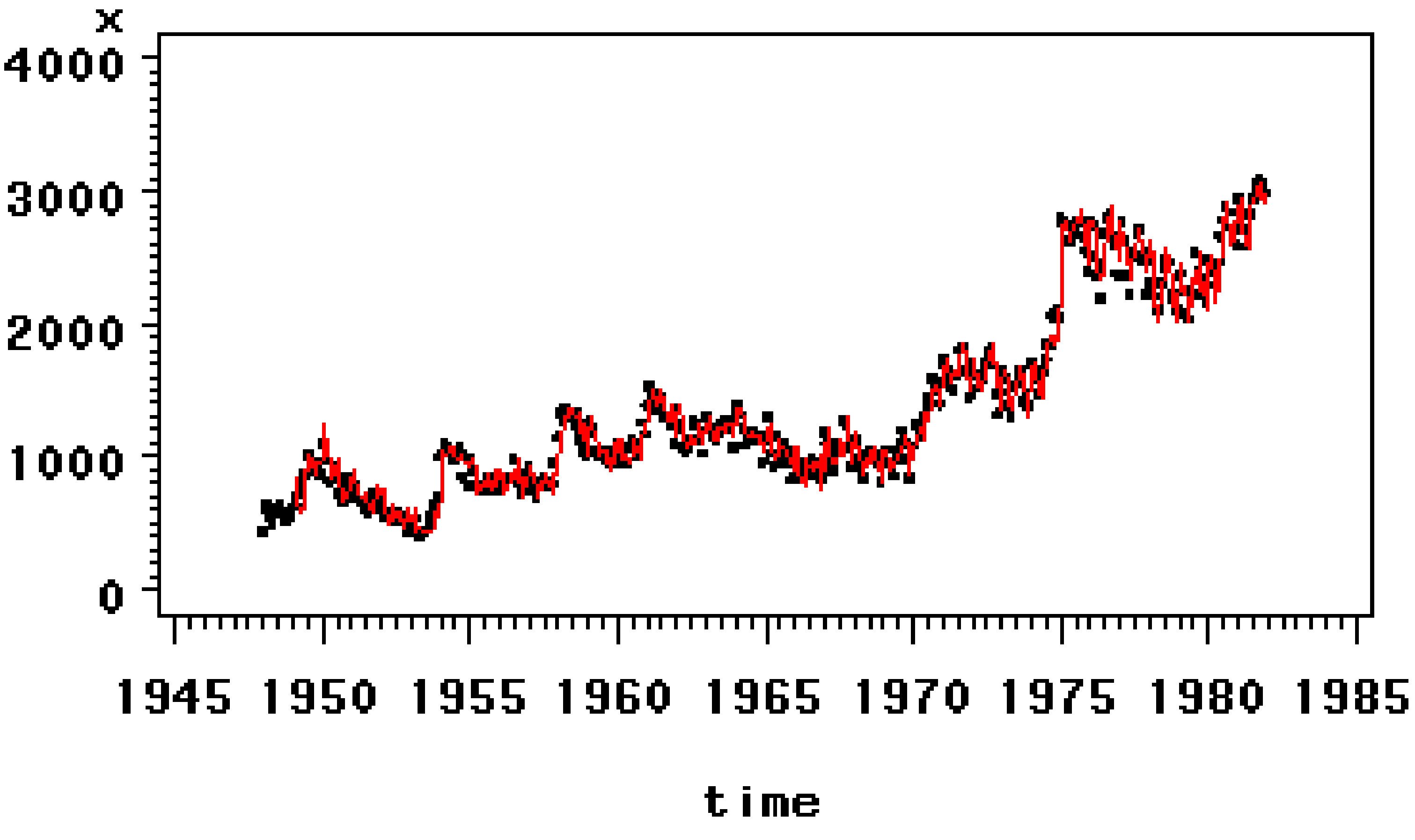
- 参数估计

$$\nabla\nabla_{12}x_t = \frac{1+0.66137B}{1+0.78978B}(1-0.77394B^{12})\varepsilon_t$$

模型检验

残差白噪声检验			参数显著性检验		
延迟阶数	χ^2统计量	P值	待估参数	χ^2统计量	P值
6	4.50	0.2120	θ_1	-4.66	<0.0001
12	9.42	0.4002	θ_{12}	23.03	<0.0001
18	20.58	0.1507	ϕ_1	-6.81	<0.0001
结果	模型显著		参数均显著		

乘积季节模型拟合效果图



5.3 Auto-Regressive模型

- 构造思想
  - 首先通过确定性因素分解方法提取序列中主要的确定性信息

$$x_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

  - 然后对残差序列拟合自回归模型，以便充分提取相关信息

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \Lambda + \phi_p \varepsilon_{t-p} + a_t$$

Auto-Regressive模型结构

$$\begin{cases} x_t = T_t + S_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \Lambda + \phi_p \varepsilon_{t-p} + a_t \\ E(a_t) = 0, Var(a_t) = \sigma^2, Cov(a_t, a_{t-i}) = 0, \forall i \geq 1 \end{cases}$$

对趋势效应的常用拟合方法

- 自变量为时间t的幂函数

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \Lambda + \beta_k \cdot t^k + \varepsilon_t$$

- 自变量为历史观察值

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \Lambda + \beta_k \cdot x_{t-k} + \varepsilon_t$$

对季节效应的常用拟合方法

- 给定季节指数

$$S_t = S_t'$$

- 建立季节自回归模型

$$T_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{t-m} + \Lambda + \alpha_l \cdot x_{t-lm}$$

例5.6续

- 使用Auto-Regressive模型分析1952年－1988年中国农业实际国民收入指数序列。
- 时序图显示该序列有显著的线性递增趋势，但没有季节效应，所以考虑建立如下结构的Auto-Regressive模型

$$\begin{cases} x_t = T_t + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1,2,3,\Lambda \\ \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \Lambda + \phi_p \varepsilon_{t-p} + a_t \\ E(a_t) = 0, Var(a_t) = \sigma^2, Cov(a_t, a_{t-i}) = 0, \forall i \geq 1 \end{cases}$$

趋势拟合

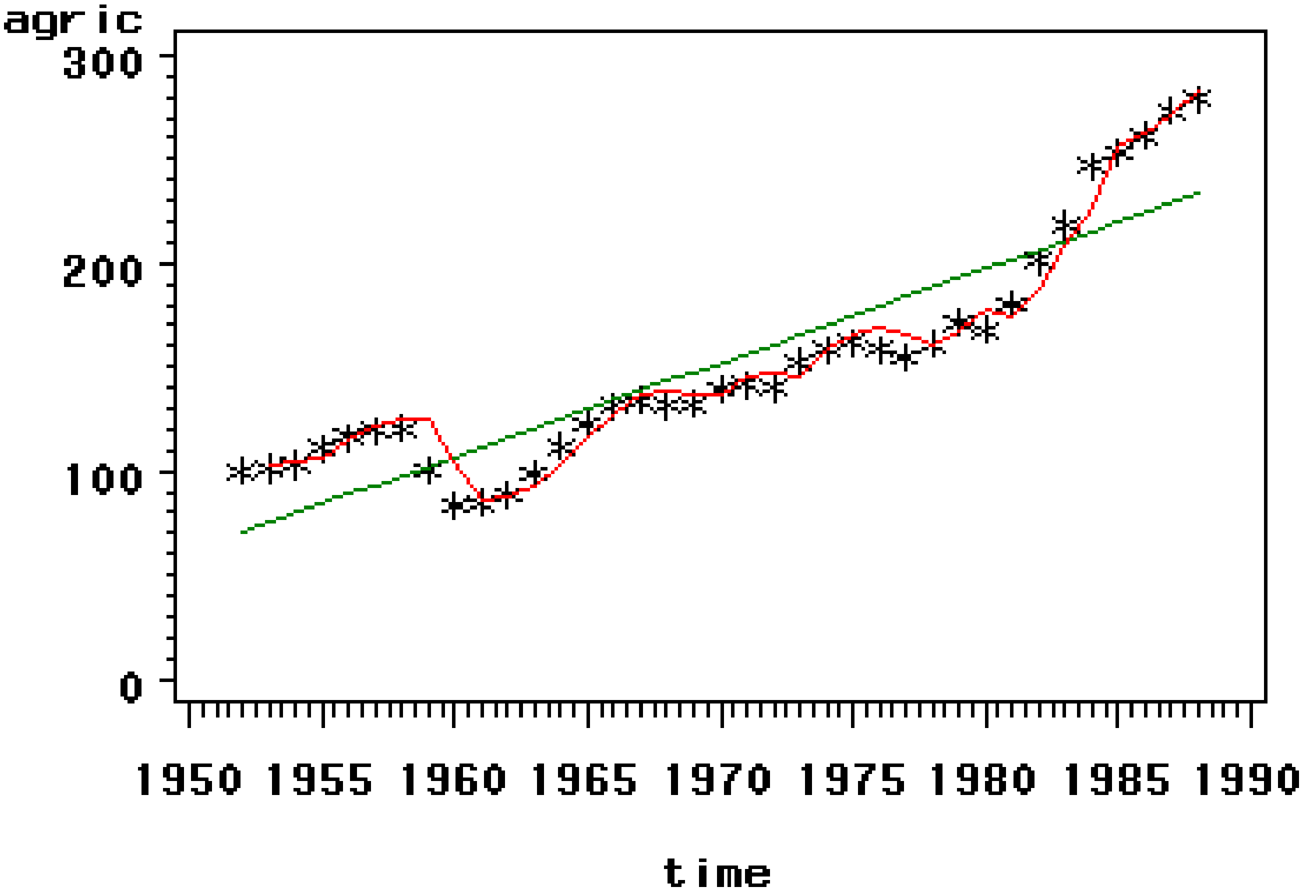
- 方法一：变量为时间t的幂函数

$$T_t = 66.1491 + 4.5158t \quad , \quad t = 1,2,3,\Lambda$$

- 方法二：变量为一阶延迟序列值x_{t-1}

$$\hat{x}_t = 1.0365x_{t-1} \quad , \quad t = 1,2,3,\Lambda$$

趋势拟合效果图



agric
300
200
100
0
1950 1955 1960 1965 1970 1975 1980 1985 1990
time

残差自相关检验

- 检验原理
  - 回归模型拟合充分，残差的性质

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad , \quad \forall j \geq 1$$

  - 回归模型拟合得不充分，残差的性质

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) \neq 0 \quad , \quad \exists\ j \geq 1$$

Durbin-Waston检验（DW检验）

- 假设条件
  - 原假设：残差序列不存在一阶自相关性

$$H_0: E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0 \Leftrightarrow H_0: \rho = 0$$

  - 备择假设：残差序列存在一阶自相关性

$$H_0: E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0 \Leftrightarrow H_0: \rho \neq 0$$

