第三章、多元正态总体参数的假设检验

October 23, 2018

3.0 引言

Q1: What is main idea of hypothesis?

Q2: Suppose that $\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \ldots, m$, how to test for the following issues?

(i) Equality of mean vectors:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m \leftrightarrow H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ for some $i \neq j$.

(ii) Equality of covariance matrices:

$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_m \leftrightarrow H_1 : \Sigma_i \neq \Sigma_j$ for some $i \neq j$.

The key is to construct the testing statistics.

3.1 几个重要统计量的分布

一、正态随机向量的二次型分布（卡方分布）

1.分量独立的n维随机向量X的二次型[1]

设$X_i \sim N_1(\mu_i, \sigma^2)(i = 1, \cdots, n)$,且相互独立,记

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

则$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$,其中$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)'$.

[1]什么是二次型？对于向量x 和矩阵A, $x'Ax$被称为是二次型

(a) 二次型（卡方）分布的性质

性质1: (中心化的χ^2分布) 当$X \sim N_n(0, I_n)$ 时, 则

$$\xi = X'X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$

当$X \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ $(\sigma \neq 0)$时, 则

$$\frac{1}{\sigma^2} X'X \sim \chi^2(n).$$

定义3.1.1 (非中心化的χ^2分布) 设n 维随机向量$X \sim N_n(\mu, I_n)$, $\mu \neq 0$, 则称随机变量$\xi = X'X$ 为服从自由度是n, 非中心参数是$\delta = \mu'\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ 的χ^2 分布,记为$X'X \sim \chi^2(n, \delta)$ 或$X'X \sim \chi_n^2(\delta)$.

性质2 当$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$ 时, $\frac{1}{\sigma^2}X'X$的分布称为**非中心的χ^2分布**, 即$\frac{1}{\sigma^2}X'X \sim \chi_n^2(\delta)$.

性质3 设$X \sim N_n(0_n, \sigma^2 I_n)$, A为对称矩阵,且rank$(A) = r$, 则二次型$X'AX/\sigma^2 \sim \chi^2(r) \Longleftrightarrow A^2 = A$($A$为对称幂等矩阵).

证明： 设$rank(A) = r$, 则存在正交矩阵Γ

$$\Gamma' A \Gamma = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

先证（$\Leftarrow$）： 如果$A^2 = A$, 则$\Gamma' A \Gamma = \Gamma' A^2 \Gamma$, 即

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r^2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有$\lambda_i = 1$, $i = 1, \cdots, r$. 令$Y = \Gamma' X \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, $X = \Gamma Y$, 则

$$\xi = X' A X / \sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 Y_i^2 / \sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} Y_i^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(r).$$

下证($\Rightarrow$): 令$Y=\Gamma' X$, 则$Y/\sigma^2 \sim N(0, D_r)$. 故,

$$X'AX/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 Y_i^2/\sigma^2,$$

其特征函数为$\Pi_{i=1}^{r}(1-2i\lambda_i t)^{1/2}$. 另一方面, 由于$X'AX/\sigma^2 \sim \chi^2(r)$, 其特征函数为$(1-2it)^{r/2}$. 从而, $\lambda_i = 1$, $i=1,2,\cdots,r$. 从而, A为对称等幂矩阵。

性质4 设$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$, $A = A'$,则有

(1)$\frac{1}{\sigma^2}X'AX \sim \chi^2(r, \delta)$. $\Longleftrightarrow$ (2)$A^2 = A$, 且$\mathrm{rank}(A) = r(r \leq n)$,

其中, $\delta = \mu' A\mu/\sigma^2$.

性质5 **二次型与线性函数的独立性**

设$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$,$A$为$n$阶对称矩阵, B为$m \times n$ 矩阵,

令$\xi = X'AX$, $Z = BX$.则$BA = 0 \Leftrightarrow BX$ 与$X'AX$ 相互独立.

证明（性质5）：

$$
\begin{aligned}
BA &= B\Gamma\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Gamma' = (C_1 \vdots C_2)\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Gamma' \\
&= (C_1 D_r \vdots 0)\Gamma' = 0.
\end{aligned}
$$

由此可知$C_1 = 0$. 令$Y = \Gamma' X \sim N(\Gamma'\mu, \sigma^2 I_n)$, $Y_1, \ldots, Y_n$ 相互独立.

$$
\begin{aligned}
X'AX &= Y'\Gamma' A \Gamma Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i^2. \\
BX &= B\Gamma Y = C_2 \begin{pmatrix} Y_{r+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

结论6 两个二次型相互独立的条件:设$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$, A, B为n 阶对称矩阵, 则:

$$AB = \mathbf{0} \Longleftrightarrow X'AX\text{与}X'BX\text{相互独立}.$$

2.一般p维正态随机向量的二次型

对于一般p 维正态随机向量的二次型具有以下结论:

结论1 设$X \sim N_p(\mu, \Sigma), \Sigma > 0$,则$X'\Sigma^{-1}X \sim \chi^2(p, \delta)$, 其中, $\delta = \mu'\Sigma^{-1}\mu$.

证明: 因为$\Sigma > 0$, 故存在Γ和$\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, p$使得:

$$\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}} \cdot \Sigma^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Gamma diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_p})\Gamma'.$$

定义$Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}X \sim N(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu, I_p)$, 则

$$X'\Sigma^{-1}X = Y'Y \sim \chi^2(p, \delta).$$

结论2 设$X \sim N_p(\mu, \Sigma), \Sigma > 0, A$为对称矩阵,且$\text{rank}(A) = r$,则

$$(X-\mu)'A(X-\mu) \sim \chi^2(r) \Longleftrightarrow \Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma.$$

证明： 记$Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-\mu) \sim N_p(0, I_p)$. 则

$$(X-\mu)'A(X-\mu) = Y'\Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}} Y.$$

从而，

$$(X-\mu)'A(X-\mu) \sim \chi^2(r) \Longleftrightarrow \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}} * \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}}.$$

故，$\Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$.

