Compte-rendu de TD sur les séries de Volterra

Olivier Birot, Lucas Chaumeny

4 décembre 2019

Question 7

On a, pour s dans le domaine de définition de F_1 :

$$F_1(s) = \frac{1}{1 + s/\omega}$$

En remplaçant s, on obtient :

$$F_1(z) = F_1(S(z)) = \frac{1}{1 + \frac{1-z^{-1}}{\nu}}$$

soit :

$$F_1(z) = \frac{\nu}{\nu + 1 - z^{-1}}$$

Par définition, pour z dans le domaine de définition, $F_1(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n}}$ donc :

$$v \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} = (\nu + 1 - z^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$$

Soit $n > 0$, en invoquant l'égalité des coefficients devant le terme d'ordre n pour des séries entières, on obtient :

$$\nu u_n = (1 + \nu) y_n - y_{n-1}$$

donc,

$$y_n = (1 + \nu)^{-1} (\nu u_n + y_{n-1})$$

Question 8

```
// choix de la frequence de coupure
v = 2 * ma.PI * hslider("freq", 100, 20, 5000, 1) / ma.SR;
// contribution lineaire
F1 = * (v / (1+v)) : + ~ * (1 / (1+v));
```

Question 9

```
// choix de la frequence de coupure
v = 2 * ma.PI * hslider("freq", 100, 20, 5000, 1) / ma.SR;
// contribution lineaire
F1 = * (v / (1+v)) : + ~ * (1 / (1+v));
// etage d ordre 3
stage = (_ <: F1, ^(3)), _
        : (_ <: _, (^(3) : *(-1))), +
        : _, (+ :_: F1);
```

Question 10

```
// choix de la frequence de coupure
v = 2 * ma.PI * hslider("freq", 100, 20, 5000, 1) / ma.SR;
// contribution lineaire
F1 = * (v / (1+v)) : + ~ * (1 / (1+v));
// etage d ordre 3
stage = (_ <: F1, ^(3)), _
        : (_ <: _, (^(3) : *(-1))), +
        : _, (+ :_: F1);
// 4 etages
full = stage : stage : stage : stage;
```

Question 11

Pour détecter plus facilement les contributions non-linéaires, on utilise comme signal la somme de 2 signaux carrés de fréquences 100Hz et 110Hz, et on fixe la fréquence de coupure à 100Hz. Afin d'avoir un niveau d'écoute comparable quelque soit l'amplitude en entrée du filtre moog, un *drive* est mis en place afin que l'amplification globale soit constante.

```
// frequence de coupure
v = 2 * ma.PI * 100 / ma.SR;
// contribution lineaire
F1 = * (v / (1+v)) : + ~ * (1 / (1+v));

// etage d ordre 3
stage    = (_ <: F1, ^(3)), _
         : (_ <: _, (^(3) : *(-1))), +
         : _, (+ :_: F1);

// 4 etages
full = _, 0 : stage : stage : stage : stage : +;

// signaux carres
sig = +(os.square(100), os.square(110));

// drive
drive = hslider("drive", 1, 0.1, 1, 0.01);
out = sig : *(drive) : full : *(1/drive);
```

En augmentant progressivement l'amplitude en entrée, nous estimons que la distortion est perceptible à partir d'une amplitude de 0.36.

Le son obtenu est considéré comme réaliste tant que les contributions d'ordre 5 (non prises en compte par la simulation) sont négligeables. Nous venons d'estimer les contributions d'ordre 3 perceptibles à partir de $x = 0.36$, on recherche donc le seuil équivalent pour l'ordre 5 tel que $0.36^3 = x^5$, ce qui donne $x = (0.36^3)^(1/5) \approx 0.54$

Question 12

Le filtre complet est obtenu par opérations de concaténation de filtres $F1$ et de mises au cube (stables). $F1$ est numériquement stable si son écriture en z l'est car le schéma d'Euler implicite préserve la stabilité. $F1$ (numérique) est donc stable si les pôles de $F1(z)$ sont dans le disque unité ouvert, soit si $\frac{1}{1+\nu} < 1$, ce qui est vrai pour tout signal non constant. Le filtre complet est donc stable et cela pour tout $\omega > 0$.

Comme cela vaut pour tout ω dans le cadre numérique et que le schéma est réappliqué à chaque instant, l'on peut a priori faire varier ω sans remettre en cause la stabilité. Il reste néanmoins que ω ne peut être nul.