DW统计量

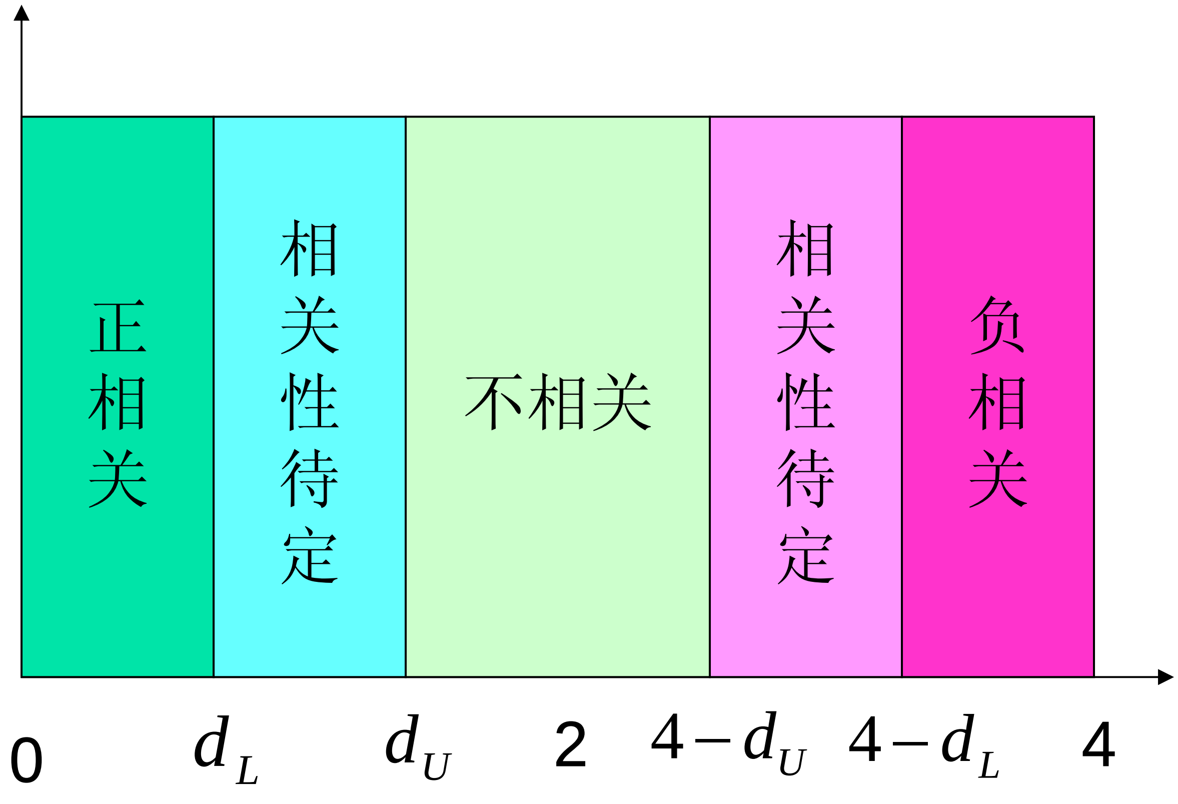
- 构造统计量

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}$$

- DW统计量和自相关系数的关系

$$DW \cong 2(1 - \rho)$$

DW统计量的判定结果



例5.6续

- 检验第一个确定性趋势模型

$$x_t = 66.1491 + 4.5158t + \varepsilon_t \ , \ t = 1,2,3,\Lambda$$

残差序列的自相关性。

DW检验结果

- 检验结果

DW统计量的值	d_L	d_U	P值
0.1378	1.42	1.53	0.0001

- 检验结论
  - 检验结果显示残差序列高度正自相关。

Durbin h检验

- DW统计量的缺陷
  - 当回归因子包含延迟因变量时，残差序列的DW统计量是一个有偏统计量。在这种场合下使用DW统计量容易产生残差序列正自相关性不显著的误判
- Durbin h检验

$$Dh = DW \frac{n}{1 - n\sigma_{\beta}^{2}}$$

例5.6续

- 检验第二个确定性趋势模型

$$x_t = 1.0365 x_{t-1} + \varepsilon_t \text{ , } t = 1,2,3,\Lambda$$

残差序列的自相关性。

Dh检验结果

- 检验结果

Dh统计量的值	P值
2.8038	0.0025

- 检验结论
  - 检验结果显示残差序列高度正自相关。

残差序列拟合

- 确定自回归模型的阶数
- 参数估计
- 模型检验

例5.6续

- 对第一个确定性趋势模型的残差序列

$$\varepsilon_t = x_t - T_t = x_t - 66.1491 - 4.5158t \text{ , } t = 1,2,\Lambda$$

进行拟合

残差序列自相关图

```
                   Autocorrelations

Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

    1.00000    |                    |********************|
    0.86045    |             .      |*****************   |
    0.65506    |          .         |*************       |
    0.44082    |        .           |*********  .        |
    0.21516    |       .            |****        .       |
    0.01276    |       .            |            .       |
    -.12360    |       .          **|            .       |
    -.21001    |       .        ****|            .       |
    -.20305    |       .        ****|            .       |
    -.15935    |       .         ***|            .       |

           "." marks two standard errors
```

残差序列偏自相关图

```
Partial Autocorrelations

-1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

|             .      |*****************   |
|             *******|      .             |
|             .    **|      .             |
|             .  ****|      .             |
|             .     *|      .             |
|             .      |*     .             |
|             .     *|      .             |
```

模型拟合

- 定阶
  - AR(2)
- 参数估计方法
  - 极大似然估计
- 最终拟合模型口径

$$\begin{cases} x_t = 69.1491 + 4.5158t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = 1.4859\varepsilon_{t-1} - 0.5848\varepsilon_{t-2} + a_t \end{cases}$$

例5.6

- 第二个Auto—Regressive模型的拟合结果

$$\begin{cases} x_t = 1.033x_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = 0.4615\varepsilon_{t-1} + a_t \end{cases}$$

三个拟合模型的比较

模型	AIC	SBC
ARIMA(0,1,1)模型： $(1-B)x_t = 4.99661+(1+0.70766B)\varepsilon_t$	249.3305	252.4976
Auto—Regressive模型一： $\begin{cases} x_t = 69.1491+4.5158t+\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = 1.4859\varepsilon_{t-1} - 0.5848\varepsilon_{t-2} + a_t \end{cases}$	260.8454	267.2891
Auto—Regressive模型二： $\begin{cases} x_t = 1.033x_{t-1}+\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = 0.4615\varepsilon_{t-1} + a_t \end{cases}$	250.6317	253.7987

5.4 异方差的性质

- 异方差的定义
  - 如果随机误差序列的方差会随着时间的变化而变化，这种情况被称作为异方差

$$Var(\varepsilon_t) = h(t)$$

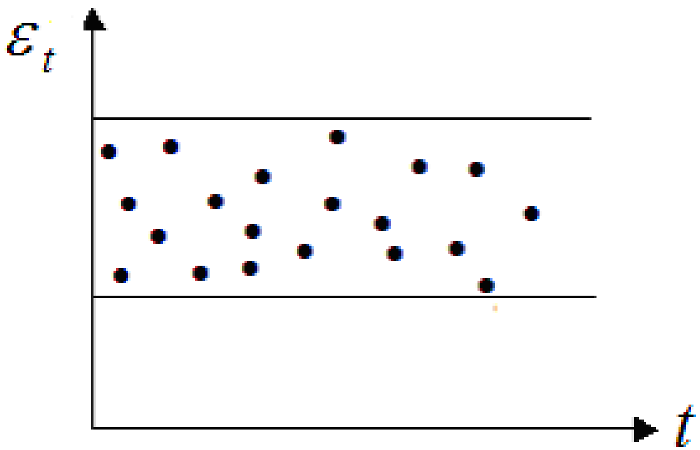
- 异方差的影响
  - 忽视异方差的存在会导致残差的方差会被严重低估，继而参数显著性检验容易犯纳伪错误，这使得参数的显著性检验失去意义，最终导致模型的拟合精度受影响。