结论3 设$X \sim N_p(\mu, \Sigma), \Sigma > 0, A, B$为$p$阶对称矩阵,则

$$(X-\mu)'A(X-\mu)\text{与}(X-\mu)'B(X-\mu)\text{独立}$$

$$\Longleftrightarrow \Sigma A \Sigma B \Sigma = \mathbf{0}_{p\times p}$$

证明： 记$Y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-\mu) \sim N_p(0, I_p)$, 则

$$\begin{aligned}(X-\mu)'A(X-\mu) &= Y'\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}Y,\\ (X-\mu)'B(X-\mu) &= Y'\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2}Y,\end{aligned}$$

因此，$(X-\mu)'A(X-\mu)$ 与$(X-\mu)'B(X-\mu)$ 独立的充分必要条件为

$$\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}B\Sigma^{1/2} = \Sigma^{1/2}A\Sigma B\Sigma^{1/2} = \mathbf{0}_{p\times p},$$

即$\Sigma A \Sigma B \Sigma = \mathbf{0}_{p\times p}$.

3、非中心t分布和非中心F分布

定义3.1.2 设$X \sim N(\delta, 1)$ 与$Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立, 令

$$T = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}},$$

则称T的分布为具有n个自由度,非中心参数为δ的非中心t分布,记为$T \sim t(n, \delta)$.

定义3.1.3 设$X \sim \chi^2(m, \delta)$ 与$Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立,令

$$F = \frac{X/m}{Y/n},$$

则称F的分布为具有自由度为m, n,非中心参数为δ的F分布,记为$F \sim F(m, n, \delta)$.

4、非中心χ^2分布,非中心t分布和非中心F分布的应用

用于计算犯第二类错误的概率. 对于正态总体$N(\mu,\sigma^2)$, 对于假设检验$H_0:\mu=\mu_0$, 检验统计量为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

其拒绝域$W=\{|T|>t_{\alpha/2}\}$, 犯第二类错误的概率,

$$\Pr(|T|\le t_{\alpha/2}\}|\mu\ne\mu_0)=\beta.$$

当$\mu=\mu_1\ne\mu_0$, 检验统计量$T\sim t(n-1,\delta)$, 其中:

$$\delta=\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)/\sigma.$$

二、威沙特(Wishart)分布

1.威沙特分布的定义

定义3.1.4 设$X_{(\alpha)} \sim N_p(0, \Sigma)(\alpha = 1, \cdots, n)$相互独立，记$X = (X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})'$ 为$n \times p$ 矩阵, 则称随机阵

$$W = \sum_{\alpha=1}^{n} X_{(\alpha)} X'_{(\alpha)} = X'X$$

的分布就是威沙特分布, 记为$W \sim W_p(n, \Sigma)$

定义3.1.4(续) 一般地,设$X_{(\alpha)} \sim N_p(\mu, \Sigma)(\alpha = 1, \cdots, n)$相互独立, 记

$$M = \mathbf{1}_n \mu',$$

称$W = X'X$ 服从非中心参数为Δ 的非中心威沙特分布, 记为$W \sim W_p(n, \Sigma, \Delta)$, 其中

$$\Delta = M'M = n\mu\mu'.$$

2、威沙特分布的性质

性质1: 设$X_{(\alpha)} \sim N_p(\mu, \Sigma)(\alpha = 1, \cdots, n)$相互独立,则样本离差阵$A$服从威沙特分布,即

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n} (X_{(\alpha)} - \bar{X})(X_{(\alpha)} - \bar{X})' \sim W_p(n-1, \Sigma)$$

证明: 由第二章知, $A \overset{d}{=} \sum_{t=1}^{n-1} Z_{(t)} Z_t'$, 其中$Z_{(t)}$ 独立同分布, 服从$N_p(0, \Sigma)$.

性质2: (关于自由度n具有可加性) 设$W_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ $(i = 1, \cdots, k)$相互独立,则

$$\sum_{i=1}^{k} W_i \sim W_p(n, \Sigma), \quad n = n_1 + \cdots + n_k$$

性质3: 设p阶随机阵$W \sim W_p(n, \Sigma)$,C是$m \times p$矩阵,则m阶随机阵CWC'也服从威沙特分布,即

$$CWC' \sim W_m(n, C\Sigma C')$$

特别有:

- 如果$C = a > 0$(常数), $aW \sim W_p(n, a\Sigma)$.
- 如果$C = (l_1, \ldots, l_p)'$(向量),
  则$l'Wl = \xi \sim W_1(n, l'\Sigma l) =^d \sigma^2\chi^2(n)$. 其中: $\sigma^2 = l'\Sigma l$.

性质4: 分块威沙特矩阵的分布: 设$X_{(\alpha)} \sim N_p(0,\Sigma)$ $(\alpha = 1,\cdots,n)$相互独立,其中$\Sigma = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r \\ p-r. \end{array} \end{array}$ 又已知随机阵

$$W = \sum_{\alpha=1}^{n} X'_{(\alpha)} X_{(\alpha)} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r \\ p-r \end{array} \end{array} \sim W_p(n,\Sigma),$$

则

(1) $W_{11} \sim W_r(n,\Sigma_{11}), W_{22} \sim W_{p-r}(n,\Sigma_{22})$,

(2) 当$\Sigma_{12} = \mathbf{0}$时, W_{11}与W_{22}相互独立.

性质5: 设$W \sim W_p(n,\Sigma)$,记$W_{22\cdot 1}=W_{22}-W_{21}W_{11}^{-1}W_{12}$,则

$$W_{22\cdot 1} \sim W_{p-r}(n-r,\Sigma_{22\cdot 1}),$$

其中$\Sigma_{22\cdot 1}=\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$, 且$W_{22\cdot 1}$与$W_{11}$相互独立.

证明提示:

$$W_{22\cdot 1}=X^{(2)'}CX^{(2)},$$

其中: $C=(1-X^{(1)}(X^{(1)'}X^{(1)})^{-1}X^{(1)'})$, $C^2=C$, $C=C'$.

具体可参见《实用多元统计分析》方开泰，华东师范大学出版社.

性质6: 设随机阵$W \sim W_p(n, \Sigma)$, 则$\mathrm{E}(W) = n\Sigma$

性质7: 设随机阵$W \sim W_p(n, \Sigma)$, a 为任一p元常数向量, 满足$a'\Sigma a \neq 0$, 则$\frac{a'Wa}{a'\Sigma a} \sim \chi^2(n)$.

性质8: 设随机阵$W \sim W_p(n, \Sigma)$, a 为任一p元常数向量, 则$\frac{a'\Sigma^{-1}a}{a'W^{-1}a} \sim \chi^2(n-p+1)$.

威沙特分布随机数

1. package: rWishart stats
2. Description: Generate n random matrices, distributed according to the Wishart distribution with parameters Sigma, df, $W_p(Sigma, df)$.
3. Usage: rWishart(n, df, Sigma)
4. Arguments
   - n integer sample size.
   - df numeric parameter, “degrees of freedom”.
   - Sigma positive definite (p * p) “scale” matrix, the matrix parameter of the distribution.

在google查找：CRAN Task View: Probability Distributions 可以看到R 中所有的各类关于概率分布函数的内容。

三、霍特林(Hotelling)T^2分布

1.霍特林T^2分布的定义

定义3.1.5: 设$X \sim N_p(0,\Sigma)$,随机阵$W \sim W_p(n,\Sigma)$, $\Sigma > 0$, $n \geq p$,且X与W相互独立,则称统计量$T^2 = nX'W^{-1}X$为**霍特林T^2统计量**, 其分布称为**服从n个自由度的T^2分布**,记为

$$T^2 \sim T^2(p,n).$$

更一般的,若$X \sim N_p(\mu,\Sigma)$,则称T^2的分布为**非中心霍特林T^2分布**,记为$T^2 \sim T^2(p,n,\mu)$.

2、霍特林T^2分布的性质

性质1: 设多元正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$,样本$X_{(\alpha)}(\alpha=1,\cdots,n)$,$\bar{X}$和$A$ 分别是样本均值向量和样本离差阵,则统计量

$$\begin{aligned} T^2 &= n(n-1)(\bar{X}-\mu)'A^{-1}(\bar{X}-\mu) \\ &\sim T^2(p,n-1) \end{aligned}$$

性质2: T^2与F分布的关系: 设$T^2 \sim T^2(p,n)$,则

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 \sim F(p, n-p+1).$$

具体地,

- 当$p=1$, $W \stackrel{d}{=} W_1(n,\sigma^2) \sim \sigma^2\chi^2(n)$,

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 = T^2 = \frac{X'X}{W/n} \sim F(1,n).$$

- 当$p \neq 1$,

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 = \frac{n-p+1}{np}\frac{X'\Sigma^{-1}X}{X'\Sigma^{-1}X/X'W^{-1}X}.$$

$X'\Sigma^{-1}X \sim \chi^2(p,\delta)$, $\delta = \mu'\Sigma^{-1}\mu$,

$X'\Sigma^{-1}X/X'W^{-1}X \sim \chi^2(n-p+1)$(威沙特分布性质8).

性质3: 设多元正态总体$N_p(\mu,\Sigma)$,样本$X_{(\alpha)}(\alpha=1,\cdots,n)$,$\bar{X}$和$A$ 分别是样本均值向量和样本离差阵.记

$$T^2=n(n-1)\bar{X}'A^{-1}\bar{X},$$

则

$$\frac{n-p}{p}\frac{T^2}{n-1}\sim F(p,n-p,\delta),$$

其中$\delta=n\mu'\Sigma^{-1}\mu$.

$$T^2=(n-1)(\sqrt{n}\bar{X})'A^{-1}(\sqrt{n}\bar{X})\sim T^2(p,n-1,\sqrt{n}\mu).$$

性质4: T^2统计量的分布只与p,n有关,与Σ无关.

事实上，设$X \sim N_p(0,\Sigma)$, $W \sim W_p(n,\Sigma)$, 且X 与W相互独立,
则$T^2 = nX'W^{-1}X \sim T^2(p,n)$. 令$U = \Sigma^{-1/2}X$, $W_0 = \Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2}$
则$U \sim N_p(0,I_p)$, $W_0 \sim W_p(n,I_p)$, 且U与W_0 相互独立. 从
而，$T_0^2 = nU'W_0^{-1}U \sim T^2(p,n)$.

性质5: T^2统计量对非退化线性变换保持不变.

设$Y_i = CX_i + d$, $C = (c_{ij})_{p\times p}$, $d \in \mathbb{R}^p$, 则$T_y^2 = T_x^2$.

♣ Hotelling T^2 分布

在R中，一般都只要用F分布函数去计算Hotelling T^2 的概率分布和分位数。

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 \sim F(p, n-p+1)$$

四、威尔克斯(Wilks)Λ统计量及其分布

1、威尔克斯Λ分布的定义

定义3.1.6 设$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$,则称协方差阵的行列式$|\Sigma|$为X的广义方差.

若样本为$X_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \cdots, n$,A 是样本离差阵, 则称$|A|/n$或$|A|/(n-1)$ 为样本广义方差.

定义3.1.7 设$A_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, $A_2 \sim W_p(n_2, \Sigma)$, $(\Sigma > 0, n_1 \geq p)$,且A_1和A_2独立,则称广义方差之比

$$\Lambda = \frac{|A_1|}{|A_1 + A_2|}$$

为**威尔克斯统计量或Λ统计量**,其分布称为**威尔克斯分布**. 记为

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n_1, n_2).$$

当$p = 1$时，Λ 统计量的分布是一元统计中的参数为$n_1/2$ 和$n_2/2$的β 分布，$\beta \sim \beta(n_1/2, n_2/2)$.

2、Λ 统计量与T^2 或F 统计量的关系

结论1: 当$n_2=1$时,设$n_1=n>p$,则

$$\Lambda(p,n,1)\stackrel{d}{=}\frac{1}{1+\frac{1}{n}T^2(p,n)}$$

或

$$T^2(p,n)=n\frac{1-\Lambda(p,n,1)}{\Lambda(p,n,1)}.$$

并且由Hotelling T^2的性质知:

$$\frac{n-p+1}{p}\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\stackrel{d}{=}F(p,n-p+1).$$

证明： 令

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{k=1}^{n+1} X_k X_k' \sim W_p(n+1, \Sigma),\ W_1 = \sum_{k=1}^{n} X_k X_k' \sim W_p(n, \Sigma), \\
|W| &= |W_1 + X_{n+1} X_{n+1}'| = \begin{vmatrix} W_1 & -X_{n+1} \\ X_{n+1}' & 1 \end{vmatrix} \\
&= |W_1|(1 + X_{n+1}' W_1^{-1} X_{n+1}).
\end{aligned}$$

则

$$\Lambda(p, n, 1) = |W_1|/|W| = 1/(1 + X_{n+1}' W_1^{-1} X_{n+1}).$$

另一方面，$nX_{n+1}' W_1^{-1} X_{n+1} \sim T^2(p, n)$，从而得证结论1.