异方差直观诊断

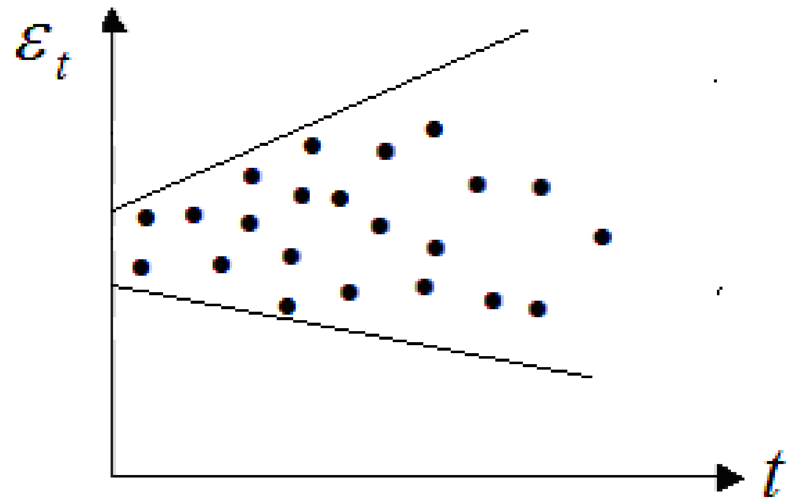
- 残差图
- 残差平方图

残差图

- 方差齐性残差图



- 递增型异方差残差图



残差平方图

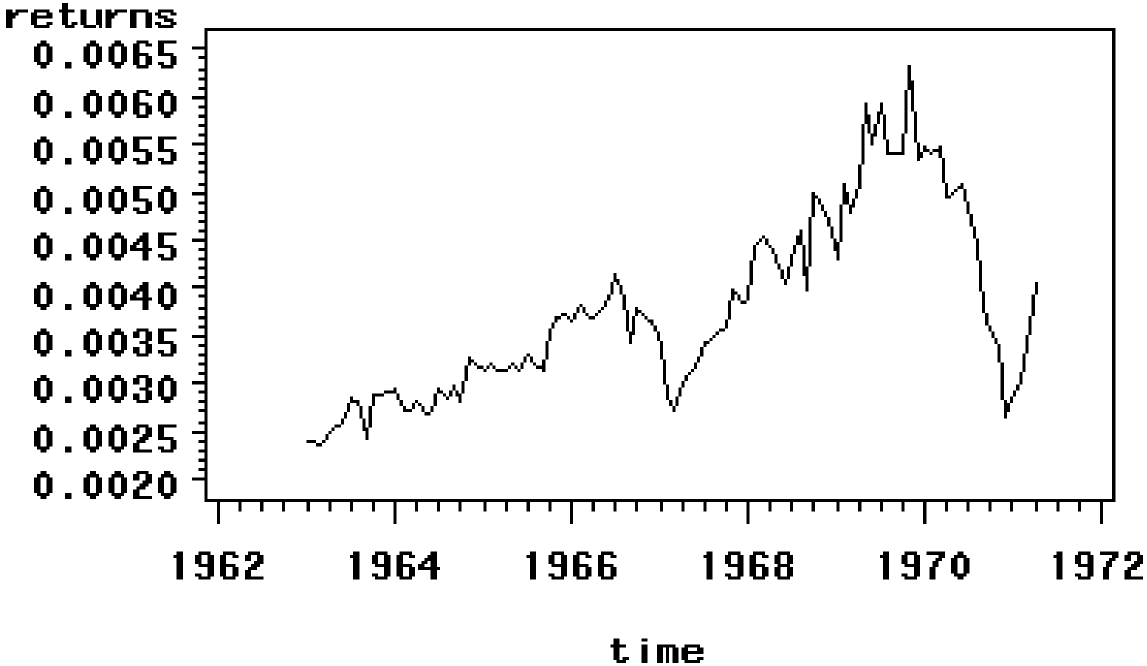
- 原理
  - 残差序列的方差实际上就是它平方的期望。

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2)$$

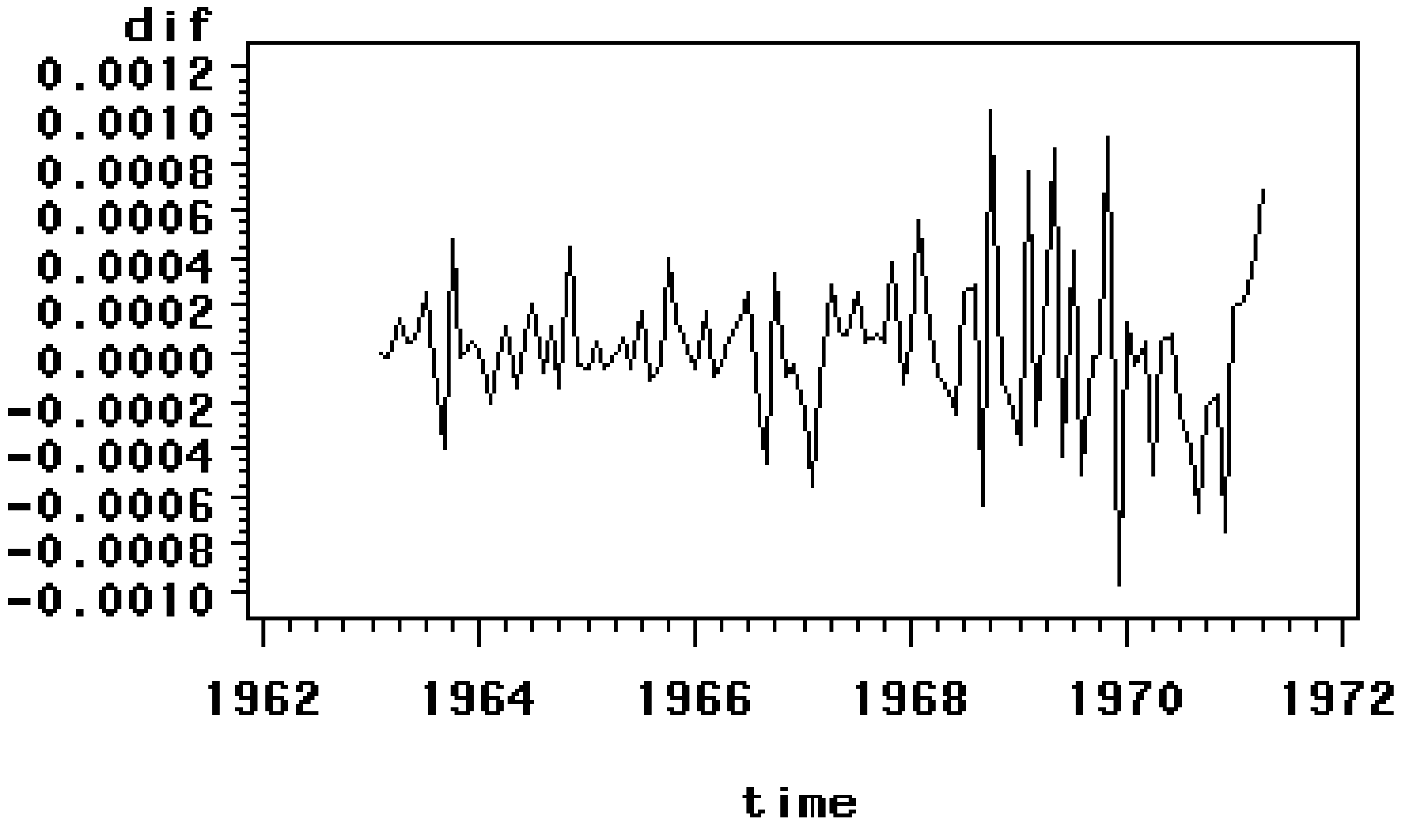
  - 所以考察残差序列是否方差齐性，主要是考察残差平方序列是否平稳

例5.11

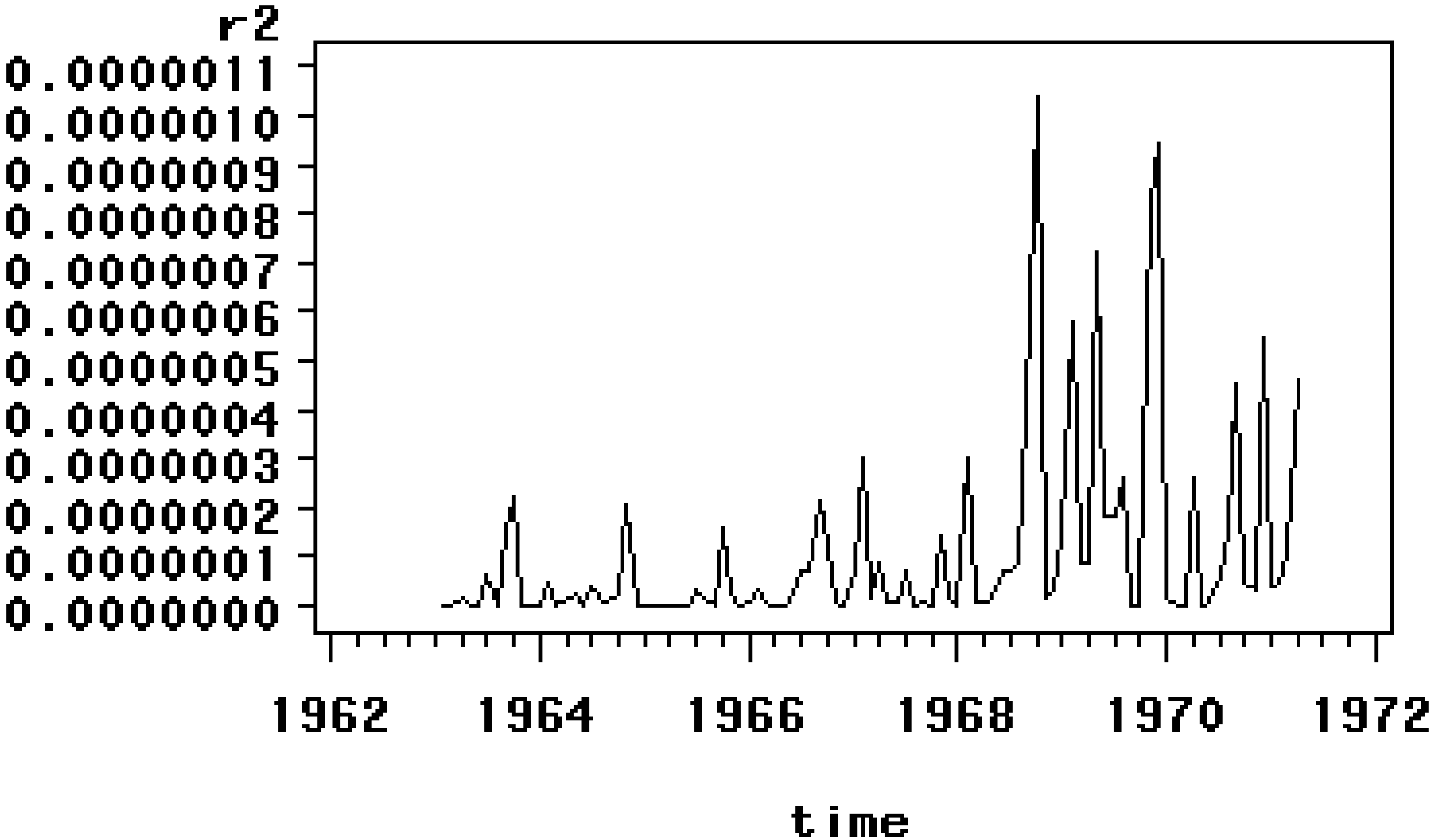
- 直观考察美国1963年4月——1971年7月短期国库券的月度收益率序列的方差齐性。



一阶差分后残差图


dif
0.0012
0.0010
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0000
-0.0002
-0.0004
-0.0006
-0.0008
-0.0010
1962
1964
1966
1968
1970
1972
time

一阶差分后残差平方图



r2
0.0000011
0.0000010
0.0000009
0.0000008
0.0000007
0.0000006
0.0000005
0.0000004
0.0000003
0.0000002
0.0000001
0.0000000
1962
1964
1966
1968
1970
1972
time

异方差处理方法

- 假如已知异方差函数具体形式，进行方差齐性变化
- 假如不知异方差函数的具体形式，拟合条件异方差模型

5.5 方差齐性变换

- 使用场合
  - 序列显示出显著的异方差性，且方差与均值之间具有某种函数关系

$$\sigma_t^2 = h(\mu_t)$$

其中：$h(\cdot)$是某个已知函数

- 处理思路
  - 尝试寻找一个转换函数 $g(\cdot)$，使得经转换后的变量满足方差齐性

$$Var[g(x_t)] = \sigma^2$$

转换函数的确定原理

- 转换函数$g(x_t)$在 μ_t附近作一阶泰勒展开

$$g(x_t) \cong g(\mu_t) + (x_t - \mu_t) g'(\mu_t)$$

- 求转换函数的方差

$$Var[g(x_t)] \cong Var[g(\mu_t) + (x_t - \mu_t) g'(\mu_t)]$$

$$= [g'(\mu_t)]^2 h(\mu_t)$$

- 转换函数的确定

$$g'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}}$$

常用转换函数的确定

- 假定

$$\sigma_t = \mu_t \Leftrightarrow h(\mu_t) = \mu_t^2$$

- 转换函数的确定

$$g'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}} = \frac{1}{\mu_t} \quad \Rightarrow \quad g(\mu_t) = \log(\mu_t)$$