结论2: 当$n_2 = 2$时,设$n_1 = n > p$则

$$\frac{n-p+1}{p}\frac{1-\sqrt{\Lambda(p,n,2)}}{\sqrt{\Lambda(p,n,2)}} \stackrel{d}{=} F(2p, 2(n-p+1)).$$

结论3: 当$p = 1$时,则

$$\frac{n_1}{n_2}\frac{1-\Lambda(1,n_1,n_2)}{\Lambda(1,n_1,n_2)} \stackrel{d}{=} F(n_2, n_1).$$

结论4: 当$p = 2$时,则

$$\frac{n_1-1}{n_2}\frac{1-\sqrt{\Lambda(2,n_1,n_2)}}{\sqrt{\Lambda(2,n_1,n_2)}} \stackrel{d}{=} F(2n_2, 2(n_1-1)).$$

结论5: 当$n_2 > 2, p > 2$时,可用χ^2统计量或F统计量近似.

Box(1949)给出如下的结论: 假设$\Lambda \sim \Lambda(p, n_1, n_2)$, 则当$n_1 \to \infty$时,

$$-r \ln \Lambda \sim \chi^2(pn_2),$$

其中$r = n_1 - \frac{1}{2}(p - n_2 + 1)$.

3、两个重要结论

结论1: 若$\Lambda \sim \Lambda(p, n_1, n_2)$ 则存在$B_k \sim \beta(\frac{n_1-p+k}{2}, \frac{n_2}{2})$ $(k=1,\cdots,p)$ 相互独立,使得

$$\Lambda \overset{d}{=} B_1 B_2 \cdots B_p.$$

结论2: 若$n_2 < p$,则

$$\Lambda(p, n_1, n_2) \overset{d}{=} \Lambda(n_2, p, n_1+n_2-p)$$

结论2是一元统计中$F(n,m) \overset{d}{=} \frac{1}{F(m,n)}$的推广.

3.2 单总体均值向量的检验及置信域

一、均值向量的检验

设多元正态总体$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$,样本$X_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

1、当$\Sigma = \Sigma_0$已知时的均值检验

构造检验统计量:

$$T_0^2 = n(\bar{X} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \overset{H_0\text{下}}{\sim} \chi^2(p).$$

对给定的显著水平α,拒绝域为$W = \{T_0^2 > \lambda_\alpha = \chi_\alpha^2(p)\}$.

2、当Σ未知时的均值检验

当Σ未知时,

$$T^2 = n(n-1)(\bar{X}-\mu_0)'A^{-1}(\bar{X}-\mu_0) \sim T^2(p, n-1)$$

构造检验统计量:

$$F = \frac{(n-1)-p+1}{(n-1)p} T^2 \overset{H_0\text{下}}{\sim} F(p, n-p)$$

对给定的显著水平α,拒绝域为$\{F > F_\alpha(p, n-p)\}$

3. 均值向量的检验R处理

例1： 检验

$$H_0 : \mu = (4, 50, 10)', \quad H_1 : \mu \neq (4, 50, 10)'$$

数据见下页表格。

将数据代入易得

$$T^2 = n(\bar{\boldsymbol{x}} - \mu_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \mu_0) = 9.74,$$

在显著水平$\alpha = 0.1$下，拒绝域为$\{\frac{(n-p)T^2}{(n-1)p} > F_{0.1}(3, 17) = 2.44\}$，即$\{T^2 > 19 * 3 * 2.44/17 = 8.18\}$. 因为$T^2 = 9.74 > 8.18$，故在显著水平0.1 下，拒绝原假设。

Table 5.1 Sweat Data

Individual	X_1 (Sweat rate)	X_2 (Sodium)	X_3 (Potassium)
1	3.7	48.5	9.3
2	5.7	65.1	8.0
3	3.8	47.2	10.9
4	3.2	53.2	12.0
5	3.1	55.5	9.7
6	4.6	36.1	7.9
7	2.4	24.8	14.0
8	7.2	33.1	7.6
9	6.7	47.4	8.5
10	5.4	54.1	11.3
11	3.9	36.9	12.7
12	4.5	58.8	12.3
13	3.5	27.8	9.8
14	4.5	40.2	8.4
15	1.5	13.5	10.1
16	8.5	56.4	7.1
17	4.5	71.6	8.2
18	6.5	52.8	10.9
19	4.1	44.1	11.2
20	5.5	40.9	9.4

Source: Courtesy of Dr. Gerald Bargman.

将上面数据存为”ch321.txt”，均值向量检验的R处理方法。

- 加载ICSNP包(包括mvtnorm, ICS, survey);
- $X < -read.table(”ch321.txt”, header = T)$ #将数据读入;
- $HotellingsT2(X, mu = c(4, 50, 10));$

```
        Hotelling's one sample T2-test

data:  X
T.2 = 2.9045, df1 = 3, df2 = 17, p-value = 0.06493
alternative hypothesis: true location is not equal to c(4,50,10)
```

似然比检验的思想:

- 似然比检验的实质是在比较有约束条件下的似然函数最大值与无约束条件下似然函数最大值。
- 似然比定义为有约束条件下的似然函数最大值与无约束条件下似然函数最大值之比。
- 根据似然比的构造，在一定条件下，构造一个服从近似卡方分布统计量。

二、似然比统计量法

设p元总体X的密度函数为$f(x,\theta)$,θ是参数.考虑假设问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0,\quad H_1:\theta\notin\Theta_0$$

把样本$X_{(\alpha)},\ \alpha=1,\cdots,n$的联合密度

$$L(x_{(1)},\cdots,x_{(n)};\theta)=\prod_{t=1}^{n}f((x_{(t)});\theta))$$

记为$L(X;\theta)$称为是**样本的似然函数**. 引入统计量

$$\lambda=\max_{\theta\in\Theta_0}L(X;\theta)/\max_{\theta\in\Theta}L(X;\theta)$$

称为**似然比统计量**.

- 由极大似然比原理知: 如果λ 取值太小, 说明H_0为真时观测到此样本$X_{(t)}, t = 1, \cdots, n$ 的概率比H_0 为不真时观测到此样本$X_{(t)}, t = 1, \cdots, n)$ 的概率要小得多.
- 故有理由认为H_0不成立,所以从似然比出发,以上检验问题的拒绝域为

$$W = \{\lambda < \lambda_\alpha\}.$$

定理3.2.1 当样本容量n很大时, 在正则的条件下,

$$-2\ln\lambda = -2\ln[\max_{\theta\in\Theta_0} L(X;\theta)/\max_{\theta\in\Theta} L(X;\theta)]$$

近似服从自由度为f的χ^2分布,$f = \Theta$的维数$-\Theta_0$的维数.