例5.11续

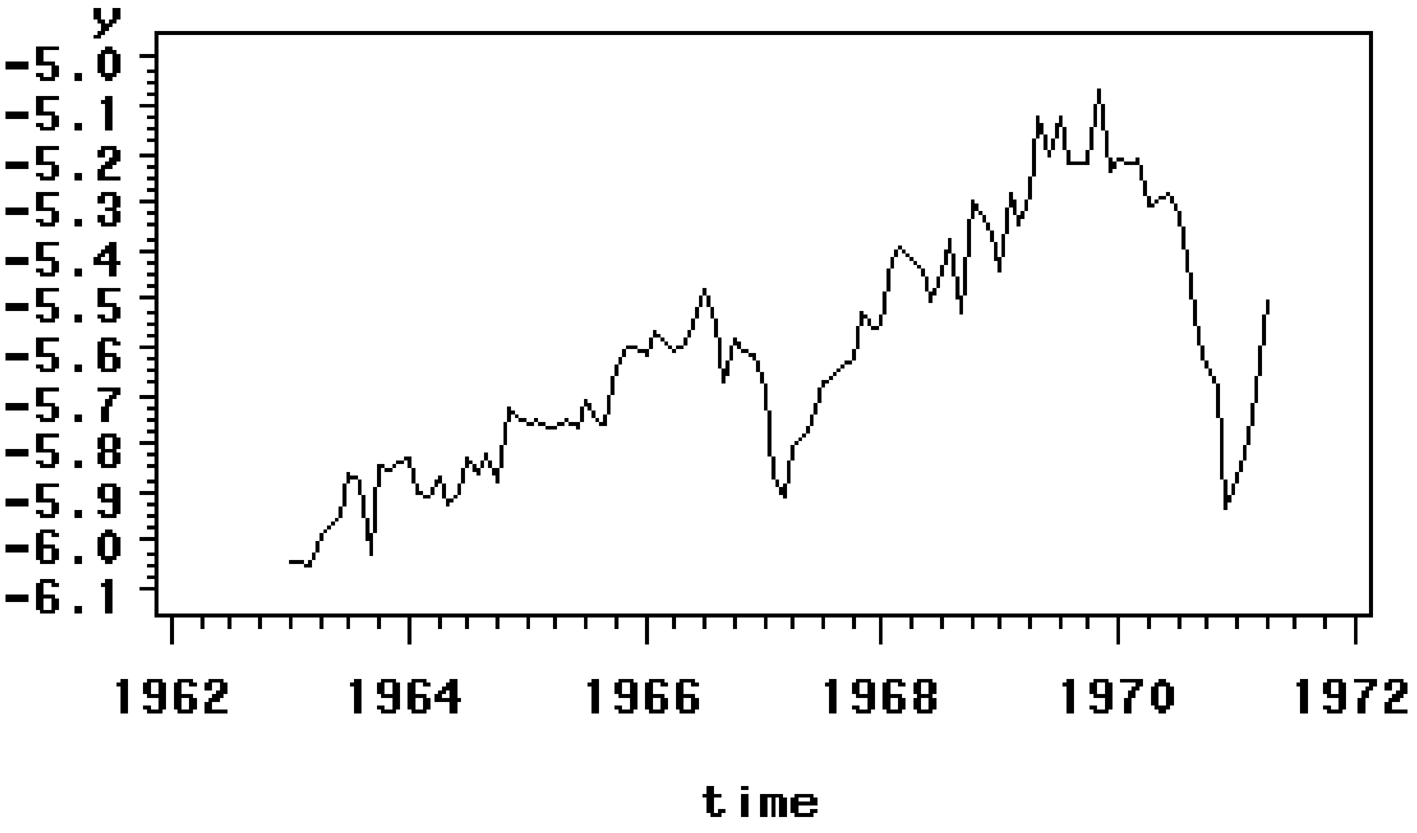
- 对美国1963年4月——1971年7月短期国库券的月度收益率序列使用方差齐性变换方法进行分析
- 假定

$$\sigma_t = x_t$$

- 函数变换

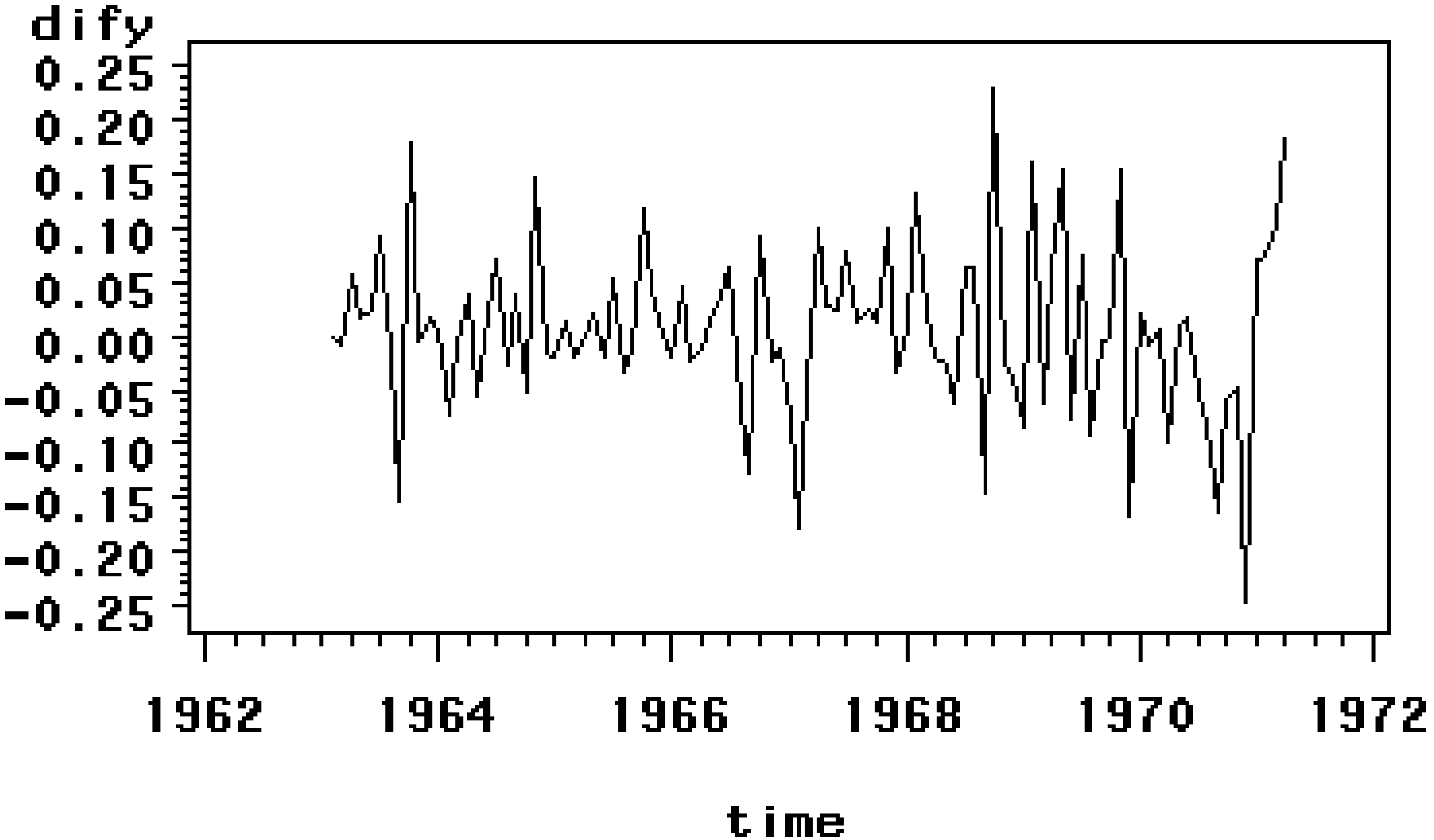
$$y_t = \log(x_t)$$

对数序列时序图



y
-5.0
-5.1
-5.2
-5.3
-5.4
-5.5
-5.6
-5.7
-5.8
-5.9
-6.0
-6.1
1962
1964
1966
1968
1970
1972
time

一阶差分后序列图

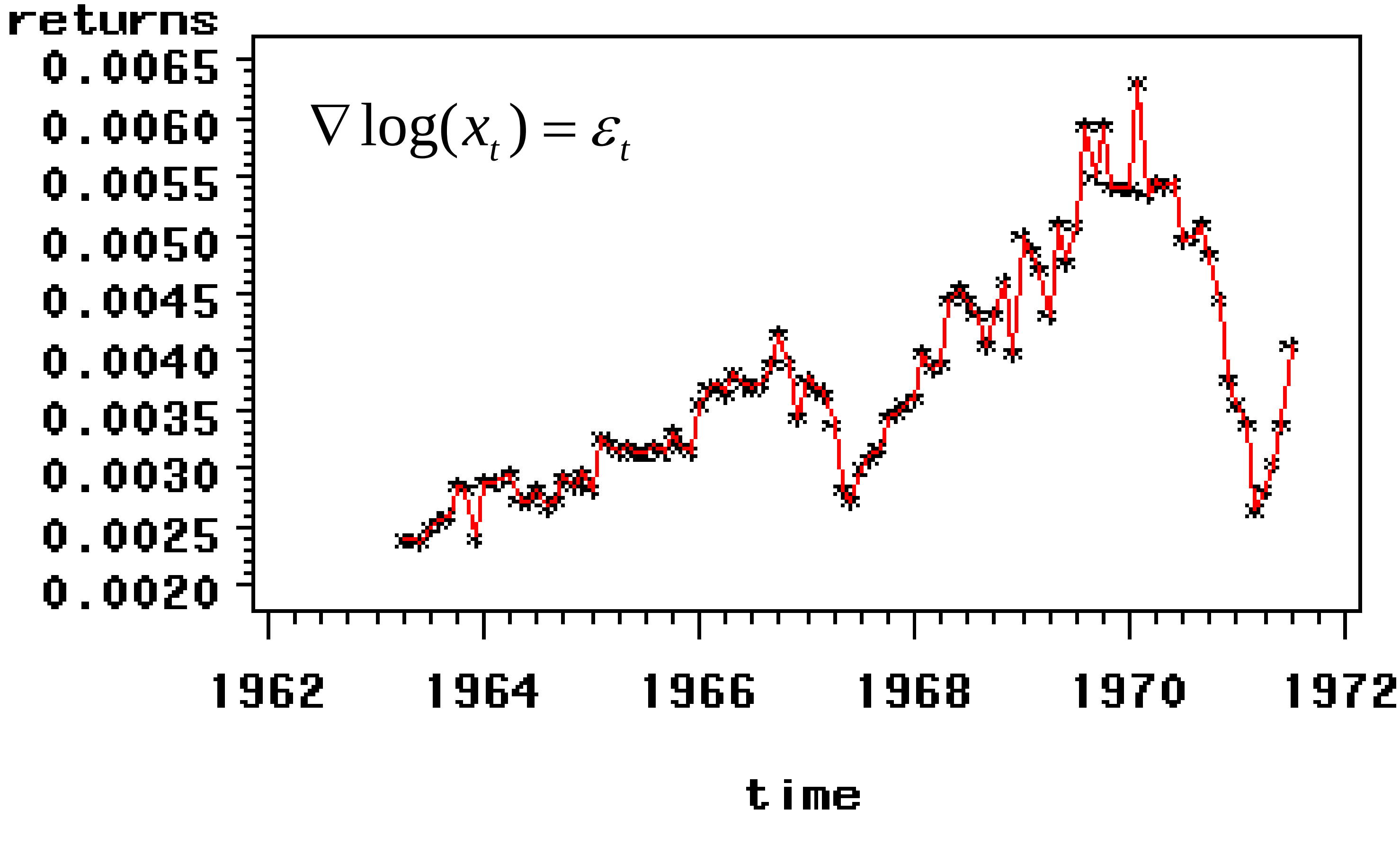


dify
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
1962
1964
1966
1968
1970
1972
time

白噪声检验

延迟阶数	LB统计量	P值
6	3.58	0.7337
12	10.82	0.5441
18	21.71	0.2452

拟合模型口径及拟合效果图



5.6 条件异方差模型

- ARCH模型
- GARCH模型
- GARCH模型的变体
  - EGARCH模型
  - IGARCH模型
  - GARCH-M模型
  - AR-GARCH模型

ARCH模型

- 假定

$$\varepsilon_t / \sqrt{h_t} \sim N(0,1)$$

- 原理
  - 通过构造残差平方序列的自回归模型来拟合异方差函数

- ARCH(q)模型结构

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \\ h_t = \omega + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2 \end{cases}$$

GARCH 模型结构

- 使用场合
  - ARCH模型实际上适用于异方差函数短期自相关过程
  - GARCH模型实际上适用于异方差函数长期自相关过程
- 模型结构

$$
\begin{cases}
x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \\
h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2
\end{cases}
$$

GARCH模型的约束条件

- 参数非负

$$\omega > 0, \eta_i \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

- 参数有界

$$\sum_{i=1}^{p} \eta_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j < 1$$

EGARCH模型

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \\ \ln(h_t) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \eta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j g(e_t) \\ g(e_t) = \theta e_t + \gamma[|e_t| - E|e_t|] \end{cases}$$

IGARCH模型

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2 \\ \sum_{i=1}^{p} \eta_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

GARCH-M模型

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \delta\sqrt{h_t} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, e_t \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \varepsilon_{t-j}^2 \end{cases}$$

AR-GARCH模型

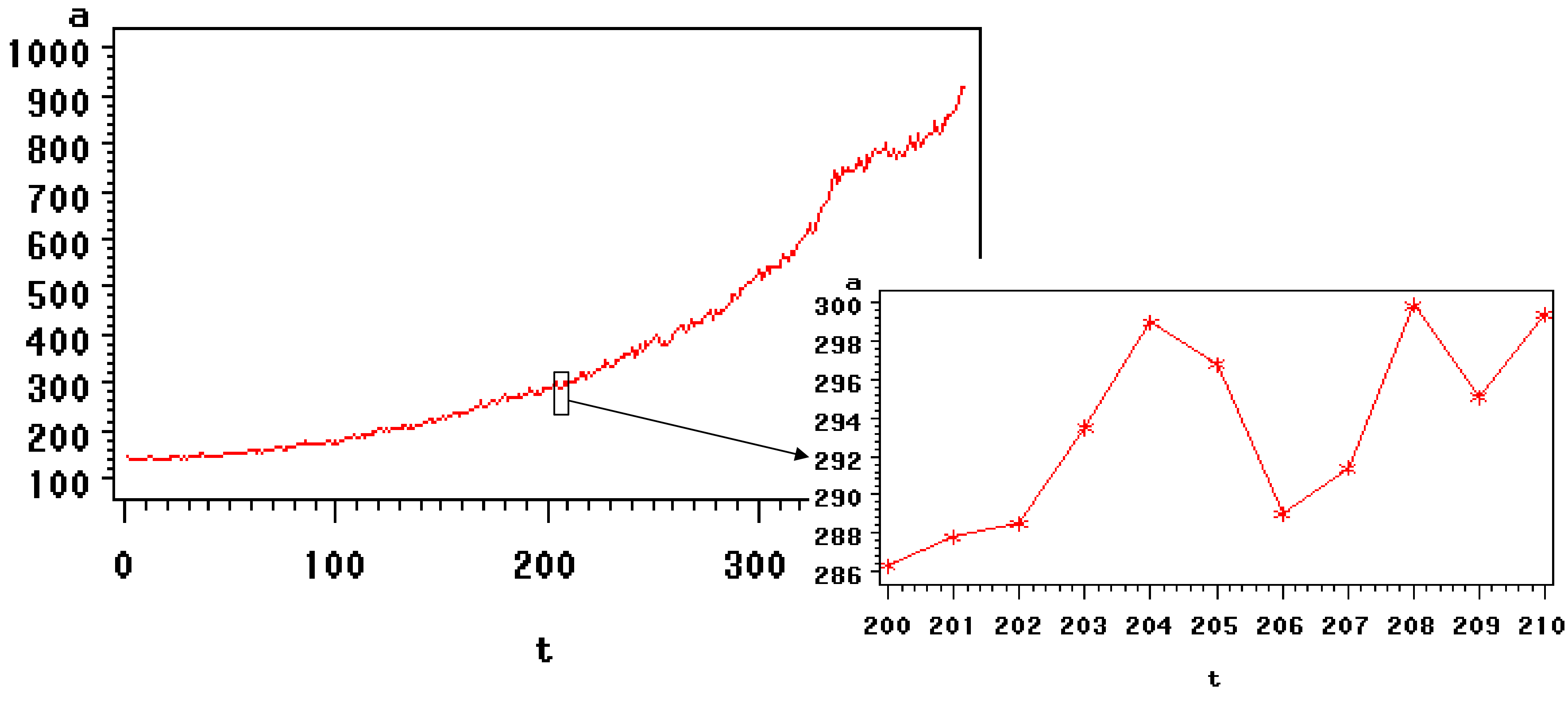
$$
\begin{cases}
x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \Lambda) + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varepsilon_{t-k} + \upsilon_t \\
\upsilon_t = \sqrt{h_t}\, e_t \\
h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \eta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \upsilon_{t-j}^2
\end{cases}
$$

GARCH模型拟合步骤

- 回归拟合
- 残差自相关性检验
- 异方差自相关性检验
- ARCH模型定阶
- 参数估计
- 正态性检验

例5.12

- 使用条件异方差模型拟合某金融时间序列。



回归拟合

- 拟合模型

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

- 参数估计

$$\hat{\alpha}_1 = 1.0053$$

- 参数显著性检验
  - P值<0.0001,参数高度显著

残差自相关性检验

- 残差序列DW检验结果
  - Durbin h=-2.6011
  - $\Pr(Dh < -2.6011) < 0.0046$
- 拟合残差自回归模型
  - 方法：逐步回归
  - 模型口径

$$\varepsilon_t = -0.1559\varepsilon_{t-1} - 0.407\varepsilon_{t-2} + \upsilon_t$$

异方差自相关检验

- Portmantea Q检验
- 拉格朗日乘子（LM）检验

Portmantea Q检验

- 假设条件

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \Lambda = \rho_q = 0 \leftrightarrow H_1: \rho_1, \rho_2, \Lambda, \rho_q \text{不全为零}$$

- 检验统计量

$$Q(q) = n(n+2)\sum_{i=1}^{q}\frac{\rho_i^2}{n-i} \sim \chi^2(q-1)$$

- 检验结果
  - 拒绝原假设 $Q(q) \geq \chi^2_{1-\alpha}(q-1)$
  - 接受原假设 $Q(q) < \chi^2_{1-\alpha}(q-1)$

LM检验

- 假设条件

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\Lambda=\rho_q=0 \leftrightarrow H_1:\rho_1,\rho_2,\Lambda,\rho_q\text{不全为零}$$

- 检验统计量

$$LM(q)=W'W \quad , W=\left(\frac{\rho_1^2}{\hat{\sigma}^2},\frac{\rho_2^2}{\hat{\sigma}^2},\Lambda,\frac{\rho_q^2}{\hat{\sigma}^2}\right)$$

- 检验结果
  - 拒绝原假设 $Q(q)\geq\chi^2_{1-\alpha}(q-1)$
  - 接受原假设 $Q(q)<\chi^2_{1-\alpha}(q-1)$

例5.12残差序列异方差检验

阶数	Portmantea Q 统计量	P 值	LM 统计量	P 值
1	21.0457	< 0.0001	20.9461	< 0.0001
2	69.5836	< 0.0001	57.6219	< 0.0001
3	91.2062	< 0.0001	62.8963	< 0.0001
4	103.7725	< 0.0001	63.0874	< 0.0001
5	105.1216	< 0.0001	65.9268	< 0.0001
6	105.1753	< 0.0001	68.5504	< 0.0001
7	105.4858	< 0.0001	68.6805	< 0.0001
8	116.6605	< 0.0001	86.6446	< 0.0001
9	131.2003	< 0.0001	102.3673	< 0.0001
10	185.9957	< 0.0001	135.5774	< 0.0001
11	205.3304	< 0.0001	135.6465	< 0.0001
12	417.1844	< 0.0001	230.3537	< 0.0001

ARCH模型拟合

- 定阶：GARCH(1,1)
- 参数估计：极大似然估计
- 拟合模型口径：AR(2)-GARCH(1,1)

$$\begin{cases} x_t = 1.0046 x_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = -0.1559\varepsilon_{t-1} - 0.407\varepsilon_{t-2} + \upsilon_t \\ \upsilon_t = \sqrt{h_t} e_t \\ h_t = 0.0951 + 0.8999 h_{t-1} + 0.1053\upsilon_{t-1}^2 \end{cases}$$

模型检验

- 检验方法：正态性检验
- 假设条件：

$$H_0: u_t \sim N(0,1) \leftrightarrow H_0: u_t \overset{not}{\sim} N(0,1)$$

- 检验统计量

$$T_n = \frac{n}{6} b_1^2 + \frac{n}{24}(b_2 - 3)^2 \sim \chi^2(2)$$

- 检验结果
  - 拒绝原假设 $T_n \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)$
  - 接受原假设 $T_n < \chi^2_{1-\alpha}(2)$