- **在正态总体的条件下，关于均值的检验问题：**

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

设样本的似然函数为$L(\mu, \Sigma)$, 似然比统计量

$$\lambda = \frac{\max_{\mu=\mu_0, \Sigma>0} L(\mu_0, \Sigma)}{\max_{\mu, \Sigma>0} L(\mu, \Sigma)}.$$

由第二章的结果知，当$\widehat{\mu} = \overline{X}$, $\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n}A$ 时，$L(\mu, \Sigma)$ 达到最大且

$$\max_{\mu, \Sigma>0} L(\mu, \Sigma) = (2\pi e)^{-np/2} \left| \frac{1}{n} A \right|^{-n/2}.$$

当$\mu=\mu_0$ 已知时，$L(\mu_0,\Sigma)$ 在$\widehat{\Sigma}=\frac{1}{n}A_0$达到最大且

$$\max_{\mu,\Sigma>0} L(\mu,\Sigma)=(2\pi e)^{-np/2}\left|\frac{1}{n}A_0\right|^{-n/2},$$

其中，$A_0=\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\mu_0)(X_{(i)}-\mu_0)'$. 故似然比统计量为：

$$\lambda=\left(\frac{|A|}{|A_0|}\right)^{n/2},$$

其中，

$$A=\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\bar{X})(X_{(i)}-\bar{X})'.$$

可证得：

$$\frac{|A|}{|A_0|} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}T^2}$$

其中，

$$T^2 = n(n-1)(\bar{X}-\mu_0)'A^{-1}(\bar{X}-\mu_0) \overset{H_0\text{下}}{\sim} T^2(p, n-1)$$

拒绝域为:

$$\{\lambda < \lambda_\alpha\} \Leftrightarrow \{T^2 > T^2_\alpha\} \Leftrightarrow \{F > F_\alpha\},$$

且在H_0下，

$$F = \frac{n-p}{p}\frac{T^2}{n-1} \sim F(p, n-p)$$

似然比检验与前面结果一致!!

三、置信域与联立置信区间

1.置信域

由前面的讨论知

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \sim T^2(p, n-1)$$

或

$$F = \frac{n-p}{(n-1)p} T^2 \sim F(p, n-p)$$

则均值向量μ的置信度为$1-\alpha$的置信域为

$$n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \leq \frac{(n-1)p}{n-p} F_\alpha$$

该置信域是一个中心在$\bar{X}$的椭球.

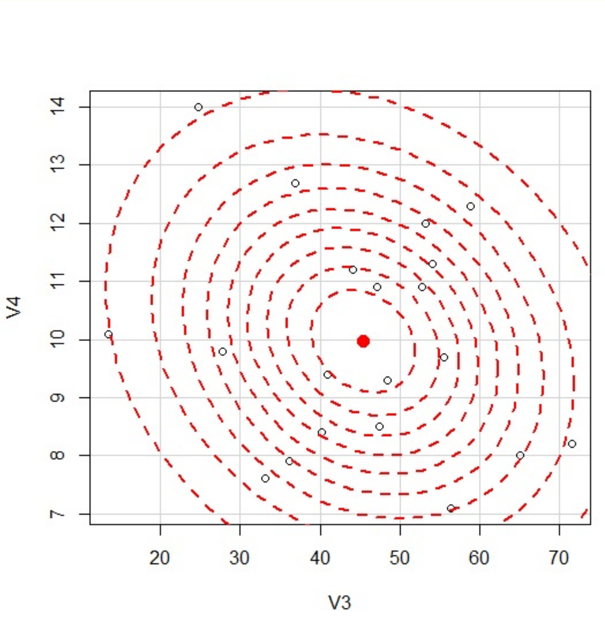
置信椭球的计算

- 由样本计算$S=\frac{1}{n}A$;
- 计算S的特征根$\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, 和对应的特征向量$l_1,\ldots,l_p$;
- 由谱分解可知，$S=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i l_i l_i'$;
- $T^2=n(\overline{X}-\mu)'S^{-1}(\overline{X}-\mu)=n\sum_{i=1}^{p}(\overline{X}-\mu)'\lambda_i^{-1}l_i l_i'(\overline{X}-\mu)$;
- $\Pr(T^2\le c^2)=1-\alpha$, $c^2=\frac{(n-1)p}{n-p}F_\alpha(p,n-p)$;
- 令$Y_i=(\overline{X}-\mu)'l_i$;
- 置信椭球为

$$\frac{Y_1^2}{\lambda_1}+\cdots+\frac{Y_p^2}{\lambda_p}\le c^2.$$

例2：(置信域) 椭圆置信域R实现。已经将数据存入“ex331.txt” 文件。

- 加载car包(包括MASS, nnet);
- $X < -read.table(''ex331.txt'', header = T)$ #将数据读入;
- $attach(X)$
- $dataEllipse(V3, V4, levels = 0.1 * 1 : 9, lty = 2)$


V4
V3
14
13
12
11
10
9
8
7
20
30
40
50
60
70

2.联立置信区间

(1) $a'\mu$的置信区间

显然，$a'\overline{X} \sim N(a'\mu, a'\Sigma a/n)$.

- Σ 已知，采用正态区间，即枢轴量为

$$Z = \frac{a'(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{a'\Sigma a/n}} \sim N(0, 1).$$

置信区间为

$$a'\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{a'\Sigma a/n} \leq a'\mu \leq a'\overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{a'\Sigma a/n}.$$

- Σ 未知，采用t区间，即枢轴量为

$$t = \frac{a'(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{a'Sa/n}} = \frac{a'(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{a'\Sigma a/n}} \Big/ \sqrt{\frac{a'Aa}{a'\Sigma a} \Big/ (n-1)} \sim t(n-1).$$

置信区间为

$$a'\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{a'Sa/n} \le a'\mu \le a'\overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{a'Sa/n}.$$

当$a = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ 时, 给出μ_i的置信区间.

- Σ 未知，采用F区间，即枢轴量为

$$t^2 = \left(\frac{a'(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{a'Sa/n}}\right)^2 = \left(\frac{a'(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{a'\Sigma a/n}}\right)^2 \Big/ \left(\frac{a'Sa}{a'\Sigma a}\right) \sim F(1, n-1).$$

置信区间为

$$a'\overline{X} - \sqrt{F_\alpha}\sqrt{a'Sa/n} \le a'\mu \le a'\overline{X} + \sqrt{F_\alpha}\sqrt{a'Sa/n}.$$

其中：F_α为$F_\alpha(1, n-1)$.

当$a = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ 时, 给出μ_i的置信区间.

(2) $a'\mu$最大置信区间的构作

$$t^2 = \left(\frac{a'(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{a'Sa/n}}\right)^2$$

其大小随着a的变化而变化，由高等代数知道可知, 当a与$S^{-1}(\overline{X}-\mu)$成比例时, $\left(\frac{a'(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{a'Sa/n}}\right)^2$ 达到极大值, 即有,

$$\max_{a\neq 0} t^2 = \max_{a\neq 0}\left(\frac{a'(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{a'Sa/n}}\right)^2 = n(\overline{X}-\mu)'S^{-1}(\overline{X}-\mu) \widehat{=} T^2$$

记c满足

$$\Pr(T^2 \le c^2) = 1 - \alpha,$$

即

$$\Pr\left(\frac{n-p}{(n-1)p}T^2 \le \frac{n-p}{(n-1)p}c^2\right) = 1 - \alpha,$$

有$c^2 = F_\alpha(p, n-p) \cdot \frac{(n-1)p}{n-p}$.

对于任意的$a \neq 0$,

$$\Pr(t^2 \leq c^2) \geq \Pr(T^2 \leq c^2) = 1 - \alpha.$$

即置信区间为

$$a'\overline{X} - c\sqrt{a'Sa/n} \leq a'\mu \leq a'\overline{X} + c\sqrt{a'Sa/n}.$$

其中：$c^2 = F_\alpha(p, n-p) \cdot \frac{(n-1)p}{n-p}$.

定理3.2.2 假设$X_{(t)}, t = 1, \cdots, n$ 为来自p 元正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$ $(\Sigma > 0, \Sigma$未知$)$的样本,则对所有的a, 在$1-\alpha$置信水平下，包含$a'\mu$的T^2区间为:

$$[a'\bar{X} - d, a'\bar{X} + d],$$

其中, $d = \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_\alpha a'Sa}.$

例如，当$a = e_i \widehat{=} (0, \ldots, 1, \ldots, 0)'$ 时, 则$\mu_i = e_i'\mu$的置信度均为$1-\alpha$ 的T^2 区间为

$$\bar{x}_i - c\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{x}_i + c\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \qquad \text{其中} c = \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_\alpha}$$

其中s_{ii}为样本协方差阵S的第i个对角元素.

(3) 联合置信区间

记

$$D_i = \left(\overline{X}_i - c_i\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \leq \mu_i \leq \overline{X}_i - c_i\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}\right), \ i = 1, \ldots, p.$$

其中：$c_i = \sqrt{F_{\alpha_i}(p, n-p) \cdot \frac{(n-1)p}{n-p}}$. 若$\Pr(D_i) = \alpha_i$ 且

$$\Pr(D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p) = 1 - \alpha,$$

则称$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p$ 为μ在显著水平$1-\alpha$下的联合置信区间。

- D_i 独立，取$\Pr(D_i) = (1-\alpha)^{1/p}$，

$$\Pr(D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p) = \Pi_{i=1}^p \Pr(D_i) = 1-\alpha$$

由此$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p$为置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

- D_i 不独立，取$\Pr(D_i) = 1-\alpha/p$，

$$\begin{aligned}\Pr(D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p) &= 1-\Pr(\overline{D}_1 \bigcup \cdots \bigcup \overline{D}_p) \\ &\geq 1-\sum_{i=1}^{p} \Pr(\overline{D}_i) = 1-\alpha.\end{aligned}$$

由此$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_p$为置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

3.3 多总体均值向量的检验

一、两正态总体均值向量的检验

- $X_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 为来自总体$X \sim N_p(\mu^{(1)}, \Sigma)$的随机样本，
- $Y_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \cdots, m)$为来自总体$Y \sim N_p(\mu^{(2)}, \Sigma)$的随机样本，
- 两者相互独立.

考虑假设问题

$$H_0 : \mu^{(1)} = \mu^{(2)}, \quad H_1 : \mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}.$$

1.两总体协方差阵相等(但未知)时均值向量的检验($\Sigma_1 = \Sigma_2$)

检验统计量

$$T^2 = \frac{nm}{n+m}(\bar{X}-\bar{Y})'\left(\frac{A_1+A_2}{n+m-2}\right)^{-1}(\bar{X}-\bar{Y})$$

其中A_1和A_2是两总体的样本离差阵.

在H_0为真时,$T^2 \sim T^2(p, n+m-2)$.

$$F = \frac{(n+m-2)-p+1}{(n+m-2)p}T^2 \sim F(p, n+m-p-1)$$

拒绝域$W = \{F > F_\alpha(p, n+m-p-1)\}$

例3: 检验

$$H_0 : \mu^{(1)} = \mu^{(2)}, \quad H_1 : \mu^{(1)} \neq \mu^{(2)},$$

其中，数据见“ex331.txt”文件。

Σ未知, 但相等时，均值向量的检验R处理方法:

- 加载ICSNP包(包括mvtnorm, ICS, survey);
- $X <- read.table("ex331.txt", header = T)$ #将数据读入;
-
    - $X1 <- X[1:10, 2:5]$
    - $X2 <- X[11:20, 2:5]$
    - $HotellingsT2(X1, X2)$

```
        Hotelling's two sample T2-test

data:  X1 and X2
T.2 = 6.2214, df1 = 4, df2 = 15, p-value = 0.003706
alternative hypothesis: true location difference is not equal to c(0,0,0,0)
```

2.两总体协方差阵不等时均值向量的检验($\Sigma_1 \neq \Sigma_2$)

(1)当$m = n$时,令

$$Z_{(i)} = X_{(i)} - Y_{(i)} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

将两个总体转化为单个总体的均值向量的检验

$$H_0: \mu^{(1)} = \mu^{(2)} \Longleftrightarrow H_0: \mu_Z = 0_p$$

(2)当$m \neq n$时,不妨设$n < m$:令

$$Z_{(i)} = X_{(i)} - \sqrt{\frac{n}{m}} Y_{(i)} + \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{j=1}^{n} Y_{(j)} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} Y_{(j)}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

可以证明:

$$E(Z_{(i)}) = \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$$

$$\mathrm{Cov}(Z_{(i)}, Z_{(j)}) = \begin{cases} \Sigma_1 + \frac{n}{m}\Sigma_2, & \text{当} i = j; \\ 0 & \text{当} i \neq j; \end{cases} \overset{def}{=} \Sigma_Z \delta_{ij}$$

所以$Z_{(i)} \sim N_p(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}, \Sigma_Z)$ $(i = 1, \cdots, n)$,且相互独立.