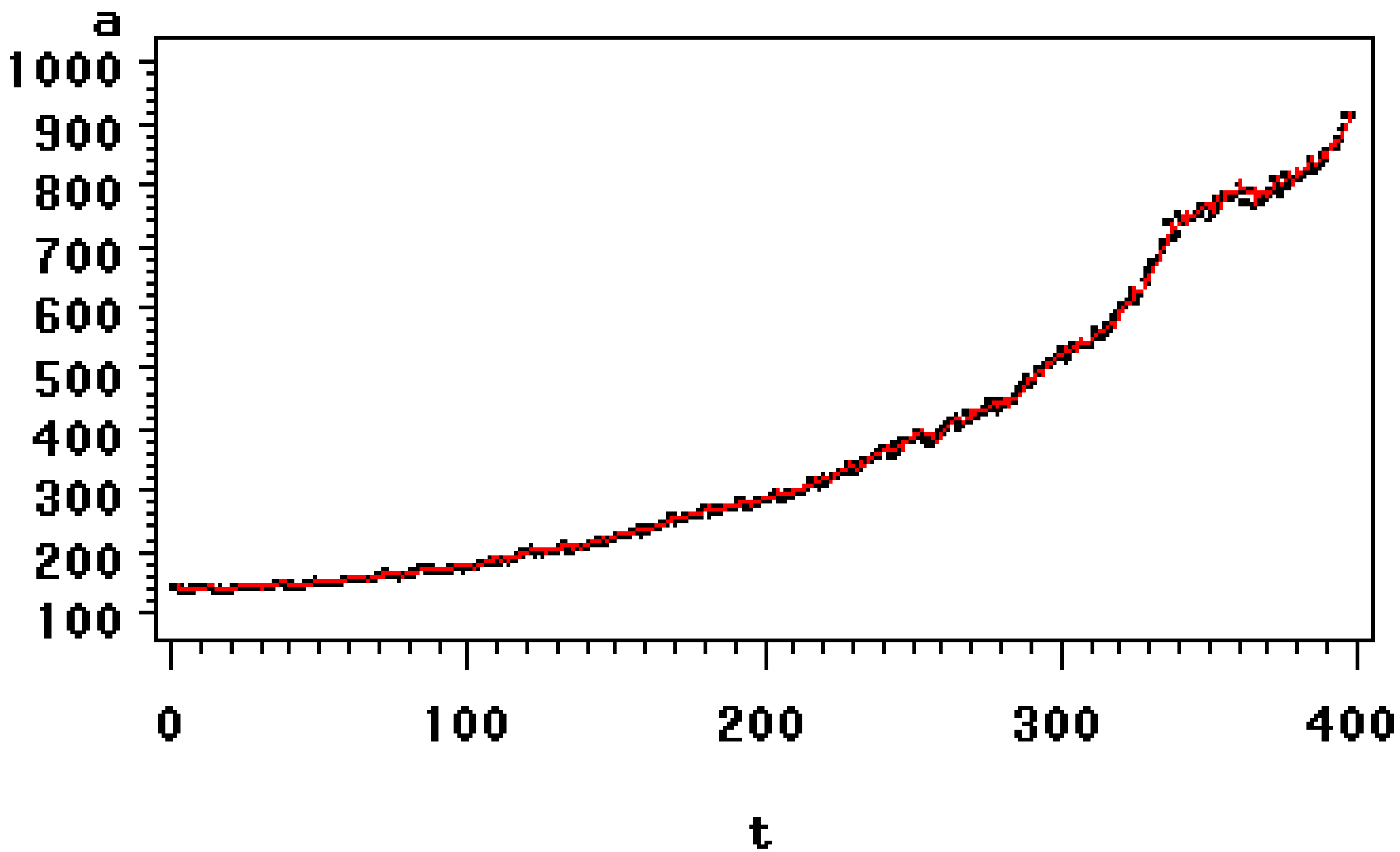
例5.13正态性检验结果

$$T_n = 1.1585$$

P值＝0.5603

- AR(2)-GARCH(1,1)模型显著成立

拟合效果图



第六章

多元时间序列分析

本章结构

- 平稳时间序列建模
- 虚假回归
- 单位根检验
- 协整
- 误差修正模型

6.1 平稳时间序列建模

- ARIMAX模型结构

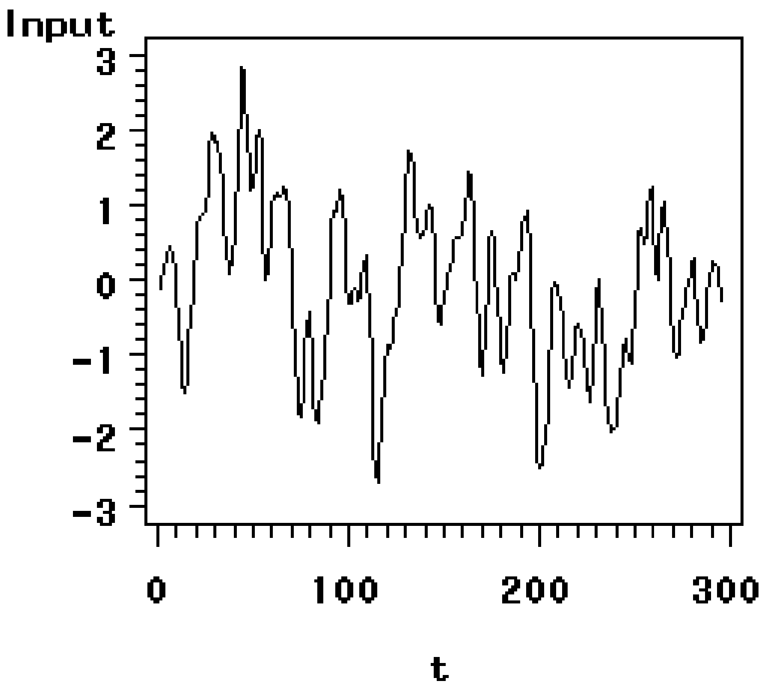
$$\begin{cases} y_t = \mu + \sum_{k=1}^{k} \frac{\Theta_i(B)}{\Phi_i(B)} B^{l_i} x_{it} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} a_t \end{cases}$$

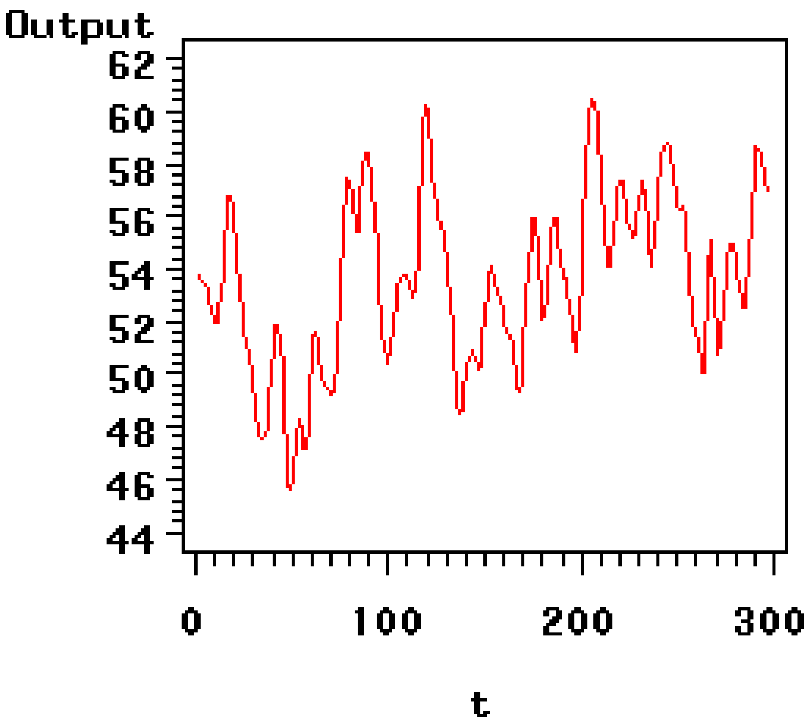
例6.1

- 在天然气炉中，输入的是天然气，输出的是CO_2，CO_2的输出浓度与天然气的输入速率有关。现在以中心化后的天然气输入速率为输入序列，建立CO_2的输出百分浓度模型。

输入/输出序列时序图

- 输入序列
- 输出序列





一元分析

- 拟合输入序列

$$x_t = -0.1228 + \frac{a_t}{1 - 1.97607B + 1.37499B^2 - 0.34336B^3}$$

- 拟合输出序列

$$y_t = 53.90176 + \frac{a_t}{1 - 3.10703B + 1.34005B^2 - 0.21274B^4}$$

多元分析

- 协相关图

```
                                Crosscorrelations

 Lag    Covariance    Correlation   -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

 -10     0.0015683        0.02301    |                  . | .                  |
  -9    0.00013502        0.00198    |                  . | .                  |
  -8    -0.0060480        -.08872    |                  **| .                  |
  -7    -0.0017624        -.02585    |                  .*| .                  |
  -6    -0.0080539        -.11814    |                  **| .                  |
  -5    -0.0000944        -.00138    |                  . | .                  |
  -4    -0.0012802        -.01878    |                  . | .                  |
  -3    -0.0031078        -.04559    |                  .*| .                  |
  -2    0.00065212        0.00957    |                  . | .                  |
  -1    -0.0019166        -.02811    |                  .*| .                  |
   0    -0.0003673        -.00539    |                  . | .                  |
   1     0.0038939        0.05712    |                  . |*.                  |
   2    -0.0016971        -.02489    |                  . | .                  |
   3     -0.019231        -.28210    |              ******| .                  |
   4     -0.022479        -.32974    |             *******| .                  |
   5     -0.030909        -.45341    |           *********| .                  |
   6     -0.018122        -.26583    |               *****| .                  |
   7     -0.011426        -.16761    |                 ***| .                  |
   8    -0.0017355        -.02546    |                  .*| .                  |
   9     0.0022590        0.03314    |                  . |*.                  |
  10    -0.0035152        -.05156    |                  .*| .                  |

                      "." marks two standard errors
```

拟合回归模型

- 模型结构

$$y_t = \mu + \frac{\theta_0 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}{1 - \phi_1 B} B^3 x_t + \varepsilon_t$$

- 模型口径

$$y_t = 53.32256 + \frac{-0.5648 - 0.42573B - 0.29964B^2}{1 - 0.60057B} B^3 x_t + \varepsilon_t$$

拟合残差序列

- 偏自相关图

```
                       Partial Autocorrelations

Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.89307     |                 . |******************  |
  2       -0.43103     |          *********| .                  |
  3       -0.12987     |                ***| .                  |
  4        0.02319     |                 . | .                  |
  5        0.04054     |                 . |*.                  |
  6       -0.02657     |                 .*| .                  |
  7       -0.02496     |                 . | .                  |
  8        0.01993     |                 . | .                  |
  9        0.00001     |                 . | .                  |
 10        0.08721     |                 . |**                  |
```