转化为单个总体均值向量的检验!!

二、多个正态总体均值向量的检验–多元方差分析

设有k个正态总体$N_p(\mu^{(t)},\Sigma)$ $(t=1,\cdots,k)$,随机样本$X_{(\alpha)}^{(t)}$ $(t=1,\cdots,k,\ \alpha=1,\cdots,n_t)$且相互独立,考虑假设问题

$H_0:\mu^{(1)}=\mu^{(2)}=\cdots\mu^{(k)}, H_1:$ 至少存在$i\neq j$,使得$\mu^{(i)}\neq\mu^{(j)}$

记

$$n=\sum_{t=1}^{k}n_t,\quad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_t}X_{(j)}^{(t)},\quad \bar{X}^{(t)}=\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}X_{(j)}^{(t)}\quad (t=1,\cdots,k)$$

总离差阵

$$T=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{(j)}^{(i)}-\bar{X})(X_{(j)}^{(i)}-\bar{X})'$$

组内离差阵

$$A=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{(j)}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})(X_{(j)}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})'=\sum_{i=1}^{k}A_i$$

组间离差阵

$$B=\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{X}^{(i)}-\bar{X})(\bar{X}^{(i)}-\bar{X})'$$

离差阵分解式

$$T=A+B$$

用似然比原理得到H_0的检验统计量为

$$\Lambda = \frac{|A|}{|A+B|} = \frac{|A|}{|T|}$$

易见

1. $A_i \sim W_p(n_i - 1, \Sigma)$且相互独立,$(i = 1, \cdots, k)$,由可加性得
$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \sim W_p(n-k, \Sigma)$$
2. 在H_0下, $T \sim W_p(n-1, \Sigma)$.
3. 还可证明在H_0下,$B \sim W_p(k-1, \Sigma)$,且B与A相互独立.

所以在H_0下,检验统计量

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n-k, k-1)$$

故拒绝域

$$W = \{\Lambda < \lambda_\alpha\}$$

例4：

$H_0: \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \cdots \mu^{(k)}, H_1:$ 至少存在$i \neq j$, 使得$\mu^{(i)} \neq \mu^{(j)}$,

其中数据见“ex332.txt” 文件。

下面是Σ未知时均值向量的检验R处理方法。

- $D332 < -read.table(''ex332.txt'', header = T)$ #将数据读入;
- $Y < -factor(gl(3, 20))$ #产生因子向量;
  - $X < -D332[1 : 4,]$
  - $MX < -as.matrix(X)$
  - $fit < -manova(MX\ Y)$
  - $summary(fit, test = ''Wilks'')$

	Df	Wilks	approx F	num Df	den Df	Pr(>F)
Y	2	0.66212	3.0907	8	108	0.003538 **
Residuals	57					

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

3.4 协方差阵的检验

一、单个正态总体协方差阵的检验

设$X_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 为来自正态总体$N_p(\mu, \Sigma)$, $(\Sigma > 0$末知$)$的随机样本,检验

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0(\Sigma_0 > 0) \Leftrightarrow H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0,$$

(1) 当$\Sigma_0 = I_p$时检验：$H_0 : \Sigma = I_p \Leftrightarrow H_1 : \Sigma \neq I_p$.
采用似然比检验

$$\lambda_1 = \max_{\mu} L(\mu, I_p) / \max_{\mu, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma) = \exp\left\{-\frac{1}{2}tr(A)\right\} |A|^{n/2} \left(\frac{e}{n}\right)^{np/2},$$

当n 充分大时,

$$-2\ln\lambda_1 \sim_{approx.} \chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right).$$

(2) 当$\Sigma_0 \neq I_p$时检验：$H_0: \Sigma = \Sigma_0 > 0 \Leftrightarrow H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$.

$\Sigma_0 > 0$, 即存在非退化矩阵D, 使得$D\Sigma_0 D' = I_p$. 令$Y_\alpha = DX_\alpha$, $\alpha = 1, \cdots, n$. 有

$$Y_\alpha \sim N_p(D\mu, D\Sigma D') \widehat{=} N_p(\mu^*, \Sigma^*)$$

检验$H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 等价于$H_0: \Sigma^* = I_p$. 仍采用似然比检验

$$\lambda_2 = \max_{\mu} L(\mu, I_p) / \max_{\mu, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma) = \exp\left\{-\frac{1}{2} tr(A^*)\right\} |A^*|^{n/2} \left(\frac{e}{n}\right)^{np/2},$$

其中：$A^* = DAD'$. 当n 充分大时,

$$-2\ln\lambda_2 \sim_{approx.} \chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}\right).$$

(3) 当$\Sigma_0=\sigma^2\Sigma_0$ (σ^2 未知)时检验：$H_0:\Sigma=\sigma^2\Sigma_0$.

当$\Sigma_0=I_p$时, 此检验常称为球性检验.

仍采用似然比检验

$$\lambda_3=\max_{\mu,\sigma^2>0}L(\mu,\sigma^2\Sigma_0)/\max_{\mu,\Sigma>0}L(\mu,\Sigma)=\frac{|\Sigma_0^{-1}A|^{-n/2}}{[tr(\Sigma_0^{-1}A)/p]^{np/2}},$$

当n 充分大时,

$$-\left((n-1)-\frac{2p^2+p+2}{6p}\ln[(\lambda_3)^{2/n}]\right)\sim_{approx.}\chi^2\left(\frac{p(p+1)}{2}-1\right).$$

二、多总体协方差阵的检验

Question: Test for $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_m = \Sigma$.

Test Statistics:

$$\lambda_4 = \prod_{l=1}^{m} (|\mathbf{S}_l| / |\mathbf{S}_{pooled}|)^{(n_l - 1)/2},$$

where n_l is the sample size of the lth group and $\mathbf{S}_l$ is the lth group sample covariance matrix and $\mathbf{S}_{pooled}$ is the pooled sample covariance matrix given by

$$\mathbf{S}_{pooled} = \frac{1}{\sum_{l=1}^{m}(n_l - 1)} \sum_{l=1}^{m} (n_l - 1)\mathbf{S}_l.$$

It is shown by Box that

$$-2(1-b)\ln\lambda_4 \sim_{approx} \chi^2(\nu), \ \ \nu = p(p+1)(m-1)/2,$$

where $b = \left(\sum_{l=1}^{m}(n_l - 1)^{-1} - \left(\sum_{l=1}^{m}(n_l - 1)\right)^{-1}\right)\left(\frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(m-1)}\right).$

Question: Suppose that $X = (X_1', X_2', \ldots, X_r')' \sim N_p(\mu, \Sigma)$, how to test for the independence of X_i and X_j based on the observations $X_{(i)}$, $i = 1, \cdots, n$?

Let $\mathbf{A}_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, then the test question is equivalent to the following hypothesis

$$H_0 : \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}, i \neq j.$$

Based on ratio of likelihood, one can define the test statistics by

$$\Lambda = (|\mathbf{S}| / \prod_{i=1}^{r} |\mathbf{S}_{ii}|)^{n/2}$$

3.6 正态性检验

设$X_{(\alpha)} = (X_{\alpha 1}, \cdots, X_{\alpha p}, (\alpha = 1, \cdots, n)$ 是来自p元总体X的随机样本，试问总体X是否服从正态$N_p(\mu, \Sigma)$ 分布？

如果总体X是否服从正态$N_p(\mu,\Sigma)$分布，则有如下的结论：

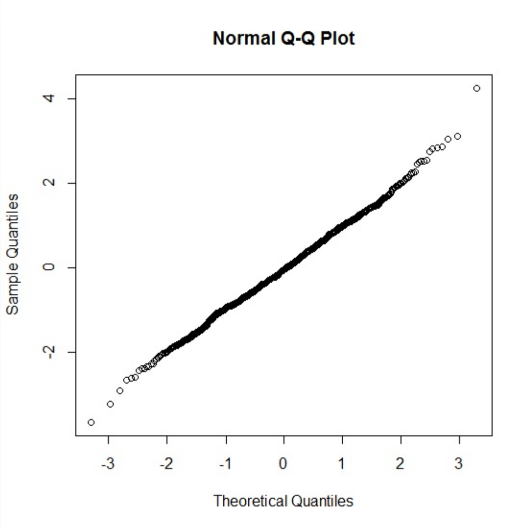
1. 每个分量X_i 服从正态分布
2. 任意两个分量(X_i,X_j) 服从二元正态分布
3. 对于任意的向量$l\neq 0$, 令$\xi=l'X$, 则$\xi\sim N_1(l'\mu,l'\Sigma l)$
4. 令$\eta=(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$, 则$\eta\sim\chi^2(p)$
5. 正态随机向量X的概率密度等高线为椭球

一、正态性检验(一维)

图示法:

首先, 通过绘制茎叶图(适用于小样本情形)或直方图(适用于样本量比较大的情形)初步了解数据的分布轮廓, 如果图形明显不对称, 则可以认为数据不服从正态分布, 当图形基本对称时, 继续采用3σ 原则检验法，或绘制$P-P$图和$Q-Q$图.

- Q-Q(Quantile-Quantile)图检验法, $Q-Q$图是用数据分布的分位数与所指定分布的分位数之间的关系所绘制的图形.



- 横轴(Theoretical quantile)： $q_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right), i = 1, \cdots, n.$
- 纵轴(sample quantile)： $x^*_{(i)}$ 为样本x_i的次序统计量.

判别方法： 通过$Q-Q$图可以检验数据是否符合指定的分布. 当数据符合指定分布时, $Q-Q$图中的各点近似呈一条直线. 当指定分布为正态分布时, 即给出有关正态分布检验的$Q-Q$图.

- P-P(Probability-Probability)图检验法, $P-P$图是根据变量的累积比例与指定分布的累积比例之间的关系所绘制的图形.

  判别方法: 通过$P-P$图可以检验数据是否符合指定的分布. 当数据符合指定分布时, $P-P$图中的各点近似呈一条直线. 当指定分布为正态分布时, 即给出有关正态分布检验的$P-P$图.

- 3σ 原则检验法(根据正态分布的对称性和3σ 准则给出的检验方法).

  判别方法: 满足正态分布的3σ 准则.

常用检验方法:

- χ^2 (Pearson)检验法(不是专门的正态检验方法，适用于一般连续或离散的随机变量分布拟合检验，见数理统计书);
- 科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)检验法(和χ^2 (Pearson)检验法相比，优点是不依赖于区间的分划);
- 偏峰检验法(略，用得不多，方法复杂);

- W(Shapiro-Wilk)检验:

$$W = (\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)})^2 / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2,\ a_i = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

和D(Kolmogorov-Smirnov)检验:

$$D = \sup x |F_n(x) - F(x)|,$$

其中，W检验适用于小样本, D检验适用于大样本.

- Anderson-Darling检验：

$$A^2 = n \int_R (F_n(x) - F(x))^2 (F(x)(1 - F(x)))^{-1} \, dF(x)$$

和Cramer-von Mises 检验：

$$W^2 = \int_R (F_n(x) - F(x))^2 \, dF(x).$$

R软件中nortest模块中有A^2, W^2 和Kolmogorov-Smirnov 检验这三个检验

- Kolmogorov-Smirnov检验：lillie.test(x)
- A^2 统计量：ad.test(x)
- W^2 统计量：cvm.test(x)

二、二元数据的正态性检验

- 等概椭园检验法
- 二元数据的χ^2 图检验法

三、p元数据的正态性检验

- χ^2 统计量的Q-Q图检验法（或P-P图检验法）
- 主成分检验法

- 其它方法

(1) Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. Biometrika 36:519-530.

(2) Small, N. J. H. (1980). Marginal skewness and kurtosis in testing multivariate normality. App. Stat. 29:85-87.

(3) Mecklin, C. J., Mundfrom, D. J. (2004). An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality. Int. Statist. Rev. 72:123-138.

(4) Baris Sürücü (2006) Goodness-of-Fit Tests for Multivariate Distributions. Comm. in Stat.(Theory and Methods). 35:1319-1331.