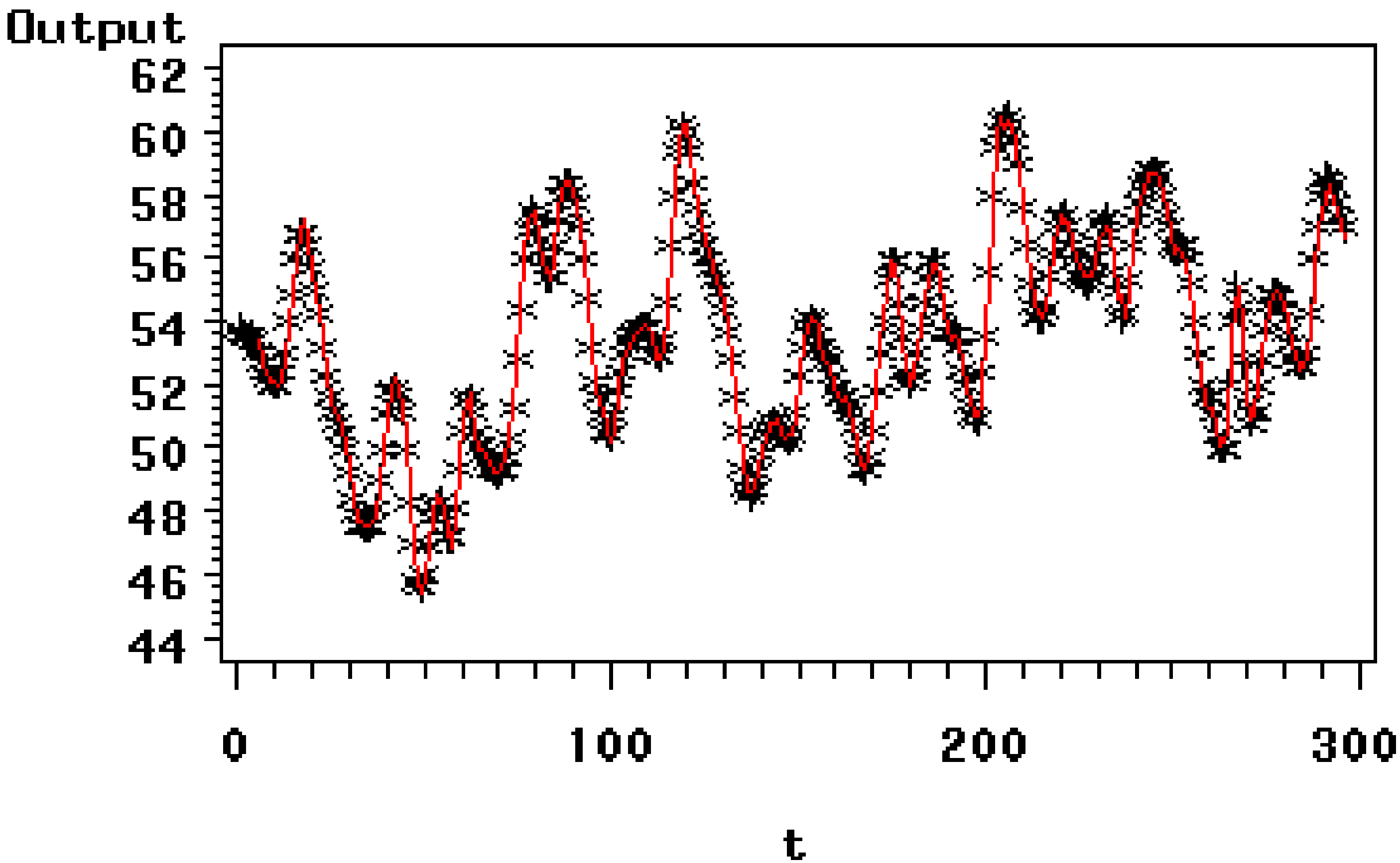
- 残差拟合模型

$$\varepsilon_t = \frac{1}{1-1.53B+0.64B^2}a_t$$

拟合模型

	模型结构	比较
一元模型	$y_t = 53.9 + \dfrac{a_t}{1 - 3.1B + 1.3B^2 - 0.2B^4}$	AIC=196.3 SBC=211.1
多元模型	$\begin{cases} y_t = 53.26 + \dfrac{-0.54 - 0.38B - 0.52B^2}{1 - 0.55B} B^3 x_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \dfrac{1}{1 - 1.53B + 0.64B^2} a_t \end{cases}$	AIC=8.3 SBC=34.0

ARIMAX模型拟合效果图



6.2 虚假回归

- 假设条件

$$H_0 : \beta_1 = 0 \leftrightarrow H_1 : \beta_1 \neq 0$$

- 检验统计量

$$t = \frac{\beta_1}{\sigma_\beta}$$

- 虚假回归

$$\Pr\{|t| \le t_{\alpha/2}(n) | \text{非平稳序列}\} \ge \alpha$$

6.3 单位根检验

- 定义
  - 通过检验特征根是在单位圆内还是单位圆上（外），来检验序列的平稳性
- 方法
  - DF检验
  - ADF检验
  - PP检验

DF检验

- 假设条件
  - 原假设：序列非平稳 $H_0: |\phi_1| \geq 1$
  - 备择假设：序列平稳 $H_0: |\phi_1| < 1$
- 检验统计量
  - $|\phi_1| < 1$ 时 $t(\phi_1) = \dfrac{\hat{\phi}_1 - \phi_1}{S(\hat{\phi}_1)} \xrightarrow{\text{渐近}} N(0,1)$
  - $|\phi_1| = 1$ 时

$$\tau = \frac{|\hat{\phi}_1| - 1}{S(\hat{\phi}_1)}$$

DF统计量

- $|\phi_1|<1$ 时

$$t(\phi_1)=\frac{\hat{\phi}_1-\phi_1}{S(\hat{\phi}_1)}\xrightarrow{\text{渐近}}N(0,1)$$

- $|\phi_1|=1$ 时

$$\tau=\frac{|\hat{\phi}_1|-1}{S(\hat{\phi}_1)}\xrightarrow{\text{极限}}\frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}}$$

DF检验的等价表达

- 等价假设

$$H_0\text{：}\ \rho = 0 \leftrightarrow H_1\text{：}\ \rho < 0$$

$$\text{其中：}\ \rho = |\phi_1| - 1$$

- 检验统计量

$$\tau = \frac{\hat{\rho}}{S(\hat{\rho})}$$

DF检验的三种类型

- 第一种类型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

- 第二种类型

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

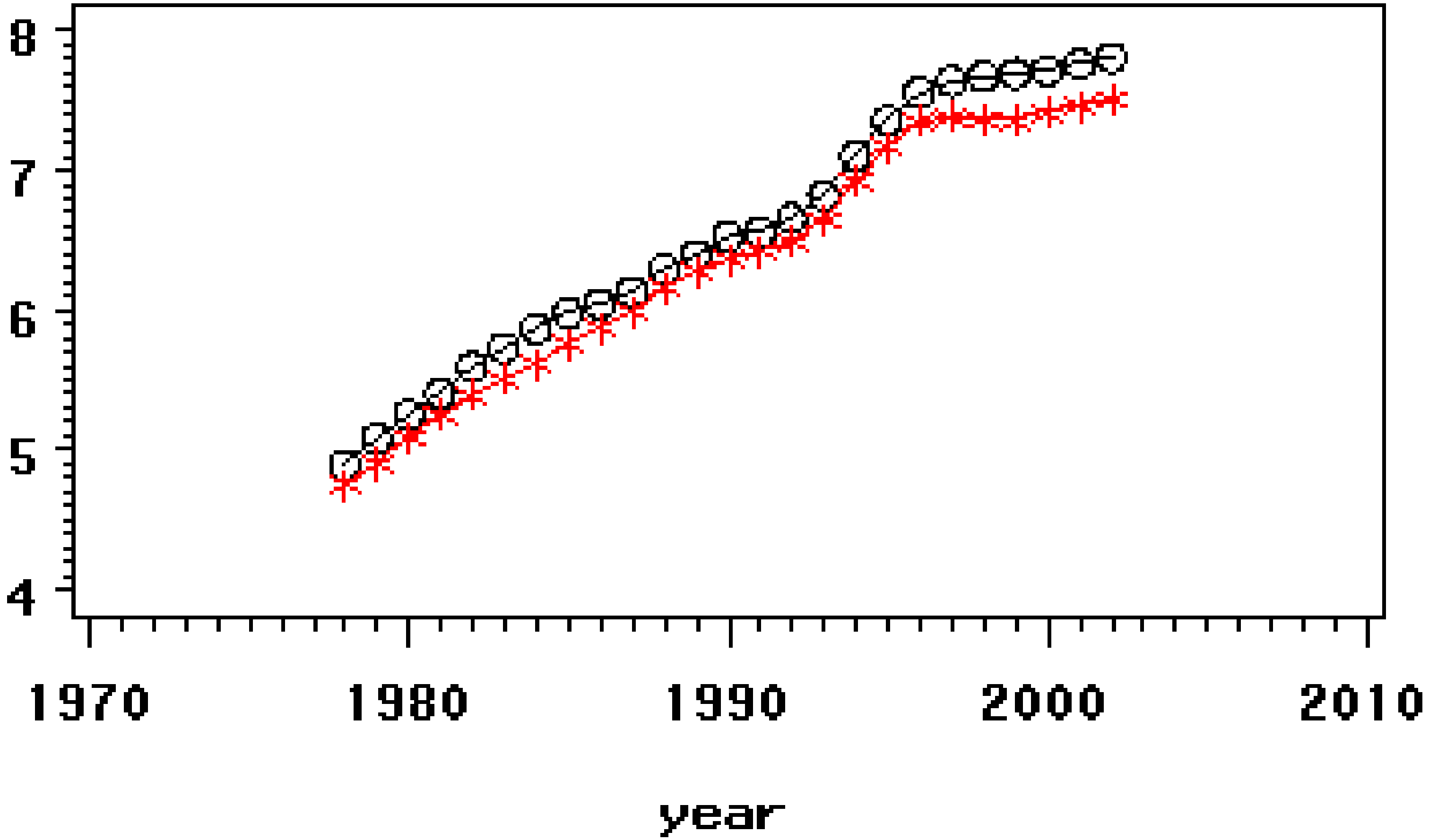
- 第三种类型

$$x_t = \mu + \beta t + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

例6.2

- 对1978年—2002年中国农村居民家庭人均纯收入对数序列$\{\ln x_t\}$和生活消费支出对数序列$\{\ln y_t\}$进行检验

例6.2 时序图



例6.2 输入序列的DF检验

类型	延迟阶数	模型结构	τ检验统计量的值	$pr<\tau$
类型 1：无均值,无趋势模型	0	$\ln x_t=\varepsilon_t$	7.05	0.9999
	1	$\ln x_t=\dfrac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	1.09	0.9224
类型 2：有均值,无趋势模型	0	$\ln x_t=\mu+\varepsilon_t$	-2.18	0.2190
	1	$\ln x_t=\mu+\dfrac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	-1.16	0.6730
类型 3：有趋势模型	0	$\ln x_t=\mu+\beta t+\varepsilon_t$	-0.7	0.9617
	1	$\ln x_t=\mu+\beta t+\dfrac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	-3.14	0.1215

例6.2 输出序列的DF检验

类型	延迟阶数	模型结构	τ检验统计量的值	$pr<\tau$
类型 1：无均值,无趋势模型	0	$\ln y_t=\varepsilon_t$	6.54	0.9999
	1	$\ln y_t=\frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	1.08	0.9217
类型 2：有均值,无趋势模型	0	$\ln y_t=\mu+\varepsilon_t$	-2.27	0.1887
	1	$\ln y_t=\mu+\frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	-1.41	0.5598
类型 3：有趋势模型	0	$\ln y_t=\mu+\beta t+\varepsilon_t$	-0.46	0.9784
	1	$\ln y_t=\mu+\beta t+\frac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}$	-3.31	0.0892

ADF检验

- DF检验只适用于AR(1)过程的平稳性检验 。为了使检验能适用于AR(p)过程的平稳性检验，人们对检验进行了一定的修正，得到增广检验（Augmented Dickey－Fuller），简记为ADF检验

ADF检验的原理

- 若AR(p)序列有单位根存在，则自回归系数之和恰好等于1

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \Lambda - \phi_p = 0$$

$$\overset{\lambda=1}{\Longrightarrow} 1 - \phi_1 - \Lambda - \phi_p = 0$$

$$\Longrightarrow \phi_1 + \phi_2 + \Lambda + \phi_p = 1$$

ADF检验

- 等价假设

$$H_0: \ \rho = 0 \leftrightarrow H_1: \ \rho < 0$$

其中：$\rho = \phi_1 + \phi_2 + \Lambda + \phi_p - 1$

- 检验统计量

$$\tau = \frac{\hat{\rho}}{S(\hat{\rho})}$$

ADF检验的三种类型

- 第一种类型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 第二种类型

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 第三种类型

$$x_t = \mu + \beta t + \phi_1 x_{t-1} + \Lambda + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

例6.2续

- 对1978年－2002年中国农村居民家庭人均纯收入对数差分后序列$\{\nabla \ln x_t\}$和生活消费支出对数差分后序列$\{\nabla \ln y_t\}$进行检验

例6.2 $\{\nabla \ln x_t\}$序列的ADF检验

类型	延迟阶数	τ检验统计量的值	$pr<\tau$
类型 1	0	-1.38	0.1498
	1	-1.37	0.1523
	2	-1.36	0.1555
	3	-1.34	0.1606
类型 2	0	-1.92	0.3196
	1	-2.23	0.2033
	2	-3.1	0.0421
	3	-1.9	0.3278
类型 3	0	-2.08	0.5311
	1	-2.41	0.3646
	2	-3.37	0.0820
	3	-1.99	0.5732

例6.2 $\{\nabla \ln y_t\}$序列的ADF检验

类型	延迟阶数	τ检验统计量的值	$pr < \tau$
类型 1	0	-1.27	0.1813
	1	-1.8	0.0688
	2	-1.3	0.1699
	3	-1.06	0.2514
类型 2	0	-1.89	0.3297
	1	-3.35	0.0246
	2	-2.81	0.0737
	3	-1.72	0.4086
类型 3	0	-2.16	0.4897
	1	-3.62	0.0511
	2	-3.32	0.0902
	3	-2.21	0.4613

PP检验

- ADF检验主要适用于方差齐性场合，它对于异方差序列的平稳性检验效果不佳
- Phillips和 Perron于1988年对ADF检验进行了非参数修正，提出了PP检验统计量。
- PP检验统计量适用于异方差场合的平稳性检验，且服从相应的ADF检验统计量的极限分布

PP检验统计量

$$Z(\tau)=\tau(\hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}_{Sl}^2)-(1/2)(\hat{\sigma}_{Sl}^2-\hat{\sigma}^2)T\sqrt{\hat{\sigma}_{Sl}^2\sum_{t=2}^{T}(x_{t-1}-\bar{x}_{T-1})^2}$$

- 其中：

(1) $\hat{\sigma}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2$

(2) $\hat{\sigma}_{Sl}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2+2T^{-1}\sum_{j=1}^{l}w_j(l)\sum_{t=j+1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-j}$

(3) $\bar{x}_{T-1}=\dfrac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}x_t$

例6.2续

- 对1978年－2002年中国农村居民家庭人均纯收入对数差分后序列 $\{\nabla \ln x_t\}$和生活消费支出对数差分后序列 $\{\nabla \ln y_t\}$进行PP检验

例6.2 $\{\nabla \ln x_t\}$序列的pp检验

类型	延迟阶数	τ检验统计量的值	$pr<\tau$
类型 1	0	-1.38	0.1498
	1	-1.4	0.1447
	2	-1.43	0.1381
	3	-1.39	0.1484
类型 2	0	-1.92	0.3196
	1	-2.05	0.2661
	2	-2.16	0.2240
	3	-2.06	0.2620
类型 3	0	-2.08	0.5311
	1	-2.22	0.4559
	2	-2.34	0.3995
	3	-2.22	0.4548

例6.2 $\{\nabla \ln y_t\}$序列的PP检验

类型	延迟阶数	τ检验统计量的值	$pr < \tau$
类型 1	0	-1.27	0.1813
	1	-1.37	0.1524
	2	-1.38	0.1513
	3	-1.3	0.1714
类型 2	0	-1.89	0.3297
	1	-2.17	0.2228
	2	-2.2	0.2110
	3	-2.06	0.2603
类型 3	0	-2.16	0.4897
	1	-2.43	0.3536
	2	-2.47	0.3397
	3	-2.31	0.4137

例6.2 二阶差分后序列的PP检验

类型	延迟阶数	$\{\nabla^2 \ln x_t\}$		$\{\nabla^2 \ln y_t\}$	
		τ检验统计量的值	$pr < \tau$	τ检验统计量的值	$pr < \tau$
类型 1	0	-4.29	0.0002	-3.42	0.0016
	1	-4.29	0.0002	-3.47	0.0014
	2	-4.31	0.0002	-3.44	0.0015
	3	-4.27	0.0002	-3.34	0.0019
类型 2	0	-4.23	0.0035	-3.37	0.0237
	1	-4.23	0.0035	-3.42	0.0210
	2	-4.25	0.0033	-3.39	0.0224
	3	-4.21	0.0037	-3.28	0.0283
类型 3	0	-4.12	0.0193	-3.27	0.0983
	1	-4.12	0.0194	-3.33	0.0881
	2	-4.15	0.0184	-3.29	0.0934
	3	-4.09	0.0205	-3.17	0.1158

6.4 协整

- 单整的概念
  - 如果序列平稳，说明序列不存在单位根，这时称序列为零阶单整序列，简记为$x_t \sim I(0)$
  - 假如原序列一阶差分后平稳，说明序列存在一个单位根，这时称序列为一阶单整序列，简记为$x_t \sim I(1)$
  - 假如原序列至少需要进行d阶差分才能实现平稳，说明原序列存在d个单位根，这时称原序列为阶单整序列，简记为$x_t \sim I(d)$

单整的性质

- 若$x_t \sim I(0)$，对任意非零实数a，b，有
$$a + bx_t \sim I(0)$$
- 若$x_t \sim I(d)$，对任意非零实数a，b，有
$$a + bx_t \sim I(d)$$
- 若$x_t \sim I(0), y_t \sim I(0)$ 对任意非零实数a，b，有
$$z_t = ax_t + by_t \sim I(0)$$
- 若$x_t \sim I(d)$，$y_t \sim I(c)$ 对任意非零实数a，b，有
$$z_t = ax_t + by_t \sim I(k) \qquad k \le \max[d, c]$$

协整的概念

- 假定自变量序列为 $\{x_1\},\Lambda,\{x_k\}$，响应变量序列为 $\{y_t\}$，构造回归模型

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{it} + \varepsilon_t$$

假定回归残差序列 $\{\varepsilon_t\}$ 平稳，我们称响应序列 $\{y_t\}$ 与自变量序列 $\{x_1\},\Lambda,\{x_k\}$ 之间具有协整关系。

协整检验

- 假设条件
  - 原假设：多元非平稳序列之间不存在协整关系 $H_0: \varepsilon_t \sim I(k), k \geq 1$
  - 备择假设：多元非平稳序列之间存在协整关系 $H_1: \varepsilon_t \sim I(0)$
- 检验步骤
  - 建立响应序列与输入序列之间的回归模型
  - 对回归残差序列进行平稳性检验

例6.2续

- 对1978年－2002年中国农村居民家庭人均纯收入对数序列$\ln\{x_t\}$和生活消费支出对数序列$\ln\{y_t\}$进行EG检验。

构造回归模型

- 拟合模型
  - 一元线性模型
- 估计方法
  - 最小二乘估计
- 拟合模型口径

$$\ln y_t = 0.96832 \ln x_t + \varepsilon_t$$

残差序列单位根检验

类型	延迟阶数	τ 检验统计量的值	$pr < \tau$
类型 1	0	-1.33	0.1629
	1	-1.69	0.0845
	2	-1.93	0.0528
类型 2	0	-1.28	0.6222
	1	-1.64	0.4455
	2	-1.85	0.3484

我们可以以91.55%（1－0.0845）的把握断定残差序列平稳且具有一阶自相关性 $\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \upsilon_t$

最终拟合模型

$$\ln y_t = 0.96821 \ln x_t + \frac{\upsilon_t}{1 - 0.83713B}$$

$$v_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0, 0.000893)$$

误差修正模型

- 误差修正模型（Error Correction Model）简称为ECM，最初由Hendry和Anderson于1977年提出，它常常作为协整回归模型的补充模型出现
- 协整模型度量序列之间的长期均衡关系，而ECM模型则解释序列的短期波动关系

短期影响因素分析

- 响应序列的当期波动∇y_t主要会受到三方面短期波动的影响
  - 输入序列的当期波动 ∇x_t
  - 上一期的误差ECM_{t-1}
  - 纯随机波动 ε_t

$$y_t - y_{t-1} = \beta x_t - \beta x_{t-1} - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\nabla y_t = \beta \nabla x_t - ECM_{t-1} + \varepsilon_t$$

误差修正模型

$$\nabla y_t = \beta_0 \nabla x_t + \beta_1 ECM_{t-1} + \varepsilon_t$$

例6.2续

- 对1978年－2002年中国农村居民家庭人均纯收入对数序列$\ln\{x_t\}$和生活消费支出对数序列$\ln\{y_t\}$构造ECM模型

例6.2 构造ECM模型

- 拟合长期协整关系

$$\ln y_t = 0.96832 \ln x_t + \varepsilon_t$$

- 拟合短期波动（ECM模型）

$$\nabla \ln y_t = 0.9579 \nabla \ln x_t - 0.1537 ECM_{t-1} + \varepsilon_t$$

中 国 人 民 大 学 出 版 社

中 国 人 民 大 学 音 像 出 版 社

地址：中国北京市中关村大街31号（100080）

电话：（010）62510566

网址：www.crup.cn